Academia DEIMOS
Oposiciones: a) Secundaria.
b) Diplomados en
Estadística del Estado.
☎ 669 31 64 06
MADRID
www.academiadeimos.es
http://academiadeimos.blogspot.com.es
academia@academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es

Documento P2

Espacio probabilístico, Propiedades de la probabilidad

1. Espacio probabilistico.

1.1. Concepto de σ-álgebra.

Dado un espacio muestral Ω, se llama $\sigma-$álgebra de Boole a una subfamilia $\mathcal{A}$ de $\wp(\Omega)$ que cumpla las siguientes propiedades:

a) $\Omega \in \mathcal{A}$.

b) *Si* $A \in \mathcal{A}$, *entonces* $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

c) *Si* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, *entonces* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

1.2. Definición axiomática de la probabilidad.

Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra definida sobre Ω . Se llama probabilidad sobre $\mathcal{A}$ a cualquier función $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ que cumpla los siguientes axiomas (llamados axiomas de Kolmogorov):

A1. $p(A) \geq 0$ *para cualquier* $A \in \mathcal{A}$.

A2. $p(\Omega) = 1$.

A3. Si $A_1, A_2, \ldots$ son sucesos incompatibles, entonces

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p\left(A_n\right)$$

A la terna $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ se le llama espacio de probabilidad o espacio probabilístico.

1.3. Propiedades derivadas de los axiomas.

1. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles, entonces

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right)$$

2. Para cualquier suceso A, se tiene que $p\left(\bar{A}\right) = 1 - p\left(A\right)$.

3. Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$, entonces $p(A) \leq p(B)$ y $p\left(B - A\right) = p(B) - p(A)$.

4. Para cualquier suceso A, se tiene que $0 \leq p(A) \leq 1$.

5. El suceso imposible tiene probabilidad nula, $p(\emptyset) = 0$.

6. Sean A y B dos sucesos cualesquiera, entonces $p\left(A \cup B\right) = p(A) + p(B) - p\left(A \cap B\right)$.

7. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sucesos cualesquiera, entonces se verifica la fórmula de Inclusión-Exclusión:

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right) - \sum_{1\leq i<j\leq n} p\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} p\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \\ &- \cdots + \left(-1\right)^{n+1} p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \end{aligned}$$

1.4. Espacios muestrales discretos finitos. Regla de Laplace.

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ es el espacio muestral de un experimento aleatorio, donde vamos a considerar la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}\left(\Omega\right)$. Se define así una probabilidad sobre Ω a partir de la probabilidad de cada suceso elemental. Dado que $\Omega = \{\omega_1\} \cup \ldots \cup \{\omega_n\}$ y $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces $p\left(\omega_1\right) + \ldots + p\left(\omega_n\right) = 1$, por lo que la probabilidad de cualquier suceso A será:

$$p\left(A\right) = \sum_{\omega_i \in A} p\left(\omega_i\right)$$

Si los sucesos elementales son equiprobables, es decir, $p\left(\omega_1\right) = p\left(\omega_2\right) = \ldots = p\left(\omega_n\right)$, entonces $p\left(\omega_i\right) = \frac{1}{n}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Si A es un suceso cualquiera, la probabilidad de dicho suceso se obtiene mediante la conocida *Regla de Laplace*:

$$p\left(A\right) = \sum_{\omega_i \in A} p\left(\omega_i\right) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número total de casos posibles}}$$

1.5. Ejemplos.

Ejemplo 1.1 *Consideremos una lotería consistente en extraer n bolas de un bombo que contiene m bolas numeradas desde el 1 hasta m (es una lotería conocida como n/m). Cada participante elige en su boleto n de los m números, por lo que la probabilidad de que su boleto contenga k de los números que han aparecido en el sorteo se puede obtener por la regla de Lapace:*

