



# ÁLGEBRA RELACIONAL

Eduardo Ogasawara  
eogasawara@ieee.org  
<https://eic.cefet-rj.br/~eogasawara>

# ***Álgebra relacional***

---

- Álgebra relacional:
  - Conjunto básico de operações para o modelo relacional
- Expressão da álgebra relacional:
  - Sequência de operações da álgebra relacional
- O objetivo da álgebra relacional é permitir o cálculo de consultas declaradas com linguagens de nível mais alto no modelo relacional

# Álgebra relacional

- Linguagem procedural
- Operadores básicos:
  - seleção:  $\sigma$
  - projeção:  $\pi$
  - união:  $\cup$
  - interseção:  $\cap$
  - diferença de conjuntos:  $-$
  - produto cartesiano:  $\times$
  - junção:  $\bowtie$
  - agregação:  $\Gamma$
  - divisão:  $\div$
  - renomeação:  $\rho$
- Os operadores usam uma ou duas relações como entrada e produzem uma nova relação como resultado

## ***Esquema de exemplo usado***

---

- agencia (nomeAgencia, cidadeAgencia, ativo)
- cliente (nomeCliente, ruaCliente, cidadeCliente)
- conta (numeroConta, nomeAgencia\*, saldo)
- emprestimo (numeroEmprestimo, nomeAgencia\*, quantia)
- depositante (nomeCliente\*, numeroConta\*)
- tomador (nomeCliente\*, numeroEmprestimo\*)
- (\*) são chaves estrangeiras

## Operação seleção

- Notação:  $\sigma_p(R)$
- $p$  é chamado o predicado de seleção e  $R$  é o nome de uma relação
- Definida como:
$$\sigma_p(R) = \{t \mid t \in R \wedge p(t)\}$$
- Onde  $p$  é uma fórmula em cálculo proposicional consistindo em termos conectados por:  $\wedge$  (and),  $\vee$  (or),  $\neg$  (not)  
Cada termo pode ser:  
    <atributo>  $op$  <atributo> ou <constante>  
    onde  $op$  pode ser:  $=, \neq, >, \geq, <, \leq$
- Exemplo:
  - Trazer todas as informações das contas da agência Perryridge  
 $\sigma_{nomeAgencia="Perryridge"}(conta)$

## Operação seleção – exemplo

- Relação  $R$

a	b	c	d
$\alpha$	$\alpha$	1	7
$\alpha$	$\beta$	5	7
$\beta$	$\beta$	12	3
$\beta$	$\beta$	23	10

- $\sigma_{(a=b) \wedge (d>5)}(R)$

a	b	c	d
$\alpha$	$\alpha$	1	7
$\beta$	$\beta$	23	10

## Operação projeção

- Notação:

$$\pi_{a_1, a_2, \dots, a_k}(R)$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_k$  são nomes de atributo  
e  $R$  é um nome de uma relação

- O resultado é definido como a relação de  $k$  colunas obtidas excluindo-se as colunas que não estão listadas
- Linhas duplicadas são removidas do resultado, de modo que as relações sejam conjuntos
- Exemplo:
  - Trazer todos os números de conta e seus respectivos saldos

$$\pi_{numeroConta, saldo}(conta)$$

## Operação projeção – exemplo

- Relação R:

a	b	c
$\alpha$	10	1
$\alpha$	20	1
$\beta$	30	1
$\beta$	40	2

- $\pi_{a,c}(R)$

A	c
$\alpha$	1
$\beta$	1
$\beta$	2



## Operação união

- Notação:  $R \cup S$
- Definida como:
$$R \cup S = \{t \mid t \in R \vee t \in S\}$$
- Para que  $R \cup S$  seja válido:
  - $R$  e  $S$  precisam ser da mesma aridade (o mesmo número de atributos)
  - Os domínios de atributo precisam ser compatíveis (exemplo: 2a coluna de  $R$  lida com o mesmo tipo de valores que a 2a coluna de  $S$ )
- Exemplo:
  - Encontre todos os clientes com uma conta ou um empréstimo
$$\pi_{nomeCliente}(depositante) \cup \pi_{nomeCliente}(tomador)$$

## Operação união – exemplo

- Relações  $R, S$ :

