Problema 3. Los puntos $A(0,2m)$ y $B(0,m)$ se transforman por una semejanza en los puntos respectivos $A'(0,0)$ y$B'(m,0)$, siendo$m \neq 0$. Especifique un movimiento y una homotecia cuya composición sea la semejanza anterior y determine el centro de la semejanza, caso de que exista.

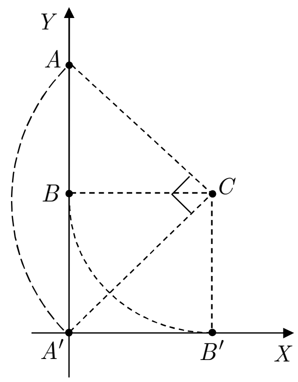
Solución:

La razón de la semejanza del enunciado es

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{|m|}{|m|} = 1,$$

así que en la factorización de dicha semejanza como composición de un movimiento y una homotecia, ésta debe tener razón $k = 1$, es decir, debe ser la identidad y la citada semejanza es un movimiento del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Todo se reduce por tanto a determinar los movimientos del plano que transforman A en A' y B en B'.

Vamos a distinguir si el movimiento es directo (giro o traslación) o inverso (simetría respecto de un eje con o sin deslizamiento).



i) Supongamos que el movimiento es directo. Se trata entonces, bien de un giro, bien de una traslación. Si fuese una traslación, el vector de dicha traslación sería $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, pero son $\overrightarrow{AA'} = (0, -2m) \neq (m, -m) = \overrightarrow{BB'}$, por lo que se trata de un giro.

El centro C del giro es equidistante de A y A', y también lo es de B y B', así que en C se cortan las mediatrices de los segmentos AA'

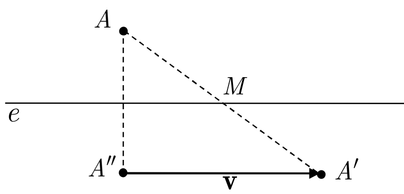
y BB'. Las mediatrices respectivas de los segmentos AA' y BB' son las rectas $y = m$ e $y = x$, cuya intersección es el punto $C(m,m)$, que es el centro del giro, y por tanto el centro de la semejanza directa. La amplitud del giro es $\frac{\pi}{2}$.

La semejanza directa del enunciado es por tanto el giro de centro el punto $C(m,m)$ y amplitud $\frac{\pi}{2}$.

ii) Si la semejanza es inversa y dado que la razón de dicha semejanza es $k = 1$, se trataría de un movimiento inverso, así es que sería, bien una simetría axial, bien la composición de una simetría con una traslación de vector paralelo al eje de la simetría (*simetría con deslizamiento*).

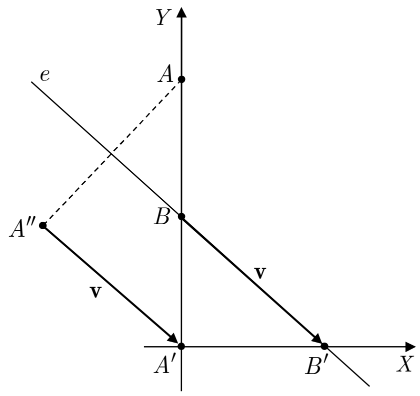
No es una simetría axial, porque si lo fuese, las mediatrices de los segmentos AA' y BB' deberían ser la misma recta y ya hemos comprobado en i) que no lo son. Se trata por tanto de una simetría con deslizamiento cuyo eje e y cuyo vector de traslación $\mathbf{v}$ nos disponemos a calcular.

El eje e de la simetría es una paralela media del triángulo rectángulo $AA'A''$, donde A'' es el simétrico del punto A respecto del eje e, así que éste pasa por el punto medio del segmento AA' y, por las mismas razones, e pasa también por el punto medio del segmento BB'.



Como dichos puntos medios son $M(0,m)$ y $N(\frac{m}{2},\frac{m}{2})$, respectivamente, el eje e es la recta que pasa por ambos, esto es, la de ecuación $x+y=m$.

Obsérvese que si P es un punto cualquiera del eje e, entonces su transformado P' por la semejanza buscada está también sobre el eje e y el vector de traslación es $v=\overrightarrow{PP'}$. Dado que $B\in e$, el vector de traslación de la simetría con deslizamiento es



$$v=\overrightarrow{BB'}=(m,-m)$$

Resulta por tanto, que la semejanza inversa que transforma los puntos A y B en los puntos respectivos A' y B' es la simetría con deslizamiento de eje la recta $e: x+y=m$ y vector de traslación $\mathbf{v}=(m,-m)$, esto es, la composición de la simetría de eje e con la traslación de vector $\mathbf{v}$. En este caso la semejanza inversa no tiene centro.