P2. Problema 12.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Cada paquete de un cierto producto contiene una tarjeta con uno de los números $1, 2, \ldots, k$. Se supone que los k números aparecen con la misma frecuencia. Si se compran n paquetes $(n \geq k)$, ¿cuál es la probabilidad de que tenga al menos una colección completa de los k números?

Resuelto en Vol. 4. Ej 02.22

Solución:

Al comprar n paquetes se dispone de n tarjetas, cada una de ellas con número comprendido entre el 1 y k. Se trata de calcular la probabilidad de que todos los números aparezcan al menos una vez.

Sea A_i el suceso "*el número i aparece al menos una vez en alguno de los n paquetes*", donde $i = 1, 2, \ldots, k$.

La probabilidad a calcular es:

$$p\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k\right) = 1 - p\left(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_k\right)$$

Vamos a calcular, a través de la fórmula de Inclusión-Exclusión, la probabilidad de que falte alguno de los k números (por lo que no tendremos la colección completada).

Solución:

La probabilidad de que, por ejemplo, no aparezca el 1 en una tarjeta cualquiera es

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$$

De modo que la probabilidad de que no aparezca el 1 en ninguna tarjeta será:

$$p(\overline{A}_1) = \left(\frac{k-1}{k}\right)^n$$

Solución:

Para aplicar la Fórmula de Inclusión-Exclusión necesitamos calcular las siguientes probabilidades:

- $p(\overline{A}_{i_1}) = \left(\dfrac{k-1}{k}\right)^n$
- $p(\overline{A}_{i_1} \cap \overline{A}_{i_2}) = \left(\dfrac{k-2}{k}\right)^n$
- $p(\overline{A}_{i_1} \cap \overline{A}_{i_2} \cap \overline{A}_{i_3}) = \left(\dfrac{k-2}{k}\right)^n$
- $\vdots$
- $p(\overline{A}_{i_1} \cap \overline{A}_{i_2} \cap \cdots \cap \overline{A}_{i_{k-1}}) = \left(\dfrac{1}{k}\right)^n$
- $p\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_k\right) = 0$

Solución:

Por tanto

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = 1 - \sum_{i_1=1}^{k} p\left(\overline{A}_i\right) + \sum_{1\leq i_1<i_2\leq k} p\left(\overline{A}_{i_1} \cap \overline{A}_{i_2}\right) -$$

$$\cdots + (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots i_{k-1}\leq k} p(\overline{A}_{i_1} \cap \overline{A}_{i_2} \cap \cdots \cap \overline{A}_{i_{k-1}}) + (-1)^k\, p\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A}_i\right)$$

$$= 1 - k\left(\frac{k-1}{k}\right)^n + \binom{k}{2}\left(\frac{k-2}{k}\right)^n + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\left(\frac{1}{k}\right)^n$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i}\left(\frac{k-i}{k}\right)^n$$