1. Sume las series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}$

El primer apartado es el ejercicio 8.17 del libro Ejercicios de Análisis, de Braulio De Diego. El segundo es el ejercicio IV-65 del libro Problemas de Cálculo Infinitesimal, de E. Tebar.

SOLUCIÓN:

a) Para cada $n\geq 1$ podemos escribir:

$$x_n=\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\frac{2^n}{2^{n+1}n(n+1)}+\frac{n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$$

- Por un lado, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

es telescópica, pues

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

de modo que la suma parcial n-ésima de la serie es

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

y su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

- Por otro lado, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

es geométrica de razón $\frac{1}{2}$, luego convergente, y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

Por tanto, la suma de la serie del enunciado es

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}\cdot(1+1)=1$$

b) Puestos a sumar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,!\,(n+2)}$$

obsérvese que, para cada $n\in\mathbb{N}$ es

$$\frac{1}{n\,!\,(n+2)}=\frac{n+1}{(n+2)\,!}=\frac{(n+2)-1}{(n+2)\,!}=\frac{1}{(n+1)\,!}-\frac{1}{(n+2)\,!}$$

Es decir, se trata de otra serie telescópica y, por tanto, su suma parcial n-ésima es

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!\,(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)\,!}-\frac{1}{(k+2)\,!}\right)=$$

$$= \frac{1}{2\,!} - \frac{1}{3\,!} + \frac{1}{3\,!} - \frac{1}{4\,!} + \frac{1}{4\,!} - \frac{1}{5\,!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\,!} - \frac{1}{(n+2)\,!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)\,!}$$

Como la sucesión (s_n) es convergente, la serie es convergente y su suma es

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)\,!} \right) = \frac{1}{2}$$