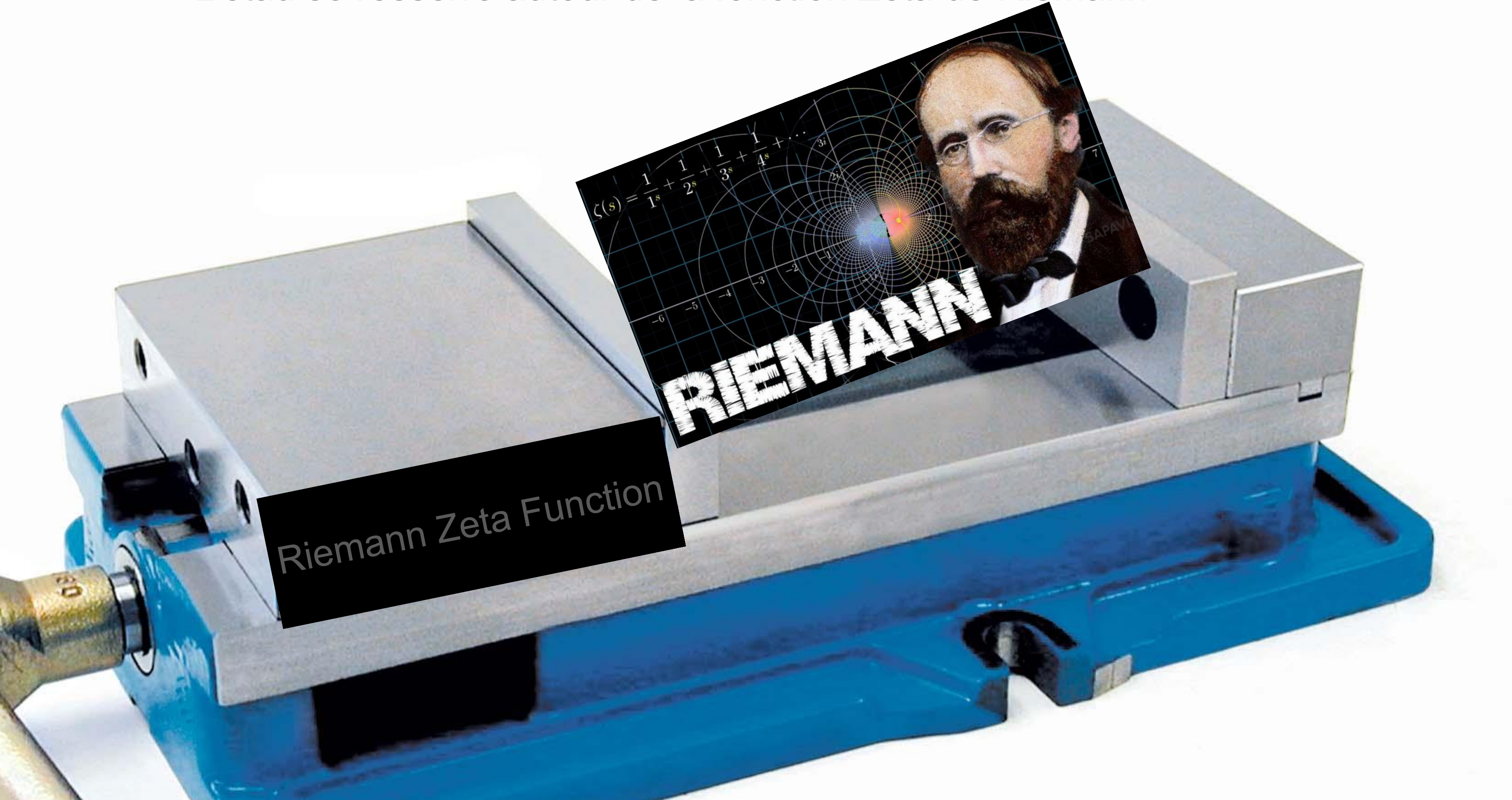
L’étau se resserre autour de la fonction Zêta de Riemann



