Exercices Du TD de Mathématiques

Adam, Lilian, Raphaël, Yoan

15/11/2024

<u>Exercice 10 :</u>

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = f(-x)$$

$$\implies \forall x \in \mathbb{R} f''(x) = f'(-x) = -f'(x) \tag{1}$$

$$\implies \forall x \in \mathbb{R} f''(x) + f'(x) = 0$$

Déterminons l'ensemble des solutions de cette équation différentielle. On pose pour cela l'équation caractéristique dans $\mathbb{C}$:

$$r^2 + 1 = 0$$

On a alors $r_1 = i$ et $r_2 = -i$. On peut alors en déduire l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{\lambda e^{it} + \mu e^{-it}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}\right\}}$$

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longrightarrow \lambda e^{it} + \mu e^{-it} \end{cases}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lambda i e^{it} - \mu i e^{-it}$$

On pose alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$$

$$\iff \lambda i e^{it} - \mu i e^{-it} = \lambda e^{it} + \mu e^{-it}$$

$$\iff \lambda e^{it} - i\lambda e^{it} + \mu e^{-it} + i\mu e^{-it} = 0$$

$$\iff \lambda - i\lambda + \mu e^{-2it}(1+i) = 0$$

$$\iff \lambda - i\lambda + \mu(\cos(-2t) + i\sin(-2t))(1+i) = 0$$

$$\iff \lambda - i\lambda + \mu(\cos(2t) - i\sin(2t))(1+i) = 0$$

$$\iff \lambda - i\lambda + \mu\cos(2t) - i\mu\sin(2t) + i\mu\cos(2t) + \mu\sin(2t) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu(\cos(2t) + \sin(2t)) & = 0 \\ -\lambda + \mu(cos(2t) - sin(2t)) & = 0 \end{cases}$$

Posons alors $x = 0$:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu(1+0) = 0 \\ -\lambda + \mu(1-0) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \lambda = \mu \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Finalement, on peut en conclure que l'ensemble des fonctions qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$ est :

$$\mathcal{S} = \boxed{\left\{x \longrightarrow 0\right\}}$$

Exercice 7 :

On pose :

$$z = \frac{1}{y} \Longrightarrow z' = \frac{-y}{y^2}$$

Ainsi, $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} & xy' + 3y = x^2y^2 \\ \Longleftrightarrow & -\frac{xy'}{y^2} - 3\frac{1}{y} = x^2 \\ \Longleftrightarrow & \; xz' - 3z = -x^2 \\ \Longleftrightarrow & \; z' - \frac{3}{x}z = -x \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_0 = \left\{\lambda e^{3\ln(x)}, \lambda \in \mathbb{K}\right\} = \left\{\lambda x^3, \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

Soit $y : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longrightarrow \lambda(x)x^3 \end{cases}$. On pose :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} & \Longleftrightarrow \lambda(x)'x^3 = x \\ & \Longleftrightarrow \lambda(x)' = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\lambda(x) = \frac{1}{x}$$

On peut donc en déduire l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{x \longrightarrow \lambda x^3 + \frac{1}{x}, \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

Or on a $y\frac{1}{z}$. On peut donc en déduire l'ensemble des solutions possibles :

$$\mathcal{S}_2 = \left\{x \longrightarrow \frac{1}{\lambda x^3 + x^2}, \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

Synthèse : Déterminons maintenant les fonctions y solutions. Soit $y \in \mathcal{S}$. On a y dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \frac{-3\lambda x^2 + 2x}{(\lambda x^3 + x^2)^2}$$

$$xy' + 3y = x^2y^2$$

$$\iff \frac{-3\lambda x^3 + 2x^2}{(\lambda x^3 + x^2)^2} + \frac{3}{\lambda x^3 + x^2} = \frac{x^2}{\lambda x^3 + x^2}$$

$$\iff \frac{-3\lambda x^3 + 2x^2}{\lambda x^3 + x^2} + 3 = x^2$$

$$\iff -3\lambda x^3 + 2x^2 + 3\lambda x^3 + 3\lambda x^2 - x^2 = 0$$

$$\iff 3\lambda x^2 + x^2 = 0$$

$$\iff 3\lambda + 1 = 0$$

$$\iff \boxed{\lambda = -\frac{1}{3}}$$

Finalement, l'ensemble de l'équation $xy' + 3y = x^2y^2$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{-\frac{1}{3}x^3 + x^2}\right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{x^3 + 3x^2}\right\}}$$