3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < b < 1$. Eligiendo $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, se construye la sucesión (x_n) dada por:

$$x_n = a + b \operatorname{sen} x_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Demuestre que la sucesión (x_n) es convergente.

Este problema es el 00.45 y el 04.40 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Demostrar que la sucesión (x_n) es convergente es equivalente a demostrar que se trata de una sucesión de Cauchy, es decir, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|x_{n+p} - x_n\right| = 0$, para cualquier $p \in \mathbb{N}^+$.

Para probar que (x_n) es de Cauchy, antes de acotar la distancia $\left|x_{n+p} - x_n\right|$ entre dos términos cualesquiera, acotaremos la distancia entre dos que sean consecutivos. Se tiene:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|a + b \operatorname{sen} x_n - a - b \operatorname{sen} x_{n-1}\right| = b\left|\operatorname{sen} x_n - \operatorname{sen} x_{n-1}\right|$$

Dado que $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A+B}{2} \operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$, se deduce que

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|=b\left|\operatorname{sen} x_n-\operatorname{sen} x_{n-1}\right|=2b\left|\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right|\leq 2b\frac{\left|x_n-x_{n-1}\right|}{2}=b\left|x_n-x_{n-1}\right|$$

es decir,

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|\leq b\left|x_n-x_{n-1}\right|$$

Repitiendo el razonamiento en el intervalo de extremos x_{n-1} y x_{n-2}, después en el de extremos x_{n-2} y x_{n-3}, y así sucesivamente hasta llegar al intervalo determinado por x_0 y x_1, resulta:

$$|x_{n+1}-x_n|\leq b|x_n-x_{n-1}|\leq b^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leq\ldots\leq b^n|x_1-x_0|$$

Luego, para todo natural n se cumple:

$$|x_{n+1}-x_n|\leq b^n|x_1-x_0|$$

Aplicando esta desigualdad reiteradamente podemos acotar la distancia entre dos términos cualesquiera de la sucesión:

$$|x_{n+p}-x_n|=|x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}-x_{n+p-2}+x_{n+p-2}-\ldots-x_{n+1}+x_{n+1}-x_n|\leq$$

$$\leq \left|x_{n+p} - x_{n+p-1}\right| + \left|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\right| + \ldots + \left|x_{n+1} - x_n\right| \leq b^{n+p-1}\left|x_1 - x_0\right| + b^{n+p-2}\left|x_1 - x_0\right| + \ldots + b^n\left|x_1 - x_0\right| =$$

$$= (b^{n+p-1} + b^{n+p-2} + \ldots + b^n)\left|x_1 - x_0\right| = b^n\,\frac{1-b^p}{1-b}\left|x_1 - x_0\right| < \frac{b^n}{1-b}\left|x_1 - x_0\right|$$

pues es $0 < b < 1$. Así pues, para cualesquiera números naturales n y p,

$$0 \leq \left|x_{n+p} - x_n\right| < \frac{b^n}{1-b}\left|x_1 - x_0\right|$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{1-b} = 0$, de la desigualdad anterior se desprende que

$$\lim_{n\to\infty} \left|x_{n+p} - x_n\right| = 0$$

sea cual sea el número natural p, es decir, que (x_n) es una sucesión de Cauchy.