

# EC2 : Régime transitoire des circuits linéaires

Yoan de CORNULIER

## Contents

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Deux nouveaux dipôles</b>	<b>3</b>
1.1 Le condensateur	3
1.1.1 Relation charge/tension et capacité	3
1.1.2 Relation constitutive	3
1.1.3 Aspect énergétique	4
1.1.4 Association de condensateurs	5
1.1.5 Condensateur réel	6
1.1.6 Expériences	7
1.2 La bobine	7
1.2.1 Modèle et relation constitutive d'une bobine idéale	7
1.2.2 Équivalent en continu	8
1.2.3 Énergie emmagasiné	8
1.2.4 Comportement	8
1.2.5 Associations	9
1.2.6 Bobine réelle	9
1.2.7 Conséquence de la continuité du courant	9
<b>2 Exemples de circuits du premier ordre</b>	<b>10</b>
2.1 Circuit RC en régime libre	10
2.1.1 Aspect énergétique	11
2.1.2 Bilan énergétique	11
2.2 Réponse d'un circuit RC série à un échelon de tension (réponse indicielle)	12
2.2.1 Position du problème	12
2.2.2 Analyse à $t = 0^+$	12
2.2.3 À $t = \infty$	12
2.2.4 Équation différentielle pour $t > 0$	12
2.2.5 Aspect énergétique	13
2.2.6 Énergie dissipée dans la résistance	13
2.3 Réponse d'un circuit RL série à un échelon de tension	14
2.3.1 Position du problème	14
2.3.2 À $t = 0^+$	14
2.3.3 Équation différentielle pour $t > 0$	14
2.3.4 Bilan énergétique	15
2.4 Circuit RL en régime libre	15

<b>3 Exemples de circuit du second ordre</b>	<b>15</b>
3.1 Oscillations électriques dans un circuit LC en régime libre . . . . .	15
3.1.1 Position du problème . . . . .	15
3.1.2 Équations différentielles pour $u$ et $i$ ( $t \geq 0$ ) . . . . .	16
3.1.3 Équation caractéristique . . . . .	16
3.1.4 Fonction sinusoïdale (harmonique) . . . . .	17
3.1.5 Retour au problème initial . . . . .	17

## Introduction

Le but de ce cours est d'étudier les circuits linéaires entre 2 régimes permanents continus.

Dans des circuits combinant juste des résistances et des sources, les grandeurs varient instantanément, il n'y a donc pas de régime transitoire.

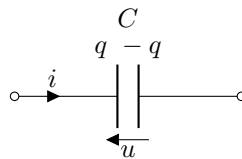
On peut comparer cela au passage d'un échelon  $u(t)$  en SI

Nous introduisons donc deux nouveaux dipôles : le condensateur et la bobine.

# 1. Deux nouveaux dipôles

## 1.1. Le condensateur

Un condensateur est fourni de 2 armatures conductrices, séparées par un isolant, en "influence totale". Il peut être modélisé par le schéma suivant :



### 1.1.1. Relation charge/tension et capacité

On admet la relation :

avec :

$$q = C.u$$

- $C$  la capacité du condensateur
- $u$  la tension aux bornes du condensateur
- $i$  le courant traversant le condensateur

### 1.1.2. Relation constitutive

Durant un régime transitoire, on note  $dq = i.dt$  la quantité de charge arrivant sur l'armature durant une durée  $dt$ , et on pose :

$$q = C.u$$

$$\implies dq = C.du$$

$$\implies i.dt = C.du$$

$$\implies i = C \frac{du}{dt}$$

Remarque : en convention générateur, on aurait  $i = -C \frac{du}{dt}$ .

En régime continu, on a :  $i(t) = I$  et  $u(t) = U$ . On peut alors en déduire que :

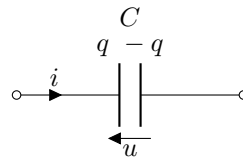
$$\frac{du}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow C \frac{du}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 0}$$

Le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert.

