C3

Sucesiones convergentes. Cálculo de límites

1. Sucesiones monótonas. Sucesiones acotadas

1.1. Sucesiones monótonas: Se dice que una sucesión de números reales (x_n) es *monótona creciente* (*decreciente*) si es $x_{n+1} \geq x_n$ (resp. $x_{n+1} \leq x_n$) para cada $n \in \mathbb{N}$. Cambiando la desigualdad laxa por la estricta se tiene la definición de sucesión *monótona estrictamente creciente* (*estrictamente decreciente*).

1.2. Ejemplo: Estudie la monotonía de la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \frac{\sqrt{(n-1)\,!}}{(1+\sqrt{1})\,(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$$

SOLUCIÓN: Para cada $n \geq 1$ es

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{n\,!}}{(1+\sqrt{1})\,(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})\,(1+\sqrt{n+1})} - \frac{\sqrt{(n-1)\,!}}{(1+\sqrt{1})\,(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})} =$$

$$= \frac{\sqrt{n\,!} - (1+\sqrt{n+1})\sqrt{(n-1)\,!}}{(1+\sqrt{1})\,(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})\,(1+\sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{(n-1)\,!}\cdot(\sqrt{n} - 1 - \sqrt{n+1})}{(1+\sqrt{1})\,(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})\,(1+\sqrt{n+1})}$$

Dado que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, es $\sqrt{n} < 1 + \sqrt{n+1}$, resulta que $a_{n+1} - a_n < 0$, es decir, $a_{n+1} < a_n$, por lo que (a_n) es estrictamente decreciente ■

El siguiente resultado útil viene a decir que en las sucesiones que atienden a una recurrencia simple del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$, la hipotética monotonía de la función f se transmite a la sucesión (x_n) en la forma que se recoge a continuación.

1.3. Monotonía de la sucesión recurrente $x_{n+1} = f(x_n)$: *Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función real. Sea $(x_n) \subset I$ una sucesión de números reales que responde a la recurrencia*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

i) Si f es estrictamente creciente en I y, además,

- $x_2 > x_1$, *la sucesión (x_n) es estrictamente creciente.*
- $x_2 < x_1$, *la sucesión (x_n) es estrictamente decreciente.*
- $x_2 = x_1$, *la sucesión (x_n) es constante.*

ii) Si f es estrictamente decreciente en I:

- *La subsucesión (x_{2n-1}) de los términos de lugar impar de (x_n) es estrictamente creciente si $x_3 > x_1$, estrictamente decreciente si $x_3 < x_1$, y constante si $x_3 = x_1$.*
- *La subsucesión (x_{2n}) de los términos de lugar par de (x_n) es estrictamente creciente si $x_4 > x_2$, estrictamente decreciente si $x_4 < x_2$, y constante si $x_4 = x_2$.*

1.4. Ejemplo: Estudie la monotonía de la sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ definida recurrentemente a partir de $x_1 = 1$ mediante

$$x_{n+1} = \frac{x_n(1 + x_n)}{1 + 2x_n}, \qquad \text{para } n \geq 1$$

SOLUCIÓN: La función asociada a la recurrencia es $x \mapsto f(x) = \frac{x(1+x)}{1+2x}$ y como para cada $x \neq -\frac{1}{2}$ es

$$f'(x) = \frac{1+2x+2x^2}{(1+2x)^2} = \frac{(1+x)^2+x^2}{(1+2x)^2} > 0\,,$$

la función f es estrictamente creciente tanto en el intervalo $(-\infty,-\frac{1}{2})$ como en el intervalo $(-\frac{1}{2},+\infty)$. Se comprueba inmediatamente por inducción que los términos de la sucesión son todos positivos y que, por tanto, (x_n) está contenida en el intervalo $(-\frac{1}{2},+\infty)$, en el que f es estrictamente creciente. Dado que los dos primeros términos de la sucesión son $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{2}{3}$, por ser $x_2 < x_1$, en virtud de 1.3, la sucesión (x_n) es estrictamente decreciente.

1.5. Ejemplo: Estudie la monotonía de la sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $x_1 = 1$ y

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

SOLUCIÓN: La función asociada a la recurrencia es la definida en cualquier $x \neq 0$ por $x \mapsto f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Su derivada en x es $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, así que f es estrictamente decreciente tanto en el intervalo $(-\infty,0)$ como en $(0,+\infty)$. Es cosa trivial probar por inducción que $x_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así es que del apartado ii) de la proposición 1.3 se deduce, por ser $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = \frac{5}{3}$ y, por tanto, $x_3 > x_1$ y $x_4 < x_2$, que la subsucesión (x_{2n-1}) es estrictamente creciente y que la subsucesión (x_{2n}) es estrictamente decreciente. Esto supone, evidentemente, que (x_n) no es monótona.

1.6. Sucesiones acotadas: La sucesión de números reales (x_n) está *acotada superiormente* (*inferiormente*) si existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que $x_n < k$ $(x_n > k)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. La sucesión (x_n) se dice *acotada* si lo está superior e inferiormente, es decir, si existe $k > 0$ tal que $|x_n| < k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.7. Ejemplo: Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$, la sucesión (x_n) definida recurrentemente a partir de $x_1 = a$ mediante

$$x_n = a + \frac{2b\,x_{n-1}}{1 + x_{n-1}^2} \qquad (n \geq 2)$$

es acotada.

SOLUCIÓN: Dado que para cualquier número real t es $(t \pm 1)^2 \geq 0$, es decir, $t^2 \pm 2t + 1 \geq 0$, o bien, $\pm 2t \leq t^2 + 1$, y por tanto $\left|\frac{2t}{t^2+1}\right| \leq 1$, deducimos que si $n \geq 2$:

$$|x_n| = \left|a + b\,\frac{2x_{n-1}}{1 + x_{n-1}^2}\right| \leq |a| + |b|\left|\frac{2x_{n-1}}{1 + x_{n-1}^2}\right| \leq |a| + |b|$$

y como también es $|x_1| = |a| \leq |a| + |b|$, resulta que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $|x_n| \leq |a| + |b|$, luego (x_n) es acotada.

2. Sucesiones convergentes y sucesiones divergentes

2.1. Sucesiones convergentes: *Se dice que una sucesión (x_n) de números reales tiene límite $\ell \in \mathbb{R}$, o que converge hacia ℓ, y se escribe $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, $\lim x_n = \ell$ o $x_n \to \ell$, si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes (que son equivalentes entre sí):*

i) Para todo número real $\varepsilon > 0$ se cumple que $|x_n - \ell| < \varepsilon$ a partir de cierto término, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq \nu$.

ii) Fuera de cualquier entorno de ℓ hay, a lo sumo, un número finito de términos de la sucesión (x_n).

