P2. Problema 11.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Los números $1, 2, 3, \ldots, n$ se ordenan aleatoriamente en su totalidad.

a) Halle la probabilidad de que ninguno de ellos coincida con el número de orden que ocupa.

b) Estudie la tendencia de esta probabilidad al aumentar n indefinidamente.

Resuelto en Vol. 4. Ej 97.4

Sea A_i el suceso "*el número i ocupa el i-ésimo lugar*".

La probabilidad a calcular es

$$p\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n\right) = 1 - p\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)$$

Apartado (a):

Vamos a aplicar la Fórmula de Inclusión-Exclusión, por lo que necesitamos saber las siguientes probabilidades:

- $p(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$
- $p(A_i \cap A_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!}$
- $p(A_i \cap A_j \cap A_k) = \dfrac{(n-3)!}{n!}$
- $\vdots$
- $p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \dfrac{1}{n!}$

Apartado (a):

Por la fórmula de inclusión-exclusión:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} p(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

$$= n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

Apartado (a):

De modo que

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = 1 - p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right]$$

$$= \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!} = e^{-1}$$

Recordando que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$$