6. Calcule los límites siguientes:

a) $H=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\,\mathrm{L}\frac{4}{2}+3\,\mathrm{L}\frac{5}{3}+\cdots+n\,\mathrm{L}\frac{n+2}{n}}{n}$

b) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(2+\dfrac{3^2}{2}+\dfrac{4^3}{3^2}+\cdots+\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)$

c) $J=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{L}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\cdots\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)}{\operatorname{sen}1+\operatorname{sen}\frac{1}{2}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{1}{n}}\qquad(a,b>0)$

El apartado b) es el problema 04.44 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos. El apartado c) figura resuelto en la página 688 del volumen 2 de la misma colección.

SOLUCIÓN:

a) $H=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\,\mathrm{L}\frac{4}{2}+3\,\mathrm{L}\frac{5}{3}+\cdots+n\,\mathrm{L}\frac{n+2}{n}}{n}$

Dado que la sucesión (n) es estrictamente monótona y divergente a $+\infty$, según la *Regla de Stolz*:

$$H=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ \mathrm{L}\,\frac{4}{2}+3\ \mathrm{L}\,\frac{5}{3}+\cdots+n\,\mathrm{L}\,\frac{n+2}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{L}\,\frac{n+2}{n}=\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{L}\left(1+\frac{2}{n}\right)\underset{\mathrm{L}\left(1+\frac{2}{n}\right)\sim\frac{2}{n}}{=}\lim_{n\to\infty} n\,\frac{2}{n}=2$$

b) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(2+\dfrac{3^2}{2}+\dfrac{4^3}{3^2}+\cdots+\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)$

La sucesión (n^2) es monótona divergente a $+\infty$, luego según la *Regla de Stolz*, será:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(2+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)=\frac{e}{2}$$

c) $J=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{L}\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}\cdots\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{b}}\right)}{\operatorname{sen}1+\operatorname{sen}\frac{1}{2}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$

La sucesión (y_n) del denominador es estrictamente monótona pues $y_n-y_{n-1}=\operatorname{sen}\frac{1}{n}>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{sen}1+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}+\cdots+\operatorname{sen}\tfrac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

es divergente a $+\infty$ pues como es $\lim\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}=1$, las series $\sum\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ y $\sum\frac{1}{n}$ son del mismo carácter, es decir, ambas divergentes. Por tanto, puede aplicarse la *Regla de Stolz* y de ella se deduce que

$$J=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}\cdots\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{b}})}{\operatorname{sen}1+\operatorname{sen}\frac{1}{2}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\sqrt{a+\sqrt{b}}+\mathrm{L}\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}+\cdots+\mathrm{L}\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{b}}}{\operatorname{sen}1+\operatorname{sen}\frac{1}{2}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{b}}}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}\underset{\operatorname{sen}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\mathrm{L}\,(a+\sqrt[n]{b})}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\,(a+\sqrt[n]{b})=\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\,(a+b^{1/n})=$$

$$=\mathrm{L}\,(a+1)$$