2.2. Propiedades: *Sea (x_n) una sucesión de números reales. Entonces:*

1. *Si (x_n) es convergente, (x_n) tiene un solo límite.*
2. *Si (x_n) es convergente, (x_n) está acotada.*
3. *Si (x_n) converge hacia $\ell \in \mathbb{R}$, toda subsucesión de (x_n) converge también hacia ℓ.*

Recuérdese que una *subsucesión* de una sucesión (x_n) de números reales es cualquier sucesión formada por infinitos términos de (x_n), sin alterar el orden relativo entre ellos. Si $n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$ son los lugares que ocupan los términos elegidos, la subsucesión será $(x_{n_i}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_i}, \ldots)$.

La siguiente propiedad de completitud equivale al axioma del supremo en la definición de $\mathbb{R}$ y distingue la estructura de los números reales de la de los números racionales.

2.3. Propiedad de completitud: *Si (x_n) es una sucesión real creciente y acotada superiormente, entonces (x_n) es convergente. De la misma forma, si (x_n) es una sucesión real decreciente y acotada inferiormente, entonces (x_n) es convergente.*

2.4. Ejemplo: Estudie la convergencia de la sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ definida recurrentemente a partir de $x_1 = 1$ mediante

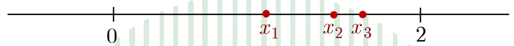
$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$$

SOLUCIÓN: Acudimos a la función asociada a la recurrencia, que es $x \mapsto f(x) = \sqrt{2x}$. La función f es continua en el intervalo $[0, +\infty)$ y derivable en cada $x > 0$, siendo $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} > 0$, por lo que f es estrictamente creciente en el intervalo $[0, +\infty)$, intervalo que contiene a la sucesión (x_n), como puede probarse fácilmente por inducción. Por tanto, como $x_2 = \sqrt{2} > 1 = x_1$, del teorema 1.3 se deduce que (x_n) es estrictamente creciente.

Si la sucesión (x_n) fuese convergente y $\ell \in \mathbb{R}$ fuese su límite, al tomar límites en la recurrencia anterior se obtendría

$$\ell = \sqrt{2\ell} \quad \Rightarrow \quad \ell^2 = 2\ell \quad \Rightarrow \quad \ell\,(\ell - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell = 0 \ \text{ o } \ \ell = 2$$

pero no puede ser $\ell = 0$ porque $x_1 = 1$ y (x_n) es creciente, por lo que deberá ser, en caso de convergencia, $\ell = 2$. En tal caso, este valor sería cota superior de (x_n), por ser ésta una sucesión creciente.



Comprobamos que, efectivamente, $x_n < 2$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es $x_1 = 1 < 2$ y si se supone $x_n < 2$ para algún $n \geq 1$, entonces $x_{n+1} = f\,(x_n) < f\,(2) = 2$ por ser f estrictamente creciente. La sucesión (x_n) es por tanto monótona creciente y acotada superiormente, luego es convergente y su límite es $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

2.5. Ejemplo: Sea (f_n) la sucesión de Fibonacci cuyos primer y segundo término son la unidad y cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Este problema es parte del 06.96 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: La sucesión de Fibonacci es la definida a partir de $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$ mediante la recurrencia lineal

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,,$$

para $n \geq 3$ y su término general es

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Haciendo uso de la expresión anterior del término general de (f_n), se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

Este límite se simplifica al dividir numerador y denominador por $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, pues como es $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$, resulta que $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \to 0$ y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot 0}{1-0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

2.6. El número $\boldsymbol{e}$: *La sucesión cuyo término n-ésimo es* $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *es estrictamente creciente y acotada, luego tiene límite real. Dicho límite es el número irracional*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$$

que es también

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

A las sucesiones cuyo término n-ésimo puede hacerse tan grande como se quiera (en valor absoluto) con tal de tomar un valor para n suficientemente grande, se las llamará divergentes o también "infinitos". Precisamos:

2.7. Sucesiones divergentes: *Se dice que una sucesión real* (x_n) *tiene límite* $+\infty$ *(se escribe* $\lim x_n = +\infty$ *) si dado cualquier número real* $k > 0$ *, ocurre que* $x_n > k$ *a partir de cierto término. Se dirá que* (x_n) *tiene límite* $-\infty$ *(escrito* $\lim x_n = -\infty$ *) si para todo número real* $k > 0$ *sucede que* $x_n < -k$ *a partir de cierto término. En cualquiera de ambos casos se dirá que* (x_n) *es una sucesión divergente.*

2.8. Propiedad: *Si* (x_n) *es una sucesión creciente y no acotada superiormente, entonces* (x_n) *tiene límite* $+\infty$ *. Análogamente, si* (x_n) *es una sucesión decreciente y no acotada inferiormente, entonces* (x_n) *tiene límite* $-\infty$ *.*

Las propiedades 2.3. y 2.8. prueban que *cualquier sucesión monótona de números reales tiene límite (finito o infinito)*. En efecto, si la sucesión es creciente y acotada superiormente tendrá limite real; si es creciente pero no acotada superiormente, tendrá limite $+\infty$. Razónese "simétricamente respecto al origen" para sucesiones decrecientes.

2.9. Ejemplo: Estudie la convergencia de la sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ definida recurrentemente a partir de $x_1 = a \geq 0$ mediante

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{2}$$

SOLUCIÓN: Obsérvese antes de nada que si la sucesión (x_n) fuese convergente hacia un límite $\ell \in \mathbb{R}$, al tomar límites en la recurrencia se tendría

$$\ell = \frac{1 + \ell^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\ell - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 1$$

Por tanto, en caso de convergencia, el único número real que puede ser límite de (x_n) es 1. Para decidir en qué casos lo es, consideramos la función asociada a la recurrencia, que es

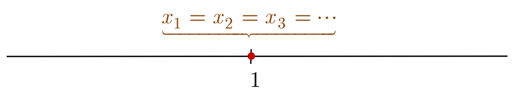
$$x \mapsto f(x) = \frac{1+x^2}{2}$$

y cuya derivada es $f'(x) = x$. La función f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$, y la sucesión (x_n) está contenida en el intervalo $[0, +\infty)$ -donde f es creciente- pues $x_1 = a \geq 0$ y $x_n \geq \frac{1}{2}$ para cada $n \geq 2$.

