0.0.1. Système de coordonnées cylindriques

Pour décrire certains mouvements, on préférera un autre système de coordonnées, basé sur les coordonnées polaires. On pose :

$$\begin{cases} r = OH \in \mathbb{R} \\ \theta = \left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OH}\right) \in [0; 2\pi[\text{ou}] - \pi; \pi] \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On se demande alors quelle est la base du système (BOND). On pose :

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$$

Lien entre coordonnées cartésiennes et polaires

On a :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

On peut alors poser :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\overrightarrow{u_y}\overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\overrightarrow{u_y}$$

Concernant $d\overrightarrow{u_r}\,dt$:

On pose :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_r} &= 1 \\ 2\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}.\overrightarrow{u_r} &= 0 \\ \longrightarrow \frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} &\perp \overrightarrow{u_r} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{u_r} &= k \times \overrightarrow{u_\theta} \\ d\overrightarrow{u_r} &= d\theta\overrightarrow{u_r} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$$

De même :

$$\frac{d\overrightarrow{u\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$$

On peut donc en conclure :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

Expression de l'accélération :

On pose :

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$$
$$\boxed{d\overrightarrow{l} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}}$$

On en déduit alors sa dérivée :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}\right)$$
$$\overrightarrow{a} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + rth\ddot{e}ta)\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

On simplifie le vecteur accélération (**à apprendre par coeur !**) :

$$\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

0.1. Système de coordonnées et base sphérique :

Pour se repérer sur Terre, on utilise le système de latitude/longitude, comme suit :

- φ : Longitude, défini sur $]-\pi;\pi[$.
- λ : Latitude, défini sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

Le système de coordonnées sphérique se pose alors par :
Attention, ici l'angle φ correspond à l'angle θ du système de coordonnées cylindriques
Remarque : on peut passer du système sphérique au système cartésien ou cylindrique

- $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
  $$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
  $$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

- $$z = r\cos\theta$$
  $$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
  $$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

Base sphérique : $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$