P2. Problema 14.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Un juego de dados tiene las siguientes reglas:

- Se tiran dos dados equilibrados, numerados del 1 al 6, hasta que sumen 4 o 7.
- Si suman 4 gana el tirador, mientras que pierde si la suma es 7.

Determine la probabilidad de ganar en dicho juego.

Resuelto en Vol. 9. Ej 18.110

Definamos:

- S_4 =*se obtiene una suma igual a 4 al lanzar dos dados*
- S_7 =*se obtiene una suma igual a 7 al lanzar dos dados*
- T =*se obtiene una suma distinta de 4 y de 7 al lanzar dos dados*

Es inmediato comprobar que $p(S_4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ y $p(S_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, por lo que $p(T) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Solución:

Sea $G_n =$*El jugador gana el juego en la n-ésima tirada*.

- $p(G_1) = p(S_4) = \dfrac{1}{12}$
- $p(G_2) = p(T \cap S_4) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{16}$
- $p(G_3) = p(T \cap T \cap S_4) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{3}{64}$

La probabilidad de ganar el juego en la n-ésima tirada será:

$$p(G_n) = p\left(\overbrace{T \cap T \cap \cdots \cap T}^{n-1 \text{ veces}} \cap S_4\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{12} \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Solución:

Si G representa el suceso, *el jugador gana el juego*, entonces, dado que los sucesos G_n son incompatibles, se tiene que:

$$p(G) = p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(G_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{12} = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Solución alternativa:

La probabilidad de ganar el juego en la primera tirada sabemos que es $p(G_1) = \frac{1}{12}$, además, la probabilidad que tiene de ganar el juego este jugador si en la primera tirada no ha ganado nadie (suceso que denotaremos por T_1) será la misma que al comenzar el juego, por lo que:

$$p(G) = p(G_1) + p(T_1)\, p(G \mid T_1) = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} p(G)$$

De este modo, concluimos que

$$p(G) - \frac{3}{4} p(G) = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad p(G) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$