C1

Números complejos. Ecuaciones algebraicas

1. El cuerpo de los números complejos

Es notorio que muchas ecuaciones algebraicas con coeficientes reales no tienen solución en $\mathbb{R}$, la más simple de ellas es $x^2+1=0$. La creación de los números complejos obedece a la necesidad de ampliar el cuerpo $\mathbb{R}$ a otro cuerpo $\mathbb{K}$ cuya suma y producto extiendan a los de $\mathbb{R}$ y en el que toda ecuación algebraica $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ tenga solución en el cuerpo $\mathbb{K}$.

1.1. El cuerpo conmutativo $\mathbb{C}$: *El conjunto $\mathbb{R}^2$, con las operaciones de suma y producto dadas por:*

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \qquad (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

para cualesquiera $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$, es un cuerpo conmutativo llamado cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. El cuerpo $\mathbb{C}$ contiene a un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$.

La suma y el producto así definidas son asociativas y conmutativas, el producto es distributivo respecto de la suma, el elemento nulo de la suma es $(0,0)$, la unidad del producto es $(1,0)$, todo número complejo (a,b) tiene opuesto $-(a,b)=(-a,-b)$, y cada número complejo no nulo (a,b) tiene inverso $(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. El cuerpo $\mathbb{R}$ es identificable con un subcuerpo de $\mathbb{C}$ porque la aplicación $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$: $f(a)=(a,0)$ es inyectiva y conserva las operaciones pues

$$f(a)+f(c)=(a,0)+(c,0)=(a+c,0)=f(a+c),$$

$$f(a)\,f(c)=(a,0)\,(c,0)=(a\,c,0)=f(a\,c)$$

para cualesquiera $a,c\in\mathbb{R}$. Dado que la imagen de f es el conjunto $\mathbb{R}\times\{0\}$, éste es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$.

1.2. Observaciones

1. La proposición anterior permite decir, con cierto abuso de lenguaje, que $\mathbb{C}$ *es una ampliación de* $\mathbb{R}$ o que $\mathbb{R}$ es subcuerpo de $\mathbb{C}$ y permite identificar cualquier número real a con su imagen $f(a)=(a,0)\in\mathbb{C}$.

2. Se llama *unidad imaginaria* al número complejo $i=(0,1)$. Este número cumple que

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

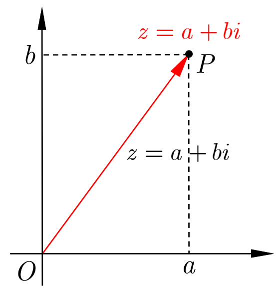
   La unidad imaginaria i permite escribir cualquier número complejo (a,b) como

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

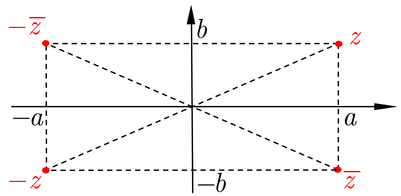
   Esta expresión $a+bi$ se llama *forma binómica* del número complejo (a,b) y puede utilizarse para operar con números complejos como si fuesen números reales, pero poniendo -1 en lugar de i^2.

3. Dado el número complejo $z=a+bi$, se dice que a y b son, respectivamente, su *parte real* y su *parte imaginaria*, y se escribe $a=\operatorname{Re}(z)$ y $b=\operatorname{Im}(z)$. Así, z es *real* si $\operatorname{Im}(z)=0$, mientras que si $\operatorname{Re}(z)=0$ y $z\neq 0$, se dice que z es *imaginario puro*.

4. La aplicación $\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2: a+bi\mapsto(a,b)$ es una biyección y permite identificar cada complejo $z=a+bi$ con el punto del plano cartesiano $P(a,b)$, llamado *afijo* de z. Además, como $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial real de dimensión 2 y una de sus bases es $\{1,i\}$, la biyección anterior es un isomorfismo de espacios vectoriales que identifica cada complejo z con el vector de posición de su afijo P, es decir, con el vector libre $\overrightarrow{OP}$.



1.3. Conjugado de un número complejo. Propiedades: Dado el número complejo $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, se llama *conjugado* de z al número complejo $\overline{z} = a - bi$. Dados los complejos $z, w \in \mathbb{C}$, se cumple:



i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, ii) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, iii) $\overline{\overline{z}} = z$,

iv) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, v) $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

1.4. Ejemplo: Dado un número complejo $w \neq 0$, halle todos los números complejos z de manera que el número

$$t = \frac{w + z}{w - z}$$

a) sea real.

b) sea imaginario puro.

Este problema es el 98.47 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

SOLUCIÓN: Supongamos que es $w = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulos. Si es $z = x + iy$, resulta:

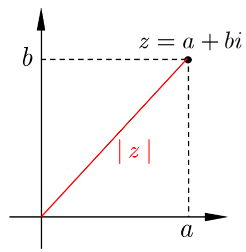
$$t = \frac{(a+x) + i(b+y)}{(a-x) + i(b-y)} = \frac{[(a+x) + i(b+y)][(a-x) - i(b-y)]}{[(a-x) + i(b-y)][(a-x) - i(b-y)]} =$$

$$= \frac{a^2 - x^2 + b^2 - y^2 + i[(a-x)(b+y) - (a+x)(b-y)]}{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \frac{a^2 + b^2 - x^2 - y^2 + 2i(ay - bx)}{(a-x)^2 + (b-y)^2}$$

El número complejo t es real sólo cuando $ay - bx = 0$, es decir, cuando (x, y) recorre la recta que pasa por el origen y tiene por vector director a (a, b), de la que hay que excluir el punto (a, b) que anula al denominador de la expresión de t

El número t es imaginario puro si y sólo si $a^2 + b^2 - x^2 - y^2 = 0$, esto es, si y sólo si $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 > 0$ y además $ay - bx \neq 0$, es decir, si y sólo si z es un punto de la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{a^2 + b^2}$ que no está en la recta $ay - bx = 0$, esto es, distinto de (a, b) y $(-a, -b)$.

2. Módulo y argumentos de un número complejo. Argumento principal



2.1. Módulo de un número complejo. Propiedades: Dado el número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama *módulo* de z, y se escribe $|z|$, al número real no negativo

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

que es la distancia del origen al afijo de z. Se cumple, para todos $z, w \in \mathbb{C}$:

i) $|z| > 0$ si $z \neq 0$,

ii) $|0| = 0$

iii) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$,

iv) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$,

v) $|zw| = |z||w|$,

vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$,

vii) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0)$

viii) $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|} \quad (z \neq 0)$

2.2. Ejemplo: Calcule

$$\left|\frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}\right|$$

SOLUCIÓN: Como son $\left|2+i\sqrt{5}\right|=\sqrt{4+5}=3$, $\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1+3}=2$, $\left|\sqrt{5}+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{5+3}=2\sqrt{2}$, de la aplicación de las propiedades del módulo se deduce que

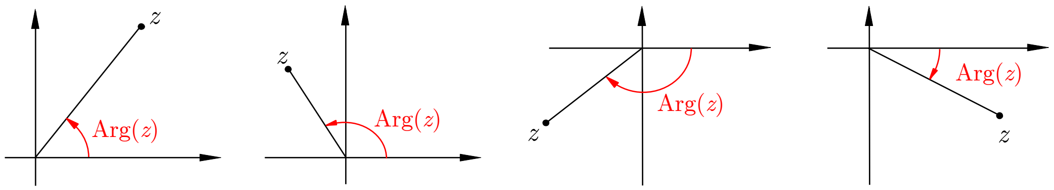
$$\left|\frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}\right|=\frac{\left|2+i\sqrt{5}\right|\left|1+i\sqrt{3}\right|^3}{\left|\sqrt{5}+i\sqrt{3}\right|}=\frac{3\cdot 2^3}{2\sqrt{2}}=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2} \quad \blacksquare$$

Dado el número complejo $z=a+bi\neq 0$, los números reales $c=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y $s=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ cumplen $c^2+s^2=1$, luego existe $\theta\in(-\pi,\pi]$ tal que $c=\cos\theta$, $s=\operatorname{sen}\theta$. Esto permite definir…

2.3. Argumentos de un número complejo. Argumento principal: Dado el número complejo no nulo $z=a+bi$, se dice que el número real θ es un *argumento* de z si cumple que

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$

El conjunto de todos los argumentos del número complejo $z\neq 0$ se escribe $\arg(z)$ y al único argumento de z que está en el intervalo $(-\pi,\pi]$ se le llama *argumento principal* de z y se escribe $\operatorname{Arg}(z)$. Si θ es cualquier otro argumento de z, es evidente que $\theta=\operatorname{Arg}(z)+2k\pi$, para algún $k\in\mathbb{Z}$, luego $\arg(z)=\left\{\operatorname{Arg}(z)+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$.



Geométricamente, $\operatorname{Arg}(z)$ es el ángulo del intervalo $(-\pi,\pi]$ que forma el semieje positivo OX con la semirrecta que une O con el afijo de z.

2.4. Ejemplo: Exprese el argumento principal del número complejo $z=x+iy\neq 0$ en términos de la parte real x y la parte imaginaria y.

SOLUCIÓN: Distinguimos según el cuadrante en el que se sitúa $z=x+iy\neq 0$:

- Si $x<0$ e $y<0$, entonces $\frac{y}{x}>0$, luego $\arctan\frac{y}{x}\in(0,\frac{\pi}{2})$, y como el argumento principal de $x+iy$ está en $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$, será $\operatorname{Arg}(x+iy)=\arctan\frac{y}{x}-\pi$. (Fig. 1)

- Si $x<0$ e $y\geq 0$, entonces $\frac{y}{x}\leq 0$ y $\arctan\frac{y}{x}\in(-\frac{\pi}{2},0]$. Como el argumento principal de $x+iy$ está en el intervalo $(\frac{\pi}{2},\pi]$, entonces es $\operatorname{Arg}(x+iy)=\arctan\frac{y}{x}+\pi$. (Fig. 2 y 3)

- Si $x=0$ e $y<0$, entonces es $\operatorname{Arg}(x+iy)=-\frac{\pi}{2}$. (Fig. 4)

- Si $x=0$ e $y>0$, entonces es $\operatorname{Arg}(x+iy)=\frac{\pi}{2}$. (Fig. 5)

- Si $x>0$, el argumento de $x+iy$ está en el intervalo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, así que como siempre es $\arctan\frac{y}{x}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, entonces es $\operatorname{Arg}(x+iy)=\arctan\frac{y}{x}$. (Fig 6, 7 y 8)

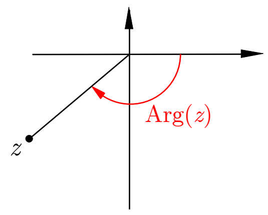


Fig 1

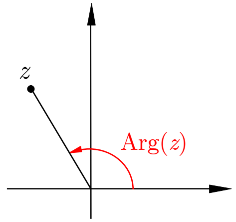


Fig 2

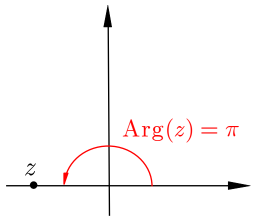


Fig 3

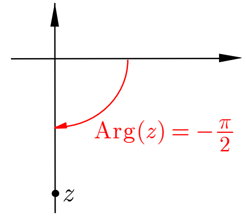


Fig 4

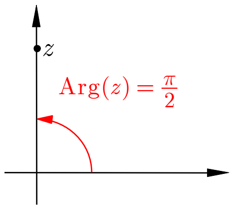


Fig 5

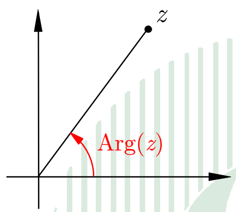


Fig 6

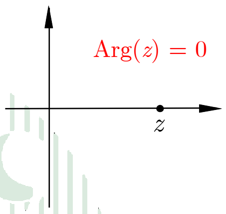


Fig 7

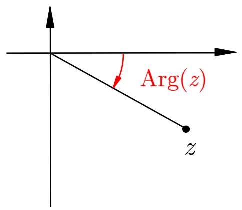
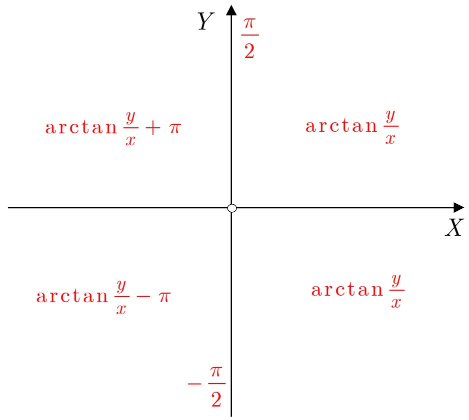


Fig 8

Es decir, la función argumento principal es la dada, para cada $z = x + iy \neq 0$, por:

$$\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(x+iy) = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} - \pi & \text{si } \ x<0, \ \ y<0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } \ x<0, \ \ y\geq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } \ x=0, \ \ y<0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } \ x=0, \ \ y>0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} & \text{si } \ x>0 \end{cases}$$

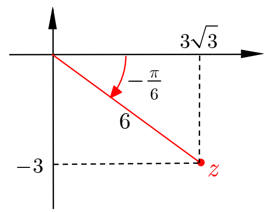


2.5. Forma trigonométrica y forma exponencial de un número complejo no nulo: Si $z \neq 0$ es un número complejo y llamamos $\rho = |\,z\,|$ y $\theta \in \mathbb{R}$ es un argumento de z, de la definición 2.3. se deduce que $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, o abreviadamente, $z = \rho e^{i\theta}$. Se llaman *forma trigonométrica* y *forma exponencial* de z, respectivamente. La relación entre la forma binómica $z = a + bi$ de un número complejo y su forma exponencial $z = \rho e^{i\theta}$ se sigue de 2.3:

$$a + bi = \rho e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\theta = \frac{a}{\rho}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho}\right]$$

Dos números complejos escritos en forma exponencial son *iguales*, $\rho\, e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$, si y sólo si $\rho = \rho'$ y $\theta' - \theta = 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. El número complejo conjugado del número complejo no nulo $z = \rho\, e^{i\theta}$ es $\overline{z} = \rho\, e^{-i\theta}$, su opuesto es $-z = \rho\, e^{i(\theta+\pi)}$ y su inverso es $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$.