$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{\infty}$$

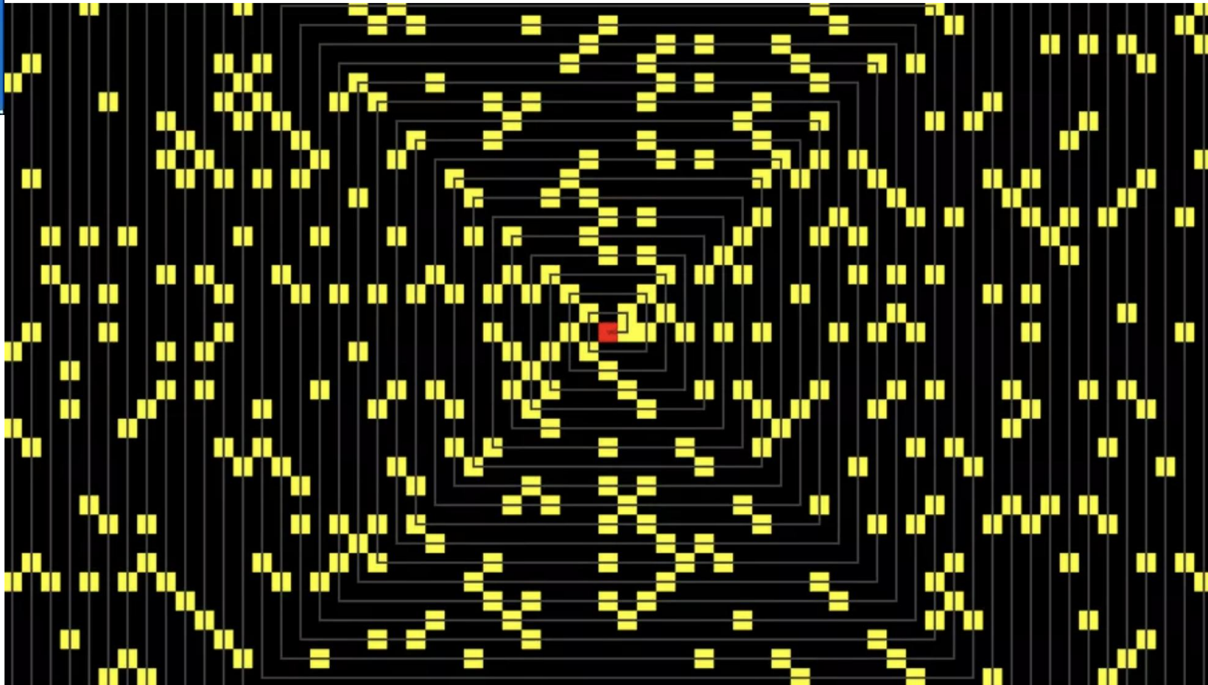
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \ldots + \frac{1}{\infty} = \frac{\pi^2}{6}$$

