C7

Optimización de funciones

1. Extremos absolutos de una función real de variable real

1.1. Máximo y mínimo de una función real de variable real: Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y una función real $f : A \to \mathbb{R}$, se llama *máximo de* f o, para evitar ambigüedades, *máximo absoluto* de f o, también, *máximo global* de f y se escribe $\max f$ al máximo del conjunto imagen de f, esto es, al mayor de los valores $f(x)$, donde $x \in A$, si es que tal número real existe. Es decir,

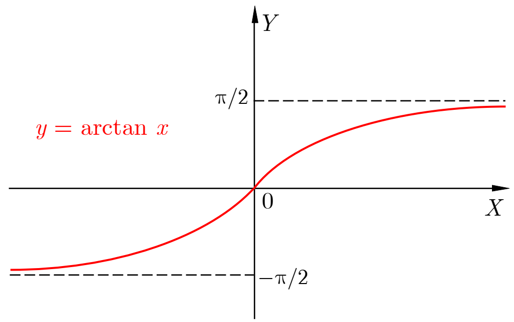
$$\max f = \max f(A) = \max \left\{ f(x) : x \in A \right\}$$

En otras palabras, $M = \max f$ si y sólo si existe algún $x_0 \in A$ tal que $f(x) \le f(x_0) = M$, sea cual sea $x \in A$. Análogamente, se define el mínimo de f como el número real

$$\min f = \min \left\{ f(x) : x \in A \right\}$$

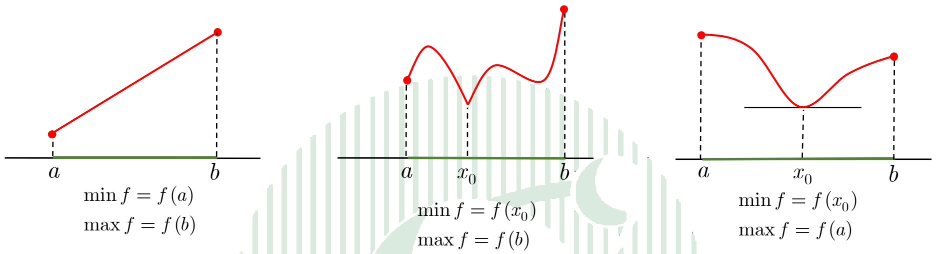
siempre que exista el mínimo del conjunto $f(A)$. Se entiende por *optimizar* la función f el cálculo del máximo y/o el mínimo de f en el conjunto A, cuando existen, o la demostración de su inexistencia en caso contrario.

1.2. Observaciones: Como ya se ha anticipado, el máximo o el mínimo de una función real de variable real no tienen por qué existir, incluso en el caso de funciones acotadas. Obsérvese el comportamiento de la función arco tangente, cuya gráfica se ha dibujado junto a estas líneas.



Se trata de una función acotada en todo $\mathbb{R}$, pues para cada $x \in \mathbb{R}$ es $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ y además son $\inf f = \inf f(\mathbb{R}) = -\frac{\pi}{2}$ y $\sup f = \sup f(\mathbb{R}) = \frac{\pi}{2}$. A pesar de ello no existen ni el máximo ni el mínimo de f.

1.3. Máximo y mínimo de una función continua sobre un intervalo compacto: Cuando la función f es continua y el intervalo I es compacto, esto es, de la forma $I=[a,b]$, con $a,b\in\mathbb{R}$ y $a<b$, el *Teorema de Weierstrass* (véase el epígrafe 7.7 del documento C4) garantiza la existencia de máximo y mínimo absoluto para f en el intervalo I. En tal caso, dichos extremos absolutos se alcanzan, bien en algunos de los puntos críticos de f (puntos en los que se anula la derivada), bien en algún punto donde f no es derivable, bien en alguno de los dos extremos a y b del intervalo I.



