P1. Problema 1.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Demostrar que si tenemos un conjunto de 14 números naturales distintos, menores de 1000, siempre podemos escoger dos subconjuntos disjuntos tales que la suma de sus elementos coincida.

Resuelto en Vol. 2. Ej 84.16

Número de objetos:

Sea $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_{14}\}$, donde, $x_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq x_i \leq 999$ y $x_i \neq x_j$, para cada $i, j = 1, 2, \ldots, 14$.

El número de subconjuntos no vacíos que se pueden obtener de este conjunto será:

$$N = 2^{14} - 1 = 16383$$

Observación: El número de subconjuntos de un conjunto de cardinal n es:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Introduzcamos cada subconjunto en una caja en función de la suma de sus elementos, para ello, sea

$$S_i = \{ \text{subconjuntos no vacíos de } C \text{ tales que la suma de sus elementos es } i \}$$

donde $i = 1, , 2, \ldots, k$.
Para determinar el valor máximo de k pongamos en la peor de las situaciones, que es cuando el conjunto C está formado por los 14 números más grandes posibles y que tomemos como subconjunto de C el propio conjunto. En ese caso:

$$k = 986 + 987 + \cdots + 998 + 999 = 13895$$

Principio de Distribución:

Dado que tenemos que introducir $N = 16383$ en $k = 13895$ cajas, en función del Principio de Distribución, existirá alguna caja que contendrá, por lo menos, $\left\lceil \frac{16383}{13895} \right\rceil = 2$ objetos. Es decir:

$$\exists\, i \ \text{ tal que } \mathrm{Card}(S_i) \geq 2$$

por lo que tendremos al menos dos subconjuntos tales que la suma de sus elementos coincidirá.

Subconjuntos disjuntos:

Puede ocurrir que esos subconjuntos no fueran disjuntos, así que en ese caso, basta eliminar los elementos comunes a estos subconjuntos y obtendríamos subconjuntos disjuntos cuyos elementos sumen lo mismo.