El número de casos posibles en este experimento es el número de combinaciones que podemos formar con n de las m bolas (el número de sorteos diferentes que se podrían realizar), mientras que el número de casos favorables al suceso acertar k números será el número de combinaciones que podemos formar con k de los n números premiados, multiplicado por el número de combinaciones formadas por $n-k$ números de los $m-n$ números que no han resultado premiados. En conclusión:

$$p_k = p\left(\text{ acertar } k \text{ números}\right) = \frac{\binom{n}{k}\cdot\binom{m-n}{n-k}}{\binom{m}{n}}$$

Así que, si por ejemplo $n=6$ y $m=49$, las probabilidades de acertar 3, 4 5 o 6 números serán:

$k=3$	$p_3 = \dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 0,017650$
$k=4$	$p_4 = \dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0,000968$
$k=5$	$p_5 = \dfrac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} \approx 0,000018$
$k=6$	$p_6 = \dfrac{\binom{6}{6}\cdot\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} \approx 0,00000007$

Ejemplo 1.2 *Lanzamos una moneda equilibrada hasta que se consiga una cara. El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, donde $\omega_n =$"obtener cara por primera vez en el n-ésimo lanzamiento", siendo además la probabilidad de cada uno de estos sucesos elementales:*

$$p\left(\omega_n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p\left(\omega_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Ejemplo 1.3 *Se tienen n bolas numeradas del 1 al n que deben introducirse aleatoriamente en n urnas numeradas también del 1 al n. Calculemos la probabilidad de que alguna de las bolas caiga en la urna con su número.*

Si definimos el suceso A_i como "la bola i-ésima cae en la caja i-ésima", la probabilidad a calcular es $p\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)$. Dado que:

- $p(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$

- $p(A_i \cap A_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!}$

- $p(A_i \cap A_j \cap A_k) = \dfrac{(n-3)!}{n!}$ $\vdots$

- $p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \dfrac{1}{n!}$

entonces la probabilidad pedida puede calcularse mediante la fórmula de inclusión-exclusión:

$$\begin{aligned}
p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right) - \sum_{1\leq i<j\leq n} p\left(A_i \cap A_j\right) + \cdots + (-1)^{n+1} p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \\
&= n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

2. Probabilidad condicionada. Teroremas de la Probabilidad Total y Bayes

2.1. Probabilidad condicionada.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espacio de probabilidad y sean A y B dos sucesos de $\mathcal{A}$ con $p(A) > 0$. La probabilidad de B condicionada por A es:

$$p\left(B \mid A\right) = \frac{p\left(A \cap B\right)}{p\left(A\right)}$$

2.2. Sucesos dependientes e independientes.

Los sucesos A y B son independientes si se cumple que $p\left(A \cap B\right) = p\left(A\right) \cdot p\left(B\right)$.

En general, una familia de sucesos $\{A_n\}_{n\geq 1}$, se dice que los sucesos de esta familia son independientes, si para cualquier selección $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots A_{i_k}$ de k de estos sucesos $(2 \leq k \leq n)$, se verifica que:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

2.3. Probabilidad compuesta o fórmula del producto.

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n sucesos del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ tales que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, entonces

$$p\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) = p(A_1) \cdot p(A_2|A_1) \cdot p(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots p\left(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)$$

2.4. Sistema completo de sucesos.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espacio de probabilidad, una colección numerable de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots\}$ se dice que es un sistema completo de sucesos si se cumple:

1. $p(A_n) > 0$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$.
3. $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \Omega$.

Un sistema completo de sucesos es una partición del espacio muestral formada por sucesos de probabilidad no nula.

2.5. Teorema de la Probabilidad total.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espacio de probabilidad y consideremos un sistema completo de sucesos $\{A_n\}_{n \geq 1}$. Entonces, la probabilidad de cualquier suceso B puede obtenerse como:

$$p(B) = \sum_{n \geq 1} p(A_n)\, p(B \mid A_n)$$

2.6. Teorema de Bayes.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espacio de probabilidad y consideremos un sistema completo de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots\}$. Si B es un suceso cualquiera tal que $p(B) > 0$, entonces:

$$p(A_j|B) = \frac{p(A_j)p(B|A_j)}{\sum_{n \geq 1} p(A_n)p(B|A_n)} \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