R

a	b
$\alpha$	1
$\alpha$	2
$\beta$	1

S

a	b
$\alpha$	2
$\beta$	3

- $R \cup S$

a	b
$\alpha$	1
$\alpha$	2
$\beta$	1
$\beta$	3

## *Operação de interseção*

---

- Notação:  $R \cap S$
- Definida como:

$$R \cap S = \{ t \mid t \in R \wedge t \in S \}$$

- A interseção de conjuntos precisa de relações compatíveis
  - $R$  e  $S$  precisam ter a mesma aridade
  - os domínios de atributo de  $R$  e  $S$  precisam ser compatíveis

## Operação interseção – exemplo

▪ Relação  $R, S$ :

R

a	b
$\alpha$	1
$\alpha$	2
$\beta$	1

S

a	b
$\alpha$	2
$\beta$	3

▪  $R \cap S$

a	b
$\alpha$	2

## ***Operação de diferença***

---

- Notação  $R - S$
- Definida como:

$$R - S = \{t \mid t \in R \wedge t \notin S\}$$

- A diferença de conjuntos precisam de relações compatíveis
  - $R$  e  $S$  precisam ter a mesma aridade
  - os domínios de atributo de  $R$  e  $S$  precisam ser compatíveis

## Operação de diferença – exemplo

■ Relações  $R, S$ :

R

a	b
$\alpha$	1
$\alpha$	2
$\beta$	1

S

a	b
$\alpha$	2
$\beta$	3

■  $R - S$

a	b
$\alpha$	1
$\beta$	1

## Operação de produto cartesiano

- Notação  $R \times S$
- Definida como:

$$R \times S = \{t \ q \mid t \in R \wedge q \in S\}$$

- Considerando os atributos de  $R(\mathcal{R})$  e  $S(\mathcal{S})$ , o esquema de  $R \times S$  será composto por  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ 
  - Pode-se usar um apelido para diferenciar atributos com o mesmo nome nas relações diferentes
    - Ex.:
      - $R(a, b, c)$  e  $S(a, d)$
      - $R \times S$  (R.a, b, c, S.a, d)

## Operação de produto cartesiano – exemplo

### ■ Relações $R, S$

R

a	b
$\alpha$	1
$\beta$	2

S

c	d	e
$\alpha$	10	x
$\beta$	10	x
$\beta$	20	y
$\gamma$	10	y

### ■ $R \times S$

a	b	c	d	e
$\alpha$	1	$\alpha$	10	x
$\alpha$	1	$\beta$	10	x
$\alpha$	1	$\beta$	20	y
$\alpha$	1	$\gamma$	10	y
$\beta$	2	$\alpha$	10	x
$\beta$	2	$\beta$	10	x
$\beta$	2	$\beta$	20	y
$\beta$	2	$\gamma$	10	y



## ***Expressão Algébrica: definição formal***

- Uma expressão básica na álgebra relacional consiste em qualquer um dos seguintes:
  - Uma relação no banco de dados
  - Uma relação constante
- Seja  $E_1$  e  $E_2$  expressões de álgebra relacional; todas as expressões a seguir são de álgebra relacional:
  - $E_1 \cup E_2$
  - $E_1 - E_2$
  - $E_1 \times E_2$
  - $\sigma_p(E_1)$ ,  $p$  é um predicado nos atributos em  $E_1$
  - $\pi_S(E_1)$ ,  $S$  é uma lista consistindo em alguns dos atributos em  $E_1$

## Exemplo de expressão algébrica

- Relação

a	b	c	d	e
$\alpha$	1	$\alpha$	10	x
$\alpha$	1	$\beta$	10	x
$\alpha$	1	$\beta$	20	y
$\alpha$	1	$\gamma$	10	y
$\beta$	2	$\alpha$	10	x
$\beta$	2	$\beta$	10	x
$\beta$	2	$\beta$	20	y
$\beta$	2	$\gamma$	10	y

- $\sigma_{A=C}(R \times S)$

a	b	c	d	e
$\alpha$	1	$\alpha$	10	x
$\beta$	2	$\beta$	10	x
$\beta$	2	$\beta$	20	y

## Operação atribuição

- A operação atribuição ( $\leftarrow$ ) fornece uma maneira conveniente de expressar consultas complexas
- Escreva consulta como um programa sequencial consistindo em
  - uma série de atribuições
  - seguidas de uma expressão cujo valor é exibido como resultado da consulta
  - A atribuição precisa sempre ser feita para uma variável de relação temporária
- Exemplo:
  - $R \leftarrow (tomador \times emprestimo)$
  - $S \leftarrow \sigma_{tomador.numeroEmprestimo = emprestimo.numeroEmprestimo} (R)$

