

# Anomalias em Séries Temporais

Nesta apresentação, exploraremos o fascinante mundo das anomalias em séries temporais, entendendo o que são e como detectá-las.

Eduardo Ogasawara

[eduardo.ogasawara@cefet-rj.br](mailto:eduardo.ogasawara@cefet-rj.br)

<https://eic.cefet-rj.br/~eogasawara>

# Definição de Anomalia

Uma série temporal é um objeto composto por eventos. Dentro desse universo, a anomalia representa uma classe particular de evento, definida por um desvio significativo do comportamento esperado do processo.

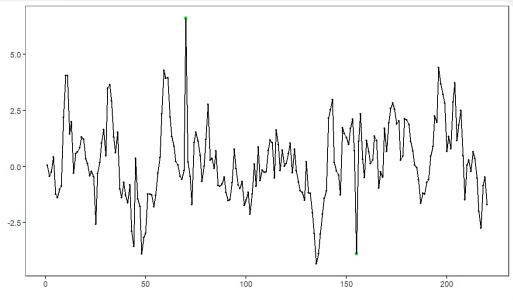
O conjunto de anomalias é sempre um subconjunto do conjunto total de eventos possíveis, caracterizado pela presença de desvios relevantes em relação ao padrão esperado.

$$X = \{x_t\}_{t=1}^T, \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{E}$$

Onde X representa a série temporal,  $x_t$  é o valor observado no tempo t, T é o comprimento da série, E é o conjunto de eventos, e A é o conjunto de anomalias.

CONCEITO FUNDAMENTAL

## Comportamento Típico e Anomalia



A noção de anomalia nasce da noção de comportamento típico. Um modelo temporal define o que é esperado, e a previsão condicional estabelece o comportamento esperado para cada instante.

O resíduo mede o desvio entre o observado e o esperado. Uma anomalia ocorre quando esse desvio não é compatível com o que o próprio modelo considera típico.

$$\hat{x}_t = \mathbb{E}(x_t | \mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{M}), \quad r_t = x_t - \hat{x}_t$$

Onde  $\mathcal{M}$  é o modelo temporal,  $\mathcal{F}_{t-1}$  é a informação disponível até  $t-1$ ,  $\hat{x}_t$  é o valor esperado, e  $r_t$  é o resíduo.

# Ruído, Evento e Anomalia

É fundamental distinguir três conceitos que frequentemente se confundem na análise de séries temporais:

## Ruído

A variabilidade "típica" do processo, representada por  $\varepsilon_t$ . É a flutuação esperada e inerente ao sistema.

## Evento

Uma perturbação adicional ao processo, representada por  $\delta_t$ . É um termo extra que representa uma perturbação estruturada.

## Anomalia

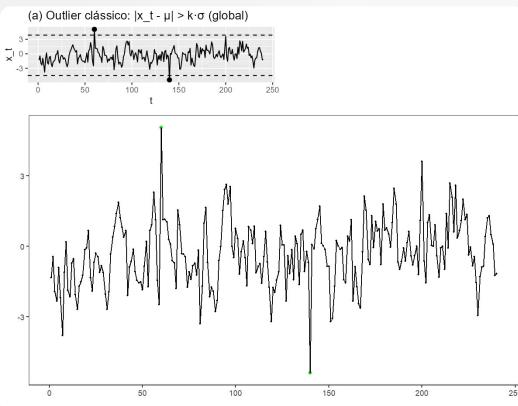
Um caso particular de evento onde o desvio resultante é estatisticamente significativo no contexto do modelo.

$$x_t = S_t + \varepsilon_t, \quad x_t = S_t + \varepsilon_t + \delta_t$$

Onde  $S_t$  é o sinal estruturado,  $\varepsilon_t$  é o ruído aleatório, e  $\delta_t$  é a perturbação associada ao evento. Toda anomalia é evento, mas nem todo evento é anomalia.

# Outliers e Anomalias Temporais

A distinção entre outliers clássicos e anomalias temporais é crucial para a análise correta de séries temporais.



