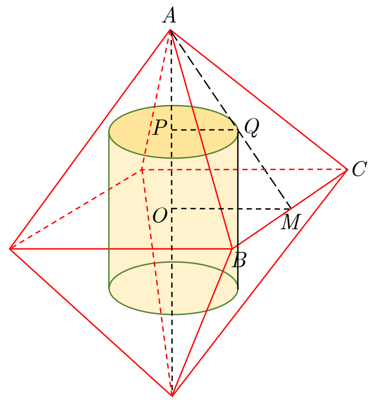
4. Se considera un octaedro regular de arista 1 cm. Determine las dimensiones del cilindro de revolución de volumen máximo inscrito en dicho octaedro y cuyo eje está sobre una diagonal.

Este problema figura resuelto en la página 34 del volumen 1 y es el problema 10.7 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Deben calcularse el radio r y la altura h del cilindro de mayor volumen entre los inscritos en el octaedro como se indica en la figura adjunta. El volumen del cilindro vale:



$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

Intentamos encontrar una relación entre las variables r y h que permitan escribir el volumen del cilindro en función de una sóla de ellas para derivar esta expresión.

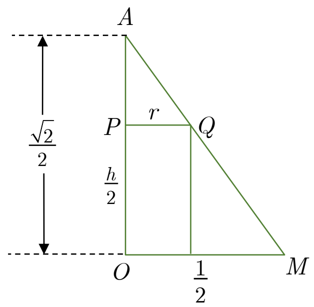
El cilindro toca a cada cara del octaedro, que es un triángulo equilátero, en un único punto situado en una altura de dicho triángulo. En la figura, el cilindro toca a la cara ABC del octaedro sólo en el punto Q.

Si M es el punto medio de la arista BC, la altura AM mide, como todas las alturas de todas las caras del tetraedro, en virtud del *Teorema de Pitágoras*,

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De aquí se deduce inmediatamente la mitad de la altura del octaedro, que es

$$OA=\sqrt{AM^2-OM^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Por la semejanza de los triángulos PQA y OMA, se tiene que $\frac{PQ}{OM}=\frac{PA}{OA}$, es decir,

$$\frac{r}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{h}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \text{o bien,} \qquad r=\frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)$$

Para que pueda hablarse de cilindro, es obvio que la altura h de éste debe ser positiva y menor que la altura del octaedro, que es $2\cdot OA=\sqrt{2}$. Se trata por tanto de calcular, caso de existir, el mínimo absoluto de la función $V:(0,\sqrt{2})\to\mathbb{R}$ dada por

$$V(h)=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot h=\frac{\pi h}{8}(\sqrt{2}-h)^2$$

La función V es derivable en todo el intervalo $(0,\sqrt{2})$ y para cada h de dicho intervalo es

$$V'(h)=\frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-h)(\sqrt{2}-3h)$$

Resulta así que $V'(h)=0$ sólo cuando $h=\frac{\sqrt{2}}{3}$, y es inmediato que $V'(h)>0$ si $0<h<\frac{\sqrt{2}}{3}$ y que $V'(h)<0$ si $\frac{\sqrt{2}}{3}<h<\sqrt{2}$. Es así que V es estrictamente creciente en el intervalo $(0,\frac{\sqrt{2}}{3})$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(\frac{\sqrt{2}}{3},\sqrt{2})$, por lo que V alcanza máximo absoluto en $h=\frac{\sqrt{2}}{3}$. De ello se desprende que el cilindro de volumen máximo inscrito en el octaedro de arista 1 es el de altura $h=\frac{\sqrt{2}}{3}$ y radio $r=\frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. El volumen de dicho cilindro es

$$V\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{24}\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{\pi\sqrt{2}}{27}$$