8. Se sabe que la ecuación $z^3+(2i-9)z^2+(23-13i)z+6(i-5)=0$ admite una solución real y que los afijos de las raíces de esta ecuación son tres vértices de un paralelogramo. Encuentre el número complejo correspondiente al cuarto vértice, eligiendo como solución la situada en el primer cuadrante.

Este problema figura resuelto en la página 243 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

SOLUCIÓN: Si $r\in\mathbb{R}$ es solución de la ecuación, entonces será:

$$r^3+(2i-9)r^2+(23-13i)r+6(i-5)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (r^3-9r^2+23r-30)+i(2r^2-13r+6)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^3-9r^2+23r-30=0 \\ 2r^2-13r+6=0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se deduce que

$$r=\frac{13\pm\sqrt{169-48}}{4}=\frac{13\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{13\pm 11}{4}=\begin{cases} 6 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

de las cuales sólo $r=6$ es solución de la primera ecuación.

Así pues, $r=6$ es la única solución real de la ecuación. Al dividir $p(z)=z^3+(2i-9)z^2+(23-13i)z+6(i-5)$ por $z-6$ utilizando la *Regla de Ruffini* se obtiene:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -9+2i & 23-13i & -30+6i \\
6 & & 6 & -18+12i & 30-6i \\
\hline
 & 1 & -3+2i & 5-i & \boxed{0}
\end{array}$$

y por tanto

$$p(z)=(z-6)[z^2+(-3+2i)z+(5-i)]$$

Las soluciones de la ecuación $z^2+(-3+2i)z+(5-i)=0$ son

$$z=\frac{3-2i\pm\sqrt{(3-2i)^2-4(5-i)}}{2}=\frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8i}}{2}$$

Para calcular las dos raíces cuadradas de $-15-8i$, si ponemos $(a+bi)^2=-15-8i$, resulta que son

$$\begin{cases} a^2-b^2=-15 \\ ab=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=a^2+15 \\ a^2b^2=16 \end{cases} \Rightarrow a^2(a^2+15)=16 \Rightarrow a^4+15a^2-16=0 \Rightarrow$$

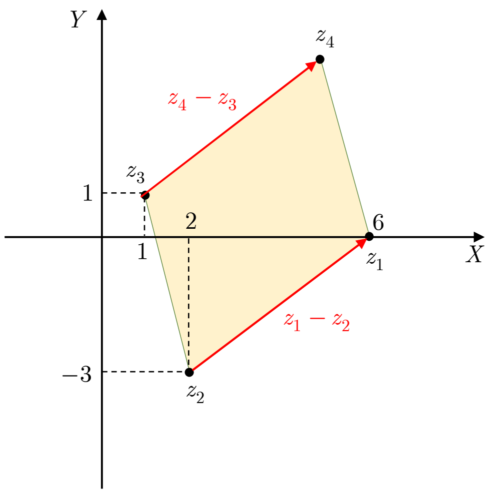
$$\Rightarrow a^2=\frac{-15+\sqrt{225+64}}{2}=\frac{-15+17}{2}=1 \Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow b=\frac{-4}{a}=\mp 4$$

es decir, $(1-4i)^2=-15-8i$ y por tanto

$$z=\frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8i}}{2}=\frac{3-2i\pm(1-4i)}{2}=\begin{cases} 2-3i \\ 1+i \end{cases}$$

son las otras dos soluciones de la ecuación. La ecuación tiene por tanto como soluciones a

$$z_1=6, \qquad z_2=2-3i, \qquad z_3=1+i.$$



Si el cuarto vértice, afijo de z_4, está en el primer cuadrante, será $z_4-z_3=z_1-z_2$, es decir,

$$z_4=z_3+z_1-z_2=1+i+6-2+3i=5+4i\,.$$