## Outlier Clássico

Compara  $x_t$  com uma média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  globais, assumindo independência entre observações.

$$|x_t - \mu| > k\sigma$$

## Anomalia Temporal

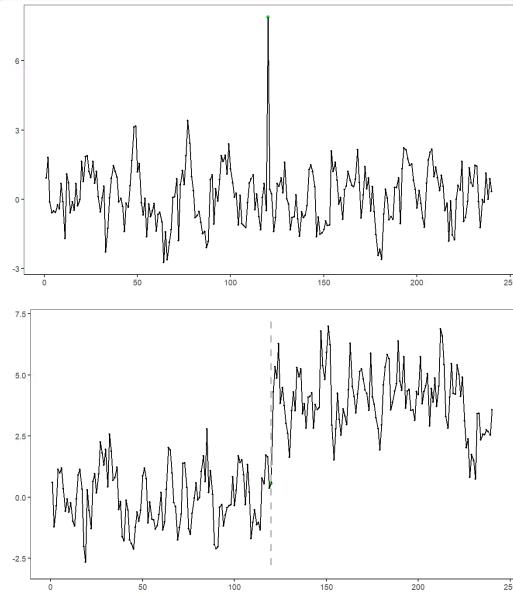
Considera a dependência temporal. O "típico" em  $t$  depende do histórico e do modelo, usando resíduos para medir desvios.

$$|r_t| > \tau$$

Em séries temporais, a abordagem clássica é inadequada porque ignora a estrutura de dependência. A definição temporal primeiro explica o esperado naquele instante e só depois mede o desvio.

# Anomalias vs Mudanças Estruturais

Um processo é definido por parâmetros que podem variar no tempo. É essencial distinguir entre anomalias e mudanças estruturais:



## Mudança Estrutural

Troca persistente de regime em  $\tau$ . O processo passa de  $\theta_1$  para  $\theta_2$  e permanece no novo regime. É um efeito global que altera a estrutura do processo.

## Anomalia

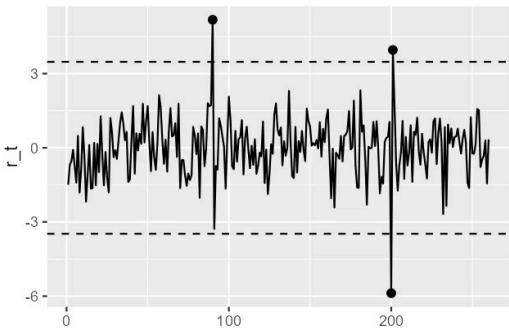
Desvio local com efeito restrito. Aparece como um desvio em um trecho específico, sem redefinir necessariamente o comportamento de longo prazo.

$$x_t \sim F_{\theta(t)}, \quad \theta(t) = \begin{cases} \theta_1, & t \leq \tau, \\ \theta_2, & t > \tau \end{cases}, \quad \theta_1 \neq \theta_2$$

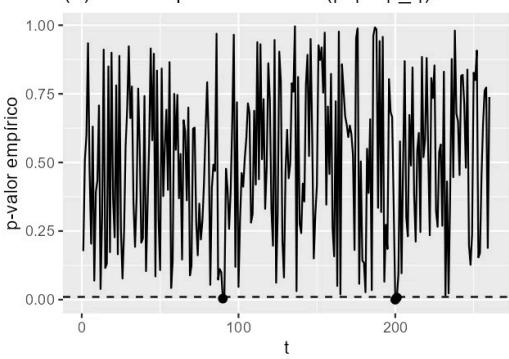
Onde  $F_{\theta(t)}$  é a distribuição do processo,  $\theta(t)$  são os parâmetros no tempo  $t$ , e  $\tau$  é o instante de mudança.

# Anomalias Estatísticas

(a) Critério por limiar:  $|r_t| > \lambda \cdot \sigma_r$



(b) Critério por raridade:  $P(|R_t| > |r_t|) < \alpha$



## Critério por Limiar

Usa um limiar proporcional ao desvio padrão dos resíduos, controlando sensibilidade via  $\lambda$ .

$$|r_t| > \lambda \sigma_r$$

## Critério por Raridade

Declara anomalia quando observar um desvio daquele tamanho seria muito improvável, controlando via  $\alpha$ .

$$\mathbb{P}(|R_t| > |r_t|) < \alpha$$

Onde  $\sigma_r$  é o desvio padrão dos resíduos,  $\lambda$  é o parâmetro de sensibilidade,  $R_t$  é a variável aleatória "resíduo", e  $\alpha$  é o nível de significância.

# Anomalias Distribucionais

Em vez de depender explicitamente de um modelo de previsão linear e de resíduos, a abordagem distribucional define o comportamento esperado pela distribuição condicional no tempo  $t$ .