1.4. Ejemplo: Calcule, si es que existen, el máximo y el mínimo absoluto en el intervalo $[-2,5]$ de la función definida por

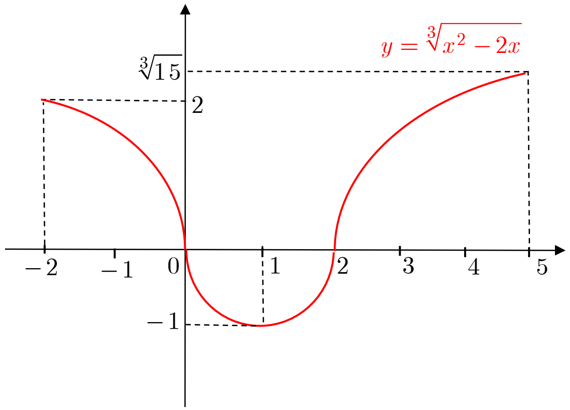
$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}$$

SOLUCIÓN: La función f está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$, luego en particular lo es en el intervalo cerrado y acotado $[-2,5]$, así es que por el Teorema de Weierstrass, f alcanza máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo. Para determinarlos, recurrimos a la derivada: La función f es derivable en cada $x\in[-2,5]$, salvo quizá en los que cumplen $x^2-2x=0$, es decir, salvo en $x=0$ y $x=2$, y para cada $x\in[-2,5]$, $x\neq 0$ y $x\neq 2$, la derivada es

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2(x-2)^2}}.$$

La derivada sólo se anula cuando $x=1$, luego debe estudiarse el signo de la derivada en los intervalos $[-2,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ y $(2,5]$, que se recoge en el esquema tradicional:

	-2		0		1		2		5
Signo de $f'(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
Crecimiento de $f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	



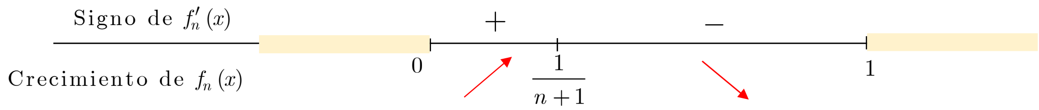
Resulta así, por ser f continua en toda la recta, que f decrece en el intervalo $[-2,1]$ y crece en el intervalo $[1,5]$. Por tanto, f alcanza mínimo absoluto en $x=1$ y dicho mínimo es $f(1)=-1$. El máximo absoluto se alcanza en $x=-2$ o en $x=5$. Dado que $f(-2)=\sqrt[3]{8}=2$ y $f(5)=\sqrt[3]{15}>2$, dicho máximo se encuentra en $x=5$ y es $f(5)=\sqrt[3]{15}$.

1.5. Ejemplo: Calcule el máximo absoluto M_n de la función $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que $f_n(x)=x(1-x)^n$, para $x\in[0,1]$ y $n\in\mathbb{N}$, y determine $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$.

SOLUCIÓN: Debe, en primer lugar, calcularse el máximo global de f_n, que existe dada su continuidad en todo el intervalo. La función es derivable en cada $x\in[0,1]$ y:

$$f_n'(x)=(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]$$

Resulta así que $f_n'(x)=0$ sólo si $x=1$ o $x=\frac{1}{n+1}$. Además, $f_n{}'(x)>0$ si $0\le x<\frac{1}{n+1}$ y $f_n'(x)<0$ si $\frac{1}{n+1}<x<1$, lo que significa que f_n es estrictamente creciente en el intervalo $\left[0,\frac{1}{n+1}\right]$ y estrictamente decreciente en el intervalo $\left[\frac{1}{n+1},1\right]$.



Por tanto, f_n alcanza su máximo global sólo en $x = \frac{1}{n+1}$. Dicho máximo absoluto es

$$M_n = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n .$$

Y entonces

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = 0 \cdot e^{-1} = 0$$

1.6. Máximo y mínimo de una función continua sobre un intervalo cualquiera: Cuando el intervalo I no es compacto, esto es, cuando no es cerrado o no es acotado, o bien la función f no es continua en algunos puntos del intervalo, no está garantizada la existencia ni del máximo ni del mínimo absoluto de f en I, como ya se ha comprobado.