### 1.1.3. Aspect énergétique



La puissance consommée par le condensateur vaut à l'instant  $t$  :

$$p(t) = u(t)i(t) = C.u \frac{du}{dt}$$

L'énergie consommée entre un instant  $t$  et un instant  $t + dt$  vaut donc :

$$p(t)dt = C.u \frac{du}{dt} dt = C.u.du$$

On peut en déduire qu'entre 2 instants  $t_1$  et  $t_2$ , l'énergie consommée vaut :

$$E_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} C.u.du = \left[ \frac{1}{2} C.u^2 \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\boxed{E_{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{1}{2} C.u^2(t_2) - \frac{1}{2} C.u^2(t_1)}$$

Ce résultat illustre le fait qu'un condensateur chargé emmagasine une énergie donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} C.u^2 = \frac{q^2}{2C}$$

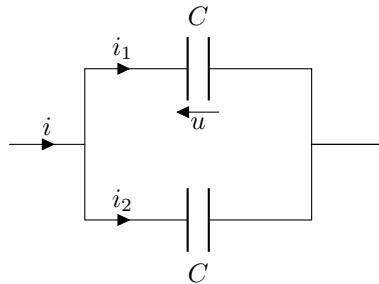
Cette énergie est stockée dans le volume entre les armatures sous forme d'un champ de force électrique (énergie potentielle électrique).

### Un condensateur peut être générateur ou récepteur

→ Conséquence importante : Par principe de conservation de l'énergie, on a  $E_c$  continue, on peut en déduire que la tension aux bornes du condensateur est continue dans le temps.

#### 1.1.4. Association de condensateurs

- En parallèles :



On pose alors :

$$i = i_1 + i_2$$

Or on a :

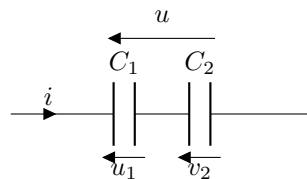
$$\begin{cases} i_1 = C_1 \frac{du}{dt} \\ i_2 = C_2 \frac{du}{dt} \end{cases}$$

On peut donc en déduire :

$$i = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{du}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

- En série :



On pose alors :

$$u = u_1 + u_2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt}$$

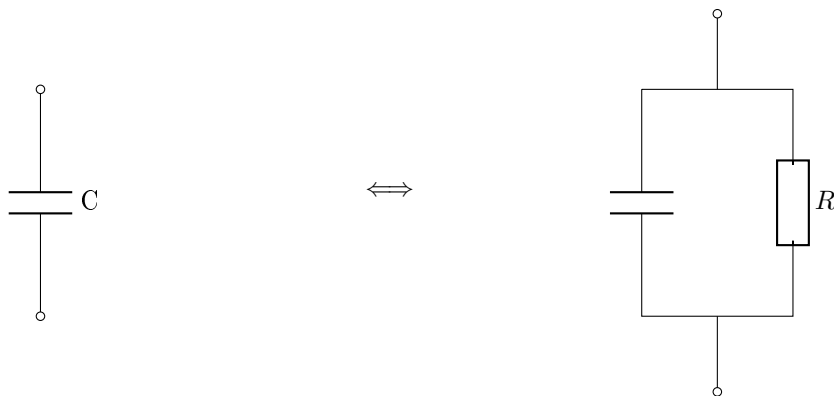
Or on a :  $\frac{du}{dt} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2}$

$$\frac{du}{dt} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

### 1.1.5. Condensateur réel

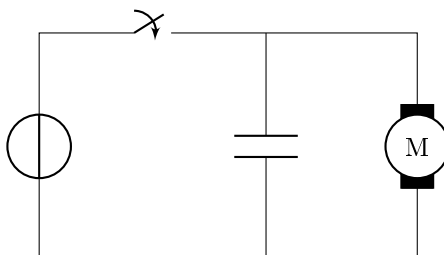
Le modèle du condensateur présenté ci-avant fonctionne bien, mais on observe plusieurs différences dans la réalité. Par exemple, si on laisse un condensateur chargé, sans générateur, durant un certain temps, il se déchargera naturellement. En réalité, il faudrait modéliser le condensateur selon :



