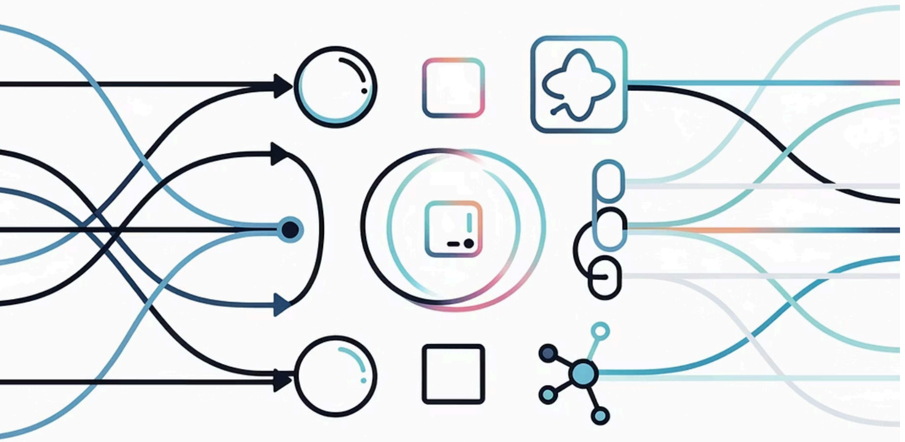
CEFET/RJ



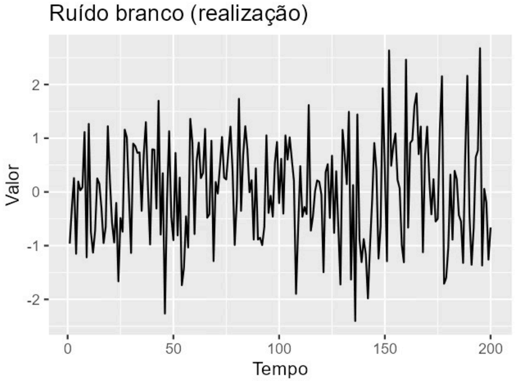
Modelos Lineares em Séries Temporais

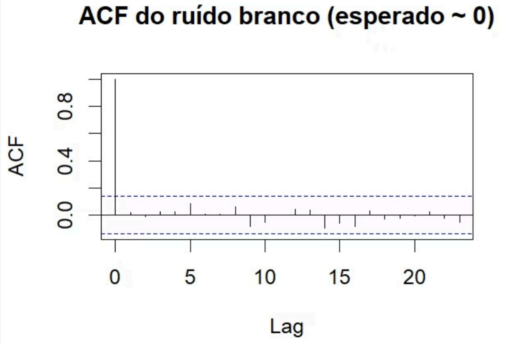
Modelos lineares representam séries temporais como combinações lineares de valores passados e choques aleatórios. A base fundamental é o ruído branco, que captura a parte imprevisível do processo. A dependência temporal é modelada através da acumulação de choques ao longo do tempo.

Eduardo Ogasawara

eduardo.ogasawara@cefet-rj.br

https://eic.cefet-rj.br/~eogasawara





Fundamentos do Ruído Branco

Média Zero

A esperança do ruído branco é sempre zero, representando ausência de viés sistemático.

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$$

Variância Constante

A variância permanece constante ao longo do tempo, garantindo homoscedasticidade.

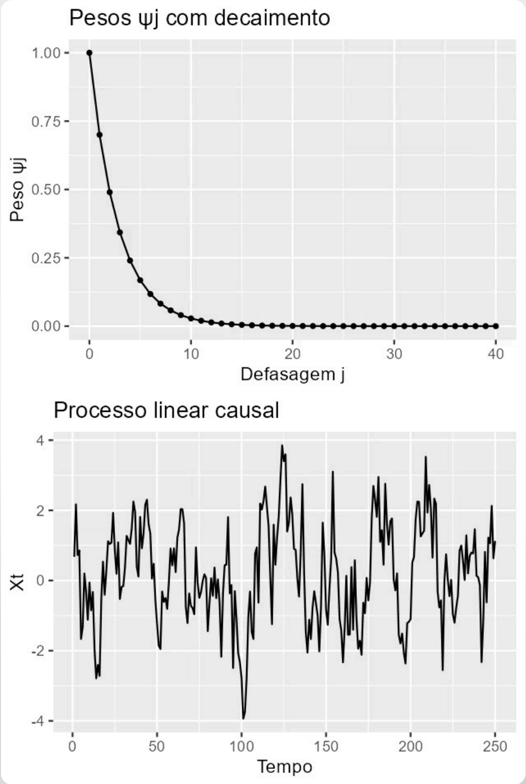
$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

Não Correlacionado

Choques em diferentes momentos são independentes entre si.

