C4

Series de números reales

1. Series de números reales

1.1. Serie de números reales. Carácter y suma de una serie: *Dada una sucesión* (x_n) (x_n) *de números reales, se llama suma parcial n-ésima de* (x_n) *al número real* $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. *A la sucesión* (s_n) *de estas sumas parciales se le llama serie asociada a* (x_n) *y se escribe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

o, de forma abreviada, $\sum x_n$. *Se dice que la serie es convergente, divergente u oscilante según que*

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

sea un número real, sea infinito ($+\infty$ o $-\infty$) *o no exista, respectivamente. Se llama carácter de una serie a su cualidad de ser convergente, divergente u oscilante. Cuando existe* $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, *se dice que* s *es la suma de la serie y se escribe*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n .$$

1.2. Linealidad de la suma de una serie: *Si las series de números reales* $\sum x_n$ *y* $\sum y_n$ *convergen, también converge la serie* $\sum (ax_n + by_n)$, *para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$, *y su suma es*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ax_n + by_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} x_n + b \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

1.3. Condición necesaria para la convergencia: *Si la serie de números reales* $\sum x_n$ *es convergente, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 .$$

DEMOSTRACIÓN: Dado que $x_n = (x_1 + \cdots + x_n) - (x_1 + \cdots + x_{n-1}) = s_n - s_{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, si $s \in \mathbb{R}$ es la suma de la serie, se deduce

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0 \ \blacksquare$$

Esta condición se utiliza en la práctica para probar que determinadas series -como la del ejemplo que sigue- no son convergentes.

1.4. Ejemplo: Estudie la convergencia de serie de números reales

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 3} \right)^{n+1}$$

Este problema figura resuelto en la página 722 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 3} \right)^{n+1} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+3} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\frac{2n-2}{n^2-n+3}} = e^2 \neq 0$$

la serie no es convergente (es divergente por tratarse de una serie de números positivos).

2. Algunas series sumables elementalmente

2.1. Series geométricas: *Se llama serie geométrica de primer término $a \in \mathbb{R}$ y razón $r \in \mathbb{R}$ a la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

Esta serie converge si y sólo si $\left|r\right| < 1$ *y, en tal caso, su suma es*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

DEMOSTRACIÓN: La suma n-ésima s_n de la serie cumple $s_n - rs_n = a - ar^{n+1}$ y entonces $s_n = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, siempre que $r \neq 1$. Así, que exista $\lim s_n \in \mathbb{R}$ equivale a que sea $r \neq 1$ y exista $\lim r^{n+1} \in \mathbb{R}$, lo cual ocurre si y sólo si $|r| < 1$. En tal caso, $\lim r^{n+1} = 0$ y $\lim s_n = \frac{a}{1-r}$.

2.2. Ejemplo: Obtenga la suma de la serie

$$1 + (a+b) + (a^2 + ab + b^2) + \cdots + (a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n) + \cdots$$

siendo $\left|a\right| < 1$, $\left|b\right| < 1$ y $a \neq b$.

Este problema es el 8.16 del volumen Ejercicios de Análisis, de Braulio De Diego. Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Dada la identidad $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$, podemos escribir para todo $n \geq 0$, por ser $a \neq b$:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n) = 1 + \frac{1}{a-b} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(a^{n+1} - b^{n+1})$$

Como las series $\sum a^{n+1}$ y $\sum b^{n+1}$ son geométricas de razones $\left|a\right| < 1$ y $\left|b\right| < 1$, y por tanto convergentes, también nuestra serie es convergente y su suma es:

$$s = 1 + \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} b^{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{a-b}\left(\frac{a^2}{1-a} - \frac{b^2}{1-b}\right) = \frac{1}{(1-a)(1-b)}$$

2.3. Series aritmético-geométricas: *Se llaman así a las series de números reales:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(an+b)\,r^n = b+(a+b)\,r+(2a+b)\,r^2+\cdots+(an+b)\,r^n+\cdots$$

en las que $a,b,r\in\mathbb{R}$. *Esta serie es convergente si y sólo si* $|r|<1$ *y, en tal caso, su suma es:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(an+b)\,r^n = \frac{ar+b\cdot(1-r)}{(1-r)^2}$$

DEMOSTRACIÓN: Si se llama s_n a la suma parcial n-ésima de la serie aritmético-geométrica, dicha suma es

$$s_n = b+(a+b)\,r+(2a+b)\,r^2+\cdots+(an+b)\,r^n .$$

Después de multiplicar por r , queda

$$rs_n = br+(a+b)\,r^2+(2a+b)\,r^3+\cdots+(an+b)\,r^{n+1} .$$

Al restar ambas igualdades y agrupar según las potencias de r , queda:

$$(1-r)\,s_n = b+a\,(r+r^2+\cdots+r^n)-(a+bn)\,r^{n+1} = b+a\frac{r-r^{n+1}}{1-r}-(an+b)\,r^{n+1}$$

