

C2. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas

1. Demuestre que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no pueden ser tres términos de una misma progresión aritmética

Este problema figura resuelto en la página 365 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

2. Los números reales no nulos a_1, a_2, \dots, a_n son los sucesivos términos de una progresión aritmética. Calcule, en función de los extremos, la suma:

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$$

Este problema figura resuelto en la página 313 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

3. Calcule el término general de la sucesión siguiente:

$$\frac{4 \cdot L5}{1}, \frac{5 \cdot L13}{3}, \frac{6 \cdot L23}{7}, \frac{7 \cdot L35}{13}, \dots$$

Este problema figura resuelto en la página 161 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

4. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Calcule

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

b) En un tablero de $n \times n$ cuadrículas, ¿cuántos cuadrados de diferentes tamaños se pueden formar?

c) En el mismo tablero, ¿cuántos rectángulos se podrían formar?

Este problema es el 98.12 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

5. Calcule las sumas:

a) $A_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$

b) $B_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

c) $C_n = 1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$

Este problema figura resuelto en la página 93 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

6. Fibonacci supuso que cada pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes, y que cada pareja nacida sólo era fértil a partir del segundo mes. Halle el número f_n de parejas nacidas en el n -ésimo mes.

Este problema figura resuelto en la página 193 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

7. Determine el término general de las sucesiones (x_n) definidas mediante las siguientes ecuaciones recurrentes a partir de los valores iniciales que se indican:

a) $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}$, $x_1 = x_2 = 2$

b) $x_n = 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 5$

c) $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 12n \cdot 3^n$, $x_1 = 0$, $x_2 = -9$

d) $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 6$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 14$

Este problema figura resuelto en la página 459 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

8. Se consideran n rectas en el plano afín, secantes dos a dos y tales que no hay tres de ellas que se corten en un mismo punto. Determine el número r_n de regiones en las que dichas n rectas dividen al plano.

Este problema es idéntico al 16.25 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

- 9.** Los cuatro primeros términos de la sucesión (a_n) son $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ y su ley de recurrencia es

$$a_{n+4} + a_{n+3} + 2a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 12n.$$

- a) Calcule el término general de la sucesión en función de n .
b) Calcule el término a_{90} .

Este problema es el 00.18 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

- 10.** Dados dos números positivos a y b , como primero y segundo término de una sucesión en la que cada uno de los siguientes es la media armónica de los dos inmediatos anteriores, halle su término general.

Este problema figura resuelto en la página 459 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.