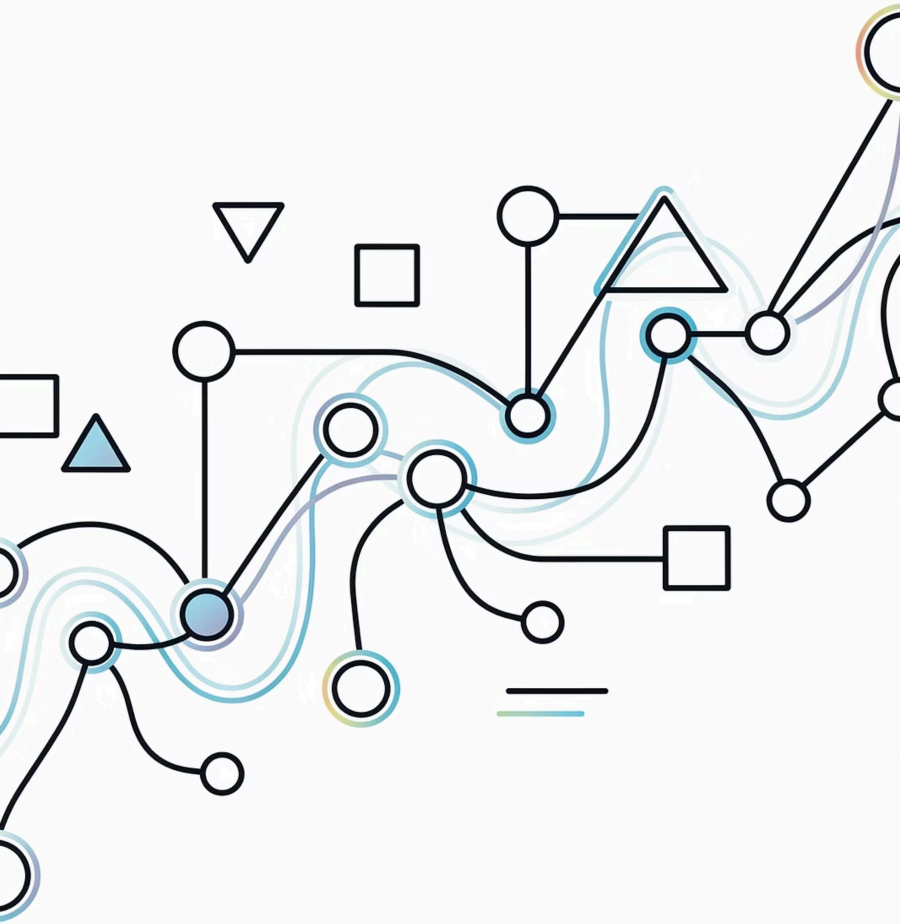


Por que Estender os Modelos Lineares

Desvendando a complexidade das séries temporais para uma análise mais profunda e precisa.

Eduardo Ogasawara

eduardo.ogasawara@cefet-rj.br

https://eic.cefet-rj.br/~eogasawara

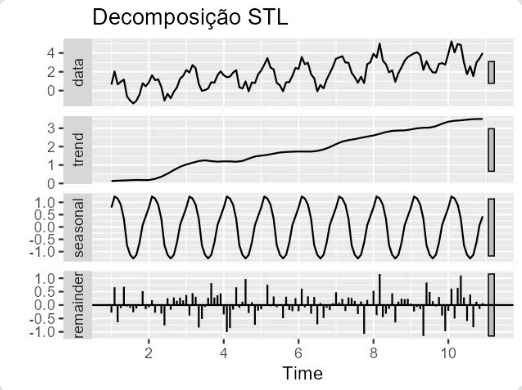
Limitações dos Modelos Lineares

Modelos ARIMA descrevem dependência temporal linear e supõem estacionariedade após diferenciação. Eles assumem variância constante ao longo do tempo, mas não capturam estruturas temporais complexas.

Séries reais exibem sazonalidade, não linearidade e variância variável. Modelos lineares são um ponto de partida poderoso, mas limitado. Quando a série apresenta padrões mais ricos — como ciclos, mudanças de variância ou relações não lineares — precisamos ampliar o modelo.

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Sazonalidade como Estrutura Periódica



Sazonalidade representa a repetição regular de padrões no tempo. O comportamento estatístico se repete a cada s períodos.

