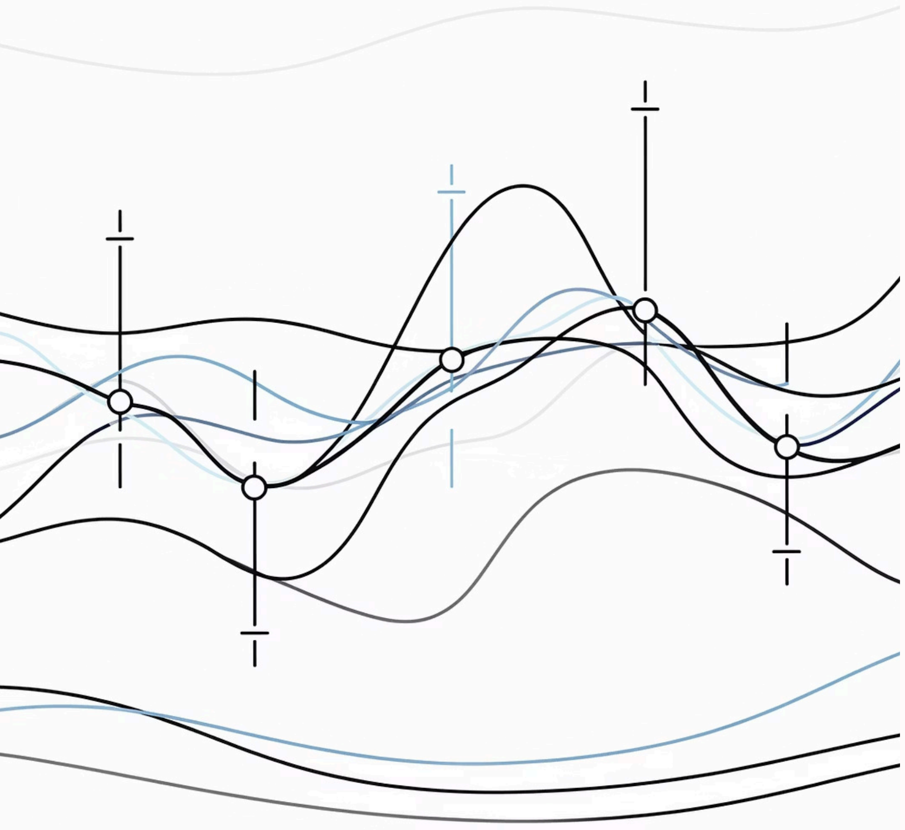


CEFET/RJ

Pontos de Mudança em Séries Temporais

Identificando alterações estruturais no comportamento de dados ao longo do tempo.

Eduardo Ogasawara

eduardo.ogasawara@cefet-rj.br

https://eic.cefet-rj.br/~eogasawara

Definição de Pontos de Mudança

Uma série temporal é uma sequência de observações onde os parâmetros do processo podem variar no tempo. Um ponto de mudança representa uma alteração estrutural do processo gerador dos dados.

Considere uma série temporal xt. Um ponto de mudança ocorre quando os parâmetros do modelo mudam ao longo do tempo:

$$x_t \sim F_{\theta(t)}, \quad \theta(t) \neq \theta(t-1)$$

Onde xt é o valor da série no tempo t, Fθ(t) é a distribuição do processo no tempo t, θ(t) é o vetor de parâmetros do modelo, e t é o índice temporal.

Pontos de Mudança e Anomalias

Anomalia

Desvio pontual que afeta observações individuais. É um evento local, como um "pico" ou "queda" isolada.

Ponto de Mudança

Alteração persistente que afeta o comportamento do modelo ao longo do tempo. É um evento estrutural duradouro.

Uma anomalia ocorre quando uma observação se afasta de um padrão esperado:

$$|r_t| > \tau$$

Onde rt é o resíduo ou desvio no tempo t, e τ é o limiar de detecção. Enquanto a anomalia é transitória, o ponto de mudança representa uma transformação duradoura da dinâmica da série.