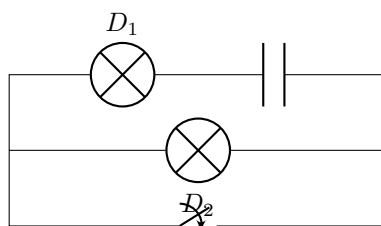
Bien que sauf mention contraire, il ne sera pas nécessaire d'utiliser ce modèle dans un exercice, sauf mention contraire de l'énoncé (On laissera rarement un condensateur à vide).

### 1.1.6. Expériences

- On abaisse le premier interrupteur seulement pour charger le condensateur, puis l'on abaisse le deuxième condensateur. Le moteur tourne alors, alimenté seulement par le condensateur :



- On abaisse l'interrupteur, puis on le relève. On remarque que la l'ampoule  $D_1$  brille un instant puis s'éteint. On peut expliquer cela par l'idée que durant un certain régime transitoire, le condensateur se charge et un courant passe dans  $D_1$ . Puis, lorsque le condensateur est chargé, le courant passant par  $D_1$  devient nul, et celui passant par  $D_2$  est total.



## 1.2. La bobine

### 1.2.1. Modèle et relation constitutive d'une bobine idéale



On nomme  $L$  l'inductance, que l'on mesure en  $V.A^{-1}.s = \Omega.s = H$  en henry.

Pour l'instant, on admet cette relation, que l'on démontrera plus tard dans un chapitre d'électro-magnétisme.

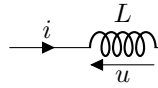
### 1.2.2. Équivalent en continu

$$\begin{cases} u &= \text{cste} \\ i &= \text{cste} \end{cases}$$

$$\implies \frac{di}{dt} = 0$$

$$\implies \boxed{u = L \frac{di}{dt} = 0}$$

### 1.2.3. Énergie emmagasiné



$$p(t) = u(t)i(t)$$

L'énergie consommée entre 2 instants  $t_1$  et  $t_2$  est alors :

$$\mathcal{E}_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} Li \frac{di}{dt} dt$$

$$\implies \boxed{\mathcal{E}_{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{1}{2} Li^2(t_2) - \frac{1}{2} Li^2(t_1)}$$

Cette équation, de même que pour le condensateur, suggère que l'on peut attribuer à une bobine parcourue par un courant  $i$  une énergie potentielle donnée par la relation :

$$\mathcal{E}_l = \frac{1}{2} Li^2$$

Cette énergie est emmagasiné sous forme de champ magnétique dans le volume de la bobine.

### 1.2.4. Comportement

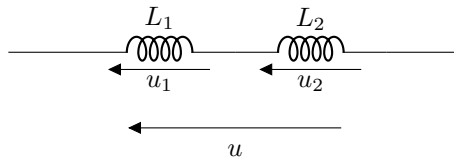
- récepteur si  $|i| \nearrow$
- générateur si  $|i| \searrow$

Conséquence importante : continuité du courant  $i$  qui traverse une bobine.



### 1.2.5. Associations

- En série :



$$u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

- En parallèle (rarement utilisé) :

**Schéma 7**

$$i = i_1 + i_2$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) u$$

$$\Rightarrow L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

### 1.2.6. Bobine réelle

Puisque une bobine est composée d'une longueur parfois grande devant sa résistivité, on ne peut négliger sa résistance. On modélise donc :

**Schéma 8**

On a alors :

- bobine idéale :  $u = L \frac{di}{dt}$
- bobine réelle :  $u = L \frac{di}{dt} - ri$

### 1.2.7. Conséquence de la continuité du courant

Si l'on "force" une discontinuité du courant, par exemple en frottant un fil à un lime, de très fortes tensions peuvent apparaître (5V à 500V), ce qui peut être dangereux, pour nous ou pour des composants électroniques.

