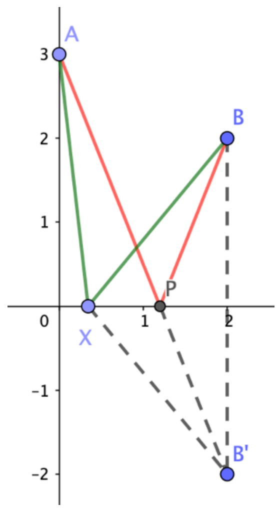
8. Dados los puntos $A(0,3)$. y $B(2,2)$ del plano euclídeo respecto de cierta referencia rectangular, calcule el camino más corto para ir desde A hasta B pasando por un punto X del eje de abscisas. Justifique que el camino encontrado es el de longitud mínima.

Este problema es el 09.1 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y también aparece publicado en las páginas 123 y 698 del volumen 2, y 435 del volumen 3.

SOLUCIÓN: El problema es un caso particular del llamado *Principio de Reflexión* que dice lo siguiente:

- *"La trayectoria que recorre un rayo de luz entre dos puntos dados es aquella en la que emplea un tiempo mínimo"*



Como la velocidad de la luz es constante, la trayectoria para el tiempo mínimo entre dos puntos ha de ser la línea de mínima distancia, esto es, la línea recta.

Sea B' el punto simétrico de B respecto del eje de abscisas y X un punto cualquiera de dicho eje. Si la luz va de A a B reflejándose en un espejo por el camino de mínima distancia, el rayo de luz debe tocar al espejo en un punto X tal que la suma de distancias $AX+XB=AX+XB'$ sea mínima, esto es, sea una línea recta. Por tanto, X debe ser el punto en el que la recta que pasa por A y B' corta al eje X, esto es, $X=P$. Probamos que efectivamente la trayectoria por P es la que minimiza la distancia.

Para cualquier punto X distinto de P del eje de abscisas se cumple que:

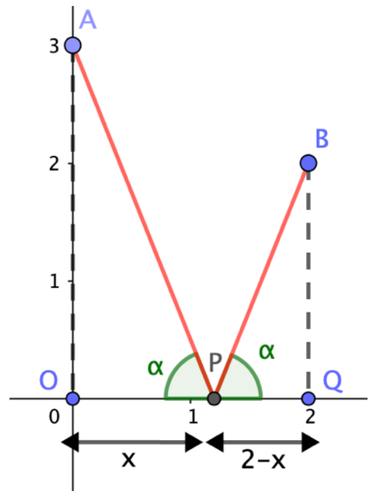
$$AX + XB = AX + XB' \underset{Desig.Triang}{>} AB' = AP + PB' = AP + PB$$

Por tanto, existe un único camino mínimo entre A y B de los que pasan por un punto X del eje de abscisas, y es el que toca a dicho eje en el punto $X = P$ de la recta AB'.

Para el caso particular de los puntos $A = (0,3)$ y $B = (2,2)$, el simétrico del punto $B = (2,2)$ respecto del eje de abscisas es el punto $B' = (2,-2)$ y la ecuación de la recta AB' es $5x + 2y - 6 = 0$. Haciendo y=0 en la ecuación anterior, obtenemos $5x - 6 = 0$, es decir, $x = \frac{6}{5}$ y las coordenadas de P son $(\frac{6}{5},0)$.

Procedimiento alternativo

Resulta que el camino mínimo seguido por la luz es aquel en el que se cumple que los ángulos de incidencia y reflexión son iguales. Haciendo uso de este recurso, también es posible resolver el problema del siguiente modo. El punto P buscado es entonces un punto de coordenadas (x,0) para el que se verifica que los triángulos ΔAOP y ΔPQB son semejantes. Por tanto:



$$\frac{3}{x} = \frac{2}{2-x} \Leftrightarrow 3(2-x) = 2x \Leftrightarrow 6 = 5x \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$$

y las coordenadas de P son $(\frac{6}{5},0)$.