4. Demuestre que la serie siguiente es convergente y calcule su suma

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{L}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

es convergente y calcule su suma.

Este problema es el IV.66 de Problemas de Cálculo Infinitesimal, de E. Tebar.

SOLUCIÓN: Obsérvese que, por ser $\frac{1}{n^2} \to 0$, entonces es $\mathrm{L}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$, y como la serie armónica de orden 2 es convergente, nuestra serie también lo es. El término general de la serie puede escribirse en la forma:

$$x_n = \mathrm{L}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{L}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \mathrm{L}\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) = \mathrm{L}\,(n+1) - 2\,\mathrm{L}\,n + \mathrm{L}\,(n-1)$$

Reescribiendo este igualdad para los valores $n, n-1, \ldots, 2$, se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{rll} x_n & = \mathrm{L}\,(n+1) - 2\,\mathrm{L}\,n & + \mathrm{L}\,(n-1) \\ x_{n-1} & = \mathrm{L}\,(n) \qquad - 2\,\mathrm{L}\,(n-1) & + \mathrm{L}\,(n-2) \\ x_{n-2} & = \mathrm{L}\,(n-1) - 2\,\mathrm{L}\,(n-2) & + \mathrm{L}\,(n-3) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_4 & = \mathrm{L}\,5 \qquad - 2\,\mathrm{L}\,4 & + \mathrm{L}\,3 \\ x_3 & = \mathrm{L}\,4 \qquad - 2\,\mathrm{L}\,3 & + \mathrm{L}\,2 \\ x_2 & = \mathrm{L}\,3 \qquad - 2\,\mathrm{L}\,2 & + \mathrm{L}\,1 \end{array}\right.$$

Al sumar todas las igualdades miembro a miembro, se obtiene:

$$s_n = \mathrm{L}\,(n+1) - 2\,\mathrm{L}\,n + \mathrm{L}\,n + \mathrm{L}\,2 - 2\,\mathrm{L}\,2 + \mathrm{L}\,1 = \mathrm{L}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \mathrm{L}\,2$$

así que la suma de la serie es

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{L}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \mathrm{L}\,2\right] = -\,\mathrm{L}\,2$$