G3 Problema 1

Problema 1

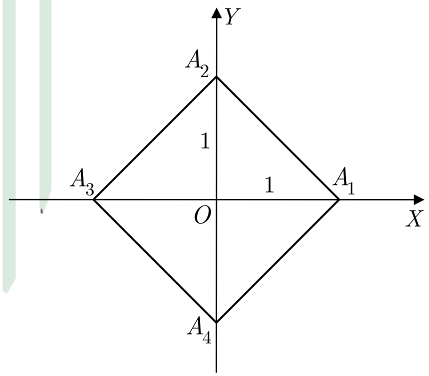
Determine los vértices de un cuadrado sabiendo que:

a) Su centro está en el punto $(2,3)$.

b) Si se traslada dicho centro al origen de coordenadas, se gira un ángulo de 60^o en sentido positivo y se reducen sus lados a la mitad, los vértices del nuevo cuadrado son los afijos de las raíces de un polinomio de grado 4 con coeficientes reales, siendo una de ellas $x_1 = 1$.

Solución:

El resultado de aplicar al cuadrado original las transformaciones geométricas indicadas en b) es otro cuadrado con centro en el origen de coordenadas y uno de cuyos vértices es el punto $A_1 = (1,0)$.



El vértice opuesto a A_1 es su simétrico respecto del origen, esto es, $A_3 = (-1,0)$, y los dos vértices restantes son los puntos del eje OY situados a distancia 1 del origen, es decir, $A_2 = (0,1)$ y $A_4 = (0,-1)$.

Los vértices del cuadrado original pueden determinarse ahora aplicando a los vértices anteriores la transformación inversa de la descrita en el apartado b), a saber, la composición de una homotecia de centro el origen y razón 2, seguida de un giro de ángulo $\frac{\pi}{3}$ en sentido negativo y de una traslación de vector $(2,3)$.

G3 Problema 1

Las ecuaciones de dicha transformación son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} cos\ \frac{\pi}{3} & sen\ \frac{\pi}{3} \\ -sen\ \frac{\pi}{3} & cos\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

G3 Problema 1

Sustituyendo (x,y) por las coordenadas de A_1, A_2, A_3 y A_4 se obtienen las coordenadas (x', y') de los vértices del cuadrado original, que resultan ser:

$$A_1' = (3{,}3-\sqrt{3}), \qquad A_2' = (2+\sqrt{3},4), \quad A_2' = (1{,}3+\sqrt{3}), \qquad A_2' = (2-\sqrt{3},2)$$