P1. Problema 6.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Dados los códigos ordenados en cinco letras entre las ocho: A, B, C, D, E, F, G, H, (repetidas o no), se pide hallar:

a) Número total de códigos.

b)
1. Número de ellos con una sola letra repetida dos veces. Ejemplo: ABACH.
2. Número de ellos con dos letras repetidas dos veces cada una. Ejemplo: ABBCA.
3. Número de ellos con una letra repetida tres veces. Ejemplo: ABAAE.
4. Número de ellos con una letra repetida tres veces y otra dos. Ejemplo: AABAB.
5. Número de ellos con una letra repetida cuatro veces.
6. Número de ellos con una letra repetida cinco veces.
7. Número de ellos que no estén comprendidos en los grupos anteriores.

Enunciado:

c) Supuestas ordenadas las listas alfabéticamente, calcular el número de códigos formados por cinco letras consecutivas en dicho orden. Ejemplo: DGFHE.

d) Supuesto el orden lexicográfico entre los códigos, hallar el que corresponde al 1729.

Resuelto en Vol 1, Pág. 75

Apartado (a):

El número de códigos que podemos formar con 5 de las 8 letras es:

$$N = VR_{8,5} = 8^5 = 32768$$

Apartado (b1):

Para determinar el número de códigos que tienen una sola letra repetida argumentamos del siguiente modo:

- Comenzamos eligiendo la letra que se va a repetir, que puede ser cualquiera de las 8.
- Una vez seleccionada la letra, la colocamos en 2 de las 5 posiciones posibles, que lo podremos hacer de $\binom{5}{2}$ formas posibles.
- En las tres posiciones restantes, podremos colocar cualquiera de las 7 letras restantes, que lo podremos hacer de $V_{7,3}$ formas posibles.

Aplicando el principio de multiplicación, obtendremos:

$$N_1 = 8 \cdot \binom{5}{2} \cdot V_{7,3} = 16800$$

Apartado (b2):

Vamos a calcular el número de códigos que tienen dos letras repetidas dos veces. Para ello:

- Comenzamos eligiendo las dos letras que se van a repetir, que puede hacer de $\binom{8}{2}$ formas.
- La primera de esas letras se puede colocar de $\binom{5}{2}$ formas posibles, mientras que la segunda se puede colocar de $\binom{3}{2}$ formas.
- En la única posición "libre" podremos colocar cualquiera de las 6 letras restantes.

Aplicando de nuevo el principio de multiplicación, obtendremos:

$$N_2 = \binom{8}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 6 = 5040$$

Apartado (b3):

Calculemos el número de códigos que tienen una letra repetida tres veces:

- Comenzamos eligiendo la letra que se van a repetir tres veces, que puede ser cualquiera de las 8. Una vez seleccionada, esta letra se puede colocar de $\binom{5}{3}$ formas posibles.
- En las dos posiciones restantes, podremos colocar cualquiera de las 7 letras restantes, que lo podremos hacer de $V_{7,2}$ formas posibles.

Por el principio de multiplicación:

$$N_3 = 8 \cdot \binom{5}{3} \cdot V_{7,2} = 3360$$

Apartado (b4):

Calculemos el número de códigos que tienen una letra repetida tres veces y otras dos:

- Comenzamos eligiendo, por ejemplo, la letra que se van a repetir tres veces, que puede ser cualquiera de las 8. Una vez seleccionada, esta letra se puede colocar de $\binom{5}{3}$ formas posibles.
- Seleccionamos ahora la letra que se va a repetir dos veces, que puede ser cualquiera de las 7 no utilizadas. Una vez seleccionada, esta letra se puede colocar de $\binom{2}{2} = 1$ forma posible.

Por el principio de multiplicación:

$$N_4 = 8 \cdot \binom{5}{3} \cdot 7 \cdot \binom{2}{2} = 560$$

Apartado (b5):

Calculemos ahora el número de códigos que tienen una letra repetida cuatro veces:

- Comenzamos eligiendo la letra que se van a repetir cuatro veces, que puede ser cualquiera de las 8. Una vez seleccionada, esta letra se puede colocar de $\binom{5}{4}$ formas posibles.
- En la única posición "libre" podremos colocar cualquiera de las 7 letras restantes. .

Por el principio de multiplicación:

$$N_5 = 8 \cdot \binom{5}{4} \cdot 7 = 280$$

Apartado (b6):

Calculemos, por último, el número de códigos que tienen una letra repetida cinco veces:

- Simplemente hay que seleccionar la única letra que va a aparecer en el código, que puede ser cualquiera de la 8.

De este modo:

$$N_6 = 8$$

Apartado (b7):

El número de códigos que no están en los grupos anteriores es:

$$N_7 = N - \sum_{i=1}^{6} N_i == 6720$$

Pero también podemos darnos cuenta de que el número de códigos que no están en los grupos anteriores son los que no tienen letras repetidas, por tanto:

$$N_7 = V_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$$

Apartado (c):

Si el código ha de estar **formado** por cinco letras consecutivas, éstas han de ser:

- A, B, C, D, E
- B, C, D, E, F
- C, D, E, F, G
- D, E, F, G, H

Para cada una de estas 4 posibilidades hay $P_5 = 5!$ códigos posibles, así que la solución de este apartado es:

$$4 \cdot 5! = 480$$

Apartado (d):

Identifiquemos cada letra con un dígito:

$$\begin{array}{cccc} A = 0 & B = 1 & C = 2 & D = 3 \\ E = 4 & F = 5 & G = 6 & H = 7 \end{array}$$

De este modo, cada código formado por cinco letras se identificará con un número de cinco cifras en base 8.

Apartado (d):

Así, por ejemplo,

Código	Número en base 8	Número en base 10	Orden
AAAAA	00000	0	1
AAAAB	00001	1	2
AAAAC	00002	2	3
AAAAD	00003	3	4
⋮	⋮	⋮	⋮
?	?	1728	1729

Por lo que sólo tendremos que expresar 1728 en base 8.

Apartado (d):

Dado que

$$1728 = 3 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 = 0 \cdot 8^4 + 3 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0$$

entonces

$$1728 = 08800_{(8}$$

y el código que ocupa el lugar 1728 será *ADDAA*.