10. Las medidas de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, y las longitudes de las alturas también lo están. Demostrar que el triángulo es equilátero.

SOLUCIÓN: El objetivo de este problema de concurso es llegar a un absurdo que, con las premisas del enunciado, evidencie el resultado que se persigue. En primer lugar veamos que si los ángulos de un triángulo cualquiera están en progresión aritmética, uno de los ángulos mide $\frac{\pi}{3}$. Efectivamente, sean los ángulos del triángulo α, β, γ , se cumple que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ y, como están en progresión aritmética, existe un δ (diferencia de la progresión) tal que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta - \delta \\ \gamma &= \beta + \delta \end{aligned}$$

Cumpliendo la primera ecuación, nos queda el resultado buscado:

$$(\beta - \delta) + \beta + (\beta + \delta) = \pi \quad \Rightarrow \quad 3\beta = \pi \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{3}$$

Por tanto, los ángulos de nuestro triángulo, para cierto ángulo δ , miden:

$$\frac{\pi}{3} - \delta, \ \frac{\pi}{3} \ \text{y} \ \frac{\pi}{3} + \delta$$

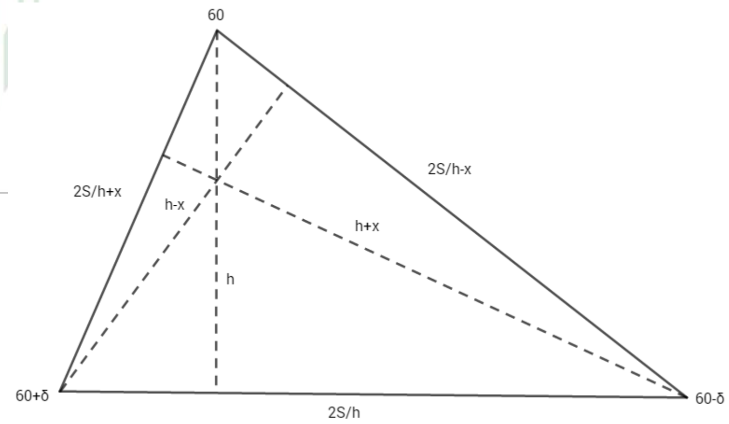
El enunciado nos da otra condición, que las alturas también están en progresión aritmética. Por ello, existe un x mayor o igual que 0 (por ser distancia) tal que, dichas alturas se pueden escribir como:

$$h+x\,,\ h \text{ y } h-x$$

Donde h es la altura relativa a ángulo que mide $\frac{\pi}{3}$. Donde $h+x$ es la altura relativa al ángulo que mide $\frac{\pi}{3}-\delta$, pues a menor ángulo mayor altura le corresponde y viceversa. Y $h-x$ es la altura relativa al ángulo que mide $\frac{\pi}{3}+\delta$.

Al tener alturas y ángulos, puedo calcular los lados del triángulo en función de su área S y así aplicar el Teorema del Seno (recuérdese que $S=\frac{1}{2}base\cdot altura \Rightarrow base=\frac{2S}{altura}$). Se cumple que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi/3+\delta)}{\frac{2S}{h-x}}=\frac{\operatorname{sen}\pi/3}{\frac{2S}{h}}=\frac{\operatorname{sen}(\pi/3-\delta)}{\frac{2S}{h+x}},$$



expresión que equivale a una doble igualdad:

$$\big(h-x\big)\operatorname{sen}(\pi/3+\delta)=h\operatorname{sen}\pi/3=\big(h+x\big)\operatorname{sen}(\pi/3-\delta)$$

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l}\big(h-x\big)\operatorname{sen}(\pi/3+\delta)=h\operatorname{sen}\pi/3\\ \big(h+x\big)\operatorname{sen}(\pi/3-\delta)=h\operatorname{sen}\pi/3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\big(h-x\big)\big(\operatorname{sen}\pi/3\cos\delta+\cos\pi/3\operatorname{sen}\delta\big)=h\operatorname{sen}\pi/3\\ \big(h+x\big)\big(\operatorname{sen}\pi/3\cos\delta-\cos\pi/3\operatorname{sen}\delta\big)=h\operatorname{sen}\pi/3\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}h\operatorname{sen}\pi/3=h\operatorname{sen}\pi/3\cos\delta+h\cos\pi/3\operatorname{sen}\delta-x\operatorname{sen}\pi/3\cos\delta-x\cos\pi/3\operatorname{sen}\delta\\ h\operatorname{sen}\pi/3=h\operatorname{sen}\pi/3\cos\delta-h\cos\pi/3\operatorname{sen}\delta+x\operatorname{sen}\pi/3\cos\delta-x\cos\pi/3\operatorname{sen}\delta\end{array}\right\}$$

Sumando ambas expresiones y acotando, obtenemos:

$$\underline{2h\operatorname{sen}\pi/3}=2h\operatorname{sen}\pi/3\cos\delta-2x\operatorname{sen}\delta\cos\pi/3\underset{\cos\delta\leq 1}{\leq}2h\operatorname{sen}\pi/3-2x\operatorname{sen}\delta\cos\pi/3\underline{<2h\operatorname{sen}\pi/3}$$

Lo que evidencia el absurdo buscado, es decir, x debe ser obligatoriamente 0, lo cual, nos conduce que δ también es 0. Por tanto, el triángulo es necesariamente equilátero.