P1. Problema 4.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

¿Cuántos enteros positivos hay con las cifras en orden estrictamente decreciente?

Planteamiento:

Sea N_k la cantidad de números enteros positivos de k cifras con todas sus cifras en orden estrictamente decreciente.

Observemos que $k \in \{ 1, 2, \ldots 10\}$, ya que un número entero positivo de más de 10 cifras tendrá alguna repetida y por tanto, no podrá tener todas sus cifras en orden estrictamente decreciente.

Cálculo de N_k:

- Es evidente que $N_1 = 9$, ya que todo número entero positivo de una cifra cumple la propiedad de tener todas sus cifras en orden estrictamente decreciente.
- Para calcular N_2 observemos que, elegidas dos cifras del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, sólo hay una forma de colocar esas dos cifras de modo que se forme un número con todas sus cifras en orden estrictamente decreciente, de modo que:

$$N_2 = C_{10,2} = \binom{10}{2}$$

Cálculo de N_k:

El razonamiento anterior se puede generalizar, de modo que elegidas k cifras del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, sólo hay una forma de colocar esas k cifras de modo que se forme un número con todas sus cifras en orden estrictamente decreciente. Consecuentemente:

$$N_k = C_{10,k} = \binom{10}{k}, \quad \text{para } k = 2, 3, \ldots, 10$$

Solución:

La cantidad de números enteros positivos con sus cifras en orden estrictamente decreciente será:

$$N = \sum_{k=1}^{10} N_k = 9 + \sum_{k=2}^{10} \binom{10}{k} = 9 - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} + \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}$$

$$= 9 - 1 - 10 + 2^{10} = 1022$$

Recordando que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$