P1. Problema 13.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Encontrar el número de permutaciones de n objetos que no dejan ninguno en su lugar inicial.

Planteamiento:

Sea N =*Número de permutaciones de orden n*.

Obviamente,

$$N = n!$$

En este caso, tenemos que eliminar las permutaciones que dejen fijo algún elemento.

Planteamiento:

Definimos

$P_i =$ "*la permutación deja fijo al elemento i*"; para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Entonces:

- $N(P_i) =$ *Nº de permutaciones que dejan fijo al elemento* i.
- $N(P_i, P_j) =$ *Nº de permutaciones que dejan fijo los elementos* i *y* j.
- $\cdots$.
- $N(P_1, P_2, \ldots, P_n) =$ *Nº de permutaciones que dejan fijos todos los elementos.*
- $N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n) =$ *Nº de permutaciones que no dejan fijo ningún elemento.*

Fórmula de inclusión-exclusión:

Por el principio de inclusión-exclusión:

$$N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(P_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(P_i, P_j)$$

$$- \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(P_i, P_j, P_k) - \cdots + (-1)^n N(P_1, P_2, ...P_n).$$

Aplicación de la fórmula de inclusión-exclusión:

- $N(P_i)$ es el número de permutaciones en las que el elemento i queda fijo, por lo que tenemos que permutar los restantes $n-1$ elementos. Por tanto

$$N(P_i) = (n-1)!$$

- $N(P_i, P_j)$ es el número de permutaciones en las que los elementos i y j quedan fijos. Por lo que

$$N(P_i, P_j) = (n-2)!$$

- En general,

$$N\left(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}\right) = (n-k)!$$

Solución:

Aplicando entonces fórmula de inclusión-exclusión:

$$N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n) = n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^n 0!$$

$$= n!\frac{1}{0!} - n!\frac{1}{1!} + n!\frac{1}{2!} - n!\frac{1}{3!} + \cdots (-1)^n n!\frac{1}{n!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$