## 2. Exemples de circuits du premier ordre

### 2.1. Circuit RC en régime libre

Position du problème :

**Schéma 1**

Pour  $t < 0$ , on a  $u(t) = U_0 \neq 0$ . À  $t = 0$ , on ferme K. On cherche à modéliser  $u(t)$  et  $i(t)$ .

On schématise :

**Schéma 11**

On peut alors en déduire les équations en  $0^+$  :

$$u = Ri$$

$$i = -C \frac{du}{dt}$$

$$u = -RC \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{1}{RC}u = 0$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{u}{\tau} = 0$$

en posant  $\tau = RC$  le temps caractéristique du circuit RC. On reconnaît alors une équation différentielle homogène, du premier ordre et à coefficient constant. On peut donc en déduire l'ensemble des solutions par continuité de  $u$  :

$$u(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On a donc  $U_0 = \lambda$ , et donc finalement,

$$u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Et :

$$i(t) = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On trouve les constantes d'intégrations grâce aux conditions initiales déterminées par les continuités. On peut donc en déduire les courbes de  $u(t)$  et  $i(t)$  :

**Schéma 12**

On remarque aussi que :

$$u(\tau) = \frac{U_0}{e} = 0,37U_0$$

On peut alors se demander au bout de combien de temps a-t-on 1% de la charge initiale. On pose :

$$u(x) = \frac{U_0}{100} = U_0 e^{-\frac{x}{\tau}}$$

$$e^{\frac{x}{\tau}} = 100$$

$$x = \tau \ln 100 \approx 4,6\tau \approx 5\tau$$

On peut donc en déduire que par convention, la durée du régime est transitoire est de  $5\tau$ .

### 2.1.1. Aspect énergétique

$$E_c = \frac{1}{2} C u^2 E_c(t) = \frac{1}{2} C U_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

#### Schéma 13

La constante de temps de l'énergie vaut donc  $\frac{\tau}{2}$ .

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$$

Donc :

$$u \frac{du}{dt} + \frac{u^2}{\tau} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{2}{\tau} \frac{u^2}{2} = 0$$

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{E_c}{\tau/2} = 0$$

### 2.1.2. Bilan énergétique

Le condensateur fournit une énergie égale à :

$$E_c(0) - E_c(\infty) = C U_0^2$$

qui est équivalente à l'énergie reçue par la résistance :

$$p_R(t) = R i^2(t)$$

$$p_R(t) = \frac{U_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$\begin{aligned}
E_R &= \int_{t=0}^{\infty} p_R(t) dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{U_0^2}{R} e^{\frac{-2t}{\tau}} dt \\
&= \frac{U_0^2}{R} \left[ -\frac{\tau}{2} e^{\frac{-2t}{\tau}} \right] \\
&= \frac{U_0^2}{R} \times \frac{\tau}{2} = \frac{U_0^2 \times RC}{2R} = \frac{1}{2} C U_0^2
\end{aligned}$$

## 2.2. Réponse d'un circuit RC série à un échelon de tension (réponse indicielle)

### 2.2.1. Position du problème

#### Schéma 14

On suppose que pour  $t < 0$ ,  $u(t) = 0$  (le condensateur est déchargé). À  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur K. On veut étudier la charge du condensateur par la source à travers  $R$ , c'est à dire modéliser  $u(t)$  et  $i(t)$ , ainsi que l'aspect énergétique.

### 2.2.2. Analyse à $t = 0^+$

#### Schéma 15

Puisque la tension est continue aux bornes du condensateur, on a  $u(0^+) = 0$ , il se comporte donc alors comme un fil. Par loi des mailles, on peut en déduire par loi des mailles :

$$E = Ri(0^+) \implies i(0^+) = \frac{E}{R}$$

### 2.2.3. À $t = \infty$

On se pose alors en régime continu. Le condensateur est alors modélisable en un interrupteur ouvert.

