

# Modelos Lineares em Séries Temporais

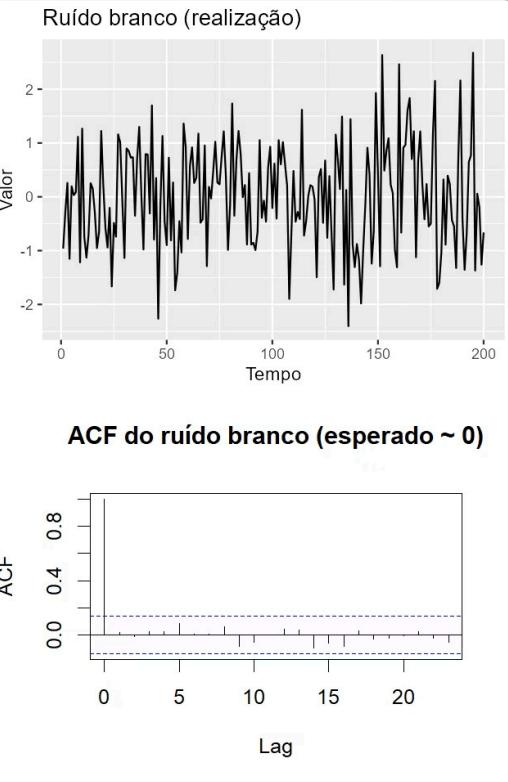
Modelos lineares representam séries temporais como combinações lineares de valores passados e choques aleatórios. A base fundamental é o ruído branco, que captura a parte imprevisível do processo. A dependência temporal é modelada através da acumulação de choques ao longo do tempo.

Eduardo Ogasawara

[eduardo.ogasawara@cefet-rj.br](mailto:eduardo.ogasawara@cefet-rj.br)

<https://eic.cefet-rj.br/~eogasawara>

# Fundamentos do Ruído Branco



## Média Zero

A esperança do ruído branco é sempre zero, representando ausência de viés sistemático.

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$$

## Variância Constante

A variância permanece constante ao longo do tempo, garantindo homoscedasticidade.

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

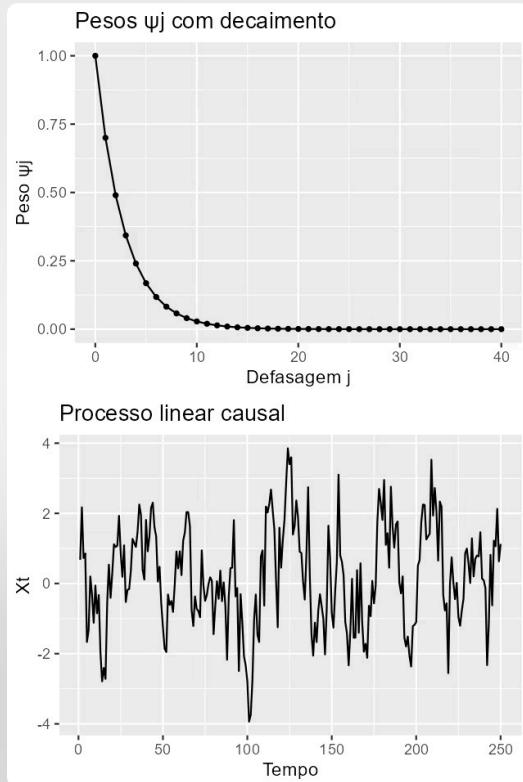
## Não Correlacionado

Choques em diferentes momentos são independentes entre si.

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0$$

Essas três propriedades definem o ruído branco como o componente fundamental imprevisível em modelos de séries temporais.

# Processo Linear Causal



Um processo linear causal expressa o valor atual da série como função de choques aleatórios passados e presentes:

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

Onde  $\mu$  representa a média do processo,  $\varepsilon_t$  são os choques aleatórios, e  $\psi_j$  são os pesos que determinam como cada choque defasado influencia o presente.

A causalidade garante que o presente depende apenas do passado, não do futuro. Os pesos  $\psi_j$  tipicamente decrescem com  $j$ , refletindo que choques mais antigos têm menor impacto.

