8. Sucesiones. Término general y forma recurrente. Progresiones aritméticas y geométricas. Aplicaciones.

1. El álgebra de las sucesiones de números reales

- Definición de sucesión de números reales y término general de la misma.
- Definición de las operaciones suma de sucesiones y producto de un número real por una sucesión, que confieren estructura de especio vectorial real al conjunto $\mathbb{R}^\infty$ de todas las sucesiones de números reales.
- Definición del producto de sucesiones que, junto con la suma, hacen del conjunto $\mathbb{R}^\infty$ un álgebra unitaria, conmutativa y con divisores de cero.

2. Sucesiones recurrentes

- Definición de sucesión recurrente.
- Definición de sucesión linealmente recurrente. Polinomio característico (o ecuación característica) asociado a una recurrencia lineal.
- Enunciado (sin demostración) del teorema según el cual las sucesiones de números complejos que atienden a una recurrencia lineal de orden k forman un subespacio vectorial de orden k del espacio vectorial $\mathbb{C}^\infty$, una de cuyas bases se deduce de las raíces del polinomio característico asociado a la recurrencia.
- Aplíquese el resultado anterior a la sucesión de Fibonacci para calcular su término general.

3. Progresiones aritméticas ordinarias

- Definición de progresión aritmética.
- Enumeración y demostración de cada una de sus propiedades.
- Pueden proponerse como ejemplos la suma de los n primeros números naturales o la suma de los n primeros números impares (véase Ejemplo 2.3 del documento C2).

4. Diferencias finitas de una sucesión

- Definición de diferencias de orden k de una sucesión.
- Expresión del término n-ésimo y de la suma parcial n-ésima de una sucesión en función de las sucesivas diferencias del primer término: Fórmulas de Newton. La demostración de estas fórmulas aparece muy resumida en el texto. Os incluyo aquí una demostración más detallada de las mismas.

8.4.2. Teorema: *Sea (x_n) una sucesión de números reales y sea S_n la suma de sus n primeros términos, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$x_n = \binom{n-1}{0} x_1 + \binom{n-1}{1} \Delta x_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 x_1 + \ldots + \binom{n-1}{n-1} \Delta^{n-1} x_1$$

$$S_n = \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} \Delta x_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 x_1 + \ldots + \binom{n}{n} \Delta^{n-1} x_1$$

DEMOSTRACIÓN

Probamos la primera igualdad por inducción sobre n. Para $n=1$ es trivial interpretando $\binom{0}{0}=1$. Si suponemos la igualdad cierta para algún $n\geq 1$, es decir, si

$$x_n=\binom{n-1}{0}x_1+\binom{n-1}{1}\Delta x_1+\binom{n-1}{2}\Delta^2 x_1+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\Delta^{n-1}x_1,$$

entonces, como es $x_{n+1}=x_n+\Delta x_n$ y el operador Δ es lineal,

$$x_{n+1}=\binom{n-1}{0}x_1+\binom{n-1}{1}\Delta x_1+\binom{n-1}{2}\Delta^2 x_1+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\Delta^{n-1}x_1+\binom{n-1}{0}\Delta x_1+\binom{n-1}{1}\Delta^2 x_1+\binom{n-1}{2}\Delta^3 x_1+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\Delta^n x_1=$$

$$=\binom{n-1}{0}x_1+\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}\right]\Delta x_1+\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\right]\Delta^2 x_1+\ldots+\left[\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-1}\right]\Delta^{n-1}x_1+\binom{n-1}{n-1}\Delta^n x_1$$

Si ahora se tiene en cuenta que $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$, que $\binom{n-1}{0}=\binom{n}{0}$ y que $\binom{n-1}{n-1}=\binom{n}{n}=1$ la suma anterior queda:

$$x_{n+1}=\binom{n}{0}x_1+\binom{n}{1}\Delta x_1+\binom{n}{2}\Delta^2 x_1+\ldots+\binom{n}{n-1}\Delta^{n-1}x_1+\binom{n}{n}\Delta^n x_1$$

lo que prueba que la primera fórmula de Newton es cierta también para $n+1$. La inducción está por tanto completa y dicha fórmula es cierta para todo $n\in\mathbb{N}$.

