A1

Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales

1. Espacios vectoriales. Elementos y propiedades

1.1. Espacio vectorial: Sea V un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman *vectores* y sea $\mathbb{K}$ un cuerpo cuyos elementos se llaman *escalares*. Se dice que V es un *espacio vectorial* sobre $\mathbb{K}$ si se han definido las siguientes operaciones:

i) Una operación interna $V \times V \to V : (\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}+\mathbf{v}$, llamada *suma* de vectores, tal que

1. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$, para todos los $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ (*asociatividad*)
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$, para todos los $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ (*conmutatividad*)
3. Existe un vector $\mathbf{0}\in V$, llamado *vector nulo*, tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u}\in V$
4. Para cada $\mathbf{u}\in V$ existe otro vector $-\mathbf{u}\in V$, llamado *vector opuesto de* $\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

ii) Una operación externa $\mathbb{K}\times V \to V : (\lambda,\mathbf{u})\mapsto \lambda\mathbf{u}$, llamada *producto por escalar*, tal que para cualesquiera $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ y $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ ocurre que

5. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\,\mathbf{u}+\lambda\,\mathbf{v}$
6. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\,\mathbf{u}+\mu\,\mathbf{u}$
7. $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$
8. $1\,\mathbf{u}=\mathbf{u}$

1.2. Propiedades que se deducen de los axiomas: *En un espacio vectorial* V *sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$, *para cualesquiera que sean* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ *y* $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, *se cumple que:*

1. $\lambda\,\mathbf{0}=\mathbf{0}$
2. $0\,\mathbf{u}=\mathbf{0}$
3. $\lambda\,\mathbf{u}=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \lambda=0 \text{ o } \mathbf{u}=\mathbf{0}$
4. $\lambda\,\mathbf{u}=\mu\,\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{u}\neq\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \lambda=\mu$
5. $\lambda\,\mathbf{u}=\lambda\,\mathbf{v} \text{ y } \lambda\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{u}=\mathbf{v}$
6. $(-\lambda)\mathbf{u}=\lambda(-\mathbf{u})=-\lambda\,\mathbf{u}$

1.3. Ejemplos: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$:

1. El conjunto $\mathbb{K}^n$ de las n-uplas de escalares $\mathbb{K}$ con las operaciones usuales de suma y producto por escalares de n-uplas.
2. El conjunto $\mathbb{K}[x]$ de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ con las operaciones de suma de polinomios y producto de éstos por escalares.
3. El conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ de las matrices de tamaño $m\times n$ con elementos en $\mathbb{K}$ con las operaciones usuales de suma de matrices y producto de éstas por escalares.
4. El conjunto de las funciones $\mathcal{F}(D,\mathbb{K})$ definidas en un conjunto D y con valores en el cuerpo $\mathbb{K}$ con la suma y producto por escalares de funciones reales. Si $D=\mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ es el espacio vectorial $\mathbb{K}^\infty$ de las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$.

2. Subespacios vectoriales

2.1. Subespacio vectorial: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea U un subconjunto de V no vacío. Se dice que U es un *subespacio vectorial* de V si las operaciones de V son operaciones para U y, con ellas, U es un espacio vectorial, esto es, si dados $\mathbf{u},\mathbf{v}\in U$ y $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, ocurre que $\lambda\,\mathbf{u}+\mu\,\mathbf{v}\in U$.

El vector nulo $\mathbf{0}$ pertenece a todos los subespacios de V, pues si U es uno de ellos, $U\neq\varnothing$, y por tanto existe $\mathbf{u}\in U$, con lo que $0\,\mathbf{u}=\mathbf{0}\in U$.

2.2. Subespacio engendrado por un conjunto de vectores: Dado un conjunto de vectores $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_p\}\subset V$, se dice que un vector $\mathbf{v}\in V$ es *combinación lineal* de los vectores de S si existen $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$ tales que $\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_p\mathbf{u}_p$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de S es un subespacio vectorial de V llamado *subespacio engendrado por S*. Se escribe

$$\mathcal{L}(S)=\mathcal{L}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_p\}=\{\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_p\mathbf{u}_p:\lambda_i\in\mathbb{K},\ \ i=1,\dots,p\}$$

y resulta ser el menor de todos los subespacios de V que contienen a S.

2.3. Ejemplo: En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, los vectores $\mathbf{u}=(1,2,0,0)$, $\mathbf{v}=(0,3,-1,0)$ y $\mathbf{w}=(0,0,5,4)$ engendran el subespacio:

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\right\}=\left\{\lambda(1,2,0,0)+\mu(0,3,-1,0)+\nu(0,0,5,4):\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(\lambda,2\lambda+3\mu,-\mu+5\nu,4\nu\right):\ \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\right\}$$

2.4. Ejemplo: En el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios reales con una indeterminada x, considérese el subespacio $\mathcal{L}\left\{1,1+x,x-x^2\right\}$, esto es, el formado por los polinomios $\alpha p(x)+\beta q(x)+\gamma r(x)=(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)x-\gamma x^2$, donde $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$. Este subespacio es el de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2, $\mathbb{R}_2[x]$, pues cualquier polinomio $a+bx+cx^2$ de grado menor o igual que 2 puede expresarse en la forma anterior si más que tomar $\alpha=a-b-c,\ \beta=b+c,\ \gamma=-c$.

2.5. Intersección de subespacios: *La intersección de subespacios, cualesquiera, de un espacio vectorial V es un subespacio de V.*

2.6. Ejemplo: Si en el espacio vectorial $V=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de tamaño $n\times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ se consideran el subespacio S de las matrices simétricas y el subespacio T de las matrices triangulares superiores, la intersección $S\cap T$ es el subespacio D de todas las matrices diagonales, esto es, el de aquellas matrices que tienen nulos todos los elementos fuera de la diagonal.

2.7. Ejemplo: En el espacio vectorial $\mathbb{R}^\infty$ de las sucesiones de números reales se consideran el subespacio P de las progresiones aritméticas y el subespacio A de las sucesiones acotadas. La intersección $P\cap A$ es el subespacio de las sucesiones constantes, pues si $(x_n)\subset\mathbb{R}$ es progresión aritmética, será $x_n=a+bn$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y si además es acotada, es obligado que sea $b=0$, con lo que $x_n=a$.

