14. Un número natural se dice *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores positivos, salvo él mismo. Demuestre que:

a) Un número natural par es perfecto si y sólo si es de la forma $2^{p-1}\cdot(2^p-1)$, con $p>1$ y donde 2^p-1 es primo.

b) La suma de los inversos de los divisores de un número perfecto par es 2.

c) Si 2^p-1 es primo, entonces p es primo.

d) Todo número perfecto par termina en 6 o en 8.

Este problema es el 18.16 del volumen 9 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y también figura resuelto en la página 347 del volumen 1 de la misma colección.

SOLUCIÓN: a) Supongamos que $n\in\mathbb{N}$ es un número par perfecto. Por ser par, podemos escribir $n=2^{p-1}m$, donde $p\geq 2$ y m es un número impar. Como n es perfecto, la suma de todos los divisores de n (incluido él mismo) es $\sigma(n)=n+n=2n=2^p m$. Por otro lado, por ser σ multiplicativa y $\operatorname{mcd}(2^{p-1},m)=1$, si se llama s a la suma de todos los divisores de m excluido el propio m, entonces

$$\sigma(n)=\sigma(2^{p-1}m)=\sigma(2^{p-1})\cdot\sigma(m)=(2^p-1)\cdot(s+m)$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para $\sigma(n)$, se tiene que

$$2^p m = (2^p - 1)(s + m) \quad \Leftrightarrow \quad (2^p - 1)\, s = m \tag{1}$$

Por tanto, $s < m$, s es divisor de m y s es también la suma de todos los divisores de m menores que m, luego s es el único divisor de m menor que m, así que $s = 1$ y $m = 2^p - 1$ es primo, luego $n = 2^{p-1}m = 2^{p-1}(2^p - 1)$, donde $2^p - 1$ es primo.

Si, recíprocamente, $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, con $p > 1$ y $2^p - 1$ primo, entonces

$$\sigma(n) = \sigma\left(2^{p-1} \cdot (2^p - 1)\right) = (2^p - 1)(1 + 2^p - 1) = 2^p(2^p - 1) = 2n$$

y n es perfecto.

a) **Una forma:** Si n es un número natural cualquiera y $d_1, \ldots, d_k$ son los divisores positivos de n, cada cociente $d'_j = \frac{n}{d_j}$ es también un divisor de n. De hecho, el conjunto de los divisores positivos de n es cualquiera de los conjuntos $\{d_1, \ldots, d_k\} = \{d'_1, \ldots, d'_k\}$ y, en particular, $d_1 + \cdots + d_k = d'_1 + \cdots + d'_k$. Por tanto, la suma de los inversos de todos los divisores positivos de un número perfecto par es:

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{d_j}=\sum_{j=1}^{k}\frac{d_j'}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}d_j'=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}d_j=\frac{\sigma(n)}{n}=\frac{2n}{n}=2$$

Otra forma: Si $n=2^{p-1}(2^p-1)$, con $p>1$ y 2^p-1 primo, es un número perfecto par, sus divisores son los números 2^j y los $2^j\cdot(2^p-1)$, donde $j=0,1,\dots,p-1$. Entonces, la suma de los inversos de dichos divisores es

$$S=\sum_{j=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j+\sum_{j=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2^p-1}\right)=\left(1+\frac{1}{2^p-1}\right)\cdot\sum_{j=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j=\frac{2^p}{2^p-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2^p}{2^p-1}\cdot\frac{2^p-1}{2^p}\cdot 2=2$$

b) Si p fuese compuesto, sería $p=ab$, para ciertos $a,b\in\mathbb{N}$, $a,b>1$. En tal caso,

$$2^p-1=2^{ab}-1=(2^a)^b-1=(2^a-1)(2^{a\,(b-1)}+2^{a\,(b-2)}+\cdots+2^a+1)$$

sería compuesto, pues $1<2^a-1<2^p-1$, en contra de la hipótesis.

c) Si n es un número par perfecto, probaremos que $n\equiv 6(\mathrm{mod}10)$ o que $n\equiv 8(\mathrm{mod}10)$. Según a) será $n=2^{p-1}(2^p-1)$, donde 2^p-1 es un número primo, así que, como ya hemos comentado, el número p debe ser primo.

Si $p=2$, entonces $n=6$ y el resultado es cierto. Si $p>2$, por ser primo, será de alguna de las formas $p=4m+1$ o $p=4m+3$.

- Si $p=4m+1$, entonces

$$n=2^{4m}(2^{4m+1}-1)=2^{8m+1}-2^{4m}=2\cdot 256^m-16^m\equiv 2\cdot 6^m-6^m\equiv 6^m\equiv 6\,(\operatorname{mod}10)$$

pues si $m=1$ es trivial, y si se supone cierto que $6^m\equiv 6\,(\operatorname{mod}10)$, entonces

$$6^{m+1}\equiv 6^m\cdot 6\equiv 6\cdot 6\equiv 36\equiv 6\,(\operatorname{mod}10)$$

- Si, en cambio, fuese $p=4m+3$, entonces

$$n=2^{p-1}(2^p-1)=2^{4m+2}\cdot(2^{4m+3}-1)=2^{8m+5}-2^{4m+2}\equiv 32\cdot 256^m-4\cdot 16^m\equiv 2\cdot 6^m-4\cdot 6^m\equiv$$

$$\equiv -2\cdot 6^m\equiv -2\cdot 6\equiv -12\equiv 8\,(\operatorname{mod}10)$$