Problema 5. En cierto sistema de referencia del plano afín real, la curva $\mathcal{C}$ tiene por ecuación $y = 2x^3 - 3x^2 + x - 2$. Demuestre que las rectas que cortan a $\mathcal{C}$ en tres puntos tales que uno de ellos es el punto medio de los otros dos pasan por un punto fijo. Halle las coordenadas de este punto.

Este problema es el 06.13 del volumen 4 y allí figura resuelto

Solución:

Sea $r:\ y = mx + n$ una cualquiera de las rectas que cumplen el enunciado, que por hipótesis cortará a $\mathcal{C}$ en tres puntos de la forma $A = (a,b)$, $B = (a,b) + (u,v)$, $C = (a,b) - (u,v)$, pues ésta es la forma general de las ternas de puntos con la propiedad de que el primero de ellos sea punto medio del segmento que tiene por extremos a los otros dos.

Las abscisas x_1, x_2 y x_3 de los puntos de corte de $\mathcal{C}$ con r son las raíces del polinomio de tercer grado que resulta de eliminar la variable y en el sistema

$$\begin{cases} y = 2x^3 - 3x^2 + x - 2 \\ y = mx + n \end{cases}$$

es decir, son las raíces del polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + (1-m)x - (2+n)$, y por las *relaciones de Cardano-Vieta* ha de cumplirse que $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{2}$. Ahora bien dichas abscisas son las de los puntos A, B y C, es decir, $x_1 = a$, $x_2 = a + u$, $x_3 = a - u$ y por tanto $x_1 + x_2 + x_3 = 3a$, luego $a=\frac{1}{2}$. De aquí, y puesto que, A está sobre la cúbica se deduce que

$$b = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2 = -2$$

Así pues, todas las rectas del enunciado pasan por el punto $A=\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

OBSERVACIÓN

La conclusión de este problema es consecuencia de otro resultado de gran interés, que asegura que *cualquier curva cúbica es simétrica respecto de su punto de inflexión.* El lector comprobará sin dificultad que $A=\left(\frac{1}{2},-2\right)$ es efectivamente el punto de inflexión de la curva $\mathcal{C}$.