Dividiendo por $1-r$:

$$s_n = \frac{1}{1-r}\left(b+a\frac{r-r^{n+1}}{1-r}-(an+b)\,r^{n+1}\right)$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ se obtiene, observando que, por ser $\left|r\right| < 1$, tanto r^{n+1} como $(an+b)\,r^{n+1}$ son infinitésimos:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-r}\left(b + \frac{ar}{1-r}\right) = \frac{ar + b\cdot(1-r)}{(1-r)^2} \ \blacksquare$$

Más que recordar la fórmula que da la suma de una serie aritmético-geométrica convergente, le convendrá al lector recordar el procedimiento que se ha seguido para obtenerla y que puede ver concretado en el siguiente ejemplo.

2.4. Ejemplo: Estudie la convergencia de la serie siguiente y calcule su suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n}.$$

Este problema figura resuelto en la página 216 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: El término general de la serie se escribe $(3n+1)(\frac{1}{3})^n$, luego es una serie aritmético-geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$. Como es $\left|r\right| = \frac{1}{3} < 1$, la serie es convergente y si $s \in \mathbb{R}$ es su suma:

$$s - \frac{1}{3}s = \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{10}{3^3} + \frac{13}{3^4} + \cdots\right) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{10}{3^3} + \cdots\right) = 1 + \left(\frac{4}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{10}{3^3} + \frac{13}{3^4} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \frac{10}{3^4} + \cdots\right) =$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}$$

es decir, $\frac{2}{3}s = \frac{5}{2}$, luego

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{15}{4}$$

2.5. Series hipergeométricas: *Una serie de números reales* $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$ *se dice que es hipergeométrica si existen* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *tales que para cada* $n \geq k$ *es*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{an+b}{an+c}$$

La serie hipergeométrica es convergente si, y sólo si, $\frac{c-b}{a} > 1$. *En tal caso, su suma es*

$$s = \sum_{n=k}^{\infty} x_n = \frac{c+(k-1)\cdot a}{c-b-a} \cdot x_k$$

DEMOSTRACIÓN: Si se llaman $p = \frac{b}{a}$ y $q = \frac{c}{a}$, la relación del enunciado se escribe

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+p}{n+q} \qquad \text{o} \qquad (n+q)\,x_{n+1} = (n+p)\,x_n \tag{1}$$

El cociente $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ es positivo a partir de cierto n, por lo que los elementos x_n tienen todos el mismo signo desde uno en adelante, signo que podemos suponer positivo. Entonces, al aplicar a esta serie el *Criterio de Raabe* (véase 3.16), como es:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n+p}{n+q}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(q-p)\cdot n}{n+q} = q - p\,,$$

la serie converge si $q - p > 1$ y diverge si $q - p < 1$. Si es $q - p = 1$, de la igualdad (1) se deduce que $(n+1+p)\,x_{n+1} = (n+p)\,x_n$, es decir, que la sucesión de término general $(n+p)\,x_n$ es constante, luego $(n+p)\,x_n = (k+p)\,x_k$, es decir, $x_n = \frac{(k+p)x_k}{n+p}$ y de la comparación por cociente con la armónica (véase 3.7) se deduce que la serie $\sum x_n$ es divergente.

Si es $q-p>1$ y en (1) sustituimos n por $k,k+1,\ldots,n$, y luego se suman las igualdades obtenidas, resulta:

$$\begin{cases} (n+q)\,x_{n+1} = (n+p)\,x_n \\ (n-1+q)\,x_n = (n-1+p)\,x_{n-1} \\ (n-2+q)\,x_{n-1} = (n-2+p)\,x_{n-2} \\ \cdots \\ (k+1+q)\,x_{k+2} = (k+1+p)\,x_{k+1} \\ (k+q)\,x_{k+1} = (k+p)\,x_k \end{cases} \quad\Rightarrow\quad q\,(s_n - x_k) + (n+q)\,x_{n+1} = (k-1)\,x_k + (1+p)\,s_n$$

o bien,

$$(q-p-1)\,s_n = (q+k-1)\,x_k - (n+q)\,x_{n+1}$$

y entonces

$$s_n = \frac{(q+k-1)\cdot x_k - (n+q)\,x_{n+1}}{q-p-1} \tag{2}$$

Como la serie es convergente, lo es la sucesión (s_n), y de cualquiera de las dos igualdades anteriores se sigue que la sucesión de término general $(n+q)\,x_{n+1}$ es convergente. Si fuese $\lim\,(n+q)\,x_{n+1} = \lim \frac{x_{n+1}}{1/(n+q)} \neq 0$, la serie $\sum x_n$ sería del mismo carácter que la armónica (véase 3.7), esto es, divergente, pero esto es imposible porque la serie es convergente. Por tanto, $\lim\,(n+q)\,x_{n+1} = 0$ y tomando límites en (2) se deduce que la suma de la serie es