Dado que los dos primeros términos de la sucesión son $x_1 = a$ y $x_2 = \frac{1+a^2}{2}$ y que, por tanto $x_2 - x_1 = \frac{1}{2}(a-1)^2$, en virtud de 1.3. distinguimos como sigue:

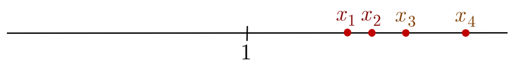
- Si $0 \leq a < 1$, entonces $x_2 > x_1$ y por tanto (x_n) es estrictamente creciente. Si (x_n) fuese acotada superiormente, sería convergente hacia $\ell = 1$, que sería cota superior de la sucesión por ser (x_n) estrictamente creciente. Comprobamos por inducción que efectivamente (x_n) está acotada superiormente por 1. Para $n = 1$ hay poco que hacer pues $x_1 = a < 1$, y si se supone $x_n < 1$ para cierto $n \geq 1$, entonces será $x_{n+1} = f(x_n) < f(1) = 1$ por ser f estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. Por tanto, (x_n) es estrictamente creciente y acotada superiormente, así que (x_n) es convergente y su límite es $l = 1$.

- Si $a = 1$, entonces $x_1 = x_2$ y (x_n) es la sucesión constante $x_n = 1$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$



- Si $a > 1$, entonces es $x_2 > x_1$ y (x_n) es estrictamente creciente. Si la sucesión fuese acotada superiormente, sería convergente hacia $\ell = 1$, pero esto es imposible porque $x_1 = a > 1$ y (x_n) es estrictamente creciente. Por tanto, (x_n) no está acotada superiormente y es estrictamente creciente, así que (x_n) es divergente y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$



■

Aunque no podremos decir tanto de una sucesión cualquiera de números reales, sí que podrá encontrarse alguna subsucesión suya con límite. Esto es lo que establece el Teorema de Bolzano-Weierstrass, que es otra propiedad de completitud de $\mathbb{R}$, es decir, su enunciado equivale al Axioma del Supremo en la definición axiomática de $\mathbb{R}$.

2.9. Teorema de Bolzano-Weierstrass: *Sea (x_n) una sucesión real. Entonces:*

i) Existe alguna subsucesión de (x_n) que tiene límite (finito o infinito).
ii) Si (x_n) está acotada, entonces existe alguna subsucesión suya con límite real (finito)

3. Sucesiones de Cauchy. Criterio general de convergencia

Cualquier sucesión (x_n) en la que la distancia de x_p a x_q puede hacerse tan pequeña como se quiera con tal de tomar p y q suficientemente grandes, tiene límite real. Este criterio de convergencia, llamado *condición de Cauchy*, es otra propiedad de completitud de $\mathbb{R}$ y caracteriza a las sucesiones convergentes por una relación entre sus términos x_n en la que no interviene el valor l del posible límite. Esto permite estudiar la convergencia de una sucesión sin conocer, a priori, su posible límite.

3.1. Sucesiones de Cauchy: *Se dice que la sucesión* (x_n) *de números reales es una sucesión de Cauchy si para cada número real* $\varepsilon > 0$ *existe un índice* $\nu \in \mathbb{N}$ *tal que, para cualesquiera que sean los índices* $p \geq \nu$ *y* $q \geq \nu$, *se cumple que* $\left|x_p - x_q\right| < \varepsilon$.

3.2. Criterio general de convergencia de Cauchy: *Una sucesión* (x_n) *de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

3.3. Ejemplo: Demuestre que la sucesión (x_n) definida a partir de $x_1 > 0$ mediante

$$x_{n+1} = \frac{4}{3 + x_n}$$

es una sucesión de Cauchy y calcule su límite.

SOLUCIÓN: Antes de acotar la distancia entre dos términos cualesquiera, acotamos la distancia entre dos que sean consecutivos. Se demuestra inmediatamente por inducción que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que, por tanto, $3 + x_n > 3$, luego

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|\frac{4}{3 + x_n} - \frac{4}{3 + x_{n-1}}\right| = \frac{4\left|x_{n-1} - x_n\right|}{(3 + x_n)(3 + x_{n-1})} < \frac{4}{9}\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

Resulta así que

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \frac{4}{9}\left|x_n - x_{n-1}\right| < \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left|x_{n-1} - x_{n-2}\right| < \cdots < \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \left|x_2 - x_1\right|$$

es decir,

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \left|x_2 - x_1\right|$$

Aplicando esta desigualdad reiteradamente podemos acotar la distancia entre dos términos cualesquiera de la sucesión:

$$\left|x_{n+p}-x_n\right| \leq \left|x_{n+p}-x_{n+p-1}\right|+\left|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}\right|+\cdots+\left|x_{n+1}-x_n\right| < \left(\frac{4}{9}\right)^{n+p-2}\left|x_2-x_1\right|+\left(\frac{4}{9}\right)^{n+p-3}\left|x_2-x_2\right|+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\left|x_2-x_1\right|=$$

$$=\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{n+p-2}+\left(\frac{4}{9}\right)^{n+p-3}+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\left|x_2-x_1\right|=\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+p-1}}{1-\frac{4}{9}}\left|x_2-x_1\right|=\frac{9}{5}\left|x_2-x_1\right|\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{p}\right)<\frac{9}{5}\left|x_2-x_1\right|\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Así pues, para cualesquiera números naturales n y p,

$$0 \leq \left|x_{n+p}-x_n\right| < \frac{9}{5}\left|x_2-x_1\right|\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}=0$, de la desigualdad anterior se desprende que

$$\lim_{n\to\infty}\left|x_{n+p}-x_n\right|=0$$

sea cual sea $p\in\mathbb{N}$, es decir, que (x_n) es una sucesión de Cauchy y, por tanto, convergente hacia un límite $\ell\in\mathbb{R}$ que se deduce tomando límites en la recurrencia:

$$\ell=\frac{4}{3+\ell} \quad\Leftrightarrow\quad \ell^2+3\ell-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\ell-1)(\ell+4)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ell=1 \quad \text{o} \quad \ell=-4$$

Dado que no puede ser $\ell=-4$ por ser (x_n) una sucesión de términos positivos, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\ell=1$$

4. Regla del sandwich

4.1. Desigualdades entre sucesiones y límites. Regla del sandwich: *Sean* (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones convergentes de números reales y sea* k *un número real.*

1. *Si* $\lim a_n > k$, *entonces* $a_n > k$ *a partir de cierto término. Si es* $a_n \geq k$ *a partir de cierto término, entonces* $\lim a_n \geq k$.
2. *Si* $\lim a_n < \lim b_n$, *entonces a partir de cierto término es* $a_n < b_n$. *Si es* $a_n \leq b_n$ *a partir de cierto término, entonces* $\lim a_n \leq \lim b_n$.
3. *Regla del sandwich: Si* $\lim a_n = \lim b_n = l \in \mathbb{R}$ *y* (c_n) *es una sucesión tal que* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *a partir de cierto término, entonces* (c_n) *es convergente y* $\lim c_n = l$.

