11. Demuestre que para todo número entero a, el número $a^9 - a^3$ es divisible por 504.

Este problema es el 7.62 del volumen 2 de Problemas de Álgebra, de G. Pérez-Canales y otros.

SOLUCIÓN: Llamemos

$$p(a) = a^9 - a^3 = a^3(a^6 - 1) = a^3(a^3 - 1)(a^3 + 1)$$

al número del enunciado. Probar que $p(a)$ es divisible por $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 7$ equivale a probar que $p(a)$ es divisible por 8, por 9 y por 7.

- $p(a)$ es divisible por 8.

  i) Si a es par, entonces a^3 es múltiplo de 8, luego $p(a)$ es múltiplo de 8.

  ii) Si a es impar, entonces a^3 es impar y $a^3 - 1$ y $a^3 + 1$ son dos pares consecutivos, luego uno de ellos es múltiplo de 2 y el otro múltiplo de 4, así que su producto es múltiplo de 8 y también lo es $p(a)$.

- $p(a)$ es divisible por 9.

  i) Si $a = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces $a^3 = 27k^3$ es múltiplo de 9 y $p(a)$ es múltiplo de 9.

ii) Si $a = 3k+1$, entonces

$$a^3 - 1 = (3k+1)^3 - 1 = 27k^3 + 27k^2 + 9k = 9\left(3k^3 + 3k^2 + k\right)$$

es múltiplo de 9 y $p(a)$ es múltiplo de 9.

iii) Si $a = 3k+2$, entonces

$$a^3 + 1 = (3k+2)^3 + 1 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 9 = 9\left(3k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right)$$

es múltiplo de 9 y $p(a)$ es múltiplo de 9.

- $p(a)$ es divisible por 7.

Dado que es

$$p(a) = a^3\left(a^6 - 1\right)$$

i) Si a es múltiplo de 7, entonces a^3 y por tanto $p(a)$ son múltiplos de 7.

ii) Si a no es múltiplo de 7, por el *Pequeño Teorema de Fermat*, $a^6 - 1$ es divisible por 7, luego también lo es $p(a)$.