Se o valor observado cai numa região de baixa densidade — isto é, "quase nunca acontece" sob  $F_t$  — ele é considerado anômalo. Esta definição generaliza a noção de anomalia para além de modelos lineares e resíduos.

$$x_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim F_t, \quad f_t(x_t) < \varepsilon$$

Onde  $F_t$  é a distribuição condicional no tempo  $t$ ,  $f_t(\cdot)$  é a densidade associada a  $F_t$ , e  $\varepsilon$  é o limiar de baixa densidade.

Isso amplia a noção de anomalia para cenários em que o objeto principal é a distribuição completa, não apenas a média condicional.

 TEMPORAL

## Anomalias Estruturais Locais

A anomalia estrutural local representa uma mudança na dinâmica do processo, mas limitada no tempo. O processo tem parâmetros "típicos"  $\theta_0$ , mas sofre uma alteração temporária em um intervalo específico.

Fora de  $[\tau_1, \tau_2]$  o processo se comporta como no regime  $\theta_0$ , e dentro do intervalo ele passa a outro regime. O ponto-chave é que o processo "volta" ao padrão original.

$$\theta(t) \approx \theta_0 \text{ para } t \notin [\tau_1, \tau_2], \quad \theta(t) \neq \theta_0 \text{ para } t \in [\tau_1, \tau_2]$$

Onde  $\theta_0$  é o parâmetro de referência, e  $\tau_1, \tau_2$  são o início e fim do intervalo anômalo. A alteração não redefine a série inteira como numa mudança estrutural global.

# Dependência da Representação

Um ponto metodológico fundamental: o que você chama de anomalia pode mudar quando você muda a representação do dado. A anomalia não é uma propriedade absoluta do dado, mas relativa ao espaço de representação adotado.

01

## Escolha da Representação

Você decide como transformar ou representar a série temporal original.

02

## Detecção no Espaço R

Anomalias são julgadas como "anômalas" no espaço  $R(x_t)$  escolhido.

03

## Conjuntos Diferentes

Diferentes representações geram conjuntos diferentes de anomalias detectadas.

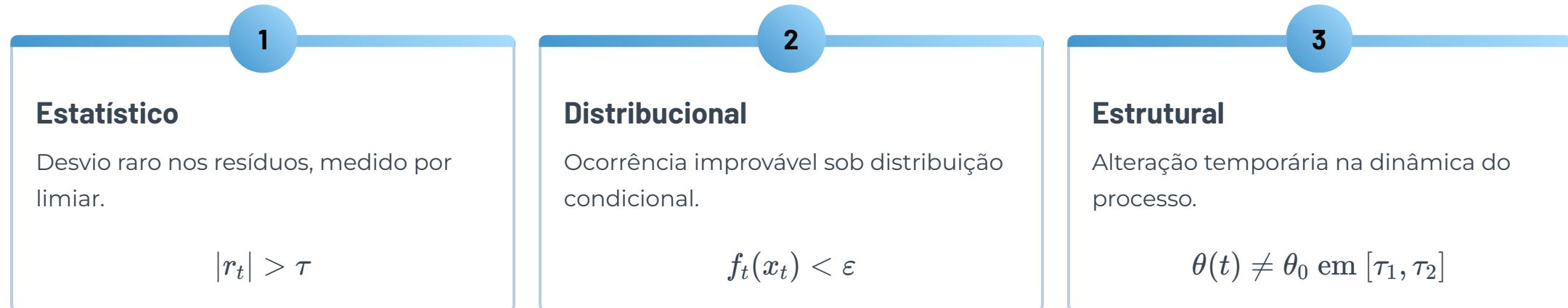
$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \{t \mid \mathcal{R}(x_t) \text{ é anômalo}\}$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_1) \neq \mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$$

A mesma série pode não ter anomalias nos valores brutos, mas ter anomalias nos resíduos, na tendência, ou em outra transformação.

# Três Níveis de Formalização

A síntese organiza a noção de anomalia em três "portas de entrada" complementares que formam um conjunto unificado:



$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{stat} \cup \mathcal{A}_{dist} \cup \mathcal{A}_{struct}$$

Essas definições não são mutuamente exclusivas; elas formam um conjunto unificado por união, onde  $\mathcal{A}_{stat}$  são anomalias estatísticas,  $\mathcal{A}_{dist}$  são anomalias distribucionais, e  $\mathcal{A}_{struct}$  são anomalias estruturais.