Como pauta general para la determinación de dichos valores óptimos en tales condiciones, puede estudiarse la monotonía de f a través del signo de su derivada en aquellos subintervalos de I en los que exista dicha derivada, además de obtener los límites de f tanto en los extremos del intervalo (sean éstos finitos o infinitos) como en aquellos puntos en los que f no tenga derivada. Del estudio anterior se deducen los extremos absolutos de f o la inexistencia de alguno de ambos.

1.7. Ejemplo: Demuestre que, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, es

$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leq 2$$

SOLUCIÓN: El problema sólo requiere del cálculo del máximo y del mínimo global de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$$

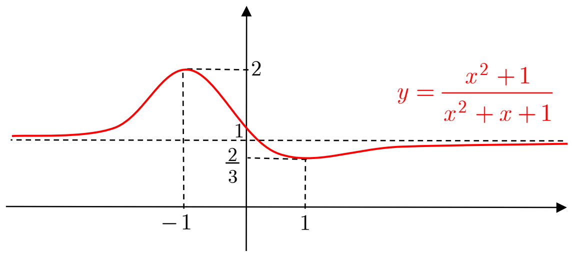
La función f está definida, es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, pues el denominador x^2+x+1 no se anula para ningún valor real de x. Su derivada es, en cada $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

La derivada sólo se anula en $x=-1$ y $x=1$, siendo además $f'(x)>0$ si $x<-1$, $f'(x)<0$ si $-1<x<1$ y $f'(x)>0$ si $x>1$. De ello y de la continuidad de f se deduce que f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty,-1]$, estrictamente decreciente en $[-1,1]$ y estrictamente creciente en $[1,+\infty)$.

		-1		1	
Signo de $f'(x)$	$+$		$-$		$+$
Crecimiento de $f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Como son $f(-1)=2$, $f(1)=\frac{2}{3}$ y $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$, se deduce que f alcanza máximo global en $x=-1$, siendo dicho máximo igual a 2, y f alcanza mínimo global en $x=1$, siendo dicho mínimo $\frac{2}{3}$. Por tanto, para cualquier $x\in\mathbb{R}$ es



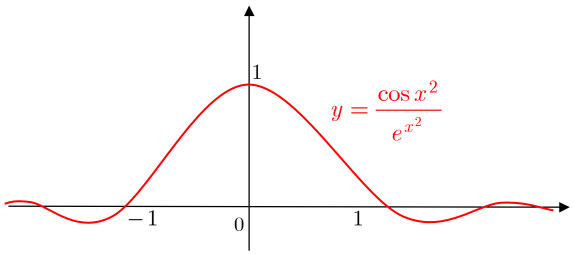
$$\frac{2}{3}\le f(x)\le 2\,.$$

1.8. Ejemplo: Calcule el máximo de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\frac{\cos x^2}{e^{x^2}}$$

SOLUCIÓN: En lugar de razonar como en el ejemplo anterior, resulta mucho más cómodo en este caso particular determinar el valor máximo de la función f como sigue: Para cada $x\in\mathbb{R}$ es $x^2\geq 0$ y dado que la función exponencial es estrictamente creciente, necesariamente es $e^{x^2}\geq e^0=1$ y por tanto $1/e^{x^2}\leq 1$. Teniendo en cuenta que, también para todo $x\in\mathbb{R}$ es $\left|\cos x^2\right|\leq 1$, se tiene así para cualquier $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{\cos x^2}{e^{x^2}}\leq\cos x^2\leq 1$$



Como $f(0)=1$, será $f(x)\leq f(0)$ para todo $x\in\mathbb{R}$ y por tanto, $\max f=f(0)=1$.

1.9. Ejemplo: Calcule, si es que existen, el máximo y el mínimo absoluto de la función

$$f(x)=\mathrm{L}\,(4x-x^2)$$

en su dominio de definición.