01

## Choque Atual

Impacto imediato  $\psi_0$

02

## Choques Recentes

Influência moderada

03

## Choques Antigos

Efeito decrescente

# Operador de Defasagem

O operador de defasagem  $B$  é uma ferramenta algébrica que desloca a série no tempo. Sua definição fundamental é  $BX_t = X_{t-1}$ , e aplicações sucessivas produzem  $B^k X_t = X_{t-k}$ .

## Polinômio Autoregressivo

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$$

Representa a estrutura de dependência dos valores passados da série.

Esses polinômios transformam modelos temporais em expressões algébricas compactas, simplificando análise matemática e formulação de condições de estacionariedade.

## Polinômio de Média Móvel

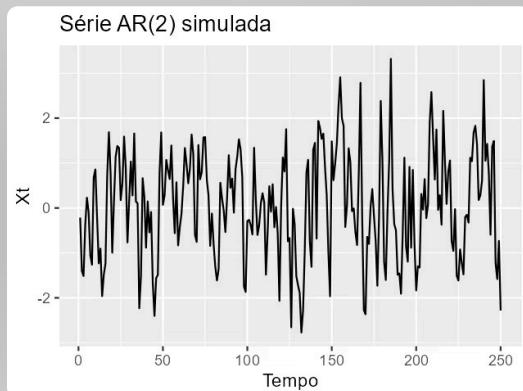
$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$$

Captura a propagação de choques aleatórios ao longo do tempo.

# Modelo Autoregressivo AR(p)

No modelo autoregressivo, a série é explicada por seus próprios valores passados mais um ruído branco que representa inovação imprevisível:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$



- 1
- 2
- 3

## Forma Expandida

Combinação linear explícita de  $p$  valores defasados

## Forma Compacta

Representação usando operador:  $\phi(B)X_t = c + \varepsilon_t$

## Média do Processo

Calculada como  $\mu = \frac{c}{1-\sum_{i=1}^p \phi_i}$

A constante  $c$  define o nível médio da série, enquanto os coeficientes  $\phi_i$  determinam a intensidade da dependência temporal.

# Estacionariedade do AR(p)

A estacionariedade de um processo AR(p) depende fundamentalmente dos coeficientes autoregressivos. A condição é expressa através das raízes do polinômio característico:

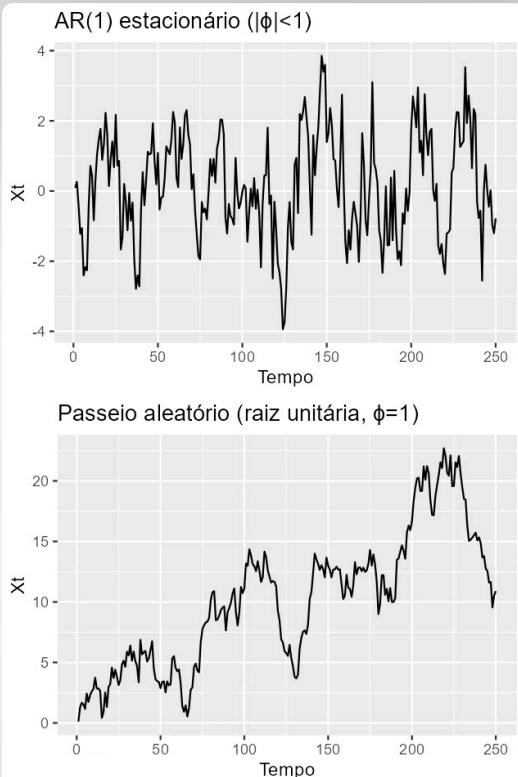
$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$$

Para estacionariedade, todas as raízes devem satisfazer  $|z| > 1$ , ou seja, estar fora do círculo unitário no plano complexo.