# Escala Temporal das Anomalias

---

## Anomalia Local

Restrita a uma janela temporal específica. Seu impacto está concentrado numa vizinhança do tempo  $\tau$ .

$$t \in [\tau - w, \tau + w]$$

Em geral, anomalias são locais por definição. Quando o fenômeno se torna global, ele deixa de ser "anomalia local" e se aproxima de uma mudança estrutural.

Onde  $w$  é a meia-largura da janela local,  $\tau$  é o tempo central do evento, e  $\theta_1, \theta_2$  são regimes distintos.

## Anomalia Global

Afeta a estrutura do processo. O efeito se espalha e altera a distribuição/regime do processo.

$$X_t \sim F_{\theta_1} \rightarrow F_{\theta_2}$$

# Papel do Contexto Temporal

Uma anomalia contextual não é definida apenas pelo valor  $x_t$ , mas pelo contraste com o seu entorno temporal. O contexto inclui passado e futuro próximos, e afeta tanto a interpretação quanto a robustez da detecção.

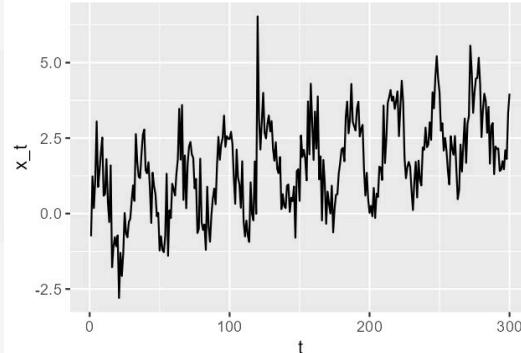
Ao definir  $\mathcal{C}_t$  como a vizinhança em torno de  $t$ , você diz que a tipicidade é condicionada ao contexto: o mesmo valor pode ser **típico** em um regime e anômalo em outro.

$$\mathcal{C}_t = \{x_{t-k}, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_{t+k}\}$$

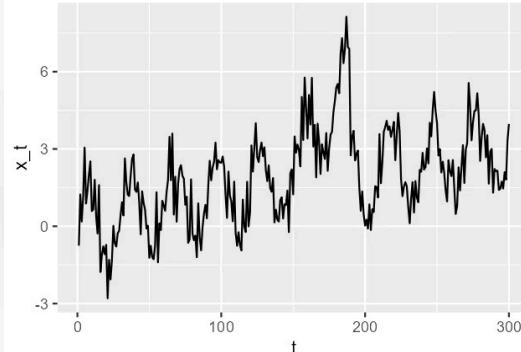
$$x_t \not\sim F(\mathcal{C}_t)$$

Onde  $\mathcal{C}_t$  é o contexto temporal em torno de  $t$ ,  $k$  é o tamanho do contexto (número de vizinhos de cada lado), e  $F(\mathcal{C}_t)$  é a distribuição esperada condicionada ao contexto. Isso altera tanto o limiar quanto a interpretação do evento.

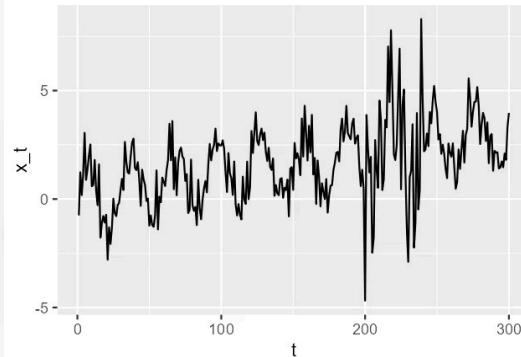
(a) Anomalia no valor:  $x_t$



(b) Anomalia na tendência:  $tr(x_t)$



(c) Anomalia na volatilidade:  $v(x_t)$



COMPONENTES

## Anomalias e Componentes Temporais

Conectar anomalias aos componentes temporais reforça que "anomalia" não é só pico no valor observado. Anomalias podem ocorrer em diferentes componentes da série temporal:



### Componente Valor

Desvio direto em  $x_t$ . O processo pode apresentar valores atípicos mantendo tendência e volatilidade típicas.



### Componente Tendência

Desvio em  $tr(x_t)$ . Mudança local de inclinação, onde o processo é típico em nível mas tem tendência anômala.



