Problema 2. Se considera una elipse y sea A uno de sus puntos. Para cada punto X de la elipse, sea X' el punto medio del segmento AX. Determine el lugar geométrico descrito por X' cuando X recorre la elipse. Calcúlese dicho lugar para la elipse $4x^2+9y^2-8x-36y-140=0$ y el punto $A(4,6)$.

Este problema es el 02.21 del volumen 4 y allí figura resuelto

Solución:

La transformación descrita $X \longmapsto X'$ que a cada punto de la elipse le hace corresponder el punto medio del segmento AX es tal que $\overrightarrow{AX'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AX}$, es decir, es la homotecia de centro A y razón $\frac{1}{2}$.

Cualquier homotecia de razón k transforma elipses en elipses con centro el homotético del centro de la elipse inicial, con ejes paralelos a los de la original y cuyos semiejes miden el resultado de multiplicar por $|k|$ la longitud de los semiejes de la elipse inicial. Por ello, el lugar geométrico de los puntos X' que pide nuestro problema es la elipse cuyo centro es el punto medio del segmento que une A con el centro de la elipse original, con ejes paralelos a los de dicha elipse, y cuyos semiejes son la mitad de los de aquélla.

En el caso de la elipse $4x^2+9y^2-8x-36y-140=0$, identificamos su centro y la longitud de sus semiejes manipulando la ecuación:

$$4(x^2-2x)+9(y^2-4y)=140 \quad \Leftrightarrow \quad 4(x-1)^2+9(y-2)^2=180$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$$

Se trata por tanto de la elipse de centro $C(1,2)$, de ejes paralelos a los coordenados y con semiejes $3\sqrt{5}$ y $2\sqrt{5}$. Según lo dicho en el caso general, el centro C' de la elipse solución es el punto medio del segmento AC, esto es, $C' = \left(\frac{4+1}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 4\right)$ y sus semiejes miden $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ y $\sqrt{5}$, es decir, es la elipse:

$$\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2} + \frac{(y-4)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1$$