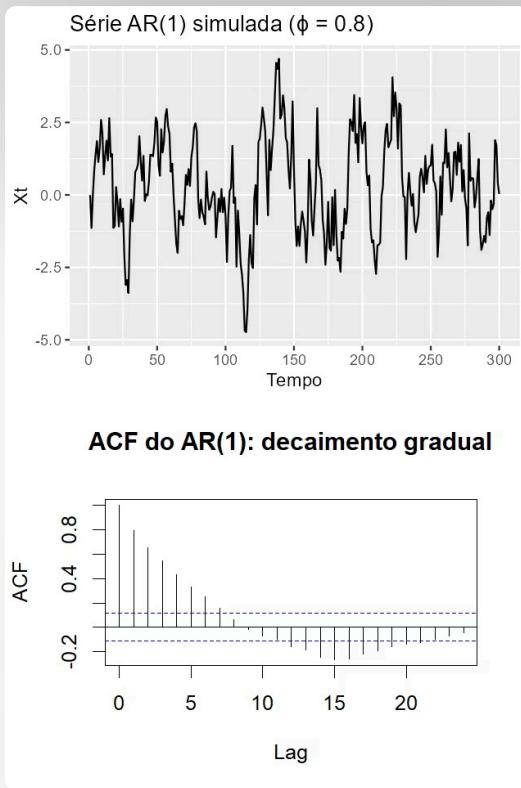
## Caso Especial: AR(1)

Para o modelo  $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ , a condição simplifica para  $|\phi| < 1$ .

- ❑ **Representação Causal:** Sob estacionariedade, o AR(p) pode ser escrito como  $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ , onde os pesos decrescem exponencialmente.



# Equações de Yule-Walker



As equações de Yule-Walker estabelecem relações recursivas entre autocovariâncias e coeficientes do modelo AR( $p$ ):

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + \cdots + \phi_p\gamma(h-p)$$

1

## Autocovariância Geral

Para  $h \geq 1$ , a autocovariância segue a relação recursiva acima.

2

## Variância do Processo

Em  $h = 0$ :  $\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \cdots + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2$

3

## Autocorrelação

Normalizada como  $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$

Essas equações explicam por que a ACF de modelos AR decai gradualmente em vez de desaparecer abruptamente, característica fundamental para identificação de modelos.

# Propriedades do AR(1)

O modelo autoregressivo de primeira ordem é o mais simples e ilustrativo, com dependência temporal controlada por um único parâmetro:

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$\mu$

**Média**

Calculada como  $\mu = \frac{c}{1-\phi}$

$\sigma^2$

**Variância**

Dada por  $\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

$\rho$

**Autocorrelação**

Decai exponencialmente:  $\rho(h) = \phi^h$

## Interpretação do Coeficiente

Quanto maior  $|\phi|$ , mais persistente é a série. Valores próximos de 1 indicam alta memória temporal, enquanto valores próximos de 0 sugerem comportamento próximo ao ruído branco.

# Representação MA( $\infty$ ) do AR(1)

Todo processo AR(1) estacionário pode ser expresso como uma média móvel infinita, revelando a dualidade estrutural dos modelos lineares.

