Problema 7.

a) Qué ángulo debe girar la recta $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$ alrededor del eje $e: \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ para quedar en una posición perpendicular a la primera.

b) Ecuaciones del giro.

c) Ecuaciones de la nueva recta.

Solución:

a) El eje de giro es perpendicular al plano OXY. Si el ángulo de giro es α, las coordenadas de $P'(x', y', z')$, transformado de $P(x, y, z)$, son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - (y-2)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = x\operatorname{sen}\alpha - (y-2)\cos\alpha + 2 \\ z' = z \end{cases}$$

Tomamos $A(0,1,2), B(1,0,1) \in r$, sus transformados son $A'(\operatorname{sen}\alpha, 2-\cos\alpha, 2)$ y $B'(\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha, \operatorname{sen}\alpha - 2\cos\alpha + 2, 1)$.

Denotando por r' la transformada de r; estas serán perpendiculares si lo son los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$, es decir, si su producto escalar es nulo,

$$(1,-1,-1)\cdot(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha, -\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha, -1) = 0 \iff \cos\alpha = -\frac{1}{2} \iff \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

b) Las ecuaciones del giro son $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 3 \\ z' = z \end{cases}$

c) Resultan $A'(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}, 2)$ y $\overrightarrow{A'B'} = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, -1\right)$, luego la recta r' admite por ecuaciones paramétricas

$$r': \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\lambda \\ y = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$