C1. Números complejos. Polinomios. Ecuaciones algebraicas

1. Un número complejo $z \in \mathbb{C}$ cumple que

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Hállese el inverso del conjugado de $z^n - \frac{1}{z^n}$, determinando los valores reales de t para los que existe dicho inverso.

Este problema es el 04.53 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

2. Sean r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 las cinco raíces quintas de la unidad. Determine, según los valores de $n \in \mathbb{N}$, el valor de la expresión

$$E = r_1^n + r_2^n + r_3^n + r_4^n + r_5^n$$

Este problema es el 18.29 del volumen 9 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos. También figura resuelto en la página 414 del volumen 1 de la misma colección.

3. Determine el número complejo

$$A = 1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + z^{36}$$

donde $z = e^{2\pi i/7}$.

Este problema es el 98.1 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

4. Demuestre que todo número complejo $z \neq -1$ tal que $|z| = 1$ puede escribirse, para algún $a \in \mathbb{R}$, en la forma

$$z = \frac{1+ai}{1-ai}.$$

Este problema figura resuelto en la página 50 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

5. Los afijos de los números complejos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 y z_6 son vértices consecutivos de un hexágono regular. Sabiendo que $z_1 = 0$ y $z_4 = 4 + 6i$, donde $i = \sqrt{-1}$, halle los restantes vértices.

Este problema es el 18.21 del volumen 9 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

6. Resuelva, en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, la ecuación

$$5\tan z = 2\operatorname{sen}^2 z + \frac{3}{\cos^2 z}$$

Este problema es el 16.16 del volumen 8 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

7. Dada la ecuación $z^2 - 8iz - (19-4i) = 0$, cuyas soluciones son z_1 y z_2, halle los números complejos z tales que los afijos de z_1, z_2 y z formen un triángulo rectángulo isósceles cuyo vértice en el ángulo recto sea el afijo de la solución de mayor componente imaginaria.

Este problema figura resuelto en la página 214 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

8. Se sabe que la ecuación $z^3 + (2i-9)z^2 + (23-13i)z + 6(i-5) = 0$ admite una solución real y que los afijos de las raíces de esta ecuación son tres vértices de un paralelogramo. Encuentre el número complejo correspondiente al cuarto vértice, eligiendo como solución la situada en el primer cuadrante.

Este problema figura resuelto en la página 243 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

9. Resuelva la ecuación cúbica $2x^3-9x^2+32x+75=0$, sabiendo que admite una solución compleja (no real) de módulo 5.

Este problema figura resuelto en la página 483 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y es también el problema 00.41 del volumen 4 de la misma colección.

10. Resuelva la ecuación $x^4+12x-5=0$ sabiendo que dos de sus soluciones suman 2.

Este problema figura resuelto en la página 309 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

11. Determine a y b para que las raíces del polinomio con coeficientes reales:

$$p(x)=x^4-8x^3+14x^2+ax+b$$

estén en progresión aritmética. Halle dichas raíces.

Este problema es el 06.16 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

12. Se consideran los polinomios de grado n:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n\,,$$

con los coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $r \in \mathbb{K}$.

a) Demuestre que r es raíz de $P(x)$ si y sólo si $\frac{1}{r}$ es raíz de $Q(x)$.

b) Aplique a) para calcular la suma de los inversos de los cuadrados de las soluciones de la ecuación

$$x^7 - 4x^6 + 8x^2 - 1 = 0\,.$$

El apartado b) de este problema figura resuelto en la página 364 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

13. Dada la ecuación $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m = 0$, donde $m \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Discuta las soluciones de la ecuación al variar el parámetro m.

b) Resuelva la ecuación en función de m.

Este problema figura resuelto en la página 568 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y es también el problema 06.5 del volumen 5 y el 14.10 del volumen 6 de la misma colección.

14. Determine razonadamente una ecuación de tercer grado con coeficientes enteros cuyas soluciones sean $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ y $\cos\frac{6\pi}{7}$, y demuestre que estos tres números son irracionales.

Este problema figura resuelto en la página 226 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

15. Dado $n \in \mathbb{N}$, se considera la ecuación

$$x^{2n} - 1 = 0.$$

a) Calcule sus soluciones en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

b) Demuestre que, para $x \neq \pm 1$ y $n > 1$, se cumple la *identidad de Cotes*:

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right)$$

c) Aplicación: Halle el valor del producto:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\cdots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

Este problema es el 10.2 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.