01

## Forma com Operador

Partindo de  $(1 - \phi B)X_t = c + \varepsilon_t$

02

## Expansão Geométrica

Aplicando  $(1 - \phi B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j$

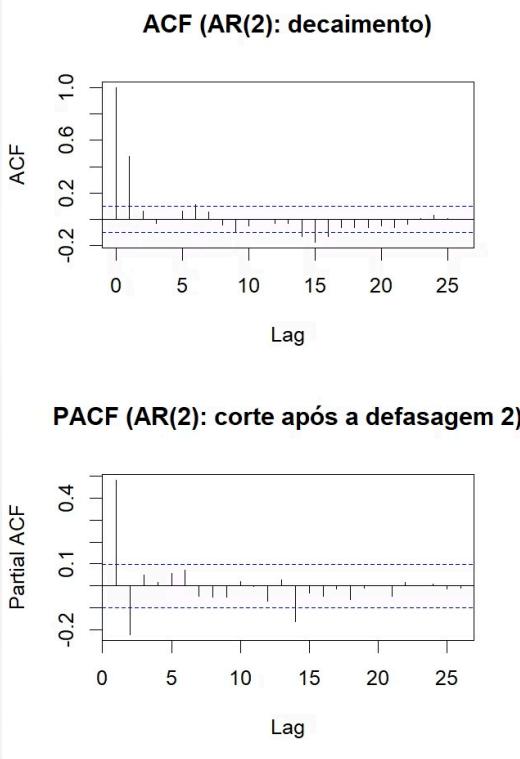
03

## Representação Final

Obtemos  $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$

Esta representação mostra que choques antigos continuam influenciando o presente, mas com intensidade decrescente  $\phi^j$ . Para  $|\phi| < 1$ , a série converge e o processo é estacionário.

# Autocorrelação Parcial (PACF)



A autocorrelação parcial mede a dependência direta entre  $X_t$  e  $X_{t-h}$ , removendo o efeito de todas as defasagens intermediárias.

Matematicamente,  $\alpha(h)$  é o coeficiente de  $X_{t-h}$  na regressão:

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_h X_{t-h} + u_t$$

A PACF é uma ferramenta essencial para identificação de modelos, complementando a análise da ACF.

## Propriedade Fundamental

Para um processo AR( $p$ ), a PACF satisfaz  $\alpha(h) = 0$  para todo  $h > p$

## Identificação de Ordem

O corte abrupto da PACF identifica diretamente a ordem  $p$  do modelo autoregressivo

# Modelo de Média Móvel MA(q)

No modelo de média móvel, a série é explicada por choques aleatórios presentes e passados, sem dependência direta de valores passados da própria série:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$



## Forma Compacta

Usando operador de defasagem:

$$X_t = \mu + \theta(B)\varepsilon_t$$



## Estrutura

Combinação linear de  $q + 1$  choques aleatórios consecutivos



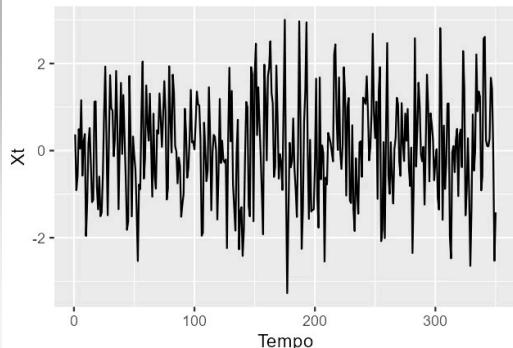
## Memória Finita

Apenas os últimos  $q$  choques influenciam o presente

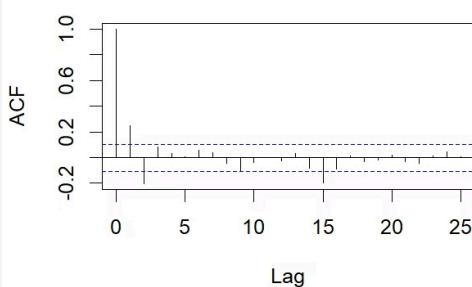
Diferentemente do AR, não há regressão sobre valores passados da série. O comportamento temporal é determinado exclusivamente pela acumulação de choques aleatórios.

# ACF do MA(q) e Invertibilidade

Série MA(2) simulada



ACF do MA(2): corte abrupto apóis q=2



## Assinatura do MA(q)

A principal característica identificadora do modelo MA(q) é o corte abrupto da função de autocorrelação:

$$\gamma(h) = 0, \quad h > q$$

Após  $q$  defasagens, todas as autocovariâncias são exatamente zero, refletindo a memória finita do processo.

## Condição de Invertibilidade

Para garantir unicidade da representação, as raízes do polinômio  $\theta(z)$  devem satisfazer:

$$\theta(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$$

Esta condição permite expressar o MA(q) como um AR infinito equivalente.



**Dualidade AR-MA:** Sob invertibilidade, todo processo MA(q) pode ser representado como um processo AR( $\infty$ ), estabelecendo uma dualidade fundamental entre os dois tipos de modelos.

