


## P1. Problema 9.

Autor: José María Lorenzo Magán

*Academia Deimos*  
[www.academiadeimos.com](http://www.academiadeimos.com)

A circular logo with a textured, radial background. In the center, there is a stylized graphic of a person's head and shoulders, possibly representing a deity or a figure from mythology. The word "DEIMOS" is written in a bold, sans-serif font across the bottom of the circle.

# Enunciado:

Probar que para todo  $n, k \in \mathbb{N}$ , con  $k < n$ , se verifica:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

*Resuelto en Vol. 3 Ej. 89.75*

# Para $k=1$ :

Vamos a demostrarlo por inducción sobre  $k$ . Observemos que para  $k = 1$  la igualdad es cierta:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 1 - n = (-1)^1 \binom{n-1}{1}$$

# Hipótesis inductiva:

Supongamos que la igualdad es cierta para  $k \geq 1$ . Veamos que ocurre para  $k + 1$ :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k}}_{(-1)^k \binom{n-1}{k}} + (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1} \\ &= (-1)^k \binom{n-1}{k} + (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} \left[ \binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k} \right] \end{aligned}$$

# Hipótesis inductiva:

Recordemos la fórmula de Pascal:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n}{k+1}$$

Por lo que:

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k+1}$$

# Conclusión:

De este modo, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1} \\ = (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k+1} \end{aligned}$$

Por lo que la igualdad también se verifica para  $k+1$ . Esto demuestra por inducción que es válida para cualquier valor de  $k \in \mathbb{N}$ .