Tema 39: Geometría del triángulo

Autor: Juan Manuel Hernández

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Contenidos

Introducción

En la primera sección se introducen las rectas notables de un triángulo y sus puntos de corte. Se prueba que el ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo están alineados, y la recta que pasa por ellos se llama recta de Euler. En la segunda sección demostramos el teorema de Feuerbach.

Notaciones y preliminares

Para cada triángulo $\triangle ABC$ designaremos por a, b y c las longitudes de los segmentos $S(B,C)$, $S(A,C)$ y $S(A,B)$ y por $\alpha := \measuredangle BAC$, $\beta := \measuredangle CBA$ y $\gamma := \measuredangle ACB$, respectivamente, las amplitudes de los ángulos en los vértices A, B y C.

Concurrencia de las mediatrices. Circuncentro.

Las *mediatrices* de un triángulo son las rectas perpendiculares a los lados en sus puntos medios. Como la mediatriz de un segmento está formada por los puntos que equidistan de sus extremos, el punto común a dos mediatrices de un triángulo equidista de los tres vértices, luego pertenece a la tercera. Así las tres mediatrices de un triángulo comparten un punto llamado *circuncentro*, que es el centro de la única circunferencia circunscrita al triángulo.

Concurrencia de las bisectrices. Incentro.

Las bisectrices interiores son las rectas que dividen en dos partes de igual amplitud los ángulos del triángulo, y las bisectrices exteriores las que dividen en dos partes de igual amplitud los ángulos que forman los lados con las prolongaciones de los adyacentes. Al ser la bisectriz de un ángulo que forman dos semirrectas concurrentes el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas, el punto común a dos bisectrices interiores de un triángulo equidista de los tres lados, luego pertenece a la tercera.

Concurrencia de las bisectrices. Incentro.

El punto en el que concurren las tres bisectrices se llama *incentro* y es el centro de la circunferencia inscrita en un triángulo, esto es, la que tiene a los lados del triángulo por tangentes. Nótese que este mismo argumento prueba la existencia de los llamados *exincentros* del triángulo: los puntos de intersección de pares de bisectrices exteriores y una bisectriz interior.

Triángulo mediano. Concurrencia de las alturas y medianas.

Sean el triángulo $\mathcal{T} := \triangle ABC$ y A_1 el punto medio del segmento $S(B, C)$, B_1 el punto medio del segmento $S(A, C)$ y C_1 el punto medio del segmento $S(A, B)$. Se denomina *triángulo mediano* de $\mathcal{T}$ al triángulo $\mathcal{T}_M := \triangle A_1 B_1 C_1$.

Triángulo mediano. Concurrencia de las alturas y medianas.

(1) Los lados de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_M$ son paralelos dos a dos y los de $\mathcal{T}$ miden el doble que los de $\mathcal{T}_M$. En efecto, como $AB = 2 \cdot AC_1$, $AC = 2 \cdot AB_1$ los triángulos $\mathcal{T}$ y $\triangle AC_1B_1$ son semejantes, pues comparten el ángulo en el vértice A. Así, las rectas $r(B, C)$ y $r(C_1, B_1)$ son paralelas y $BC = 2B_1C_1$. Razonando de igual modo con los otros dos pares de lados se tiene lo propuesto.

Triángulo mediano. Concurrencia de las alturas y medianas.

(2) Se llaman *alturas* de un triángulo a las rectas perpendiculares a cada lado que pasan por el vértice opuesto. Se cumple que: *las mediatrices de $\mathcal{T}$ son las alturas de $\mathcal{T}_M$.*
En efecto, la mediatriz de $S(A, B)$ es la recta perpendicular a $r(A, B)$ que pasa por C_1, luego es la perpendicular a $r(A_1, B_1)$ que pasa por C_1, es decir, es la altura de $\mathcal{T}_M$ que pasa por el vértice C_1.

Triángulo mediano. Concurrencia de las alturas y medianas.

(3) Las alturas del triángulo $\mathcal{T}$ son concurrentes, y su punto de corte se llama *ortocentro* de $\mathcal{T}$.
En efecto, sea $\triangle$ el triángulo cuyos lados están situados sobre las rectas paralelas a $r(A, B)$, $r(A, C)$ y $r(B, C)$ que pasan, respectivamente, por C, B y A. Como $\mathcal{T}$ es el triángulo mediano de $\triangle$ las alturas de $\mathcal{T}$ son las mediatrices de Δ, y ya hemos visto que éstas se cortan. Su punto de corte es el circuncentro de Δ, y acabamos de probar que es el ortocentro de $\mathcal{T}$.

Triángulo mediano. Concurrencia de las alturas y medianas.

(4) Se llaman *medianas* del triángulo $\mathcal{T}$ a las rectas $r(A, A_1)$, $r(B, B_1)$ y $r(C, C_1)$ que unen cada vértice de $\mathcal{T}$ con el punto medio del lado opuesto. Las rectas $r(A, A_1)$ y $r(B, B_1)$ se cortan, pues B y B_1 se encuentran en semiplanos distintos de los dos definidos por $r(A, A_1)$. Su punto de corte $G := r(A, A_1) \cap r(B, B_1)$ cumple

$$GA = 2 \cdot A_1 G \quad \text{y} \quad GB = 2 \cdot B_1 G. \tag{1.1}$$

Triángulo mediano. Concurrencia de las alturas y medianas.

