1. Demuestre que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no pueden ser términos de una misma progresión aritmética

Este problema figura resuelto en la página 365 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ fuesen términos de una progresión aritmética; en tal caso existirían $n,m\in\mathbb{Z}$ y $d\in\mathbb{R}$, todos distintos de cero, tales que:

$$\begin{cases}\sqrt{5}=\sqrt{3}+md\\ \sqrt{3}=\sqrt{2}+nd\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{5}-\sqrt{3}=md\\ \sqrt{3}-\sqrt{2}=nd\end{cases}$$

Al dividir miembro a miembro las dos últimas igualdades, se deduciría que:

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{m}{n} \quad\Rightarrow\quad \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{1}=\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-3=\frac{m}{n} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}\in\mathbb{Q} \qquad (1)$$

Por otro lado, es:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{n}{m} \quad\Rightarrow\quad \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+3}{2}=\frac{n}{m} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}\in\mathbb{Q} \qquad (2)$$

Restando a la expresión (1) la expresión (2) se obtiene:

$$\left(\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)-\left(\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)=2\sqrt{10}$$

y así $2\sqrt{10}\in\mathbb{Q}$ por ser resta de racionales y por tanto ha de ser $\sqrt{10}\in\mathbb{Q}$, pero esto es imposible porque 10 no es un cuadrado perfecto.

OBSERVACIONES

1. **Teorema:** *Si un entero positivo n no es un cuadrado perfecto, entonces* $\sqrt{n}$ *es irracional.*

   Demostración. Utilizamos la reducción al absurdo. Supongamos que $\sqrt{n}$ fuese racional. Podríamos poner entonces $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, donde $p,q\in\mathbb{N}^+$ y $mcd(p,q)=1$. De la igualdad anterior se deduce que $p=q\sqrt{n}$ y que, por tanto, $p^2=nq^2$. De aquí se deduce que q es divisor de p^2 y como p y q son primos entre sí, del Lema de Euclides se deduce que q es divisor de p, es decir, que $q=1$. Por tanto, $n=p^2$ es un cuadrado perfecto, en contra de la hipótesis. En consecuencia, $\sqrt{n}$ es irracional.

2. Aunque aquí se ha probado para un caso particular, ocurre, en general, que *cualquier cociente de distancias entre términos distintos de una misma progresión aritmética de números reales es siempre un número racional*. La prueba de ello es trivial, pues si a_m, a_n, a_p y a_q son términos de una progresión aritmética (a_n) cuya diferencia es $d\neq 0$ y además $a_p\neq a_q$, el cociente entre las diferencias

$$\frac{a_m - a_n}{a_p - a_q} = \frac{(m-n)\cdot d}{(p-q)\cdot d} = \frac{m-n}{p-q}$$

que es un número racional por ser $m-n$ y $p-q$ números enteros.