4.2. Ejemplo: Calcule el límite de la sucesión (c_n) de números reales dada por

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Este problema figura resuelto en la página 449 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

SOLUCIÓN: Acotaremos c_n inferiormente y superiormente por dos sucesiones convergentes con el mismo límite para seguidamente aplicar la Regla del sandwich; cuestión que puede razonarse como sigue: Para cada $k = 1, \ldots, n$:

$$n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Sumando miembro a miembro en la última doble desigualdad desde $k=1$ hasta $k=n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$

es decir,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq c_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Dado que las sucesiones $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ y $b_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ son ambas convergentes y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

de la Regla del sandwich se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

5. Orden en los infinitos y en los infinitésimos

5.1. Infinitos. Propiedades: *Una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R}$ es un infinito si es divergente, es decir, si $a_n \to +\infty$ o $a_n \to -\infty$. Los infinitos tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si $a_n \to +\infty$ y $b_n \geq a_n$ a partir de cierto término, entonces $b_n \to +\infty$. Del mismo modo, si $a_n \to -\infty$ y $b_n \leq a_n$ a partir de cierto término, entonces $b_n \to -\infty$.*
2. *Dada una sucesión (a_n) de números reales no nulos, ocurre que $a_n \to +\infty$ si y sólo si $1/a_n \to 0^+$, y también que $a_n \to -\infty$ si y sólo si $1/a_n \to 0^-$.*

3. *La suma de dos infinitos del mismo signo es otro infinito del mismo signo. El producto de dos infinitos es otro infinito cuyo signo se determina a partir de la elemental regla de los signos.*

4. *La suma de un infinito y una sucesión acotada es otro infinito del mismo signo que aquél. Más precisamente, si* $a_n \to +\infty$ *y* (b_n) *está acotada inferiormente entonces* $a_n + b_n \to +\infty$ *; si* $a_n \to -\infty$ *y* (b_n) *está acotada superiormente,* $a_n + b_n \to -\infty$ *.*

5.2. Ejemplo: Calcule

$$\lim_{n\to\infty} (n + \operatorname{sen} n)$$

SOLUCIÓN: La sucesión $(n + \operatorname{sen} n)$ es la suma de las sucesiones (n), cuyo límite es $+\infty$, y $(\operatorname{sen} n)$, que está acotada inferiormente (también lo está superiormente). En virtud de la propiedad 5.1.4, la sucesión $(n + \operatorname{sen} n)$ es un infinito, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} (n + \operatorname{sen} n) = +\infty$$

5.3. Ejemplo: Demuestre que la sucesión (a_n) tal que $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1 + a_n}{1 + 2a_n}$$

es divergente.

Este problema figura resuelto en la página 461 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Es inmediato comprobar por inducción que $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, para cada $n \geq 2$ es

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1 + a_{n-1}}{1 + 2a_{n-1}} > a_{n-1} + \frac{1 + a_{n-1}}{2 + 2a_{n-1}} = a_{n-1} + \frac{1}{2}$$

y por tanto

$$\begin{cases} a_n > a_{n-1} + \frac{1}{2} \\ a_{n-1} > a_{n-2} + \frac{1}{2} \\ a_{n-2} > a_{n-3} + \frac{1}{2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_2 > a_1 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Al sumar miembro a miembro las igualdades anteriores, se obtiene

$$a_n > a_1 + \frac{n-1}{2}$$

y como es $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + \frac{n-1}{2}) = +\infty$, también es

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

5.4. Órdenes de los infinitos: Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales, ambas infinitos. Se dice entonces que (a_n) y (b_n) son *comparables* si existe (finito, más infinito o menos infinito) el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$$

En tal caso:

1. Si $\ell = 0$, se dice que (a_n) es un infinito de *menor orden* que el infinito (b_n), o también, que el infinito (a_n) es *despreciable* frente al infinito (b_n), y se escribe $a_n << b_n$ o también $a_n = o(b_n)$ (*notación de Landau*). Si se comparan los órdenes de los infinitos elementales, se obtiene que si $x_n \to +\infty$, y además son $p > 0$, $q > 0$, $r > 1$, $t > 0$, entonces $(\mathrm{L}\, x_n)^p << (x_n)^q << r^{x_n} << (x_n)^{tx_n}$

2. Si $\ell = \pm\infty$, en cuyo caso es $\lim_{n\to\infty}(b_n / a_n) = 0$, se dice que (a_n) es un infinito *de mayor orden* que (b_n), y se escribe $a_n >> b_n$.

3. Si $\ell \neq 0$ y $\ell \neq \pm\infty$, se dice que (a_n) y (b_n) son infinitos del *mismo orden* y se escribe $a_n <> b_n$. Cuando el infinito (a_n) es del mismo orden que el infinito potencial (n^k), con $k > 0$, esto es, cuando

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^k} = \ell \qquad (\ell \neq 0,\ \ell \neq \pm\infty)$$

se dice que k es el *orden* del infinito (a_n) y que $\ell \cdot n^k$ es su *parte principal.*

5.5. Ejemplo: Calcule los límites siguientes:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\,n}{\sqrt{n}}$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^e}$ c) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

SOLUCIÓN: Dado que, según 5.4.1, el infinito logarítmico $\mathrm{L}\,n$ es de menor orden que el infinito potencial $\sqrt{n}$, resulta que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\,n}{\sqrt{n}} = 0$$

Por su parte, según 5.4.1, el infinito e^n es de mayor orden que el infinito potencial n^e, por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^e} = +\infty$$

Por último, para todos los números reales a, b, con $a > 0$, es $a^b = e^{b\,\mathrm{L}\,a}$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\mathrm{L}\, n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\, n}{n}} = e^0 = 1$$

pues $\mathrm{L}\, n$ es un infinito de menor orden que n.

5.6. Ejemplo: Dados los polinomios con coeficientes reales

$$P(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0 \,, \qquad Q(n) = b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_0 \,,$$

donde $p > q$ y a_p y b_q son no nulos y del mismo signo, determine el orden y la parte principal del infinito

$$a_n = \sqrt[k]{\frac{P(n)}{Q(n)}}$$

SOLUCIÓN: El cociente de la división de P por Q tiene grado $p-q$, luego se trata de un infinito de orden $p-q$ y su raíz k-ésima a_n tiene orden $\frac{p-q}{k}$, pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{(p-q)/k}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{\frac{P(n)}{n^{p-q}\cdot Q(n)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{\frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0}{b_q n^p + b_{q-1} n^{p-1} + \cdots + b_0 n^{p-q}}} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} \frac{a_p + a_{p-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_0 \frac{1}{n^p}}{b_q + b_{q-1}\frac{1}{n} + \cdots + b_0 \frac{1}{n^q}}} = \sqrt[k]{\frac{a_p}{b^q}} \neq 0$$

Por tanto, a_n es un infinito de orden $\frac{p-q}{k}$ y su parte principal es

$$\sqrt[k]{\frac{a_p}{b_q}} \cdot \sqrt[k]{n^{p-q}} = \sqrt[k]{\frac{a_p}{b_q}\, n^{p-q}} \,.$$

5.7. Infinitésimos: *Se dice que una sucesión* (x_n) *de números reales es un infinitésimo si converge hacia cero. Los infinitésimos tienen las siguientes propiedades:*

1. *Una sucesión* (a_n) *de números reales converge hacia un número real* ℓ *si y sólo si la sucesión* $(a_n - \ell)$ *es un infinitésimo.*
2. *La suma de dos infinitésimos es otro infinitésimo.*
3. *Propiedad fundamental: El producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es otro infinitésimo, es decir, si* $x_n \to 0$ *e* (y_n) *es una sucesión acotada, entonces* $x_n y_n \to 0$.