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(q+k-1)\cdot x_k - (n+q)\,x_{n+1}}{q-p-1} = \frac{(q+k-1)\cdot x_k}{q-p-1} = \frac{c+(k-1)\cdot a}{c-b-a}\cdot x_k$$

2.6. Ejemplo: Obtenga, en caso de convergencia, la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2n+2)(2n)\cdots 4\cdot 2}$$

Un problema similar a figura resuelto en la página 721 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones, de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Dado que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(2n+1)!!}{(2n+4)!!}\cdot\frac{(2n+2)!!}{(2n-1)!!}=\frac{2n+1}{2n+4}$$

la serie es hipergeométrica y son $a=2$, $b=1$ y $c=4$. Como es

$$\frac{c-b}{a}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}>1$$

la serie es convergente y su suma es

$$s=\frac{c\cdot x_1}{c-b-a}=\frac{4\cdot\frac{1}{8}}{4-1-2}=\frac{1}{2}$$

2.7. Series telescópicas: *Se dice que una serie* $\sum x_n$ *es telescópica asociada a una sucesión* (a_n) *de números reales si se cumple que* $x_n=a_n-a_{n+1}$*, para todo* $n\in\mathbb{N}$*. Esta serie es convergente si y sólo si* (a_n) *tiene límite finito y, en tal caso, su suma es*

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=a_1-\lim_{n\to\infty}a_n$$

DEMOSTRACIÓN: La suma parcial n-ésima de la serie es

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-1} - a_n + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}$$

Por tanto, (s_n) es convergente si y sólo si lo es (a_n) y, en tal caso, la suma s de la serie es $s = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$ ■

También se llaman telescópicas las series $\sum x_n$ tales que $x_n = a_{n+1} - a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como antes, estas series sólo convergen cuando (a_n) tiene límite finito y, en tal caso, su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1$$

2.8. Ejemplo: Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

SOLUCIÓN: El término general x_n de la serie puede escribirse como

$$x_n = \frac{2n+1}{n^2\,(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2\,(n+1)^2} - \frac{n^2}{n^2\,(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2\,(n+1)^2} - \frac{n^2}{n^2\,(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Se trata de una serie telescópica. Su suma parcial n-ésima $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ es:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

La serie es por tanto convergente y su suma es

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

2.9. Sobre la asociatividad de una serie: Se dice que una serie es *asociativa* si al agrupar sus términos en paréntesis, del modo que se quiera (sin cambiarlos de orden), la serie que resulta tiene igual carácter e igual suma, cuando ésta existe. Las series convergentes y las divergentes son asociativas, propiedad que no tienen, en general, las series oscilantes. Por ejemplo, $1-1+1-1+\dots$ es una serie oscilante porque $s_{2n}=0$ y $s_{2n-1}=1$ tienen distinto límite, pero $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0+0+0+\dots$ converge con suma cero, pues $s_n=0$ para todo n. Cuando en una serie $\sum x_n$ tal que $\lim x_n=0$ se agrupan los términos de p en p ($p\in\mathbb{N}$ fijo), la serie que se obtiene es del mismo carácter y tiene la misma suma que $\sum x_n$.

2.10. Ejemplo: Hallamos, en caso de convergencia, la suma de la serie

$$\sum x_n = \frac{1}{0!\cdot 1}-\frac{1}{0!\cdot 2}+\frac{1}{1!\cdot 2}-\frac{1}{1!\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(n-1)!\,n}-\frac{1}{(n-1)!(n+1)}+\cdots$$

Este problema es el ejercicio 143.2 del volumen Cálculo Infinitesimal de una variable, de Juan de Burgos.

SOLUCIÓN: Dado que el término n-ésimo de la serie tiende a 0 cuando $n\to\infty$, podemos agrupar los términos de dos en dos sin que cambie su carácter ni su suma. Como quiera que para cada $n=1,2,\dots$ es

$$\frac{1}{(n-1)!\,n}-\frac{1}{(n-1)!(n+1)}=\frac{1}{(n+1)!}$$

sucede que

$$\sum x_n = \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots = e-\left(1+\frac{1}{1!}\right) = e-2$$

3. Convergencia de series de términos positivos

Este epígrafe se dedica a la convergencia de las series de términos positivos. Estas series nunca oscilan (siempre tienen suma, finita o infinita), son asociativas y conmutativas. Además, si una serie tiene un número finito de sumandos negativos y todos los demás son positivos, puede ser tratada como una serie de números positivos, pues se expresa como una suma finita de números negativos más una serie de términos positivos. Si una serie tiene todos sus términos negativos, extrayendo -1 como factor común se la reduce a una serie de términos positivos. Las series con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos se tratan en el epígrafe 4.

