1 Un ABR est trié par dfs infixe

Notation : $infixe(A)$ est la liste des noeuds dans l'ordre d'un dfs infixe, et @ est la concaténation.

On montre par induction structurelle sur A un ABR que $infixe(A)$ est trié.

- Initialisation : Si A est vide, c'est immédiat.
- Hérédité : Si $A = N(g, x, d)$ avec g et d vérifiant l'implication, montrons que $infixe(g, x, d)$ est trié. On a :

  $$infixe(A) \;=\; \underbrace{infixe(g)}_{\text{trié par H.I.}} \;@\; x \;@\; \underbrace{infixe(d)}_{\text{trié par H.I.}}$$

  Par H.I, les deux sous-parcours infixes sont triés par ordre croissant. Or, $\max S(g) < x < \min S(d)$; donc x est bien placé. Il s'ensuit que le tout est trié, d'où l'hérédité.
- Conclusion : Le parcours infixe d'un ABR est trié.

2 Un arbre binaire trié par dfs infixe est ABR

On procède par induction structurelle sur A un arbre binaire.

- Initialisation : Si A est vide, c'est immédiat.
- Hérédité : Si $A = N(g, x, d)$ est un arbre binaire avec g et d vérifiant l'implication réciproque, montrons que A est un ABR. Comme $infixe(A)$ est trié, ses sous-suites $infixe(g)$ et $infixe(d)$ le sont aussi : donc par H.I., g et d sont des ABR.

  De plus comme $infixe(A)$ est trié, $\max S(g) = \max infixe(g) < x < \min infixe(d) = \min S(d)$. Donc A est un ABR, d'où l'hérédité.
- Conclusion : Un arbre binaire trié par parcours infixe est un ABR.

3 Insertions dans un ARN

Cf la méthode du cours. La méthode du TP étoilé, qui permet de parfois réparer un R-R sans le faire remonter jusqu'à la racine, n'est pas attendue.

4 $(2) \implies (2')$

J'écris ici la preuve que vous m'avez proposée en classe, qui est différente de celle faite dans le cours.

Soit A un arbre binaire bicolorié dont tous les chemins de la racine à $\perp$ contiennent le même nombre bh de noeuds Noirs, et x un noeud de A. Montrons que tous les chemins de x à $\perp$ contiennent tous autant de noeuds Noirs.

Comme x est un noeud de A, en remontant ses parentés on obtient $racine(A), ..., x$ un (unique) chemin vertical de la racine à x; on note $bd(x)$ (« **b**lack **d**epth ») son nombre de noeuds Noirs sans compter x.

Ainsi, tout chemin $x, ..., \perp$ correspond à un chemin $racine(A), ..., x, ..., \perp$. Or, tous ces chemins depuis la racine ont bh noeuds noirs, donc tous les $x, ..., \perp$ ont le même nombre $bh - bd(x)$ noeuds Noirs.

5 Caractère équilibré d'un ARN

Notations : n le nombre de noeuds, n_i le nombre de noeuds internes

On va montrer que $h(A) \leq 2\log_2(n_i + 1)$. Comme il y a au moins une feuille et par croissance de $\log_2$, on obtient $h(A) = O(\log_2(n))$.

D'après la propriété (1) des ARN (tout noeud Rouge a un parent Noir), dans tout chemin de la racine à $\perp$ au moins la moitié des noeuds sont Noirs. Donc :

$$bh(A) \geq \frac{h}{2}$$

Or d'après le lemme, $2^{bh(A)} - 1 \leq n_i$, donc $2^{\frac{h}{2}} \leq n_i + 1$. On en déduit le résultat par croissance de $\log_2$.