1 Étage p d'un arbre binaire

Soit A un arbre binaire. Nommons e_p le nombre de noeuds à profondeur p dans A. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $e_p \leq 2^p$.

- Initialisation : Il y a au plus 1 noeud de profondeur 0 : la racine.
- Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang p, montrons-la vraie au rang $p+1$.

  Chaque noeud de profondeur $p+1$ est enfant d'un parent de profondeur p. Chacun de ces parents a au plus 2 enfants. Il s'ensuit que $r_{p+1} \leq 2r_p$.

  Donc par H.R., $r_{p+1} \leq 2^{p+1}$, et cette borne est atteinte.
- Conclusion : Nous avons prouvé que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $r_p \leq 2^p$.

Remarque. Il est important de faire la preuve par récurrence une fois l'arbre A introduit : on fait une preuve par récurrence sur la profondeur dans un A fixé (quelconque, mais fixé).

2 $f = n_i + 1$ dans un arbre binaire strict

Montrons la propriété vraie par induction structurelle sur un arbre binaire strict A.

- Initialisation : Si A est une feuille, c'est immédiat.
- Hérédité : Si A est de la forme $N(\_, g, d)$ avec g et d (arbres binaires stricts) vérifiant la propriété, montrons la propriété vraie pour A. On note $n_i(g)$ le nombre de noeuds internes de g et $f(g)$ son nombre de feuilles (de même pour A et d).

  Les noeuds internes de A sont partitionnés en : sa racine, les noeuds internes de g, et ceux de d. Donc $n_i(A) = 1 + n_i(g) + n_i(d)$.

  Similairement, $f(A) = f(g) + f(d)$ (la racine n'est pas une feuille).

  En appliquant l'hypothèse d'induction on obtient : $f(A) = (n_i(g)+1) + (n_i(d)+1) = 1 + n_i(A)$.

  D'où l'hérédité.
- Conclusion : On a prouvé par induction structurelle que pour tout arbre binaire strict, $f = n_i + 1$.

3 Binaire strict parfait implique feuille même profondeur

Soit A un arbre binaire strict. Prouvons l'implication « si A est parfait, alors toutes les feuilles de A sont à même profondeur » par induction structurelle sur A.

- Initialisation : Si A est une feuille, c'est immédiat.
- Hérédité : Si A est un arbre binaire strict de la forme $N(\_, g, d)$ avec g et d (arbres binaires stricts) vérifiant la propriété, montrons la propriété vraie pour A. Supposons donc A parfait.

  Les feuilles de A sont celles de g et de d. Or, comme A est parfait, g et d le sont aussi : donc d'après l'hypothèse d'induction, les feuilles de g sont à même profondeur $h(g)$ dans g donc à même profondeur $h(g)+1$ dans A . De même dans d.

  Mais comme A est parfait, $h(g) = h(d) = h(A) - 1$. D'où l'hérédité.
- Conclusion : On a prouvé par induction structurelle que pour tout arbre binaire strict, s'il est parfait alors ses feuilles sont à même profondeur.

4 LCRS

Cf Cours et TD.