5.8. Ejemplo: Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n}$$

SOLUCIÓN: La sucesión $\left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)$ es el producto de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$, que es un infinitésimo, y la sucesión $(\operatorname{sen} n)$, que está acotada pues $-1 \le \operatorname{sen} n \le 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En virtud de la propiedad 5.7.3, la sucesión $\left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)$ es un infinitésimo, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$$

5.9. Órdenes de los infinitésimos: Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales, ambas infinitésimos. Se dice entonces que (a_n) y (b_n) son *comparables* si existe (finito, más infinito o menos infinito) el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$$

En tal caso:

1. Si $\ell = 0$, se dice que (a_n) es un infinitésimo de *mayor orden* que el infinitésimo (b_n), o también, que el infinitésimo (a_n) es *despreciable* frente al infinitésimo (b_n), y se escribe $a_n >> b_n$ o también $a_n = o(b_n)$ (*notación de Landau*). Si $p, q \in \mathbb{N}$ y $p > q$, entonces $\frac{1}{n^p} = o\left(\frac{1}{n^q}\right)$, esto es, el infinitésimo $\frac{1}{n^p}$ es despreciable frente al infinitésimo $\frac{1}{n^q}$.

2. Si $\ell = \pm\infty$, en cuyo caso es $\lim_{n\to\infty}(b_n / a_n) = 0$, se dice que (a_n) es un infinitésimo *de menor orden* que (b_n), y se escribe $a_n << b_n$.

3. Si $\ell \neq 0$ y $\ell \neq \pm\infty$, se dice que (a_n) y (b_n) son infinitésimos del *mismo orden* y se escribe $a_n <> b_n$. Cuando el infinitésimo (a_n) es del mismo orden que el infinitésimo $\left(\frac{1}{n^k}\right)$, con $k > 0$, esto es, cuando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^k}} = \lim_{n\to\infty} n^k a_n = \ell \qquad (\ell \neq 0,\ \ell \neq \pm\infty)$$

se dice que k es el *orden* del infinitésimo (a_n) y que $\frac{\ell}{n^k}$ es su *parte principal*.

5.10. Ejemplo: Dado $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, calcule el orden y la parte principal del infinitésimo

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^k - (n^k + 1)}$$

SOLUCIÓN: Según el binomio de Newton es:

$$(n+1)^k - (n^k+1) = \binom{k}{0} n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k} - n^k - 1 = \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1} n$$

A la vista de la expresión anterior, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} n^{k-1}\cdot a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k-1}}{\binom{k}{1}n^{k-1}+\binom{k}{2}n^{k-2}\cdots+\binom{k}{k-1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\binom{k}{k-1}\cdot\frac{1}{n^{k-2}}} = \frac{1}{\binom{k}{1}} = \frac{1}{k}$$

El orden del infinitésimo a_n es por tanto $k-1$ y su parte principal es $\dfrac{1}{k\,n^{k-1}}$.

6. Infinitos e infinitésimos equivalentes

6.1. Sucesiones equivalentes. Equivalencia entre infinitos e infinitésimos: Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales no nulos. Se dice que (a_n) y (b_n) son *equivalentes* y se escribe $a_n \sim b_n$ si se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Si (a_n) y (b_n) son equivalentes, la una tiene límite (finito o infinito) si y sólo si lo tiene la otra y, en tal caso, los límites de ambas son el mismo. La equivalencia entre las sucesiones (a_n) y (b_n) se escribe, en notación de Landau, $a_n = b_n + o(b_n)$, es decir,

$$a_n \sim b_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n = b_n + o(b_n)$$

- Si (a_n) es un infinito, su parte principal es $\ell\cdot n^k$ $(\ell\neq 0,\ k>0)$ si y sólo si, cuando $n\to\infty$, ocurre alguna de las tres condiciones siguientes, que son equivalentes:

$$\frac{a_n}{n^k}\to\ell \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n\sim \ell\cdot n^k \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n = \ell\cdot n^k + o(n^k)$$

- Si (a_n) es un infinitésimo, su parte principal es $\dfrac{\ell}{n^k}$ $(\ell \neq 0,\ k > 0)$ si y sólo si, cuando $n \to \infty$,

$$n^k a_n \to \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n \sim \frac{\ell}{n^k} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n = \frac{\ell}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right) \qquad .$$

6.2. Algunas equivalencias útiles: Las siguientes equivalencias entre infinitésimos y entre infinitos se utilizan con mucha frecuencia en la aplicación del Principio de Sustitución (véase 7.1.1) al cálculo de límites indeterminados:

I. Si $\varepsilon_n \to 0$, los siguientes infinitésimos son equivalentes:

1. $\operatorname{sen} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
2. $\tan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
3. $\operatorname{arcsen} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
4. $\arctan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
5. $1 - \cos \varepsilon_n \sim \dfrac{1}{2}\varepsilon_n^2$
6. $(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, \varepsilon_n \quad (\alpha \neq 0)$
7. $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$
8. $a^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n \mathrm{L}\, a \quad (a > 0,\ \ a \neq 1)$
9. $\mathrm{L}\,(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
10. $\log_a (1+\varepsilon_n) \sim \dfrac{\varepsilon_n}{\mathrm{L}\, a} \quad (a > 0,\ \ a \neq 1)$

II. Si $n \to \infty$, los siguientes infinitos son equivalentes:

1. $a_k n^k + \cdots + a_1 x + a_0 \sim a_k n^k \quad (a_k \neq 0)$
2. $\mathrm{L}\,(a_k n^k + \cdots + a_1 x + a_0) \sim \mathrm{L}\, n^k \quad (a_k > 0)$
3. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \sim \mathrm{L}\, n$
4. *Fórmula de Stirling:* $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

