T4. Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencias

1. El anillo ordenado de los números enteros
2. Divisibilidad en $\mathbb{Z}$
3. Números primos
4. Congruencias

1. El anillo ordenado de los números enteros

- Definid los números de enteros como clases de equivalencia entre números enteros. Al conjunto cociente de dichas clases de equivalencia se le llama conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

- Definid la suma y el producto de números enteros y enunciad telegráficamente las propiedades que hacen de $\mathbb{Z}$ un anillo conmutativo y unitario.

- Definid el orden en $\mathbb{Z}$ y comentad que se trata de un orden total que es compatible con las dos operaciones de suma y producto de números enteros. Es por ello que se dice que $\mathbb{Z}$ es un anillo totalmente ordenado.

- Escribid brevemente sobre la inmersión del conjunto de los números naturales en el de los números enteros que permite considerar a $\mathbb{Z}$ como una ampliación del conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ cuya suma, producto y orden total extienden a los de $\mathbb{N}$. Y para terminar, de la clasificación de los enteros en positivos, cero y negativos.

2. Divisibilidad en Z

- Enunciad con absoluta precisión el Teorema de la división (o Algoritimo de la división) y demostrarlo.

- Definid divisor y múltiplo y utilizad la notación adecuada.

- Definid el máximo común divisor de dos números enteros y enunciad y demostrad, previo al Algoritmo de Euclides, la propiedad según la cual el máximo común divisor de dos números no cambia si a uno de ellos se le suma un múltiplo entero del otro.

- Descripción abreviada del Algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos números enteros.

- Enunciad y demostrad la identidad de Bezout. Deducid de dicha identidad, la definición del máximo común divisor de a y b como el único número entero positivo d que cumple las dos propiedades:

i) $d \mid a$ y $d \mid b$. ii) Si $c \in \mathbb{Z}$ es tal que $c \mid a$ y $c \mid b$, entonces $c \mid d$

- Enunciad y demostrad las cuatro consecuencias fundamentales de la identidad de Bezout.
- Enunciad y demostrad el Lema de Euclides.

3. Números primos

- Definid número primo y número compuesto.
- Enunciad y demostrad la propiedad fundamental de los números primos, según la cual si un número primo divide a un producto, necesariamente divide a alguno de los factores.
- Enunciad y demostrad el Teorema fundamental de la Aritmética.
- Enunciad los dos corolarios que se deducen de él y demostrad el segundo, que establece que el conjunto de los números primos es infinito (*Euclides*).

4. Congruencias

- Definid lo que se entiende por dos números enteros congruentes módulo un número natural n mayor o igual que 2 y observad que cualquier número entero es congruente módulo n con uno y sólo uno de los números 0, 1, 2, ..., $n-1$.

- Demostrad que dos enteros son congruentes módulo n si y sólo si dan el mismo resto al dividirlos por n y extraer como consecuencia de ello que un número entero es divisible por n si y sólo si es congruente con 0 módulo n.

- Enunciad las seis propiedades de las congruencias y demostrad sólo la cuarta, justificándolo tal y como se indica en el texto.

- Enunciad y demostrad el Pequeño Teorema de Fermat y el corolario principal del mismo. Si olvidáis la demostración del Pequeño Teorema de Fermat, podéis incluir alguno de los ejemplos de aplicación que aparecen tras el enunciado de dicho teorema en el documento N1.