# Modelo ARMA(p,q)

O modelo ARMA combina componentes autoregressivos e de média móvel, representando a forma linear mais geral para séries temporais estacionárias:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

1

## Parte AR

Captura persistência temporal através de  $p$  valores defasados

2

## Parte MA

Modela propagação de choques através de  $q$  termos de erro

3

## Forma Compacta

Expressa como  $\phi(B)X_t = c + \theta(B)\varepsilon_t$

O ARMA é a base dos modelos clássicos de séries temporais estacionárias, oferecendo flexibilidade para capturar diversos padrões de dependência temporal com parcimônia de parâmetros.

# Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

O modelo ARMA(p,q) requer duas condições fundamentais para ser bem definido:

## 1 Estacionariedade

Depende da parte AR:  $\phi(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$

Garante que propriedades estatísticas não mudam ao longo do tempo

## 2 Invertibilidade

Depende da parte MA:  $\theta(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$

Assegura unicidade da representação do modelo

## Representação MA( $\infty$ )

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

Sob estacionariedade, o ARMA pode ser expresso como média móvel infinita.

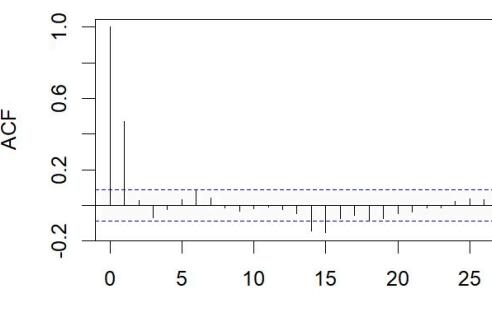
## Representação AR( $\infty$ )

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

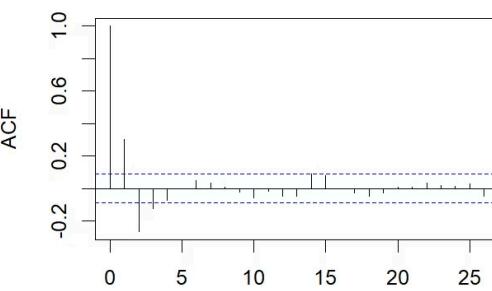
Sob invertibilidade, o ARMA pode ser expresso como autoregressivo infinito.

Essas representações revelam a dualidade estrutural profunda dos modelos lineares.

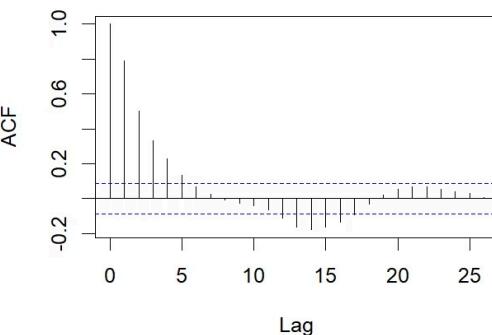
ACF — AR(2): PACF corta; ACF decai



ACF — MA(2): ACF corta; PACF decai



ACF — ARMA(1,1): nenhum corte



# ACF e PACF no ARMA

## AR( $p$ )

**PACF:** Corta abruptamente após defasagem  $p$

**ACF:** Decai gradualmente de forma exponencial ou senoidal

## MA( $q$ )

**ACF:** Corta abruptamente após defasagem  $q$

**PACF:** Decai gradualmente de forma exponencial ou senoidal

## ARMA( $p,q$ )

**ACF:** Decai gradualmente sem corte abrupto

**PACF:** Decai gradualmente sem corte abrupto

A análise conjunta de ACF e PACF é fundamental para identificação de modelos. No ARMA, a ausência de cortes abruptos dificulta a identificação direta das ordens, exigindo métodos complementares como critérios de informação.

# Método Box-Jenkins

O método Box-Jenkins é um procedimento iterativo sistemático para construção de modelos ARMA, consistindo em três etapas fundamentais:



## Identificação

Análise de ACF e PACF para determinar ordens  $p$  e  $q$  candidatas

## Análise de Resíduos

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{X}_t$$

Os resíduos devem satisfazer as propriedades de ruído branco. Se não satisfizerem, o ciclo é repetido com especificação alternativa do modelo.

