**10.** Resuelva la ecuación $x^4+12x-5=0$ sabiendo que dos de sus raíces suman 2.

Este problema figura resuelto en la página 309 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Sean $x_1$, $x_2$, $x_3$ y $x_4$ las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación y supongamos que $x_3+x_4=2$. Entonces, las *fórmulas de Cardano* para la ecuación son

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=0 \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-12 \\ x_1x_2x_3x_4=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-(x_3+x_4) \\ x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_3x_4=0 \\ x_1x_2(x_3+x_4)+(x_1+x_2)x_3x_4=-12 \\ x_1x_2x_3x_4=-5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1x_2+x_3x_4=4 \\ x_1x_2-x_3x_4=-6 \\ x_1x_2x_3x_4=-5 \end{cases}$$

Al sumar y restar las ecuaciones segunda y tercera se obtienen $x_1x_2=-1$ y $x_3x_4=5$. Por tanto, como son $x_1+x_2=-2$ y $x_3+x_4=2$, se deduce que:

- $x_1$ y $x_2$ son las soluciones de la ecuación $x^2+2x-1=0$, es decir,

$$x_1=-1+\sqrt{2}\,, \qquad x_2=-1-\sqrt{2}$$

- $x_3$ y $x_4$ son las soluciones de la ecuación $x^2-2x+5=0$, es decir,

$$x_1=1+2i\,, \qquad x_2=1-2i$$