Uma série é sazonal quando a média se repete ao longo do tempo:

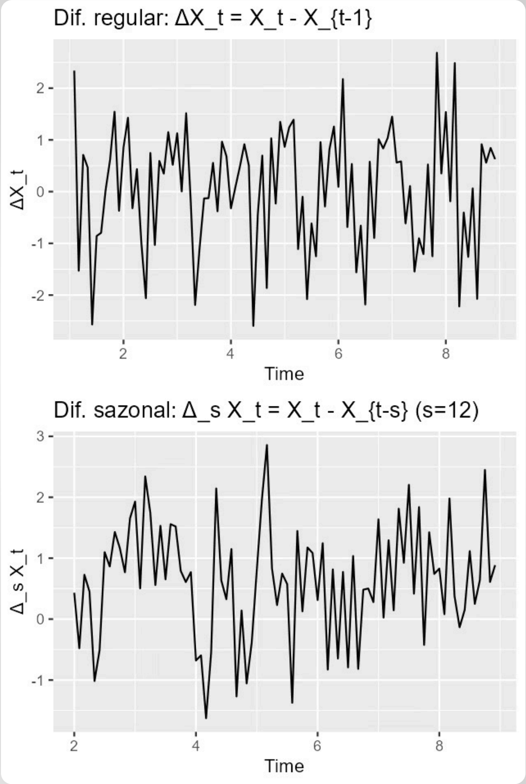
$$E[X_t] = E[X_{t+s}]$$

A decomposição da série mostra três componentes distintos:

$$X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$$

Símbolos

- X_t = valor da série no tempo t
- T_t = componente de tendência
- S_t = componente sazonal
- ε_t = ruído aleatório
- s = período sazonal



Diferenciação Sazonal

Diferença Regular

Remove padrões persistentes e tendências lineares

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

Diferença Sazonal

Remove padrões periódicos que se repetem

$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s}$$

Enquanto a diferença regular remove tendências, a diferença sazonal remove padrões periódicos. Se a série repete o comportamento a cada s períodos, subtrair X_{t-s} elimina esse padrão estrutural.

MODELO SARIMA

SARIMA: ARIMA com Estrutura Sazonal

SARIMA combina dinâmica regular e sazonal em um único modelo integrado. A forma conceitual do modelo integra componentes autorregressivos, diferenciação e médias móveis em duas escalas temporais:

> (parte AR regular + parte AR sazonal + diferenças) = (parte MA regular + parte MA sazonal + ruído)

P

S

p, d, q

Ordens AR, diferenciação e MA regulares

P, D, Q

Ordens AR, diferenciação e MA sazonais

s

Período sazonal da série

Notação completa: **SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)(s)**

O SARIMA estende o ARIMA ao incorporar dependência sazonal, descrevendo simultaneamente relações de curto prazo e padrões periódicos.

Error uploading image.

ACF e PACF em Séries Sazonais

A função de autocorrelação (ACF) mede correlação entre X_t e X_{t-h}. Em séries sazonais, há picos em múltiplos de s:

$$\rho(h) \text{ alto quando } h = k \cdot s$$

Onde $\rho(h)$ é a autocorrelação na defasagem h , k é um número inteiro e s é o período sazonal.

Se a série é sazonal, a autocorrelação reaparece nas defasagens múltiplas do período. Isso ajuda a identificar componentes sazonais AR e MA.

METODOLOGIA

Identificação de Modelos SARIMA

Verificar Estacionariedade

Analisar se a série possui média e variância constantes ao longo do tempo

Aplicar Diferenças

Aplicar diferenças regulares e sazonais conforme necessário

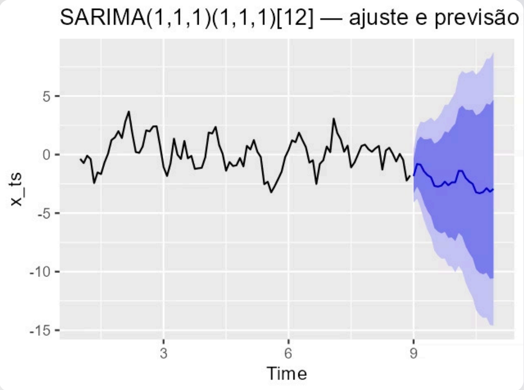
Analisar ACF e PACF

Examinar padrões de autocorrelação para identificar ordens do modelo

A série transformada é expressa como:

$$Y_t = \Delta^d \Delta_s^D X_t$$

Onde Y_t é a série transformada, d é a ordem de diferença regular e D é a ordem de diferença sazonal. A identificação do SARIMA segue a lógica de Box–Jenkins, mas considerando dois tipos de padrões: regulares e sazonais.



Exemplo de SARIMA

Considere o modelo $\mathrm{SARIMA}(1,1,1)(1,1,1)_s$, que captura dependência local e sazonal simultaneamente.

AR Regular

Captura dependência de curto prazo entre observações consecutivas

AR Sazonal

Captura dependência periódica entre observações separadas por s períodos

Diferenças

Remove não estacionariedade regular e sazonal da série

Esse modelo combina quatro mecanismos fundamentais: dependência regular, dependência sazonal, diferença regular e diferença sazonal. Ele é uma generalização estrutural do ARIMA tradicional.

