6. Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$$

Un problema idéntico a éste figura resuelto en la página 267 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Para obtener la suma de series del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{n!}$$

donde p es un polinomio de grado k, se descompone su término n-ésimo x_n en una suma de $k+1$ sumandos de la forma:

$$\frac{p(n)}{n!} = \frac{A_0}{n!} + \frac{A_1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{A_k}{(n-k)!},$$

igualdad válida para $n \geq k$, y donde las constantes reales A_i se obtienen reduciendo el segundo miembro a común denominador e identificando su numerador con $p(n)$. En nuestro caso, podemos escribir, para cada $n \geq 4$:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{n\,!}=\frac{A}{n\,!}+\frac{B}{(n-1)\,!}+\frac{C}{(n-2)\,!}+\frac{D}{(n-3)\,!}+\frac{E}{(n-4)\,!}$$

Si se multiplican los dos miembros por $n!$ se obtiene que

$$n^4+2n^3+n^2=A+Bn+Cn\,(n-1)+Dn\,(n-1)(n-2)+En\,(n-1)(n-2)(n-3)$$

y, al identificar coeficientes, $A=0$, $B=4$, $C=14$, $D=8$, $E=1$. Dado que es $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{n\,!}=$$

$$=0+4+18+24+4\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\,!}+14\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\,!}+8\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-3)\,!}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-4)\,!}=$$

$$=46+4\left(e-\frac{5}{2}\right)+14\,(e-2)+8\,(e-1)+e=27e$$