Ruído e Mudança Estrutural

Uma série temporal pode ser decomposta em sinal e ruído. O ruído não altera a estrutura, mas o ponto de mudança altera o sinal.

Decomposição Básica

$$x_t = S_t + \varepsilon_t$$

Onde St é o componente estrutural (sinal) e εt é o ruído aleatório.

Com Mudança Estrutural

$$x_t = \begin{cases} S_t^{(1)} + \varepsilon_t, & t \leq \tau \\ S_t^{(2)} + \varepsilon_t, & t > \tau \end{cases}$$

Onde τ é o ponto de mudança.

Mudança de Regime

Regime

Conjunto de parâmetros estáveis que descrevem o comportamento da série durante um período temporal.

Transição

O ponto de mudança marca a passagem de um regime para outro, identificando fronteiras entre regimes temporais.

Um regime é um período em que o comportamento da série é descrito por parâmetros estáveis:

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_1, & t \in R_1 \\ \theta_2, & t \in R_2 \end{cases}$$

Onde θ1 e θ2 são parâmetros em cada regime, e R1 e R2 são intervalos temporais dos regimes.

Persistência Temporal da Mudança

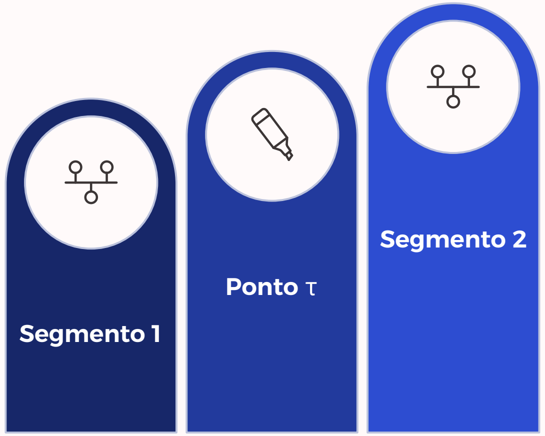
A característica fundamental do ponto de mudança é a persistência. A mudança estrutural é duradoura, diferenciando-se de eventos transitórios.

$$\theta(t) = \theta_2, \quad \forall t > \tau$$

Onde $\theta 2$ é o novo conjunto de parâmetros após a mudança e τ é o instante da mudança.

Após o instante τ, o processo passa a operar sob novos parâmetros de forma contínua. Isso distingue change points de anomalias, que são apenas desvios temporários sem impacto estrutural duradouro.

