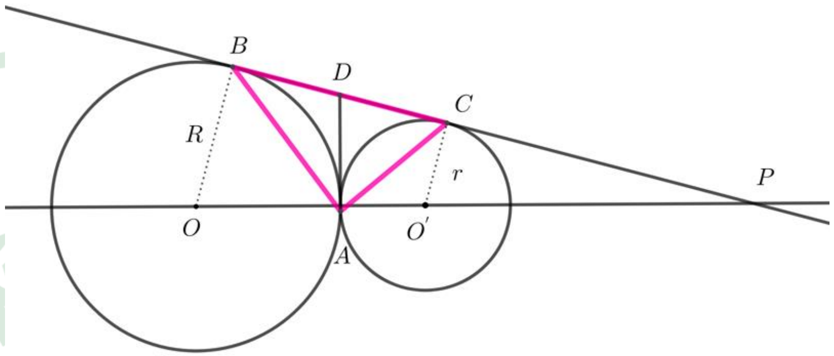
3. Si dos circunferencias son tangentes exteriores en A y los puntos de contacto de una tangente común son B y C, demostrar que el triángulo ABC es rectángulo en A y calcular la altura correspondiente a la hipotenusa en este triángulo en función de los radios de ambas circunferencias.

SOLUCIÓN:

Tracemos por A una tangente a los dos círculos que corta BC en D. Dado que los segmentos de tangente trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son iguales, tenemos:

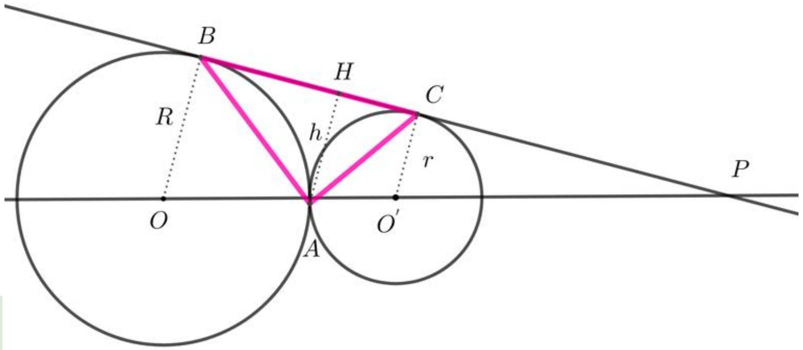


$$DA = DB = DC.$$

Por tanto A se encuentra en una circunferencia centrada en D, y el $\widehat{BAC} = 90^{\circ}$.

Por otro lado;

Sean R y r los radios de las circunferencias, h la altura AH del triángulo rectángulo ABC y $d = DA$.



Como los $\triangle POB$, $\triangle PAH$ y $\triangle PO'C$ son semejantes, se deduce:

$$\frac{R}{d+R} = \frac{h}{d} = \frac{r}{d-r}$$

Luego:

$$d = \frac{Rh}{R-h} = \frac{rh}{h-r}$$

De donde:

$$h = \frac{2Rh}{R+r}$$