10. Demuestre que si $a \in \mathbb{Z}$ es primo relativo con 5 y n es un entero no negativo, el número $a^{8n} + 3a^{4n} - 4$ es múltiplo de 100.

Este problema figura resuelto en la página 10 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Si se llama $p(a) = a^{8n} + 3a^{4n} - 4$, demostrar que $p(a)$ es divisible por $100 = 2^2 \cdot 5^2$ equivale a demostrar que $p(a)$ es divisible por 4 y por 25. Para comprobarlo, factorizamos $p(a)$, resultando que

$$p(a) = (a^{4n} - 1)(a^{4n} + 4)$$

- $p(a)$ es múltiplo de 4. Si se factoriza $p(a)$ un poco más se obtiene:

$$p(a) = (a^{2n} - 1)(a^{2n} + 1)(a^{4n} + 4),$$

Si a es impar, entonces a^{2n} es impar y $a^{2n} - 1$ y $a^{2n} + 1$ son dos números pares, luego $p(a)$ es múltiplo de 4. Si a es par, entonces a^{4n} es múltiplo de 16, luego lo es de 4, así que $a^{4n} + 4$ es múltiplo de 4 y $p(a)$ es múltiplo de 4.

- $p\,(a)$ es múltiplo de 25. Como a no es divisible por 5, del *Pequeño Teorema de Fermat* se deduce que

$$a^4 \equiv 1 \pmod 5 \quad \Rightarrow \quad a^{4n} \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^{4n} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 5 \\ a^{4n} + 4 \equiv 1 + 4 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$$

es decir, tanto $a^{4n} - 1$ como $a^{4n} + 4$ son divisibles por 5, así que $p\,(a) = (a^{4n} - 1)(a^{4n} + 4)$ es divisible por 25.