III. Si $a_n \to a \neq 0$, entonces $a_n \sim a$.

6.3. Otras equivalencias: Consecuencia de las equivalencias 1.6, 1.9, 1.10 y 2.4 son las siguientes:

1. $\mathrm{L}\, u_n \sim u_n - 1$ si $u_n \to 1$
2. $\log_a u_n \sim \dfrac{u_n - 1}{\mathrm{L}\, a}$ si $u_n \to 1$
3. $(u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha(u_n - 1)$ si $u_n \to 1$
4. $\sqrt[n]{n!} \sim \dfrac{n}{e}$
5. $\mathrm{L}(n!) \sim n\,\mathrm{L}\, n$

6.4. Ejemplo: Calcule, en función de $a > 0$ y $b > 0$, donde $a < b$, el orden y la parte principal del infinitésimo

$$a_n = \mathrm{L}\frac{\arctan(an+1)}{\arctan(bn-1)}$$

SOLUCIÓN: Nótese que por ser a y b positivos, $an+1 \to +\infty$ y $bn-1 \to +\infty$, de manera que sus respectivas arcotangentes tienden a $\frac{\pi}{2}$. El cociente de éstas tiende por tanto a 1 y su logaritmo es un infinitésimo como afirma el enunciado del problema. Buscamos un infinitésimo del tipo $\frac{l}{n^k}$, donde $l, k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, que sea equivalente a a_n. Dado que $\mathrm{L}\, u_n \sim u_n - 1$ siempre que $u_n \to 1$, como el cociente de las arcotangentes tiende a 1, se tiene que

$$a_n = \mathrm{L}\frac{\arctan(an+1)}{\arctan(bn-1)} \sim \frac{\arctan(an+1)}{\arctan(bn-1)} - 1 = \frac{\arctan(an+1) - \arctan(bn-1)}{\arctan(bn-1)}$$

Como $\arctan s - \arctan t = \arctan\frac{s-t}{1+st}$ siempre que $st > -1$, la equivalencia anterior se escribe:

$$a_n \sim \frac{\arctan\frac{(a-b)n+2}{abn^2+(b-a)n}}{\arctan(bn-1)}$$

El cociente $\frac{(a-b)n+2}{abn^2+(b-a)n}$ es un infinitésimo, luego es equivalente a su arcotangente (equivalencia I.4). Por otro lado, como $\arctan(bn-1)\to \frac{\pi}{2}\neq 0$, por la equivalencia 3:

$$a_n \sim \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(a-b)n+2}{abn^2+(b-a)n}$$

Por tanto, si $a=b$, entonces $a_n\sim \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{a^2n^2}=\frac{4}{\pi a^2 n^2}$ es un infinitésimo de orden 2 cuya parte principal es $\frac{4}{\pi a^2n^2}$; mientras que si $a\neq b$, entonces $a_n\sim\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(a-b)n}{abn^2}=\frac{2(a-b)}{\pi abn}$ es un infinitésimo de orden 1 y con parte principal $\frac{2(a-b)}{\pi abn}$.

7. Límites indeterminados. Principio de sustitución. Regla de Stolz

Al operar algebraicamente con sucesiones convergentes o divergentes (sumándolas, multiplicándolas, dividiéndolas, elevando una a otra) se obtienen habitualmente sucesiones que también son convergentes o divergentes cuyos límites son conocidos a partir de los de aquéllas. A pesar de ello hay casos en los que el límite de la sucesión resultante no queda determinado en función de los límites de las sucesiones de partida, sino que depende además de cómo éstas tienden a sus límites. A estos límites se les llama *límites indeterminados*, y son

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad +\infty-\infty,\quad 1^{\pm\infty},\quad (+\infty)^0,\quad 0^0$$

7.1. Límites indeterminados $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$

La aplicación conjunta de las equivalencias de 6.2 y el Principio de sustitución que se enuncia a continuación resultan de especial utilidad en la resolución de límites indeterminados $0\cdot(\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

7.1.1. Principio de sustitución: *Si* $a_n \sim b_n$ *y* (x_n) *es una sucesión cualquiera, entonces:*

i) Existe $\lim x_n a_n$ *si y sólo si existe* $\lim x_n b_n$ *. En tal caso,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n a_n = \lim_{n\to\infty} x_n b_n$$

ii) Existe $\lim \frac{x_n}{a_n}$ *si y sólo si existe* $\lim \frac{x_n}{b_n}$ *. En ese caso es*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{b_n}$$

7.1.2. Observaciones

1. El Principio de sustitución establece que, al calcular el límite de una sucesión del tipo $A_n = x_n \cdot a_n$ o $A_n = \frac{x_n}{a_n}$, el factor o divisor a_n puede ser sustituido en la expresión de A_n por otro equivalente b_n, con el objetivo de obtener una nueva expresión $B_n = x_n \cdot b_n$ o $B_n = \frac{x_n}{b_n}$ cuyo límite sea más sencillo de calcular. Caso de no existir el límite de B_n, tampoco existirá el límite de A_n.

2. Esta sustitución será ilícita, en general, cuando a_n no sea factor o divisor de A_n, por ejemplo, en expresiones en las que a_n es un sumando de A_n. Sirva el siguiente límite como botón de muestra: Si se llama $A_n = \sqrt{n^2+n} - n$, el infinito $\sqrt{n^2+n}$ es equivalente al infinito n y si se practica la sustitución del primero por el segundo en el cálculo del límite de A_n, se obtendría

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n\to\infty} (n-n) = 0$$

   pero esto es falso, puesto que $\lim A_n = \frac{1}{2}$, como se deduce fácilmente multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada de A_n.

7.1.3. Ejemplos: Calcule los siguientes límites:

a) $\ell_1 = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{a}{n}}-1\right)$ b) $\ell_2 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{n}}{(\sqrt[n]{2}-1)\cdot \mathrm{L}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}$ c) $\ell_3 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{\cos(1/n)}-e}{\arctan n}\cdot n^2$

SOLUCIÓN

a) Según la equivalencia entre infinitésimos 6.2.I.6, $\sqrt[3]{1+\frac{a}{n}}-1 = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{1/3}-1 \sim \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{n}$, y por el Principio de sustitución:

$$\ell_1 = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{1+\frac{a}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{a}{3n} = \frac{a}{3}$$

b) De las equivalencias entre infinitésimos 6.2.I.1, 6.2.I.8 y 6.2.I.9 se deducen las respectivas equivalencias $\operatorname{sen}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$, $2^{1/n}-1\sim\frac{1}{n}\mathrm{L}\,2$, $\mathrm{L}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)=\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\sim\frac{1}{2n}$, y del Principio de sustitución se sigue que

$$\ell_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{n}}{(\sqrt[n]{2}-1)\cdot \mathrm{L}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}\mathrm{L}\,2\cdot\frac{1}{2n}} = \frac{2}{\mathrm{L}\,2}$$

c) El término n-ésimo de la sucesión cuyo límite pretende calcularse puede ser escrito como

$$\frac{e^{\cos(1/n)}-e}{\arctan n}\cdot n^2 = \frac{e}{\arctan n}\cdot n^2\cdot\left[e^{\cos(1/n)-1}-1\right]$$