Modelos Segmentados

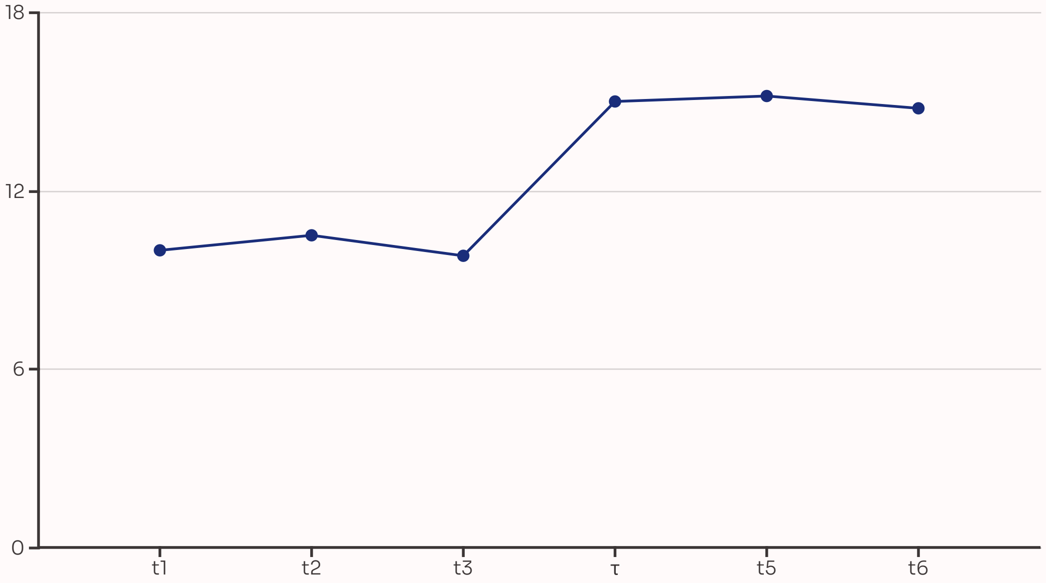


Modelos segmentados descrevem a série como composta por partes homogêneas. Cada segmento é governado por um conjunto de parâmetros, e o ponto de mudança define a fronteira entre esses segmentos.

$$x_t \sim \begin{cases} F_{\theta_1}, & t \leq \tau \\ F_{\theta_2}, & t > \tau \end{cases}$$

Onde $F\theta_1$ e $F\theta_2$ são distribuições antes e depois da mudança, θ1 e θ2 são parâmetros do modelo, e τ é o ponto de mudança.

Pontos de Mudança na Média



Mudança Clássica

Este é o tipo mais estudado de ponto de mudança, pois é simples de modelar e interpretar. A estrutura muda porque o nível médio da série se desloca.

$$x_t = \mu(t) + \varepsilon_t$$

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1, & t \leq \tau \\ \mu_2, & t > \tau \end{cases}$$

Pontos de Mudança na Variância

Mesmo que a média permaneça constante, a série pode mudar sua variabilidade. Isso representa uma mudança na volatilidade, onde a estrutura de dispersão se altera.

$$\sigma^2(t) = \begin{cases} \sigma_1^2, & t \leq \tau \\ \sigma_2^2, & t > \tau \end{cases}$$

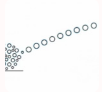
Onde $\sigma^2(t)$ é a variância no tempo t, σ_1^2 e σ_2^2 são variâncias antes e depois da mudança, e τ é o ponto de mudança.

Isso ocorre frequentemente em séries financeiras, onde períodos de baixa e alta volatilidade alternam-se ao longo do tempo.

Tipos de Mudanças Estruturais

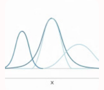
Mudança de Média

O nível médio da série se desloca: $\mu_1 \neq \mu_2$



Mudança de Variância

A dispersão dos dados se altera: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$



Mudança de Distribuição

A forma completa da distribuição muda: $F_1 \neq F_2$

Os pontos de mudança podem ser classificados pelo tipo de parâmetro afetado. Essa tipologia ajuda a organizar os diferentes fenômenos de mudança estrutural observados em séries temporais.

Pontos de Mudança Únicos e Múltiplos

Múltiplos Regimes

Em séries reais, é comum haver mais de um ponto de mudança. Isso significa que o processo passa por vários regimes ao longo do tempo.

$$\theta(t) = \theta_i, \quad \tau_{i-1} < t \leq \tau_i$$

Onde τ_i é o i-ésimo ponto de mudança e θ_i são os parâmetros do regime i.

