N1. Números enteros. Divisibilidad. Congruencias

1. Demuestre que la suma de n números naturales consecutivos es múltiplo de n si y sólo si n es impar.

Este problema es el 94.29 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

2. Demuestre que si n un número entero distinto de -2, el cociente

$$\frac{n^5-5n^3+4n}{n+2}$$

es un número entero divisible por 24.

Este problema figura resuelto en la página 407 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

3. Resuelva las siguientes cuestiones de divisibilidad:

a) En el Parlamento español hay 350 diputados y para la aprobación de una ley es necesario un quorum de los 2/3. En la sesión en la que se aprobaron los Presupuestos Generales del Estado, una periodista observó que únicamente el $11,\widehat{1}\,\%$ de los presentes eran mujeres y que el $45,\widehat{45}\,\%$ eran mayores de 48 años. Se pide el número de diputados ausentes en la reunión.

b) Halle el número natural $N = 2^a \cdot 5^b$, si la suma de sus divisores es 961.

El apartado a) de este problema figura resuelto en la página 293 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos, mientras que el apartado b) es el mismo apartado del problema 89.96 del volumen 3.

4. Encuentre el menor número natural N tal que $\dfrac{N}{2}$ sea cuadrado perfecto, $\dfrac{N}{3}$ sea cubo perfecto, y $\dfrac{N}{5}$ sea una potencia quinta perfecta.

Este problema es el 03.1 del volumen 4 de Problemas de oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

5. Halle un número natural con 15 divisores, tal que la suma de todos estos divisores sea igual a 1767.

Este problema figura resuelto en la página 482 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

6. Halle dos números naturales sabiendo que su mínimo común múltiplo es 1260 y que la suma de sus cuadrados es 39456.

Este problema es el 04.52 del volumen 4 de Problemas de oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

7. Demuestre que el número natural $3^{2n+3}+40n-27$ es divisible por 64, sea cual sea el número natural n.

Este problema figura resuelto en la página 315 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

8. a) Estudie, según los diferentes $n\in\mathbb{N}$, el resto de la división euclídea de 7^n por 9.

b) ¿Cuál es el resto de la división de 35368^{713} por 9?

c) ¿Para qué valores de $n\in\mathbb{N}$, el número $B_n=16^{3n}+16^n-2$ es divisible por 9?

Este problema es el 86.60 del volumen 2 de Problemas de oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

9. Demuestre que la diferencia $(27^4)^9-(25^3)^6$ es múltiplo de 37.

Este problema es el 06.19 del volumen 5 de Problemas de oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

10. Demuestre que si $a \in \mathbb{Z}$ es primo relativo con 5 y n es un entero no negativo, el número $a^{8n}+3a^{4n}-4$ es múltiplo de 100.

Este problema figura resuelto en la página 10 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

11. Demuestre que para todo número entero a, el número a^9-a^3 es divisible por 504.

Este problema es el 7.62 del volumen 2 de Problemas de Álgebra, de G. Pérez-Canales y otros.

12. Demuestre que 437 es divisor de $16^{99}-1$ y de $18!+1$.

Este problema figura resuelto en la página 50 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

13. Sea p un número primo impar. Encuentre los valores de p que hacen que $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ sea un cuadrado perfecto.

Este problema es el 04.49 del volumen 4 de Problemas de oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

14. Un número natural se dice *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores positivos, salvo él mismo.

Demuestre que:

a) Un número natural par es perfecto si y sólo si es de la forma $2^{p-1}\cdot(2^p-1)$, con $p>1$ y donde 2^p-1 es primo.

b) La suma de los inversos de los divisores de un número perfecto par es 2.

c) Si 2^p-1 es primo, entonces p es primo.

d) Todo número perfecto par termina en 6 o en 8.

Este problema es el 18.16 del volumen 9 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y también figura resuelto en la página 347 del volumen 1 de la misma colección.

15. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Demuestre que un entero positivo N termina en m ceros $(m\geq 0)$ si y sólo si m es el mínimo de los exponentes de 2 y 5 en la factorización canónica de N.

b) Calcule el número de ceros en los que termina $100!$.

El apartado b) de este problema figura resuelto en la página 580 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.