2. Demuestre que si n un número entero distinto de -2, el cociente

$$\frac{n^5-5n^3+4n}{n+2}$$

es un número entero divisible por 24.

Este problema figura resuelto en la página 407 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Teniendo en cuenta que para cada $n\in\mathbb{Z}$ es

$$n^5-5n^3+4n=n\,(n^4-5n^2+4)=n\,(n^2-1)(n^2-4)=(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)$$

si, en particular, es $n\neq -2$, será:

$$c_n=\frac{n^5-5n^3+4n}{n+2}=\frac{(n-2)(n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n+2)}{n+2}=(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)$$

Para probar que c_n es múltiplo de $24=2^3\cdot 3=8\cdot 3$, basta probar que c_n es múltiplo de 3 y de 8. Por un lado, c_n es múltiplo de 3 por tratarse del producto de cuatro números enteros consecutivos, alguno de los cuales es múltiplo de 3. Por otro lado, c_n es múltiplo de 8 porque entre cuatro números consecutivos hay dos pares, uno de los cuales es además múltiplo de 4.