1 Semaines précédentes

Cf semaines précédentes.

2 Ackerman est au moins sur-linéaire en son second argument

Notons $H_{n,x}$ la propriété « $Ack(n,x) > x$ ». Montrons la vraie pour toute paire (n,x) par induction bien fondée sur (n,x) dans $(\mathbb{N}^2, \leq_{lex})$.

- **Initialisation** Le seul élément minimal de $\leq_{lex}$ est $(0,0)$. Nous allons traiter plus de cas ici : tous les cas $(0,x)$ (c'est plus confortable).

  Soit $(0,x) \in \mathbb{N}^2$. Alors $A(0,x) = x+1 > x$.

- **Hérédité** Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^2$ avec $n > 0$. Supposons H vraie pour tout $(n',x') <_{lex} (n,x)$ et montrons-la vraie pour (n,x). D'après la définition de A, il reste deux cas à distinguer :

  - Si $x = 0$. Alors $A(n,x) = A(n-1,1)$. Or, $(n-1,1) <_{lex} (n,x)$ car $n-1 < n$. Donc d'après $H_{n-1,x}$, $A(n-1,1) > 1$. D'où $A(n,0) > 0$.
  - Sinon, $A(n,x) = A(n-1, A(n,x-1))$. Or, $n-1 < n$ donc $(n-1, A(n,x-1)) <_{lex} (n,x)$, donc par hypothèse de récurrence $A(n-1, A(n,x-1)) > A(n,x-1)$.

    Or, $(n,x-1) <_{lex} (n,x)$. Donc par hypothèse de récurrence, $A(n,x-1) > x-1$. Comme ce sont des entiers, on a $A(n,x-1) \geq x$.

    Bout à bout :

    $$A(n,x) = A(n-1, A(n,x-1)) > A(n,x-1) \geq x$$

    On obtient donc $A(n,x) > x$.

  D'où l'hérédité.

- **Conclusion** Par principe de récurrence bien fondée, la propriété est vraie pour toute paire (n,x).

3 Fusion de listes triées

Voici une façon d'écrire la fonction demandée :

```
let rec merge l0 l1 =
  match (l0 , l1) with
  | [] , [] -> []
  | [] , _  -> l1
  | _  , [] -> l0
  | t0::q0 , t1::q1 ->
      if t0 <= t1 then t0 :: (merge q0 l1)
      else t1 :: (merge l0 q1)
```

Cette fonction ni contient ni boucle ni appels d'autres fonctions : il ne reste qu'à prouver la terminaison de la suite d'appels récursifs. Pour cela, montrons que (`l0`,`l1`) est un variant selon le produit (bien fondé) des ordres structurels. À chaque appel récursif, une des deux listes perd sa tête (et décroit donc selon l'ordre structurel), et l'autre est inchangée. Il s'ensuit que la paire (`l0`,`l1`) décroit strictement selon un ordre bien fondé : c'est donc un variant, et la terminaison s'ensuit.

Remarque. On peut aussi faire cette preuve par récurrence sur la somme des longueurs de `l0` et `l1`

Correction partielle, informellement : si une des deux listes est vide puisque l'autre est triée elle est la fusion triée des deux et c'est bien ce que l'on renvoie. Si les deux listes sont non-vides, le minimum du tout est le minimum d'une des deux listes donc le minimum des têtes des listes (elles sont triées !). La fusion triée est donc la plus petit tête suivie de la fusion triée du reste, et c'est ce que l'on renvoie.