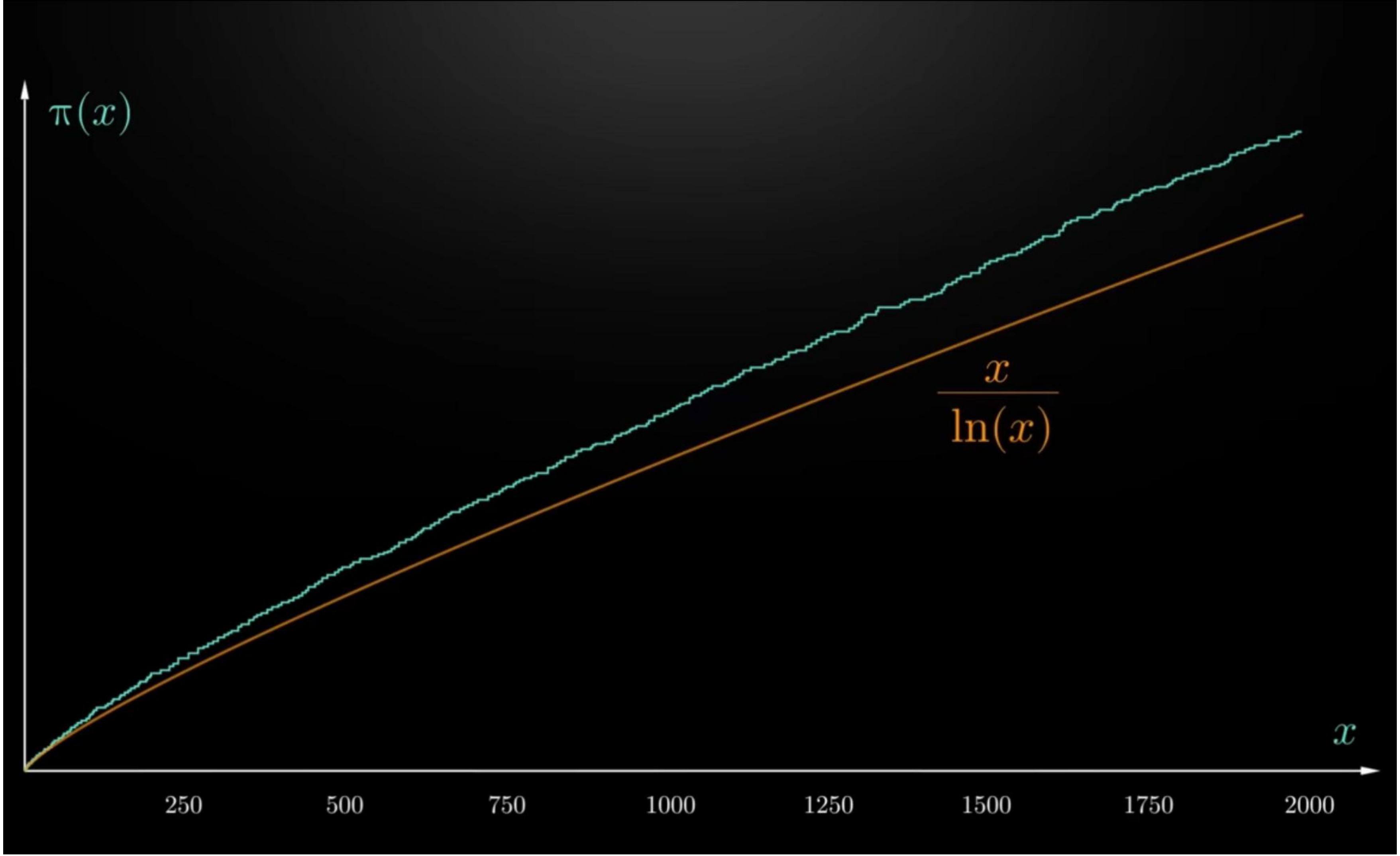
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} \ldots + \frac{1}{\infty} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \ldots \frac{1}{\infty}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

