DM d'informatique : Partie théorique

Yoan de CORNULIER

I) Définition

0) Il faut $\log(10^{10^{100}}) = 10^{100}$ chiffres pour écrire un gogolplex.

1) Il faut $\log_2(2^{2^p}) = 2^p$ pour écrire $x(p)$. Ainsi, on a un débordement lorsque :

$$2^p \geq 63 \Longrightarrow p \geq \log_2(63) \approx 6$$

2) La fonction x réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, donc $\forall n \geq 2, \exists p \in \mathbb{N}, 2^{2^p} \leq n \leq 2^{2^{p+1}}$. On pose la division euclidienne de n par $x(p)$:

$$\exists!(d, g) \in [|1; n|] \times [|0; x(p)[|, n = x(p)d + g$$

Or $d < x(p)$, on peut donc en conclure que la proposition est vraie $\forall n \geq 2$.

3) On remarque que dans le pire des cas, l'arbre est limité par la décroissance du paramètre g de chaque noeud, qui est borné par $x(p)$. Ainsi, une borne supérieure asymptotique est $ll(n) = \log_2(\log_2(n))$.

4) Cette limitation permet d'éviter le débordement de la valeur 2^k dans la définition de (v), en effet, au delà de 61, on a :

$$u_n \mod 2^{62} < 2^{62} \Longrightarrow v_{62,n} < 2^{62} + 2^{62} = 2^{63}$$

5) Par définition, on a :

$$h(n+1) = h(n) + x(h(n)) \times h(n)$$

Par tests successifs, $\forall n \geq 3$, h(n) déborde. En effet, $h(2) = 21474836485$, et alors h(3) calcule $2^{2^{21474836485}}$ qui déborde.

6) Montrons par récurrence que $h(n)$ est impaire $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, $h(0) = 1$ est pair.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $h(n)$ est impair, alors $x(h(n))$ est pair, donc $x(h(n))h(n)$ est pair, donc $h(n+1)$ est impair.
- En somme, $\forall n \in \mathbb{N}, h(n)$ est impair.

15) Un algorithme possible est :

```
tree increment(tree Node(g, p, d)) {
    si g < x(p) {
        g+=1
    } sinon {
        d+=1
        si trouve_p d > 0 {
            p+=1
            d = 1
        }
    }
}
```