EC2 : Régime transitoire des circuits linéaires

Yoan de CORNULIER

Contents

Introduction

Le but de ce cours est d'étudier les circuits linéaires entre 2 régiments permanents continus.

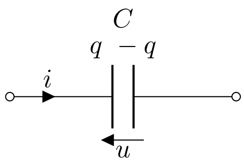
Dans des circuits combinant juste des résistances et des sources, les grandeurs varient instantanément, il n'y a donc pas de régime transitoire.
On peut comparer cela au passage d'un échelon u(t) en SI

Nous introduisons donc deux nouveaux dipôles : le condensateur et la bobine.

1. Deux nouveaux dipôles

1.1. Le condensateur

Un condensateur est fourni de 2 armatures conductrices, séparées par un isolant, en "influence totale". Il peut être modélisé par le schéma suivant :



Relation charge/tension et capacité

On admet la relation :

$$\boxed{q = C.u}$$

avec :

- C la capacité du condensateur
- u la tension aux bornes du condensateur
- i le courant traversant le condensateur

Relation constitutive

Durant un régime transitoire, on note $dq = i.dt$ la quantité de charge arrivant sur l'armature durant une durée dt, et on pose :

$$q = C.u$$

$$\Longrightarrow dq = C.du$$

$$\Longrightarrow i.dt = C.du$$

$$\Longrightarrow \boxed{i = C\frac{du}{dt}}$$

Remarque : en convention générateur, on aurait $i = -C\frac{du}{dt}$.

En régime continu, on a : $i(t) = I$ et $u(t) = U$. On peut alors en déduire que :

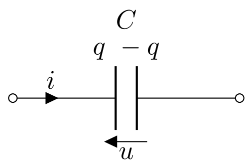
$$\frac{du}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow C\frac{du}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{I = 0}$$

Le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert.

Aspect énergétique



La puissance consommée par le condensateur vaut à l'instant t :

$$p(t) = u(t)i(t) = C.u\frac{du}{dt}$$

L'énergie consommée entre un instant t et un instant $t + dt$ vaut donc :

$$p(t)dt = C.u\frac{du}{dt}dt = C.u.du$$

On peut en déduire qu'entre 2 instants t_1 et t_2, l'énergie consommée vaut :

$$E_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} C.u.du = [\frac{1}{2}C.u^2]_{t_1}^{t_2}$$

$$\boxed{E_{t_1 \to t_2} = \frac{1}{2}C.u^2(t_2) - \frac{1}{2}C.u^2(t_1)}$$

Ce résultat illustre le fait qu'un condensateur chargé emmagasine une énergie donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}C.u^2 = \frac{q^2}{2C}$$

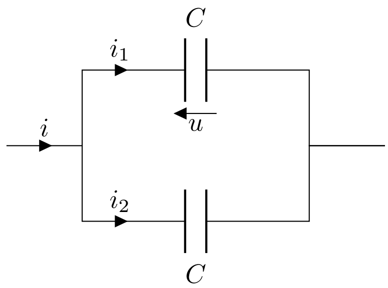
Cette énergie est stockée dans le volume entre les armatures sous forme d'un champ de force électrique (énergie potentielle électrique).

Un condensateur peut être générateur ou récepteur

$\longrightarrow$ Conséquence importante : Par principe de conservation de l'énergie, on a E_c continue, on peut en déduire que la tension aux bornes du condensateur est continue dans le temps.

Association de condensateurs

- En parallèles :



On pose alors :

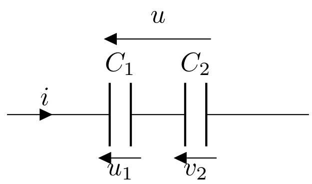
$$i = i_1 + i_2 \qquad \text{Or on a :} \qquad \begin{cases} i_1 = C_1 \frac{du}{dt} \\ i_2 = C_2 \frac{du}{dt} \end{cases}$$

On peut donc en déduire :

$$i = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{du}{dt}$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

- En série :