3.1. Teorema: *Sea $\sum x_n$ una serie de números reales positivos. Entonces:*

i) $\sum x_n$ *es convergente o divergente, es decir, nunca es oscilante.*

ii) $\sum x_n$ *es convergente si y sólo si la sucesión (s_n) de sus sumas parciales es acotada.*

iii) $\sum x_n$ *es asociativa, es decir, tiene la misma suma que cualquiera de las series que se obtienen agrupando sus términos en paréntesis.*

iv) $\sum x_n$ *es conmutativa, es decir, tiene la misma suma que cualquiera de sus reordenaciones (esto es, series con sus mismos sumandos, pero en distinto orden).*

3.2. Ejemplo: Calcule la suma de la serie siguiente en la que es $a>1$:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{2a^3}+\frac{1}{4a^3}+\cdots+\frac{1}{a^n}+\frac{1}{2a^n}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}a^n}+\cdots$$

Este problema es el ejercicio 144.1 del volumen Cálculo Infinitesimal de una variable, de Juan de Burgos.

SOLUCIÓN: Dado que se trata de una serie de términos positivos, la serie es "asociativa", luego pueden agruparse sus términos como se quiera, por ejemplo, en grupos de 1, 2, 3, …, n, … sumandos, resultando una serie convergente cuya suma es:

$$s=\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}\right)+\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{2a^3}+\frac{1}{4a^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{2a^n}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}a^n}\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{2a^n}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}a^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{a^n}-\frac{1}{2^n a^n}}{1-\frac{1}{2}}=$$

$$=2\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2a}\right)^n\right)=2\cdot\left(\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}-\frac{\frac{1}{2a}}{1-\frac{1}{2a}}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{2a-1}\right)=\frac{2a}{(a-1)(2a-1)}\ \blacksquare$$

Series especialmente relevantes son las series armónicas, patrones con los que comparar otras series para decidir su convergencia.

3.3. Sumas parciales de la serie armónica. Constante de Euler: *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

se llama serie armónica (*de orden* 1) *y es divergente. La suma parcial n-ésima de la serie, que se escribe*

$$h_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

es un infinito equivalente a $\mathrm{L}\,n$ *; más precisamente,*

$$h_n=\mathrm{L}\,n+\gamma+\varepsilon_n$$

donde $\gamma=0,5772156\ldots$ *es la llamada constante de Euler y* (ε_n) *es un infinitésimo.*

DEMOSTRACIÓN: Como ya se comprobó en C2,

$$\lim_{n\to\infty}(h_n - \mathrm{L}\,n) = \gamma\,, \qquad \text{es decir,} \qquad \lim_{n\to\infty}(h_n - \mathrm{L}\,n - \gamma) = 0$$

por lo que si se llama $\varepsilon_n = h_n - \mathrm{L}\,n - \gamma$, resulta que (ε_n) es un infinitésimo. De aquí se deduce que los infinitos $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ y $\mathrm{L}\,n$ son equivalentes, pues

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{\mathrm{L}\,n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\,n + \gamma + \varepsilon_n}{\mathrm{L}\,n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\gamma + \varepsilon_n}{\mathrm{L}\,n}\right) = 1 + 0 = 1 \;\blacksquare$$

3.4. Serie armónica generalizada: *Se llama serie armónica de orden* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a la serie de términos positivos*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

La serie armónica de orden α *es convergente si y sólo si* $\alpha > 1$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\varepsilon_n \to 0$, los infinitésimos $(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1$ y $\alpha\,\varepsilon_n$ son equivalentes, así es que del *Principio de Sustitución* por infinitésimos equivalentes se deduce que:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\alpha\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{\alpha}{n+1} = \alpha$$

Del *Criterio de Raabe* (véase 3.16) se sigue que la serie $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, es la serie armónica ordinaria $\sum\frac{1}{n}$, que es divergente $\blacksquare$

Los criterios de convergencia por comparación reducen el estudio de la convergencia de una serie dada de términos positivos al de ciertas series de referencia cuya convergencia o divergencia es conocida, como las geométricas o las armónicas generalizadas que se acaban de tratar.