Mudanças Abruptas e Graduais

Mudança Abrupta

Salto instantâneo nos parâmetros do modelo

Mudança Gradual

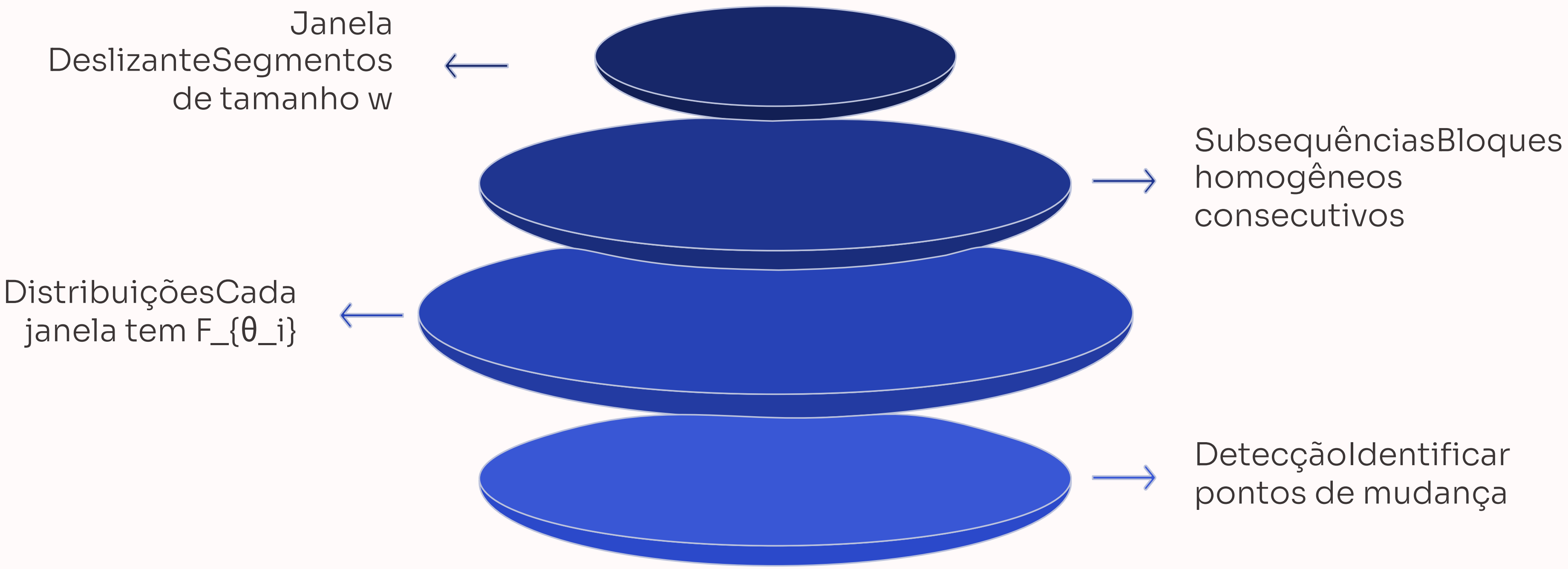
Transição contínua entre estados

Nem toda mudança ocorre de forma instantânea. Em muitos sistemas, os parâmetros evoluem gradualmente, produzindo transições suaves entre regimes:

$$\theta(t) = \theta_1 + g(t)$$

Onde θ_1 é o parâmetro inicial e g(t) é uma função de transição contínua que descreve a evolução gradual dos parâmetros.

Pontos de Mudança e Subsequências



Cada segmento da série pode ser visto como uma subsequência homogênea. Detectar pontos de mudança equivale a segmentar a série em partes estatisticamente consistentes.

$$X_{t:t+w} \sim F_{\theta_1} \quad \text{ou} \quad F_{\theta_2}$$

Onde Xt:t+w é a subsequência entre t e t+w, w é o tamanho da janela, e $F\theta_1$ e $F\theta_2$ são as distribuições que governam cada segmento.

Mudança nos Componentes Temporais

Mudança no Valor

O nível da série xt se altera

Mudança na Tendência

A direção tr(xt) muda

Mudança na Volatilidade

A variabilidade v(xt) se transforma

Os pontos de mudança podem afetar diferentes componentes da série temporal. Essa visão conecta change points à decomposição temporal do processo, permitindo análises mais refinadas.

Mudança como Ruptura da Tipicidade

Se a tipicidade é definida por um modelo estatístico, então o ponto de mudança representa a ruptura desse modelo. A série passa a ser explicada por uma nova estrutura.

$$F_{\theta_0} \to F_{\theta_1}$$

Onde $F\theta_0$ é a distribuição antes da mudança e $F\theta_1$ é a distribuição após a mudança.