2.6. Ejemplo: Exprese en forma exponencial el número complejo $z = 3\sqrt{3} - 3i$ y haga lo propio con su conjugado, su opuesto y su inverso.



SOLUCIÓN: Su módulo es $\left|z\right| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = 6$, y si $\theta \in (-\pi, \pi]$ es su argumento principal, entonces

$$\cos\theta = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$$

Por tanto, $z = 6\,e^{-\pi i/6}$ en forma exponencial, o también $z = 6\,e^{i\cdot(-\pi/6+2k\pi)}$, donde $k \in \mathbb{Z}$ es cualquiera. Su conjugado es $\overline{z} = 6 \cdot e^{\pi i/6}$, su opuesto $-z = 6\,e^{i(-\pi/6+\pi)} = 6\,e^{5\pi i/6}$ y su inverso $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{6} e^{\pi i/6}$.

3. Producto, división, potenciación y radicación en $\mathbb{C}$

3.1. Producto y cociente de números complejos en forma exponencial: *Si* $z=\rho\, e^{i\theta}$ *y* $z'=\rho' e^{i\theta'}$ *son dos números complejos no nulos escritos en forma exponencial, entonces*

i) $(\rho\, e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'})=(\rho\rho')\,e^{i(\theta+\theta')}$

ii) $\dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}}=\left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)e^{i(\theta-\theta')}$

3.2. Ejemplo: Resuelva la ecuación $z^{n-1}=\overline{z}$, siendo $n\in\mathbb{N}^+$.

SOLUCIÓN: Si $n=1$, la ecuación es $z^0=\overline{z}$, es decir, $\overline{z}=1$ y, tomando conjugados en ambos miembros, la solución es $z=\overline{1}=1$. Si $n=2$, la ecuación es $z=\overline{z}$, cuya solución son todos los $z\in\mathbb{R}$. Si $n\geq 3$, el número $z=0$ es solución, y si $z\neq 0$, entonces $z=\rho e^{i\theta}$, y la ecuación $z^{n-1}=\overline{z}$ se escribe $\rho^{n-1}e^{i(n-1)\theta}=\rho e^{-i\theta}$, es decir

$$\begin{cases}\rho^{n-1}=\rho\\ (n-1)\theta=-\theta+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho^{n-2}=1\\ n\theta=2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\dfrac{2k\pi}{n}\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

Las soluciones son por tanto, además de 0, los números complejos $e^{2k\pi i/n}$, donde $k\in\mathbb{Z}$, que sólo producen n números complejos distintos (los correspondientes a $k=0,1,\ldots,n-1$).

3.3. Potencias de un número complejo. Fórmula de De Moivre: *Para cada número complejo* $z=\rho\, e^{i\theta}\neq 0$ *y cada* $n\in\mathbb{Z}$ *ocurre que:*

i) $(\rho\, e^{i\theta})^n=\rho^n e^{in\theta}$

ii) $(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n=\cos n\theta+i\,\mathrm{sen}\,n\theta$ (*Fórmula de De Moivre*)

3.4. Ejemplo: Demuestre las siguientes identidades, en la que n es un entero positivo:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\cdots=2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4},\qquad \binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots=\sqrt{2^n}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}$$

Este problema figura resuelto en la página 54 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Desarrollamos la potencia $(1+i)^n$ de dos formas distintas. Por un lado, de acuerdo con la fórmula del binomio, será

$$(1+i)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}i^3+\cdots+\binom{n}{n-1}i^{n-1}+\binom{n}{n}i^n=\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\cdots\right]+i\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots\right]$$

Por otro lado, como es $1+i=\sqrt{2}e^{\pi i/4}$, de la *fórmula de De Moivre* se sigue que

$$(1+i)^n=(\sqrt{2}e^{\pi i/4})^n=2^{n/2}e^{n\pi i/4}=2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}\right)$$

Igualando ahora las partes reales e imaginarias de las dos expresiones binómicas obtenidas para $(1+i)^n$, se tiene que

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\cdots=2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4},\qquad \binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots=2^{n/2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}$$

3.5. Ejemplo: Halle la suma:

$$J=\sum_{j=0}^{n-1}\operatorname{sen}(a+jh)=\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen}(a+2h)+\cdots+\operatorname{sen}[a+(n-1)\,h]$$

Este problema figura resuelto en la página 45 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Si llamamos $I=\sum_{j=0}^{n-1}\cos(a+jh)$ a la correspondiente suma de cosenos, recurriendo a la fórmula de De Moivre, podemos escribir

$$I+i\,J=\sum_{j=0}^{n-1}(\cos(a+jh)+i\operatorname{sen}(a+jh))=\sum_{j=0}^{n-1}e^{i\,(a+jh)}=e^{ia}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(e^{ih})^j$$

- Si $h=2k\pi$, para cierto $k\in\mathbb{Z}$, entonces $e^{ih}=e^{2k\pi i}=1$ e

$$I+i\,J=n\,e^{ia}=n\,(\cos a+i\operatorname{sen}a)\,,$$

  luego

$$I=n\cos a\,,\qquad\qquad J=n\operatorname{sen}a\,.$$

- Si $h\neq 2k\pi$, para todo $k\in\mathbb{Z}$, ocurre que $I+i\,J$ es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón $e^{ih}\neq 1$, por lo que

$$I+i\,J=e^{ia}\left(\frac{e^{inh}-1}{e^{ih}-1}\right)$$

Para expresar este número complejo en forma binómica conviene recurrir a las razones trigonométricas del ángulo mitad. Resulta entonces:

$$I+i\,J=e^{ia}\cdot\left(\frac{e^{inh/2}}{e^{ih/2}}\right)\cdot\left(\frac{e^{inh/2}-e^{-inh/2}}{e^{ih/2}-e^{-ih/2}}\right)=e^{ia}\cdot e^{i(n-1)h/2}\cdot\frac{2i\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{2i\operatorname{sen}\frac{h}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}\cdot e^{i\,[2a+(n-1)\,h]/2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}\left(\cos\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right)\right)$$

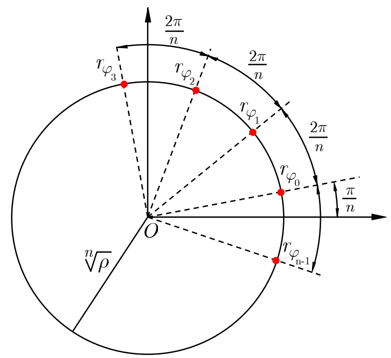
Igualando las partes reales e imaginarias del primer y del último miembro de la anterior cadena de igualdades, se tienen

$$I=\frac{\operatorname{sen}\frac{nh}{2}\cos\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}},\qquad J=\frac{\operatorname{sen}\frac{nh}{2}\operatorname{sen}\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}$$

3.6. Raíces n-ésimas de un número complejo: *Si* $n\in\mathbb{N}$, *se dice que* $w\in\mathbb{C}$ *es raíz n-ésima de* $z\in\mathbb{C}$ *si* $w^n=z$. *Cualquier número complejo no nulo* $\rho e^{i\theta}\neq 0$ *tiene* n *raíces n-ésimas distintas, que son los* n *números complejos* $re^{i\varphi_k}$ *en los que:*

$$r=\sqrt[n]{\rho}>0\,,\qquad \varphi_k=\frac{\theta+2k\pi}{n}$$

para $k=0,1,\dots,n-1$

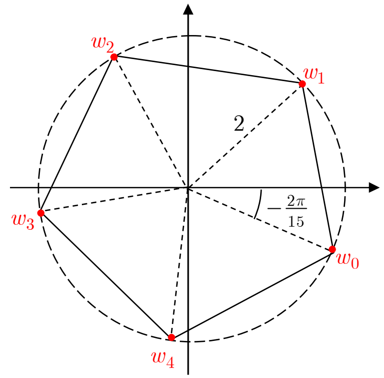


3.7. Observaciones: Los afijos de las raíces n−ésimas de un número complejo no nulo son así los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen. Este mismo resultado prueba que la ecuación $x^n-a=0$, donde $a\in\mathbb{C}^*$ y $n\in\mathbb{N}$, tiene exactamente n soluciones complejas, resultado generalizable a cualquier ecuación algebraica de grado n recurriendo al llamado *Teorema Fundamental del Álgebra*, por el cual *todo polinomio complejo de grado positivo tiene alguna raíz en* $\mathbb{C}$.

3.8. Ejemplo: Calcule las cinco raíces quintas del número complejo $-16-16i\sqrt{3}$.

SOLUCIÓN: El módulo del número complejo $-16-16i\sqrt{3}$ es $\rho=\sqrt{(-16)^2+(-16)^2\cdot 3}=32$ y su argumento principal es el único $\theta\in(-\pi,\pi]$ tal que $\cos\theta=-\frac{16}{32}=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\theta=-\frac{16\sqrt{3}}{32}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, es decir, $\theta=-\frac{2\pi}{3}$ y por tanto el número complejo se escribe en forma exponencial como $-16-16i\sqrt{3}=32\,e^{-2\pi i/3}$.

Si $re^{i\varphi}$ es una raíz quinta cualquiera de $32\,e^{-2\pi i/3}$, entonces $(re^{i\varphi})^5=32e^{-2\pi i/3}$, es decir, $r^5e^{5i\varphi}=32e^{-2\pi i/3}$, y por tanto



$$\begin{cases} r^5=32 \\ 5\varphi=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt[5]{32}=2 \\ \varphi=-\frac{2\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}, \qquad k=0,1,2,3,4. \end{cases}$$

Por tanto, las raíces quintas de $-16-16i\sqrt{3}$ son

$$w_0=2e^{-2\pi i/15},\quad w_1=2e^{4\pi i/15},\quad w_2=2e^{2\pi i/3},\quad w_3=2e^{16\pi i/15}=2e^{-14\pi i/15},\quad w_4=2e^{22\pi i/15}=2e^{-8\pi i/15}$$

Las anteriores raíces quintas de $-16-16i\sqrt{3}$ son los vértices de un pentágono regular centrado en el origen.

3.9. Ejemplo: Responda razonadamente a las siguientes cuestiones, en las que n es un entero mayor que 1.

a) Determine las n raíces n-ésimas de la unidad.

b) Demuestre que el conjugado de cualquier raíz n-ésima de la unidad es también raíz n-ésima de la unidad.

c) Demuestre que si z es raíz n-ésima de la unidad distinta de 1, entonces $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$.

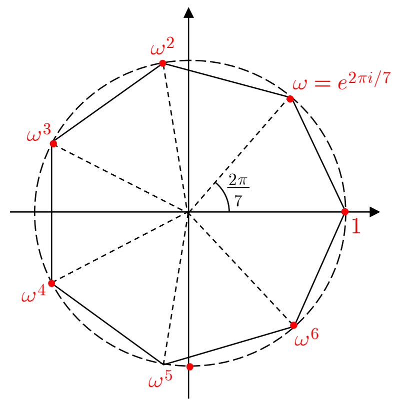
d) Demuestre que la suma de las n raíces n-ésimas de la unidad es cero.