### Componente Volatilidade

Desvio em  $v(x_t)$ . Explosão temporária de variância, mantendo nível e tendência dentro do esperado.

$$tc(x_t) \in \{x_t, tr(x_t), v(x_t)\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_{val} \cup \mathcal{A}_{trend} \cup \mathcal{A}_{vol}$$

O conjunto total de anomalias é a união por componente:  $\mathcal{A}_{val}$  (anomalias no valor),  $\mathcal{A}_{trend}$  (anomalias na tendência), e  $\mathcal{A}_{vol}$  (anomalias na volatilidade).

# Arquitetura Conceitual das Anomalias

A anomalia nasce de uma cadeia de decisões metodológicas que conecta a série temporal bruta até a decisão final de classificação:



Este fluxo amarra a arquitetura do problema: primeiro você decide como representar a série, depois define um modelo de comportamento esperado nessa representação, e então mede desvios via resíduos ou critérios equivalentes.

A anomalia, portanto, é o produto de escolhas teóricas e metodológicas, não um "dado bruto" que existe independentemente do modelo. Esta arquitetura conecta os capítulos de ontologia, engenharia de features e métodos de detecção.

# Critérios de Detecção

A detecção de anomalias requer a escolha de critérios apropriados que operacionalizam as definições teóricas. Os principais critérios incluem:

- **Limiar Estatístico**

Baseado em múltiplos do desvio padrão dos resíduos, controlando sensibilidade.

- **Mudança de Parâmetros**

Detecta alterações temporárias nos parâmetros do processo gerador.

- **Probabilidade Condicional**

Avalia a raridade do evento sob a distribuição condicional esperada.

- **Densidade Local**

Identifica regiões de baixa densidade no espaço de representação escolhido.

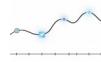
# Tipos de Anomalias por Natureza

As anomalias podem ser classificadas segundo sua natureza e manifestação no processo temporal:



## Anomalias Pontuais

Desvios isolados em um único instante de tempo, sem afetar observações vizinhas.



## Anomalias Coletivas

Sequências de observações que, juntas, constituem comportamento anômalo, mesmo que individualmente pareçam \*\*esperadas\*\*.



## Anomalias Contextuais

Valores que são anômalos apenas em relação ao contexto temporal específico em que ocorrem.

# Desafios na Detecção de Anomalias

A detecção de anomalias em séries temporais enfrenta diversos desafios metodológicos e práticos que afetam a qualidade dos resultados:

1

## Definição de Comportamento Típico

Estabelecer o que constitui comportamento típico em processos não-estacionários e com múltiplos regimes.

2

## Escolha de Representação

Selecionar a transformação adequada que preserve informação relevante e facilite a detecção.

3

## Sensibilidade vs Especificidade

Balancear a capacidade de detectar anomalias verdadeiras sem gerar excessivos falsos positivos.

4

## Adaptação Temporal

Ajustar modelos e limiares conforme o processo evolui, mantendo relevância da detecção.

# Relação com Outros Conceitos

A teoria de anomalias em séries temporais se relaciona com diversos outros conceitos fundamentais da análise temporal:

## Mudança de Regime

Transições persistentes entre estados distintos do processo, diferindo de anomalias por sua permanência.

## Eventos Raros

Ocorrências de baixa frequência que podem ou não constituir anomalias, dependendo do modelo.