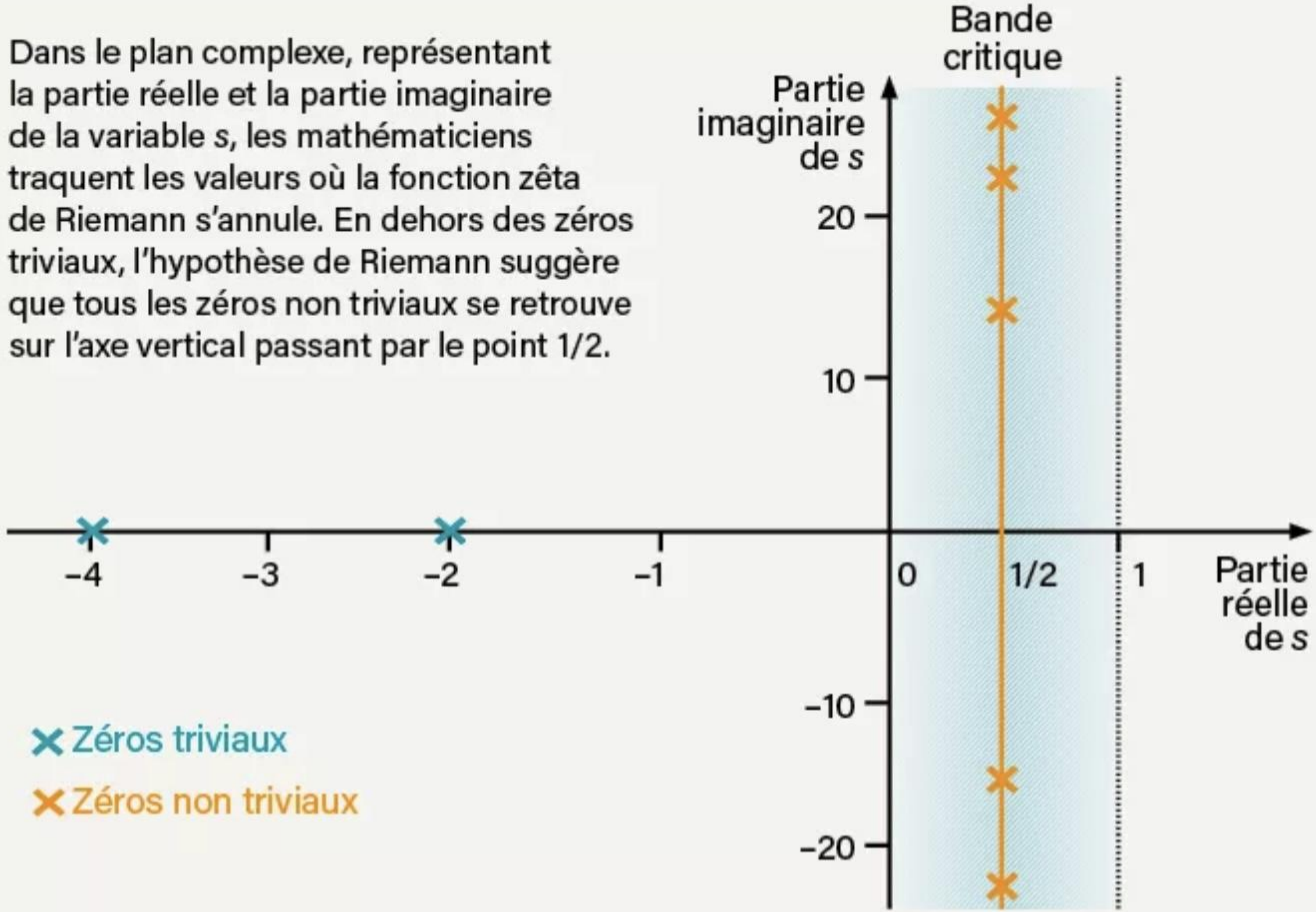
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln(x)} = 1$$



