P2. Problema 10.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

En un portal de una casa de cinco vecinos hay seis buzones, uno para cada vecino y el restante para las devoluciones. Un repartidor de propaganda que llega al portal lleva cinco sobres con el nombre de cada vecino, pero ha olvidado las gafas en casa y, como no ve nada, reparte al azar los cinco sobres en los seis buzones. Se pide:

a) La probabilidad de que ningún sobre caiga en el buzón de las devoluciones.

b) La probabilidad de que, como mínimo, uno de los cinco vecinos reciba en su buzón el sobre con su nombre.

Resuelto en Vol. 4. Ej 97.3

Apartado (a):

Numeremos los buzones del 1 al 6, de modo que el buzón 6 es el de las devoluciones.

Sea V_i = "*el buzón i-ésimo no recibe ningún sobre*".

- El número de casos posibles es

$$|\Omega| = V_{6,5} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

- El número de casos favorables al suceso V_6 es el número de formas de distribuir los 5 sobres en los 5 buzones restantes, por tanto:

$$|V_6| = P_5 = 5!$$

Por tanto

$$p(V_6) = \frac{|V_6|}{|\Omega|} = \frac{5!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

Apartado (b):

Sea $A_i =$ "*el vecino i-ésimo recibe correctamente su sobre*".

La probabilidad a calcular es

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)$$

Probabilidad a calcular mediante la fórmula de Inclusión-Exclusión:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = \sum_{i=1}^{5} p\left(A_i\right) - \sum_{1\leq i<j\leq 5} p\left(A_i \cap A_j\right)$$

$$+ \sum_{1\leq i<j<k\leq 5} p\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \sum_{1\leq i<j<k<l\leq 5} p\left(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l\right)$$

$$+p\left(\bigcap_{i=1}^{5} A_i\right)$$

Apartado (b):

- $p(A_i) = \dfrac{1}{6}$
- $p(A_i \cap A_j) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{30}$
- $p(A_i \cap A_j \cap A_k) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{120}$
- $p(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{360}$
- $p(\bigcap_{i=1}^{5} A_i) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{720}$

Apartado (b):

Por tanto:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = 5 \cdot \frac{1}{6} - \binom{5}{2} \cdot \frac{1}{30} + \binom{5}{3} \cdot \frac{1}{120} - \binom{5}{4} \cdot \frac{1}{360} - \frac{1}{720}$$

$$= \frac{137}{240}$$