8. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$$

Los apartados a) y b) figuran resueltos, respectivamente, en las páginas 232 y 689 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Es un límite indeterminado del tipo $0\cdot(+\infty)$. Para cada $k=1,\ldots,n$ ocurre que

$$n^2+1\le n^2+k\le n^2+n \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+k}\le\frac{1}{n^2+1}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{k}{n^2+n}\le\frac{k}{n^2+k}\le\frac{k}{n^2+1}\quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}k\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}\le\frac{1}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n}k\quad\Rightarrow\quad \frac{n(n+1)}{2n\,(n+1)}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}\le\frac{n(n+1)}{2\,(n^2+1)}$$

Como las sucesiones de los extremos son convergentes a $\frac{1}{2}$, de la *Regla del Sandwich* se desprende que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}=\frac{1}{2}$$