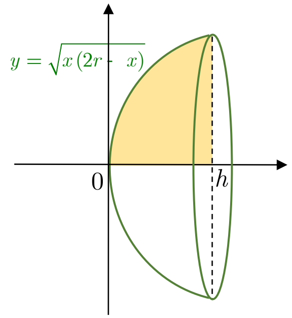
5. Un cuenco tiene forma de casquete esférico. Obtenga el volumen y la superficie del mismo en función del radio de la esfera y de la altura del casquete. Halle las dimensiones que dan el máximo volumen del cuenco para un área dada.

Este problema figura resuelto en la página 570 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.



SOLUCIÓN: Si r es el radio de la esfera y h es la altura del cuenco, el volumen de éste es el del cuerpo de revolución C que genera la región comprendida entre la circunferencia $(x-r)^2+y^2=r^2$, de centro el punto $(r,0)$ y radio r, y las abscisas $x=0$ y $x=h$ al girar alrededor del eje OX. Como es,

$$(x-r)^2+y^2=r^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm\sqrt{r^2-(x-r)^2}=\pm\sqrt{x\cdot(2r-x)}$$

se deduce, integrando por discos, que el volumen del cuenco es

$$\operatorname{vol}(C)=\pi\int_0^h y^2\,dx=\pi\int_0^h x(2r-x)\,dx=\pi\left[rx^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\pi\left(rh^2-\frac{h^3}{3}\right)=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$$

El área del cuenco es el área de la superficie de revolución que genera el arco de circunferencia $y=\sqrt{x\cdot(2r-x)}$ entre las abscisas $x=0$ y $x=h$ al girar alrededor del eje OX, es decir,

$$\text{área}(C) = 2\pi\int_0^h |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_0^h \sqrt{x\cdot(2r-x)}\,\frac{r}{\sqrt{x\cdot(2r-x)}}\,dx = 2\pi r\int_0^h dx = 2\pi rh$$

Si el cuenco tiene área dada A, el problema de optimización a resolver es:

$$\begin{cases} \max\ \pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right) \\ 2\pi rh = A \\ 0<h<2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\ \pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right) \\ r=\frac{A}{2\pi h} \\ 0<h<2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\ \pi h^2\left(\frac{A}{2\pi h}-\frac{h}{3}\right) \\ 0<h<\frac{A}{\pi h} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\ \frac{Ah}{2}-\frac{\pi h^3}{3} \\ 0<h<\sqrt{\frac{A}{\pi}} \end{cases}$$

La función

$$h\in\left(0,\sqrt{\tfrac{A}{\pi}}\right)\mapsto V(h)=\frac{Ah}{2}-\frac{\pi h^3}{3}$$

es derivable en todo el intervalo de definición y su derivada es

$$V'(h)=\frac{A}{2}-\pi h^2$$

Por tanto, $V'(h)=0$ si y sólo si $h=\sqrt{\frac{A}{2\pi}}$. Además, si $0<h<\sqrt{\frac{A}{2\pi}}$, entonces es $V'(h)>0$, mientras que si $\sqrt{\frac{A}{2\pi}}<h<\sqrt{\frac{A}{\pi}}$, entonces $V'(h)<0$. La función V alcanza por tanto máximo absoluto cuando $h=\sqrt{\frac{A}{2\pi}}$ y

$r=\frac{A}{2\pi h}=\frac{A}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{A}}=\sqrt{\frac{A}{2\pi}}$, es decir, el volumen es máximo cuando el casquete es semiesférico (de área lateral A). Dicho volumen máximo es

$$V\left(\sqrt{\frac{A}{2\pi}}\right)=\frac{A}{2}\sqrt{\frac{A}{2\pi}}-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{A}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{2\pi}}=\frac{A}{3}\sqrt{\frac{A}{2\pi}}$$