15. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Demuestre que un entero positivo N termina en m ceros $(m \geq 0)$ si y sólo si m es el mínimo de los exponentes de 2 y 5 en la factorización canónica de N.

b) Calcule el número de ceros en los que termina $100!$.

El apartado b) de este problema figura resuelto en la página 580 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: a) Un entero positivo N, escrito en forma decimal, termina exactamente en m ceros $(m \geq 0)$ si es divisible por 10^m y no lo es por 10^{m+1}. Como es $10^m = 2^m \cdot 5^m$ y las potencias 2^m y 5^m son números primos entre sí, podemos afirmar que N termina en m ceros si y sólo si N es divisible por 2^m y por 5^m y no lo es por 2^{m+1} o 5^{m+1}. En otras palabras, N termina en m ceros si y sólo si m es el mínimo de los exponentes de 2 y 5 en la factorización canónica de N.

b) En el caso particular de ser N un factorial, es decir, $N = n!$, si p es un primo tal que $p \leq n$, el exponente de p en la forma canónica de $n!$ es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

En la descomposición canónica de cualquier factorial $n!$, el exponente de 5 es siempre menor o igual que el de 2, pues $\left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$, para cada $k = 1,2,3,\ldots$ Por tanto, $n!$ termina en tantos ceros como indica el exponente de 5 en la forma canónica de $n!$.

El exponente de 5 en la factorización canónica de 100! es

$$\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 20 + 4 = 24$$

así es que la expresión decimal de 100! termina en 24 ceros