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0$$

Essas três propriedades definem o ruído branco como o componente fundamental imprevisível em modelos de séries temporais.



Processo Linear Causal

Um processo linear causal expressa o valor atual da série como função de choques aleatórios passados e presentes:

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

Onde μ representa a média do processo, ε_t são os choques aleatórios, e ψ_j são os pesos que determinam como cada choque defasado influencia o presente.

A causalidade garante que o presente depende apenas do passado, não do futuro. Os pesos ψ_j tipicamente decrescem com j, refletindo que choques mais antigos têm menor impacto.

01

Choque Atual

Impacto imediato ψ_0

02

Choques Recentes

Influência moderada

03

Choques Antigos

Efeito decrescente

Operador de Defasagem

O operador de defasagem B é uma ferramenta algébrica que desloca a série no tempo. Sua definição fundamental é $BX_t = X_{t-1}$, e aplicações sucessivas produzem $B^k X_t = X_{t-k}$.

Polinômio Autoregressivo

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$$

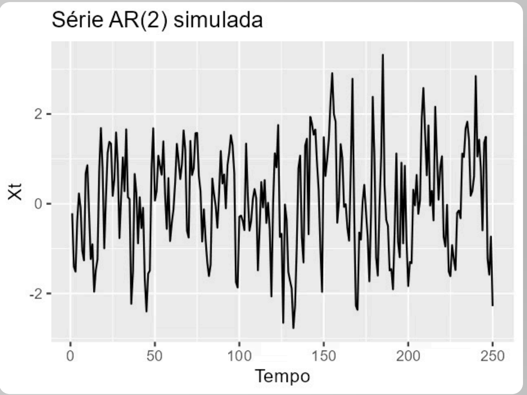
Representa a estrutura de dependência dos valores passados da série.

Polinômio de Média Móvel

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$$

Captura a propagação de choques aleatórios ao longo do tempo.

Esses polinômios transformam modelos temporais em expressões algébricas compactas, simplificando análise matemática e formulação de condições de estacionariedade.



Modelo Autoregressivo AR(p)

No modelo autoregressivo, a série é explicada por seus próprios valores passados mais um ruído branco que representa inovação imprevisível:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

1

Forma Expandida

Combinação linear explícita de p valores defasados

2

Forma Compacta

Representação usando operador: $\phi(B)X_t = c + \varepsilon_t$

3

Média do Processo

Calculada como $\mu = \frac{c}{1-\sum_{i=1}^{p} \phi_i}$

A constante c define o nível médio da série, enquanto os coeficientes ϕ_i determinam a intensidade da dependência temporal.

Estacionariedade do AR(p)

A estacionariedade de um processo AR(p) depende fundamentalmente dos coeficientes autoregressivos. A condição é expressa através das raízes do polinômio característico:

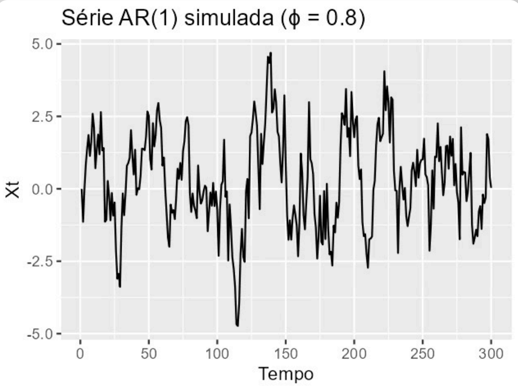
$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$$

Para estacionariedade, todas as raízes devem satisfazer $|z| > 1$, ou seja, estar fora do círculo unitário no plano complexo.

