Tema 63.

FRECUENCIA Y PROBABILIDAD. LEYES DEL AZAR. ESPACIO PROBABILÍSTICO

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Índice

Experimentos aleatorios:

- Diferencias entre experimento determinístico y aleatorio.
- Características de un experimento aleatorio:
  1. El experimento puede repetirse en idénticas condiciones, al menos conceptualmente.
  2. Una modificación mínima en las condiciones iniciales nos modifica el resultado final del experimento.
  3. Se puede determinar el conjunto de posibles resultados del experimento, pero no podemos predecir previamente un resultado particular.
  4. Si el experimento lo repetimos un gran número de veces, nos encontramos en los resultados una cierta regularidad estadística.

Espacio muestral:

Dado un experimento aleatorio, definimos un conjunto Ω conteniendo tantos elementos como resultados posibles. A dicho conjunto lo llamaremos espacio muestral. A los elementos de dicho conjunto se les llamará sucesos simples o elementales.

1. *Espacios muestrales discretos*: $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$
2. *Espacios muestrales continuos*: Ω es un subconjunto (no contable) de la recta real.

Ejemplos de espacios muestrales:

- Experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda hasta que salga una cara. En este caso, tenemos un espacio muestral discreto:

$$\Omega = \{(c), (+, c), (+, +, c), (+, +, +, c), (+, +, +, +, c), \ldots\}$$

- Seleccionar aleatoriamente un número en el intervalo $[0, 1]$. En este caso, tenemos un espacio muestral continuo:

$$\Omega = [0, 1]$$

Sucesos, tipos de sucesos:

Un suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Tipos de sucesos:

- Suceso simple o elemental.
- Sucesos compuesto.
- Suceso seguro.
- Suceso imposible.

Operaciones con sucesos:

- Inclusión e igualdad.
- Complementación.
- Unión.
- Intersección.
- Diferencia
- Diferencia simétrica.
- Concepto de sucesos incompatibles o disjuntos.
- Propiedades de las operaciones (Leyes de De Morgan).

Álgebra de sucesos (1):

Dado un espacio muestral Ω y $\mathcal{M}$ una colección de subconjuntos de Ω, $\mathcal{M}$ tiene estructura de álgebra si:

a) $\Omega \in \mathcal{M}$.

b) *Si* $A \in \mathcal{M}$, *entonces* $\bar{A} \in \mathcal{M}$.

c) *Si* $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, *entonces* $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$.

En un espacio muestral discreto y finito, cualquier operación que realicemos con sucesos que pertenecen a $\mathcal{M}$ dará lugar a un suceso que pertenecerá a $\mathcal{M}$.

Álgebra de sucesos (2):

Dado un espacio muestral Ω *y* $\mathcal{A}$ *una colección de subconjuntos de* Ω, $\mathcal{A}$ *tiene estructura de* $\sigma-$*álgebra si:*

a) $\Omega \in \mathcal{A}$.

b) *Si* $A \in \mathcal{A}$, *entonces* $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

c) *Si* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, *entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Cualquier unión finita, intersección finita o infinita de sucesos que pertenecen a $\mathcal{A}$, *también pertenecerán a* $\mathcal{A}$.

Definición frecuentista:

Frecuencia relativa de un suceso A_i al repetir un experimento n veces:

$$f(A_i) = \frac{n_i}{n} \quad , \; i = 1, 2, \ldots, k$$

Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son incompatibles y $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$, entonces:

1. $f(\emptyset) = 0$
2. $f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = f(\Omega) = 1$
3. $f(A_i \cup A_j) = f(A_i) + f(A_j)$

Frecuencia y probabilidad:

La *teoría frecuentista* de la probabilidad asegura que existe el límite cuando n tiende a infinito de la frecuencia relativa de A_i y este límite es la probabilidad de dicho suceso:

$$p(A_i) = \lim_{n \to \infty} f(A_i) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_i}{n}$$

El problema es que es imposible llegar a este límite, puesto que en la práctica no podemos repetir el experimento un número infinito de veces. Lo que sí podremos hacer es repetir el experimento un gran número de veces y observar que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse.

Interpretación subjetiva de la probabilidad:

La probabilidad subjetiva es la evaluación personal de la posibilidad de que ocurra un determinado fenómeno aleatorio (es la probabilidad basada en "términos de grados de creencia").

Axiomas de la probabilidad subjetiva:

- Un suceso incierto es igualmente probable, más probable o menos probable que otro.
- Un suceso incierto siempre es más probable que el suceso imposible.
- Cuando juzgamos un suceso S_1 más probable que otro suceso S_2, el cual a su vez, es más probable que S_3, el suceso S_1 será más probable que S_3.

Interpretación subjetiva de la probabilidad:

- Dadas las desigualdades:
  - S_1 *es más probable que* S_2
  - S_1' *es más probable que* S_2'

  entonces, $S_1 \cup S_1'$ es más probable que $S_2 \cup S_2'$, siempre que S_1 y S_1' sean incompatibles y S_2 y S_2' también lo sean.

Definición axiomática:

La definición axiomática de la probabilidad formaliza matemáticamente la idea intuitiva que tenemos de la probabilidad.

Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra definida sobre Ω . Se llama probabilidad sobre $\mathcal{A}$ a cualquier función $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla los siguientes axiomas:

A1. $p(A) \geq 0$ *para cualquier* $A \in \mathcal{A}$.

