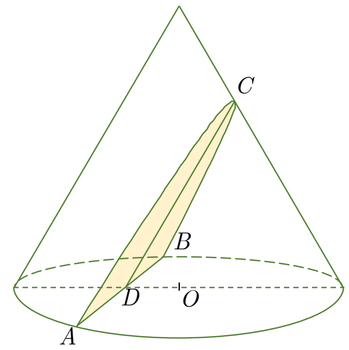
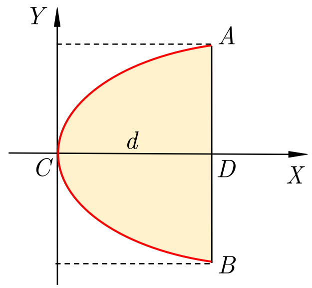
3. Un cono equilátero de lado 10 se corta por un plano paralelo a una generatriz. Se pide el área del segmento parabólico así obtenido cuando esta área es máxima.

Este problema figura resuelto en la página 462 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y aparece también en la página 429 del volumen 3.



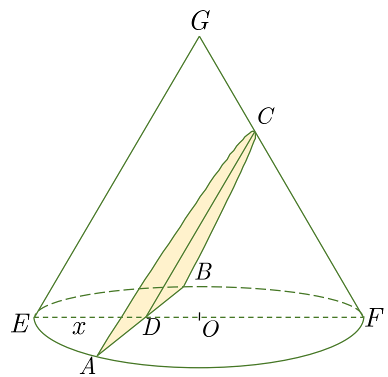
SOLUCIÓN: Se muestra a continuación un método para obtener el área de un segmento parabólico. Cualquier parábola referida a su eje (OX) y a su tangente en el vértice (OY) tiene por ecuación $y^2 = 2px$. Si llamamos $d = CD$ a la altura del segmento $CADB$, el área de este segmento de la parábola anterior se obtiene mediante la integral:



$$S = 2\int_0^d \sqrt{2px}\,dx = 2\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^d = \frac{4\sqrt{2p}}{3}d^{3/2} = \frac{4}{3}d\sqrt{2pd} = \frac{4}{3}\cdot CD\cdot AD = \frac{2}{3}\cdot CD\cdot AB$$

Se obtiene así que el área del segmento parabólico $CADB$ es $\frac{2}{3}$ del área del rectángulo cuyos lados desiguales miden CD y AB. Llamemos entonces $x = ED$, con $x \in [0,10]$. El triángulo EFG es equilátero, luego también lo es DFC, así que

$$CD = DF = 10 - x$$



Por otro lado, como el triángulo EBF es rectángulo en B, según el teorema de la altura:

$$BD^2 = ED \cdot DF = x(10-x) \quad \Rightarrow \quad BD = \sqrt{x(10-x)}$$

y por tanto

$$AB = 2\sqrt{x(10-x)}$$

Se trata por tanto de calcular el máximo de la función área $S:[0,10]\to\mathbb{R}$ dada por:

$$S(x) = \frac{2}{3}\cdot(10-x)\cdot 2\sqrt{x(10-x)} = \frac{4}{3}\sqrt{x(10-x)^3}$$

Maximizar S en el intervalo $[0,10]$ equivale a maximizar $\sqrt{x(10-x)^3}$, lo que a su vez es tanto como maximizar el producto $P(x) = x(10-x)^3$ en el intervalo de los $x\in[0,10]$. Como es $P(0) = P(10) = 0$ y $P(x) > 0$ para todo $x\in(0,10)$, de existir un único punto de derivada nula en $(0,10)$, será un máximo. Derivando:

$$P'(x) = (10-x)^3 - 3x(10-x)^2 = (10-x)^2(10-4x)$$

y la derivada en $(0,10)$ sólo se anula para $x = \dfrac{5}{2}$, por lo que P alcanza máximo absoluto en $x = \dfrac{5}{2}$. El área máxima de la sección producida es:

$$S\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{2}\left(\frac{15}{2}\right)^{3}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{15}{2}\sqrt{\frac{75}{4}}=10\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}$$