6. Resuelva, en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, la ecuación

$$5\tan z = 2\operatorname{sen}^2 z + \frac{3}{\cos^2 z}$$

Este problema es el 16.16 del volumen 8 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Sea $z \in \mathbb{C}$ una solución de la ecuación, es decir, un número complejo que cumple:

$$5\tan z = 2\operatorname{sen}^2 z + \frac{3}{\cos^2 z}$$

o lo equivalente,

$$5\cdot\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = 2\operatorname{sen}^2 z + \frac{3}{\cos^2 z}$$

Al multiplicar en ella por $\cos^2 z \neq 0$ se tiene:

$$5\operatorname{sen} z\cos z = 2\operatorname{sen}^2 z\cos^2 z + 3$$

Como es $\operatorname{sen} 2z = 2\operatorname{sen} z \cos z$, la igualdad anterior se escribe:

$$\frac{5}{2}\operatorname{sen} 2z = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2z + 3 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 2z - 5\operatorname{sen} 2z + 6 = 0$$

es decir, $\operatorname{sen} 2z$ es solución de la ecuación $t^2 - 5t + 6 = 0$, o de la equivalente $(t-2)(t-3) = 0$, luego $\operatorname{sen} 2z = 2$ o $\operatorname{sen} 2z = 3$.

- La ecuación $\operatorname{sen} 2z = 2$ se escribe en forma equivalente:

$$\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = 2 \quad \Rightarrow \quad e^{2iz} - e^{-2iz} = 4i \quad \overset{\cdot e^{2iz}}{\Rightarrow} \quad e^{4iz} - 1 = 4ie^{2iz} \quad \Rightarrow \quad e^{4iz} - 4ie^{2iz} - 1 = 0$$

La igualdad anterior dice que el número complejo e^{2iz} es solución de la ecuación $t^2 - 4it - 1 = 0$, luego

$$e^{2iz} = \frac{4i \pm \sqrt{16i^2 + 4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4i \pm 2i\sqrt{3}}{2} = (2 \pm \sqrt{3})\, i$$

Si designamos $\log w$ al logaritmo neperiano (uno cualquiera de ellos) del número complejo $w \neq 0$ y $\mathrm{L}\, t$ al logaritmo neperiano del número real $t > 0$, de la última igualdad se deduce que será, para algún $k \in \mathbb{Z}$,

$$2iz = \log[(2 \pm \sqrt{3})i] = \log\,[(2 \pm \sqrt{3})e^{\pi i/2}] = \mathrm{L}(2 \pm \sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$$

luego

$$z = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{L}(2 \pm \sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i\right] = \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) - \frac{i}{2}\mathrm{L}(2 \pm \sqrt{3})$$

- De la ecuación $\operatorname{sen} 2z = 3$ se deduce

$$\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = 3 \quad \Rightarrow \quad e^{2iz} - e^{-2iz} = 6i \quad \overset{\cdot e^{2iz}}{\Rightarrow} \quad e^{4iz} - 1 = 6ie^{2iz} \quad \Rightarrow \quad e^{4iz} - 6ie^{2iz} - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad e^{2iz} = \frac{6i \pm \sqrt{36i^2 + 4}}{2} = \frac{6i \pm \sqrt{-32}}{2} = \frac{6i \pm 4i\sqrt{2}}{2} = (3 \pm 2\sqrt{2})\,i$$

A partir de aquí puede seguirse el procedimiento utilizado en la primera ecuación, $\operatorname{sen} z = 2$, o también puede razonarse como sigue: Si es $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $2iz = -2y + 2ix$ y por tanto

$$e^{2iz} = (3 \pm 2\sqrt{2})\, i \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2y+2ix} = (3 \pm 2\sqrt{2})\, i \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2y} \cdot e^{2ix} = (3 \pm 2\sqrt{2})\, e^{\pi i/2}$$

De la última igualdad se desprende, igualando módulos, que $e^{-2y} = 3 \pm 2\sqrt{2}$ y, comparando argumentos, que $2ix = \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. En virtud de la primera es $-2y = \mathrm{L}(3 \pm 2\sqrt{2})$, es decir, $y = -\frac{1}{2}\mathrm{L}(3 \pm 2\sqrt{2})$, y en razón de la segunda es $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2z = 3$ son por tanto los números complejos

$$z = \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) - \frac{i}{2}\mathrm{L}(3 \pm 2\sqrt{2}), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Las soluciones de la ecuación inicial son, en resumen, todos los $z \in \mathbb{C}$ dados por

$$z = \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) - \frac{i}{2}\mathrm{L}(2 \pm \sqrt{3}), \qquad z = \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) - \frac{i}{2}\mathrm{L}(3 \pm 2\sqrt{2}),$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.