2.8. Observación: La unión de subespacios, de un espacio vectorial V, no es en general subespacio de V. Por ejemplo, en el espacio $\mathbb{R}^2$, los conjuntos $U_1=\left\{(x,0):x\in\mathbb{R}\right\}$ y $U_2=\left\{(0,y):y\in\mathbb{R}\right\}$ son subespacios y, en cambio, $U_1\cup U_2$ no es un subespacio pues $\mathbf{u}_1=(1,0)\in U_1$, $\mathbf{u}_2=(0,1)\in U_2$ y $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=(1,1)\notin U_1\cup U_2$.

2.9. Suma de subespacios. Subespacios suplementarios: *La suma de varios subespacios* $U_1, \dots, U_p$ *de un mismo espacio vectorial* V *es el conjunto*

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_p = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_p \in V : \mathbf{u}_i \in U_i, \;\; i = 1, \dots, p\}$$

Este conjunto es el menor subespacio que contiene a todos los U_i, *es decir,* $U_1 + U_2 + \cdots + U_p = \mathcal{L}(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_p)$.

Cada vector de la suma puede, en general, expresarse de muchas formas como suma de vectores de los U_i. Si la descomposición de cualquier vector de $U_1 + \cdots + U_p$ como suma de vectores de los U_i es única, diremos que la suma $U_1 + \cdots + U_p$ es *directa* y escribiremos $U_1 \oplus \cdots \oplus U_p$. Para dos subespacios, la suma $U_1 + U_2$ es directa si y sólo si $U_1 \cap U_2 = O$. Se dice que dos subespacios U_1 y U_2 son *suplementarios* si $U_1 \oplus U_2 = V$, esto es, si $U_1 + U_2 = V$ y $U_1 \cap U_2 = O$.

2.10. Ejemplo: En el espacio $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios $U_1 = \{(\alpha, \beta, 0, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y $U_2 = \{(0, \lambda, \mu, 0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. La suma de estos dos subespacios está formada por los vectores $(\alpha, \beta + \lambda, \mu, 0)$, donde $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Es entonces inmediato que dicha suma es $U_1 + U_2 = \{(x, y, z, 0) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Nótese que cualquier vector de $U_1 + U_2$ se puede obtener como suma de un vector de U_1 y otro de U_2 de muchas maneras. Por ejemplo, $(2, 3, -1, 0) = (2, \beta, 0, 0) + (0, \lambda, -1, 0)$, donde $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\beta + \lambda = 3$, luego la suma $U_1 + U_2$ no es directa.

En cambio, si se considera el subespacio $W_1 = \{(\alpha, 0, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, la suma $W_1 + U_2$ es, evidentemente $W_1 + U_2 = \{(x, y, z, 0) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, que coincide con $U_1 + U_2$, aunque entre estos dos ejemplos de suma hay una diferencia notable: contrariamente a lo que ocurría en la suma $U_1 + U_2$, cualquier vector de la suma $W_1 + U_2$ se puede expresar de una única manera como suma de un vector de W_1 y otro de U_2, a saber, $(x, y, z, 0) = (x, 0, 0, 0) + (0, y, z, 0)$. Es decir, la suma $W_1 + U_2$ es directa.

2.11. Ejemplo: Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales con una indeterminada x. Sea U_1 el subespacio de los polinomios que tienen a 1 y a -1 como raíces; y sea $U_2 = \mathbb{R}_1[x]$, subespacio de los polinomios de grado menor o igual que uno. Entonces, la suma $U_1 + U_2$ es todo el espacio $\mathbb{R}[x]$, ya que cualquier polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ se puede escribir, tras dividirlo por $x^2 - 1$ como:

$$p(x) = (x^2 - 1)\, c(x) + (a + bx)$$

Como el cociente y el resto de la división son únicos, la anterior descomposición es única y, por ello, la suma $U_1 + U_2$ es directa y los U_1 y U_2 son suplementarios.

3. Dependencia e independencia lineal

3.1. Vectores linealmente dependientes (independientes): Sea $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que S es *linealmente independiente* (o *libre*) si la única combinación lineal nula que se forma con ellos tiene todos sus coeficientes nulos; esto es, si para ciertos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ es

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0}, \quad \text{entonces} \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Se dice que S es *linealmente dependiente* (o *ligado*) si no es libre, es decir, si existen algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, no todos nulos, tales que $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_p\mathbf{u}_p = \vec{0}$. Equivalentemente, un sistema de vectores S es linealmente dependiente si alguno de sus vectores es combinación lineal de los restantes.

3.2. Ejemplos

1. Cualquier sistema escalonado de p vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ $(p \leq n)$ es linealmente independiente (un sistema ordenado de vectores $S = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p)$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se dice *escalonado* si cada vector a partir del segundo comienza con una sucesión de ceros que contiene, al menos, un cero más que la del vector anterior).

2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios con coeficientes reales, cualquier conjunto $S = \left\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)\right\}$ formado por polinomios de distinto grado es linealmente independiente.

3. En el espacio vectorial real $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones reales de variable real, el sistema $S = \left\{\operatorname{sen} x, \cos x, \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right\}$ es linealmente dependiente, pues como

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x,$$

se deduce que

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$$

es una combinación lineal nula de las funciones de S con coeficientes no nulos.

4. Bases y dimensión de un espacio vectorial

4.1. Espacio vectorial de tipo finito: Se dice que un espacio vectorial V es de *tipo finito* si está generado por un número finito de vectores, es decir, si existe algún sistema de vectores $G = \left\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \ldots, \mathbf{u}_p\right\} \subset V$ tal que $V = \mathcal{L}(G)$. En tal caso se dice que G es un *sistema generador* de V.

4.2. Teorema fundamental de la independencia lineal: *Sea V un espacio vectorial de tipo finito. Si $G=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\dots,\mathbf{u}_p\}$ es un sistema generador de V e $I=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\dots,\mathbf{v}_q\}$ es un sistema linealmente independiente de V, entonces $p\ge q$.*

4.3. Base de un espacio vectorial: Si V es un espacio vectorial de tipo finito, se dice que un subconjunto $\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\}$ de V es una *base* de V si se cumple una cualquiera de las dos condiciones siguientes, que son equivalentes entre sí:

i) $\mathcal{B}$ es un sistema generador de V que, además, es linealmente independiente.
ii) Todo vector de V se puede expresar de modo único como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$.

