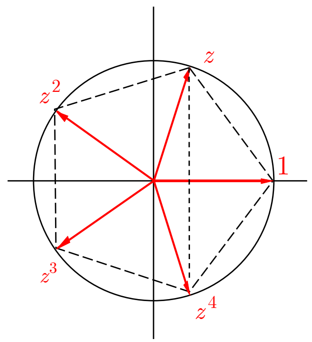
2. Sean r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 las cinco raíces quintas de la unidad. Determine, según los valores de $n \in \mathbb{N}$, el valor de la expresión

$$E = r_1^n + r_2^n + r_3^n + r_4^n + r_5^n$$

Este problema es el 18.29 del volumen 9 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos. También figura resuelto en la página 414 del volumen 1 de la misma colección.

SOLUCIÓN: Si se llama $z = e^{2\pi i/5}$, las cinco raíces quintas de la unidad son:



$$r_1 = 1, \qquad r_2 = z, \qquad r_3 = z^2, \qquad r_4 = z^3, \qquad r_5 = z^4$$

y entonces

$$E = r_1^n + r_2^n + r_3^n + r_4^n + r_5^n = 1 + z^n + z^{2n} + z^{3n} + z^{4n}$$

es la suma de cinco términos de una progresión geométrica de razón z^n. Teniendo en cuenta que

$$z^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\pi n i/5} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi n}{5} = 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad n = 5k$$

para algún $k \in \mathbb{N}$, debemos distinguir:

i) Si $n=5k$, es decir, si n es un múltiplo natural de 5, entonces $z^n=1$ y por tanto

$$E=1+z^n+(z^n)^2+(z^n)^3+(z^n)^4=1+1+1^2+1^3+1^4=5$$

ii) Si $n\neq 5k$, es decir, si n no es múltiplo natural de 5, entonces $z^n\neq 1$ y

$$E=1+z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}=\frac{z^{4n}\cdot z^n-1}{z^n-1}=\frac{z^{5n}-1}{z^n-1}=\frac{(z^5)^n-1}{z^n-1}=\frac{1-1}{z^n-1}=0$$