SOLUCIÓN: La función f está definida y es continua cuando $4x-x^2>0$, es decir, en el intervalo $(0,4)$, siendo además

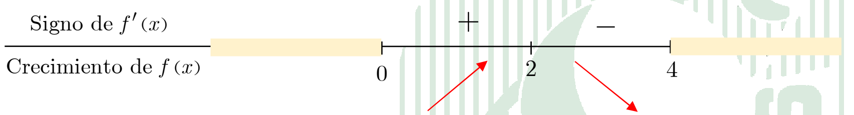
$$\lim_{x\to 0^+}\mathrm{L}\,(4x-x^2)=(\mathrm{L}\,0^+)=-\infty,$$

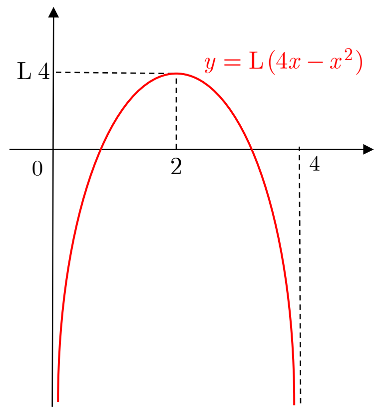
$$\lim_{x\to 4^-} \mathrm{L}\,(4x-x^2) = (\mathrm{L}\,0^+) = -\infty$$

Cualquiera de los dos límites anteriores demuestra que no existe el mínimo de f en el intervalo $(0,4)$. Para calcular el máximo, recurrimos a la derivada de f, que es en cada $x \in (0,4)$:

$$f'(x) = \frac{4-2x}{4x-x^2}$$

Dicha derivada sólo se anula cuando $4-2x=0$, es decir, en $x=2$, y ocurre que si $0<x<2$, entonces $f'(x)>0$, mientras que si $2<x<4$, es $f'(x)<0$.





De lo anterior y de la continuidad de f se deduce que f es estrictamente creciente en el intervalo $(0,2]$ y estrictamente decreciente en el intervalo $[2,4)$ y que, consecuencia de ello, f alcanza máximo absoluto en $x=2$, que es

$$\max f = f(2) = \mathrm{L}\,4\,.$$

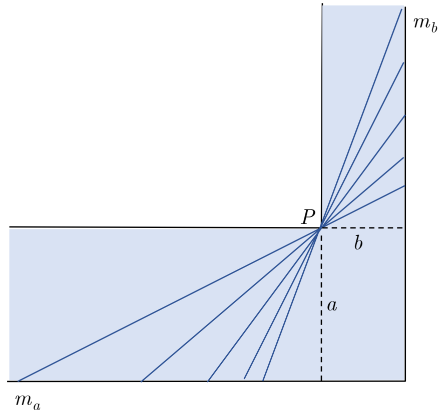
2. Problemas de optimización

Los problemas de optimización surgen en numerosas disciplinas tales como la Física, la Ingeniería, la Economía o la Biología. En ellos, la magnitud que deberá ser optimizada será una función (*función objetivo*) de una o varias variables sujetas a determinadas condiciones (*restricciones*) sobre ellas. Se proponen a partir de aquí unos cuantos ejemplos de dichos problemas.

2.1. Ejemplo: A un río de anchura a metros se le ha construido un canal de anchura b metros $(b<a)$ y con el que forma un ángulo recto. ¿Cuál es la longitud máxima que podrá tener un barco que navegue por el río para poder pasar a navegar por el canal?

Este problema figura resuelto en la página 326 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y aparece también en la página 111 del volumen 2 y es asimismo el 97.12 del volumen 4.

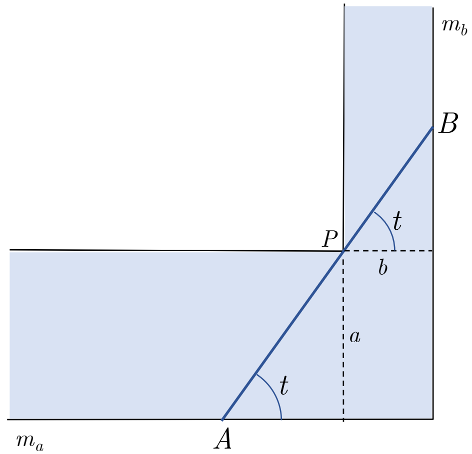
SOLUCIÓN: Sean m_a y m_b los márgenes exteriores del río y del canal, respectivamente y considérense todos los segmentos con origen en m_a, extremo en m_b y que pasan por la esquina P en torno a la que debe girar el barco. Supóngase que, entre dichos segmentos, el de longitud mínima mide ℓ metros y que el barco tiene longitud d.