## Operação junção natural

- Notação:  $R \bowtie S$
- Sejam  $R$  e  $S$  relações nos esquemas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  respectivamente. Então,  $R \bowtie S$  é uma relação no esquema  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$  obtida desta forma:
  - Considere cada par de tuplas  $tr$  de  $R$  e  $ts$  de  $S$ .
  - Se  $tr$  e  $ts$  possuem o mesmo valor em cada um dos atributos em  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ , acrescente uma tupla  $t$  ao resultado, onde
    - $t$  possui o mesmo valor de  $tr$  em  $R$
    - $t$  possui o mesmo valor de  $ts$  em  $S$
- Exemplo:

- $R(\mathcal{R}) = (A, B, C, D)$

- $S(\mathcal{S}) = (E, B, D)$

- $\text{esquema}(R \bowtie S) = (A, B, C, D, E)$

- $R \bowtie S$  é definido como:

$$\pi_{r.A, r.B, r.C, r.D, s.E} (\sigma_{r.B = s.B \wedge r.D = s.D} (R \times S))$$

## Operação junção natural – Exemplo

■ Relações  $R, S$ :

R			
a	b	c	d
$\alpha$	1	$\alpha$	x
$\beta$	2	$\gamma$	x
$\gamma$	4	$\beta$	y
$\alpha$	1	$\gamma$	x
$\delta$	2	$\beta$	y

S		
b	d	e
1	x	$\alpha$
3	x	$\beta$
1	x	$\gamma$
2	y	$\delta$
3	y	$\varepsilon$

■  $R \bowtie S$

a	b	c	d	e
$\alpha$	1	$\alpha$	x	$\alpha$
$\alpha$	1	$\alpha$	x	$\gamma$
$\alpha$	1	$\gamma$	x	$\alpha$
$\alpha$	1	$\gamma$	x	$\gamma$
$\delta$	2	$\beta$	y	$\delta$

## ***Projeção generalizada***

- Estende a operação projeção permitindo que funções aritméticas sejam usadas na lista de projeção

$$\pi_{F_1, F_2, \dots, F_n}(E)$$

- $E$  é qualquer expressão de álgebra relacional
- Cada  $F_1, F_2, \dots, F_n$  é uma expressão aritmética envolvendo constantes e atributos no esquema de  $E$

## Funções e operações agregadas

- As funções agregadas tomam uma coleção de valores e retornam um único valor como resultado
  - *avg*: valor médio
  - *min*: valor mínimo
  - *max*: valor máximo
  - *sum*: soma dos valores
  - *count*: número de valores
- Operação agregada na álgebra relacional
- $G_1, G_2, \dots, G_n \Gamma_{F_1(a_1), F_2(a_2), \dots, F_m(a_m)}(E)$
- $E$  é qualquer expressão de álgebra relacional
  - $G_1, G_2, \dots, G_n$  uma lista de atributos em que agrupar (pode ser vazia)
  - Cada  $F_i$  é uma função agregada
  - Cada  $a_i$  é um nome de atributo

## Operação agregada – Exemplo

- Relação R:

a	b	c
$\alpha$	$\alpha$	7
$\alpha$	$\beta$	7
$\beta$	$\beta$	3
$\beta$	$\beta$	10

- $\Gamma_{sum(c)}(R)$

Sum (c)
27



## Operação agregada – Exemplo

- Relação *conta* agrupada por *nomeAgencia*:

nomeAgencia	numeroConta	soma
Perryridge	A-102	400
Perryridge	A-201	900
Brighton	A-217	750
Brighton	A-215	750
Redwood	A-222	700

- $\text{nomeAgencia} \Gamma_{\text{sum}(\text{saldo})}(\text{conta})$

nomeAgencia	sum(saldo)
Perryridge	1300
Brighton	1500
Redwood	700

## ***Funções agregadas (cont.)***

---

- O resultado da agregação não possui um nome
  - Pode usar a operação renomeação para fornecer-lhe um nome
  - Para conveniência, permitimos a renomeação como parte da operação agregada
  - $\text{nomeAgencia} \Gamma_{\text{sum}(\text{saldo}) \text{ as } \text{saldoSoma}}(\text{conta})$