4.4. Teorema de la dimensión: *Todas las bases de un espacio vectorial $V\neq O$ de tipo finito tienen el mismo número de vectores. Este número se escribe $\dim V$ y se llama dimensión del espacio vectorial V.*

4.5. Ejemplos

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, el conjunto de n vectores $\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\}$, donde $\mathbf{e}_1=(1,0,0,\dots,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0,\dots,0)$, … , $\mathbf{e}_n=(0,0,0,\dots,1)$, forman una base llamada *base canónica* de $\mathbb{R}^n$. Obsérvese que $\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\}$ es sistema generador, ya que cualquier vector $(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1(1,0,\dots,0)+x_2(0,1,\dots,0)+\dots+x_n(0,0,\dots,1).$$

Además, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, pues si $\lambda_1(1,0,\dots,0)+\lambda_2(0,1,\dots,0)+\dots+\lambda_n(0,\dots,0,1)=(0,0,\dots,0)$, entonces $\lambda_1=\lambda_2=\dots=$ $=\lambda_n=0$. La dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es por tanto

$$\dim\mathbb{R}^n=n.$$

2. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de las matrices de tamaño $m\times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{R}$, el conjunto de mn matrices $\mathcal{B}=\left\{\mathbf{E}_{ij}: i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n\right\}$ forman una base de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, donde $\mathbf{E}_{ij}$ es matriz que tiene nulos todos sus elementos excepto el que ocupa el lugar (i,j), que vale la unidad. Así ocurre, pues si $\mathbf{A}=(a_{ij})$ es una matriz $m\times n$, entonces $\mathbf{A}=\sum_{i,j=1}^{i=m,j=n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}$, y si es $\sum_{i,j=1}^{i=m,j=n}\lambda_{ij}\mathbf{E}_{ij}=\mathbf{O}$, entonces $\lambda_{ij}=0$, para cada $i=1,\ldots,m$ y $j=1,\ldots,n$. A la base $\mathcal{B}$ se la llama *base usual* de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y prueba que

$$\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})=mn\,.$$

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios reales de grado menor o igual que n, el conjunto de $n+1$ polinomios $\mathcal{B}=\left\{1,x,x^2,\ldots,x^n\right\}$ es una base de dicho espacio, pues $\mathcal{B}$ es linealmente independiente (lo forman polinomios de grados distintos) y es sistema generador de $\mathbb{R}_n[x]$. A $\mathcal{B}$ se la llama *base canónica* de $\mathbb{R}_n[x]$ y prueba que

$$\dim \mathbb{R}_n[x]=n+1\,.$$

4.6. Teorema de existencia de bases: *Si $V\neq O$ es un espacio vectorial de tipo finito, cualquier sistema generador del mismo contiene una base de V. De aquí que cualquier espacio vectorial de tipo finito tiene alguna base.*

4.7. Consecuencias: *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. Entonces:*

i) Si $G=\left\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_p\right\}$ es sistema generador de V, entonces $p\geq n$. Además, si es $p=n$, esto es, si G tiene n vectores, G es base de V.

ii) Si $I=\left\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_q\right\}$ es un sistema linealmente independiente de V, entonces $q\leq n$. Si se da la igualdad, es decir, si I tiene n vectores, I es base de V.

En 4.6 se estableció que de todo sistema generador se puede extraer una base eliminando los vectores que son combinación lineal de los restantes. Recíprocamente, cualquier sistema libre puede ser ampliado hasta obtener una base del espacio vectorial.

4.8. Teorema de la base incompleta: *En un espacio vectorial V de dimensión finita n, todo sistema linealmente independiente de menos de n vectores puede ampliarse hasta obtener una base de V.*

4.9. Dimensión de un subespacio: *Si U es un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces también U tiene dimensión finita y es $\dim U \leq \dim V$, dándose la igualdad si y sólo si $U = V$.*

4.10. Rango de un conjunto de vectores: Dado un sistema de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ se llama *rango* de S, y se escribe $\operatorname{rang} S$, a la dimensión del subespacio engendrado por S, es decir, $\operatorname{rang} S = \dim \mathcal{L}(S)$. El rango de S es el mayor número de vectores linealmente independientes que hay en S

4.11. Observaciones

1. En un espacio vectorial cualquiera V, un sistema de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\operatorname{rang} S = p$.
2. En un espacio vectorial de dimensión n, un sistema S de vectores es generador si y sólo si $\operatorname{rang} S = n$.

4.12. Ejemplo: Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

demuestre que el conjunto F de las matrices reales $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{O}$ forman un subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y halle una base de este subespacio y su dimensión.

Este problema figura resuelto en la página 79 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: $F \neq \varnothing$, pues la matriz nula $\mathbf{O}$ de tamaño 2×2 es de F. Además, si $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in F$ y $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, entonces $\mathbf{A}\cdot(\lambda\mathbf{X}+\mu\mathbf{Y})=\lambda\,\mathbf{A}\,\mathbf{X}+\mu\,\mathbf{A}\,\mathbf{Y}=\lambda\cdot\mathbf{O}+\mu\cdot\mathbf{O}=\mathbf{O}$, es decir, $\lambda\mathbf{X}+\mu\mathbf{Y}\in F$, y por tanto F es subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Para determinar una base de F, supongamos que es $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in F$. Entonces:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X}=\mathbf{O} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x+2z=0\\ y+2t=0\end{cases}$$

con lo que serán $x=-2\alpha$, $y=-2\beta$, $z=\alpha$, $t=\beta$, es decir, $\mathbf{X}$ es de la forma

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} -2\alpha & -2\beta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix} \qquad (\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\,)$$

Puede ponerse por ello:

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} -2\alpha & -2\beta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

lo que prueba que el conjunto $\mathcal{B}=\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\}$ es un sistema generador de F, donde

$$\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2=\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Dado que además, si es $\lambda_1\mathbf{X}_1+\lambda_2\mathbf{X}_2=O$, es inmediato que $\lambda_1=\lambda_2=0$, resulta que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, por lo $\mathcal{B}$ es una base de F y por tanto $\dim F=2$.

