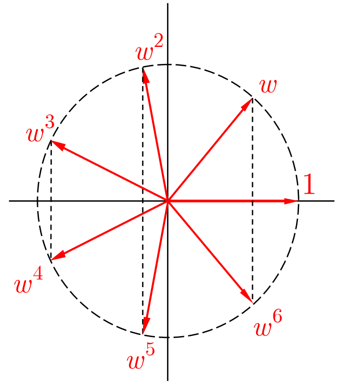
14. Determine razonadamente una ecuación de tercer grado con coeficientes enteros cuyas raíces sean $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ y $\cos\frac{6\pi}{7}$, y demuestre que estos tres números son irracionales.

Este problema figura resuelto en la página 226 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

SOLUCIÓN: La ecuación de tercer grado que se busca será de la forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$



donde $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$. Según las *fórmulas de Cardano*,

$$\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{b}{a} \\ \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{c}{a} \\ \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Si se llama $w = e^{2\pi i/7} = \cos\frac{2\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7}$ a una de las raíces séptimas de la unidad, entonces son $w^6 = \bar{w}$, $w^5 = \overline{w^2}$ y $w^4 = \overline{w^3}$, de modo que

$$\cos\frac{2\pi}{7}=\operatorname{Re}w=\frac{w+\overline{w}}{2}=\frac{w+w^6}{2},\quad \cos\frac{4\pi}{7}=\operatorname{Re}w^2=\frac{w^2+\overline{w^2}}{2}=\frac{w^2+w^5}{2},\quad \cos\frac{6\pi}{7}=\operatorname{Re}w^3=\frac{w^3+\overline{w^3}}{2}=\frac{w^3+w^4}{2}$$

Entonces, teniendo en cuenta que

$$1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6=\frac{w^7-1}{w-1}=0$$

las *Fórmulas de Cardano* se escriben

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(w+w^6+w^2+w^5+w^3+w^4)=-\frac{b}{a}\\ \frac{1}{2}(w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6)=\frac{c}{a}\\ \frac{1}{8}(w^6+1+w^2+w^3+w^4+w^5+1+w)=-\frac{d}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}(-1)=-\frac{b}{a}\\ \frac{1}{2}(-1)=\frac{c}{a}\\ \frac{1}{8}\cdot 1=-\frac{d}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{a}{2}\\ c=-\frac{a}{2}\\ d=-\frac{a}{8}\end{cases}$$

Como $b,c,d\in\mathbb{Z}$, el número entero a debe ser múltiplo de 8. Tomamos por tanto $a=8$ y entonces son $b=4$, $c=-4$ y $d=-1$, así que la ecuación buscada es

$$8x^3+4x^2-4x-1=0\,.$$

o cualquiera que resulte de multiplicar la ecuación anterior por un entero no nulo.

Para comprobar que los números $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ y $\cos\frac{6\pi}{7}$ son irracionales basta demostrar que la ecuación anterior $P(x)=8x^3+4x^2-4x-1=0$ no tiene soluciones racionales.

Si $\frac{p}{q}$, con $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^+$ y $\operatorname{mcd}(p,q)=1$, fuese solución racional de la ecuación, entonces p sería divisor de 1, es decir, $p\in\{-1,1\}$, y q sería divisor de 8, es decir, $q\in\{1,2,4,8\}$. Además, $p-q$ debe ser divisor de $P(1)=7$, lo que reduce los casos a $p=1$ y $q\in\{2,8\}$, y también $p+q$ debe ser divisor de $P(-1)=-1$, lo que descarta todas las posibilidades. Queda probado así que la ecuación no tiene soluciones racionales, así que $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ y $\cos\frac{6\pi}{7}$ son tres números irracionales.