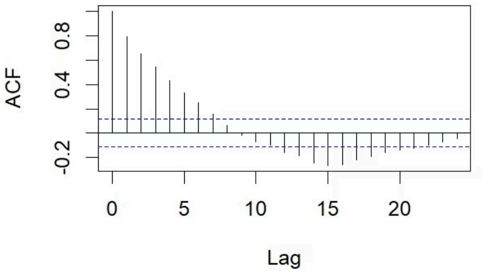
Caso Especial: AR(1)

Para o modelo $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, a condição simplifica para $|\phi| < 1$.

Representação Causal: Sob estacionariedade, o AR(p) pode ser escrito como $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, onde os pesos decrescem exponencialmente.



ACF do AR(1): decaimento gradual



Equações de Yule-Walker

As equações de Yule-Walker estabelecem relações recursivas entre autocovariâncias e coeficientes do modelo AR(p):

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + \cdots + \phi_p\gamma(h-p)$$

1

Autocovariância Geral

Para $h \geq 1$, a autocovariância segue a relação recursiva acima.

2

Variância do Processo

Em $h = 0$: $\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \cdots + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2$

3

Autocorrelação

Normalizada como $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$

Essas equações explicam por que a ACF de modelos AR decai gradualmente em vez de desaparecer abruptamente, característica fundamental para identificação de modelos.

Propriedades do AR(1)

O modelo autoregressivo de primeira ordem é o mais simples e ilustrativo, com dependência temporal controlada por um único parâmetro:

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

μ

Média

Calculada como $\mu = \frac{c}{1-\phi}$

σ²

Variância

Dada por $\mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

ρ

Autocorrelação

Decai exponencialmente: $\rho(h) = \phi^h$

Interpretação do Coeficiente

Quanto maior $|\phi|$, mais persistente é a série. Valores próximos de 1 indicam alta memória temporal, enquanto valores próximos de 0 sugerem comportamento próximo ao ruído branco.

Representação MA(∞) do AR(1)

Todo processo AR(1) estacionário pode ser expresso como uma média móvel infinita, revelando a dualidade estrutural dos modelos lineares.

01

Forma com Operador

Partindo de $(1-\phi B)X_t = c + \varepsilon_t$

02

Expansão Geométrica

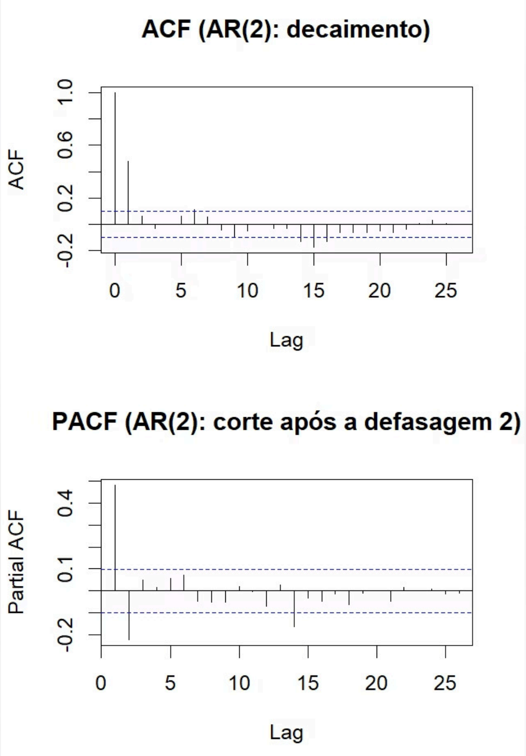
Aplicando $(1-\phi B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j$

03

Representação Final

Obtemos $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$

Esta representação mostra que choques antigos continuam influenciando o presente, mas com intensidade decrescente ϕ^j. Para $|\phi| < 1$, a série converge e o processo é estacionário.



Autocorrelação Parcial (PACF)

A autocorrelação parcial mede a dependência direta entre X_t e X_{t-h}, removendo o efeito de todas as defasagens intermediárias.