SOLUCIÓN: a) Si $re^{i\varphi}$ es raíz n-ésima de la unidad, entonces $(re^{i\varphi})^n = 1$, es decir, $r^n e^{in\varphi} = e^{i\cdot 0}$ y por tanto

$$\begin{cases} r^n = 1 \\ n\varphi = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{1} = 1 \\ \varphi = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

para algún $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Las raíces n-ésimas de la unidad son así:

$$1 = e^{i\cdot 0}, \quad \omega = e^{2\pi i/n}, \quad \omega^2 = e^{4\pi i/n}, \quad \ldots \quad , \quad \omega^{n-1} = e^{2(n-1)\pi/n}$$



$$\overline{1} = 1, \quad \omega^6 = \overline{\omega}, \quad \omega^5 = \overline{\omega^2}, \quad \omega^4 = \overline{\omega^3}$$

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$$

b) Las raíces n-ésimas de la unidad son las soluciones de la ecuación $z^n - 1 = 0$ cuyos coeficientes son reales, por lo que el conjugado de cada solución es también solución de dicha ecuación (en el gráfico se han representado las raíces séptimas de la unidad).

c) Si z es cualquiera de las raíces n-ésimas de la unidad, entonces $z^n = 1$ y, atendiendo a la fórmula que da la suma de términos consecutivos de una progresión geométrica, se tiene, por ser $z \neq 1$;

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{1 - 1}{z - 1} = 0$$

d) En a) se comprobó que las n raíces n-ésimas de la unidad son $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, donde $\omega = e^{2\pi i/n}$. Como es $\omega \neq 1$, según c) será:

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$$

4. Exponencial y logaritmos de un número complejo

4.1. Exponencial de un número complejo: Dado un número complejo $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, se llama *exponencial* de z, y se escribe e^z, al número complejo

$$e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

La exponencial compleja cumple, para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$:

i) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

ii) $\left|e^z\right| = e^{\operatorname{Re} z}$

iii) $e^z = e^w$ si y sólo si $z = w + 2k\pi i$, donde $k \in \mathbb{Z}$

iv) $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$

v) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

vi) La exponencial compleja extiende a la exponencial real, es decir, si $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función exponencial real y $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.

4.2. Ejemplo: Exprese en forma binómica los números complejos e^{3+4i} y $e^{1+\pi i}$

SOLUCIÓN: $e^{3+4i} = e^3(\cos 4 + i \operatorname{sen} 4)$, $\quad e^{1+\pi i} = e\left(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi\right) = e \cdot (-1) = -e$

4.3. Ejemplo: Resuelva la ecuación $e^z = -2$ en el campo de los números complejos.

SOLUCIÓN: Si $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, es solución de la ecuación, entonces

$$e^z = -2 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^x \cos y = -2 \\ e^x \operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se deduce $\operatorname{sen} y = 0$, y por tanto $\cos y = \pm 1$. Si se mira la primera ecuación, debe ser $\cos y = -1$, es decir, $y = (2k+1)\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$; queda entonces $e^x = 2$, por lo que $x = \mathrm{L}\, 2$, de manera que las (infinitas) soluciones de la ecuación son:

$$z = \mathrm{L}\, 2 + (2k+1)\pi i\,, \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$

4.4. Logaritmo neperiano de un número complejo. Logaritmo principal: Dado un número complejo $z \neq 0$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es *un logaritmo neperiano* de z si $e^w = z$. La expresión $\log z$ indica el conjunto de todos los logaritmos neperianos de z o (abusando de notación) a uno cualquiera de ellos. Todo número complejo $\rho\, e^{i\theta} \neq 0$ tiene infinitos logaritmos neperianos, que son los números complejos:

$$\log(\rho\, e^{i\theta}) = \mathrm{L}\, \rho + (\theta + 2k\pi)\, i \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

donde L indica el logaritmo neperiano real. Se llama *logaritmo principal* de un número complejo $z \neq 0$, y se suele escribir $\operatorname{Log} z$, al único logaritmo de z cuya parte imaginaria es el argumento principal de z, $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$, es decir, a

$$\operatorname{Log} z = \mathrm{L}\big|z\big| + i \operatorname{Arg}(z)$$

El logaritmo neperiano de un número complejo cumple, para todos los $z, w \in \mathbb{C}$ no nulos:

i) $\log(z \cdot w) = \log z + \log w$

ii) $\log z = \operatorname{Log} z + 2k\pi i$, donde $k \in \mathbb{Z}$

ii) iii) $e^{\log z} = z$

iv) El logaritmo principal extiende al logaritmo neperiano real, es decir, si $x \in \mathbb{R}^+$, $\operatorname{Log} x = \mathrm{L}\, x$.

4.5. Ejemplo: Calcule los logaritmos neperianos de los números complejos $2-2i$, i y -1.

SOLUCIÓN:

- $\log(2-2i)=\log(\sqrt{8}\cdot e^{-\pi i/4})=\mathrm{L}\sqrt{8}+\left(-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)i=\dfrac{3\,\mathrm{L}\,2}{2}+\left(2k-\dfrac{1}{4}\right)\pi i\,,\qquad k\in\mathbb{Z}$

  El logaritmo principal de $2-2i$ se obtiene haciendo $k=0$ en la anterior expresión, y es $\operatorname{Log}(2-2i)=\dfrac{3\,\mathrm{L}\,2}{2}-\dfrac{\pi i}{4}$.

- $\log i=\log(e^{i\frac{\pi}{2}})=\mathrm{L}\,1+\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)i=\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$, donde $k\in\mathbb{Z}$. Haciendo $k=0$ se obtiene el logaritmo principal de i: $\operatorname{Log} i=\dfrac{\pi i}{2}$.

- $\log(-1)=\log(e^{i\pi})=\mathrm{L}\,1+(\pi+2k\pi)\,i=(2k+1)\,\pi i$, donde $k\in\mathbb{Z}$. El logaritmo principal de -1 se obtiene para $k=0$ y es $\operatorname{Log}(-1)=\pi i$.

4.6. Ejemplo: Resuelva la ecuación $e^z=-2$ en el campo de los números complejos.

SOLUCIÓN: Es el ejercicio 4.3, que aquí se resuelve con más comodidad utilizando los logaritmos. Dado que $e^z=-2$ si y sólo si z es un logaritmo de -2, las soluciones son

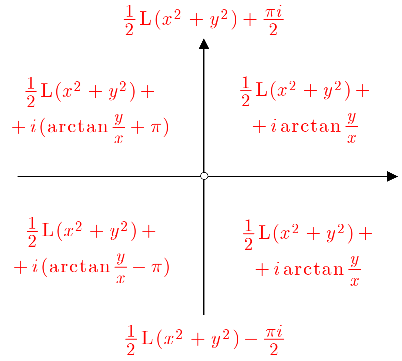
$$z=\log(-2)=\log(2e^{i\pi})=\mathrm{L}\,2+(\pi+2k\pi)i=\mathrm{L}\,2+(2k+1)\pi i\qquad(\,k\in\mathbb{Z}\,)$$

4.7. Ejemplo: Dado el número complejo $z=x+iy\neq 0$, exprese el logaritmo principal de z en función de las partes real e imaginaria x e y.

SOLUCIÓN: Teniendo en cuenta el ejemplo 2.4, podemos escribir

$$\operatorname{Log} z = \mathrm{L}\left|z\right| + i\operatorname{Arg}(z) = \mathrm{L}\sqrt{x^2+y^2} + i\cdot\operatorname{Arg}(x+iy) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2+y^2) + i\cdot\operatorname{Arg}(x+iy) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{L}(x^2+y^2) + i\left(\arctan\dfrac{y}{x} - \pi\right) & \text{si } x<0,\ y<0 \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{L}(x^2+y^2) + i\left(\arctan\dfrac{y}{x} + \pi\right) & \text{si } x<0,\ y\geq 0 \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{L}(x^2+y^2) - \dfrac{\pi i}{2} & \text{si } x=0,\ y<0 \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{L}(x^2+y^2) + \dfrac{\pi i}{2} & \text{si } x=0,\ y>0 \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{L}(x^2+y^2) + i\arctan\dfrac{y}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$



4.8. Logaritmo en base u de un número complejo: Dado un número complejo $u\neq 0$, $u\neq 1$ y otro número complejo cualquiera $z\neq 0$, se llama *logaritmo en base u de z* al conjunto de todos los números complejos que se obtienen como cociente entre algún logaritmo neperiano de z y algún logaritmo neperiano de u que no sea nulo, es decir,

$$\log_u z = \frac{\log z}{\log u}$$

4.9. Ejemplo: Calculamos

$$\log_{10}(1+i)$$

SOLUCIÓN: Como son $10 = 10\cdot e^{0i}$ y $1+i=\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}$, deducimos que

$$\log_{10}(1+i) = \frac{\log(1+i)}{\log 10} = \frac{\log(\sqrt{2}\cdot e^{\pi i/4})}{\log(10\cdot e^{0i})} = \frac{\mathrm{L}\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4}+2j\pi)i}{\mathrm{L}\,10 + 2k\pi i} = \frac{[\mathrm{L}\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4}+2j\pi)i](\mathrm{L}\,10 - 2k\pi i)}{(\mathrm{L}\,10+2k\pi i)(\mathrm{L}\,10-2k\pi i)} =$$

$$= \frac{(\mathrm{L}\sqrt{2})(\mathrm{L}\,10) - 2k\pi i\cdot(\mathrm{L}\sqrt{2}) + (\frac{\pi}{4}+2j\pi)i\cdot(\mathrm{L}\,10) + 2k\pi(\frac{\pi}{4}+2j\pi)}{(\mathrm{L}\,10)^2 + 4(k)^2\pi^2} = \frac{2(\mathrm{L}\sqrt{2})(\mathrm{L}\,10) + k\pi^2(1+8\pi)}{2\,(\mathrm{L}\,10)^2 + 8\,k^2\pi^2} + \pi i\cdot\frac{-8k(\mathrm{L}\sqrt{2}) + (1+8j)\cdot(\mathrm{L}\,10)}{4\,(\mathrm{L}\,10)^2 + 16\,k^2\pi^2}$$

donde j y k son números enteros cualesquiera.

4.10. Potencias de exponente complejo: Dados dos números complejos z y w, donde $z\neq 0$, se llaman *potencias de base* z *y exponente* w a todos los números complejos, representados por z^w, dados por la relación

$$z^w = e^{w\log z}$$

Si $z=\rho e^{i\theta}\neq 0$ y $w=a+bi$, donde $a,b\in\mathbb{R}$, entonces

$$w\log z = (a+bi)\log(\rho e^{i\theta}) = (a+bi)[\mathrm{L}\,\rho + i(\theta+2k\pi)] = [a\,\mathrm{L}\,\rho - b\,(\theta+2k\pi)] + i\,[b\,\mathrm{L}\,\rho + a\,(\theta+2k\pi)]$$

donde $k\in\mathbb{Z}$, y por tanto

$$z^w = e^{w\log z} = e^{a\,\mathrm{L}\,\rho - b\,(\theta+2k\pi)}\cdot e^{i(b\,\mathrm{L}\,\rho + a\,(\theta+2k\pi))}$$

Según que el número complejo $w=a+bi$ sea, en particular, entero, racional o complejo no racional, se obtienen como potencias z^w las siguientes:

- Si $w=a+bi$ es un número entero, entonces son $a\in\mathbb{Z}$ y $b=0$, por lo que z^w es el único número complejo:

$$z^w = e^{w\log z} = e^{a\,\mathrm{L}\,\rho}\cdot e^{ai\,(\theta+2k\pi)} = e^{a\,\mathrm{L}\,\rho}\cdot e^{ai\theta}\cdot e^{2ka\pi i} = \rho^a\cdot e^{ai\theta}$$

- Si $w = a + bi$ es un número racional, entonces $a = \dfrac{p}{q}$, fracción irreducible en la que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^+$ y $b = 0$, luego:

$$z^w = e^{w \log z} = e^{\frac{p}{q}\,\mathrm{L}\,\rho} \cdot e^{(p/q)\, i\theta + 2k(p/q)\pi i} = \rho^{p/q} \cdot e^{pi(\theta + 2k\pi)/q}$$

  Obsérvese que en este caso la potencia z^w sólo toma q valores distintos, los correspondientes a los valores de $k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.

