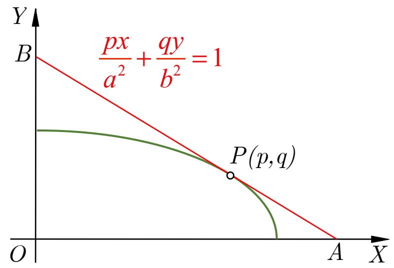
6. Dada la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

halle la ecuación de la tangente a la misma que determina sobre los semiejes positivos el segmento de longitud mínima.

Este problema es el 89.73 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.



SOLUCIÓN: La tangente a la elipse en el punto $P(p,q)$ de la misma, tiene por ecuación:

$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

Sus puntos de corte con los ejes se obtienen inmediatamente, y son $A\left(\frac{a^2}{p},0\right)$ y $B\left(0,\frac{b^2}{q}\right)$. La longitud del segmento AB es por tanto:

$$L(p,q)=\sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2+\left(\frac{b^2}{q}\right)^2}$$

La función $L(p,q)$ será mínima donde lo sea su cuadrado $L^2(p,q)=\left(\frac{a^2}{p}\right)^2+\left(\frac{b^2}{q}\right)^2$. Además, si parametrizamos ahora la elipse, es: $\begin{cases} p=a\cos t \\ q=b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$, con $t\in(0,\frac{\pi}{2})$. De esta forma, $L^2(p,q)$ se convierte en una función sólo de la variable t:

$$L^2(t)=\left(\frac{a^2}{a\cos t}\right)^2+\left(\frac{b^2}{b\cos t}\right)^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}+\frac{b^2}{\mathrm{sen}^2\, t}=a^2(1+\tan^2 t)+b^2(1+\cot^2 t)=a^2+b^2+(a^2\tan^2 t+b^2\cot^2 t)$$

y el problema de optimización a resolver es:

$$\begin{cases} \min\ a^2+b^2+(a^2\tan^2 t+b^2\cot^2 t) \\ 0<t<\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min\ a^2\tan^2 t+b^2\cot^2 t \\ 0<t<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ahora bien, como $(a^2\tan^2 t)\cdot(b^2\cot^2 t)=a^2b^2$ es constante y una suma de términos positivos de producto constante es mínima cuando dichos términos son iguales, resulta que el mínimo sólo se alcanza cuando

$$a^2\tan^2 t=b^2\cot^2 t \quad\Leftrightarrow\quad \tan^4 t=\frac{b^2}{a^2} \quad\Leftrightarrow\quad \tan^2 t=\frac{b}{a}$$

y por tanto:

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \frac{a}{a+b}, \qquad \operatorname{sen}^2 t = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{b}{a+b}$$

es decir, como es $0 < t < \frac{\pi}{2}$, resultan $\cos t = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$ y $sen t = \sqrt{\frac{b}{a+b}}$, luego la ecuación de la tangente que se busca es:

$$\frac{a\sqrt{\frac{a}{a+b}}\cdot x}{a^2} + \frac{b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\cdot y}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{a}\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \frac{y}{b}\sqrt{\frac{b}{a+b}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = \sqrt{a+b}$$