13. Sea p un número primo impar. Encuentre los valores de p que hacen que $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ sea un cuadrado perfecto.

Este problema es el 04.49 del volumen 4 de Problemas de oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

SOLUCIÓN: El número p es primo y distinto de 2, luego no es divisor de éste y, según el *Pequeño Teorema de Fermat*, será $2^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)$, o lo que es igual, $2^{p-1}-1$ es divisible por p y por tanto el cociente $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ es un número entero (natural). Veamos qué primos impares p hacen que dicho cociente sea un cuadrado perfecto.

Supongamos entonces que $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ es un cuadrado perfecto. Al ser p primo impar, podemos escribir $p=2n+1$, con $n\geq 1$, y entonces:

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}=\frac{2^{2n}-1}{p}=\frac{(2^n-1)(2^n+1)}{p}\in\mathbb{Z}$$

es decir, p es divisor del producto $(2^n-1)(2^n+1)$. Como p es primo, p divide a uno de los dos factores, y sólo a uno, pues $\text{mcd}(2^n-1,2^n+1)=\text{mcd}(2^n-1,2)=1$ por ser 2^n-1 número impar. Distinguimos entonces:

i) Si p es divisor de 2^n-1, entonces

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}=\frac{2^n-1}{p}\cdot(2^n+1)$$

es un cuadrado perfecto. Como los dos factores de la derecha no tienen divisores comunes por ser $\operatorname{mcd}(2^n-1,2^n+1)=1$, ambos son cuadrados perfectos y entonces

$$2^n+1=a^2$$

para cierto $a\in\mathbb{N}$. Esta igualdad puede ser escrita así:

$$2^n=a^2-1=(a-1)(a+1)$$

y de ello deducimos que $a-1$ y $a+1$ son dos potencias de 2 que difieren en dos unidades, es decir, $a-1=2$ y $a+1=4$, y por tanto $a=3$. Se tiene así:

$$2^n=3^2-1=8 \quad\Rightarrow\quad n=3 \quad\Rightarrow\quad p=2n+1=7$$

El valor obtenido para p cumple efectivamente la condición del enunciado, pues $\frac{2^{7-1}-1}{7}=9$ es cuadrado perfecto.

ii) Si p es divisor de 2^n+1, un razonamiento análogo al usado en i) conduce a la existencia de $b\in\mathbb{N}$ tal que

$$2^n-1=b^2$$

Al restar una unidad en ambos miembros, se deduce

$$2^n-2=b^2-1 \quad\Rightarrow\quad 2\,(2^{n-1}-1)=(b-1)(b+1)$$

Por tanto, los números $b-1$ y $b+1$ son pares, así que $b^2-1=(b-1)(b+1)$ es múltiplo de 4, luego $2^{n-1}-1$ es múltiplo de 2, es decir, $2^{n-1}-1=0$, luego $n=1$ y $p=2n+1=3$. Este valor $p=3$ es efectivamente solución del problema porque $\frac{2^{3-1}-1}{3}=1$ es un cuadrado perfecto, así que las únicas soluciones son:

$$p=3\,,\qquad p=7\,.$$