Podemos suponer que el barco viaja apoyado en los márgenes m_a y m_b al hacer la curva (que es la forma de hacerlo más alejada de P). Si es $d<\ell$, no tocará la esquina P porque su longitud es menor que todas las longitudes de los segmentos que se apoyan en m_a y m_b y pasan por P; si $d=\ell$, el barco tocará la esquina P pero no la rebasará cuando esté en la dirección del segmento de longitud mínima; si fuese $d>\ell$, el barco se saldría del cauce en la esquina P al ponerse en la citada dirección.

Por tanto, la mayor longitud del barco que permite doblar la esquina es la mínima de las longitudes de los segmentos AB que pasan por P, donde $A\in m_a$, $B\in m_b$. La longitud $\ell=AB$ de cualquier segmento de los anteriores puede expresarse en función del ángulo $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ que forma el segmento APB con la semirrecta m_a, mediante:

$$\ell(t)=AP+PB=\frac{a}{\operatorname{sen} t}+\frac{b}{\cos t}$$



Como es

$$\ell'(t) = \frac{b\operatorname{sen}^3 t - a\cos^3 t}{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t} = \frac{\cos t\cdot(b\tan^3 t - a)}{\operatorname{sen}^2 t}$$

y $\cos t \neq 0$ para los $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, ocurre que $\ell'(t) = 0$ cuando $b\tan^3 t = a$, es decir, cuando $t = t_0 = \arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. Además, si $0 < t < t_0$, entonces $\tan t < \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ y $b\tan^3 t - a < 0$, por lo que $\ell'(t) < 0$, mientras que si $t_0 < t < \frac{\pi}{2}$, por simétricas razones es $\ell'(t) > 0$. De ello se sigue que ℓ es estrictamente decreciente en el intervalo $(0, t_0]$ y estrictamente creciente en el intervalo $[t_0, \frac{\pi}{2})$, así que ℓ alcanza su mínimo absoluto en $t_0 = \arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. Como son

$$\cos t_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t_0}} = \frac{b^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}, \qquad \operatorname{sen} t_0 = \frac{\tan t_0}{\sqrt{1+\tan^2 t_0}} = \frac{a^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}},$$

la longitud máxima del barco, que es la mínima de las longitudes de los segmentos que se apoyan en ambas márgenes y tocan a P, es por tanto,

$$\ell(t_0) = \frac{a}{\operatorname{sen} t_0} + \frac{b}{\cos t_0} = a\frac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}} + b\frac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}} =$$

$$= (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2} \text{ metros } \blacksquare$$

La proposición que sigue se utiliza con mucha frecuencia y sirve para transformar el cálculo del máximo o del mínimo de una función en un intervalo en el de otra función relacionada con ella y para la que dicho cálculo resulta más sencillo. Esta otra función es la composición de la función original con otra estrictamente monótona.

2.2. Teorema: *Sean D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$ y $h : f(D) \to \mathbb{R}$ dos funciones reales. Entonces:*

i) Si h es estrictamente creciente, la función f alcanza máximo absoluto (resp. mínimo absoluto) en $\boldsymbol{x_0} \in D$ si y sólo si $h \circ f$ alcanza máximo absoluto (resp. mínimo absoluto) en dicho punto $\boldsymbol{x_0}$.

ii) Si h es estrictamente decreciente, f alcanza máximo absoluto (resp. mínimo absoluto) en $\boldsymbol{x_0} \in D$ si y sólo si $h \circ f$ alcanza mínimo absoluto (resp. máximo absoluto) en dicho punto $\boldsymbol{x_0}$.

