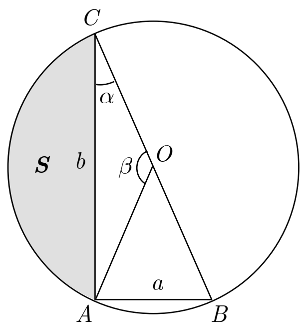
5. En un triángulo rectángulo, el cateto AB es constante de longitud a, siendo el otro cateto AC variable de longitud $b>0$. En la circunferencia circunscrita al triángulo, sea $S(b)$ el área del menor de los dos segmentos circulares determinados por el cateto AC. Halle:

$$\lim_{b\to 0^+}\frac{S(b)}{b^3}$$

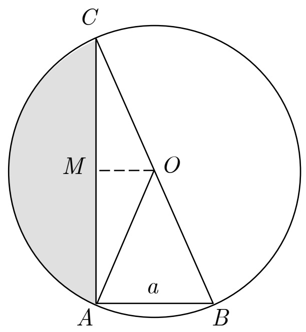
SOLUCIÓN: Sea O al centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Es evidente que la hipotenusa BC es un diámetro de la circunferencia circunscrita, pues el ángulo $\measuredangle BAC$ es recto. De ahí que el radio r de la circunferencia sea:



$$r=\frac{BC}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

Llamando $\alpha=\measuredangle ACB$ y $\beta=\measuredangle AOC$, deducimos lo siguiente:

- En el triángulo rectángulo ABC: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$
- En el triángulo isósceles OAC: $\beta=\pi-2\alpha=\pi-2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$



El área S del segmento circular puede ser obtenida como la diferencia entre el área del sector circular OAC y el área del triángulo OAC.

El área del sector circular OAC es $\frac{1}{2}\beta r^2$, y repárese en que la altura del triángulo isósceles OAC sobre el lado AC es la longitud OM, donde M es el punto medio del lado AC. Por la semejanza de los triángulos OMC y BAC, se tiene:

$$\frac{OM}{a}=\frac{OC}{BC}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{OM}{a}=\frac{1}{2}$$

y por tanto $OM=\frac{a}{2}$, con lo que el área del triángulo OAC es $\frac{1}{2}a\frac{b}{2}=\frac{1}{4}ab$. Podemos entonces calcular el área S del segmento circular como:

$$S=\frac{1}{2}\beta\, r^2-\frac{1}{4}ab=\frac{1}{8}\left[\left(a^2+b^2\right)\left(\pi-2\ \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)-2\,a\,b\right]$$

Por ser $b\to 0^+$, es $\frac{a}{b}\to+\infty$, y por tanto $\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\to\frac{\pi}{2}$, con lo que:

$$\lim_{b\to 0^+}\frac{S}{b^3}=\lim_{b\to 0^+}\frac{(a^2+b^2)(\pi-2\operatorname{arctg}\frac{a}{b})-2\,a\,b}{8\,b^3}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)\text{ L'Hôpital}}{=}\lim_{b\to 0^+}\frac{2b\left(\pi-2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)+\left(a^2+b^2\right)\frac{2a}{a^2+b^2}-2a}{24b^2}=$$

$$=\lim_{b\to 0^+}\frac{2\,b\left(\pi-2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)}{24\,b^2}=\lim_{b\to 0^+}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}{12\,b}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)\text{ L'Hôpital}}{=}\lim_{b\to 0^+}\frac{a}{6\left(a^2+b^2\right)}=\frac{a}{6a^2}=\frac{1}{6a}$$