T9. Números complejos. Aplicaciones geométricas

1. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos

- Definición del cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos e identificación del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales con el subcuerpo $\mathbb{R}\times\{0\}$.
- Definición de la unidad imaginaria $i=(0,1)$, que permite escribir cada número complejo (a,b) en su forma binómica $a+bi$, donde $a,b\in\mathbb{R}$, y que facilita las operaciones con los números complejos.
- Definición de la parte real y la parte imaginaria de un número complejo y caracterización de los números reales y los imaginarios puros en términos de ambas.
- Identificación de cada número complejo $a+bi$ con su afijo (a,b) en el plano y con el vector de posición del punto (a,b) , mediante el isomorfismo $a+bi\mapsto(a,b)$ entre los espacios vectoriales $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$.
- Puede añadirse a la observación 6, en la que se especifica que $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado, es decir, que no puede definirse en $\mathbb{C}$ un orden total que sea compatible con la suma y el producto, la siguiente demostración de este hecho. Supongamos que $(\mathbb{C},+,\cdot)$ fuese un cuerpo ordenado por una relación de orden total $\leq$. Entonces, dado que es $i\neq 0$ y que el orden es total, será $i>0$ o $i<0$. Si fuese $i>0$:

$$0<i \quad\Rightarrow\quad 0\cdot i<i\cdot i \quad\Rightarrow\quad 0<i^2 \quad\Rightarrow\quad 0<-1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}0+1<-1+1\\ 0\cdot(-1)<(-1)\cdot(-1)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}1<0\\ 0<1\end{cases}$$

pero esto es imposible porque el orden es total. El razonamiento si $i<0$ es análogo ■

2. Conjugado de un número complejo

- Definición del conjugado de un número complejo e interpretación gráfica como el punto simétrico respecto del eje OX.
- Demostración de las propiedades de la conjugación.
- Aplicación a la división de números complejos.
- Expresión de la parte real y la parte imaginaria de un número complejo en función del conjugado.

3. Módulo de un número complejo

- Definición del módulo de un número complejo e interpretación gráfica como la distancia de su afijo al origen de coordenadas.
- Demostración de las propiedades del módulo.
- Definición del grupo circular como el conjunto de todos los números complejos de módulo 1 (es la circunferencia de centro el origen y módulo 1), y demostración de que, para la multiplicación, dicho conjunto es un grupo.

4. Argumentos de un número complejo

- Definición e interpretación geométrica del argumento principal de un número complejo no nulo. Definición de los infinitos argumentos de un mismo número complejo.
- Definición de la forma trigonométrica y la forma exponencial de un número complejo.
- Condición necesaria y suficiente para que dos números complejos escritos en forma exponencial sean iguales.

5. Producto de números complejos

- Producto y cociente de números complejos. Fórmulas y demostraciones.

6. Potencia de un número complejo. Fórmula de De Moivre

- Potencia de un número complejo y Fórmula de De Moivre. Demostraciones.
- Aplicación de la fórmula de De Moivre a la expresión del seno o del coseno de $n\theta$ en términos del seno y del coseno de θ.

7. Raíces de los números complejos

- Definición de raíz n-ésima de un número complejo y prueba de que cualquier número complejo no nulo tiene exactamente n raíces cuyos afijos son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen.
- Escribid que no sólo las ecuaciones $x^n = a$, donde $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, tienen exactamente n soluciones sino que, en general, y como establece el *Teorema fundamental del Álgebra*, toda ecuación algebraica $p(x) = 0$ con coeficientes complejos de grado n tiene exactamente n soluciones, si cada una de ellas se cuenta tanta veces como indica su multiplicidad como raíz de p.
- Si el tiempo que se concede para el desarrollo del tema escrito lo permite, puede escribirse aquí sobre las raíces n-ésimas de la unidad y sus propiedades (véase ejercicio 3.9 del documento C1).

8. Aplicaciones geométricas de los números complejos

- Definiciones de giro, homotecia, semejanza e inversión recurriendo a los números complejos. Gráficos, comprobaciones, casos particulares y puntos fijos. Los tres primeros transforman figuras en figuras semejantes. Caso de tener tiempo en el examen, pueden incluirse para la inversión, la menos habitual, algunas de sus propiedades, como las siguientes:

La inversión de polo z_0 y potencia r tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

1) Es una transformación involutiva, es decir, la composición de una inversión consigo misma es la transformación identidad.
2) Si $r>0$, sus únicos puntos fijos son los de la circunferencia de centro z_0 y radio $\sqrt{r}$. Si $r<0$, la inversión carece de puntos fijos.
3) Transforma cualquier recta que pasa por z_0 en la misma recta.
4) Transforma cualquier recta que no pasa por z_0 en una circunferencia que pasa por z_0
5) Transforma cualquier circunferencia que pasa por z_0 en una recta que no pasa por z_0.