Cuando $n \to \infty$ ocurre que $\arctan n \to \frac{\pi}{2} \neq 0$, luego según 6.2.3 es $\arctan n \sim \frac{\pi}{2}$. Además. como $\cos\frac{1}{n} - 1$ es un infinitésimo, de las equivalencias respectivas 6.2.I.7 y 6.2.I.6 se desprende que $e^{\cos(1/n)-1} - 1 \sim \cos\frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$, luego, según el Principio de sustitución:

$$\ell_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{\frac{\pi}{2}} \cdot n^2 \cdot \left(-\frac{1}{2n^2}\right) = -\frac{e}{\pi}$$

7.1.4. Ejemplo: Demuestre que si (a_n) y (b_n) son dos infinitos equivalentes o dos infinitésimos equivalentes positivos, entonces $\sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$ y $\mathrm{L}\, a_n \sim \mathrm{L}\, b_n$.

SOLUCIÓN: De la condición $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ se deducen:

$$\lim \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{b_n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} = \lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{1/n} = 1^0 = 1, \qquad \lim\left(\frac{\mathrm{L}\, a_n}{\mathrm{L}\, b_n} - 1\right) = \lim \frac{1}{\mathrm{L}\, b_n} \mathrm{L}\, \frac{a_n}{b_n} = 0 \cdot 0 = 0$$

7.1.5 Ejemplo: Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

SOLUCIÓN: Aplicando conjuntamente la fórmula de Stirling, $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, y el Principio de sustitución, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot (2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} \cdot 2\pi n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\sqrt{\pi}}{2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \blacksquare$$

La Regla de Stolz que ahora se enuncia es un instrumento capital para el cálculo de límites de cocientes $\frac{a_n}{b_n}$ en los casos indeterminados $\frac{0}{0}$ y $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Bajo la hipótesis de monotonía de la sucesión (b_n), para calcular el límite de $\frac{a_n}{b_n}$, calcúlese el del cociente $\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$; si éste existe y es $l\in\overline{\mathbb{R}}$, también existirá el límite de $\frac{a_n}{b_n}$ y será l.

7.1.6. Regla de Stolz: *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales tales que (b_n) es estrictamente monótona y, además, o bien $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\pm\infty$, o bien $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

siempre que exista (finito o infinito) el límite del segundo miembro.

7.1.7. Observación: Nada podrá decirse con carácter general sobre el límite de $\frac{a_n}{b_n}$ cuando no exista el límite de $\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$. Obsérvese que si se toman $a_n=(-1)^n$ y $b_n=n$ (ésta es estrictamente creciente y divergente hacia $+\infty$), es inmediato que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$$

por tratarse de límite del producto del infinitésimo $\frac{1}{n}$ por la sucesión acotada $(-1)^n$. En cambio, la sucesión de término general

$$\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\frac{(-1)^n-(-1)^{n-1}}{n-(n-1)}=2\cdot(-1)^n$$

carece de límite pues la subsucesión de los términos de lugar par tiende a 2, mientras que la de los de lugar impar tiende a -2.

7.1.8. Ejemplo: Dado $p \in \mathbb{N}$, calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$$

SOLUCIÓN: Como la sucesión (n^{p+1}) es estrictamente monótona y divergente hacia $+\infty$, de la Regla de Stolz se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - \left[n^{p+1} - \binom{p+1}{1} n^p + \binom{p+1}{2} n^{p-1} - \cdots + (-1)^{p+1}\binom{p+1}{p+1}\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{\binom{p+1}{1} n^p - \binom{p+1}{2} n^{p-1} + \cdots + (-1)^p \binom{p+1}{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{\binom{p+1}{1} n^p} = \frac{1}{p+1}$$

7.1.9. Ejemplo: Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

SOLUCIÓN: La sucesión (n) es estrictamente monótona y divergente hacia $+\infty$, así es que, según la Regla de Stolz, será:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{(\mathrm{L}\, n)/n} = e^0 = 1$$

como se deduce de la comparación del infinito logarítmico $\mathrm{L}\, n$ con el potencial n.

7.1.10. Ejemplo: Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}}{\mathrm{L}\,n}$$

sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$

SOLUCIÓN: La sucesión $(\mathrm{L}\,n)$ es estrictamente monótona y divergente hacia $+\infty$ y permite la aplicación de la Regla de Stolz, obteniéndose:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}}{\mathrm{L}\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}}{\mathrm{L}\,n-\mathrm{L}\,(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n\cdot\mathrm{L}\left(\frac{n}{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n\cdot\left(\frac{n}{n-1}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{n}{n-1}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=1\cdot a=a$$

7.2. Límites indeterminados $+\infty-\infty$

Si (a_n) y (b_n) son infinitos del mismo signo pero de distinto orden, la sucesión (a_n-b_n) es también un infinito. Obsérvese que si (a_n) y (b_n) son infinitos positivos y:

i) $a_n >> b_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

ii) $a_n << b_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)=(+\infty)\cdot(-1)=-\infty$$

iii) $a_n <> b_n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \ell \in (0,+\infty)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n \left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) = (+\infty)\cdot(\ell - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > 1 \\ -\infty & \text{si } \ell < 1 \end{cases}$$

y es una indeterminación $(+\infty)\cdot 0$ cuando $\ell = 1$, es decir, cuando $a_n \sim b_n$, indeterminación para la que ya tenemos recursos.

7.2.1 Ejemplo: Calcule el límite de la sucesión

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2-1}$$

SOLUCIÓN: Se trata de una indeterminación $+\infty - \infty$ en la que minuendo y sustraendo son infinitos del mismo orden. Para su cálculo expresamos el término general a_n en la forma

$$a_n = \sqrt{n^2-1}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{n^3+n^2}}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right) = \sqrt{n^2-1}\cdot\left(\sqrt[6]{\frac{(n^3+n^2)^2}{(n^2-1)^3}} - 1\right) = \sqrt{n^2-1}\cdot\left(\left(\frac{(n^3+n^2)^2}{(n^2-1)^3}\right)^{1/6} - 1\right)$$

Como la fracción $\frac{(n^3+n^2)^2}{(n^2-1)^3}$ tiende a 1, según la equivalencia entre infinitésimos 6.2.I.6, también será

$$\left(\frac{(n^3+n^2)^2}{(n^2-1)^3}\right)^{1/6} - 1 \sim \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{(n^3+n^2)^2}{(n^2-1)^3} - 1\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2n^5+4n^4-3n^2+1}{n^6-3n^4+3n^2-1} \sim \frac{1}{6}\cdot\frac{2n^5}{n^6} = \frac{1}{3n}.$$

