3. Determine el número complejo

$$A = 1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + z^{36}$$

donde $z = e^{2\pi i/7}$.

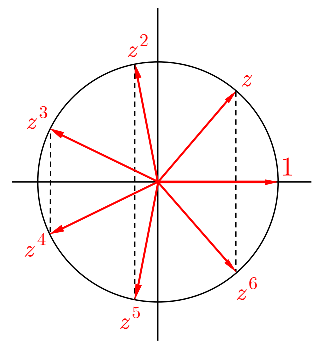
Este problema es el 98.1 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: La expresión de A puede simplificarse si se tiene en cuenta que $z = e^{2\pi i/7}$ es una de las raíces séptimas de la unidad, esto es, $z^7 = 1$. En concreto, como son $z^9 = z^2$, $z^{16} = z^2$, $z^{25} = z^4$ y $z^{36} = z$, resulta la siguiente expresión para A:

$$A = 1 + z + z^4 + z^2 + z^2 + z^4 + z = 1 + 2\left(z + z^2 + z^4\right) = 1 + 2w$$

Para determinar el valor de $w = z + z^2 + z^4$ reparemos en que, por ser $z \neq 1$, es

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{z^7 - 1}{z - 1} = 0 \tag{1}$$



Como son $z^4=\bar{z}^3$, $z^5=\bar{z}^2$, $z^6=\bar{z}$, si usamos las propiedades de la conjugación, la igualdad (1) puede escribirse:

$$1+(z+z^2+z^4)+\overline{z+z^2+z^4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1+w+\bar{w}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1+2\ \mathrm{Re}\,w=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,w=-\tfrac{1}{2} \tag{2}$$

por lo que sólo necesitamos ya calcular el valor de $\mathrm{Im}\,w$. Recurrimos para ello al módulo de $w=z+z^2+z^4$:

$$|w|^2=\left|z+z^2+z^4\right|^2=(z+z^2+z^4)\cdot\overline{(z+z^2+z^4)}=(z+z^2+z^4)\cdot(z^6+z^5+z^3)=$$

$$=z^7+z^6+z^4+z^8+z^7+z^5+z^{10}+z^9+z^7=1+z^6+z^4+z+1+z^5+z^3+z^2+1=2$$

y por tanto:

$$|w|=\sqrt{2} \tag{3}$$

De (2) y (3) se sigue entonces que:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(\operatorname{Im} w)^2=2 \quad \Rightarrow \quad (\operatorname{Im} w)^2=\frac{7}{4}$$

Para deducir el signo de $\operatorname{Im} w$, basta tener en cuenta que

$$\operatorname{Im} w=\operatorname{Im}(z+z^2+z^4)=\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{8\pi}{7}=\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)+\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}>0$$

por lo que $\operatorname{Im} w=\frac{\sqrt{7}}{2}$ y por tanto

$$A=1+2w=1+2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)=\sqrt{7}\,i$$