P2. Problema 15.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Dos personas A y B realizan el siguiente juego: Tiran un dado y A gana la tirada si sale un 1 o un 2, ganando B en los restantes casos. Se ponen de acuerdo en que ganará el juego el primero que gane dos tiradas consecutivas. ¿Qué probabilidad tienen cada uno de ellos de ganar el juego?

Resuelto en Vol. 4. Ej 98.43

Solución:

Sea $A_n =$"*Gana A en juego en la n-ésima tirada*".
Dado que en cada tirada la probabilidad de que gane A es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y de que gane B es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, entonces:

- $p(A_2) = p(AA) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3}$
- $p(A_3) = p(BAA) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3}$
- $p(A_4) = p(ABAA) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3}$

Solución:

La probabilidad de que A gane el juego en una determinada tirada dependerá de si esta tirada es par o impar:

- $p(A_{2n}) = p(\overbrace{ABAB\cdots AB}^{n-1\ veces}AA) = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$
- $p(A_{2n+1}) = p(\overbrace{BABA\cdots BA}^{n\ veces}A) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^{n}\cdot\frac{1}{3}$

Solución:

La probabilidad de que A gane el juego será:

$$
\begin{aligned}
p\left(G_A\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p\left(A_{2n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} p\left(A_{2n+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \frac{1}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^{n} \frac{1}{3} \\
&= \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{2}{9}} + \frac{\frac{2}{27}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{5}{21}
\end{aligned}
$$

Solución:

Dado que la probabilidad de que el juego no termine nunca sería:

$$\lim_{n\to\infty} [p(ABABAB\cdots) + p(BABABA\cdots)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{9}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right] = 0$$

La probabilidad de que B gane el juego será:

$$p(G_B) = 1 - p(G_A) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$$