Exercices Du TD de Mathématiques

Arnaud, Hugo, Ki Mi, Raphaël, Yoan

09/01/2025

<u>Exercice 12 :</u>

On pose :

- $f : [0; +\infty[\longrightarrow +\infty$ continue sur $\mathbb{R}$
- $|f|$ tend vers $+\infty$.

Montrons d'abord que f diverge, puis montrons que f que f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

- Supposons par l'absurde que f est bornée. Alors :

$$\begin{aligned} &\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, A \leq f(x) \leq B \\ &\Longrightarrow |f(x)| \leq |A| + |B| \end{aligned}$$

  Ainsi, f est bornée, ce qui est absurde, puisque f tend vers $+\infty$.
  On en conclut que f diverge.

- On pose :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty \\ &\Longrightarrow \forall M \geq 0, \exists A \geq 0 / \forall x \geq A, |f(x)| > M \\ &\Longrightarrow f(x) < -M \quad \text{ou} \quad f(x) > M \end{aligned}$$

  Supposons par l'absurde que :

$$\begin{aligned} &\exists x > A / f(x) < -M < 0 \\ &\exists y > A / f(y) > M > 0 \end{aligned}$$

  or f est continue sur R, ainsi par théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit :

$$\begin{aligned} &\exists z > A / f(z) = 0 \\ &\Longrightarrow \boxed{|f(z)| = 0} \end{aligned}$$

  Or :

$$\forall x > A, \boxed{|f(x)| > M > 0}$$

  On arrive à une absurdité, on en conclut donc que f tend vers $\pm\infty$.

Ainsi, on a montrée que f tend vers $\pm\infty$.

Exercice 17 :
On pose :

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne ($k \in [0;1[$), telle que $f(0) = 0$.
- $a \in \mathbb{R}$.
- $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrons que (u_n) converge vers 0.

f est lipschitzienne, donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq k|x| \\ \Longrightarrow |u_{n+1}| &\leq k|u_n| \end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence $P(n \in \mathbb{N})$: "$|u_n| \leq k^n|a|$".

- Posons $n = 0$. Alors :
$$|u_0| = |a| \leq |a|$$
- Soit $n \in \mathbb{N}/P(n)$ est vraie. On a alors :
$$\begin{aligned} |u_n| &\leq k^n|a| \\ \Longrightarrow |u_{n+1}| &\leq k|u_n| \leq k^{n+1}|a| \\ \Longrightarrow & \boxed{|u_{n+1}| \leq k^{n+1}|a|} \end{aligned}$$
- En conclusion, on a montré que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq k^n|a|$$

Or la suite $(k^n|a|)$ est géométrique de raison $k \in [0;1[$, donc elle converge vers 0. Ainsi, $|u_n|$ est majorée par une suite qui converge vers 0 et par 0 (par propriétés de la valeur absolue), par théorème de l'encadrement, elle converge donc vers 0.

On a donc montré que (u_n) converge vers 0.