4. Dados los números reales x_1 e y_1 tales $0 < x_1 < y_1$, se define la recurrencia:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

a) Demuestre que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < y_n < \cdots < y_2 < y_1$.

b) Demuestre que ambas sucesiones convergen a un límite común y calcúlelo.

Este problema figura resuelto en la página 523 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN:

a) Se demuestra inmediatamente por inducción que $x_n > 0$ e $y_n > 0$ a partir de que son $0 < x_1 < y_1$.

- $x_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Razonamos por inducción. Para $n = 1$ es cierto por hipótesis, y si suponemos que $x_n < y_n$ para cierto $n \geq 1$, entonces

$$y_{n+1}-x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}-\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}=\frac{(x_n+y_n)^2-4x_ny_n}{2\,(x_n+y_n)}=\frac{(x_n-y_n)^2}{2\,(x_n+y_n)}>0$$

y por tanto $x_{n+1}<y_{n+1}$, así que $x_n<y_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

- $x_n<x_{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

  Como es $x_n<y_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, deducimos que

$$x_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}>\frac{2x_ny_n}{2y_n}=x_n$$

- $y_{n+1}<y_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

  Como es $x_n<y_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, deducimos que

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}<\frac{2y_n}{2}=y_n$$

b) La sucesión (x_n) es estrictamente creciente y está acotada superiormente por y_1, luego (x_n) es convergente a un número real x. Por su parte, la sucesión (y_n) es estrictamente decreciente y está acotada inferiormente por x_1, luego (y_n) es convergente a un número real y. Tomando límites cuando $n \to \infty$ en la segunda igualdad recurrente, se tiene que

$$y = \frac{x+y}{2} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Si multiplicamos ambas ecuaciones recurrentes, se tiene que

$$x_n y_n = \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2} = x_{n-1}y_{n-1}$$

y por tanto,

$$x_n y_n = x_{n-1}y_{n-1} = x_{n-2}y_{n-2} = \cdots = x_1 y_1 = ab$$

es decir,

$$x_n y_n = ab$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ en la última igualdad se sigue que

$$xy = ab \quad \Rightarrow \quad x^2 = ab \quad \Rightarrow \quad x = y = \sqrt{ab} \quad \text{(media geométrica de } a \text{ y } b\text{)}$$