DEMOSTRACIÓN DE i): Si f alcanza máximo absoluto en $\boldsymbol{x_0} \in D$ y se toma $\boldsymbol{x} \in D$ cualquiera, entonces será $f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x_0})$ lo que, por ser h estrictamente creciente, supone que $h(f(\boldsymbol{x})) \le h(f(\boldsymbol{x_0}))$, así que $h \circ f$ alcanza máximo absoluto en $\boldsymbol{x_0}$. Si, por el contrario, es $h \circ f$ la que alcanza máximo global en $\boldsymbol{x_0}$ y se toma $\boldsymbol{x} \in D$, entonces $h(f(\boldsymbol{x})) \le h(f(\boldsymbol{x_0}))$, pero esto obliga a que sea $f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x_0})$, pues si fuese $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x_0})$, por ser h estrictamente creciente, también sería $h(f(\boldsymbol{x})) > h(f(\boldsymbol{x_0}))$, imposible, luego f alcanza máximo absoluto en $\boldsymbol{x_0}$.

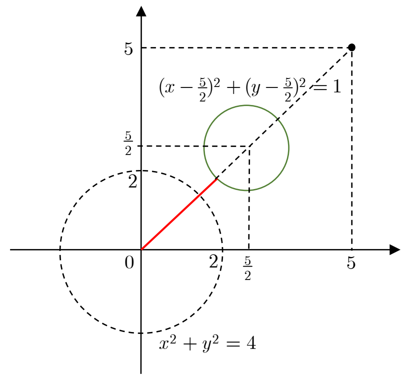
2.3. Ejemplo: Halle la mínima distancia del origen de coordenadas al lugar geométrico del punto medio de un segmento, siendo uno de sus extremos el punto (5,5) y el otro extremo un punto móvil de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Este problema figura resuelto en la página 327 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos de forma distinta a que aquí se expone.

SOLUCIÓN: Si (x, y) es un punto del lugar, sus coordenadas son las medias aritméticas de las respectivas coordenadas del punto $(5,5)$ y de algún punto $(2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi)$, de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. El lugar admite por tanto como ecuaciones paramétricas a

$$\begin{cases} x = \frac{5+2\cos t}{2} = \frac{5}{2} + \cos t \\ y = \frac{5+2\operatorname{sen} t}{2} = \frac{5}{2} + \operatorname{sen} t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi)$$

Se trata de la circunferencia de centro el punto $(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ y radio 1 (es la circunferencia transformada de la original por la homotecia de centro $(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ y razón $\frac{1}{2}$). Debe por tanto calcularse el mínimo de la función $d:[0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{R}$ que a cada $t\in[0,2\pi)$ le asigna la distancia del origen al punto $(\frac{5}{2}+\cos t,\frac{5}{2}+\operatorname{sen} t)$ del lugar, esto es, de la función



$$d(t)=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+\cos t\right)^2+\left(\frac{5}{2}+\operatorname{sen} t\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{2}+5\cos t+5\operatorname{sen} t}=\sqrt{\frac{27}{2}+5\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Dado que la función $s\mapsto s^2$ es estrictamente creciente en el intervalo $[0,+\infty)$, según 2.2.i), la función d alcanza su mínimo exactamente donde lo alcanza la función $D=d^2$, esto es, la definida por

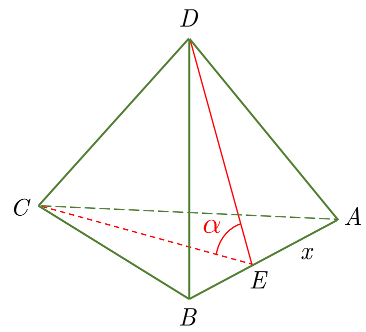
$$D(t)=\frac{27}{2}+5\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

De nuevo, como la función $s\mapsto\frac{27}{2}+5\sqrt{2}s$ es estrictamente creciente, la función D es mínima cuando lo es $\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{4})$, esto es, cuando $\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{4})=-1$, o lo que es igual, cuando $t+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$, es decir, para $t=\frac{5\pi}{4}$. La mínima distancia del origen al lugar geométrico es por tanto

$$d\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\left(\frac{5-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{2}-2}{2}$$

2.4. Ejemplo: Consideremos un tetraedro regular de vértices A, B, C y D. Si el punto E recorre la arista AB, ¿cuándo es máximo el ángulo $\measuredangle CED$?