On pose alors :

$$u = u_1 + u_2$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt}$$

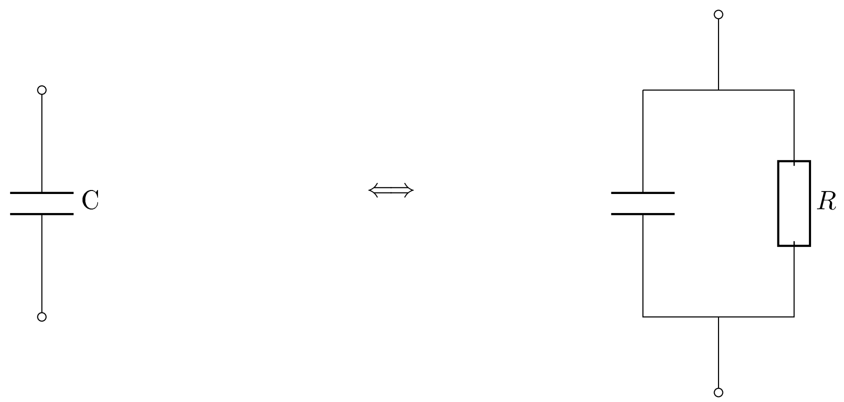
Or on a : $$\frac{du}{dt} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2}$$

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)i$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Condensateur réel

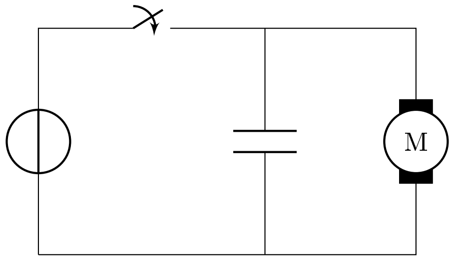
Le modèle du condensateur présenté ci-avant fonctionne bien, mais on observe plusieurs différences dans la réalité. Par exemple, si on laisse un condensateur chargé, sans générateur, durant un certain temps, il se déchargera naturellement. En réalité, il faudrait modéliser le condensateur selon :



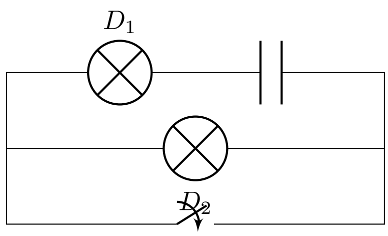
Bien que sauf mention contraire, il ne sera pas nécessaire d'utiliser ce modèle dans un exercice, sauf mention contraire de l'énoncé (On laissera rarement un condensateur à vide).

Expériences

- On abaisse le premier interrupteur seulement pour charger le condensateur, puis l'on abaisse le deuxième condensateur. Le moteur tourne alors, alimenté seulement par le condensateur :

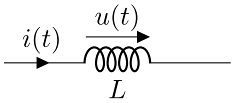


- On abaisse l'interrupteur, puis on le relève. On remarque que la l'ampoule D_1 brille un instant puis s'éteint. On peut expliquer cela par l'idée que durant un certain régime transitoire, le condensateur se charge et un courant passe dans D_1. Puis, lorsque le condensateur est chargé, le courant passant par D_1 devient nul, et celui passant par D_2 est total.



1.2. La bobine

Modèle et relation constitutive d'une bobine idéale



$$\Longrightarrow \qquad u = L\frac{di}{dt}$$

On nomme L l'inductance, que l'on mesure en $V.A^{-1}.s = \Omega.s = H$ en henry.

Pour l'instant, on admet cette relation, que l'on démontrera plus tard dans un chapitre d'électro-magnétisme.

