5. Calcule los siguientes límites:

a) $E=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt{n^2+1}-n)}$

b) $F=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n+h}-\sqrt[4]{n+k}}{\sqrt[3]{n+h}-\sqrt[3]{n+k}}\cdot\sqrt[12]{n+j}\qquad (h\neq k)$

c) $G=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\frac{\pi n}{2n+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}$

Los apartados b) y c) de este problema figuran resueltos en las páginas 40 y 414 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

SOLUCIÓN: a) El límite

$$E=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt{n^2+1}-n)}$$

es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Dado que cuando $n\to\infty$ son $1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}$, $\sqrt[n]{2}-1=2^{1/n}-1\sim\frac{1}{n}\mathrm{L}2$ y que

$$\sqrt{n^2+1}-n=n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-n=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)=n\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}-1\right]\sim n\cdot\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2n}$$

resulta que

$$E=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt{n^2+1}-n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}\,\mathrm{L}\,2\cdot\frac{1}{2n}}=\frac{1}{\mathrm{L}\,2}$$

b) $F=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n+h}-\sqrt[4]{n+k}}{\sqrt[3]{n+h}-\sqrt[3]{n+k}}\cdot\sqrt[12]{n+j}$

Tanto para $p=3$ como para $p=4$ resulta que

$$\sqrt[p]{n+h}-\sqrt[p]{n+k}=\sqrt[p]{n+k}\cdot\left(\sqrt[p]{\frac{n+h}{n+k}}-1\right)=\sqrt[p]{n+k}\cdot\left(\left(1+\frac{h-k}{n+k}\right)^{1/p}-1\right)\sim\sqrt[p]{n+k}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{h-k}{n+k}=\frac{h-k}{p\,(n+k)^{1-1/p}}$$

y por tanto

$$\frac{\sqrt[4]{n+h}-\sqrt[4]{n+k}}{\sqrt[3]{n+h}-\sqrt[3]{n+k}}\sim\frac{(h-k)\cdot 3\cdot(n+k)^{2/3}}{4\,(n+k)^{3/4}(h-k)}=\frac{3}{4\sqrt[12]{n+k}}$$

Así que:

$$F=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4\sqrt[12]{n+k}}\cdot\sqrt[12]{n+j}=\frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\sqrt[12]{\frac{n+j}{n+k}}=\frac{3}{4}$$

c) $G=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\frac{\pi n}{2n+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}$

Es un límite indeterminado $\frac{+\infty}{+\infty}$. Dado que $\sqrt[3]{n^3+2n-1}\sim n$ cuando $n\to\infty$, será:

$$G=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{\pi n}{2n+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi n}{2n+1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{4n+2}}\underset{\tan\frac{\pi}{4n+2}\sim\frac{\pi}{4n+2}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot\frac{\pi}{4n+2}}=\frac{4}{\pi}$$