A2. $p(\Omega) = 1$.

A3. *Si* $A_1, A_2, \ldots$ *son sucesos incompatibles, entonces*

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p\left(A_n\right)$$

A la terna $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ se le llama espacio de probabilidad o espacio probabilístico.

Caso particular: Regla de Laplace:

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, con la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se define así una probabilidad sobre Ω a partir de la probabilidad de cada suceso elemental. Dado que $p(\omega_1) + \cdots + p(\omega_n) = 1$, la probabilidad de cualquier suceso A será:

$$p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$$

Si además, $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_n)$, entonces:

$$p(\omega_i) = \frac{1}{n} \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n$$

Si A es un suceso cualquiera, la probabilidad de dicho suceso es:

$$p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número total de casos posibles}}$$

Un ejemplo de espacio muestral infinito numerable.

Lanzamos una moneda equilibrada hasta que se consiga una cara. El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, donde $\omega_n =$"*obtener cara por primera vez en el n-ésimo lanzamiento*", siendo además la probabilidad de cada uno de estos sucesos elementales:

$$p(\omega_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(\omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Propiedades derivadas de los axiomas:

1. El suceso imposible tiene probabilidad nula, $p(\emptyset) = 0$.
2. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles, entonces

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right)$$

3. Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$, entonces $p(A) \leq p(B)$ y

$$p\left(B - A\right) = p(B) - p(A)$$

4. Para cualquier suceso A, se tiene que $p\left(\bar{A}\right) = 1 - p\left(A\right)$.
5. Sean A y B dos sucesos cualesquiera, entonces

$$p\left(A \cup B\right) = p(A) + p(B) - p\left(A \cap B\right)$$

Fórmula de Inclusión-Exclusión:

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sucesos cualesquiera, entonces se verifica la fórmula de Inclusión-Exclusión:

$$
\begin{aligned}
p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} p(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n} p(A_i \cap A_j \cap A_k) - \\
&- \cdots + (-1)^{n+1} p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)
\end{aligned}
$$

Incluir demostración (por inducción).

Ejemplo de aplicación de la fórmula de Inclusión-Exclusión:

Se tienen n bolas numeradas del 1 al n que deben introducirse aleatoriamente en n urnas numeradas también del 1 al n. Calculemos la probabilidad de que alguna de las bolas caiga en la urna con su número.

Sea A_i como "*la bola i-ésima cae en la caja i-ésima*", la probabilidad a calcular es $p\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)$. Dado que:

- $p(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$
- $p(A_i \cap A_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!}$
- $p(A_i \cap A_j \cap A_k) = \dfrac{(n-3)!}{n!}$
- $\ldots$
- $p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \dfrac{1}{n!}$

Ejemplo de aplicación de la fórmula de Inclusión-Exclusión:

La probabilidad pedida se calcula mediante la fórmula de inclusión-exclusión:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right) - \sum_{1\leq i<j\leq n} p\left(A_i \cap A_j\right) + \cdots + (-1)^{n+1} p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

$$= n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

Otras propiedades (opcional):

Sea $\{A_n\}$ una sucesión de sucesos tales que

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$$

Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, que escribiremos también como $A = \lim_{n \to \infty} A_n$.

Veamos que ocurre con $p(A)$:

Como $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$, entonces los sucesos:

$$A_1, A_2 - A_1, A_3 - A_2, \ldots, A_n - A_{n-1}, A_{n+1} - A_n, \ldots$$

son incompatibles. Además:

$$A_n = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n-1})$$

siendo esta unión disjunta.

Otras propiedades (opcional):

De este modo,

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} [A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n-1})]$$

$$= A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n - A_{n-1})$$

por lo que, del axioma A3 se verifica que

$$p(A) = p\left(A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n - A_{n-1})\right) = p(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} p(A_n - A_{n-1})$$

Ya sólo queda aplicar la propiedad 3 para concluir que

$$p(A) = p(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} (p(A_n) - p(A_{n-1})) = \lim_{n\to\infty} p(A_n)\,.$$

Ejemplo (opcional):

Tenemos una urna con una bola blanca y otra negra. Extraemos una bola y si es blanca, no extraemos más, pero si es negra, la devolvemos a la urna junto con otra bola negra. A continuación extraemos otra bola y si es blanca no extraemos más, pero si es negra la devolvemos a la urna junto con otra bola negra. Procedemos de esta forma indefinidamente. ¿Cuál es la probabilidad de extraer bola blanca alguna vez?

Ejemplo (opcional):

Sea B =“*extraer bola blanca alguna vez*´´y sea B_n =“*extraer bola blanca antes del n-ésimo intento*´´. Se tiene que:

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \cdots$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Dado que

$$p(B_n) = 1 - p(\overline{B}_n) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

entonces:

$$p(B) = \lim_{n\to\infty} p(B_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

Bibliografía:

- Vicente Quesada, Alfonso García: *Lecciones de Cálculo de Probabilidades.* Editorial Díaz de Santos.
- Víctor Hernández, Ricardo Vélez. *Dados, Monedas y Urnas.* Editorial: Uned.
- Ricardo Vélez, Víctor Hernández. *Cálculo de Probabilidades I.* Editorial: Uned.
- Sheldon M. Ross. *Introducción a la Estadística.* Editorial: Reverté.
- "Introducción a la Probabilidad" (Enlace al libro de Francisco Montes (U.V.))