5. Halle un número natural con 15 divisores, tal que la suma de todos estos divisores sea igual a 1767.

Este problema figura resuelto en la página 482 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Si n es el número que se busca y $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}^+$ son los exponentes de los primos divisores de n en la factorización canónica de éste, es

$$\tau(n) = (k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_r+1) = 15$$

y como cada $k_i+1 \geq 2$ es divisor de 15, resulta que $k_i+1 \in \{3,5,15\}$ para cada $i=1,\ldots,r$.

Si, para algún $i=1,\ldots,r$, fuese $k_i+1=15$, entonces $k_i=14$, $r=1$ y sería $n=p^{14}$ donde p es un número primo, pero esto es imposible porque en tal caso, la suma de sus divisores sería

$$\sigma(n) = 1+p+\cdots+p^{14} \geq 1+2+\cdots+2^{14} = 2^{15}-1 = 32767 > 1767$$

Por tanto es $k_i+1 \neq 15$ para cada $i=1,\ldots,r$ y entonces $r=2$, siendo además $k_1+1=3$ y $k_2+1=5$, es decir, $k_1=2$ y $k_2=4$ o viceversa.

Será así:

$$n = p^2 \cdot q^4$$

donde p y q son primos distintos. La suma de sus divisores será:

$$\sigma(n) = (1 + p + p^2)(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = 1767 = 3 \cdot 19 \cdot 31$$

Como los divisores de 1767 son 1, 3, 19, 31, 57, 93, 589 y 1767, y además

$$1 + p + p^2 \geq 1 + 2 + 2^2 = 7, \qquad 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \geq 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$$

necesariamente $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \in \{31, 57, 93\}$. De las tres ecuaciones, la única que admite como solución a un número primo es $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 = 31$, siendo $q = 2$, y por tanto $1 + p + p^2 = 57$, que admite como solución al número primo $p = 7$. El número que se buscaba es:

$$n = 7^2 \cdot 2^4 = 784$$