9. Resuelva la ecuación cúbica $2x^3-9x^2+32x+75=0$, sabiendo que admite una solución compleja (no real) de módulo 5.

Este problema figura resuelto en la página 483 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y es también el problema 00.41 del volumen 4 de la misma colección.

SOLUCIÓN: Por tratarse de una ecuación cúbica con coeficientes reales, la ecuación admite al menos una solución real c y si $a+bi$, con $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$ y $a^2+b^2=25$, es la solución compleja no real de módulo 5, también es solución de la ecuación su conjugado $a-bi$. Las *ecuaciones de Cardano* para esta ecuación son:

$$\begin{cases} c+a+bi+a-bi=\frac{9}{2} \\ c(a+bi)+c(a-bi)+(a+bi)(a-bi)=16 \\ c(a+bi)(a-bi)=-\frac{75}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+2a=\frac{9}{2} \\ 2ca+a^2+b^2=16 \\ c(a^2+b^2)=-\frac{75}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+2a=\frac{9}{2} \\ 2ca+25=16 \\ 25c=-\frac{75}{2} \end{cases}$$

De la tercera ecuación se deduce $c=-\frac{3}{2}$, y de cualquiera de las dos primeras, $a=3$. Como es $a^2+b^2=25$, será $b=\pm 4$, por lo que las soluciones de la ecuación son:

$$x_1=c=-\frac{3}{2},\qquad x_2=a+bi=3+4i,\qquad x_3=a-bi=3-4i$$