3.5. Criterio de comparación de la mayorante: *Sean* $\sum x_n$ *y* $\sum y_n$ *dos series de términos reales positivos tales que* $x_n \leq y_n$ *, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *. Entonces,*

i) Si $\sum y_n$ *converge, también converge* $\sum x_n$ *.*
ii) Si $\sum x_n$ *diverge, también diverge* $\sum y_n$ *.*

3.6. Ejemplo: Estudie la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{L}\, n}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}$

SOLUCIÓN: La serie del apartado a) es de términos positivos y para cada $n \geq 2$ es

$$\frac{\mathrm{L}\, n}{n} \geq \frac{1}{n}$$

Dado que la serie armónica de orden 1 es divergente, del *Criterio de la mayorante* se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{L}\, n}{n}$ diverge. Por otro lado, la serie del apartado b) es de términos positivos y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ es

$$\frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$ converge, la serie b) también converge.

3.7. Criterio de comparación por cociente: *Sean* $\sum x_n$ *y* $\sum y_n$ *dos series de términos reales positivos tales que existe*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell$$

Entonces:

ii) *Si* $\ell = 0$ *y* $\sum y_n$ *converge, entonces* $\sum x_n$ *converge.*

ii) *Si* $\ell = +\infty$ *y* $\sum y_n$ *diverge, entonces* $\sum x_n$ *diverge.*

iii) *Si* $0 < \ell < +\infty$ *, las series* $\sum x_n$ *y* $\sum y_n$ *son del mismo carácter, es decir, ambas son convergentes o ambas son divergentes.*

El apartado iii) del Criterio anterior establece, en particular, que si (x_n) e (y_n) son sucesiones comparables de números reales positivos, esto es, si $x_n <> y_n$, entonces las series $\sum x_n$ y $\sum y_n$ tienen el mismo carácter.

3.8. Ejemplo: Estudie la convergencia de las siguientes series de términos positivos:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n^5+n+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/\sqrt[3]{n}} - 1)$

Este problema es el 8.6 del volumen Ejercicios de Análisis, de Braulio De Diego. Editorial Deimos.

SOLUCIÓN:

a) Dado que, cuando $n \to \infty$, es

$$\frac{(n+1)^3}{n^5+n+1} \sim \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$$

y la serie armónica de grado 2 es convergente, del *Criterio de comparación por cociente* se deduce que la serie es convergente.

b) Cuando $n \to \infty$, de la comparación del infinito logarítmico con el potencial se deduce que $\frac{\mathrm{L}\, n}{\sqrt[3]{n}} \to 0$, y por tanto

$$n^{1/\sqrt[3]{n}} - 1 = e^{(\mathrm{L}\, n)/\sqrt[3]{n}} - 1 \sim \frac{\mathrm{L}\, n}{\sqrt[3]{n}}$$

así que las series de término general $n^{1/\sqrt[3]{n}} - 1$ y $\frac{\mathrm{L}\, n}{\sqrt[3]{n}}$ son del mismo carácter. Como además para cada $n \geq 3$ es

$$\frac{\mathrm{L}\, n}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{1/3}}$$

y la serie armónica de grado $\frac{1}{3}$ es divergente, la serie de término general $\frac{\mathrm{L}\, n}{\sqrt[3]{n}}$, y por tanto, la de término general $n^{1/\sqrt[3]{n}} - 1$, es divergente.

3.9. Ejemplo: Si la serie de términos positivos $\sum a_n$ es convergente, ¿lo son las series $\sum \frac{1}{1+a_n}$ y $\sum \frac{a_n^2}{1+a_n}$?

Este problema figura resuelto en la página 216 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: La serie $\sum a_n$ es convergente, luego $\lim a_n = 0$, y por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0\,,$$

así que $\sum \frac{1}{1+a_n}$ no es convergente, luego diverge por ser una serie de términos positivos. La otra es una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n^2}{1+a_n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Dado que la serie $\sum a_n$ es convergente, del *Criterio de comparación por cociente* se deduce que la serie

$$\sum \frac{a_n^2}{1+a_n}$$

es convergente ■

Los siguientes criterios derivan de los criterios de comparación y son, en esencia, casos particulares de ellos. Con ellos no será necesario buscar series de referencia con las que comparar la serie dada; en muchos casos, del análisis de ciertas expresiones de sus términos generales se pueden obtener conclusiones sobre la convergencia de la serie.

3.10. Criterio de la raíz: *Sea $\sum x_n$ una serie de números reales positivos para la que existe (finito o $+\infty$) el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$$

Entonces:

i) Si $\ell < 1$, la serie $\sum x_n$ converge.
ii) Si $\ell > 1$, la serie $\sum x_n$ diverge.

