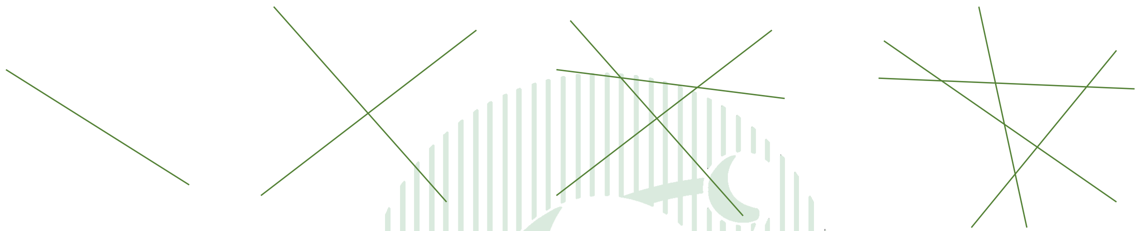
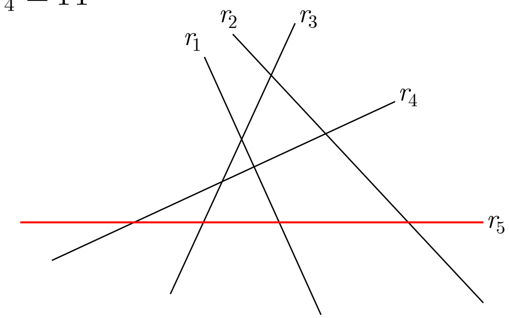
8. Se consideran n rectas en el plano afín, secantes dos a dos y tales que no hay tres de ellas que se corten en el mismo punto. Determine el número r_n de regiones en las que dichas n rectas dividen al plano.

Este problema es idéntico al 16.25 del volumen 8 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN:



$r_1 = 2$ $\quad r_2 = 4$ $\quad r_3 = 7$ $\quad r_4 = 11$



Dibujadas $n-1$ rectas en las condiciones del enunciado (en el gráfico de la derecha se ha dibujado el caso $n-1=4$), la recta n-ésima corta a cada una de las $n-1$ rectas anteriores, luego atraviesa n regiones, es decir, crea n nuevas regiones. Por tanto,

$$r_n = r_{n-1} + n$$

Aunque la ecuación $r_n = r_{n-1} + n$ es una recurrencia lineal y completa de primer orden, resulta en este caso más rápido la determinación de r_n escribiendo la recurrencia anterior para n, $n-1$, $n-2, \ldots, 1$ como sigue:

$$\begin{cases} r_n = r_{n-1} + n \\ r_{n-1} = r_{n-2} + n - 1 \\ r_{n-2} = r_{n-3} + n - 2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_3 = r_2 + 3 \\ r_2 = r_1 + 2 \end{cases}$$

Al sumarlas todas miembro a miembro resulta, teniendo en cuenta que $r_1 = 2$,

$$r_n = r_1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = 1 + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n] = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + n + 2}{2}$$