2.7. Ejemplos.

Ejemplo 2.1 *Se tiene una urna con b bolas blancas y r bolas rojas. Se extraen n bolas sin reemplazamiento $(1 \leq n \leq b)$. Calculamos la probabilidad de que las n bolas extraídas sean blancas.*

Si se define el suceso B_i =“la i-ésima bola extraída es blanca”, para $i = 1, 2, \ldots, n$; la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) &= p(B_1)p(B_2 \mid B_1)p(B_3 \mid B_1 \cap B_2) \cdots p(B_n \mid B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \\ &= \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b-1}{b+r-1} \cdot \frac{b-2}{b+r-2} \cdots \frac{b-n+1}{b+r-n+1} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2 *Se tienen n urnas, cada una de las cuales contiene a bolas blancas y b negras. Se elige al azar una bola de la primera urna y se pasa a la segunda, a continuación se pasa al azar una bola de la segunda a la tercera, y así sucesivamente. Finalmente, se extrae una bola de la última urna. Calculemos la probabilidad de que esta última bola extraída sea blanca*

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ definamos los sucesos B_i =“la bola extraída en la i-ésima urna es blanca” y N_i =“la bola extraída en la i-ésima urna es negra”. Se tiene que

$$p(B_1) = \frac{a}{a+b} \quad , \quad p(N_1) = \frac{b}{a+b}$$

Y haciendo uso de la fórmula de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} p(B_2) &= p(B_1)p(B_2 \mid B_1) + p(N_1)p(B_2 \mid N_1) = \frac{a}{a+b}\frac{a+1}{a+b+1} + \frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b+1} \\ &= \frac{a(a+b+1)}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

Este resultado nos lleva a conjeturar que

$$p(B_n) = \frac{a}{a+b} \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Conjetura que demostramos por inducción. Para ello supongamos que $p\left(B_{n-1}\right) = \frac{a}{a+b}$ *y utilizando de nuevo la fórmula de la probabilidad total:*

$$\begin{aligned} p(B_n) &= p(B_{n-1})p(B_n \mid B_{n-1}) + p(N_{n-1})p(B_n \mid N_{n-1}) \\ &= \frac{a}{a+b}\frac{a+1}{a+b+1} + \frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b+1} = \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 *Se tiene una urna con b bolas blancas y r bolas rojas. Se extrae una primera bola de esta urna y, sin mirar de que color es, se extrae una segunda bola que resulta ser blanca. Calculemos la probabilidad de que la primera bola también fuese blanca.*

Si B_i = representa "la i-ésima bola extraída es blanca", entonces $\{B_1, \bar{B}_1\}$ es el sistema completo de sucesos y sus probabilidades son:

$$p\left(B_1\right) = \frac{b}{b+r} \quad , \qquad p\left(\bar{B}_1\right) = \frac{r}{b+r}$$

Si aplicamos el teorema de la probabilidad total, entonces

$$\begin{aligned} p\left(B_2\right) &= p\left(B_1\right) p\left(B_2 \mid B_1\right) + p\left(\bar{B}_1\right) p\left(B_2 \mid \bar{B}_1\right) = \frac{b}{b+r}\frac{b-1}{b+r-1} + \frac{r}{b+r}\frac{b}{b+r-1} \\ &= \frac{b(b+r-1)}{(b+r)(b+r-1)} = \frac{b}{b+r} \end{aligned}$$

Ya sólo queda aplicar la fórmula de Bayes:

$$p\left(B_1 \mid B_2\right) = \frac{p\left(B_1\right) p\left(B_2 \mid B_1\right)}{p\left(B_2\right)} = \frac{\dfrac{b}{b+r}\dfrac{b-1}{b+r-1}}{\dfrac{b}{b+r}} = \frac{b-1}{b+r-1}$$

Por lo que la probabilidad de que la primera bola haya sido blanca, si sabemos que la segunda ha sido blanca, coincide con la probabilidad de extraer una bola blanca en la urna que resulta de eliminar una bola blanca de la urna original.