1. Un número complejo $z \in \mathbb{C}$ cumple que

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Hállese el inverso del conjugado de $z^n - \frac{1}{z^n}$ determinando los valores reales de t para los que existe dicho inverso.

Este problema es el 04.53 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Resolvemos en $\mathbb{C}$ la ecuación $z + \frac{1}{z} = 2\cos t$. Dado que $z = 0$ no es solución de la misma, la ecuación anterior es equivalente a la que resulta de multiplicar ambos miembros por z, esto es, a

$$z^2 + 1 = 2z\cos t\,, \qquad \text{o bien} \qquad z^2 - 2z\cos t + 1 = 0$$

Las dos soluciones son, sea cual sea $t \in \mathbb{R}$:

$$z = \frac{2\cos t \pm \sqrt{4\cos^2 t - 4}}{2} = \cos t \pm \sqrt{\cos^2 t - 1} = \cos t \pm \sqrt{-\operatorname{sen}^2 t} = \cos t \pm i \operatorname{sen} t = e^{\pm it}$$

Entonces, si $z=e^{\pm it}$, de la *fórmula de De Moivre* se deduce que

$$z^n-\frac{1}{z^n}=z^n-z^{-n}=e^{\pm int}-e^{\mp int}=\pm(e^{int}-e^{-int})=\pm 2i\operatorname{sen} nt$$

El conjugado de $z^n-\frac{1}{z^n}=\pm 2i\operatorname{sen} nt$ es $\mp 2i\operatorname{sen} nt$ y el inverso de éste es:

$$\frac{1}{\mp 2i\operatorname{sen} nt}=\frac{\mp 1}{2i\operatorname{sen} nt}=\frac{\pm i}{2\operatorname{sen} nt}$$

siempre y cuando sea $\operatorname{sen} nt\neq 0$, es decir, si $t\neq\frac{k\pi}{n}$, para todo $k\in\mathbb{Z}$. Si es $t=\frac{k\pi}{n}$ para algún $k\in\mathbb{Z}$, entonces $z^n-\frac{1}{z^n}=0$, su conjugado es 0 y no existe su inverso.