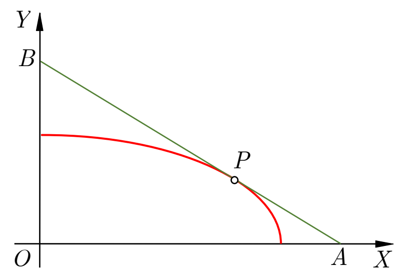
1. Dada la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

¿cuál es el triángulo rectángulo de área mínima que tiene sus catetos sobre los ejes OX y OY y la hipotenusa tangente a la elipse?

Este problema es el 00.40 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

SOLUCIÓN: Dada la simetría de la elipse respecto de ambos ejes coordenados, podemos limitarnos a calcular el triángulo rectángulo de área mínima situado en el primer cuadrante.



Sea $P(p,q)$ el punto de tangencia de la elipse con la hipotenusa del triángulo rectángulo OAB. Si la recta tangente en P determina un triángulo con los ejes, P no puede estar sobre ninguno de dichos ejes, luego obligatoriamente es $p>0$ y $q>0$.

La tangente a la elipse en P se puede calcular de la siguiente forma. Es $y=f(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{bx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$ y así, la ecuación de la tangente es:

$$y-q=f'(p)\cdot(x-p)=-\frac{bp}{a^2\sqrt{1-\frac{q^2}{a^2}}}\cdot(x-p)$$

y como P es un punto de la elipse es $\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{q^2}{b^2}=1-\frac{p^2}{a^2}\Rightarrow\frac{q}{b}=\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}$ y sustituyendo en la expresión anterior:

$$y-q=-\frac{bp}{a^2\frac{q}{b}}\cdot(x-p)=-\frac{b^2p}{a^2q}\cdot(x-p)\Rightarrow a^2qy-a^2q^2=-b^2px+b^2p^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2px+a^2qy=a^2q^2+b^2p^2\underset{a^2q^2+b^2p^2=a^2b^2}{\Rightarrow}b^2px+a^2qy=a^2b^2\Rightarrow\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

Sus puntos de corte con los ejes se obtienen inmediatamente, y son $A\left(\frac{a^2}{p},0\right)$ y $B\left(0,\frac{b^2}{q}\right)$. El área del triángulo OAB es por tanto:

$$S=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\frac{a^2}{p}\frac{b^2}{q}=\frac{a^2b^2}{2pq}$$

El problema a resolver es entonces:

$$\begin{cases} \min \ \frac{a^2b^2}{2pq} \\ \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1 \\ p,q>0 \end{cases} \overset{a^2,b^2>0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \min \ \frac{1}{pq} \\ \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1 \\ p,q>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \max \ pq \\ \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1 \\ p,q>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \max \ p^2q^2 \\ \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1 \\ p,q>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \max \ \frac{p^2}{a^2}\frac{q^2}{b^2} \\ \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1 \\ p,q>0 \end{cases}$$

Debemos entonces maximizar el producto

$$\frac{p^2q^2}{a^2b^2}=\left(\frac{p}{a}\right)^2\left(\frac{q}{b}\right)^2$$

en el que, además de ser $p,q>0$, es $\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$. Dado que *un producto de factores positivos de suma constante alcanza su valor máximo cuando los factores son iguales*, concluimos que eso ocurre sólo cuando es

$$\left(\frac{p}{a}\right)^2=\left(\frac{q}{b}\right)^2$$

Llevando la igualdad anterior a $\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$, obtenemos:

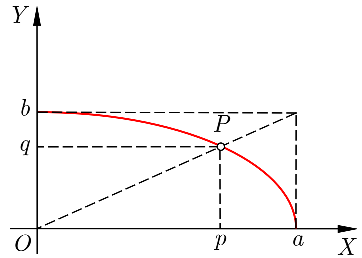
$$2\left(\frac{p}{a}\right)^2=1 \quad\Rightarrow\quad p^2=\frac{a^2}{2} \quad\Rightarrow\quad p=\frac{a}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad q=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

con lo que el punto de tangencia tiene por coordenadas $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ y los puntos de corte de la tangente con los ejes son $A=\left(\frac{a^2}{p},0\right)=\left(a\sqrt{2},0\right)$ y $B=\left(0,\frac{b^2}{q}\right)=\left(0,b\sqrt{2}\right)$. Es decir, el triángulo rectángulo de área mínima es aquél cuyos catetos miden $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$ y dicha área mínima vale

$$S=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot b\sqrt{2}=ab$$

OBSERVACIONES

- El área mínima se obtiene, dado que a, b, p y q son positivos, cuando $\frac{p}{a}=\frac{q}{b}$, lo que viene a decir que el punto de tangencia que propicia el área mínima es el punto de corte con la elipse de la diagonal del rectángulo circunscrito a la elipse.



TEORÍA

Teorema: Un producto de factores positivos de suma constante es máximo cuando (y sólo cuando) todos los factores son iguales.

Teorema: Una suma de números reales positivos cuyo producto es constante es mínima cuando (y sólo cuando) todos los números son iguales.

Teorema: Sean D un conjunto de $\mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ y $h: f(D) \to \mathbb{R}$ dos funciones reales. Entonces:
i) <u>Si h es estrictamente creciente</u>, la función f alcanza máximo absoluto (resp. mínimo absoluto) en $x_0 \in D$ si y sólo si h∘f alcanza máximo absoluto (resp. mínimo absoluto) en dicho punto x_0.
ii) <u>Si h es estrictamente decreciente</u>, f alcanza máximo absoluto (resp. mínimo absoluto) en $x_0 \in D$ si y sólo si h∘f alcanza mínimo absoluto (resp. máximo absoluto) en dicho punto x_0.
Ejemplos:
1) Por i) si $\operatorname{Im} f \subset (0,+\infty)$, $h(x) = x^2$ es estrictamente creciente y $(h \circ f)(x) = f^2(x)$ alcanza sus extremos en los mismos puntos que f y el mismo tipo de extremo.
2) Por ii) como $h(x) = \dfrac{1}{x}$ es estrictamente decreciente en todo $\mathbb{R}$, $(h \circ f)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ alcanza sus extremos en los mismos puntos que f, pero donde f alcanza un máximo, h∘f alcanza un mínimo y viceversa.