1. Étude des petites oscillations autour d'une position stable

Idée : Montrer qu'autour d'une position d'équation stable, le mouvement se ramène à une première approximation à celui d'un oscillateur harmonique.

Il faut "paraboliser" le puit de potentiel.

Approximation d'une fonction par un polynôme de degré 2

$$f'(x) \approx f'(x_0) + f''(x_0) \times (x - x_0)$$

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + C$$
$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}$$

Soit $r = r_q$ une position d'équilibre. On a :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r_q) = 0$$
$$\Longrightarrow \mathcal{E}_p \approx \mathcal{E}_p(r_q) + \frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r_q)(r - r_q)$$

Finalement, on a :

$$\mathcal{E}_p(r) \approx \mathcal{E}_p(r_q) + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_q)(r - r_q)$$

Or :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = C$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_p(r_q) + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_q)(r - r_q)^2 = C$$

Pour simplifier, notons $\epsilon = r - r_0$, alors $\dot{\epsilon} = \dot{r}$.

$$\frac{1}{2}m\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_q)\epsilon^2 = C$$

On dérive par rapport au temps :

$$m\dot{\epsilon}\ddot{\epsilon} + \frac{d\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_q)\dot{\epsilon}\epsilon = 0$$