- Si $w = a + bi$ no es racional, entonces la potencia z^w toma infinitos valores (se dice que z^w tiene infinitas determinaciones):

$$z^w = e^{a\,\mathrm{L}\,\rho - b(\theta + 2k\pi)} \cdot e^{i(b\,\mathrm{L}\,\rho + a(\theta + 2k\pi))}, \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$

4.11. Ejemplo: Calculamos

$$(2 + 2i)^{3+i}$$

SOLUCIÓN: Como es $2 + 2i = \sqrt{8} \cdot e^{\pi i/4}$, se deduce que

$$(3+i)\log(2+2i) = (3+i)\log(\sqrt{8}\, e^{\pi i/4}) = (3+i)[\mathrm{L}\sqrt{8} + i(\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi)] = [3\,\mathrm{L}\sqrt{8} - (\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi)] + i[\mathrm{L}\sqrt{8} + 3(\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi)] =$$

$$= \left(\tfrac{9}{2}\,\mathrm{L}\,2 - \tfrac{\pi}{4} - 2k\pi\right) + i\left(\tfrac{3}{2}\,\mathrm{L}\,2 + \tfrac{3\pi}{4} + 6k\pi\right)$$

El número complejo $(2+2i)^{3+i}$ tiene por tanto infinitas determinaciones aunque, todas ellas con el mismo argumento principal:

$$(2+2i)^{3+i} = e^{\frac{9}{2}\,\mathrm{L}\,2 - \frac{\pi}{4} - 2k\pi} \cdot e^{i\left(\frac{3}{2}\,\mathrm{L}\,2 + \frac{3\pi}{4} + 6k\pi\right)}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

5. Seno, coseno y tangente de un número complejo

5.1. Seno y coseno de un número complejo: Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, se llaman *coseno* de z y *seno* de z a los números complejos

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

El seno y el coseno complejos tienen las siguientes propiedades, que son todas análogas (salvo la x) a las del seno y coseno reales:

i) $\cos(-z) = \cos z\,, \qquad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$

ii) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

iii) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$

iv) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$

v) $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$

vi) $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$

vii) $\cos z = 0$ si y sólo si $z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

viii) $\operatorname{sen} z = 0$ si y sólo si $z = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

ix) El seno y el coseno complejos extienden al seno y coseno reales, es decir, si $x \in \mathbb{R}$ el seno o el coseno complejo de x coinciden con el seno o el coseno real de x, respectivamente.

x) Las funciones seno y coseno complejos no son acotadas.

5.2. Tangente de un número complejo: La *tangente compleja* se define como:

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$$

para todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos z \neq 0$, es decir, para los $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$. La función tangente tiene las siguientes propiedades que se deducen inmediatamente de las del seno y el coseno:

i) $\tan(-z) = -\tan z$, siempre que $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

ii) $\tan(z+w) = \dfrac{\tan z + \tan w}{1 - \tan z \tan w}$, siempre que $z, w, z+w \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

iii) $\tan 2z = \dfrac{2\tan z}{1 - \tan^2 z}$, si $z, 2z \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

iv) $\tan z = 0$ si y sólo si $z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

v) La tangente compleja extiende a la tangente real, es decir, si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, la tangente compleja de x es igual a su tangente real.

5.3. Ejemplo: Exprese en forma binómica los números $\operatorname{sen}(\pi + i)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$.

SOLUCIÓN:

$$\operatorname{sen}(\pi+i) = \frac{e^{i(\pi+i)} - e^{-i(\pi+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+\pi i} - e^{1-\pi i}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{e}(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) - e(\cos\pi - i\operatorname{sen}\pi)\right] = \frac{1}{2i}\left(e - \frac{1}{e}\right) = -\frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-i\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-i\right)}}{2} = \frac{e^{1+\frac{\pi i}{2}} + e^{-1-\frac{\pi i}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\left[e(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{e}(\cos\frac{\pi}{2} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})\right] = \frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

5.4. Ejemplo: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} z = 4$.

Este problema figura resuelto en la página 270 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

UN CAMINO: Si $z \in \mathbb{C}$ es solución de la ecuación:

$$\operatorname{sen} z = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 4 \quad \Rightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = 8i \quad \overset{\cdot e^{iz}}{\Rightarrow} \quad e^{2iz} - 1 = 8ie^{iz} \quad \Rightarrow \quad e^{2iz} - 8ie^{iz} - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad e^{iz} = \frac{8i \pm \sqrt{64i^2 + 4}}{2} = 4i \pm \sqrt{-15} = (4 \pm \sqrt{15})i$$

Es decir, si es $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $iz = -y + ix$ y por tanto

$$e^{iz} = (4 \pm \sqrt{15})i \quad \Leftrightarrow \quad e^{-y} \cos x + ie^{-y} \operatorname{sen} x = (4 \pm \sqrt{15})i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^{-y} \cos x = 0 \\ e^{-y} \operatorname{sen} x = 4 \pm \sqrt{15} \end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce, por ser $e^{-y} > 0$, que $\cos x = 0$ y por tanto $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Como es $\operatorname{sen} x = \pm 1$ y el segundo miembro de la segunda ecuación es positivo (con el signo más y con el signo menos), al ser $e^{-y} > 0$, es obligado que sea $\operatorname{sen} x = 1$, es decir, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y ahora la segunda ecuación queda

$$e^{-y} = 4 \pm \sqrt{15} \quad \Rightarrow \quad -y = \mathrm{L}(4 \pm \sqrt{15}) \quad \Rightarrow \quad y = -\mathrm{L}(4 \pm \sqrt{15})$$

Las soluciones de la ecuación son por tanto:

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\,\mathrm{L}(4 \pm \sqrt{15}), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

OTRO CAMINO: Razonando como en la primera forma, se llega a que $e^{iz}=(4\pm\sqrt{15})i$, y a partir de aquí:

$$iz=\log((4\pm\sqrt{15})\,i)=\log((4\pm\sqrt{15})\,e^{\pi i/2})=\mathrm{L}(4\pm\sqrt{15})+\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$$

donde $k\in\mathbb{Z}$, y por tanto,

$$z=\frac{1}{i}\left[\mathrm{L}(4\pm\sqrt{15})+\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi i\right]=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-i\,\mathrm{L}(4\pm\sqrt{15})\,,\qquad k\in\mathbb{Z}$$

6. Seno, coseno y tangente hiperbólicos de un número complejo

6.1. Seno y coseno hiperbólico de un número complejo: Se llaman *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* de un número complejo cualquiera z a los números complejos:

$$\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}\,,\qquad \operatorname{senh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

De las definiciones se deducen inmediatamente que

$$\cosh(iz)=\cos z\,,\qquad \operatorname{senh}(iz)=i\operatorname{sen} z$$

y también,

$$\cos(iz)=\cosh z\,,\qquad \operatorname{sen}(iz)=i\operatorname{senh} z$$

El seno y el coseno hiperbólico tienen las siguientes propiedades y, ¡ojo!, hay algunas diferencias entre la relación del coseno con el seno trigonométrico y la correspondiente con el coseno y el seno hiperbólico, por ejemplo, las propiedades 2, 4, 5 y 6):

1. $\cosh(-z)=\cosh z,\quad \operatorname{senh}(-z)=-\operatorname{senh}(z)$

2. $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$
3. $\operatorname{senh}(z+w) = \operatorname{senh} z \cosh w + \cosh z \operatorname{senh} w$
4. $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \operatorname{senh} z \operatorname{senh} w$
5. $\cosh z = 0$ si y sólo si $z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i$, para algún $k \in \mathbb{Z}$ (para recordarlo, son las soluciones de $\cos z = 0$, pero multiplicadas por i)
6. $\operatorname{senh} z = 0$ si y sólo si $z = k\pi i$, para algún $k \in \mathbb{Z}$ (para recordarlo, son las soluciones de $\operatorname{sen} z = 0$, pero multiplicadas por i)

6.2. Tangente hiperbólica de un número complejo: La *tangente hiperbólica* se define como:

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}$$

para todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cosh z \neq 0$, es decir, para los $z \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.3. Ejemplo: Calcule $\cosh\left(1 + \frac{\pi}{4}i\right)$.

SOLUCIÓN:

$$\cosh\left(1+\frac{\pi i}{4}\right) = \frac{e^{1+\frac{\pi i}{4}} + e^{-1-\frac{\pi i}{4}}}{2} = \frac{1}{2}\left[e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{e}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{e}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(e + \frac{1}{e}\right) + i\left(e - \frac{1}{e}\right)\right]$$

6.4. Ejemplo: Resuelva la ecuación $\operatorname{senh} z = i$.

UN PROCEDIMIENTO:

$$\operatorname{senh} z = i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \quad \Leftrightarrow \quad e^z - e^{-z} = 2i \quad \overset{\cdot e^z}{\Rightarrow} \quad e^{2z} - 1 = 2ie^z \quad \Rightarrow \quad e^{2z} - 2ie^z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^z = \frac{2i \pm \sqrt{4i^2 + 4}}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

Si es $z = x + iy$, donde $x \in \mathbb{R}$, la igualdad $e^z = i$ se escribe:

$$e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^x \cos y = 0 \\ e^x \operatorname{sen} y = 1 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación se sigue que $\cos y = 0$, es decir, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para algún entero k y por tanto $\operatorname{sen} y = \pm 1$. Como e^x y 1 son positivos, también debe serlo $\operatorname{sen} y$, luego $\operatorname{sen} y = 1$, es decir, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y además de la 2ª ecuación se deduce que $e^x = 1$, es decir, $x = 0$, y por tanto, las soluciones de la ecuación son

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i, \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$

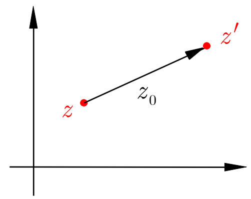
OTRO PROCEDIMIENTO: Razonando como en la primera forma se llega a la ecuación equivalente $e^z = i$, y por tanto, z es un logaritmo de i, es decir,

$$z = \log i = \log\left(e^{\pi i/2}\right) = \mathrm{L}\,1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i, \qquad \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$

7. El plano complejo. Aplicaciones geométricas

El isomorfismo de 1.2.4 entre el espacio vectorial $\mathbb{C}$ y el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ hace que a éste se le llame *plano complejo* cuando se utiliza para representar números complejos mediante puntos o vectores. Esta identificación permite expresar de modo sencillo transformaciones geométricas del plano cartesiano como las siguientes.

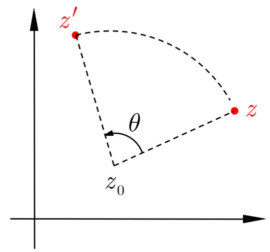
7.1. Traslación: Sea $z_0 = x_0 + iy_0$ un número complejo y considérese la aplicación de $\mathbb{C}$ en sí mismo dada por:



$$z \mapsto z' = z + z_0$$

Esta aplicación es *la traslación de vector* $z_0 = (x_0, y_0)$, pues si $z \in \mathbb{C}$ es $z' - z = z_0$.

7.2. Giro: Sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ y sea $u = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ un número complejo de módulo 1 y argumento $\theta \in (-\pi, \pi]$. El *giro de centro* $z_0 = (x_0, y_0)$ *y amplitud* θ es la aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$:

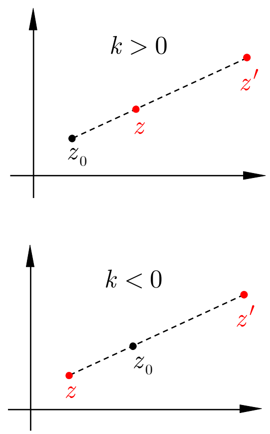


$$z \mapsto z' = z_0 + u(z - z_0)$$

La comprobación es inmediata, pues

$$\left|z' - z_0\right| = \left|u(z - z_0)\right| = |u|\left|z - z_0\right| = \left|z - z_0\right|, \qquad \text{y también} \qquad \arg(z' - z_0) = \arg\big(u(z - z_0)\big) = \arg u + \arg(z - z_0) = \theta + \arg(z - z_0).$$

En particular, si es $z_0 = 0$, la aplicación $z \mapsto z' = uz$ es el *giro de centro el origen y amplitud* θ. Si $\theta = \pi$, es $u = -1$ y el giro $z \mapsto z' = z_0 - (z - z_0) = 2z_0 - z$ es la *simetría de centro* z_0.



7.3. Homotecia: Sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{R}$ no nulo. La aplicación de $\mathbb{C}$ en sí mismo dada por:

$$z \mapsto z' = z_0 + k(z - z_0)$$

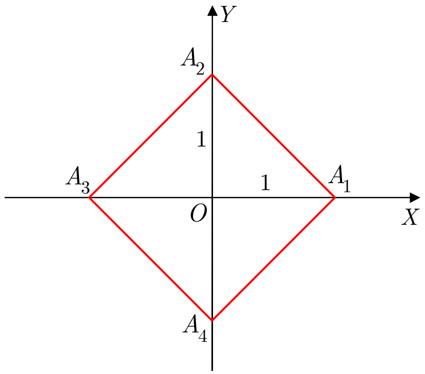
es *la homotecia de centro en* $z_0 = (x_0, y_0)$ *y razón* k, lo cual es inmediato si se tiene en cuenta que $z' - z_0 = k(z - z_0)$. Si $z_0 = 0$, la aplicación $z \mapsto z' = kz$ es la homotecia de centro el origen y razón k; si $k = 1$, la homotecia es la identidad en $\mathbb{C}$.

7.4. Ejemplo: Determine los vértices de un cuadrado sabiendo que:

a) Su centro está en el punto (2,3).

b) Si se traslada dicho centro al origen de coordenadas, se gira un ángulo de 60º en sentido positivo y se reducen sus lados a la mitad, los vértices del nuevo cuadrado son los afijos de las raíces de un polinomio de grado 4 con coeficientes reales, siendo una de ellas $x_1 = 1$.

Este problema figura resuelto en la página 236 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y es también el problema 06.10 del volumen 5 de la misma colección.