4.13. Ejemplo: En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ de todos los polinomios de grado menor o igual que n se considera el conjunto $U_a = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(a) = 0 \right\}$ de los polinomios que tienen al número real a como raíz. Demuestre que U_a es un subespacio de $\mathbb{R}_n[x]$ y determine una base del mismo.

Este problema es parte del que figura resuelto en la página 282 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones.

SOLUCIÓN: $U_a \neq \varnothing$ pues a es raíz del polinomio nulo. Además, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ cumplen $p(a) = q(a) = 0$, entonces $\lambda p(a) + \mu q(a) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$, luego U_a es subespacio de $\mathbb{R}_n[x]$. Si $p(x) \in U_a$, entonces $p(x)$ es divisible por $x - a$, luego será $p(x) = (x-a) \cdot q(x)$, donde $q(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Este polinomio $q(x)$ puede expresarse en la forma $q(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1}$, con $a_i \in \mathbb{R}$, y así:

$$p(x) = (x-a) \cdot q(x) = a_0(x-a) + a_1(x-a)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-a)^n$$

Por tanto, $S = \left\{ x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n \right\}$ es un sistema generador de U_a y como los polinomios de S son de distinto grado, S también es linealmente independiente, así que S es base de U_a y por tanto $\dim U_a = n$.

4.14. Fórmula de Grassmann: *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y U_1 y U_2 son dos subespacios de V, entonces:*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

4.15. Ejemplo: En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios reales de grado menor o igual que tres, se consideran los subespacios $U_1 = \mathcal{L}\left\{1+x, 1-x^2\right\}$ y $U_2 = \mathcal{L}\left\{1, 1-x, x^3\right\}$. Determínense los subespacios $U_1 \cap U_2$ y $U_1 + U_2$.

Este problema es parte del que figura resuelto en la página 56 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones.

SOLUCIÓN: Los polinomios del conjunto $\{1+x, 1-x^2\}$ son linealmente independientes por tener distinto grado, razón por la que también lo son los del conjunto $\{1, 1-x, x^3\}$, así que $\dim U_1 = 2$ y $\dim U_2 = 3$. Si $p(x)$ es un polinomio de $U_1 \cap U_2$, será

$$p(x) = a(1+x) + b(1-x^2) = c + d(1-x) + ex^3 \quad \Rightarrow \quad (a+b) + ax - bx^2 = (c+d) - dx + ex^3$$

Identificando coeficientes se tienen $b = 0,\ \ c = 2a,\ \ d = -a,\ \ e = 0$, luego $p(x) = a(1+x)$ con $a \in \mathbb{R}$, lo que prueba que $U_1 \cap U_2 = \mathcal{L}\{1+x\}$ y que por tanto $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$. Ahora, según la fórmula de Grassmann, es

$$\dim\left(U_1 + U_2\right) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim\left(U_1 \cap U_2\right) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$$

y, según 4.9, es $U_1 + U_2 = \mathbb{R}_3[x]$.

5. Coordenadas respecto de una base

La utilidad fundamental de las bases es la que muestra la condición ii) de la definición 4.3. y es que, recurriendo a una de ellas, todo vector queda identificado mediante los coeficientes de la única combinación lineal que lo expresa en función de los vectores de dicha base. Estos coeficientes son las *coordenadas* del vector en la referida base.

5.1. Coordenadas de un vector respecto de una base: Sea V un espacio vectorial de tipo finito, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base de V y sea $\mathbf{x} \in V$ un vector cualquiera. Se dice entonces que $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ es el *sistema de coordenadas* de $\mathbf{x}$ en la base $\mathcal{B}$ si ocurre que

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\,.$$

5.2. Ejemplo: Demuestre que el conjunto $\mathcal{B}=\left\{1, x+1, x^2+x+1, x^3+x^2+x+1\right\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios reales de grado menor o igual que tres y halle las coordenadas de $4x^3-3x^2+2x-1$ respecto de dicha base.

SOLUCIÓN: El conjunto $\mathcal{B}$ está formado por cuatro polinomios de distinto grado, luego forman un conjunto de cuatro vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}_3[x]$. Como es $\dim \mathbb{R}_3[x]=4$, el conjunto $\mathcal{B}$ es base de este espacio. Las coordenadas del polinomio $4x^3-3x^2+2x-1$ respecto de $\mathcal{B}$ pueden determinarse poniendo:

$$4x^3-3x^2+2x-1=4\left(x^3+x^2+x+1\right)-7x^2-2x-5=4\left(x^3+x^2+x+1\right)-7\left(x^2+x+1\right)+5x+2=$$

$$=\mathbf{4}\left(x^3+x^2+x+1\right)-\mathbf{7}\left(x^2+x+1\right)+\mathbf{5}(x+1)-\mathbf{3}$$

Las coordenadas de $4x^3-3x^2+2x-1$ respecto de la base $\mathcal{B}$ son así $(-3,5,-7,4)$.

5.3. Ecuaciones de un subespacio respecto de una base: Sea U un subespacio de dimensión r de un espacio vectorial V de dimensión n y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces, si $\mathbf{X}$ es la columna de las coordenadas de un vector genérico $\mathbf{x}\in V$ en la base $\mathcal{B}$, existe una matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $(n-r)\times n$ tal que $\mathbf{x}\in U$ si y sólo si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$. Se dice entonces que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$ son unas *ecuaciones del subespacio* U en la base $\mathcal{B}$.

En otras palabras, todo subespacio de dimensión r de un espacio V de dimensión n está determinado por un sistema homogéneo de $n-r$ ecuaciones. Y recíprocamente, las soluciones de cualquier sistema lineal homogéneo con n incógnitas $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$ determina un subespacio de $\mathbb{R}^n$, de dimensión $n-\operatorname{rang}\mathbf{A}$.