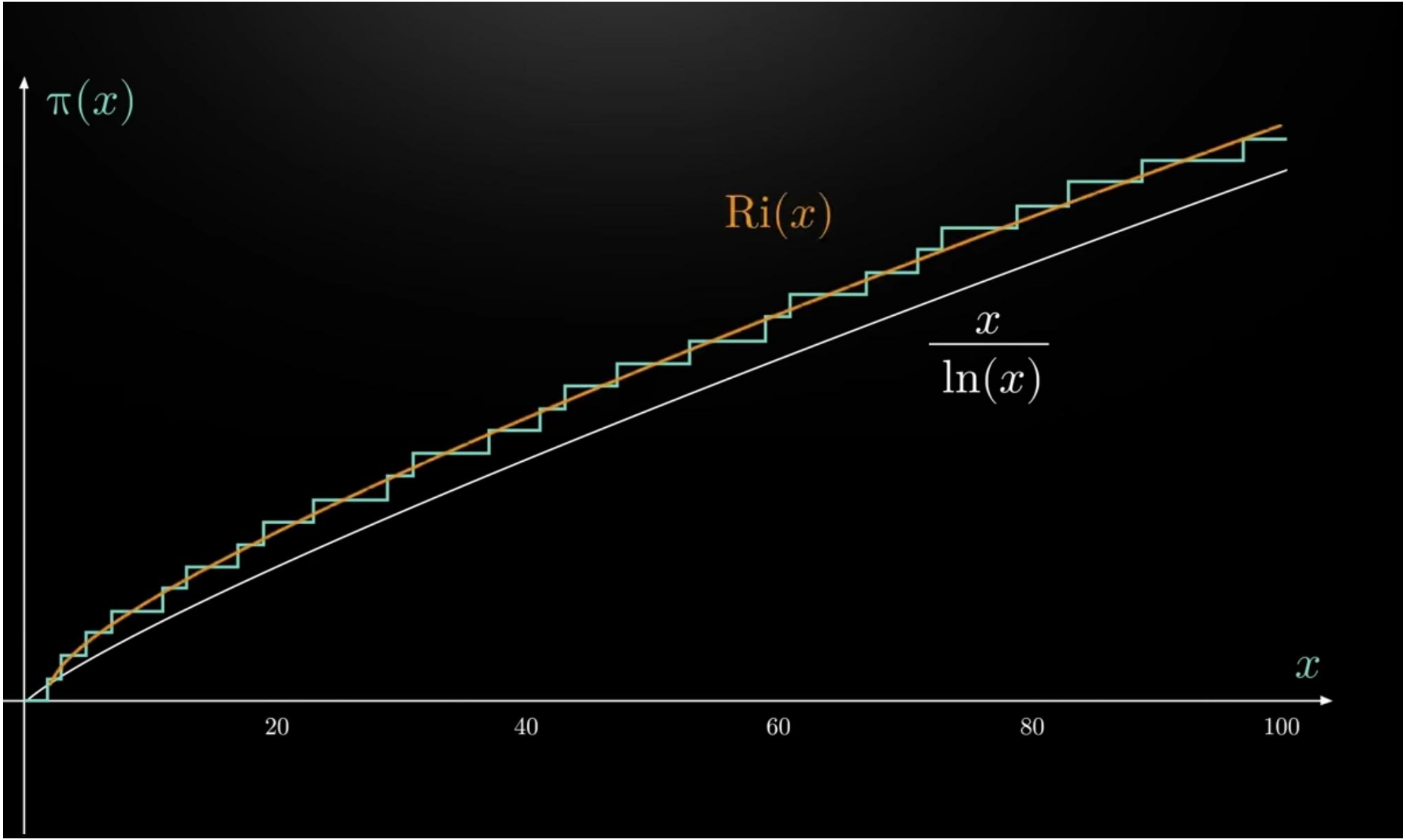


$\pi(x)$
$\frac{x}{\ln(x)}$
x
250
500
750
1000
1250
1500
1750
2000

Dans le plan complexe, représentant la partie réelle et la partie imaginaire de la variable *s*, les mathématiciens traquent les valeurs où la fonction zêta de Riemann s'annule. En dehors des zéros triviaux, l'hypothèse de Riemann suggère que tous les zéros non triviaux se retrouve sur l'axe vertical passant par le point 1/2.



$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{7^s}} \cdots$$



$\pi(x)$
$\mathrm{Ri}(x)$
$\frac{x}{\ln(x)}$
x
20
40
60
80
100

Lemma. ⓪ IF $T \geq N$, $W \subseteq [0,T]$ 1-sep.

THEN $\sum_{t \in W} |D(t)|^2 \lessapprox T \cdot \sum_n |b_n|^2$.

sketch. $\sum_{t \in W} |D(t)|^2 \lessapprox \int_0^T |D(t)|^2 dt \overset{\text{orth.}}{\lessapprox} T \cdot \sum_n |b_n|^2$.

Setup $\overset{⓪}{\Longrightarrow} |W| N^{2\sigma} \lessapprox T \cdot N$ ①.

IF $\sigma \leq \frac{3}{4}$, $N \leq T \leq N^{3/2} \Longrightarrow$ ① best known.

Thm. (G-Maynard) IF $\sigma > \frac{7}{10}$, $T \geq N^{6/5}$

THEN $|W| N^{2\sigma} \lessapprox N^{-\varepsilon(\sigma)} TN$

Almost counterexample

Setup
- $D(t) = \sum_{n=N}^{2N} b_n e^{it\sqrt{\frac{n}{N}}}$
- $\sum_n |b_n|^2 \leq N$
- $|D(t)| > N^\sigma$ on W
- $W \subseteq [0,T]$ 1-sep.

Lemma 0 $\Rightarrow$ Setup $\Rightarrow$ $|W| N^{2\sigma} \lessapprox T \cdot N$

$\sigma \leq \frac{3}{}$

Merci de votre écoute

Avez vous des questions ?

Sources:

-image étaux: www.hellopro.fr

- image Riemann & Zeta: aela.es

- wikipédia

- Arte

- Youtube