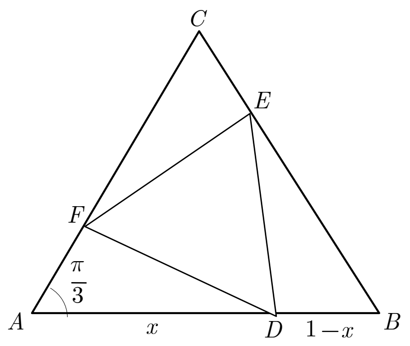
13. Sea ABC un triángulo equilátero de lado 1. Partiendo de los vértices, y en un mismo sentido, se sitúa un segmento de longitud x sobre cada uno de los lados, obteniendo tres puntos D, E y F, que determinan un nuevo triángulo.

a) Halle el valor de x para que el área del triángulo DEF sea $\frac{3}{4}$ del área del triángulo ABC.

b) Si los triángulos diferencia entre ABC y DEF fuesen rectángulos, ¿qué valor tendría x y cuál sería el área del triángulo DEF ?

SOLUCIÓN: Supongamos, como en la figura, que D, E y F están situados, respectivamente, sobre los lados AB, BC y CA, y por tanto



$$AD = BE = CF = x$$

Por ser equilátero el triángulo ABC, las áreas de los triángulos ADF, DBE y ECF coinciden.

Llamando Δ a su valor común, y S y T a las áreas de DEF y ABC, se tiene la igualdad $S = T - 3\Delta$.

a) En este apartado la hipótesis dice que $4S=3T$, por lo que de la igualdad anterior se desprende que

$$\Delta=\frac{T-S}{3}=\frac{1}{3}\left(T-\frac{3T}{4}\right)=\frac{T}{12}$$

Calculemos por separado ambas áreas:

$$T=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot sen\,\frac{\pi}{3}T=\frac{1}{2}AB\cdot AC\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3},\qquad \Delta=\frac{1}{2}AD\cdot AF\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}x(1-x)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}$$

por lo que al dividir se tiene la ecuación

$$\frac{1}{12}=\frac{\Delta}{T}=x(1-x),\qquad \text{esto es,}\qquad 12x^2-12x+1=0$$

Sus soluciones $x=\frac{3+\sqrt{6}}{6}$ y $x=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$ son los valores buscados.

b) Estudiamos en primer lugar cuál es el ángulo recto de los triángulos ADF, DBE y ECF. Necesariamente será $\measuredangle AFD=\frac{\pi}{2}$ o $\measuredangle DEB=\frac{\pi}{2}$, pues en caso contrario serían rectos los ángulos $\measuredangle FDA$ y $\measuredangle BDE$, lo que implica que las rectas DF y DE serían perpendiculares al lado AB. Como comparten el punto D serían la misma, esto es, los puntos D, E y F estarían alineados, y no serían los vértices de un triángulo. Así, si el ángulo recto es $\measuredangle AFD$, en el triángulo rectángulo AFD se tiene

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{AF}{AD}=\frac{1-x}{x},\qquad \text{esto es,}\qquad x=\frac{2}{3}$$

Para calcular en este caso el valor S del área de DEF recordemos que ya hemos probado, además de la igualdad inicial $S=T-3\Delta$, las siguientes

$$T=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\quad;\quad \Delta=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AF\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}x(1-x)\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{9}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

Sustituyendo estos valores resulta que

$$S=T-3\Delta=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

Si el ángulo recto fuese $\measuredangle DEB$ y razonando de modo análogo, se obtiene $x=\frac{1}{3}$, y evidentemente el valor S del área del triángulo DEF es el mismo que en el caso anterior.