## Estimação

Ajuste dos parâmetros do modelo usando máxima verossimilhança ou mínimos quadrados

## Diagnóstico

Verificação dos resíduos para confirmar comportamento de ruído branco

# Interpretação Estrutural do ARMA

## Parte AR: Memória do Sistema

$$X_t \approx \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i}$$

Os coeficientes autoregressivos capturam como o sistema "lembra" seus estados passados. Valores altos de  $\phi_i$  indicam forte persistência temporal.

O ARMA pode ser interpretado como um modelo estrutural do tempo, descrevendo como o passado (parte AR) e os choques (parte MA) moldam conjuntamente o comportamento presente da série.

## Parte MA: Resposta a Choques

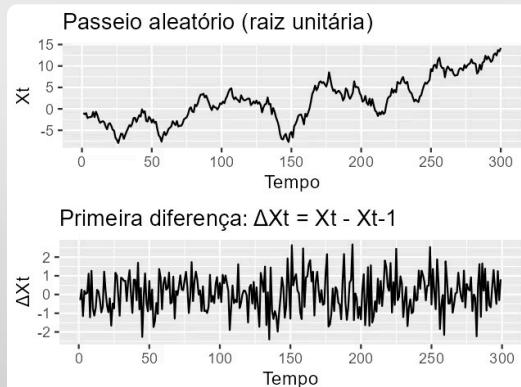
$$X_t \approx \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

Os coeficientes de média móvel descrevem como o sistema responde e propaga choques aleatórios ao longo do tempo.

# Não Estacionariedade e Raiz Unitária

Quando o modelo AR possui raiz unitária, o processo torna-se não estacionário. O caso limite é o passeio aleatório:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$



## Processo Estacionário

Modelo  $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$  com  $|\phi| < 1$

## Raiz Unitária

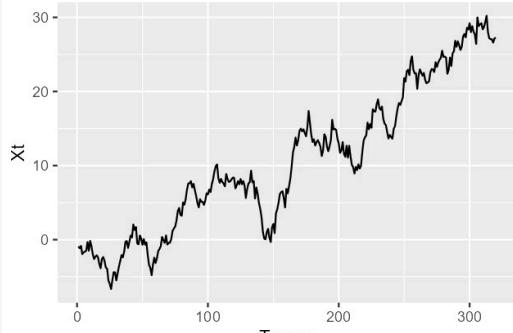
Caso limite quando  $\phi = 1$ , gerando não estacionariedade

## Ordem de Integração

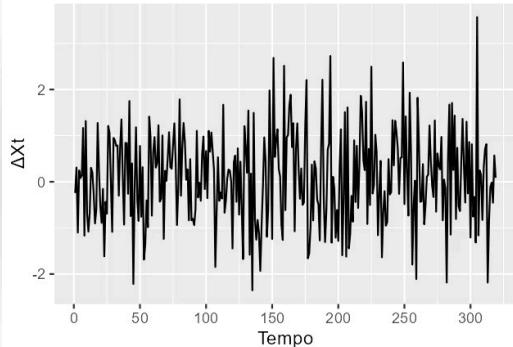
Número  $d$  de diferenciações necessárias:  $\Delta^d X_t$  é estacionário

A não estacionariedade surge quando choques têm efeito permanente sobre o nível da série. A ordem de integração  $d$  mede quantas diferenciações são necessárias para restaurar a estacionariedade.