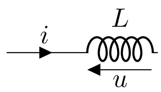
Équivalent en continu

$$\begin{cases} u & = \text{cste} \\ i & = \text{cste} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{di}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{u = L\frac{di}{dt} = 0}$$

Énergie emmagasiné



$$p(t) = u(t)i(t)$$

L'énergie consommée entre 2 instants t_1 et t_2 est alors :

$$\mathcal{E}_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} Li\frac{di}{dt}dt$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{t_1 \to t_2} = \frac{1}{2}Li^2(t_2) - \frac{1}{2}Li^2(t_1)}$$

Cette équation, de même que pour le condensateur, suggère que l'on peut attribuer à une bobine parcourue par un courant i une énergie potentielle donnée par la relation :

$$\mathcal{E}_l = \frac{1}{2}Li^2$$

Cette énergie est emmagasiné sous forme de champ magnétique dans le volume de la bobine.

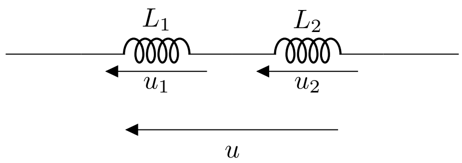
Comportement

- récepteur si $|i| \nearrow$
- générateur si $|i| \searrow$

Conséquence importante : continuité du courant i qui traverse une bobine.

Associations

- En série :



$$u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

- En parallèle (rarement utilisé) :
  Schéma 7

$$i = i_1 + i_2$$

$$\implies \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

$$\implies \frac{di}{dt} = (\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2})u$$

$$\implies L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Bobine réelle

Puisque une bobine est composé d'une longueur parfois grande devant sa résistivité, on ne peut négliger sa résistance. On modélise donc :

Schéma 8

On a alors :

- bobine idéale : $u = L\frac{di}{dt}$
- bobine réalle : $u = L\frac{di}{dt} - ri$

Conséquence de la continuité du courant

Si l'on "force" une discontinuité du courant, par exemple en frottant un fil à un lime, de très fortes tensions peuvent apparaître (5V à 500V), ce qui peut être dangereux, pour nous ou pour des composants électroniques.

2. Exemples de cicrcuits du premier ordre

2.1. Circuit RC en régime libre

Position du problème :

Schéma 1

Pour $t < 0$, on a $u(t) = U_0 \neq 0$. À $t = 0$, on ferme K. On cherche à modéliser $u(t)$ et $i(t)$.

On schématise :

Schéma 11

On peut alors en déduire les équations en 0^++ :

$$u = Ri$$

$$i = -C\frac{du}{dt}$$

$$u = -RC\frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{1}{RC}u = 0$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{u}{\tau} = 0$$

en posant $\tau = RC$ le temps caractéristique du circuit RC. On reconnait alors une équation différentielle homogène, du premier ordre et à coefficient constant. On peut donc en déduire l'ensemble des solutions par continuité de u :

$$u(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On a donc $U_0 = \lambda$, et donc finalement,

$$u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Et :

$$i(t) = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On trouve les constantes d'intégrations grâce aux conditions initiales déterminées par les continuités. On peut donc en déduire les courbes de $u(t)$ et $i(t)$:

Schéma 12

On remarque aussi que :

$$u(\tau) = \frac{U_0}{e} = 0,37U_0$$

On peut alors se demander au bout de combien de temps a-t-on 1% de la charge initiale. On pose :

$$u(x) = \frac{U_0}{100} = U_0 e^{-\frac{t}{x}}$$

$$e^{\frac{x}{\tau}} = 100$$

$$x = \tau \ln 100 \approx = 4,6\tau \approx 5\tau$$

On peut donc en déduire que par convention, la durée du régime est transitoire est de 5τ.

2.1.1. Aspect énergétique

$$E_c = \frac{1}{2}Cu^2 E_c(t) = \frac{1}{2}CU_0^2 e^{\frac{-2t}{\tau}}$$

Schéma 13

La constante de temps de l'énergie vaut donc $\frac{\tau}{2}$.