Esta perspectiva posiciona os change points como eventos que desafiam a estabilidade do modelo estabelecido, exigindo uma redefinição da tipicidade estatística.

Anomalias Estruturais

Anomalia

Desvio local: $|rt| > \tau$

1

2

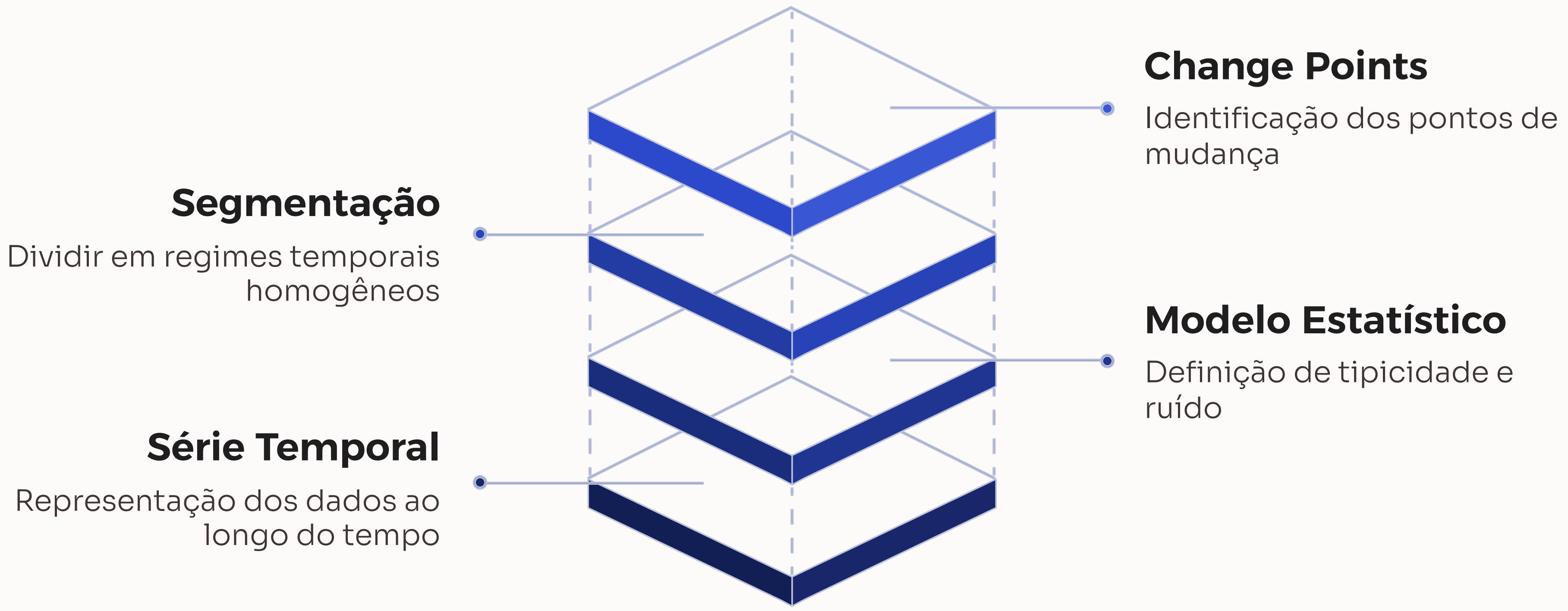
Change Point

Mudança persistente: $\theta_1 \rightarrow \theta_2$

Anomalias podem ser vistas como mudanças estruturais locais, afetando apenas observações pontuais. Já os change points representam mudanças globais, mais profundas e duradouras, que redefinem o comportamento do sistema.

Esta distinção é fundamental para escolher métodos apropriados de detecção e interpretação dos eventos observados em séries temporais.