5.4. Ejemplo: Dados, en $\mathbb{R}^4$, los subespacios $U_1=\mathcal{L}\left\{(-1,1,0,1),(0,1,1,0),(-3,1,-2,3)\right\}$ y $U_2=\mathcal{L}\left\{(1,5,3,0),(2,-1,1,-2)\right\}$, determine unas ecuaciones del subespacio suma U_1+U_2 en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

SOLUCIÓN: El subespacio suma U_1+U_2 es el engendrado por los cinco vectores del conjunto

$$S=\left\{(-1,1,0,1),(0,1,1,0),(-3,1,-2,3),(1,5,3,0),(2,-1,1,-2)\right\}.$$

Realizamos operaciones elementales sobre dichos vectores para obtener una base de U_1+U_2:

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&1&1&0\\-3&1&-2&3\\1&5&3&0\\2&-1&1&-2\end{pmatrix}\underset{\substack{f_1\\f_2\\f_3-3f_1\\f_4+f_1\\f_5+2f_1}}{\sim}\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&-2&-2&0\\0&6&3&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\underset{\substack{f_1\\f_2\\f_3+2f_2\\f_4-6f_2\\f_5-f_2}}{\sim}\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&-3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{\substack{f_1\\f_2\\f_4\\f_3\\f_5}}{\sim}\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&-3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Las dos últimas filas de la última matriz son nulas, así que U_1+U_2 está generado por los vectores de las tres primeras filas: $U_1+U_2=\mathcal{L}\left\{(-1,1,0,1),(0,1,1,0),(0,0,-3,1)\right\}$. Dado que además los tres vectores son linealmente independientes por formar un sistema escalonado de vectores no nulos, deducimos que $\dim(U_1+U_2)=\operatorname{rang} S=3$. Si (x_1,x_2,x_3,x_4) son las coordenadas de un vector $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^4$ en la base canónica, entonces

$$\mathbf{x}\in U_1+U_2 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&-3&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\end{pmatrix}=3 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix}-1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&-3&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x_1-x_2+x_3+3x_4=0$$

que es una ecuación del subespacio U_1+U_2 en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

5.5. Cambio de base: *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean $\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ y $\mathcal{B}'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\ldots,\mathbf{e}'_n\}$ bases de V. Si las coordenadas de un vector genérico $\mathbf{x}\in V$ en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son $\mathbf{X}^t=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$ y $\mathbf{X}'^t=(x'_1\ x'_2\ \cdots\ x'_n)$, entonces*

$$\mathbf{X}'=\mathbf{P}\cdot\mathbf{X},$$

donde $\mathbf{P}$ es la matriz $n\times n$ cuya columna i-ésima ($i=1,\ldots,n$) la forman las coordenadas del vector $\mathbf{e}_i\in\mathcal{B}$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

A la matriz $\mathbf{P}$ anterior se la llama *matriz del cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$*, y a la ecuación matricial $\mathbf{X}'=\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}$ (que permite obtener las coordenadas de cualquier vector en la base $\mathcal{B}'$ conocidas sus coordenadas en $\mathcal{B}$) se la llama *ecuación de dicho cambio*. La matriz P es regular (invertible) y su matriz inversa es la matriz del cambio de coordenadas inverso, esto es, del que se obtiene al pasar de las coordenadas en la base $\mathcal{B}'$ a las coordenadas en la base $\mathcal{B}$. Las ecuaciones de este cambio serán

$$\mathbf{X}=\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{X}'.$$

5.6. Ejemplo: Determine la matriz del cambio de la base canónica $\mathcal{B}=\{\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3,\mathbf{E}_4\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a la base $\mathcal{B}'=\{\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\mathbf{F}_3,\mathbf{F}_4\}$, donde

$$\mathbf{F}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

Utilícela para hallar las coordenadas de la matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{B}'$.

SOLUCIÓN: Las coordenadas de cada matriz $\mathbf{E}_i$ de la base canónica $\mathcal{B}$ respecto de la base $\mathcal{B}'$ se obtienen inmediatamente expresándolas como combinación lineal de las $\mathbf{F}_j$:

$$\mathbf{E}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1\cdot\mathbf{F}_1\,,\qquad \mathbf{E}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=-\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2\,,$$

$$\mathbf{E}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=-\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3\,,\qquad \mathbf{E}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=-\mathbf{F}_3+\mathbf{F}_4$$

La matriz del cambio de la base canónica $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$ es por tanto

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

y las coordenadas de la matriz $\mathbf{A}$ en la base $\mathcal{B}'$ serán

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

6. Aplicaciones lineales

Las aplicaciones entre espacios vectoriales son las que “conservan” la suma y el producto por escalares, esto es, son las que “respetan” la estructura vectorial.

6.1. Homomorfismos entre espacios vectoriales: Dados dos espacios vectoriales V y W, ambos sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, y una aplicación $\mathbf{f}: V \to W$, se dice que $\mathbf{f}$ es un *homomorfismo* o una *aplicación lineal* si para todos los $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ y $\lambda, \mu \in K$ se cumple:

$$\mathbf{f}(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mu \mathbf{f}(\mathbf{v})$$

Las aplicaciones lineales $\mathbf{f}: V \to W$ transforman el vector nulo de V en el vector nulo de W, pues $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{f}(\mathbf{0})$ y así $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. En general, transforman sistemas de vectores linealmente dependientes en sistemas linealmente dependientes.

