P1. Problema 10.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Probar, a través del binomio de Newton, la siguiente identidad:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Sugerencia: Partir de la identidad $(x+1)^n(x+1)^n = (x+1)^{2n}$

Resuelto en Vol. 1 Pag. 204

Binomio de Newton:

Por el binomio de Newton, sabemos que

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

Dado que $(x+1)^n (x+1)^n = (x+1)^{2n}$, entonces se verifica que:

$$\underbrace{\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right]}_{(1)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k}_{(2)}$$

Ahora, prestemos atención al término de grado n en cada uno de estos polinomios:

Demostración de la igualdad:

- Coeficiente del término de grado n en (1):

$$\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\cdot\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\cdot\binom{n}{0}$$

$$=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots\binom{n}{n}^2$$

- Coeficiente del término de grado n en (2):

$$\binom{2n}{n}$$

Demostración de la igualdad:

Como los polinomios (1) y (2) son iguales, todos sus coeficientes coincidirán, en particular los de grado n, por tanto:

$$\boxed{\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}}$$