SOLUCIÓN: El resultado de aplicar al cuadrado original las transformaciones geométricas indicadas en b) es otro cuadrado con centro en el origen de coordenadas y uno de cuyos vértices es el punto $A_1 = (1,0)$. El vértice opuesto a A_1 es su simétrico respecto del origen, esto es, $A_3 = (-1,0)$, y los dos vértices restantes son los puntos del eje OY situados a distancia 1 del origen, $A_2 = (0,1)$ y $A_4 = (0,-1)$.

Los vértices del cuadrado original se determinan aplicando a los vértices anteriores la transformación inversa de la descrita en b), a saber, la composición de una homotecia de centro el origen y razón 2, seguida de un giro de $60^{\text{o}} = \frac{\pi}{3}$ en sentido negativo y de una traslación de vector $u = (2,3)$, es decir,

$$z \mapsto z' = 2z \mapsto z'' = e^{-\pi i/3} z' = 2e^{-\pi i/3} z \mapsto z''' = z'' + u = 2e^{-\pi i/3} z + u$$

Por tanto, si z_i es el número complejo cuyo afijo es A_i ($i = 1,2,3,4$), los vértices del cuadrado original son los afijos de los complejos

$$z_1''' = 2e^{-\pi i/3} z_1 + u = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)\cdot 1 + 2 + 3i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) + 2 + 3i = 3 + (3-\sqrt{3})\,i$$

$$z_2''' = 2e^{-\pi i/3} z_2 + u = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)\cdot i + 2 + 3i = 2i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) + 2 + 3i = (2+\sqrt{3}) + 4i$$

$$z_3''' = 2e^{-\pi i/3} z_3 + u = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)\cdot (-1) + 2 + 3i = -2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) + 2 + 3i = 1 + (3+\sqrt{3})\,i$$

$$z_4''' = 2e^{-\pi i/3} z_4 + u = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)\cdot (-i) + 2 + 3i = -2i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) + 2 + 3i = (2-\sqrt{3}) + 2i$$

es decir, $A_1''' = (3, 3-\sqrt{3})$, $A_2''' = (2+\sqrt{3}, 4)$, $A_3''' = (1, 3+\sqrt{3})$ y $A_4''' = (2-\sqrt{3}, 2)$.

7.5. Inversión: Sea $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, y $z_0 \in \mathbb{C}$. La aplicación de $\mathbb{C} - \{z_0\}$ en sí mismo tal que:

$$z \mapsto z' = z_0 + \frac{r}{\overline{z - z_0}}$$

es *la inversión de polo* z_0 *y potencia* r, pues:

$$z' = z_0 + \frac{r}{\overline{z - z_0}} = z_0 + \frac{r}{|z-z_0|^2}(z - z_0), \qquad \text{es decir,} \qquad z' - z_0 = \frac{r}{|z-z_0|^2}(z - z_0)$$

Se deduce que z_0, z y z' están alineados (si $r > 0$, z y z' están a un mismo lado de z_0; si $r < 0$, z y z' están uno a cada lado de z_0). Además, $|z - z_0||z' - z_0| = |r|$, luego se trata de la inversión de polo z_0 y potencia r.

7.6. Ejemplo: Dados los números $z = x + yi$, $z_1 = z + 3$, $z_2 = z_1 i$ y $z_3 = \frac{12}{z_2}$, indique las transformaciones geométricas que permiten pasar de cada uno de ellos al siguiente y determine los lugares geométricos de los afijos de z_1, z_2 y z_3 cuando los valores de z son tales que $|z| = 1$.

Este problema figura resuelto en la página 45 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y es también el problema 06.10 del volumen 5 de la misma colección.

SOLUCIÓN: La transformación $z \mapsto z_1 = z + 3$ es la traslación de vector $a = 3 + 0i$. Si es $|z| = 1$, entonces es $|z_1 - 3| = 1$, es decir, z_1 recorre la circunferencia de centro el punto $(3,0)$ y radio 1.

La transformación $z_1 \mapsto z_2 = iz_1 = e^{\pi i/2} z_1$ es el giro de centro el origen y amplitud $\frac{\pi}{2}$. El lugar geométrico de los z_2 cuando $|z| = 1$, esto es, cuando $|z_1 - 3| = 1$, es el de los que cumplen $|-iz_2 - 3| = 1$. es decir, $|z_2 - 3i| = 1$, que es la circunferencia de centro el punto $(0,3)$ y radio 1.

La transformación $z_2 \mapsto z_3 = \frac{12}{z_2}$ es la composición $z_2 \mapsto z_2' = \frac{12}{\overline{z}_2} \mapsto z_3 = \overline{z}_2' = \frac{12}{z_2}$, esto, la composición de la inversión de polo el origen y potencia 12 con la simetría respecto del eje real. Cuando $|z| = 1$, entonces es $|z_2 - 3i| = 1$, es decir,

$$\left|\frac{12}{z_3} - 3i\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |3iz_3 - 12| = |z_3| \quad \Leftrightarrow \quad |3z_3 + 12i| = |z_3| \quad \Leftrightarrow \quad |3z_3 + 12i|^2 = |z_3|^2 \quad \Leftrightarrow \quad (3z_3 + 12i)(3\overline{z}_3 - 12i) = |z_3|^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 9z_3\overline{z}_3 - 36iz_3 + 36i\overline{z}_3 + 144 = z_3\overline{z}_3 \quad \Leftrightarrow \quad |z_3|^2 - \frac{9}{2} i(z_3 - \overline{z}_3) + 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z_3|^2 + 9\,\mathrm{Im}\, z_3 + 18 = 0$$

Si ponemos $z_3 = x + iy$, la ecuación anterior se escribe

$$x^2 + y^2 + 9y + 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \left(y^2 + 9y + \frac{81}{4}\right) = \frac{81}{4} - 18 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

El lugar geométrico que describe z_3 es por tanto la circunferencia de centro el punto $\left(0, -\frac{9}{2}\right)$ y radio $\frac{3}{2}$.

8. Ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos

8.1. Ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos. Soluciones: Se llama *ecuación algebraica de grado* $n \in \mathbb{N}$ *y con coeficientes en* $\mathbb{C}$ a cualquier ecuación $P(x) = 0$, donde

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

es un polinomio de grado n con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Se dice que $\alpha \in \mathbb{C}$ es *solución* de la ecuación algebraica compleja $P(x) = 0$ si $P(\alpha) = 0$, o lo que es equivalente, si $P(x) = (x - \alpha)\, C(x)$, para cierto polinomio $C(x) \in \mathbb{C}[x]$. Se dice que $\alpha \in \mathbb{C}$ es *solución múltiple de orden* $k \in \mathbb{N}^+$ si $P(x) = (x-\alpha)^k\, C(x)$, para algún $C(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que $C(\alpha) \neq 0$, pero $P(x)$ no es divisible por $(x-\alpha)^{k+1}$.

La existencia de soluciones complejas de una ecuación algebraica la resuelve en sentido afirmativo el siguiente resultado crucial, cuya primera demostración completa se debe al maestro *Gauss*. Aunque existe alguna prueba algebraica del mismo, las demostraciones más simples se basan en resultados sobre funciones reales de variable compleja.

8.2. Teorema Fundamental del Álgebra: *Cualquier ecuación algebraica de grado positivo tiene alguna solución en* $\mathbb{C}$.

8.3. Corolario: *Toda ecuación algebraica de grado n tiene* n *soluciones en* $\mathbb{C}$ *(contada cada una de ellas tantas veces como indica su orden de multiplicidad).*

8.4. Polinomio derivado: Dado un polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, se llama *polinomio derivado* de $P(x)$ al polinomio

$$P'(x) = n\, a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1 .$$

En general, se llama *k-ésimo polinomio derivado* de $P(x)$ al polinomio definido por la recurrencia

$$P^{(0)}(x) = P(x), \qquad P^{(k+1)}(x) = (P^{(k)})'(x), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

8.5. Caracterización de las soluciones múltiples de una ecuación algebraica: *Un número complejo r es solución múltiple de orden k de la ecuación algebraica $P(x) = 0$ si y sólo si $P(r) = P'(r) = P''(r) = \cdots = P^{(k-1)}(r) = 0$ y $P^{(k)}(r) \neq 0$.*

8.6. Ejemplo: Dada la ecuación $x^5 + px^2 + q = 0$, en la que $p, q \in \mathbb{C}$, determine la relación entre p y q para que la ecuación admita solución múltiple.

SOLUCIÓN: Si $x = \alpha$ es solución múltiple de la ecuación $P(x) = x^5 + px^2 + q = 0$, en virtud de 8.5 serán $P(\alpha) = 0$ y $P'(\alpha) = 0$, es decir,

$$\begin{cases} \alpha^5 + p\alpha^2 + q = 0 \\ 5\alpha^4 + 2p\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^5 + p\alpha^2 + q = 0 \\ \alpha(5\alpha^3 + 2p) = 0 \end{cases}$$

Si es $\alpha = 0$, de la primera ecuación se sigue $q = 0$. Si es $\alpha \neq 0$, entonces debe ser $5\alpha^3 = -2p \neq 0$. Al sustituir $\alpha^3 = -\frac{2}{5}p$ en la primera igualdad se obtiene $-\frac{2}{5}p\alpha^2 + p\alpha^2 + q = 0$, es decir, $\frac{3}{5}p\alpha^2 + q = 0$ y por tanto $\alpha^2 = -\frac{5q}{3p}$. Son, pues

$$\alpha^3 = -\frac{2p}{5}, \qquad \alpha^2 = -\frac{5q}{3p}$$

y al dividir la primera entre la segunda (puede hacerse porque $q = -\frac{3}{5}p\alpha^2 \neq 0$) se obtiene $\alpha = \frac{6p^2}{25q}$. Sustituyendo en $x^2 = -\frac{5q}{3p}$ se obtiene la relación buscada, que es

$$\left(\frac{6p^2}{25q}\right)^2 = -\frac{5q}{3p} \quad \Leftrightarrow \quad 108p^5 = -3125q^3$$

Por tanto, la ecuación $x^5 + px^2 + q = 0$ admite solución múltiple si y sólo si $q = 0$ o $108p^5 = -3125q^3$ ■

Las relaciones entre las soluciones de una ecuación algebraica y los coeficientes de la misma se recogen en las llamadas…

8.7. Fórmulas de Cardano: *Los n números complejos $r_1, r_2, \dots, r_n$ son las n soluciones de la ecuación algebraica $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, donde $a_n \neq 0$, si y sólo si:*

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_1r_2\cdots r_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Las n raíces $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ del polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ permiten descomponerlo en factores como $a_n(x - r_1)(x - r_2)\ \dots\ (x - r_n)$, de modo que al desarrollar este producto queda:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) = a_n x^n - a_n(r_1 + \cdots + r_n)x^{n-1} + a_n(r_1r_2 + \cdots + r_{n-1}r_n)x^{n-2} - \cdots + a_n(-1)^n r_1r_2\cdots r_n$$

y basta identificar los coeficientes de las potencias de x para obtener las fórmulas ■

8.8. Ejemplo: Calcule $q \in \mathbb{C}$ para que las cuatro soluciones de la ecuación:

$$x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 36x + q = 0$$

formen una proporción. Resuelva en tal caso la ecuación.

Este problema figura resuelto en la página 298 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: En esta ecuación, las fórmulas de Cardano para las soluciones x_1, x_2, x_3 y x_4 dan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -7 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 36 \\ x_1x_2x_3x_4 = q \end{cases}$$

Si las cuatro raíces forman una proporción, será, ordenando convenientemente las soluciones, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$, es decir, $x_1x_4 = x_2x_3$. Llevando esta igualdad a la 3ª ecuación:

$$x_1(x_1x_4) + x_2(x_1x_4) + x_3(x_1x_4) + x_4(x_1x_4) = 36 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\, x_1x_4 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad -6x_1x_4 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad x_1x_4 = x_2x_3 = -6$$

y por tanto $q = x_1x_2x_3x_4 = 36$. Las dos primeras fórmulas de Cardano dan ahora

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) = -6 \\ (x_1 + x_4)\,(x_2 + x_3) = 5 \end{cases}$$

Es así que x_1+x_4 y x_2+x_3 son las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2+6x+5=0$, es decir, son $x_1+x_4=-1$ y $x_2+x_3=-5$. Dado que es también $x_1x_4=-6$, resulta que x_1 y x_4 son las soluciones de la ecuación $x^2+x-6=0$, luego $x_1=-3$, $x_4=2$. Como análogamente es $x_2x_3=-6$, deducimos que x_2 y x_3 son las soluciones de la ecuación $x^2+5x-6=0$, es decir, son $x_2=-6$, $x_3=1$. Las cuatro soluciones de la ecuación son por tanto $x_1=-6$, $x_2=-3$, $x_3=1$ y $x_4=2$.

8.9. Ejemplo: Si los números complejos x_1, x_2 y x_3 son las soluciones de la ecuación $x^3+px^2+qx+r=0$ $(r\neq 0)$, halle una ecuación de tercer grado cuyas soluciones sean $\frac{1}{x_1x_2}$, $\frac{1}{x_1x_3}$ y $\frac{1}{x_2x_3}$.