#### Schéma 16

$$t(\infty) = 0 \implies u(\infty) = E$$

### 2.2.4. Équation différentielle pour $t > 0$

Puisque la tension  $u(t)$  est continue aux bornes du condensateur, il vaut mieux d'abord déterminer  $u(t)$ .

Par loi des mailles, on pose :

- $i = C \frac{du}{dt}$
- $Ri + u = E$

On pose donc, avec  $\tau = RC$  :

$$RC \frac{du}{dt} + u = E$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{E}{\tau}$$

On peut donc en déduire l'ensemble des solutions :

$$S = \left\{ t \longrightarrow \lambda e^{\frac{-t}{\tau}} + E, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Or nos conditions initiales posent que  $u(0^+) = 0$ . On peut donc en déduire que  $\lambda = -E$ . On peut alors en conclure que :

$$\boxed{u(t) = E(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})}$$

$$i = \frac{E - u}{R}$$

$$\implies \boxed{i(t) = \frac{E}{R} e^{\frac{-t}{\tau}}}$$

### 2.2.5. Aspect énergétique

L'énergie fournie par la source vaut :

$$p_G(t) = E \cdot i(t)$$

$$\mathcal{E}_G = \int_0^\infty p_G(t) dt = E \int_0^\infty \frac{dq}{i(t) dt}$$

#### Schéma 17

$$\mathcal{E}_G = E [q(\infty) - q(0)] = E [Cu(\infty) - Cu(0)] \implies \boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}$$

Or l'énergie reçue par le condensateur vaut :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} Cu^2(t) - \frac{1}{2} Cu^2(0) = \frac{1}{2} CE^2 \implies \boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \mathcal{E}_G}$$

### 2.2.6. Énergie dissipée dans la résistance

On note la puissance dissipée dans la résistance :

$$p_R(t) = Ri^2 = \frac{E^2}{R} e^{\frac{-2t}{\tau}}$$

On peut alors en déduire :

$$\mathcal{E}_R = \int_0^\infty p_R(t) dt = \dots = \frac{1}{2} CE^2$$

$$\implies \mathcal{E}_G = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_R$$

Ainsi, quelque soit la valeur de la résistance, l'énergie dissipée dans la résistance est égale à l'énergie reçue par le condensateur.

On pourrait penser qu'il peut se poser un problème si l'on pose une résistance de valeur de résistance nulle, par exemple un fil. En réalité, un fil aura toujours une valeur de résistance, aussi faible soit-elle. L'intensité du courant sera alors très importante, mais durant un court instant.

## 2.3. Réponse d'un circuit RL série à un échelon de tension

### 2.3.1. Position du problème

**Corriger schéma**

### 2.3.2. À $t = 0^+$

On a à  $t = 0^+$ ,  $i(0^+) = i(0^-) = 0$  par continuité du courant dans la bobine

**Corriger schéma**

On a alors :

$$u_L(0^+) = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$$

### 2.3.3. Équation différentielle pour $t > 0$

On pose d'abord :

- LM :  $u_L + Ri = E$
- relation de la bobine :  $u_L = L \frac{di}{dt}$

On peut alors en déduire :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

On pose alors :  $\tau = \frac{L}{R}$  la constante de temps du circuit. On pose donc :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{R\tau}$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$i(t) = \frac{E}{R} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec  $\lambda$  une constante que l'on détermine par les conditions initiales.

