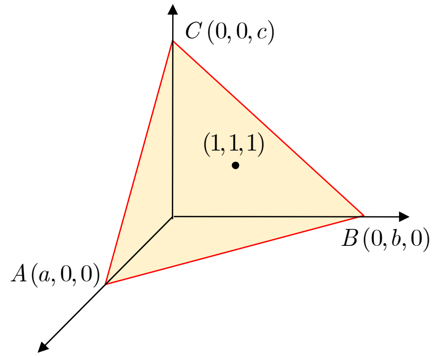
7. Halle, en el espacio métrico, la ecuación del plano que pasa por el punto (1,1,1) y forma con los semiejes coordenados positivos un tetraedro de volumen mínimo.

Este problema es el 16.42 del volumen 8 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y también figura resuelto en la página 185 del volumen 1.



SOLUCIÓN: Llamemos $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ y $C(0,0,c)$, con $a,b,c>0$, a los puntos de corte con los ejes del plano que pasa por $(1,1,1)$. La ecuación segmentaria de dicho plano es

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

El volumen del tetraedro que se forma es $V=\frac{abc}{6}$, por lo que el problema a resolver es:

$$\begin{cases}\min \quad \frac{abc}{6}\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\\ a,b,c>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\min \quad abc\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\\ a,b,c>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\max \quad \frac{1}{abc}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\\ a,b,c>0\end{cases}$$

Pero un producto de factores positivos de suma constante es máximo sólo cuando dichos factores son iguales, esto es, cuando $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$, esto es, cuando $a=b=c=3$. El plano que se pide es por tanto:

$$x+y+z=3$$

y el volumen mínimo es

$$V_{\min}=\frac{3\cdot 3\cdot 3}{6}=\frac{9}{2}$$