7. Determine el término general de las sucesiones (x_n) definidas mediante las siguientes ecuaciones recurrentes a partir de los valores iniciales que se indican:

a) $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}$, $x_1 = x_2 = 2$

b) $x_n = 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 5$

c) $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 12n \cdot 3^n$, $x_1 = 0$, $x_2 = -9$

d) $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 6$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 14$

Este problema figura resuelto en la página 459 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: a) La recurrencia $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}$ es lineal y homogénea de segundo orden. La ecuación característica $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 = 0$ tiene las soluciones $x = 1 \pm i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\, sen \frac{\pi}{4} \right)$. Existen así $a, b \in \mathbb{R}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = a \cdot (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} + b \cdot (\sqrt{2})^n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} = (\sqrt{2})^n \left(a \cos\frac{n\pi}{4} + b \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} \right)$$

Como son $x_1 = x_2 = 2$, al particularizar n en 1 y 2 se obtiene el sistema $a + b = 2$, $b = 1$, cuya única solución es $a = 1$, $b = 1$. Por tanto,

$$x_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} \right)$$

b) $x_n = 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 5$.

Es una recurrencia lineal y homogénea de tercer orden. La ecuación característica es $x^3 - 3x - 2 = 0$ cuyas soluciones son $x = -1$ (doble) y $x = 2$ (simple). Existen por tanto $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}^+$ es

$$x_n = a(-1)^n + bn(-1)^n + c \cdot 2^n = (a + bn)(-1)^n + c \cdot 2^n$$

Al particularizar esta igualdad en los tres primeros naturales positivos, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} -a - b + 2c = 1 \\ a + 2b + 4c = 6 \\ -a - 3b + 8c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Por tanto,

$$x_n = n(-1)^n + 2^n$$

c) $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 12n \cdot 3^n$, $x_1 = 0$, $x_2 = -9$

Es una recurrencia lineal, con coeficientes constantes y completa de segundo orden.
Solución general de la ecuación homogénea: La ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad \text{es decir,} \quad (x-1)(x+3) = 0,$$

cuyas soluciones son $x=1$ y $x=-3$, reales y distintas. La solución general de la homogénea es por tanto

$$c_0\cdot 1^n+c_1\cdot(-3)^n=c_0+c_1\cdot(-3)^n$$

Solución particular de la ecuación completa: Podemos hacer $12n\cdot 3^n=p(n)\cdot s^n$ tomando $p(n)=12n$ y $s=3$. Como $s=3$ no es solución de la ecuación característica de la homogénea, existe una solución particular de la completa de la forma $x_n=q(n)\cdot 3^n$, donde $\operatorname{gr} q(n)\le 1$, es decir, $x_n=(a+bn)\cdot 3^n$. Sustituyendo en la ecuación completa, resulta

$$(a+bn+2b)\cdot 3^{n+2}+2(a+bn+b)\cdot 3^{n+1}-3(a+bn)\cdot 3^n=12n\cdot 3^n \quad\Rightarrow$$

$$\overset{:3^n}{\Rightarrow}\quad 9a+9bn+18b+6a+6bn+6b-3a-3bn=12n \quad\Rightarrow\quad (12a+24b)+12bn=12n \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases}12a+24b=0\\ 12b=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+2b=0\\ b=1\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}$$

Una solución particular de la ecuación completa es

$$x_n=\left(-2+n\right)\cdot 3^n=\left(n-2\right)\cdot 3^n$$

Solución general de la ecuación completa:

$$x_n = (n-2)\cdot 3^n + c_0 + c_1\cdot(-3)^n = c_0 + \left[n-2+(-1)^n\cdot c_1\right]\cdot 3^n$$

La solución particular que se busca cumple que $x_1 = 0$, $x_2 = -9$. Haciendo $n=1$ y $n=2$ en la fórmula anterior, se tiene:

$$\begin{cases} 0 = c_0 + \left[1-2-1\cdot c_1\right]\cdot 3 \\ -9 = c_0 + \left[2-2+c_1\right]\cdot 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_0 - 3 - 3c_1 \\ -9 = c_0 + 9c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = c_0 - 3c_1 \\ 9 = -c_0 - 9c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = c_0 - 3c_1 \\ 12 = -12c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = -1 \end{cases}$$

y por tanto

$$x_n = \left[n-2+(-1)^n\cdot(-1)\right]\cdot 3^n = \left[n-2-(-1)^n\right]\cdot 3^n$$

d) $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 6$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 14$

Solución general de la ecuación homogénea: La ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0\,, \qquad \text{es decir,} \qquad (x-1)^3 = 0\,,$$

cuyas soluciones son $x=1$ (triple). La solución general de la homogénea será por tanto de la forma

$$(c_0+c_1n+c_2n^2)\cdot 1^n = c_0+c_1n+c_2n^2$$

Solución particular de la ecuación completa: El término independiente de la ecuación completa es $p(n)\cdot s^n = 6 = 6\cdot 1^n$ tomando $p(n)=6$ y $s=1$. Este valor de s es solución triple de la ecuación característica de la homogénea, luego existe una solución particular de la completa de la forma

$$x_n = n^3\cdot q(n)\cdot 1^n = n^3 q(n),$$

donde $\operatorname{gr}\big(q(n)\big)=0$, es decir, $q(n)=k$ y $x_n = kn^3$. Sustituyendo en la ecuación completa:

$$k(n+3)^3 - 3k(n+2)^3 + 3k(n+1)^3 - kn^3 = 6 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad k\cdot[n^3+9n^2+27n+27-3n^3-18n^2-36n-24+3n^3+9n^2+9n+3-n^3]=6 \quad\Leftrightarrow\quad 6k=6 \quad\Leftrightarrow\quad k=1$$

Por tanto, una solución particular de la completa es

$$x_n = n^3.$$

Solución general de la ecuación completa:

$$x_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + n^3$$

La solución particular de la completa que se busca es la que cumple $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 14$. Sustituyendo en igualdad anterior se tiene el sistema

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + 1 = -2 \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8 = 2 \\ c_0 + 3c_1 + 9c_2 + 27 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = -4 \\ c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

La solución es:

$$x_n = -4 + 3n - 2n^2 + n^3$$