Condition initiale :  $i(0^+) = 0$

On peut alors en déduire :  $\lambda = -\frac{E}{R}$ . On peut finalement en conclure que :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Donc :

$$u_L = L \frac{di}{dt} = E - Ri$$

$$u_L(t) = E e^{\frac{-t}{\tau}}$$

**Faire les schémas des courbes  $i_L(t)$  et  $u_L(t)$**

### 2.3.4. Bilan énergétique

Puisque la bobine laisse complètement passer le courant à la fin du régime transitoire, il est absurde de se demander quelle est la quantité d'énergie reçue finalement. On peut simplement poser :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L i^2(+\infty) - \frac{1}{2} L i^2(0)$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} \frac{L}{R} \frac{E^2}{R}$$

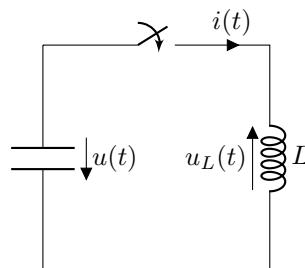
$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} \frac{\tau}{R} E^2$$

### 2.4. Circuit RL en régime libre

## 3. Exemples de circuit du second ordre

### 3.1. Oscillations électriques dans un circuit LC en régime libre

#### 3.1.1. Position du problème



**Schéma : condensateur C -> interrupteur K -> bobine L. Le tout en série**

- $t < 0 \implies i(t) = 0, u_L(t) = 0$
- $t = 0$  : on ferme K. Que se passe-t-il alors ?

### 3.1.2. Équations différentielles pour $u$ et $i$ ( $t \geq 0$ )

$$\begin{cases} u(t) = u_L(t) \\ u_L = L \frac{di}{dt} \\ i = -C \frac{du}{dt} \end{cases}$$

On en déduit les dérivées secondes :

$$u = -LC \frac{d^2 u}{dt^2}$$

$$i = -LC \frac{d^2 i}{dt^2}$$

On peut donc en conclure 2 équations différentielles du second ordre :

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{LC} u = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0}$$

qui sont toutes les deux des équa. diff. linéaire, du 2nd ordre, homogènes et à coefficients constants, sans terme d'ordre 1.

On pose alors  $[LC] = T^2$ , et donc  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  qui est l'inverse d'un temps.

On en déduit donc :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$$

### 3.1.3. Équation caractéristique

$$r^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{r = j\omega_0}$$

Donc l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{C}$  est :

$$u(t) = Ae^{j\omega_0 t} + Be^{-j\omega_0 t}, (A, B) \in \mathbb{C}$$

On en déduit l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re}(Ae^{j\omega_0 t} + Be^{-j\omega_0 t}) \\ \longrightarrow u(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), (A, B) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



On souhaite simplifier l'expression de  $u(t)$ . On pose donc :

$$K \cos(\omega_0 t + \varphi) = K \cos(\varphi) \cos(\omega_0 t) - K \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t), K \geq 0$$

$$\iff \begin{cases} A = K \cos(\varphi) \\ B = -K \sin(\varphi) \end{cases} \iff \begin{cases} K = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \varphi = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right) \end{cases}$$

Un peu de magie noire...

On peut simplement en déduire l'expression de  $u$  :

$$u(t) = K \cos(\omega_0 t + \varphi), (K \geq 0, \varphi) \in \mathbb{R}$$

### 3.1.4. Fonction sinusoïdale (harmonique)

L'équation  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$  est celle d'un oscillateur harmonique. Ses solutions sont des fonctions sinusoïdales de la forme :

$$u(t) = K \cos(\omega_0 t + \varphi), K \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi]$$

On cherche la période  $\Delta$  tel que  $\forall t$  :

$$u(t + \Delta) = u(t)$$

$$\longrightarrow \omega_0 \Delta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\implies T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- $K$  s'appelle l'amplitude.

- La période est  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

- La fréquence est donc :  $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

- $\omega_0$  s'appelle la pulsation et s'exprime en  $rad.s^{-1}$

- $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi$  est la phase du signal.

- $\varphi = \omega_0 t_0$  est la phase à l'origine (avec  $t_0$  le premier instant où la fonction est maximale).

### 3.1.5. Retour au problème initial

$$u(t) = K \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

On souhaite maintenant trouver  $K$  et  $\varphi$  grâce aux conditions initiales :