Matematicamente, $\alpha(h)$ é o coeficiente de X_{t-h} na regressão:

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_h X_{t-h} + u_t$$

Propriedade Fundamental

Para um processo AR(p), a PACF satisfaz $\alpha(h) = 0$ para todo $h > p$

Identificação de Ordem

O corte abrupto da PACF identifica diretamente a ordem p do modelo autoregressivo

A PACF é uma ferramenta essencial para identificação de modelos, complementando a análise da ACF.

Modelo de Média Móvel MA(q)

No modelo de média móvel, a série é explicada por choques aleatórios presentes e passados, sem dependência direta de valores passados da própria série:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Forma Compacta

Usando operador de defasagem: $X_t = \mu + \theta(B)\varepsilon_t$

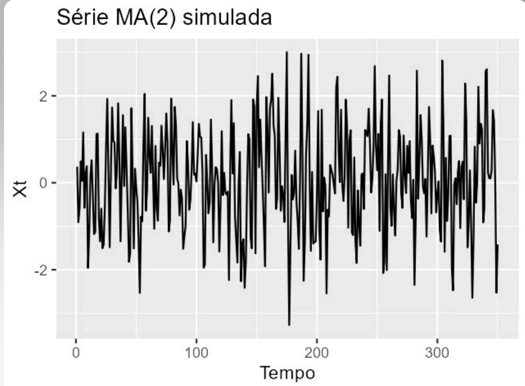
Estrutura

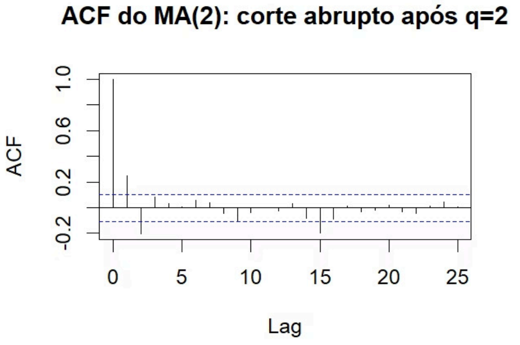
Combinação linear de $q + 1$ choques aleatórios consecutivos

Memória Finita

Apenas os últimos q choques influenciam o presente

Diferentemente do AR, não há regressão sobre valores passados da série. O comportamento temporal é determinado exclusivamente pela acumulação de choques aleatórios.





ACF do MA(q) e Invertibilidade

Assinatura do MA(q)

A principal característica identificadora do modelo MA(q) é o corte abrupto da função de autocorrelação:

$$\gamma(h) = 0, \quad h > q$$

Após q defasagens, todas as autocovariâncias são exatamente zero, refletindo a memória finita do processo.

Condição de Invertibilidade

Para garantir unicidade da representação, as raízes do polinômio $\theta(z)$ devem satisfazer:

$$\theta(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$$

Esta condição permite expressar o MA(q) como um AR infinito equivalente.

Dualidade AR-MA: Sob invertibilidade, todo processo MA(q) pode ser representado como um processo AR(∞), estabelecendo uma dualidade fundamental entre os dois tipos de modelos.

Modelo ARMA(p,q)

O modelo ARMA combina componentes autoregressivos e de média móvel, representando a forma linear mais geral para séries temporais estacionárias:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

1

Parte AR

Captura persistência temporal através de p valores defasados

2

Parte MA

Modela propagação de choques através de q termos de erro

3

Forma Compacta

Expressa como $\phi(B)X_t = c + \theta(B)\varepsilon_t$

O ARMA é a base dos modelos clássicos de séries temporais estacionárias, oferecendo flexibilidade para capturar diversos padrões de dependência temporal com parcimônia de parâmetros.

Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

O modelo ARMA(p,q) requer duas condições fundamentais para ser bem definido:

1

Estacionariedade

Depende da parte AR: $\phi(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$

Garante que propriedades estatísticas não mudam ao longo do tempo

2

Invertibilidade

Depende da parte MA: $\theta(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$

Assegura unicidade da representação do modelo

Representação MA(∞)

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

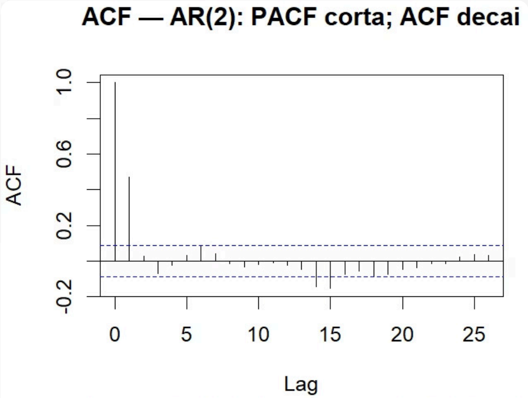
Sob estacionariedade, o ARMA pode ser expresso como média móvel infinita.

