4. Demuestre que sólo existe un triángulo cuyos lados miden números naturales consecutivos y tal que la medida de un ángulo es doble que la de otro.

SOLUCIÓN: Sean $n-1$, n, $n+1$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, las longitudes de los tres lados del triángulo y sean α, 2α, $\pi - 3\alpha$ sus tres ángulos. Como los tres ángulos son positivos, será $\pi - 3\alpha > 0$ y por tanto $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$. El *teorema de los senos* permite comparar los lados del triángulo con sus respectivos ángulos opuestos. Para ello necesitamos ordenar los ángulos del triángulo (distintos por serlo sus lados) haciendo las siguientes distinciones:

i) Para que ocurra que $\alpha < 2\alpha < \pi - 3\alpha$, es necesario y suficiente que $0 < \alpha < \frac{\pi}{5}$. En este caso, el teorema de los senos da:

$$\frac{n-1}{sen\ \alpha} = \frac{n}{sen\ 2\alpha} = \frac{n+1}{sen\ (\pi - 3\alpha)} \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$, deducimos que

$$sen\ (\pi - 3\alpha) = sen\ 3\alpha = sen\ (2\alpha + \alpha) = sen\ 2\alpha \cos\alpha + sen\ \alpha \cos 2\alpha =$$

$$= 2 sen\ \alpha\, cos^2\alpha + (2cos^2\alpha - 1)\, sen\ \alpha = sen\ \alpha\, (4cos^2\alpha - 1)$$

Si multiplicamos la igualdad (1) por $sen\,\alpha \neq 0$ y aplicamos propiedades de las proporciones, resulta:

$$n-1=\frac{n}{2\cos\alpha}=\frac{n+1}{4cos^2\alpha-1}=\frac{n}{2cos^2\alpha} \qquad (2)$$

Comparando los miembros segundo y último de (2) y después de dividir entre $\frac{n}{2\cos\alpha}$, queda, $\cos\alpha=1$ imposibilidad manifiesta por ser $0<\alpha<\frac{\pi}{5}$.

ii) Para que ocurra $\alpha<\pi-3\alpha<2\alpha$, tiene que ser $\frac{\pi}{5}<\alpha<\frac{\pi}{4}$ y razonando análogamente a i) se obtiene:

$$\frac{n-1}{sen\,\alpha}=\frac{n}{sen\,(\pi-3\alpha)}=\frac{n+1}{sen\,2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n-1=\frac{n}{4cos^2\alpha-1}=\frac{n+1}{2cos\alpha}=\frac{2n}{1+2cos\alpha} \qquad (3)$$

Comparando de nuevo el segundo miembro con el último en (3), y dividiendo ambos entre $\frac{n}{1+2cos\alpha}$ se tiene $2(1+2cos\alpha)=1$, o bien, $\cos\alpha=\frac{3}{4}$. De la igualdad entre el primer y el tercer miembro de (3):

$$n-1=\frac{n+1}{2\cdot\frac{3}{4}} \;\Rightarrow\; n=5$$

Es el triángulo de lados 4, 5 y 6.

iii) Por último, la ordenación $\pi - 3\alpha < \alpha < 2\alpha$ es equivalente a $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$. Siguiendo las pautas anteriores se obtiene

$$\frac{n-1}{sen\,(\pi - 3\alpha)} = \frac{n}{sen\,\alpha} = \frac{n+1}{sen\,2\alpha} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{4cos^2\alpha - 1} = n = \frac{n+1}{2cos\alpha} = \frac{2n}{4cos^2\alpha + 2cos\alpha - 1} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \; 4cos^2\alpha + 2cos\alpha - 3 = 0$$

cuya única solución factible es $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$, lo que según (4) obligaría a que

$$\frac{n+1}{n} = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

cosa imposible por ser racional el primer miembro e irracional el segundo.

Se sigue de i), ii) y iii) que el único triángulo posible en las condiciones del enunciado es el de lados 4, 5 y 6.