Dado que además es $\sqrt{n^2-1} \sim n$, del Principio de sustitución se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1}\cdot\left(\left(\frac{(n^3+n^2)^2}{(n^2-1)^3}\right)^{1/6}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}$$

7.3. Límites indeterminados 0^0, $(+\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$

Dadas dos sucesiones de números reales (a_n) y (b_n) tales que $a_n > 0$, siendo $a_n \to a$ y $b_n \to b$, es conocido que $a_n^{b_n} \to a^b$, siempre que esta potencia esté definida o tenga sentido. Este límite está indeterminado en los casos $a_n^{b_n} \to 0^0$, $a_n^{b_n} \to (+\infty)^0$ y $a_n^{b_n} \to 1^{\pm\infty}$, casos que suelen resolverse poniendo $a_n^{b_n} = e^{\mathrm{L}(a_n^{b_n})} = e^{b_n \,\mathrm{L}\, a_n}$, luego

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lambda}$$

donde

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} b_n \,\mathrm{L}\, a_n$$

que es un límite del tipo $0\cdot\infty$. En el caso $a_n^{b_n} \to 1^{\pm\infty}$ (pero no en los otros dos), como $a_n \to 1$, entonces $\mathrm{L}\, a_n \sim a_n - 1$, de modo que en virtud del Principio de sustitución será, siempre que exista,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} b_n(a_n - 1)\,.$$

7.3.1 Ejemplo: Dado $a \in \mathbb{R}$, calcule

$$E = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{L}(n+a)}{\mathrm{L}n}\right)^{n\,\mathrm{L}\,n}$$

SOLUCIÓN: Por ser $\mathrm{L}\,(n+a) \sim \mathrm{L}\,n$, el límite es un caso indeterminado $1^{+\infty}$, por lo que puede escribirse $E = e^{\lambda}$, donde

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{L}\,n\cdot\left(\frac{\mathrm{L}(n+a)}{\mathrm{L}\,n}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot[\mathrm{L}(n+a)-\mathrm{L}\,n] = \lim_{n\to\infty} n\cdot \mathrm{L}\left(\frac{n+a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{n+a}{n}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{a}{n} = a$$

En la antepenúltima igualdad se ha usado la equivalencia $\mathrm{L}\left(\frac{n+a}{n}\right)\sim\frac{n+a}{n}-1$ y el Principio de sustitución. Así,

$$E = e^a$$

7.3.2 Ejemplo: Calcule

$$F = \lim_{n\to\infty}(n+2^n)^{1/(2+3n)}$$

Este problema figura resuelto en la página 56 del volumen Cálculo Infinitesimal de una variable, de Juan de Burgos

SOLUCIÓN: Es un límite indeterminado del tipo $(+\infty)^0$. Podemos escribir:

$$F = e^{\lambda}$$

donde

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(n+2^n)}{2+3n}$$

Como la sucesión $n+2^n$ es un infinito equivalente a 2^n, en virtud de 7.1.4, también es $\mathrm{L}(n+2^n)\sim\mathrm{L}(2^n)$. Dado que además es $2+3n\sim 3n$, se deduce que

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(n+2^n)}{2+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(2^n)}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,\mathrm{L}\,2}{3n} = \frac{\mathrm{L}\,2}{3}$$

Por tanto,

$$F = e^{(\mathrm{L}\,2)/3} = e^{\mathrm{L}\,\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$$

7.3.3. Ejemplo: Calcule

$$G = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

donde $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = a > 0$.

Este problema figura resuelto en la página 47 del volumen Cálculo Infinitesimal de una variable, de Juan de Burgos

SOLUCIÓN: Podemos escribir:

$$G = \lim_{n\to\infty} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n^2} = e^{\lambda}$$

donde

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}(x_1 x_2 \cdots x_n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}(x_1) + \mathrm{L}(x_2) + \cdots + \mathrm{L}(x_n)}{n^2} \underset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}(x_n)}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}(x_n)}{2n-1} \underset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}(x_n) - \mathrm{L}(x_{n-1})}{(2n-1) - (2n-3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,a$$

Por tanto,

$$E = e^{(\mathrm{L}\,a)/2} = e^{\mathrm{L}\sqrt{a}} = \sqrt{a} \quad \blacksquare$$

La Regla de la raíz que ahora se enuncia permite resolver límites indeterminados $\lim a_n^{b_n}$ de los tipos 0^0 o $(+\infty)^0$ cuando la sucesión del exponente es $b_n = \frac{1}{n}$, esto es, límites de raíces n-ésimas $\sqrt[n]{a_n}$ en las que $a_n \to 0$ o también $a_n \to +\infty$.

7.3.4. Regla de la raíz: *Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

siempre que exista (finito o infinito) el límite del segundo miembro.

7.3.5. Observación: Al igual que en la Regla de Stolz, nada podrá decirse en general sobre la existencia del límite de $\sqrt[n]{a_n}$ cuando no exista el límite del cociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Considérese, por ejemplo, la sucesión de términos positivos (a_n) dada por $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ y $a_{2n} = \frac{1}{2n}$. Los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

son distintos, luego no existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$. En cambio, sí que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n-1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\mathrm{L}\, n}{2n-1}} = e^0 = 1\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\mathrm{L}\, 2n}{2n}} = e^0 = 1$$

7.3.6. Ejemplo: Calcule:

$$E=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\tan\frac{n\pi}{2n+1}}$$

Este problema figura resuelto en la página 449 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

SOLUCIÓN: Por ser $0<\frac{n\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{2}$, el número real $a_n=\tan\frac{n\pi}{2n+1}$ es positivo y, en aplicación de la Regla de la raíz,

$$E=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{n\pi}{2n+1}}{\tan\frac{(n-1)\pi}{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2n+1}\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(n-1)\pi}{2n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{\pi}{4n-2}}{\tan\frac{\pi}{4n+2}}$$

Dadas las equivalencias $\tan\frac{\pi}{4n-2}\sim\frac{\pi}{4n-2}$ y $\tan\frac{\pi}{4n+2}\sim\frac{\pi}{4n+2}$ cuando $n\to\infty$, resulta

$$E=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4n-2}}{\frac{\pi}{4n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{4n-2}=1$$

7.3.7. Ejemplo: Calcule el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$$

Este problema figura resuelto en la página 47 del volumen Cálculo Infinitesimal de una variable, de Juan de Burgos

SOLUCIÓN: Utilizando de nuevo la Regla de la raíz, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n-2}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(n-1)!(n-1)!}{n!n!(2n-2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot(2n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n}{n^2}=4$$