## ***Junção externa***

---

- Uma extensão da operação junção que evita a perda de informações
- Calcula a junção e acrescenta ao resultado as tuplas de uma relação que não correspondem às tuplas na outra relação
- Usa valores nulos:
  - nulo significa que o valor é desconhecido ou inexistente
  - Todas as comparações envolvendo valores nulos são (grosseiramente falando) falsas por definição
    - Estudaremos o significado exato das comparações com nulos mais adiante

## ***Junção interna***

- Relação R

a	b
L-170	Red
L-230	Green
L-160	Blue

- $R \bowtie S$

a	b	c	d
L-170	Red	3000	Jones
L-230	Green	4000	Smith

- Relação S

b	c	d
Red	3000	Jones
Green	4000	Smith
Yellow	1000	Suzan

## ***Junção externa esquerda***

### ■ Relação R

a	b
L-170	Red
L-230	Green
L-160	Blue

### ■ $R \bowtie S$

a	b	c	d
L-170	Red	3000	Jones
L-230	Green	4000	Smith
L-160	Blue	null	null

### ■ Relação S

b	c	d
Red	3000	Jones
Green	4000	Smith
Yellow	1000	Suzan

## ***Junção externa direita***

### ■ Relação R

a	b
L-170	Red
L-230	Green
L-160	Blue

### ■ $R \bowtie S$

a	b	c	d
L-170	Red	3000	Jones
L-230	Green	4000	Smith
null	Yellow	1000	Suzan

### ■ Relação S

b	c	d
Red	3000	Jones
Green	4000	Smith
Yellow	1000	Suzan

## ***Junção externa integral***

### ■ Relação R

a	b
L-170	Red
L-230	Green
L-160	Blue

### ■ Relação S

b	c	d
Red	3000	Jones
Green	4000	Smith
Yellow	1000	Suzan

### ■ $R \bowtie S$

a	b	c	d
L-170	Red	3000	Jones
L-230	Green	4000	Smith
L-160	Blue	null	null
null	Yellow	1000	Suzan

## Operação divisão

- Notação:  $R \div S$
- Adequado para consultas que incluem a frase “para todo”
- Sejam  $R$  e  $S$  relações nos esquemas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  respectivamente, onde
  - $\mathcal{R} = (A_1 \dots, A_m, B_1, \dots, B_n)$
  - $\mathcal{S} = (B_1, \dots, B_n)$
  - O resultado de  $R \div S$  é uma relação no esquema
  - $\mathcal{R} - \mathcal{S} = (A_1 \dots, A_m)$
  - $R \div S = \{ t \mid t \in \pi_{\mathcal{R}-\mathcal{S}}(R) \wedge \forall u \in S (tu \in R) \}$
  - Onde  $tu$  significa a concatenação das tuplas  $t$  e  $u$  para produzir uma única tupla



## Operação divisão – Exemplo

- Relações R, S:

R

a	b
$\alpha$	1
$\alpha$	2
$\alpha$	3
$\beta$	1
$\gamma$	1
$\delta$	1
$\delta$	3
$\delta$	4
$\varepsilon$	6
$\varepsilon$	1
$\beta$	2

S

b
1
2

- $R \div S$ :

a
$\alpha$
$\beta$

## Outro exemplo de divisão

### ■ Relações R, S:

R

a	b	c	d	e
$\alpha$	x	$\alpha$	x	1
$\alpha$	x	$\gamma$	x	1
$\alpha$	x	$\gamma$	y	1
$\beta$	x	$\gamma$	x	1
$\beta$	x	$\gamma$	y	3
$\gamma$	x	$\gamma$	x	1
$\gamma$	x	$\gamma$	y	1
$\gamma$	x	$\beta$	y	1

### ■ $R \div S$ :

S

d	e
x	1
y	1

a	b	c
$\alpha$	x	$\gamma$
$\gamma$	x	$\gamma$

## ***Modificação do banco de dados***

---

- O conteúdo do banco de dados pode ser modificado usando as seguintes operações:
  - Exclusão
  - Inserção
  - Atualização
- Todas essas operações são expressas usando o operador de atribuição