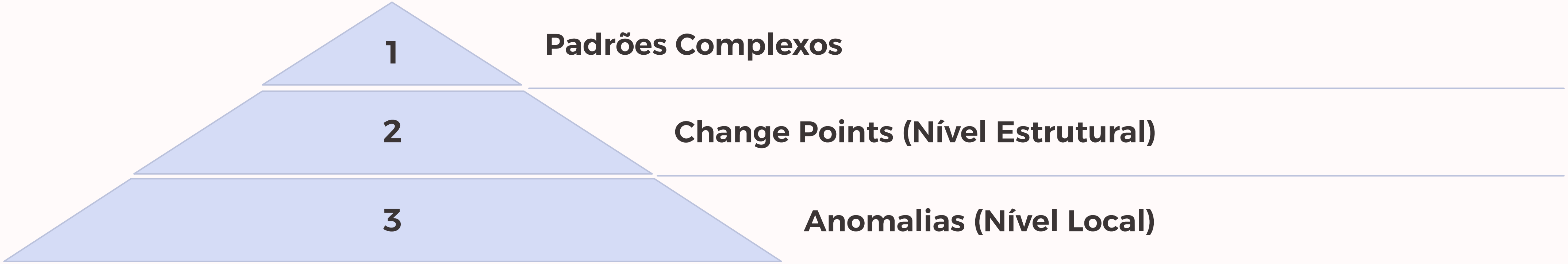
Arquitetura Conceitual dos Change Points



Os pontos de mudança não são observados diretamente. Eles emergem de uma cadeia conceitual que envolve representação da série, definição de tipicidade e segmentação temporal.

Esta arquitetura conceitual revela que a detecção de change points é um processo de inferência que depende fundamentalmente das escolhas de modelagem e dos critérios de segmentação adotados.

Change Points na Hierarquia de Eventos



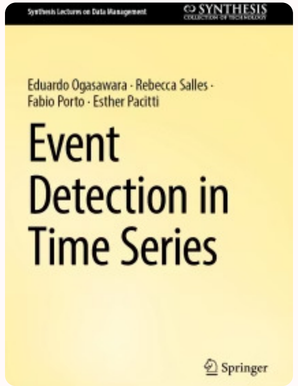
Na taxonomia de eventos, os change points ocupam um nível intermediário entre desvios pontuais e padrões complexos. Eles representam rupturas estruturais no comportamento temporal.

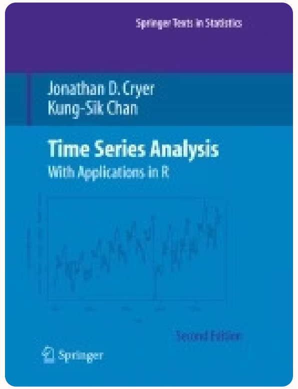
Onde □ é o conjunto de anomalias e □ é o conjunto de pontos de mudança. Esta hierarquia organiza os diferentes tipos de eventos observáveis em séries temporais.

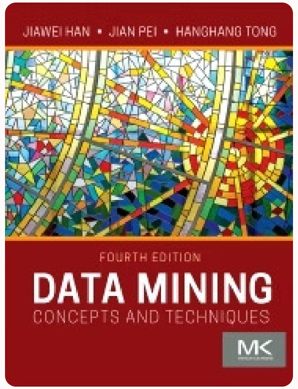
RECURSOS ACADÊMICOS

Referências Bibliográficas

Uma coleção cuidadosamente selecionada de obras fundamentais que abordam análise de séries temporais e mineração de dados.







Event Detection in Time Series

Ogasawara, E.; Salles, R.; Porto, F.; Pacitti, E. (2025). Publicação recente da Springer Nature Switzerland que explora técnicas avançadas de detecção de eventos em séries temporais.

Time Series Analysis: With Applications in R

Cryer, J. D.; Chan, K.-S. (2008). Obra clássica da Springer que combina fundamentação teórica sólida com implementações práticas.

Data Mining: Concepts and Techniques

Han, J.; Pei, J.; Tong, H. (2022). Quarta edição publicada pela Morgan Kaufmann que consolida conceitos fundamentais e técnicas avançadas de mineração de dados