SOLUCIÓN: Según las fórmulas de Cardano para la ecuación del enunciado, son

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{-p}{-r}=\frac{p}{r}$$

$$\frac{1}{x_1x_2}\cdot\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_2}\cdot\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_3}\cdot\frac{1}{x_2x_3}=\frac{x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3}{(x_1x_2x_3)^2}=\frac{q}{r^2}$$

$$\frac{1}{x_1x_2}\cdot\frac{1}{x_1x_3}\cdot\frac{1}{x_2x_3}=\frac{1}{(x_1x_2x_3)^2}=\frac{1}{r^2}$$

La ecuación que se pide es por tanto

$$x^3-\frac{p}{r}x^2+\frac{q}{r^2}x-\frac{1}{r^2}=0,$$

o la equivalente,

$$r^2x^3-p\,r\,x^2+q\,x-1=0 \quad \blacksquare$$

9. Algunas ecuaciones particulares

9.1. Ecuaciones trinómicas: Suele llamarse así a las ecuaciones de la forma

$$ax^{2n}+bx^n+c=0$$

donde $a,b,c\in\mathbb{C}$ con $a\neq 0$ y $n\in\mathbb{N}^+$. Si $n=1$, se trata de la ecuación de segundo grado mientras que si $n=2$ a la ecuación se la llama *bicuadrada*. El cambio $x^n=t$ reduce la ecuación trinómica a la de segundo grado $at^2+bt+c=0$. Ahora, si t_1 y t_2 son las dos soluciones de ésta, las soluciones de la ecuación trinómica son las de las ecuaciones $x^n=t_1$ y $x^n=t_2$, en total $n+n=2n$ soluciones en $\mathbb{C}$.

9.2. Ejemplo: Resuelva la ecuación trinómica $x^6+7x^3-8=0$

Este problema figura resuelto en la página 111 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: El cambio $x^3=t$ transforma la ecuación $x^6+7x^3-8=0$ en la ecuación $t^2+7t-8=0$, cuyas soluciones son $t=1$ y $t=-8$. Las soluciones de la ecuación son por tanto los $x\in\mathbb{C}$ tales que $x^3=1$ o $x^3=-8$, es decir, las raíces cúbicas de 1 y las raíces cúbicas de -8, a saber,

$$x_0=1,\qquad x_1=e^{2\pi i/3},\qquad x_2=e^{-2\pi i/3},\qquad x_3=-2,\qquad x_4=2e^{\pi i/3},\qquad x_5=2e^{-\pi i/3}$$

9.3. Ecuaciones recíprocas: Reciben este nombre las ecuaciones algebraicas de cuarto grado que tienen iguales los coeficientes de los extremos y los contiguos. Tienen la forma:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

donde $a,b,c\in\mathbb{C}$ y $a\neq 0$.

Para resolverlas, dividimos por x^2 (la ecuación que se obtiene es equivalente porque $x=0$ no es solución):

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

Si ahora sustituimos $x+\frac{1}{x}=t$, al elevar al cuadrado se obtiene $x^2+\frac{1}{x^2}+2=t^2$ y por tanto, la ecuación recíproca se reduce a la de 2º grado

$$a\,(t^2-2)+b\,t+c=0\,,\qquad \text{o a la equivalente}\qquad a\,t^2+b\,t+c-2a=0\,.$$

Una vez encontradas las raíces t_1 y t_2 de esta ecuación, las ecuaciones de 2º grado

$$x+\frac{1}{x}=t_1\,,\qquad x+\frac{1}{x}=t_2$$

proporcionan las $2+2=4$ soluciones complejas de la ecuación recíproca.

9.4. Ejemplo: Resuelva la ecuación

$$6x^4-7x^3+9x^2-7x+6=0\,.$$

SOLUCIÓN: La ecuación es equivalente a la que resulta de dividirla por x^2 (pues $x=0$ no es solución), es decir,

$$6x^2-7x+9-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$$

Al cambiar $x+\frac{1}{x}=t$, resulta al elevar al cuadrado que $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, con lo que la última ecuación se escribe:

$$6\left(t^2-2\right)-7t+9=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 6t^2-7t-3=0$$

cuyas soluciones son $t_1=\frac{3}{2}$ y $t_2=-\frac{1}{3}$. Las soluciones de la ecuación del enunciado se obtienen uniendo las soluciones de las ecuaciones:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}\,, \qquad x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}$$

La primera ecuación, tras multiplicar por $2x$, queda $2x^2-3x+2=0$, con soluciones

$$x_0=\frac{3}{4}+i\,\frac{\sqrt{7}}{4}, \qquad x_1=\frac{3}{4}-i\,\frac{\sqrt{7}}{4}$$

La segunda ecuación, tras multiplicar por $3x$, queda $3x^2+x+3=0$, con soluciones

$$x_2=-\frac{1}{6}+i\,\frac{\sqrt{35}}{6}, \qquad x_3=-\frac{1}{6}-i\,\frac{\sqrt{35}}{6}$$

10. La transformación de Tschirnhaus

La resolución de una ecuación algebraica puede reducirse a la de otra cuyas soluciones tienen por baricentro al origen. Este cambio de variable, que desprovee a la ecuación cúbica de las complicaciones provocadas por traslaciones, fue ideado por Cardano a mediados del siglo XVI, a pesar de que hoy día se la conoce como *Transformación de Tschirnhaus*, en referencia al matemático alemán Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, que escribió sobre dicho cambio de variable en su *Acta Eruditorum* de 1683.

10.1. Transformación de Tschirnhaus (traslación al baricentro de las raíces): *Dada la ecuación algebraica*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

en la que $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ *y* $a_n \neq 0$, *el cambio de variable*

$$t = x + \frac{a_{n-1}}{n\,a_n}$$

transforma la ecuación (1) *en la ecuación incompleta*

$$b_n t^n + b_{n-2}t^{n-2} + \cdots + b_0 = 0$$

en la que $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, $b_n \neq 0$ *y en la que el coeficiente de* t^{n-1} *es nulo* ∎

10.2. Observaciones

1. Conocidas las soluciones t_k de esta última ecuación, las soluciones x_k de la ecuación inicial restándole $\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}$ a aquéllas. Este cambio reduce el estudio de las ecuaciones algebraicas a las llamadas *ecuaciones incompletas* $P(x) = 0$ en las que $P(x)$ es un polinomio de grado n y sin término en x^{n-1}.

2. Obsérvese que si $x_1, \dots, x_n$ son las soluciones de la ecuación algebraica $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, según la primera fórmula de Cardano, es $x_1 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, por lo que el baricentro (media aritmética) de dichas soluciones es

$$g = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = -\frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

Resulta así que la transformación de Tschirnhaus no es más que traslación $x \mapsto t = x - g$, donde g es el baricentro de las soluciones de la ecuación.

10.3. Ejemplo: Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación cúbica

$$x^3 - 3\sqrt{3}\,x^2 + (8\sqrt{3} - 7)\,x - 24 + 13\sqrt{3} = 0$$

SOLUCIÓN: El baricentro de las soluciones x_1, x_2, x_3 de la ecuación es

$$g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Con el cambio de variable $t = x - g = x - \sqrt{3}$, es decir, $x = t + \sqrt{3}$, la ecuación se transforma en:

$$0 = (t + \sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3}\,(t + \sqrt{3})^2 + (8\sqrt{3} - 7)(t + \sqrt{3}) - 24 + 13\sqrt{3} =$$

$$= t^3 + 3\sqrt{3}\,t^2 + 9t + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\,t^2 - 18\,t - 9\sqrt{3} + 8\sqrt{3}\,t + 24 - 7t - 7\sqrt{3} - 24 + 13\sqrt{3} = t^3 - (16 - 8\sqrt{3})\,t = t\,[t^2 - (16 - 8\sqrt{3})] = t\,[t^2 - (2 - 2\sqrt{3})^2] =$$

$$= t\,(t - 2 + 2\sqrt{3})\,(t + 2 - 2\sqrt{3})$$

cuyas soluciones son $t_0 = 0$, $t_1 = 2 - 2\sqrt{3}$ y $t_2 = -2 + 2\sqrt{3}$. Las soluciones de la ecuación original son, por tanto,

$$x_0 = t_0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}\,, \qquad x_1 = t_1 + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}\,, \qquad x_2 = t_2 + \sqrt{3} = -2 + 3\sqrt{3}\,.$$

10.4. Ejemplo: Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación cúbica

$$8x^3 + 12ix^2 - 6x - 9i = 0\,.$$

SOLUCIÓN: El baricentro de las soluciones x_1, x_2, x_3 de la ecuación es

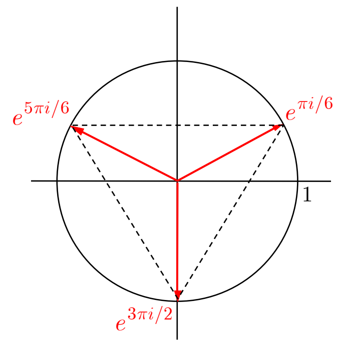
$$g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-\frac{12i}{8}}{3} = -\frac{i}{2}$$

Con el cambio de variable $t = x - g = x + \frac{i}{2}$, es decir, $x = t - \frac{i}{2}$, la ecuación se transforma en cualquiera de las siguientes:

$$8\left(t - \frac{i}{2}\right)^3 + 12i\left(t - \frac{i}{2}\right)^2 - 6\left(t - \frac{i}{2}\right) - 9i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8t^3 - 8i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 = i$$

Las soluciones de la última ecuación son las tres raíces cúbicas de $i = e^{\pi i/2}$, es decir,

$$t_0 = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\,, \qquad t_1 = e^{5\pi i/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\,, \qquad t_2 = e^{9\pi i/6} = e^{3\pi i/2} = -i$$



Las tres soluciones de la ecuación inicial son:

$$x_0 = t_0 - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad x_1 = t_1 - \frac{i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad x_2 = t_2 - \frac{i}{2} = -\frac{3i}{2} \;\blacksquare$$

En las ecuaciones que se acaban de resolver, la transformación de Cardano ha resuelto la ecuación correspondiente al convertirla en otra de tercer grado de muy fácil resolución. Naturalmente esto no tiene por qué ocurrir, y en el epígrafe que sigue se da la fórmula general para resolver la ecuación cúbica incompleta $x^3+mx+n=0$, aunque su utilidad práctica sea muy limitada.

11. La ecuación cúbica

La solución $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ de la ecuación general de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ emplea sólo los coeficientes a, b y c de la ecuación y las operaciones algebraicas básicas de suma, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. Se dice por ello que *la ecuación general de segundo grado es resoluble por radicales*.

Los algebristas italianos del siglo XVI buscaban una solución por radicales para la ecuación general de tercer grado y, en 1515, Del Ferro la encontró para la ecuación incompleta $x^3+mx+n=0$. Dado que cualquier ecuación de tercer grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ se reduce a una incompleta del tipo $x^3+mx+n=0$ mediante el cambio de variable de Tschirnhaus, la solución de Del Ferro permite resolver cualquier ecuación cúbica.

La demostración que se da en 10.2 de la solución de Del Ferro se debe al maestro de todos, Leonhard Euler. Para ahorrar escritura en dicha demostración, conviene definir ya el llamado *discriminante* de la ecuación cúbica incompleta.

