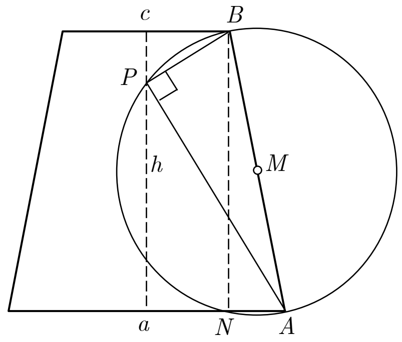
**15.** Se considera un trapecio isósceles de bases $a$ y $c$ y altura $h$.

a) Sobre el eje de simetría de este trapecio, halle los puntos $P$ desde los cuales se ven los lados iguales del trapecio bajo un ángulo recto, calculando la distancia de $P$ a cada base.

b) Determine en qué condiciones existe $P$ (discuta los diversos casos que se pueden presentar).

SOLUCIÓN: Sean $A$ y $B$ los extremos de uno de los lados iguales. Si $P$ es uno de los puntos que se buscan, el triángulo $APB$ es rectángulo, por lo que su hipotenusa $AB$ es el diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo, circunferencia que tiene centro $M$, punto medio del lado $AB$, y radio $r = MB = \frac{1}{2}AB$.

Los puntos $P$ que se piden son entonces aquellos donde dicha circunferencia corta al eje de simetría, y por tanto el problema tendrá dos, una o ninguna solución según que el radio $r$ de la mencionada circunferencia sea mayor, igual o menor, respectivamente, que la distancia $d$ de $M$ al eje de simetría.




- El radio $r$ nos lo da el teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = BN^2 + NA^2 = h^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

por lo que

$$r=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{4}\sqrt{(a-c)^2+4h^2}$$

- Por otro lado, la distancia $d$ es la media aritmética de las distancias de $A$ y $B$ al eje de simetría, es decir,

$$d=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right)=\frac{a+c}{4}$$

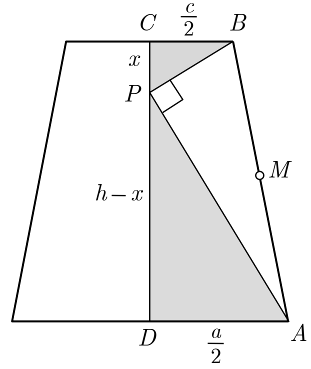
En lugar de comparar las medidas positivas $r$ y $d$, comparamos sus cuadrados. Calculamos para ello $r^2-d^2$:

$$r^2-d^2=\left(\frac{1}{4}\sqrt{(a-c)^2+4h^2}\right)^2-\left(\frac{a+c}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\left[(a-c)^2+4h^2-(a+c)^2\right]=\frac{1}{16}\left(4h^2-4ac\right)=\frac{1}{4}\left(h^2-ac\right)$$

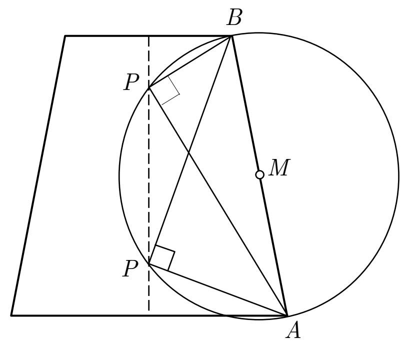
y deducimos entonces que:

- Si $ac<h^2$, el problema tiene dos soluciones.
- Si $ac=h^2$, el problema tiene solución única.
- Si $ac>h^2$, el problema no tiene solución.

Supongamos entonces que es $ac \le h^2$. Para determinar la distancia de $P$ a cada una de las bases, sean $C$ y $D$ los puntos donde del eje de simetría corta a las bases y reparemos en que los triángulos rectángulos $BCP$ y $PDA$ son semejantes, pues $\measuredangle PBC = \measuredangle APD$ al ser perpendiculares los lados de ambos ángulos. Siendo así, si $x$ es la distancia de $P$ a una de las bases, se tiene:



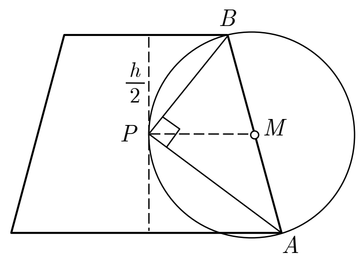

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{c}{2}}{h-x} \quad \Rightarrow \quad 4x(h-x) = ac \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 4hx + ac = 0$$




cuyas soluciones son:

$$x = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - ac}}{2}$$

siendo entonces $h - x = \frac{h \mp \sqrt{h^2 - ac}}{2}$, de manera que:




- Si es $ac < h^2$, los dos puntos $P$ están situados en el eje de simetría a distancias respectivas $\frac{h - \sqrt{h^2 - ac}}{2}$ y $\frac{h + \sqrt{h^2 - ac}}{2}$ de cada una de las bases.

- Si es $ac = h^2$, el único punto $P$ está situado a la misma distancia de ambas bases: $\frac{h}{2}$.