6. Halle dos números naturales sabiendo que su mínimo común múltiplo es 1260 y que la suma de sus cuadrados es 39456.

Este problema es el 04.52 del volumen 4 de Problemas de oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

SOLUCIÓN: Sean A y B los números naturales que se buscan. Si llamamos $d = \operatorname{mcd}(A,B)$, podremos escribir $A = da$, $B = db$, donde a y b son números naturales primos entre sí. Entonces,

$$1260 = \operatorname{mcm}(A,B) = \operatorname{mcm}(da,db) = d\operatorname{mcm}(a,b) = dab, \qquad \text{es decir,} \qquad dab = 1260$$

Después de elevar esta última igualdad al cuadrado y unirla a la otra condición del enunciado, obtenemos el sistema diofántico

$$\begin{cases} d^2(a^2+b^2) = 39456 \\ d^2a^2b^2 = 1260^2 \end{cases}$$

Al dividir miembro a miembro y simplificar obtenemos

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{2\cdot 137}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2} \tag{1}$$

Comprobamos que $\text{mcd}(a^2+b^2,a^2b^2)=1$. Si tenemos en cuenta que $\text{mcd}(a,b)=1$, también es $\text{mcd}(a^2,b^2)=1^2=1$, lo que supone que $\text{mcd}(a^2+b^2,a^2)=1$ y $\text{mcd}(a^2+b^2,b^2)=1$ y de ambos deducimos que $\text{mcd}(a^2+b^2,a^2b^2)=1$. De (1) se sigue entonces que

$$\begin{cases} a^2+b^2=2\cdot 137 \\ a^2b^2=3^2\cdot 5^2\cdot 7^2 \end{cases}, \qquad \text{es decir,} \qquad \begin{cases} a^2+b^2=274 \\ ab=105 \end{cases}$$

Sumando y restando a la primera de las igualdades la segunda multiplicada por 2:

$$\begin{cases} (a+b)^2=484 \\ (a-b)^2=64 \end{cases}, \qquad \text{y si suponemos } a\geq b, \quad \begin{cases} a+b=22 \\ a-b=8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=15 \\ b=7 \end{cases}$$

De la igualdad $dab=1260$ se sigue ahora $105d=1260$ y por tanto $d=12$. Los números buscados son por tanto:

$$A=12\cdot 15=180, \qquad B=12\cdot 7=84.$$