REGRESSÃO TEMPORAL

Regressão com Erros Temporais

A série pode depender de variáveis explicativas externas. O modelo combina regressão com dependência temporal:

$$X_t = \beta_0 + \beta \cdot Z_t + u_t$$

Símbolos

- X_t = série de interesse
- Z_t = vetor de variáveis explicativas
- β_0, β = coeficientes
- u_t = erro temporal

Aqui combinamos regressão com dependência temporal. O erro não é aleatório simples, mas segue um processo temporal (ARMA ou ARIMA).

Modelos Dinâmicos

O efeito das variáveis pode ser distribuído no tempo. O impacto de uma variável pode não ser imediato:

$$X_t = \beta_0 + \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_k Z_{t-k} + u_t$$

Efeito Imediato

Impacto de Z_t no tempo presente

Efeitos Defasados

Impactos de Z_{t-1}, Z_{t-2}, etc.

Propagação Temporal

Efeitos acumulados ao longo do tempo

Onde Z_{t-k} é a variável explicativa defasada e β_k é o coeficiente da defasagem k. Modelos dinâmicos capturam efeitos retardados e propagação temporal.

SARIMA com Regressão

SARIMAX

Combinação de SARIMA e regressão, conhecida como SARIMAX (SARIMA com variáveis eXógenas)

Duas Dimensões

ARIMA explica dependência interna, enquanto regressão explica efeitos externos

Modelos modernos de séries temporais integram duas dimensões fundamentais: dinâmica própria da série e influência de fatores exógenos. Esta abordagem permite capturar tanto padrões internos quanto impactos de variáveis externas.

VOLATILIDADE

Heterocedasticidade Temporal

Em muitas séries, especialmente financeiras e econômicas, a variância muda ao longo do tempo:

$$\text{Var}(X_t) \neq \text{constante}$$

Variância Condicional

A variância depende da informação passada

$$\text{Var}(X_t|\text{passado}) = \sigma_t^2$$

Clusters de Volatilidade

Períodos de alta variância tendem a se agrupar no tempo

Onde σ_t^2 é a variância no tempo t. Em muitas séries, a média é estável, mas a variância muda significativamente.

Modelo ARCH

O modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) modela a variância como função de choques passados:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

Símbolos

- ε_t = erro no tempo t
- σ_t^2 = variância condicional
- α_i = parâmetros do modelo

O ARCH modela clusters de volatilidade: grandes choques geram períodos de alta variância que persistem no tempo.

Modelo GARCH

O GARCH (Generalized ARCH) é uma extensão do ARCH. A variância depende de choques *e* variâncias passadas:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Termo ARCH

$\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$ captura impacto de choques recentes

Termo GARCH

$\beta_1 \sigma_{t-1}^2$ captura persistência da volatilidade

Onde β_1 é o parâmetro da variância passada. O GARCH captura persistência da volatilidade: choques afetam a variância por longos períodos.

Propriedades do GARCH

Média Condicional Constante

A média esperada permanece estável ao longo do tempo

Variância Incondicional Finita

A variância de longo prazo converge para um valor finito

Caudas Pesadas

Maior probabilidade de eventos extremos comparado à distribuição normal

Clusters de Volatilidade

Períodos de alta volatilidade tendem a se agrupar temporalmente

O GARCH explica padrões empíricos típicos de séries financeiras, como alta volatilidade concentrada no tempo e distribuições com caudas mais pesadas que a normal.

Volatilidade e Eventos

Eventos podem alterar significativamente a variância da série:

$$\sigma_t^2 \neq \sigma_{t-h}^2$$

Onde h é a defasagem temporal.

Eventos não afetam apenas a média da série, mas também sua variância. Por isso, modelos de volatilidade são úteis para detecção de eventos e análise de risco.

Aplicação Prática: Modelos GARCH são amplamente utilizados em finanças para gestão de risco, precificação de opções e detecção de eventos de mercado.

ANÁLISE ESPECTRAL

Domínio da Frequência

Domínio do Tempo

Observa a série ao longo do tempo: X_t, X_{t+1}, X_{t+2} ...

Domínio da Frequência

Decompõe a série em componentes periódicas e ciclos

A análise no domínio da frequência revela ciclos e periodicidades ocultas. A ideia central é decompor a série em componentes periódicas, revelando estruturas que podem não ser evidentes no domínio do tempo.

Espectro e Autocovariância

Existe uma relação fundamental entre tempo e frequência. O espectro descreve como a variância se distribui entre diferentes frequências.

