

C4. Series numéricas

1. Sume las series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$

El primer apartado es el ejercicio 8.17 del libro Ejercicios de Análisis, de Braulio De Diego. El segundo es el ejercicio IV-65 del libro Problemas de Cálculo Infinitesimal, de E. Tebar Flores.

2. Estudie la convergencia de las series de término general

a) $x_n = \frac{n+1}{n} \cdot \tan \frac{1}{n} \cdot L \left(\frac{n+1}{n} \right)$

b) $x_n = \frac{a^n}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} \quad (a > 0)$

c) $x_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}$

d) $x_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{-n}$

Los apartados c) y d) son los problemas IV-43 y IV-14 del volumen Problemas de Cálculo Infinitesimal, de E. Tébar. El apartado b) es parte del problema 8.10 del libro Ejercicios de Análisis, de Braulio De Diego.

3. Estudie la naturaleza y, en su caso, halle la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^3+3n^2+2n}$$

Este problema figura resuelto en la página 688 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

4. Demuestre que la serie siguiente es convergente y calcule su suma

$$\sum_{n=2}^{\infty} L\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

es convergente y calcule su suma.

Este problema es el IV.66 de Problemas de Cálculo Infinitesimal, de E. Tebar.

5. Demuestre que la serie siguiente es convergente y calcule su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^3-2n}$$

Este problema figura resuelto en la página 100 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones, de Editorial Deimos.

6. Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$$

Un problema idéntico a éste figura resuelto en la página 267 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

7. Dado $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $|\rho| < 1$, sume las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos n\theta \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \operatorname{sen} n\theta$$

Problemas similares a éste figura resuelto en las páginas 10 y 335 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

8. Sume la serie

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{p}}$$

donde p es un número natural mayor que 1.

Este problema es el IV.59 de Problemas de Cálculo Infinitesimal, de E. Tebar.

9. Sume la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3\sqrt{3}n^2 + 8n + 2\sqrt{3}}$$

Este problema figura resuelto en la página 591 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

10. Estudie la convergencia y calcule, si es posible, la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

Este problema figura resuelto en las páginas 250 y 269 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

11. Estudie la convergencia de la serie:

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \left(\frac{5}{9}\right)^5 - \dots + \dots$$

Este problema figura resuelto en la página 250 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

12. Decida el carácter de las series siguientes y súmelas en caso de convergencia:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

b) $1 - L \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - L \frac{3}{2} + \dots + \frac{1}{n} - L \frac{n+1}{n} + \dots$

Este problema es el problema 8.18 del libro Ejercicios de Análisis, de Braulio De Diego. Editorial Deimos