6.2. Ejemplo: Sea $V = \mathcal{C}[0,1]$ el espacio vectorial de las funciones reales que son continuas en el intervalo $[0,1]$. La aplicación $\mathbf{f}: V \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\mathbf{f}(\varphi) = \int_0^1 \varphi \qquad , \qquad \varphi \in V$$

es lineal, pues si $\varphi, \psi \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\mathbf{f}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \int_0^1 (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_0^1 \varphi + \mu \int_0^1 \psi = \lambda \mathbf{f}(\varphi) + \mu \mathbf{f}(\psi)$$

6.3. Núcleo e imagen de una aplicación lineal: *Si* $\mathbf{f}: V \to W$ *es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo* $\mathbb{K}$, *entonces:*

i) El conjunto $\mathbf{f}(V)$ *es un subespacio de* W *llamado imagen de* $\mathbf{f}$ *y se nota* $\operatorname{Im}\mathbf{f}$. *Además, si* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ *genera* V, $\{\mathbf{f}(\mathbf{u}_1), \mathbf{f}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{u}_p)\}$ *engendra* $\operatorname{Im}\mathbf{f}$.

ii) El conjunto $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{u} \in V : \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$ *es un subespacio de* V, *que se llama núcleo de la aplicación lineal* $\mathbf{f}$, *y se escribe* $\ker \mathbf{f}$.

iii) Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces

$$\dim \ker \mathbf{f} + \dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \dim V\,.$$

6.4. Ejemplo: Halle el núcleo y la imagen del homomorfismo $\mathbf{f}:\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ definido mediante

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+2c & a-b & 0 \\ 0 & c & 2c \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN: Para localizar el núcleo, obsérvese que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker \mathbf{f} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a-b+2c & a-b & 0 \\ 0 & c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}$$

por lo que, llamando $\alpha = a = b$ y $\beta = d$, se obtiene:

$$\ker \mathbf{f} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por su parte, $\operatorname{Im} \mathbf{f}$ es el subespacio generado por las matrices

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la segunda es la matriz opuesta de la primera, la cuarta es la matriz nula y la primera y la tercera son linealmente independientes, resulta que

$$\operatorname{Im}\mathbf{f} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & 0\\ 0 & \mu & 2\mu\end{pmatrix} : \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

6.5. Ejemplo: Dado $n \geq 2$, determine el núcleo y la imagen del endomorfismo $\mathbf{f}:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ dado por

$$\mathbf{f}(p(x)) = p''(x).$$

Este problema figura resuelto en la página 351 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: El núcleo de $\mathbf{f}$ lo forman los polinomios de $\mathbb{R}_n[x]$ tales que $\mathbf{f}(p(x))=0$, es decir, tales que $p''(x)=0$, que son los polinomios reales $p(x)=a+bx$ de grado menor o igual que 1, por lo que $\ker\mathbf{f}=\mathbb{R}_1[x]$.

Por su parte, cada polinomio de $\operatorname{Im}\mathbf{f}$ es de grado menor o igual que $n-2$, por ser la segunda derivada de un polinomio de grado a lo sumo n, así que $\operatorname{Im}\mathbf{f}\subset\mathbb{R}_{n-2}[x]$. Como además, $\dim\operatorname{Im}\mathbf{f}=\dim\mathbb{R}_n[x]-\dim\ker\mathbf{f}=n+1-2=n-1=\dim\mathbb{R}_{n-2}[x]$, concluimos que $\operatorname{Im}\mathbf{f}=\mathbb{R}_{n-2}[x]$ ■

De entre las aplicaciones lineales, las inyectivas son especialmente importantes. Son las que conservan la dimensión y transforman bases en bases. Con más detalle:

6.6. Caracterización de las aplicaciones lineales inyectivas: *Si* $\mathbf{f}: V \to W$ *es una aplicación lineal entre espacios vectoriales, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\mathbf{f}$ *es inyectiva.*

ii) $\ker \mathbf{f} = O$.

iii) $\mathbf{f}$ *transforma cualquier sistema linealmente independiente de vectores de* V *en un sistema linealmente independiente de vectores de* W.

6.7. Isomorfismos: *Se llama isomorfismo a una aplicación* $\mathbf{f}: V \to W$ *que sea lineal y biyectiva. Si* $\mathbf{f}: V \to W$ *es un isomorfismo, se dice que* V *y* W *son isomorfos. Un isomorfismo* $\mathbf{f}: V \to V$ *, de un espacio en sí mismo, recibe el nombre de automorfismo.*

Si existe un isomorfismo entre dos espacios V y W, éstos se pueden identificar, pues desde el punto de vista vectorial no hay nada que diferencie a V de W.

6.8. Caracterización de los isomorfismos: Se deduce inmediatamente de 6.6:

i) Una aplicación lineal $\mathbf{f}: V \to W$ *es isomorfismo si y sólo si* $\operatorname{Im} \mathbf{f} = W$ *y* $\ker \mathbf{f} = O$.

ii) Si V *tiene dimensión finita, una aplicación lineal* $\mathbf{f}: V \to W$ *es un isomorfismo si, y solo si* $\dim V = \dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \dim W$ *. En particular, si* $\dim V = n$ *, entonces* V *es isomorfo a* $\mathbb{K}^n$.

6.9. Operaciones con aplicaciones lineales: *Sean* U, V *y* W *espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo* $\mathbb{K}$ *. Entonces:*

i) Si las aplicaciones $\mathbf{f}: V \to W$ *y* $\mathbf{g}: V \to W$ *son lineales, su aplicación suma* $\mathbf{f} + \mathbf{g}: V \to W$ *es lineal.*

ii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $\mathbf{f}: V \to W$ *es una aplicación lineal, la aplicación* $\lambda\mathbf{f}: V \to W$ *es también lineal.*

iii) Si $\mathbf{f}: U \to V$ *y* $\mathbf{g}: V \to W$ *son aplicaciones lineales, su composición* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: U \to W$ *es lineal.*

7. Matrices de una aplicación lineal. Ecuaciones

7.1. Matriz de una aplicación lineal. Ecuaciones: *Sea* $\mathbf{f}: V \to W$ *una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales* V *y* W *sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$ *de dimensiones respectivas n y m. Sea* $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *una base de* V *en la que las coordenadas de* $\mathbf{x} \in V$ *son* $\mathbf{X}^t = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$ *y sea* $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ *una base de* W *en la que las coordenadas de* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in W$ *son* $\mathbf{Y}^t = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m)$. *Si* $\mathbf{A}$ *es la matriz* $m \times n$ *cuya columna j-ésima la componen las coordenadas del vector* $\mathbf{f}(\mathbf{e}_j)$ *en la base* $\mathcal{C}$, *se cumple:*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

Éstas son las *ecuaciones de la aplicación lineal* $\mathbf{f}$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, y que dan, conocidas las coordenadas de un vector $\mathbf{x} \in V$ en la base $\mathcal{B}$, las coordenadas del vector $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in W$ en la base $\mathcal{C}$. La matriz $\mathbf{A}$ es la *matriz de* $\mathbf{f}$ *en las bases* $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

7.2. Ejemplo: Sea el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ y la aplicación lineal $\mathbf{f}: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ dada por

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3, 2x_2 + x_3)$$

Determine la matriz de **f** en las bases $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (canónica) de $\mathbb{K}^3$ y $\mathcal{C} = \{(1,0),(1,1)\}$ de $\mathbb{K}^2$.