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{t} = 0$$

Donc :

$$u\frac{du}{dt} + \frac{u^2}{\tau} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \frac{2}{\tau}\frac{u^2}{2} = 0$$

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{E_c}{\tau/2} = 0$$

2.1.2. Bilan énergétique

Le condensateur fournit une énergie égale à :

$$E_c(0) - E_c(\infty) = C.U_0^2$$

qui est équivalente à l'énergie reçue par la résistance :

$$p_R(t) = Ri^2(t)$$

$$p_R(t) = \frac{U_0^2}{R} e^{\frac{-2t}{\tau}}$$

$$E_R = \int_{t=0}^{\infty} p_R(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{U_0^2}{R} e^{\frac{-2t}{\tau}}\,dt$$

$$= \frac{U_0^2}{R}\left[\frac{-\tau}{2} e^{\frac{-2t}{\tau}}\right]$$

$$= \frac{U_0^2}{R} \times \frac{\tau}{2} = \frac{U_0^2 \times RC}{2R} = \frac{1}{2} C U_0^2$$

2.2. Réponse d'un circuit RC série à un échelon de tension (réponse indicielle)

2.2.1. Position du problème

Schéma 14

On suppose que pour $t < 0, u(t) = 0$ (le condensateur condensateur). À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. On veut étudier la charge du condensateur par la source à travers R, c'est à dire modéliser $u(t)$ et $i(t)$, ainsi que l'aspect énergétique.

2.2.2. Analyse à $t = 0^+$

Schéma 15

Puisque la tension est continue aux bornes du condensateur, on a $u(0^+) = 0$, il se comporte donc alors comme un fil. Par loi des mailles, on peut en déduire par loi des mailles :

$$E = Ri(0^+) \Longrightarrow i(0^+) = \frac{E}{R}$$

2.2.3. À $t = \infty$

On se pose alors en régime continu. Le condensateur est alors modélisable en un interrupteur ouvert.

Schéma 16

$$t(\infty) = 0 \Longrightarrow u(\infty) = E$$

2.2.4. Équation différentielle pour $t > 0$

Puisque la tension $u(t)$ est continue aux bornes du condensateur, il vaut mieux d'abord déterminer $u(t)$.

Par loi des mailles, on pose :

- $i = C\frac{du}{dt}$
- $Ri + u = E$

On pose donc, avec $\tau = RC$:

$$RC\frac{du}{dt} + u = E$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}$$

On peut donc en déduire l'ensemble des solutions :

$$S = \left\{ t \longrightarrow \lambda e^{\frac{-t}{\tau}} + E, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Or nos conditions initiales posent que $u(0^+) = 0$. On peut donc en déduire que $\lambda = -E$. On peut alors en conclure que :

$$\boxed{u(t) = E(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})}$$

$$i = \frac{E - u}{R}$$

$$\Longrightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R} e^{\frac{-t}{\tau}}}$$

2.2.5. Aspect énergétique

L'énergie fournie par la source vaut :

$$p_G(t) = E.i(t)$$

$$\mathcal{E}_G = \int_0^\infty p_G(t)dt = E \int_0^\infty \frac{dq}{i(t)dt}$$

Schéma 17

$$\mathcal{E}_G = E\Big[q(\infty) - q(0)\Big] = E\Big[Cu(\infty) - Cu(0)\Big] \Longrightarrow \boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}$$

Or l'énergie reçue par le condensateur vaut :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(0) = \frac{1}{2}CE^2 \Longrightarrow \boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}\mathcal{E}_G}$$

2.2.6. Énergie dissipée dans la résistance

On note la puissance dissipée dans la résistance :

$$p_R(t) = Ri^2 = \frac{E^2}{R} e^{\frac{-2t}{\tau}}$$

On peut alors en déduire :

$$E_R = \int_0^\infty p_R(t)dt = \cdots = \frac{1}{2}CE^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{E}_G = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_R$$

Ainsi, quelque soit la valeur de la résistance, l'énergie dissipée dans la résistance est égale à l'énergie reçue par le condensateur.

On pourrait penser qu'il peut se poser un problème si l'on pose une résistance de valeur de résistance nulle, par exemple un fil. En réalité, un fil aura toujours une valeur de résistance, aussi faible soit-elle. L'intensité du courant sera alors très importante, mais durant un court instant.

2.3. Réponse d'un circuit RL série à un échelon de tension

2.3.1. Position du problème

Schéma 18