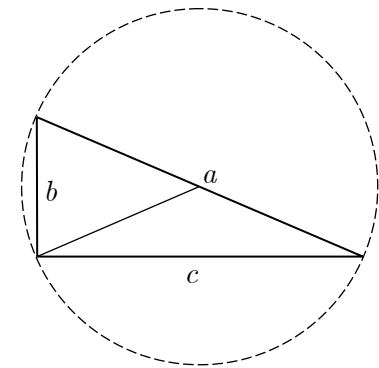


- 12.** Construya razonadamente un triángulo rectángulo de hipotenusa dada a , tal que la longitud de la mediana sobre la hipotenusa sea la media geométrica de las longitudes de los dos catetos del triángulo.

SOLUCIÓN: En cualquier triángulo rectángulo, la longitud de la mediana sobre la hipotenusa es la mitad de dicha hipotenusa. Para probar esto repárese en que la hipotenusa es un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo, luego su punto medio es el centro de dicha circunferencia.

La citada mediana es entonces un radio de tal circunferencia, mitad del diámetro, es decir, mitad de la hipotenusa. Así pues, si llamamos b y c a los dos catetos la condición dada es:



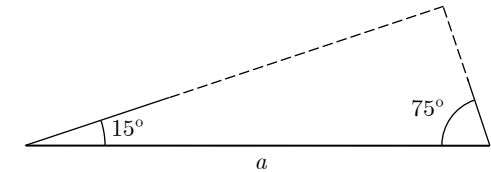
$$\frac{a}{2} = \sqrt{bc}, \quad \text{o lo que es lo mismo, } a^2 = 4bc \quad (1)$$

Si es \hat{B} el ángulo opuesto al cateto b , se tiene que $b = a \sen \hat{B}$, $c = a \cos \hat{B}$ y al sustituir en la condición (1) resulta:

$$a^2 = 4bc = 4 \cdot a \sen \hat{B} \cdot a \cos \hat{B} = 2a^2 \sen 2\hat{B}$$

y por tanto, $1 = 2 \sin 2\hat{B}$, es decir, $\sin 2\hat{B} = \frac{1}{2}$, y entonces $2\hat{B} = 30^\circ$ o bien $2\hat{B} = 150^\circ$, esto es, $\hat{B} = 15^\circ$ o $\hat{B} = 75^\circ$. Como se trata de ángulos complementarios, considerados como ángulos agudos de un triángulo rectángulo, ambos dan lugar al mismo triángulo rectángulo.

Así, para construir el triángulo rectángulo basta marcar sobre los extremos de un segmento de lado a los ángulos de 15° y 75° y prolongar los segundos lados de dichos ángulos hasta que se corten.



Para dibujar con exactitud los ángulos de 15° y 75° puede, por ejemplo, construirse un triángulo equilátero y dividir dos veces por la mitad uno de sus ángulos. Se tiene así el ángulo de 15° (y el de 75° como su complementario).