Este problema figura resuelto en la página 40 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: La matriz que se pide es la que tiene por columnas las coordenadas de los vectores

$$\mathbf{f}(1,0,0) = (1,0), \qquad \mathbf{f}(0,1,0) = (1,2), \qquad \mathbf{f}(0,0,1) = (3,1)$$

en la base $\mathcal{C} = \{(1,0),(1,1)\}$. Dado que son

$$(1,0) = 1\cdot(1,0) + 0\cdot(1,1)\,, \qquad (1,2) = (-1)\cdot(1,0) + 2\cdot(1,1) = 4\cdot(1,0) + 2\cdot(1,1)\,, \qquad (3,1) = 2\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1)\,,$$

la matriz de $\mathbf{f}$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3. Bases, ecuaciones y dimensiones de la imagen y el núcleo de una aplicación lineal: Conocida la matriz $\mathbf{A}$ de un homomorfismo $\mathbf{f}: V \to W$ en una base $\mathcal{B}$ del espacio de salida V $(\dim V = n)$ y en otra base $\mathcal{C}$ del espacio de llegada W $(\dim W = m)$:

- La dimensión del subespacio imagen de $\mathbf{f}$ es el rango de la matriz $\mathbf{A}$:

  $$\dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \operatorname{rang} \mathbf{A} = r$$

  Una base de $\operatorname{Im}\mathbf{f}$ la forman r vectores de W cuyas coordenadas en la base $\mathcal{C}$ son r columnas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes. Para obtener unas ecuaciones de $\operatorname{Im}\mathbf{f}$ en la base $\mathcal{C}$, repárese en que si $\mathbf{B}$ es la submatriz formada por r columnas independientes de $\mathbf{A}$, entonces un vector $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}\mathbf{f}$ si y sólo si la columna $\mathbf{Y}$ de sus coordenadas en $\mathcal{C}$ es combinación lineal de las r columnas linealmente independientes de $\mathbf{B}$, esto es, si y sólo si $\operatorname{rang}\,(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{Y}) = r$.

- La dimensión del núcleo de $\mathbf{f}$ es, según la fórmula de las dimensiones:

  $$\dim \ker \mathbf{f} = \dim V - \operatorname{rang} \mathbf{A} = n - r$$

  El núcleo de $\mathbf{f}$ lo forman los vectores $\mathbf{x} \in V$ cuyas coordenadas $\mathbf{X}^t = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$ en la base $\mathcal{B}$ cumplen que $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$. Este sistema de m ecuaciones se reduce a otro equivalente de r ecuaciones, $\mathbf{CX} = \mathbf{O}$, de cuyas soluciones se extrae base de $\ker \mathbf{f}$.

7.4. Ejemplo: Halle el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $\mathbf{f}:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{f}(1,0,0,0)=(1,-1,2)\,,\qquad \mathbf{f}(0,1,0,0)=(2,1,1)\,,\qquad \mathbf{f}(0,0,1,0)=(4,-1,5)\,,\qquad \mathbf{f}(0,0,0,1)=(-1,-5,4)$$

SOLUCIÓN: La matriz de $\mathbf{f}$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ es

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -5\\ 2 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

A simple vista, f_1 y f_2 son linealmente independientes y $f_3=f_1-f_2$, por lo que $\dim \operatorname{Im}\mathbf{f}=\operatorname{rang}\mathbf{A}=2$. Una base de $\operatorname{Im}\mathbf{f}$ puede formarse eligiendo dos columnas de $\mathbf{A}$ que sean linealmente independientes, por ejemplo, las dos primeras, así que $\mathcal{B}=\big\{(1,-1,2)\,,(2,1,1)\big\}$ es una base de $\operatorname{Im}\mathbf{f}$. Además,

$$(y_1,y_2,y_3)\in \operatorname{Im}\mathbf{f} \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{rang}\big\{(1,-1,2)\,,(2,1,1)\,,(y_1,y_2,y_3)\big\}=2 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & y_1\\ -1 & 1 & y_2\\ 2 & 1 & y_3\end{pmatrix}=2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & y_1\\ -1 & 1 & y_2\\ 2 & 1 & y_3\end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad y_1-y_2-y_3=0$$

que es una ecuación de $\operatorname{Im}\mathbf{f}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Para la determinación del núcleo de $\mathbf{f}$, ocurre que

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker\mathbf{f} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -5\\ 2 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-x_4=0\\ x_1-x_2+x_3+5x_4=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-x_4=0\\ \qquad\quad x_2+x_3-2x_4=0\end{cases}$$

Las anteriores son unas ecuaciones de $\ker \mathbf{f}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Para obtener una base del núcleo resolvemos el sistema anterior poniendo $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$. Así, al sustituir en la 2ª queda $x_2 = -\lambda + 2\mu$, y al hacer lo propio en la 1ª: $x_1 = -2\lambda - 3\mu$, de modo que

$$\ker \mathbf{f} = \left\{(-2\lambda - 3\mu, -\lambda + 2\mu, \lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\lambda \cdot (-2, -1, 1, 0) + \mu \cdot (-3, 2, 0, 1) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}\left\{(-2, -1, 1, 0), (-3, 2, 0, 1)\right\}$$

y una base del núcleo es $\left\{(-2, -1, 1, 0), (-3, 2, 0, 1)\right\}$ ■

7.5. Matriz asociada a la suma de aplicaciones lineales: *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases respectivas de ambos espacios. Sean $\mathbf{f} : V \to W$ y $\mathbf{g} : V \to W$ dos aplicaciones lineales y sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sus respectivas matrices en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Entonces,*

i) La matriz de la aplicación lineal $\mathbf{f} + \mathbf{g} : V \to W$ es $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
ii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$, la matriz de la aplicación lineal $\lambda\mathbf{f} : V \to W$ es $\lambda\mathbf{A}$.