Este problema es el 06.24 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.



SOLUCIÓN: Por razones de semejanza, no hay pérdida de generalidad en suponer que el tetraedro tiene arista de longitud 1. Sea α el ángulo $\measuredangle CED$ y sea $x \in [0,1]$ la longitud del segmento AE.

Si aplicamos el *Teorema del coseno* al triángulo AEC se tiene:

$$EC^2 = AE^2 + AC^2 - 2AE \cdot AC \cdot \cos\frac{\pi}{3}, \qquad \text{es decir,} \qquad EC^2 = x^2 + 1 - 2x \cdot \frac{1}{2} = x^2 - x + 1$$

Por evidente simetría, la longitud EC es igual a la longitud ED y al aplicar de nuevo el *Teorema del coseno*, pero ahora al triángulo ECD, se tiene:

$$1 = CD^2 = EC^2 + ED^2 - 2EC \cdot ED \cdot \cos\alpha$$

esto es,

$$1 = (x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) - 2(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 \cos\alpha$$

o bien:

$$1 = 2(x^2 - x + 1)(1 - \cos\alpha)$$

Y al despejar $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2(x^2 - x + 1)} = 1 - \frac{1}{2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]} \tag{1}$$

Dado que la función coseno es estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, según 2.2.ii), el ángulo α será máximo cuando $\cos\alpha$ sea mínimo, así que debemos buscar el valor de $x \in [0,1]$ que haga mínima la función dada en (1), lo que equivale, por ser la función $t \in (0, +\infty) \mapsto \frac{1}{t}$ estrictamente decreciente, a calcular el valor de $x \in [0,1]$ que hace mínimo el denominador $2[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]$, cosa que ocurre cuando $x = \frac{1}{2}$.

Así, pues, el ángulo $\measuredangle CED$ es máximo cuando E es el punto medio del lado AB. Sustituyendo $x=\frac{1}{2}$ en (1) se obtiene $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, es decir, $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$ ■

Dos resultados muy útiles (especialmente el primero) que ahorran numerosos esfuerzos en la determinación de máximos o mínimos absolutos son los siguientes:

3. Producto máximo de factores positivos de suma constante

3.1. Teorema: *Un producto de factores positivos de suma constante es el máximo posible cuando (y sólo cuando) todos los factores son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x_1,\ldots,x_n$ números reales positivos tales que $x_1+\cdots+x_n=k$. Según la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica de números reales positivos, se cumple que

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

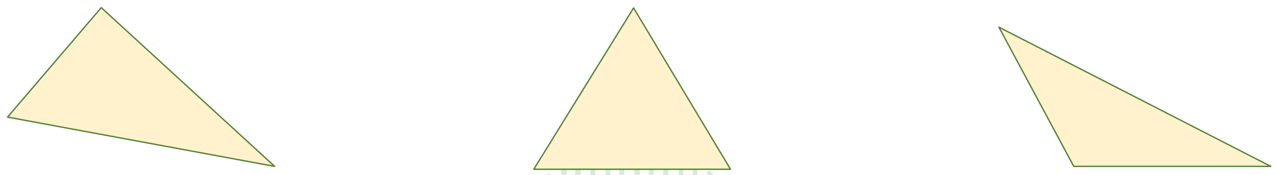
y por tanto

$$x_1x_2\cdots x_n\le\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n=\left(\frac{k}{n}\right)^n=\frac{k}{n}\cdot\frac{k}{n}\overset{n}{\cdots}\frac{k}{n}$$

Como la igualdad entre la media aritmética y la geométrica de números positivos sólo se da cuando todos los números son iguales, la desigualdad anterior sólo es igualdad cuando $x_1=\cdots=x_n=\frac{k}{n}$, y no hay más que probar.

3.2. Ejemplo: De todos los triángulos de perímetro constante, halle el de mayor área.

Este problema es el 98.7 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.