11.1. Discriminante de la ecuación cúbica incompleta: Se llama *discriminante* de la ecuación cúbica incompleta $x^3+mx+n=0$ $(m,n\in\mathbb{C})$ al número complejo

$$\Delta=\left(\frac{m}{3}\right)^3+\left(\frac{n}{2}\right)^2.$$

11.2. Soluciones de la ecuación cúbica incompleta: *Dada la ecuación cúbica incompleta*

$$x^3 + mx + n = 0$$

donde $m, n \in \mathbb{C}$ *, sus tres soluciones son*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

donde en la suma anterior deben elegirse como primer y segundo sumando las raíces cúbicas respectivas de $-\frac{n}{2} + \sqrt{\Delta}$ *y* $-\frac{n}{2} - \sqrt{\Delta}$ *cuyo producto sea* $-\frac{m}{3}$ *.*

DEMOSTRACIÓN: La idea de Euler consistió en expresar cada solución x de la ecuación como suma de dos números complejos u y v que serán después elegidos adecuadamente. Actuando así

$$x^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + 3uv(u+v) + v^3 = 3uvx + u^3 + v^3$$

y como también es $x^3 = -mx - n$, pueden elegirse u y v para que sean iguales los coeficientes de los últimos miembros, es decir, para que cumplan $u^3 + v^3 = -n$ y $uv = -\frac{m}{3}$. Elevando al cubo la segunda igualdad, se obtiene:

$$u^3 + v^3 = -n, \qquad u^3v^3 = -\frac{m^3}{27}$$

Esto significa, según las fórmulas de Cardano, que u^3 y v^3 son las soluciones de la ecuación $z^2 + nz - \frac{m^3}{27} = 0$, luego:

$$u^3 = \frac{-n + \sqrt{n^2 + \frac{4m^3}{27}}}{2} = -\frac{n}{2} + \sqrt{\Delta}\,, \qquad v^3 = \frac{-n - \sqrt{n^2 + \frac{4m^3}{27}}}{2} = -\frac{n}{2} - \sqrt{\Delta}$$

es decir, u y v son raíces cúbicas de

$$p=-\frac{n}{2}+\sqrt{\Delta} \qquad \text{y} \qquad q=-\frac{n}{2}-\sqrt{\Delta}\,,$$

respectivamente. Comprobamos que de las $3\cdot 3=9$ parejas posibles (u,v), sólo hay tres que cumplen $uv=-\frac{m}{3}$. Si u_0 y v_0 denotan una raíz cúbica cualquiera de p y otra de q, respectivamente, las raíces cúbicas de p y q son los $u\in\left\{u_0,u_0\xi,u_0\xi^2\right\}$ y $v\in\left\{v_0,v_0\xi,v_0\xi^2\right\}$, donde $\xi=e^{2\pi i/3}$. Entre los nueve productos posibles uv, hay tres con valor u_0v_0, tres con valor $u_0v_0\xi$ y los otros tres valen $u_0v_0\xi^2$. Como estos tres valores son distintos y todos son raíces cúbicas de $pq=-\frac{m^3}{27}$, sólo uno de ellos es $-\frac{m}{3}$ y por tanto hay exactamente tres parejas (u,v) cuyo producto es $-\frac{m}{3}$ ■

11.3. Ejemplo: Resuelva la ecuación cúbica $27x^3+81x^2+63x+13=0$.

SOLUCIÓN: El baricentro de las soluciones x_1, x_2, x_3 de la ecuación es

$$g=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{-\frac{81}{27}}{3}=-1$$

Con el cambio de variable $t=x-g=x+1$, es decir, $x=t-1$, la ecuación se transforma en cualquiera de las siguientes:

$$27\,(t-1)^3+81\,(t-1)^2+63\,(t-1)+13=0 \quad\Leftrightarrow\quad 27t^3-18t+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad t^3-\frac{2}{3}t+\frac{4}{27}=0$$

Aquí son $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{4}{27}$ y el discriminante de la ecuación es

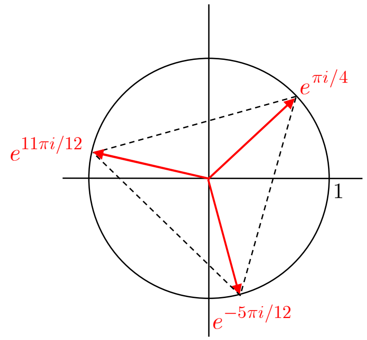
$$\Delta = \left(\frac{m}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(-\frac{2}{9}\right)^3 + \left(\frac{2}{27}\right)^2 = -\frac{8}{729} + \frac{4}{729} = -\frac{4}{729}$$

Las dos raíces cuadradas del discriminante son

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-\frac{4}{729}} = \pm\frac{2}{27}\,i\,.$$

Las raíces cúbicas de

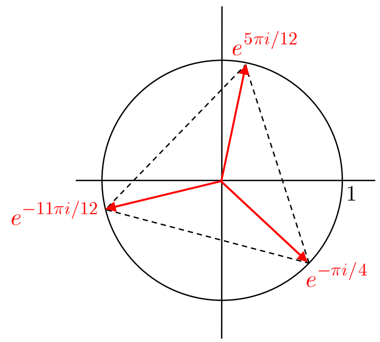
$$p = -\frac{n}{2} + \sqrt{\Delta} = -\frac{2}{27} + \frac{2}{27}\,i = \frac{2}{27}(-1+i) = \frac{2\sqrt{2}}{27}\,e^{3\pi i/4}$$



son

$$u_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{\pi i/4}, \qquad u_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{11\pi i/12}\,, \qquad u_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{19\pi i/12} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{-5\pi i/12}$$

Y las tres raíces de



$$q = -\frac{n}{2} - \sqrt{\Delta} = -\frac{2}{27} - \frac{2}{27}\,i = \frac{2}{27}(-1-i) = \frac{2\sqrt{2}}{27}\,e^{-3\pi i/4}$$

son

$$v_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{-\pi i/4}, \qquad v_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{5\pi i/12}\,, \qquad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{13\pi i/12} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{-11\pi i/12}$$

Los tres pares de raíces (u_i, v_j) tales que $u_i \cdot v_j = -\frac{m}{3} = \frac{2}{9}$ son (u_0, v_0), (u_1, v_2) y (u_2, v_1), por lo que las soluciones de la ecuación incompleta $t^3 - \frac{2}{3}t + \frac{4}{27} = 0$ son

$$t_0 = u_0 + v_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{\pi i/4} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 2\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3},$$

$$t_1 = u_1 + v_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{11\pi i/12} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-11\pi i/12} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 2\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(-1-\sqrt{3}) = \frac{-1-\sqrt{3}}{3}$$

$$t_2 = u_2 + v_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-5\pi i/12} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{5\pi i/12} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 2\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\sqrt{3}) = \frac{-1+\sqrt{3}}{3}$$

Las soluciones de la ecuación inicial son, por tanto,

$$x_0 = t_0 - 1 = -\frac{1}{3}, \qquad x_1 = t_1 - 1 = \frac{-4-\sqrt{3}}{3}, \qquad x_2 = t_2 - 1 = \frac{-4+\sqrt{3}}{3} \quad \blacksquare$$

Alrededor de 1540, Ferrari resolvió por radicales la ecuación general de cuarto grado, es decir, encontró una expresión para las soluciones que sólo usa los coeficientes de la ecuación, las cuatro operaciones aritméticas y raíces hasta de índice cuatro, expresión que no expondremos aquí dada su complejidad y escasa utilidad. Este camino de resolución se intentó seguir en las ecuaciones generales de grado mayor que cuatro, pero sin éxito. A principios del siglo XIX, Abel y Galois demostraron que *las ecuaciones generales de grado mayor que cuatro no son resolubles por radicales*.

12. Ecuaciones algebraicas con coeficientes reales

Cuando los coeficientes de la ecuación algebraica $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ son todos reales, las soluciones complejas no reales de dicha ecuación se presentan por parejas de números conjugados, lo que aporta interesantes consecuencias.

12.1. Teorema: *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un número complejo no real y sea $P(x) = 0$ una ecuación algebraica con coeficientes reales. Si α es solución múltiple de orden k de la ecuación $P(x) = 0$, el complejo conjugado $\overline{\alpha}$ es también solución múltiple de orden k.*

Significa esto que el número de raíces complejas no reales de una ecuación algebraica con coeficientes reales siempre es par, de lo que se deducen los siguientes resultados:

12.2. Corolario 1: *El número de raíces reales de una ecuación algebraica $P(x) = 0$ con coeficientes reales y de grado n es de la misma paridad que n.*

12.3. Corolario 2: *Cualquier ecuación algebraica $P(x) = 0$ con coeficientes reales y de grado impar tiene al menos una solución real.*

12.4. Ejemplo: Halle la relación entre los coeficientes reales m y n de la ecuación $x^3 + mx + n = 0$ para que ésta tenga una raíz real y dos no reales de módulo 3.

SOLUCIÓN: La ecuación tiene coeficientes reales, luego las dos raíces complejas deben ser una conjugada de la otra. Sean, pues, $x_1 = r$, $x_2 = a + b\,i$ y $x_3 = a - b\,i$, donde $r, a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y $a^2 + b^2 = 9$, las tres soluciones de la ecuación. Entonces, según las fórmulas de Cardano-Vieta, serán:

$$\begin{cases} r+(a+bi)+(a-bi)=0 \\ r(a+bi)+r(a-bi)+(a+bi)(a-bi)=m \\ r(a+bi)(a-bi)=-n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r+2a=0 \\ 2ra+a^2+b^2=m \\ r(a^2+b^2)=-n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r+2a=0 \\ 2ra+9=m \\ 9r=-n \end{cases}$$

De la tercera se deduce $r=-\frac{n}{9}$ y de la primera, $a=-\frac{r}{2}=\frac{n}{18}$. Al sustituir en la segunda ecuación, se obtiene $2\cdot\left(-\frac{n}{9}\right)\left(\frac{n}{18}\right)+9=m$, es decir, $n^2=81(9-m)$, que es la relación que se pide ■

Para ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros, el siguiente resultado establece entre qué fracciones pueden buscarse las soluciones racionales de dichas ecuaciones. Antes de ello, repárese en que el estudio de las ecuaciones algebraicas con coeficientes racionales se reduce al de las ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros, pues si una ecuación algebraica tiene sus coeficientes racionales, al multiplicar sus dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes, se obtiene una ecuación algebraica equivalente con todos sus coeficientes enteros.

12.5. Ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros: *Sea* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ *una ecuación algebraica con coeficientes enteros* $a_0,a_1,\ldots,a_n$. *Si* $\frac{p}{q}$, *donde* p *y* q *son números enteros primos entre sí, es una solución racional de la ecuación, entonces:*

i) p *es divisor de* a_0.

ii) q *es divisor de* a_n.

iii) $p-q$ *es divisor de* $P(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n$,

iv) $p+q$ *es divisor de* $P(-1)=a_0-a_1+\cdots+(-1)^n a_n$

12.6. Corolario: *Las soluciones enteras de una ecuación algebraica con coeficientes enteros $P(x)=0$ son, si existen, divisores del término independiente de $P(x)$.*

12.7. Ejemplo: Resuelva la ecuación cúbica

$$x^3+9x^2+25x+21=0$$

UN CAMINO: Si la ecuación tiene soluciones racionales $\frac{p}{q}$, donde $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^+$ y $\mathrm{mcd}(p,q)=1$, necesariamente es $q=1$, y dichas soluciones son enteras y están entre los divisores de 21, a saber, entre los números $\pm1,\pm3,\pm7,\pm21$. Acudiendo a la Regla de Ruffini se obtiene inmediatamente que $x=-3$ es solución y que

$$x^3+9x^2+25x+21=(x+3)(x^2+6x+7)$$

Dado que es $x^2+6x+7=(x+3)^2-2=(x+3+\sqrt{2})(x+3-\sqrt{2})$ las soluciones de la ecuación son $x_0=-3,\ \ x_1=-3-\sqrt{2},\ \ x_2=-3+\sqrt{2}$

OTRO CAMINO: El baricentro de las raíces es $g=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)=\frac{1}{3}(-9)=-3$ y la transformación de Tschirnhaus $t=x+3$ convierte la ecuación en la siguiente con incógnita t:

$$(t-3)^3+9(t-3)^2+25(t-3)+21=0 \quad\Leftrightarrow\quad t^3-2t=0 \quad\Leftrightarrow\quad t(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})=0$$

cuyas soluciones son $t_0=0$, $t_1=-\sqrt{2}$ y $t_2=\sqrt{2}$. Las soluciones de la ecuación del enunciado son así

$$x_0=t_0-3=-3, \qquad x_1=t_1-3=-\sqrt{2}-3, \qquad x_2=t_2-3=\sqrt{2}-3 \ \blacksquare$$

12.8. Ejemplo: Resuelva la ecuación de cuarto grado

$$P(x)=6x^4-13x^3-6x^2+5x+2=0$$

SOLUCIÓN: Si $\frac{p}{q}$, donde $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$ y $\operatorname{mcd}(p,q)=1$, es solución racional de la ecuación, entonces p es divisor de 2 y q es divisor del coeficiente dominante 6, es decir, $p\in\{\pm1,\pm2\}$ y $q\in\{1,2,3,6\}$. Además, $p-q$ debe ser divisor de $P(1)=6-13-6+5+2=-6$, según 12.5 y de todos los pares posibles (p,q) sólo cumplen esta condición $(1,2)$, $(1,3)$, $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(-2,1)$. Dado que también $p+q$ debe ser divisor de $P(-1)=6+13-6-5+2=10$, sólo son aceptables entre los anteriores los pares $(-1,2)$, $(2,3)$ y $(-2,1)$, y de éstos sólo los dos primeros corresponden a las soluciones $x=-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{2}{3}$ de la ecuación. Al dividir el polinomio $P(x)$ por $6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=6x^2-x-2$ se obtiene

$$P(x)=(6x^2-x-2)(x^2-2x-1)$$

y como

$$x^2-2x-1=(x^2-2x+1)-2=(x-1)^2-(\sqrt{2})^2=(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}),$$

las soluciones de la ecuación son

$$x_0=-\frac{1}{2},\qquad x_1=\frac{2}{3},\qquad x_2=1-\sqrt{2},\qquad x_3=1+\sqrt{2}\ \blacksquare$$

Si los coeficientes de la ecuación algebraica son números racionales, el estudio de sus soluciones se reduce al de una ecuación con coeficientes enteros sin más que multiplicar ambos miembros de la ecuación por un múltiplo común de los denominadores.