En efecto, $\triangle AGB$ y $\triangle A_1 GB_1$ son semejantes pues sus lados son paralelos dos a dos. Además, $AB = 2 \cdot A_1 B_1$, por lo que $GA = 2 \cdot A_1 G$ y $GB = 2 \cdot B_1 G$.
Además, el punto G también pertenece a la mediana $r(C, C_1)$, y se llama *baricentro* de $\mathcal{T}$. En efecto, tanto G como el punto $G^* := r(A, A_1) \cap r(C, C_1)$, dividen al segmento AA_1 en razón 2, luego coinciden, así que $G = G^* \in r(C, C_1)$.

Triángulo mediano. Concurrencia de las alturas y medianas.

(5) Las medianas de los triángulos $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_M$ coinciden, luego sus baricentros también. En efecto, por el apartado (1), el cuadrilátero de vértices $\{B, A_1, B_1, C_1\}$ es un paralelogramo, luego sus diagonales $r(B, B_1)$ y $r(A_1, C_1)$ se cortan en el punto medio del segmento $S(A_1, C_1)$. En consecuencia, la mediana $r(B, B_1)$ de $\mathcal{T}$ es también mediana de $\mathcal{T}_M$.

La recta de Euler

El ortocentro H, el baricentro G y el circuncentro O de un triángulo $\mathcal{T}$ están alineados y, además, $GH = 2 \cdot OG$. La recta que pasa por estos tres puntos se llama *recta de Euler* de $\mathcal{T}$.
En efecto, el baricentro G es también baricentro del triángulo mediano $\mathcal{T}_M$, por lo que la homotecia f de centro G y razón $\frac{-1}{2}$ transforma $\mathcal{T}_M$ en $\mathcal{T}$. En consecuencia, f transforma el circuncentro O de $\mathcal{T}$ en el circuncentro de $\mathcal{T}_M$ que, según hemos probado, es el ortocentro H de $\mathcal{T}$.

La recta de Euler

Como el centro de una homotecia pertenece a la recta que pasa por un punto cualquiera y su transformado, los puntos G, O y H están alineados. Además,

$$GH = \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot GO, \quad \text{es decir,} \quad GH = 2 \cdot OG \quad (2.2)$$

porque la razón de homotecia es $\frac{-1}{2}$.

La circunferencia de los nueve puntos. (Teorema de Feuerbach.)

Sea $\mathcal{T} := \triangle ABC$ un triángulo no rectángulo. Se llama *circunferencia de los nueve puntos (o de Euler) de* $\mathcal{T}$, a la que pasa por los pies de las alturas de $\mathcal{T}$. Esta circunferencia pasa por los puntos medios de los lados de $\mathcal{T}$ y por los puntos medios de los segmentos que tienen por extremos los vértices de $\mathcal{T}$ y su ortocentro.

La circunferencia de los nueve puntos. (Teorema de Feuerbach.)

Demostración: Sean M_a, M_b y M_c los puntos medios de los segmentos $S(B,C)$, $S(A,C)$ y $S(A,B)$ y H_a, H_b y H_c los pies de las alturas sobre dichos lados. Veamos que M_a, M_b, M_c y H_a son concíclicos, para lo que basta ver que $\measuredangle M_cM_aM_b = \measuredangle M_cH_aM_b$. Para ello probaremos que los triángulos $\triangle M_cM_aM_b$ y $\triangle M_cH_aM_b$ son congruentes.

La circunferencia de los nueve puntos. (Teorema de Feuerbach.)

Como el triángulo $\triangle AH_aC$ es rectángulo, la circunferencia de centro M_b que tiene por diámetro al segmento $S(A, C)$ pasa por H_a, luego $M_bH_a = M_bA = M_aM_c$. Razonando con el triángulo rectángulo $\triangle AH_aB$ deducimos que $M_cH_a = M_cA = M_aM_b$.

La circunferencia de los nueve puntos. (Teorema de Feuerbach.)

En consecuencia, los triángulos $\triangle M_b H_a M_c$ y $\triangle M_b M_a M_c$ son congruentes y ya hemos señalado que esto implica que los puntos M_a, M_b, M_c y H_a son concíclicos. Intercambiando los papeles de los vértices deducimos que los puntos M_a, M_b, M_c, H_a, H_b y H_c son concíclicos. Hemos probado que *la circunferencia de los nueve puntos de $\mathcal{T}$ pasa por los puntos medios de sus lados.*

La circunferencia de los nueve puntos. (Teorema de Feuerbach.)

Sea H el ortocentro de $\mathcal{T}$. Como los pies de las alturas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABH$ coinciden, también coinciden sus circunferencias de los nueve puntos. Por tanto la circunferencia de los nueve puntos de $\mathcal{T}$ contiene a los puntos medios de los segmentos $S(A, H)$ y $S(B, H)$. Repitiendo el argumento se comprueba que también contiene al punto medio del segmento $S(C, H)$, y hemos concluido.

Bibliografía

- Retorno a la Geometría. H.S.M Coxeter. S.L. Greitzer. La Tortuga de Aquiles.
- Fundamentos de la Geometría. David Hilbert. CSIC.
- Curso de geometría básica. Antonio F. Costa. Ed. Sanz y Torres.
- Curso de geometría métrica. Tomo 1. Puig Adam.
- Geometría. S. Xambó. Edicions UPB.