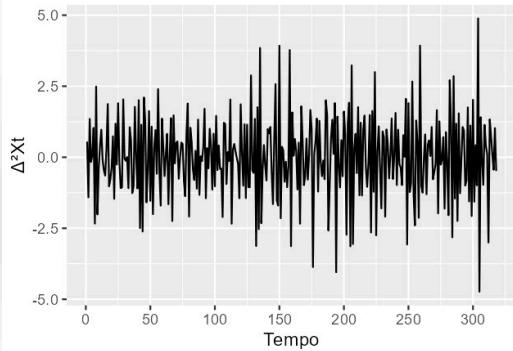
Série original (não estacionária)



Primeira diferença ( $\Delta X_t$ )



Segunda diferença ( $\Delta^2 X_t$ )



# Operador de Diferenciação

O operador de diferenciação  $\Delta$  é fundamental para transformar séries não estacionárias em estacionárias, removendo tendências estocásticas:

## Primeira Diferença

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

Remove tendência linear e raiz unitária simples

## Segunda Diferença

$$\Delta^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Remove tendência quadrática e raízes unitárias duplas

## Diferença de Ordem $d$

$$\Delta^d = (1 - B)^d$$

Generalização para ordens superiores de integração

A diferenciação é uma transformação fundamental que elimina raízes unitárias, permitindo aplicar modelos ARMA a séries originalmente não estacionárias. A escolha correta de  $d$  é crucial para evitar sobre-diferenciação ou sub-diferenciação.

# Modelo ARIMA

O modelo ARIMA integra diferenciação e estrutura ARMA, representando a extensão natural para séries não estacionárias:

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = c + \theta(B)\varepsilon_t$$

## Ordem AR (p)

Captura dependência de valores passados da série diferenciada

## Ordem de Integração (d)

Número de diferenciações para alcançar estacionariedade

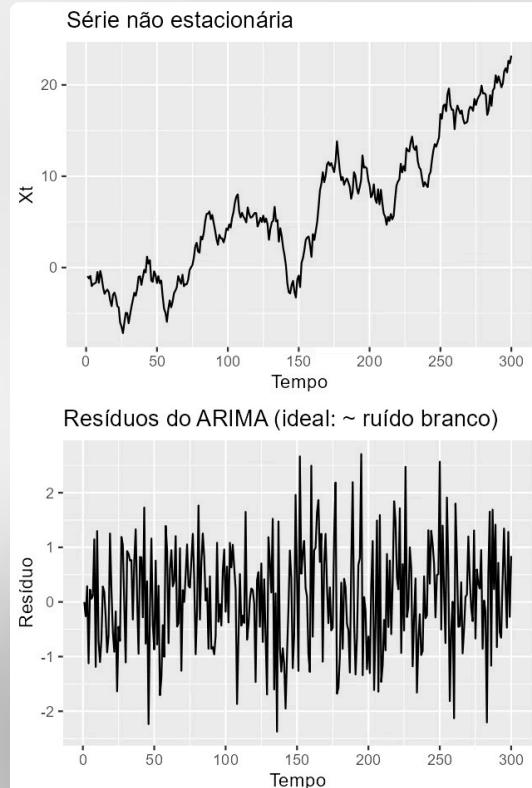
## Ordem MA (q)

Modela propagação de choques aleatórios

## Aplicações do ARIMA

O ARIMA define o comportamento esperado da série, servindo como modelo de referência. Eventos, anomalias e mudanças estruturais são identificados como desvios sistemáticos em relação ao padrão previsto pelo modelo.

Os modelos lineares formam o núcleo da teoria clássica de séries temporais, fornecendo a base conceitual e metodológica para previsão, análise estrutural e detecção de eventos em dados temporais.



# Referências Bibliográficas

Uma coleção cuidadosamente selecionada de obras fundamentais que abordam análise de séries temporais e mineração de dados.



## Event Detection in Time Series

**Ogasawara, E.; Salles, R.; Porto, F.; Pacitti,**

**E.** (2025). Publicação recente da Springer Nature Switzerland que explora técnicas avançadas de detecção de eventos em séries temporais.

## Time Series Analysis: With Applications in R

**Cryer, J. D.; Chan, K.-S.** (2008). Obra clássica da Springer que combina fundamentação teórica sólida com implementações práticas.

## Data Mining: Concepts and Techniques

**Han, J.; Pei, J.; Tong, H.** (2022). Quarta edição publicada pela Morgan Kaufmann que consolida conceitos fundamentais e técnicas avançadas de mineração de dados