11. Determine a y b para que las raíces del polinomio con coeficientes reales:

$$p(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + ax + b$$

estén en progresión aritmética. Halle dichas raíces.

Este problema es el 06.16 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

SOLUCIÓN: Supongamos que las cuatro raíces de $p(x)$ están en progresión aritmética; sean éstas

$$x_1 = r - 3s, \qquad x_2 = r - s, \qquad x_3 = r + s, \qquad x_4 = r + 3s$$

Por la primera de las *fórmulas de Cardano*, se tiene que:

$$r - 3s + r - s + r + s + r + 3s = 8 \quad \Rightarrow \quad 4r = 8 \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

La segunda fórmula nos da:

$$(2-3s)(2-s) + (2-3s)(2+s) + (2-3s)(2+3s) + (2-s)(2+s) + (2-s)(2+3s) + (2+s)(2+3s) = 14$$

es decir,

$$24-10s^2=14 \quad \Rightarrow \quad s=\pm 1$$

y las cuatro raíces de $p(x)$ son

$$x_1=2-3=-1, \qquad x_2=2-1=1, \qquad x_3=2+1=3, \qquad x_4=2+3=5$$

Para determinar a y b recurrimos a las *fórmulas de Cardano* que aún no se han utilizado. De la tercera resulta:

$$(-1)\cdot 1\cdot 3+(-1)\cdot 1\cdot 5+(-1)\cdot 3\cdot 5+1\cdot 3\cdot 5=-a \quad \Rightarrow \quad a=8$$

y de la cuarta, $(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5=b$, es decir, $b=-15$.

Recíprocamente, si $a=8$ y $b=-15$, las raíces del polinomio $p(x)=x^4-8x^3+14x^2+8x-15$ están en progresión aritmética. Así ocurre, pues de la aplicación sucesiva de la *Regla de Ruffini* se obtiene que:

$$p(x)=x^4-8x^3+14x^2+8x-15=(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$$

y las raíces de $p(x)$, a saber, $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$ y $x_4=5$, están en progresión aritmética. En resumen, las raíces del polinomio $p(x)$ están en progresión aritmética si, y sólo si, $a=8$ y $b=-15$.