17. Sean p, h y d las longitudes de los lados de un pentágono, de un hexágono y de un decágono regular inscritos en una circunferencia de radio 1.

a) Demuestre que el triángulo de lados p, h y d es rectángulo.

b) Demuestre que los segmentos h y d están en proporción áurea.

SOLUCIÓN: a) Sea O el centro de la circunferencia dada, y para cada entero positivo n sean A_n y B_n dos vértices consecutivos del polígono regular de n lados inscrito en ella, u_n la distancia entre A_n y B_n, y $\alpha_n = \widehat{B_nOA_n}$. Por supuesto, son $p = u_5$, $h = u_6$ y $d = u_{10}$

Es obvio que $d < h < p$, luego hay que probar que $p^2 = h^2 + d^2$, esto es:

$$u_5^2 = u_6^2 + u_{10}^2$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo B_nOA_n resulta que $u_n^2 = 2 - 2cos\ \alpha_n$, luego la igualdad a demostrar es

$$2 - 2cos\ \alpha_5 = 2 - 2cos\ \alpha_6 + 2 - 2cos\ \alpha_{10} \qquad (1)$$

es decir, y puesto que $\cos\alpha_6 = \frac{1}{2}$,

$$0 = 1 + 2\cos\alpha_5 - 2\cos\alpha_{10}$$

Ahora bien, $\alpha_5 = 2\alpha_{10}$ y entonces $\cos\alpha_5 = 2\cos^2\alpha_{10} - 1$. Por tanto, todo consiste en comprobar que

$$4\cos^2\alpha_{10} - 2\cos\alpha_{10} - 1 = 0$$

o sea, hemos de ver que $\cos\alpha_{10}$ es raíz del polinomio $Q(x) = 4x^2 - 2x - 1$. Emplearemos para ello la fórmula de De Moivre. Como $5\alpha_{10} = \pi$, resulta que

$$-1 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = \cos 5\alpha_{10} + i\,\mathrm{sen}\,5\alpha_{10} = (\cos\alpha_{10} + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_{10})^2$$

Desarrollamos el miembro de la derecha mediante la fórmula del binomio de Newton, e igualamos las partes reales de ambos miembros teniendo en cuenta que $\mathrm{sen}^2\alpha_{10} = 1 - \cos^2\alpha_{10}$. Por tanto, $\cos 5\alpha_{10}$ es raíz del polinomio

$$P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)\left(4x^2 - 2x - 1\right)^2 = (x+1)Q(x)^2$$

y como $\cos\alpha_{10} \neq -1$, se concluye que $\cos\alpha_{10}$ es raíz de $Q(x)$.

b) Ya sabemos que $h^2 = u_6^2 = 2 - 2cos\,\alpha_6 = 1$, luego se trata de probar que $1+d=\frac{1}{d}$, esto es, $d=1-d^2$. Como ambas cantidades son positivas, basta demostrar que coinciden sus cuadrados, o sea, $d^4-3d^2+1=0$. Como es $d^2 = u_6^2 = 2 - 2cos\,\alpha_{10}$, basta comprobar que

$$(2-2cos\,\alpha_{10})^2 - 3(2-2cos\,\alpha_{10}) + 1 = 0$$

Esta igualdad es $4cos^2\alpha_{10} - 2cos\,\alpha_{10} - 1 = 0$, y dice que $cos\,\alpha_{10}$ es raíz del polinomio $Q(x)$, lo que ya ha sido demostrado en el apartado anterior.