


P2. Problema 11.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

A circular logo for Academia Deimos. It features a stylized figure of a person with arms raised, set against a background of vertical lines. The word "DEIMOS" is written in a bold, sans-serif font across the bottom of the circle.

Enunciado:

Los números $1, 2, 3, \dots, n$ se ordenan aleatoriamente en su totalidad.

- a) Halle la probabilidad de que ninguno de ellos coincida con el número de orden que ocupa.
- b) Estudie la tendencia de esta probabilidad al aumentar n indefinidamente.

Resuelto en Vol. 4. Ej 97.4

Apartado (a):

Sea A_i el suceso “*el número i ocupa el i -ésimo lugar*”.

La probabilidad a calcular es

$$p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = 1 - p(A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

Apartado (a):

Vamos a aplicar la Fórmula de Inclusión-Exclusión, por lo que necesitamos saber las siguientes probabilidades:

- $p(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$
- $p(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$
- $p(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!}$
- \vdots
- $p\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{n!}$

Apartado (a):

Por la fórmula de inclusión-exclusión:

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n p(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} p(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} p\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Apartado (a):

De modo que

$$\begin{aligned} p\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) &= 1 - p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= 1 - \left[\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \right] \\ &= \frac{1}{\textcolor{red}{0}!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Apartado (b):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p \left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = e^{-1}$$

Recordando que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$