1. Demuestre que la suma de n números naturales consecutivos es múltiplo de n si y sólo si n es impar.

Este problema es el 94.29 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

SOLUCIÓN: Sean $k,\ k+1,\ k+2,\ \dots,\ k+n-1$ los n números naturales consecutivos. Entonces,

$$S=k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+n-1)=\frac{k+k+n-1}{2}\cdot n=\frac{2k+n-1}{2}\cdot n$$

Por tanto,

$$S \text{ es múltiplo de } n \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{2k+n-1}{2}\in\mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow\quad 2k+n-1 \text{ es múltiplo de } 2 \quad\Leftrightarrow\quad n-1 \text{ es múltiplo de } 2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad n-1 \text{ es par} \quad\Leftrightarrow\quad n \text{ es impar}$$