P1. Problema 9.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Probar que para todo $n, k \in \mathbb{N}$, con $k < n$, se verifica:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

Resuelto en Vol. 3 Ej. 89.75

Para k=1:

Vamos a demostrarlo por inducción sobre k. Observemos que para $k = 1$ la igualdad es cierta:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 1 - n = (-1)^1 \binom{n-1}{1}$$

Hipótesis inductiva:

Supongamos que la igualdad es cierta para $k \geq 1$. Veamos que ocurre para $k+1$:

$$\underbrace{\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdot + (-1)^k \binom{n}{k}}_{(-1)^k \binom{n-1}{k}} + (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1}$$

$$= (-1)^k \binom{n-1}{k} + (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1}$$

$$= (-1)^{k+1} \left[\binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k} \right]$$

Hipótesis inductiva:

Recordemos la fórmula de Pascal:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}=\binom{n}{k+1}$$

Por lo que:

$$\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}=\binom{n-1}{k+1}$$

Conclusión:

De este modo, podemos concluir que:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} + (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1}$$

$$= (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k+1}$$

Por lo que la igualdad también se verifica para $k+1$. Esto demuestra por inducción que es válida para cualquier valor de $k \in \mathbb{N}$.