## Quebras Estruturais

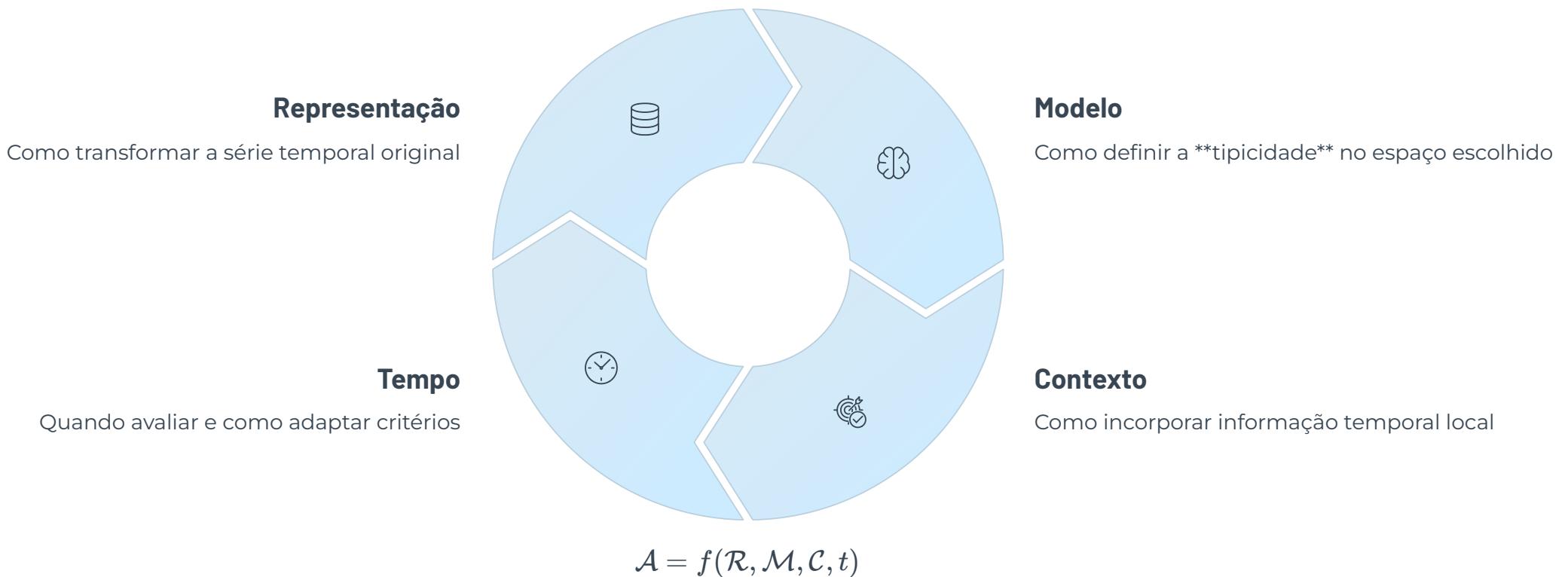
Alterações fundamentais nos parâmetros geradores, marcando divisões na série temporal.

## Valores Extremos

Observações nas caudas da distribuição, que requerem tratamento estatístico específico.

# Anomalias como Fenômenos Temporais

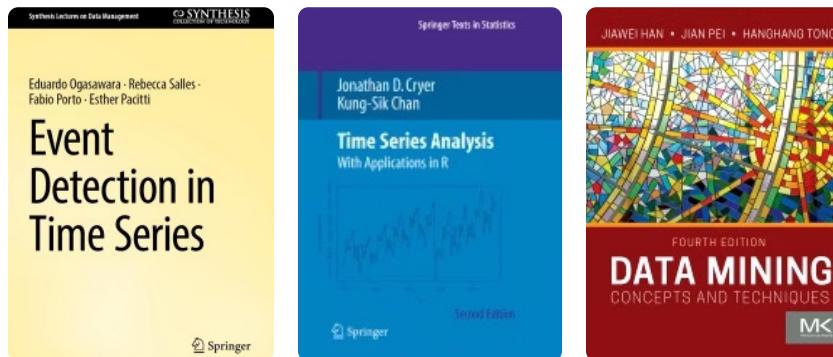
A síntese final explicita que a anomalia é um conceito relativo, dependente de múltiplas escolhas metodológicas. Detectar anomalias não é simplesmente "procurar pontos estranhos", mas formalizar a **\*\*tipicidade\*\*** e decidir o que constitui desvio relevante.



Onde R é a representação da série, M é o modelo de **\*\*tipicidade\*\***, C é o contexto temporal, t é o tempo de avaliação, e f(.) é a regra que define anomalias a partir dessas entradas.

# Referências Bibliográficas

Uma coleção cuidadosamente selecionada de obras fundamentais que abordam análise de séries temporais e mineração de dados.



## Event Detection in Time Series

**Ogasawara, E.; Salles, R.; Porto, F.; Pacitti, E.**  
(2025). Publicação recente da Springer Nature Switzerland que explora técnicas avançadas de detecção de eventos em séries temporais.

## Time Series Analysis: With Applications in R

**Cryer, J. D.; Chan, K.-S.** (2008). Obra clássica da Springer que combina fundamentação teórica sólida com implementações práticas.

## Data Mining: Concepts and Techniques

**Han, J.; Pei, J.; Tong, H.** (2022). Quarta edição publicada pela Morgan Kaufmann que consolida conceitos fundamentais e técnicas avançadas de mineração de dados