P2. Problema 1.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

En un dado se verifica que $p(1) = p(3) = p(5) = a$; $p(2) = p(4) = p(6) = b$. Se lanza el dado y llamamos A al suceso "*el número obtenido es mayor o igual que cuatro*".

a) Calcular a y b para que $p(A) = \dfrac{5}{12}$.

b) ¿Para qué valores de m pueden encontrarse a y b con la condición de que $p(A) = m$?

Resuelto en Vol. 1. Pag. 128.

Axiomas de la probabilidad:

Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra definida sobre Ω . Se llama probabilidad sobre $\mathcal{A}$ a cualquier función $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ que cumpla los siguientes axiomas (llamados axiomas de Kolmogorov):

A1. $p(A) \geq 0$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$.

A2. $p(\Omega) = 1$.

A3. Si $A_1, A_2, \ldots$ son sucesos incompatibles, entonces

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p\left(A_n\right)$$

Apartado (a):

De los axiomas anteriores, se tiene que:

- $p(A) = p(4) + p(5) + p(6) = a + 2b = \dfrac{5}{12}$
- $p(\Omega) = p(1) + p(2) + \cdots + p(6) = 3a + 3b = 1$

Resolviendo el sistema de ecuaciones concluimos que

$$\boxed{a = \frac{1}{4} \quad , \quad b = \frac{1}{12}}$$

Apartado (b):

Dado que $p(A) = m$, entonces:

- $p(A) = p(4) + p(5) + p(6) = a + 2b = m$

- $p(\Omega) = p(1) + p(2) + \cdots + p(6) = 3a + 3b = 1$

Resolviendo el nuevo sistema de ecuaciones:

$$\boxed{a = \frac{2 - 3m}{3} \quad , \quad b = \frac{3m - 1}{3}}$$

Apartado (b):

Dado que los sucesos elementales $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ han de tomar valores entre 0 y 1, entonces:

- $0 \leq a \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{2-3m}{3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{2}{3}$
- $0 \leq b \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{3m-1}{3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \leq m \leq \frac{4}{3}$

Dado que $m \in [0, 1]$, si realizamos la intersección de las dos condiciones anteriores, se obtiene que:

$$\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{2}{3}$$

Apartado (b):

Otra alternativa para llegar a la misma conclusión es darse cuenta que ni a ni b pueden tomar valores superiores a $\frac{1}{3}$:

- $0 \leq a \leq \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \dfrac{2-3m}{3} \leq \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{3} \leq m \leq \dfrac{2}{3}$
- $0 \leq b \leq \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \dfrac{3m-1}{3} \leq \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{3} \leq m \leq \dfrac{2}{3}$