13. Dada la ecuación $x^4-8x^3+22x^2-24x+m=0$, donde $m\in\mathbb{R}$, se pide:

a) Discuta las soluciones de la ecuación al variar el parámetro m.

b) Resuelva la ecuación en función de m.

Este problema figura resuelto en la página 568 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y es también el problema 06.5 del volumen 5 y el 14.10 del volumen 6 de la misma colección.

SOLUCIÓN: b) Recurrimos al *cambio de variable de Tschirnhaus* para resolver la ecuación. Si $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ son las cuatro raíces de $p(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+m$, según la primera de las *Fórmulas de Cardano* es $x_1+x_2+x_3+x_4=8$, por lo que el baricentro de las raíces es:

$$g=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{8}{4}=2$$

Entonces, la transformación de Tschirnhaus, $z=x-2$, convierte al polinomio $p(x)$ en el polinomio:

$$q(z)=p(z+2)=(z+2)^4-8(z+2)^3+22(z+2)^2-24(z+2)+m=z^4-2z^2+(m-8)$$

El polinomio $q(z)$ es bicuadrado y sus raíces cumplen:

$$z^2=\frac{2\pm\sqrt{4-4(m-8)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4(9-m)}}{2}=1\pm\sqrt{9-m}\quad\Rightarrow\quad z=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{9-m}}$$

En consecuencia, las cuatro raíces de $p(x)$ son:

$$x_1=2+\sqrt{1+\sqrt{9-m}}\,,\qquad x_2=2-\sqrt{1+\sqrt{9-m}}\,,\qquad x_3=2+\sqrt{1-\sqrt{9-m}}\,,\qquad x_4=2-\sqrt{1-\sqrt{9-m}}$$

a) Discutimos ahora cuál es la multiplicidad de las raíces anteriores y cuántas de ellas son reales. Dado que las ecuaciones $9-m=0$ y $1-\sqrt{9-m}=0$ admiten por soluciones respectivas a $m=9$ y $m=8$, y que $1+\sqrt{9-m}=0$ no tiene soluciones reales, parece razonable distinguir los siguientes casos:

1. Si $m<8$, entonces $9-m>0$ y son $1+\sqrt{9-m}>0$ y $1-\sqrt{9-m}<0$, luego las raíces x_1 y x_2 son reales y distintas, mientras que x_3 y x_4 son conjugadas (no reales) la una de la otra, por tener $p(x)$ todos sus coeficientes reales.

2. Si $m=8$, son $x_1=2+\sqrt{2}$, $x_2=2-\sqrt{2}$, $x_3=x_4=2$, así que $p(x)$ tiene cuatro raíces reales, dos simples y una doble.

3. Si $8 < m < 9$, entonces $9 - m > 0$, $1 + \sqrt{9-m} > 0$ y $1 - \sqrt{9-m} > 0$, por lo que $p(x)$ tiene cuatro raíces reales y simples.

4. Si $m = 9$, entonces son $x_1 = x_3 = 3$ y $x_2 = x_4 = 1$, así que $p(x)$ tiene dos raíces reales dobles.

5. Si $m > 9$, entonces $9 - m < 0$, y las cuatro raíces son distintas y ninguna de ellas es real. Son dos a dos conjugadas.