11. Determine el término general de la sucesión (x_n) definida recurrentemente a partir $x_0 = 1$ mediante

$$x_n = nx_{n-1} + (-1)^n$$

SOLUCIÓN: Si se divide la ecuación recurrente $x_n = nx_{n-1} + (-1)^n$ por $n!$ se deduce:

$$\frac{x_n}{n!} = \frac{x_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Por tanto, la sucesión (y_n) definida mediante $y_n = \frac{x_n}{n!}$ cumple la recurrencia lineal completa de primer orden

$$y_n = y_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad \text{es decir,} \qquad y_n - y_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

En lugar de tratarla como tal, si escribimos la última igualdad para $n, n-1, \dots, 1$ y después las sumamos todas se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l} y_n = y_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \\ y_{n-1} = y_{n-2} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_2 = y_1 + \frac{(-1)^2}{2!} \\ y_1 = y_0 + \frac{(-1)^1}{1!} \end{array}\right. \Rightarrow \quad y_n = y_0 + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Como es $y_1 = x_0 = 1$, resulta que

$$y_n = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

y por tanto

$$x_n = n!\, y_n = n!\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$