

## P2. Problema 13.

Autor: José María Lorenzo Magán

*Academia Deimos*  
[www.academiadeimos.com](http://www.academiadeimos.com)



# Enunciado:

Tres personas A, B, y C lanzan sucesivamente en el orden A, B, C un dado. La primera persona que saque un 6, gana.

- a) ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?.
- b) Calcular la probabilidad de que el juego termine en el décimo lanzamiento y de que la persona C saque siempre la suma de lo que acaban de sacar los jugadores A y B en las tiradas inmediatamente.

*Resuelto en Vol. 4. Ej 04.47*

## Apartado (a):

Sea  $A_i$  el suceso “*gana A en su i-ésima tirada*”.

Observemos que

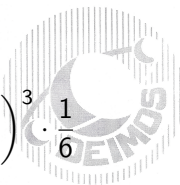
- $p(A_1) = \frac{1}{6}$

- $p(A_2) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$

- $p(A_3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$

- ...

- $p(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)} \frac{1}{6}$



## Apartado (a):

De este modo, la probabilidad de que el jugador A gane el juego será:

$$\begin{aligned} p(G_A) &= p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)} \frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{36}{91} \end{aligned}$$

La suma de los infinitos términos de una serie geométrica de razón  $r < 1$  es:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

## Apartado (a):

Análogamente, sea  $B_i$  el suceso “gana  $B$  en su  $i$ -ésima tirada”.

Observemos que

- $p(B_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$

- $p(B_2) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$

- $p(B_3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$

- ...

- $p(B_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3n-2} \frac{1}{6}$

## Apartado (a):

La probabilidad de que el jugador B gane el juego será:

$$\begin{aligned} p(G_B) &= p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n-2} \frac{1}{6} = \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{30}{91} \end{aligned}$$

## Apartado (a):

Por último, la probabilidad de que  $C$  gane el juego será

$$p(G_C) = 1 - p(G_A) - p(G_B) = 1 - \frac{36}{91} - \frac{30}{91} = \frac{25}{91}$$

Dado que la probabilidad de que el juego no termine nunca será

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

## Apartado (b):

Definamos ahora el suceso  $D_n =$  “en la  $n$ -ésima tirada de cada jugador, ninguno obtiene un 6 y el jugador  $C$  obtiene como resultado la suma de lo que han obtenido  $A$  y  $B$ .”

Dado que el juego va a terminar en el décimo lanzamiento, el ganador será  $A$  y la probabilidad pedida es

$$p(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap A_4)$$

Obtengamos  $p(D_1)$ .



## Apartado (b):

El número de casos favorables lo podemos obtener condicionando al resultado obtenido por C:

| Resultado obtenido por C | Casos favorables                    |
|--------------------------|-------------------------------------|
| 2                        | (1,1,2)                             |
| 3                        | (1,2,3) , (2,1,3)                   |
| 4                        | (1,3,4) , (2,2,4) , (3,1,4)         |
| 5                        | (1,4,5), (2,3,5), (3,2,5) , (4,1,5) |

Por tanto,  $|D_1| = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$  y entonces:

$$p(D_1) = \frac{10}{6^3}$$

## Apartado (b):

Dado que, por la independencia de sucesos,

$$p(D_2) = p(D_3) = p(D_1) = \frac{10}{6^3}$$

entonces:

$$p(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap A_4) = \frac{10}{6^3} \cdot \frac{10}{6^3} \cdot \frac{10}{6^3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10^3}{6^{10}} = \frac{125}{7558272}$$