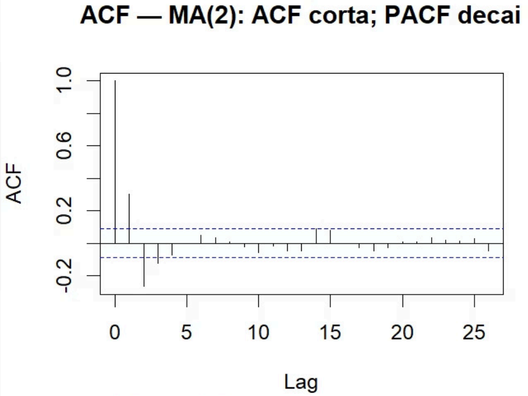
Representação AR(∞)

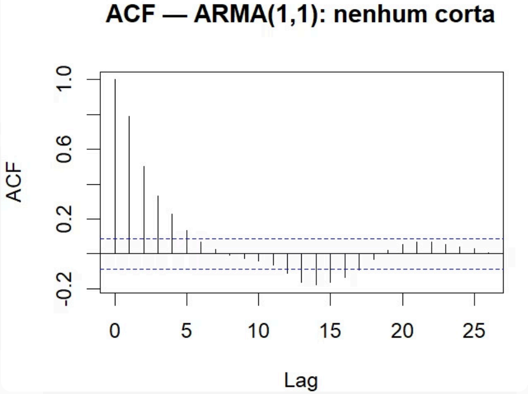
$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

Sob invertibilidade, o ARMA pode ser expresso como autoregressivo infinito.

Essas representações revelam a dualidade estrutural profunda dos modelos lineares.







ACF e PACF no ARMA

AR(p)

PACF: Corta abruptamente após defasagem p

ACF: Decai gradualmente de forma exponencial ou senoidal

MA(q)

ACF: Corta abruptamente após defasagem q

PACF: Decai gradualmente de forma exponencial ou senoidal

ARMA(p,q)

ACF: Decai gradualmente sem corte abrupto

PACF: Decai gradualmente sem corte abrupto

A análise conjunta de ACF e PACF é fundamental para identificação de modelos. No ARMA, a ausência de cortes abruptos dificulta a identificação direta das ordens, exigindo métodos complementares como critérios de informação.

Método Box-Jenkins

O método Box-Jenkins é um procedimento iterativo sistemático para construção de modelos ARMA, consistindo em três etapas fundamentais:

Estimação

Ajuste dos parâmetros do modelo usando máxima verossimilhança ou mínimos quadrados

Identificação

Análise de ACF e PACF para determinar ordens p e q candidatas

Diagnóstico

Verificação dos resíduos para confirmar comportamento de ruído branco

Análise de Resíduos

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{X}_t$$

Os resíduos devem satisfazer as propriedades de ruído branco. Se não satisfizerem, o ciclo é repetido com especificação alternativa do modelo.

Interpretação Estrutural do ARMA

Parte AR: Memória do Sistema

$$X_t \approx \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i}$$

Os coeficientes autoregressivos capturam como o sistema "lembra" seus estados passados. Valores altos de ϕ_i indicam forte persistência temporal.

Parte MA: Resposta a Choques

$$X_t \approx \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

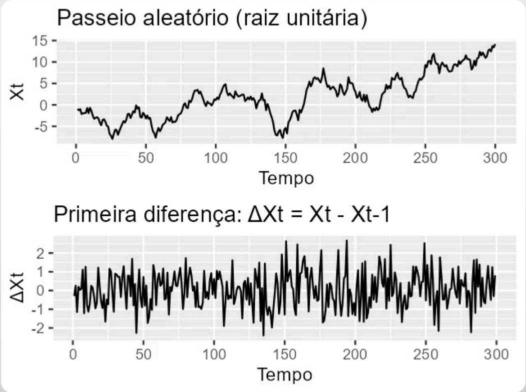
Os coeficientes de média móvel descrevem como o sistema responde e propaga choques aleatórios ao longo do tempo.