## ***Exclusão***

---

- Uma requisição de exclusão é expressa semelhantemente a uma consulta, exceto que, em vez de exibir tuplas ao usuário, as tuplas selecionadas são removidas do banco de dados
- Pode excluir apenas tuplas inteiras; não pode excluir valores em atributos específicos
- Na álgebra relacional, uma exclusão é expressa por:
$$R \leftarrow R - E$$
- onde  $R$  é uma relação e  $E$  é uma consulta de álgebra relacional

## ***Inserção***

---

- Para inserir dados em uma relação:
  - especificamos uma tupla a ser inserida
  - escrevemos uma consulta cujo resultado é um conjunto de tuplas a serem inseridas
- Na álgebra relacional, uma inserção é expressa por:
$$R \leftarrow R \cup E$$
  - onde  $R$  é uma relação e  $E$  é uma expressão de álgebra relacional
- A inserção de uma única tupla é expressa fazendo  $E$  ser uma relação constante contendo uma tupla

## ***Exercício #1***

---

- Encontre todos os empréstimos de mais de US\$ 1200
  - `emprestimo (numeroEmprestimo, nomeAgencia, quantia)`

$\sigma_{quantia} > 1200$  (*emprestimo*)

## ***Exercício #2***

- Encontre o número de empréstimo para aqueles com quantia maior que US\$ 1200
  - `emprestimo (numeroEmprestimo, nomeAgencia, quantia)`

$\pi_{numeroEmprestimo}(\sigma_{quantia > 1200} (emprestimo))$

### ***Exercício #3***

---

- Encontre os nomes de todos os clientes que têm um empréstimo, uma conta, ou ambos, do banco
  - depositante (nomeCliente, numeroConta)
  - tomador (nomeCliente, numeroEmprestimo)

$$\pi_{nomeCliente}(tomador) \cup \pi_{nomeCliente}(depositante)$$



## ***Exercício #4***

- Encontre os nomes de todos os clientes que têm um empréstimo e uma conta no banco
  - depositante (nomeCliente, numeroConta)
  - tomador (nomeCliente, numeroEmprestimo)

$$\pi_{nomeCliente}(tomador) \cap \pi_{nomeCliente}(depositante)$$

## ***Exercício #5***

- Encontre o nome de todos os clientes que têm um empréstimo no banco e descubra a quantia do empréstimo
  - *emprestimo* (*numeroEmprestimo*, *nomeAgencia*, *quantia*)
  - *tomador* (*nomeCliente*, *numeroEmprestimo*)

$\pi_{nomeCliente, numeroEmprestimo, quantia}(tomador \bowtie emprestimo)$

## ***Exercício #6***

---

- Dada a relação  $\text{infoCredito}(\text{nomeCliente}, \text{limite}, \text{saldoCredito})$ , descubra quanto mais cada pessoa pode gastar:

$$\pi_{\text{nomeCliente}, \text{limite} - \text{saldoCredito}}(\text{infoCredito})$$

## ***Exercício #7***

- Encontre todos os clientes que têm uma conta em todas as agências localizadas na cidade de Brooklyn
  - *agencia* (*nomeAgencia*, *cidadeAgencia*, *ativo*)
  - *conta* (*numeroConta*, *nomeAgencia*, *saldo*)
  - *depositante* (*nomeCliente*, *numeroConta*)

$$\pi_{\text{nomeCliente}, \text{nomeAgencia}} (\text{depositante} \bowtie \text{conta}) \div \\ \pi_{\text{nomeAgencia}} (\sigma_{\text{cidadeAgencia} = \text{"Brooklyn"}}(\text{agencia}))$$

## ***Exercício #8***

---

- Exclua todos os registros de conta na agência Perryridge
  - $\text{conta}(\text{numeroConta}, \text{nomeAgencia}, \text{saldo})$

$\text{conta} \leftarrow \text{conta} - \sigma_{\text{nomeAgencia} = \text{"Perryridge"}}(\text{conta})$

## Exercício #9

- Insira informações no banco de dados especificando que Smith possui US\$ 1200 na conta A-973 na agência Perryridge
  - $\text{conta}(\text{numeroConta}, \text{nomeAgencia}, \text{saldo})$

$\text{conta} \leftarrow \text{conta} \cup \{(A - 973, \text{"Perryridge"}, 1200)\}$   
 $\text{depositante} \leftarrow \text{depositante} \cup \{(\text{"Smith"}, A - 973)\}$

# Referências