Para la segunda igualdad de Newton, acudiendo a la primera fórmula recién demostrada, y a la identidad combinatoria:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

se cumple, sumando por columnas, que

$$\begin{aligned}
S_n &= x_1+x_2+\cdots+x_n = \\
&= \binom{0}{0}x_1 + \\
&\quad \binom{1}{0}x_1 + \binom{1}{1}\Delta x_1 + \\
&\quad \binom{2}{0}x_1 + \binom{2}{1}\Delta x_1 + \binom{2}{2}\Delta^2 x_1 + \\
&\quad \binom{3}{0}x_1 + \binom{3}{1}\Delta x_1 + \binom{3}{2}\Delta^2 x_1 + \binom{3}{3}\Delta^3 x_1 + \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \binom{n-1}{0}x_1 + \binom{n-1}{1}\Delta x_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 x_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 x_1 + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\Delta^{n-1}x_1 \\
&= \binom{n}{1}x_1 + \binom{n}{2}\Delta x_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 x_1 + \binom{n}{4}\Delta^3 x_1 + \cdots + \binom{n}{n}\Delta^{n-1}x_1
\end{aligned}$$

que es exactamente lo que establece la segunda fórmula de Newton.

5. Progresiones aritméticas de orden *p*

- Definid las progresiones aritméticas de orden p como aquellas sucesiones cuyas diferencias de orden p son constantes y no nulas, haciendo observar que, para estas sucesiones, las fórmulas de Newton tienen un número finito de sumandos.
- Caracterizad las progresiones aritméticas de orden p como aquéllas cuyo término general a_n es un polinomio en n de grado p (y demostrarlo)
- Poned como ejemplo de aplicación de las fórmulas de Newton a este tipo de sucesiones el cálculo de la suma de los cubos de los n primeros números naturales, o la de los correspondientes cuadrados, que se desarrolla aquí:

8.5.3. Ejemplo: Calculamos la suma $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Deben sumarse los n primeros términos de la sucesión dada por $x_n = n^2$. El término n-ésimo x_n es un polinomio de grado 2 en n, así es que (x_n) es una progresión aritmética de orden 2 y entonces $\Delta^k x_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $k > 2$. Se obtienen $x_1 = 1$, $\Delta x_1 = 3$, $\Delta^2 x_1 = 2$, por lo que según la fórmula (3) de Newton:

$$S_n = \binom{n}{1}x_1 + \binom{n}{2}\Delta x_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 x_1 = \binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. Progresiones geométricas

- Definición de progresión geométrica de números reales.
- Enunciado de las siete propiedades de las mismas que aparecen en el tema escrito y demostración sólo de las dos últimas (por la analogía con las respectivas de las progresiones aritméticas).
- Proponed como ejemplo elemental el cálculo de la suma $s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
- Proponed algún ejemplo de progresiones geométricas en aplicaciones reales como el que figura en el texto.

7. Progresiones aritmético-geométricas

- Definición de progresión aritmético-geométrica como producto de una progresión aritmética y una progresión geométrica.
- Enunciado y demostración de sus propiedades.

- Puede escribirse para terminar, y si es que el tiempo lo permite, de las progresiones aritmético-geométricas de orden superior (véase documento C2, página 13) y proponerse como aplicación el siguiente…

Ejemplo: Calcule la suma

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}=1+4x+9x^2+16x^3+\cdots+n^2x^{n-1}$$

Dado que para cada $k\in\mathbb{N}$ es $k^2=(k+1)k-k$, podemos escribir

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(k+1)\,k\,x^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}k\,x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}D^2\left[x^{k+1}\right]-\sum_{k=1}^{n}D\left[x^k\right]=D^2\left[\sum_{k=1}^{n}x^{k+1}\right]-D\left[\sum_{k=1}^{n}x^k\right]=$$

$$=D^2\left[\frac{x^{n+2}-x^2}{x-1}\right]-D\left[\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right]$$