P2. Problema 13.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Tres personas A, B, y C lanzan sucesivamente en el orden A, B, C un dado. La primera persona que saque un 6, gana.

a) ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?.

b) Calcular la probabilidad de que el juego termine en el décimo lanzamiento y de que la persona C saque siempre la suma de lo que acaban de sacar los jugadores A y B en las tiradas inmediatamente.

Resuelto en Vol. 4. Ej 04.47

Apartado (a):

Sea A_i el suceso "*gana A en su i-ésima tirada*".

Observemos que

- $p(A_1) = \dfrac{1}{6}$
- $p(A_2) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{6}$
- $p(A_3) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{6}$
- $\ldots$
- $p(A_n) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{3(n-1)} \dfrac{1}{6}$

Apartado (a):

De este modo, la probabilidad de que el jugador A gane el juego será:

$$p(G_A) = p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)} \frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{36}{91}$$

La suma de los infinitos términos de una serie geométrica de razón $r < 1$ es:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

Apartado (a):

Análogamente, sea B_i el suceso "*gana B en su i-ésima tirada*".

Observemos que

- $p(B_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
- $p(B_2) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
- $p(B_3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
- $\dots$
- $p(B_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3n-2} \frac{1}{6}$

Apartado (a):

La probabilidad de que el jugador B gane el juego será:

$$p(G_B) = p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(B_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n-2} \frac{1}{6} = \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3}} = \frac{30}{91}$$

Apartado (a):

Por último, la probabilidad de que C gane el juego será

$$p(G_C) = 1 - p(G_A) - p(G_B) = 1 - \frac{36}{91} - \frac{30}{91} = \frac{25}{91}$$

Dado que la probabilidad de que el juego no termine nunca será

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

Apartado (b):

Definamos ahora el suceso $D_n =$"*en la n-ésima tirada de cada jugador, ninguno obtiene un 6 y el jugador C obtiene como resultado la suma de lo que han obtenido Ay B*.

Dado que el juego va a terminar en el décimo lanzamiento, el ganador será A y la probabilidad pedida es

$$p(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap A_4)$$

Obtengamos $p(D_1)$.

Apartado (b):

El número de casos favorables lo podemos obtener condicionando al resultado obtenido por C:

Resultado obtenido por C	Casos favorables
2	(1,1,2)
3	(1,2,3) , (2,1,3)
4	(1,3,4) , (2,2,4) , (3,1,4)
5	(1,4,5), (2,3,5), (3,2,5) , (4,1,5)

Por tanto, $|D_1| = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ y entonces:

$$p(D_1) = \frac{10}{6^3}$$

Apartado (b):

Dado que, por la independencia de sucesos,

$$p(D_2) = p(D_3) = p(D_1) = \frac{10}{6^3}$$

entonces:

$$p(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap A_4) = \frac{10}{6^3} \cdot \frac{10}{6^3} \cdot \frac{10}{6^3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10^3}{6^{10}} = \frac{125}{7558272}$$