13. La ecuación cúbica con coeficientes reales

Cuando los coeficientes m y n de la ecuación cúbica incompleta $x^3+mx+n=0$ son números reales, puede predecirse el número de soluciones reales en función del signo del *discriminante* Δ como indica el teorema siguiente:

13.1. Número de soluciones de la ecuación cúbica incompleta con coeficientes reales: *Sea $x^3+mx+n=0$ una ecuación cúbica incompleta con coeficientes reales y sea $\Delta=(\frac{m}{3})^3+(\frac{n}{2})^2$ su discriminante. Entonces:*

i) *Si $\Delta<0$, la ecuación tiene tres soluciones reales y distintas.*

ii) *Si $\Delta=0$, la ecuación tiene tres soluciones reales, una doble y otra simple, salvo que sean $m=n=0$, en cuyo caso tiene la solución real triple $x=0$.*

iii) *Si $\Delta>0$, la ecuación tiene una solución real y dos complejas conjugadas no reales*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\Delta>0$. En este caso, $p=-\frac{n}{2}+\sqrt{\Delta}$ y $q=-\frac{n}{2}-\sqrt{\Delta}$ son números reales. Si son u_0 y v_0 las únicas raíces cúbicas reales de p y q, todas las raíces cúbicas de p y q son, respectivamente, $\left\{u_0,u_0\xi,u_0\xi^2\right\}$ y $\left\{v_0,v_0\xi,v_0\xi^2\right\}$, donde $\xi=e^{2\pi i/3}$. Como u_0v_0 es raíz cúbica real de $pq=(-\frac{m}{3})^3\in\mathbb{R}$, necesariamente $u_0v_0=-\frac{m}{3}\in\mathbb{R}$ y los otros dos productos del mismo valor son $u_0\xi\cdot v_0\xi^2=u_0v_0$ y $u_0\xi^2\cdot v_0\xi=u_0v_0$. Las tres soluciones de la ecuación son por tanto

$$x_0=u_0+v_0\,,\qquad x_1=u_0\xi+v_0\xi^2\,,\qquad x_2=\overline{x}_1=u_0\xi^2+v_0\xi\,,$$

donde la primera es real y las dos últimas son complejos conjugados pues $\overline{\xi}=\xi^2$.

Si es $\Delta = 0$, ahora también $p = q = -\frac{n}{2}$ es un número real. Si de nuevo es $v_0 = u_0$ la única raíz cúbica real de $p = q$, las otras dos raíces cúbicas de p son $u_0\xi$ y $u_0\xi^2$ y los únicos pares ordenados que pueden formarse en el conjunto $\left\{u_0, u_0\xi, u_0\xi^2\right\}$ cuyo producto sea $-\frac{m}{3}$ son (u_0, u_0) , $(u_0\xi, u_0\xi^2)$ y $(u_0\xi^2, u_0\xi)$, de modo que las soluciones de la ecuación son

$$x_0 = u_0 + u_0 = 2u_0\,, \qquad x_1 = u_0\xi + u_0\xi^2 = u_0(\xi + \overline{\xi}) = 2u_0\,\mathrm{Re}\,(\xi) = -u_0\,, \qquad x_2 = u_0\xi^2 + u_0\xi = -u_0$$

y las tres son reales. Si es $u_0 = 0$ (lo que supone que $m = n = 0$), las tres soluciones son idénticas y nulas, mientras que si es $u_0 \neq 0$, hay una solución real doble y otra simple.

Por último, si $\Delta < 0$, los números p y q son complejos no reales y conjugados entre sí, de modo que si u_0, u_1, u_2 son las raíces cúbicas de p , las raíces cúbicas de q son las conjugadas $\overline{u}_0, \overline{u}_1, \overline{u}_2$ de las anteriores, por lo que el producto de cada u_i por su conjugado $\overline{u}_i$ es un número real $\left(-\frac{m}{3}\right)$ y las tres soluciones de la ecuación son los números reales

$$x_0 = u_0 + \overline{u}_0 = 2\,\mathrm{Re}\,(u_0)\,, \qquad x_1 = u_1 + \overline{u}_1 = 2\,\mathrm{Re}\,(u_1)\,, \qquad x_2 = u_2 + \overline{u}_2 = 2\,\mathrm{Re}\,(u_2)$$

que además son distintos dos a dos por serlo las raíces cúbicas de p .

13.2. Ejemplo: Se eligen al azar y de manera independiente dos números reales a y b en el intervalo [0,1] y se considera la ecuación cúbica incompleta:

$$\frac{1}{3}x^3 - ax + 2b = 0$$

Calcule la probabilidad de que la ecuación anterior tenga todas sus soluciones reales.

SOLUCIÓN: La ecuación del enunciado se escribe, tras multiplicar ambos miembros por 3, en la forma equivalente:

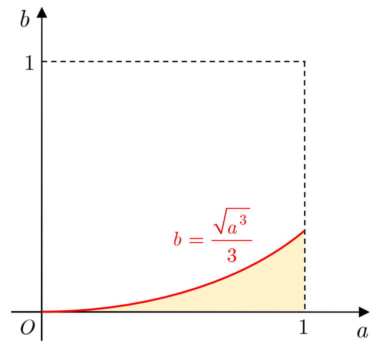
$$x^3-3ax+6b=0$$

Su discriminante es

$$\Delta=\left(\frac{-3a}{3}\right)^3+\left(\frac{6b}{2}\right)^2=9b^2-a^3\,,$$

de modo que, según 12.9, la ecuación tendrá todas sus soluciones reales si y sólo si $\Delta\le 0$, es decir, si y sólo si $9b^2-a^3\le 0$. Como las variables aleatorias a y b son uniformes en el intervalo $[0,1]$ y además independientes, la variable conjunta (a,b) es también uniforme en el intervalo $[0,1]\times[0,1]$ de $\mathbb{R}^2$ y la probabilidad que pide el problema es, llamando $C=\left\{(a,b)\in[0,1]\times[0,1]:9b^2-a^3\le 0\right\}$:

$$p=\frac{\text{área}(C)}{\text{área del cuadrado }[0,1]\times[0,1]}=\text{área}(C)$$



Cuando $(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$, las siguientes inecuaciones son equivalentes:

$$9b^2-a^3\le 0\quad\Leftrightarrow\quad 9b^2\le a^3\quad\Leftrightarrow\quad b\le\frac{\sqrt{a^3}}{3}$$

y por ello, el área de C es el área bajo la curva $b=\frac{\sqrt{a^3}}{3}$ entre $a=0$ y $a=1$, es decir:

$$p=\text{área}(C)=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{a^3}\,da=\frac{1}{3}\int_0^1 a^{3/2}\,da=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\left[a^{5/2}\right]_0^1=\frac{2}{15}$$

13.3. Ejemplo: Resolvemos en $\mathbb{C}$ la siguiente ecuación algebraica:

$$x^3-3x^2+9x-5=0 \tag{1}$$

SOLUCIÓN: El baricentro de las soluciones de la ecuación es $g=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{3}{3}=1$. El cambio de variable de Tschirnhaus $t=x-1$, o bien, $x=t+1$, transforma la ecuación (1) en la ecuación

$$(t+1)^3-3\,(t+1)^2+9\,(t+1)-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad t^3+6t+2=0 \tag{2}$$

Dado que el discriminante de la última ecuación es

$$\Delta=\left(\frac{6}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{2}\right)^2=8+1=9>0$$

la ecuación (2) tiene una solución real y dos complejas conjugadas no reales. Las únicas raíces cúbicas reales de $p=-\frac{n}{2}+\sqrt{\Delta}=-\frac{2}{2}+\sqrt{9}=2$ y $q=-\frac{n}{2}-\sqrt{\Delta}=-\frac{2}{2}-\sqrt{9}=-4$ son, respectivamente, $u_0=\sqrt[3]{2}$ y $v_0=-\sqrt[3]{4}$, por lo que la única solución real de la ecuación incompleta (2) es

$$t_0=u_0+v_0=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$$

y las dos imaginarias son

$$t_1=u_0e^{2\pi i/3}+v_0e^{-2\pi i/3}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)-\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})\,i$$

y su conjugado

$$t_2 = \overline{t_1} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})\, i$$

Las soluciones de la ecuación inicial (1) son por tanto

$$x_0 = t_0 + 1 = 1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\,, \qquad x_1 = t_1 + 1 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})\, i\,, \qquad x_2 = t_2 + 1 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})\, i\,.$$

13.4. Ejemplo: Resolvemos en $\mathbb{C}$ la siguiente ecuación algebraica:

$$27x^3 + 81x^2 + 45x - 25 = 0 \tag{3}$$

SOLUCIÓN: El baricentro de las soluciones de la ecuación es

$$g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\frac{-81}{27}}{3} = -1\,.$$

Con el cambio de variable de Tschirnhaus $t = x + 1$, o bien, $x = t - 1$, la ecuación (3) se transforma en cualquiera de las ecuaciones equivalentes siguientes:

$$27\,(t-1)^3 + 81\,(t-1)^2 + 45\,(t-1) - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 27\,(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + 81\,(t^2 - 2t + 1) + 45\,(t-1) - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 27t^3 - 36t - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - \frac{4}{3}t - \frac{16}{27} = 0 \tag{4}$$

Dado que el discriminante de la ecuación es $\Delta = \left(\frac{-4}{9}\right)^3 + \left(-\frac{8}{27}\right)^2 = -\frac{64}{729} + \frac{64}{729} = 0$ y es $(m,n) \neq (0,0)$, la ecuación (4) tiene tres soluciones reales, una doble y otra simple. Aquí, $p = q = -\frac{n}{2} = \frac{8}{27}$, cuya única raíz cúbica real es $u_0 = \frac{2}{3}$, luego las tres soluciones reales de (4) son

$$t_0 = 2u_0 = \frac{4}{3}, \qquad t_1 = t_2 = -u_0 = -\frac{2}{3}$$

Las soluciones de la ecuación inicial son así

$$x_0 = t_0 - 1 = \frac{1}{3}, \qquad x_1 = x_2 = t_1 - 1 = -\frac{5}{3}$$

13.5. Ejemplo: Resolvemos en $\mathbb{C}$ la ecuación algebraica:

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 8 = 0 \tag{5}$$

SOLUCIÓN: El baricentro de las soluciones es

$$g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-6}{3} = -2\,.$$

Mediante el cambio $t = x + 2$, o bien, $x = t - 2$, la ecuación (5) se transforma en la ecuación

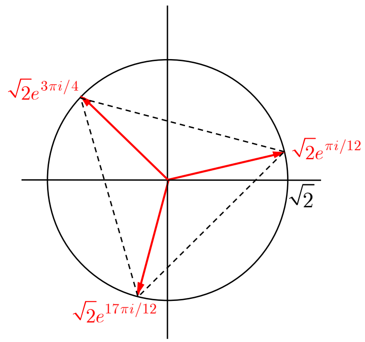
$$(t-2)^3 + 6(t-2)^2 + 6(t-2) - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - 6t - 4 = 0 \tag{6}$$

El discriminante de la última ecuación es

$$\Delta = \left(\frac{-6}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -8 + 4 = -4 < 0\,,$$

luego la ecuación tiene tres soluciones reales y distintas.

Las tres raíces cúbicas del número complejo $p = -\frac{n}{2} + \sqrt{\Delta} = 2 + \sqrt{-4} = 2 + 2i = \sqrt{8} \cdot e^{\pi i/4}$ son



$$u_0 = \sqrt{2} \cdot e^{\pi i/12}, \qquad u_1 = \sqrt{2} \cdot e^{9\pi i/12} = \sqrt{2} \cdot e^{3\pi i/4}, \qquad u_2 = \sqrt{2} \cdot e^{17\pi i/12}$$

y la más sencilla de las tres es

$$u_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i$$

Las otras dos raíces cúbicas pueden obtenerse a partir de ella teniendo en cuenta que

$$u_0 = u_1 \cdot e^{-2\pi i/3} = (-1+i)\left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = (-1+i)\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$u_2 = u_1 \cdot e^{2\pi i/3} = (-1+i)\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = (-1+i)\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Las tres soluciones de la ecuación incompleta (6) son por tanto

$$t_0 = u_0 + \overline{u}_0 = 2 \operatorname{Re} u_0 = \sqrt{3} + 1\,, \qquad t_1 = u_1 + \overline{u}_1 = 2 \operatorname{Re} u_1 = -2\,, \qquad t_2 = u_2 + \overline{u}_2 = 2 \operatorname{Re} u_2 = 1 - \sqrt{3}$$

y las soluciones de la ecuación inicial (5) son

$$x_0 = t_0 - 2 = \sqrt{3} - 1, \qquad x_1 = t_1 - 2 = -4, \qquad x_2 = t_2 - 2 = -\sqrt{3} - 1 \ \blacksquare$$