3.11. Ejemplo: Estudiamos la convergencia de las series de términos positivos:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} \quad (0 < a < b)$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \frac{n\pi}{2n+4}$

Este problema es el 8.2 del volumen Ejercicios de Análisis, de Braulio De Diego. Editorial Deimos.

SOLUCIÓN:

a) Si x_n es el término general de la serie, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = (1^{+\infty}) = e^{\lambda}$$

donde

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} n \cdot \mathrm{L}\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{n+a}{n+b} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(a-b)\cdot n}{n+b} = a - b$$

y por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = e^{a-b} < 1$$

por ser $a - b < 0$, así que la serie es convergente.

b) Para esta serie es

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \cos^2 \frac{n\pi}{2n+4} = \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0 < 1$$

por lo que la serie es también convergente ■

El Criterio logarítmico que ahora se enuncia y el Criterio de la raíz deciden a menudo la convergencia o divergencia de series cuyos términos generales son expresiones exponenciales o potenciales-exponenciales de n. En ocasiones, el Criterio logarítmico resuelve la convergencia de series de términos positivos a las que no puede aplicarse el Criterio de la raíz, esto es, de series $\sum x_n$ en las que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$.

3.12. Criterio logarítmico: *Sea $\sum x_n$ una serie de números reales positivos para la que existe, finito o infinito de cualquier signo,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\mathrm{L}\, n} = \ell$$

Entonces:

i) Si $\ell > 1$, la serie $\sum x_n$ converge.

ii) Si $\ell < 1$, la serie $\sum x_n$ diverge.

3.13. Ejemplo: Estudie, según los valores de $a > 0$, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{an}\right)^{n\,\mathrm{L}\, n}$$

Este problema es el 4.29 del volumen Problemas de Cálculo Infinitesimal, de E. Tebar Flores.

SOLUCIÓN: La serie es de términos positivos y si x_n es su término general, entonces

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\,(\frac{1}{x_n})}{\mathrm{L}\, n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\,[(\frac{an}{n+1})^{n\,\mathrm{L}\, n}]}{\mathrm{L}\, n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,\mathrm{L}\, n\,\mathrm{L}(\frac{an}{n+1})}{\mathrm{L}\, n} = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{L}\left(\frac{an}{n+1}\right)$$

Si $a \neq 1$, entonces $\mathrm{L}\, a \neq 0$ y

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{L}\, a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ -\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

y del *Criterio logarítmico* se deduce que la serie converge si $a > 1$ y diverge si $0 < a < 1$. Si $a = 1$, entonces es

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{L}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{L}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = -\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = -1 < 1$$

y la serie diverge.

3.14. Criterio del cociente: *Sea* $\sum x_n$ *una serie de números reales positivos para la que existe (finito o* $+\infty$*)*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell\,.$$

Entonces:

i) Si $\ell < 1$*, la serie* $\sum x_n$ *converge.*

ii) Si $\ell > 1$*, la serie* $\sum x_n$ *diverge.*

3.15. Ejemplo: Estudiamos la convergencia de las siguientes series de términos positivos:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k a^n \quad (k\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R},\ a>0)$

Este problema es el 06.4 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN

a) La expresión del término general x_n de la serie puede simplificarse, pues

$$x_n = \frac{2^{2n}}{(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdots(2\cdot n)} = \frac{2^{2n}}{2^n\, n\,!} = \frac{2^n}{n\,!}$$

para cada $n \geq 1$. Dado que es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

del Criterio del cociente se deduce que la serie es convergente. Si se recuerda además que el desarrollo en serie exponencial, es decir,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es válido para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} - 1 = e^2 - 1$$

b) Si x_n es el término general de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k a^{n+1}}{n^k a^n} = a\cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = a$$

Por tanto, del Criterio del cociente se deduce que si $0 < a < 1$, la serie converge, mientras que si $a > 1$, la serie diverge. Cuando es $a = 1$ se trata de la serie $\sum n^k$, que es divergente por ser $n^k \to +\infty$ ∎

Los Criterios de la raíz y del cociente son de eficacia similar, pero no dan información si $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ (lo que supone, por la Regla de la raíz, que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$). El Criterio de Raabe es más fino que los dos anteriores y, en muchos casos en que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 1$, decide el carácter de la serie.

