15. Dado $n \in \mathbb{N}$, se considera la ecuación

$$x^{2n} - 1 = 0\,.$$

a) Calcule sus soluciones en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

b) Demuestre que, para $x \neq \pm 1$ y $n > 1$, se cumple la *identidad de Cotes*:

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right)$$

c) Aplicación: Halle el valor del producto:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\cdots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

Este problema es el 10.2 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

SOLUCIÓN: a) Las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $x^{2n} = 1$ son las $2n$ raíces $2n$-ésimas de la unidad:

$$x_k = e^{2k\pi i/2n} = e^{k\pi i/n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$$

b) Para $k=0$ y $k=n$, se obtienen las raíces reales 1 y -1, y las $2n-2$ raíces complejas restantes pueden agruparse en $n-1$ parejas de raíces conjugadas entre sí, por ser, para cada $k=1,\ldots,n-1$:

$$x_{2n-k}=e^{(2n-k)\pi i/n}=e^{2\pi i}\cdot e^{-k\pi i/n}=e^{-k\pi i/n}=\overline{e^{k\pi i/n}}=\overline{x}_k$$

Según lo obtenido en el apartado a), el polinomio $x^{2n}-1$ factoriza en $\mathbb{C}[x]$ así:

$$x^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}(x-x_k)=(x-1)(x+1)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-\overline{x}_k)$$

Dado que es:

$$(x-x_k)(x-\overline{x}_k)=x^2-(x_k+\overline{x}_k)x+(x_k\cdot\overline{x}_k)=x^2-2x\,\mathrm{Re}(x_k)+|x_k|^2=x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1$$

el producto anterior queda:

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$$

De aquí se sigue que, si $x \neq \pm 1$:

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$$

c) Tomando ahora límites cuando $x \to 1$ en ambos miembros de la igualdad anterior se obtiene para el primer miembro, con la ayuda de la *Regla de L'Hôpital*:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2nx^{2n-1}}{2x}=n$$

Para el segundo miembro, como es

$$1-\cos\frac{k\pi}{n}=1-\left(\cos^2\frac{k\pi}{2n}-\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}\right)=2\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}$$

deducimos:

$$\lim_{x\to 1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(2-2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=2^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=$$

$$=2^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}2\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}=2^{2n-2}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}$$

Si ahora igualamos el valor de ambos límites, se obtiene:

$$n = 2^{2n-2} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2n}$$

es decir,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2n} = \frac{n}{2^{2n-2}}$$

y como es $\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2n} > 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n-1$, resulta al extraer raíces cuadradas en ambos miembros:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2n} = \sqrt{\frac{n}{2^{2n-2}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$