Exercices Du TD de Mathématiques

Arnaud, Hugo, Kim My, Raphaël, Yoan

07/11/2024

Exercice 10 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
k \leq t \leq k+1 & \\
&\Longrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \\
&\Longrightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \\
&\Longrightarrow \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} 1 dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} 1 dt \\
&\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}}
\end{aligned} \tag{1}$$

2) D'après la question 1, on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\
&\Longrightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq S_n - \frac{1}{n} \\
&\Longrightarrow S_n - 1 \leq \Big[\ln(n)\Big]_0^1 \leq S_n - \frac{1}{n} \\
&\Longrightarrow S_n - 1 \leq \ln(n) - \ln(1) \leq S_n - \frac{1}{n} \\
&\Longrightarrow \boxed{S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n}}
\end{aligned} \tag{2}$$

3) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n} \Longrightarrow \ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \tag{3}$$

Or on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(n) + \frac{1}{n} = +\infty \tag{4}$$

Par croissance comparée, on en déduit donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty} \tag{5}$$

De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{gathered}
S_n - 1 \leq \ln(n) \\
\implies S_n \leq \ln(n) + 1 \\
\implies \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)} \\
\implies \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n)\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)}{\ln(n)} \\
\implies \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}
\end{gathered} \tag{6}$$

Puis :

$$\begin{gathered}
\ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n} \\
\implies \ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \\
\implies \frac{\ln(n)+\frac{1}{n}}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \\
\implies \frac{\ln(n)\left(1+\frac{1}{n\ln(n)}\right)}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \\
\implies 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)}
\end{gathered} \tag{7}$$

On a donc finalement :

$$\boxed{1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}} \tag{8}$$

Or on a :

$$\begin{gathered}
\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n\ln(n)} = 1 \\
\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1
\end{gathered} \tag{9}$$

D'après le théorème des Gendarmes, on peut donc en conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1} \tag{10}$$

Exercice 9 :

Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$I(0,m) = \int_0^1 x^0(1-x)^m dx = -\int_0^1 -(1-x)^m dx$$

$$= -\Big[\frac{(1-x)^{m+1}}{m+1}\Big]_0^1 = -\frac{0^{m+1}}{m+1} + \frac{1^{m+1}}{m+1} \tag{11}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I(0,m) = \frac{1}{m+1}}$$

$$I(n,0) = \int_0^1 x^n(1-x)^0 dx = \int_0^1 x^n dx$$

$$= \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \tag{12}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I(n,0) = \frac{1}{n+1}}$$

2) Soit $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On a :

$$I = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx \tag{13}$$

On pose :

$$u : x \to \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \Longrightarrow \quad u' : x \to x^n$$

$$v : x \to (1-x)^m \Longrightarrow v' : x \to -m(1-x)^{m-1} \tag{14}$$

Or on a u et v de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\Longrightarrow I(n,m) = \Big[(1-x)^m \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 -m(1-x)^{m-1}\frac{x^{n+1}}{n+1}dx$$

$$\Longrightarrow I(n,m) = 0^m \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{1^m}{\frac{0^{n+1}}{n+1}} + \int_0^1 \frac{m}{n+1}(1-x)^{m-1}x^{n+1}$$

$$\Longrightarrow I(n,m) = \frac{m}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{m-1}x^{n+1} \tag{15}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I(n,m) = \frac{m}{n+1} I(n+1, m-1)}$$

3) Montrons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$:"$\forall n \in \mathbb{N}, I(n,m) = \frac{n!m!}{(n+m)!} I(n+m,0)$".

- On pose $m = 0$.

$$\frac{n!0!}{(n+0)!} I(n+0,0) = \frac{n!}{n!} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} = I(n,0) \tag{16}$$

La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$, la démonstration est initialisée.

- Supposons $m \in \mathbb{N}^*/P(n)$ est vrai, et vérifions $P(n+1)$. On pose :

$$\begin{aligned} I(n,m+1) &= \frac{m+1}{n+1} I(n+1,m) \\ \implies I(n,m+1) &= \frac{m+1}{n+1} \frac{(n+1)!m!}{(n+1+m)!} I(n+1+m,0) \\ \implies I(n,m+1) &= \frac{n!(m+1)!}{(n+m+1)!} I(n+m+1,0) \\ \implies & \boxed{I(n,m+1) = \frac{n!(m+1)!}{(n+m+1)!} I(n+m+1,0)} \end{aligned} \tag{17}$$

Ainsi, on a montré que $P(m) \Rightarrow P(m+1)$, la propriété est héréditaire.

- La propriété est vraie pour $m = 0$ et $\forall m \in \mathbb{N}, P(m) \Rightarrow P(m+1)$, elle est donc vraie par réccurence. On a donc :

$$\begin{aligned} \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, I(n,m) &= \frac{n!m!}{(n+m)!} I(n+m,0) \\ I(n,m) &= \frac{n!m!}{(n+m)!} \frac{1}{n+m+1} \\ & \boxed{I(n,m) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}} \end{aligned} \tag{18}$$