

G1. Geometría del triángulo. Puntos notables. Primeras relaciones métricas

1. Si E es el punto medio del lado CA de un triángulo cualquiera ABC , y S es el área de dicho triángulo, probad que:

$$\cot gAEB = \frac{BC^2 - BA^2}{4S}$$

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1988-1995 (Vol. 3) Ejer. 89.10

2. En un triángulo rectángulo se sabe que el radio de la circunferencia circunscrita es 6,5 y el radio de la circunferencia inscrita es 2. Calcular los lados a , b y c .

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1996-2005 (Vol. 4) Ejer. 03.4

3. Si dos circunferencias son tangentes exteriores en A y los puntos de contacto de una tangente común son B y C , demostrar que el triángulo ABC es rectángulo en A y calcular la altura correspondiente a la hipotenusa en este triángulo en función de los radios de ambas circunferencias.

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1969-1980 (Vol. 1) Pág. 199

4. Demostrar que sólo existe un triángulo tal que las longitudes de sus lados son números enteros consecutivos y uno de cuyos ángulos es doble que el otro.

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1996-2005 (Vol. 4) Ejer. 00.3

5. En un triángulo rectángulo, el cateto AB es constante de longitud a , siendo el otro cateto AC variable de longitud b . En la circunferencia circunscrita al triángulo, sea S el área del menor de los dos segmentos circulares determinados por el cateto AC . Hallar:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{S}{b^3}$$

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1996-2005 (Vol. 4) Ejer. 96.12

6. Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cosec} 3x$$

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1988-1995 (Vol. 3) Ejer. 91.10

7. Dado un triángulo rectángulo ABC , con el ángulo recto en A , se traza la perpendicular a BC por el punto B , se corta esta recta con la prolongación del cateto AC y se obtiene así el punto P . Determinar el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABP en función de las longitudes b y c de los catetos del triángulo inicial.

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1996-2005 (Vol. 4) Ejer. 96.42

8. Dado un triángulo ABC cuyos lados miden $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$, demuestre que $a^2 - b^2 = bc$ si y sólo si $\angle CAB = 2 \cdot \angle ABC$.

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 2014 (Vol. 6) Ejer. 14.25

9. Hallar la relación entre las longitudes de los lados de dos polígonos regulares de n y m lados respectivamente, para que tengan igual área.

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1988-1995 (Vol. 3) Ejer. 90.46

10. Las medidas de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, y las longitudes de las alturas también lo están. Demostrar que el triángulo es equilátero.

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1988-1995 (Vol. 3) Ejer. 90.128

11. Las alturas de un triángulo ABC se cortan en un punto H. Determínese el valor del ángulo $\angle BCA$ sabiendo que $AB=CH$.

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1996-2005 (Vol. 4) Pág. 04.54

12. Construir razonadamente un triángulo rectángulo de hipotenusa dada a , tal que la longitud de la mediana sobre la hipotenusa sea la media geométrica de las longitudes de los dos catetos del triángulo.

Resuelto en PROBLEMAS DE OPOSICIONES 1996-2005 (Vol. 4) Ejer. 97.5

13. Sea ABC un triángulo equilátero de lado 1. Partiendo de los vértices, y en un mismo sentido, se sitúa un segmento de longitud x sobre cada uno de los lados, obteniendo tres puntos D, E y F que determinan un nuevo triángulo.

- a) Hallar el valor de x para que el área del triángulo DEF sea tres cuartos del área del triángulo ABC.
b) Si los triángulos diferencia entre ABC y DEF fuesen rectángulos, ¿qué valor tendría x ?, ¿y cuál sería el área de DEF?

Resuelto en Problemas de Oposiciones 1996-2005 (Vol. 4) Ejer. 97.1

14. Se traza una recta r por el baricentro de un triángulo equilátero (en el mismo plano que éste). Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de los tres vértices del triángulo a la recta r no depende de la elección de ésta.

Resuelto en Problemas de Oposiciones 1996-2005 (Vol. 4) Ejer. 05.4

15. Se considera un trapecio isósceles de bases a y c y altura h .

- a) Sobre el eje de simetría de este trapecio, hallar los puntos P desde los cuales se ven los lados iguales del trapecio bajo un ángulo recto, calculando la distancia de P a cada base.
- b) Determinar en qué condiciones existe P (discutir sobre los diversos casos que se pueden presentar).

Resuelto en Problemas de Oposiciones 1996-2005 (Vol. 4) Ejer. 00.67

16. Sean G el baricentro del triángulo ABC y g_a , g_b y g_c las distancias desde G a los lados BC , AC y AB respectivamente. Sea r el radio de la circunferencia inscrita en dicho triángulo. Probar que:

- a) $g_a \geq \frac{2r}{3}$, $g_b \geq \frac{2r}{3}$, $g_c \geq \frac{2r}{3}$
- b) $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$

Resuelto en Problemas de Oposiciones 1996-2005 (Vol. 4) Ejer. 04.5

17. Sean p , h y d las longitudes de los lados de un pentágono, de un hexágono y de un decágono regular inscritos en una circunferencia de radio 1.

- a) Demostrar que el triángulo de lados p , h y d es rectángulo.
- b) Demostrar que los segmentos h y d están en proporción áurea.

Resuelto en Problemas de Oposiciones 1996-2005 (Vol. 4) Ej. 96.6