Autocovariância

Representa dependência temporal no domínio do tempo

Espectro

Representa dependência temporal no domínio da frequência

Autocovariância e espectro são duas formas equivalentes de representar dependência temporal. A transformada de Fourier conecta essas duas representações.

NÃO LINEARIDADE

Modelos Não Lineares

Modelos não lineares capturam relações complexas no tempo. Um exemplo importante são modelos com regimes, onde a dinâmica muda conforme o estado do sistema.

A ideia geral é expressa como:

$$X_t = f(\text{passado}) + \text{erro}$$

Modelos de Limiar

Dinâmica muda quando a série cruza um limiar específico

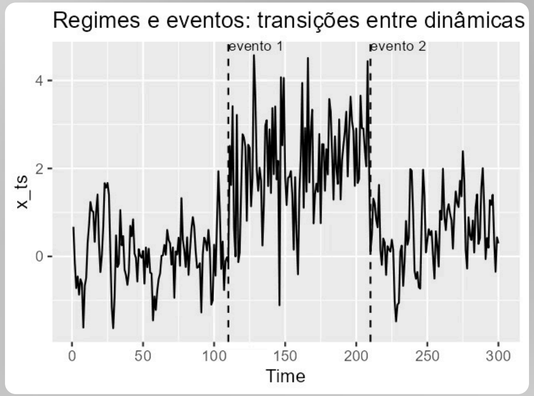
Modelos de Markov

Transições probabilísticas entre diferentes regimes

Transição Suave

Mudanças graduais entre diferentes dinâmicas

Onde $f(\cdot)$ é uma função não linear. Modelos não lineares permitem que a dinâmica da série mude conforme o estado do sistema.



Regimes e Eventos

Em modelos com múltiplos regimes, eventos correspondem a transições entre diferentes dinâmicas do processo:

$$k_t \neq k_{t-1}$$

Onde k_t representa o regime no tempo t.

Regime Normal

Baixa volatilidade e dinâmica estável

Transição

Mudança detectada no comportamento

Recuperação

Retorno gradual ao regime normal

Regime de Crise

Alta volatilidade e dinâmica alterada

Síntese da Teoria de Séries Temporais

A teoria de séries temporais é uma linguagem matemática para descrever, explicar e prever fenômenos que evoluem no tempo.

Fundamentos Probabilísticos

Base teórica: processos estocásticos, estacionariedade, autocorrelação

Estrutura da Série

Decomposição: tendência, sazonalidade, ciclos e ruído

Modelos e Previsão

ARIMA, SARIMA, regressão temporal, modelos dinâmicos

Extensões

Volatilidade (ARCH/GARCH), não linearidade, análise espectral

Eventos

Detecção de mudanças estruturais e transições de regime

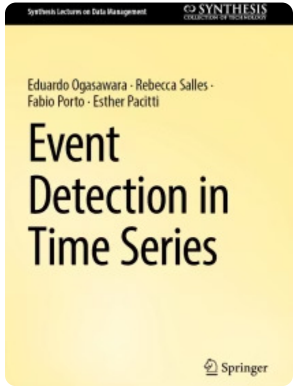
O fluxo conceitual completo:

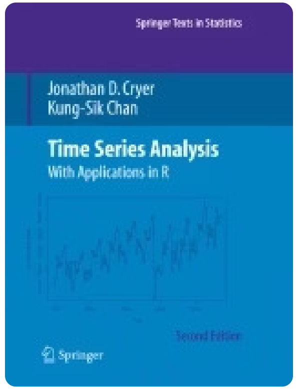
> **série → estrutura → modelo → previsão → eventos**

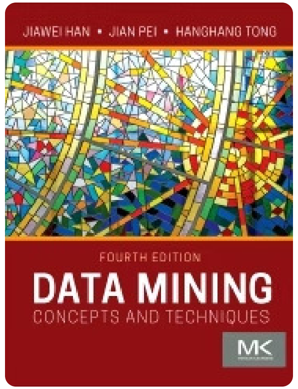
RECURSOS ACADÊMICOS

Referências Bibliográficas

Uma coleção cuidadosamente selecionada de obras fundamentais que abordam análise de séries temporais e mineração de dados.







Event Detection in Time Series

Ogasawara, E.; Salles, R.; Porto, F.; Pacitti, E. (2025). Publicação recente da Springer Nature Switzerland que explora técnicas avançadas de detecção de eventos em séries temporais.

Time Series Analysis: With Applications in R

Cryer, J. D.; Chan, K.-S. (2008). Obra clássica da Springer que combina fundamentação teórica sólida com implementações práticas.

Data Mining: Concepts and Techniques

Han, J.; Pei, J.; Tong, H. (2022). Quarta edição publicada pela Morgan Kaufmann que consolida conceitos fundamentais e técnicas avançadas de mineração de dados