O ARMA pode ser interpretado como um modelo estrutural do tempo, descrevendo como o passado (parte AR) e os choques (parte MA) moldam conjuntamente o comportamento presente da série.

Não Estacionariedade e Raiz Unitária

Quando o modelo AR possui raiz unitária, o processo torna-se não estacionário. O caso limite é o passeio aleatório:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$



Processo Estacionário

Modelo $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ com $|\phi| < 1$

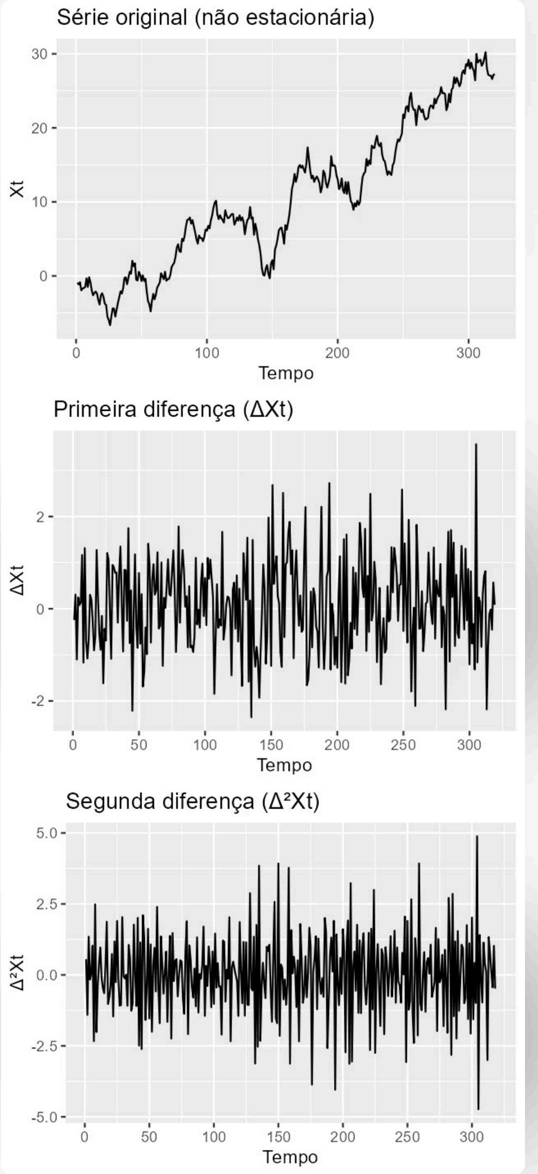
Raiz Unitária

Caso limite quando $\phi = 1$, gerando não estacionariedade

Ordem de Integração

Número d de diferenciações necessárias: $\Delta^d X_t$ é estacionário

A não estacionariedade surge quando choques têm efeito permanente sobre o nível da série. A ordem de integração d mede quantas diferenciações são necessárias para restaurar a estacionariedade.



Operador de Diferenciação

O operador de diferenciação Δ é fundamental para transformar séries não estacionárias em estacionárias, removendo tendências estocásticas:

Primeira Diferença

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

Remove tendência linear e raiz unitária simples

Segunda Diferença

$$\Delta^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

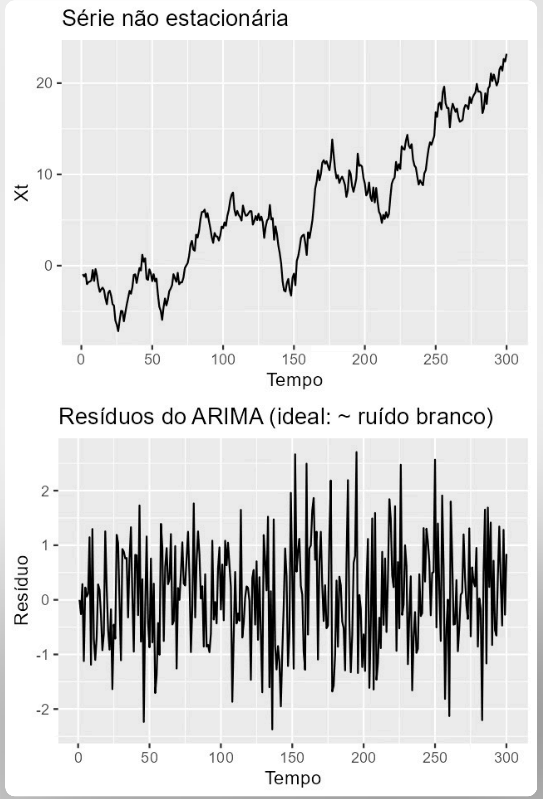
Remove tendência quadrática e raízes unitárias duplas

Diferença de Ordem d

$$\Delta^d = (1 - B)^d$$

Generalização para ordens superiores de integração

A diferenciação é uma transformação fundamental que elimina raízes unitárias, permitindo aplicar modelos ARMA a séries originalmente não estacionárias. A escolha correta de d é crucial para evitar sobre-diferenciação ou sub-diferenciação.



Modelo ARIMA e Síntese

O modelo ARIMA integra diferenciação e estrutura ARMA, representando a extensão natural para séries não estacionárias:

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = c + \theta(B)\varepsilon_t$$

Ordem AR (p)

Captura dependência de valores passados da série diferenciada

Ordem de Integração (d)

Número de diferenciações para alcançar estacionariedade

Ordem MA (q)

Modela propagação de choques aleatórios

Aplicações do ARIMA

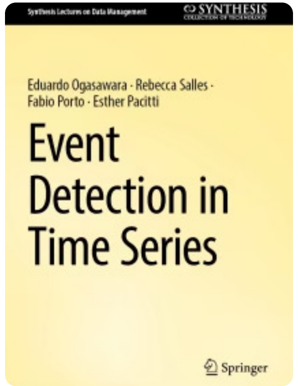
O ARIMA define o comportamento esperado da série, servindo como modelo de referência. Eventos, anomalias e mudanças estruturais são identificados como desvios sistemáticos em relação ao padrão previsto pelo modelo.

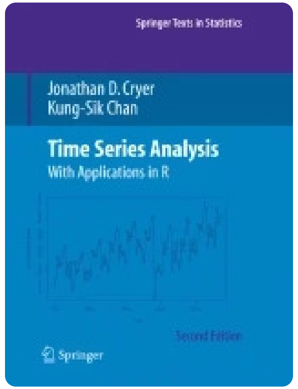
Os modelos lineares formam o núcleo da teoria clássica de séries temporais, fornecendo a base conceitual e metodológica para previsão, análise estrutural e detecção de eventos em dados temporais.

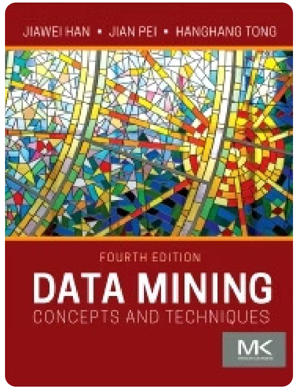
RECURSOS ACADÊMICOS

Referências Bibliográficas

Uma coleção cuidadosamente selecionada de obras fundamentais que abordam análise de séries temporais e mineração de dados.







Event Detection in Time Series

Ogasawara, E.; Salles, R.; Porto, F.; Pacitti, E. (2025). Publicação recente da Springer Nature Switzerland que explora técnicas avançadas de detecção de eventos em séries temporais.

Time Series Analysis: With Applications in R

Cryer, J. D.; Chan, K.-S. (2008). Obra clássica da Springer que combina fundamentação teórica sólida com implementações práticas.

Data Mining: Concepts and Techniques

Han, J.; Pei, J.; Tong, H. (2022). Quarta edição publicada pela Morgan Kaufmann que consolida conceitos fundamentais e técnicas avançadas de mineração de dados