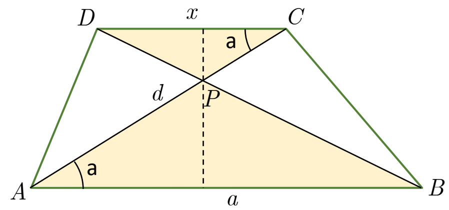
2. De un trapecio $ABCD$ se dan, en posición y magnitud, una de sus bases $AB = a$ y una de sus diagonales $AC = d$. Calcule la longitud que debe tener la base $CD = x$ para que la suma de las áreas de los dos triángulos que forman las bases con las dos diagonales sea mínima.

Este problema es el 09.20 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.
Este problema es el 96.20 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.
Este problema es el 85.42 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.
Este problema, con un enunciado alternativo, es el problema de la página 127 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.



SOLUCIÓN: El que se conozcan la base AB y la diagonal AC *en posición y magnitud* significa que se conocen, además de las longitudes $a = AB$ y $d = AC$, el ángulo $\alpha = \measuredangle BAC = \measuredangle DCA$ que forman ambas. Las áreas de los triángulos BAP y DCP miden, respectivamente,

$$S_1(x) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot AP \cdot \operatorname{sen}\alpha , \qquad S_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot CP \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Debe minimizarse la suma

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}(a \cdot AP + x \cdot CP), \qquad x > 0$$

lo que equivale, por ser $sen\alpha > 0$, a minimizar

$$T(x) = a \cdot AP + x \cdot CP , \qquad x > 0$$

De la semejanza de los triángulos BAP y DCP se deduce:

$$\frac{AP}{a}=\frac{CP}{x}=\frac{AP+CP}{a+x}=\frac{d}{a+x}$$

y de aquí,

$$AP=\frac{ad}{a+x}, \qquad CP=\frac{dx}{a+x}$$

por lo que la función que debemos minimizar es

$$T(x)=a\cdot AP+x\cdot CP=\frac{da^2}{a+x}+\frac{dx^2}{a+x}=d\left(\frac{a^2+x^2}{a+x}\right), \qquad x>0$$

Esto equivale al cálculo del mínimo absoluto de la función $U:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por:

$$U(x)=\frac{T(x)}{d}=\frac{a^2+x^2}{a+x}$$

y para ello estudiamos su crecimiento y decrecimiento. Derivando, se obtiene para cada $x>0$:

$$U'(x)=\frac{2x\cdot(a+x)-(a^2+x^2)}{(a+x)^2}=\frac{x^2+2ax-a^2}{(a+x)^2}$$

y el único punto del intervalo $(0,+\infty)$ en que se anula f' es $x_0=(\sqrt{2}-1)a$. Además, el signo de $U'(x)$ es el de $x^2+2ax-a^2$, que es negativo si $0<x<x_0$ y positivo si $x>x_0$, esto es, U es estrictamente decreciente en el intervalo $(0,x_0)$ y estrictamente creciente en $(x_0,+\infty)$, luego la longitud de la base CD que minimiza la suma de las áreas S_1 y S_2 es

$$CD=x_0=(\sqrt{2}-1)\,a$$