9. Sea (h_n) la sucesión de las sumas parciales de la serie armónica, esto es, la de término n-ésimo

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Demuestre que:

a) La sucesión $(h_n - \mathrm{L}\, n)$ es convergente.

b) Existe un único $\gamma \in \mathbb{R}$ (llamado *constante de Euler*) tal que

$$h_n = \mathrm{L}\, n + \gamma + \varepsilon_n\,,$$

donde $\varepsilon_n \to 0$, y deduzca de ello que $h_n \sim \mathrm{L}\, n$ cuando $n \to \infty$.

c) Si $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, la sucesión (a_n) es convergente y calcule su límite, donde

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{np}$$

Este problema es un compendio de los problemas 98.28 y 98.44 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: a) Probaremos que la sucesión $(x_n) = (h_n - \mathrm{L}\, n)$ es acotada y monótona decreciente y, en consecuencia, convergente.

- (x_n) es estrictamente decreciente. En efecto,

$$x_{n+1} - x_n = h_{n+1} - \mathrm{L}(n+1) - h_n + \mathrm{L}\,n = \frac{1}{n+1} - \left[\mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}\,n\right]$$

Según el *teorema del valor medio* aplicado a la función derivable $f(x) = \mathrm{L}\,x$ en el intervalo $[n, n+1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algún $c_n \in (n, n+1)$ tal que

$$f(n+1) - f(n) = f'(c_n), \qquad \text{es decir,} \qquad \mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}\,n = \frac{1}{c_n}$$

Dado que es $n < c_n < n+1$, se deduce que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c_n} < \frac{1}{n}$, luego

$$\frac{1}{n+1} < \mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}\,n < \frac{1}{n}$$

y por tanto,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \left[\mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}\,n\right] < 0$$

luego (x_n) es estrictamente decreciente.

- $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Al sumar las desigualdades siguientes miembro a miembro:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{L}\,(n+1) - \mathrm{L}\,n & & < \frac{1}{n} \\ \mathrm{L}\,n & - \mathrm{L}\,(n-1) & < \frac{1}{n-1} \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \mathrm{L}\,2 & - \mathrm{L}\,1 & < 1 \end{array}$$

se obtiene:

$$\mathrm{L}\,(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \qquad \text{es decir,} \qquad \mathrm{L}(n+1) < h_n$$

Entonces, como la función logaritmo es estrictamente creciente:

$$x_n = h_n - \mathrm{L}\,n > \mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}\,n > 0$$

Por tanto, la sucesión (x_n) es decreciente y acotada inferiormente, luego es convergente. Al número real $\gamma = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(h_n - \mathrm{L}\,n)$ se le conoce como *constante de Euler*. Su valor aproximado es $\gamma = 0{,}5772156\ldots$ y aún guarda secretos: no se sabe siquiera si es racional.

b) Como es $\lim_{n\to\infty}(h_n - \mathrm{L}\, n) = \gamma$, también es $\lim_{n\to\infty}(h_n - \mathrm{L}\, n - \gamma) = 0$, es decir, llamando $\varepsilon_n = h_n - \mathrm{L}\, n - \gamma$, resulta que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{\mathrm{L}\, n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\, n + \gamma + \varepsilon_n}{\mathrm{L}\, n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\gamma + \varepsilon_n}{\mathrm{L}\, n}\right) = 1 + 0 = 1$$

y por tanto $h_n \sim \mathrm{L}\, n$.

c) Si $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, la sucesión (a_n) puede escribirse en términos de la h_n mediante

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{np} = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{np}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) =$$

$$= h_{np} - h_{n-1} = \mathrm{L}\,(np) + \gamma + \varepsilon_{np} - \mathrm{L}\,(n-1) - \gamma - \varepsilon_{n-1} = \mathrm{L}\left(\frac{np}{n-1}\right) + \varepsilon_{np} - \varepsilon_{n-1}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{L}\, p$$