SOLUCIÓN: La *fórmula de Herón* para el área de un triángulo de lados x, y, z y semiperímetro p es:

$$S=\sqrt{p\,(p-x)(p-y)(p-z)}$$

S es máxima cuando lo es $\frac{S^2}{p}=(p-x)(p-y)(p-z)$, y la suma de los tres factores es constante, pues

$$(p-x)+(p-y)+(p-z)=3p-(x+y+z)=3\,p-2\,p=p$$

Un producto de factores positivos de suma constante alcanza su valor máximo solo cuando dichos factores son iguales, así que $p-x=p-y=p-z$, es decir, $x=y=z$, lo que, por ser $x+y+z=2p$, supone que $x=y=z=\frac{2p}{3}$.

Por tanto, de todos los triángulos de perímetro constante $2p$, el de mayor área es el equilátero, de lado $\frac{2p}{3}$ y área:

$$S=\sqrt{p\left(p-\frac{2p}{3}\right)^3}=\frac{\sqrt{3}}{9}\,p^2$$

4. Suma mínima de números positivos de producto constante

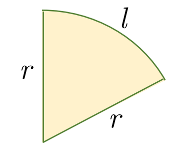
4.1. Teorema: *Una suma de números reales positivos cuyo producto es constante es la mínima posible cuando (y sólo cuando) todos los números son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x_1,\dots,x_n$ números reales positivos tales que $x_1x_2\cdots x_n = k$. De la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica de números reales positivos se deduce que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = n\cdot\sqrt[n]{k} = \sqrt[n]{k} + \sqrt[n]{k} + \overset{n}{\cdots} + \sqrt[n]{k}$$

Dado que la media aritmética y la media geométrica de números positivos sólo son iguales cuando dichos números son todos iguales, la desigualdad anterior sólo es igualdad cuando $x_1 = \cdots = x_n = \sqrt[n]{k}$.

4.2. Ejemplo: De todos los sectores circulares de área 1, calcule el de perímetro mínimo.



UNA SOLUCIÓN: El área de un sector circular de radio $r>0$ y arco $l>0$ es $A=\frac{1}{2}l\cdot r$ y su perímetro es $P=l+2r$. Si el área es igual a 1, entonces $l\cdot r = 2$, así que se trata de hacer mínima la suma de números positivos $l+2r$, con la condición $l\cdot r=2$, o la equivalente $l\cdot 2r = 4$.

Dado que, según 4.1, una suma de números positivos de producto constante sólo es mínima cuando dichos sumandos son iguales, el perímetro $P=l+2r$ es mínimo sólo cuando $l=2r$, lo que, por ser $l\cdot r=2$, significa que $2r^2=2$, es decir, $r=1$ y por tanto $l=2$. Es decir, el sector circular de área 1 cuyo perímetro es el mínimo posible es el de radio $r=1$ y arco de longitud $l=2$. Dicho perímetro mínimo es $P=2+2=4$.

OTRA SOLUCIÓN: Se trata de calcular el mínimo absoluto de la función $P = l + 2r$ donde $l, r > 0$ y $l \cdot r = 2$. Como es $l = \dfrac{2}{r}$, será $P = \frac{2}{r} + 2r$ y debe calcularse el mínimo absoluto de la función $P : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$P(r) = \frac{2}{r} + 2r$$

La función P es derivable en $(0, +\infty)$ y además, para cada $r > 0$ es:

$$P'(r) = -\frac{2}{r^2} + 2$$

La derivada es nula cuando $2r^2 = 2$, esto es, cuando $r = \pm 1$, de las cuales sólo es admisible la solución positiva $r = 1$. Como además es $P'(r) < 0$ si $r \in (0,1)$ y $P'(r) > 0$ si $r \in (1, +\infty)$, la función P es estrictamente decreciente en $(0,1]$ y estrictamente creciente en $[1, +\infty)$, así que P tiene mínimo global en $r = 1$, lo que supone $l = 2$. El perímetro mínimo es $P(1) = 2 + 2 = 4$.