3.16. Criterio de Raabe: *Sea* $\sum x_n$ *una serie de números reales positivos para la que existe (finito o infinito de cualquier signo):*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \ell$$

Entonces:

i) Si $\ell > 1$, *la serie* $\sum x_n$ *converge.*

ii) Si $\ell < 1$, *la serie* $\sum x_n$ *diverge.*

3.17. Ejemplo: Estudie la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

Este problema figura resuelto en la página 722 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Obsérvese que la serie es de términos positivos y que si x_n es su término general, entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)!!(2n)!!}{(2n+2)!!\,(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1$$

con lo que el Criterio del cociente no da información alguna sobre la convergencia de la serie. En cambio, aplicando el Criterio de Raabe se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}<1$$

por lo que la serie es divergente. También podría haberse adivinado la divergencia de la serie teniendo en cuenta que, como es

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2n+1}{2n+2},$$

la serie es hipergeométrica y, en la nomenclatura de 2.5, son $a=2$, $b=1$ y $c=2$, así que como es

$$\frac{c-b}{a}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}\leq 1$$

la serie hipergeométrica es divergente.

4. Series de términos positivos y negativos

Estudiamos ahora las series de números reales que tienen infinitos sumandos positivos e infinitos sumandos negativos, pues las demás series pueden reducirse fácilmente a las series de términos no negativos. Comenzamos con las series de más fácil estudio:

4.1. Series alternadas: *Son las series de números reales cuyos sumandos son positivos y negativos alternativamente y decrecientes en valor absoluto, es decir, son las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n = x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+(-1)^{n+1}x_n+\cdots$$

donde $x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots>0$.

4.2. Criterio de Leibniz*: La serie alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$$

es convergente si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \,.$$

En tal caso, la suma n-ésima s_n aproxima a la suma s de la serie con un error menor que el valor absoluto del primer término que no se sumó, es decir,

$$\left|s - s_n\right| < x_{n+1} \,.$$

4.3. Ejemplo: Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

es alternada y acote el error que se comente al aproximar su suma por la suma de sus n primeros términos.

SOLUCIÓN: La serie es alternada pues $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ y además es convergente por ser $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, según el Criterio de Leibniz. Además, el error $\left|s - s_n\right|$ que se comete al aproximar la suma s de la serie por su suma parcial n-ésima s_n es tal que

$$\left|s - s_n\right| < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

4.4. La serie armónica alternada: *Se llama así a la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Se trata de una serie convergente cuya suma es $\mathrm{L}\,2$, *es decir,*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots=\mathrm{L}\,2$$

DEMOSTRACIÓN: Esta serie es alternada y su término n-ésimo tiende a cero, así que es convergente acudiendo al Criterio de Leibniz. Obtendremos la suma de la serie como el límite de su suma parcial s_{2n}, límite que calcularemos expresando s_{2n} en función de la suma parcial n-ésima $h_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ de la serie armónica $\sum\frac{1}{n}$. Dado que, según se probó en 3.3, es $h_n=\mathrm{L}\,n+\gamma+\varepsilon_n$, donde γ es la constante de Euler y $\varepsilon_n\to 0$, resulta que:

$$s_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=h_{2n}-h_n=(\mathrm{L}\,2n+\gamma+\varepsilon_{2n})-(\mathrm{L}\,n+\gamma+\varepsilon_n)=\mathrm{L}\,2+(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)$$

y, tomando límites cuando $n\to\infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\mathrm{L}\,2+\lim_{n\to\infty}(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)=\mathrm{L}\,2$$

4.5. Convergencia absoluta y convergencia condicional: *Una serie de números reales* $\sum x_n$ *se dice absolutamente convergente si la serie* $\sum |x_n|$ *es convergente. Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente. A las series convergentes que no son absolutamente convergentes se las llama series condicionalmente convergentes.*

Para que una serie $\sum x_n$ sea absolutamente convergente (y por tanto convergente) es suficiente que la serie $\sum |x_n|$ cumpla la condición de convergencia de uno cualquiera de los criterios para series de términos positivos.

4.6. Ejemplos

1. La serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$$

   es convergente, pero no es absolutamente convergente, pues su serie de valores absolutos es la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

   que es divergente. Es por tanto una serie condicionalmente convergente.

2. La serie geométrica de razón $r = -\frac{1}{5}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \cdots + \frac{1}{(-5)^n} + \cdots$$

   es convergente, pues su razón cumple $|r| = \left|-\frac{1}{5}\right| < 1$ y su suma es $\frac{5}{6}$.

La serie de sus valores absolutos es también geométrica, ahora de razón $\frac{1}{5}$, luego convergente con suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots+\frac{1}{5^n}+\cdots=\frac{5}{4}$$

3. Si (x_n) es una sucesión cualquiera de números reales, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan x_n}{n^2}$$

es absolutamente convergente (y por tanto convergente), pues para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple

$$\frac{\left|\arctan x_n\right|}{n^2}<\frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$$

y la serie armónica de grado 2, $\sum\frac{1}{n^2}$, es convergente.

4.7. Observación: De 4.5. se sigue que toda serie convergente de términos positivos puede utilizarse para obtener una infinidad de series convergentes, sin más que poner signos menos al azar. Sin embargo, no todas las series convergentes pueden ser obtenidas así, pues en las series condicionalmente convergentes, como por ejemplo la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, la serie de sus valores absolutos diverge ■

Dada una serie $\sum x_n$ con infinitos sumandos positivos e infinitos sumandos negativos, considérense las series siguientes: $\sum x_n^+$, formada por los términos positivos de $\sum x_n$ en el mismo orden en el que figuran en la serie, y $\sum x_n^-$, formada por los valores absolutos de los términos negativos de $\sum x_n$, también en su mismo orden relativo. Ambas series, $\sum x_n^+$ y $\sum x_n^-$, son de términos positivos, luego nunca son oscilantes, es decir, son convergentes o divergentes, así es que su suma existe siempre (finita o infinita).

4.8. Convergencia de una serie $\sum x_n$ a través de las subseries $\sum x_n^+$ y $\sum x_n^-$: *Sea $\sum x_n$ una serie de números reales con infinitos sumandos positivos e infinitos sumandos negativos. Entonces:*

i) La serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente si y sólo si las series $\sum x_n^+$ y $\sum x_n^-$ son ambas convergentes. En tal caso son

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$$

ii) Si una de las series $\sum x_n^+$ o $\sum x_n^-$ converge y la otra diverge, $\sum x_n$ es divergente.

4.9. Observaciones

1. Si las subseries $\sum x_n^+$ y $\sum x_n^-$ divergen ambas, la serie $\sum x_n$ puede converger, diverger u oscilar, como ponen de manifiesto las siguientes series:

   - La serie $\sum x_n = 1-1+1-1+\cdots$ es oscilante y $\sum x_n^+ = \sum x_n^- = 1+1+1+\cdots$ son ambas divergentes.
   - La serie armónica alternada $\sum y_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ es convergente y para ella son $\sum y_n^+ = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$ y $\sum y_n^- = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots$, ambas divergentes.
   - Por último, la serie $\sum z_n = 1-\frac{1}{1}+2-\frac{1}{2}+3-\frac{1}{3}+\cdots$ es divergente y las series $\sum z_n^+ = 1+2+3+\cdots$ y $\sum z_n^- = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ son ambas divergentes.

2. Del teorema 4.8. se sigue que una serie $\sum x_n$ es condicionalmente convergente si y sólo si es convergente y las series $\sum x_n^+$ y $\sum x_n^-$ divergen ambas ■

4.10. Ejemplo: Estudiamos la convergencia de la siguiente serie y calculamos su suma en caso de convergencia.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\cdots$$

SOLUCIÓN: Si x_n es el término general de la serie, las subseries de los términos positivos y de los valores absolutos de los términos negativos son geométricas con razones cuyo valor absoluto es menor que 1, por lo que ambas son convergentes. Del teorema anterior se deduce que la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente y que su suma es

$$\sum x_n=\sum x_n^+-\sum x_n^-=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\blacksquare$$

La "propiedad conmutativa" de las series de términos positivos (toda reordenación de dichas series tiene el mismo carácter y la misma suma) no es extensible a todas las series con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, pero sí lo es a las absolutamente convergentes, como establece el siguiente teorema.

4.11. Teorema de Dirichlet: *Una serie de números reales es absolutamente convergente si y sólo si es convergente y suma lo mismo que cada una de sus reordenaciones.*

En cambio, las series condicionalmente convergentes, lejos de ser conmutativas, tienen reordenaciones de comportamientos desconcertantes, como pone de manifiesto el …

4.12. Teorema de Riemann: *Una serie condicionalmente convergente de números reales puede ser reordenada de modo que la serie obtenida sea: i) convergente y tenga por suma cualquier número prefijado; ii) divergente; o iii) oscilante.*

4.13. Ejemplo: Si se reordenan los términos de la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$$

(que es condicionalmente convergente con suma $\mathrm{L}\,2$ como se comprobó en 4.4) para formar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots,$$

en la reordenación que así se obtiene se puede, dado que su término general y_n tiende a 0, agrupar los términos de tres en tres (véase 2.9), con lo que se obtiene una serie del mismo carácter y la misma suma que $\sum y_n$, cuya suma parcial n-ésima es

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= h_{2n} - \frac{1}{2}h_n - \frac{1}{2}h_{2n} = \frac{1}{2}(h_{2n} - h_n) = \frac{1}{2}(\mathrm{L}\,2n + \gamma + \varepsilon_{2n} - \mathrm{L}\,n - \gamma - \varepsilon_n) = \frac{1}{2}\mathrm{L}\,2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n)$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2} \operatorname{L} 2$$

que es la mitad de lo que suma la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.