De forma abreviada, los dos resultados anteriores se escriben:

$$i)\ \mathbf{M}_{\mathbf{f}+\mathbf{g}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathbf{M}_{\mathbf{f}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') + \mathbf{M}_{\mathbf{g}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\ ; \qquad ii)\ \mathbf{M}_{\lambda\mathbf{f}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \lambda \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{f}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

7.6. Matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales: *Sean U, V y W tres espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ bases respectivas de dichos espacios. Sean $\mathbf{f} : U \to V$ y $\mathbf{g} : V \to W$ dos aplicaciones lineales y sean $\mathbf{A}$ la matriz de $\mathbf{f}$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, y $\mathbf{B}$ la matriz de g en las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$. Entonces, la matriz de la composición $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : U \to W$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$ es $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Abreviadamente:*

$$\mathbf{M}_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathbf{M}_{\mathbf{g}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{f}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

7.7. Ejemplo: Determina, en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, la matriz de la composición $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$, donde $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ son las aplicaciones lineales dadas por:

$$\mathbf{f}(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,\ x_2+x_3),\qquad \mathbf{g}(y_1,y_2)=(y_1,y_2,y_1+y_2,\ y_1-y_2),$$

SOLUCIÓN: La matriz de $\mathbf{f}$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ y la matriz de g en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ son, respectivamente:

$$\mathbf{M_f}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{M_g}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

La matriz de la composición $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ es por tanto:

$$\mathbf{M_{g\circ f}}=\mathbf{M_g}\cdot\mathbf{M_f}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

7.8. Matrices asociadas a una misma aplicación lineal en bases distintas: *Sea $\mathbf{f}:V\to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K y sea $\mathbf{A}$ la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de ciertas bases $\mathcal{B}$ de V y $\mathcal{C}$ de W. Entonces, si en V se elige una nueva base $\mathcal{B}'$ y en W se elige una nueva base $\mathcal{C}'$, la matriz de $\mathbf{f}$ en las nuevas bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}'$ es*

$$\mathbf{A}'=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P},$$

donde $\mathbf{P}$ es la matriz del cambio de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ y $\mathbf{Q}$ es la matriz del cambio de la base $\mathcal{C}'$ a la base $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathbf{f}"] & W \\ \mathcal{B} \arrow[r, "\mathbf{A}"] & \mathcal{C} \arrow[d, "\mathbf{Q}^{-1}"] \\ \mathcal{B}' \arrow[u, "\mathbf{P}"] \arrow[r, "\mathbf{A}'"'] & \mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

7.9. Ejemplo: Dado el homomorfismo **f** de $\mathbb{R}_2[x]$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$\mathbf{f}(1)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix},\qquad \mathbf{f}(x)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -5\end{pmatrix},\qquad \mathbf{f}(x^2)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

obtenga la matriz de **f** en las bases $\mathcal{B}'=\left\{1,1+x,(1+x)^2\right\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donde

$$\mathcal{C}'=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

UNA SOLUCIÓN: El homomorfismo $\mathbf{f}$ está bien definido pues se conocen las imágenes por $\mathbf{f}$ de los vectores de una base de $\mathbb{R}_2[x]$, en concreto, de los de la base canónica $\mathcal{B}=\left\{1,x,x^2\right\}$. La matriz de $\mathbf{f}$ en las bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{C}$, canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, es

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & 5 & 3\\ 4 & -5 & 4\end{pmatrix}$$

La matriz de $\mathbf{f}$ en las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}'$ será $\mathbf{A}'=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AP}$, donde $\mathbf{P}$ es el cambio de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ y $\mathbf{Q}$ es la matriz del cambio de la base $\mathcal{C}'$ a la base $\mathcal{C}$. Las matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz de $\mathbf{f}$ en las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}'$ es entonces (obténgase $\mathbf{Q}^{-1}$ a partir de $\mathbf{Q}$ recurriendo al Método de Gauss-Jordan para el cálculo de matrices inversas):

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -11 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 18 \\ 1 & -5 & -9 \end{pmatrix}.$$

OTRA SOLUCIÓN: Podría también haberse obtenido la matriz $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{f}$ en las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}'$ sin necesidad de recurrir a la matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{f}$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. Las columnas de $\mathbf{A}'$ son las coordenadas de los vectores $\mathbf{f}(1)$, $\mathbf{f}(1+x)$ y $\mathbf{f}((1+x)^2)$ en la base $\mathcal{C}'$, así que expresamos dichos tres vectores como combinación lineal de las matrices de $\mathcal{C}'$. Se tienen así:

$$\mathbf{f}(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a + c = 3, \quad b + d = 1, \quad b + c + d = 2, \quad a + c + d = 4$$

es decir, $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 1$, así que las coordenadas de $\mathbf{f}(1)$ en la base $\mathcal{C}'$ son $(2,0,1,1)$. Razonando análogamente, se deduce que las coordenadas de los vectores

$$\mathbf{f}(1+x) = \mathbf{f}(1) + \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}((1+x)^2) = \mathbf{f}(1) + 2\,\mathbf{f}(x) + \mathbf{f}(x^2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 15 & -2 \end{pmatrix}$$

en la base $\mathcal{C}'$ son, respectivamente, $(-3,5,7,-5)$ y $(-11,6,18,-9)$, obteniendo así como matriz de $\mathbf{f}$ en las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}'$ la matriz $\mathbf{A}'$ deducida en la primera solución.

7.10. Matrices equivalentes: *Dos matrices* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *del mismo tamaño* $m \times n$ *se dicen equivalentes si existen dos matrices regulares* $\mathbf{P}$*, de tamaño* $n \times n$*, y* $\mathbf{Q}$*, de tamaño* $m \times m$ *tales que* $\mathbf{A}' = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$*. Dos matrices* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *son equivalentes si y sólo si se cumple alguna de las tres condiciones siguientes (que son equivalentes entre sí):*

i) $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *están asociadas a una misma aplicación lineal de* $\mathbb{K}^n$ *en* $\mathbb{K}^m$ *respecto de ciertas bases adecuadas.*

ii) $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *son del mismo tamaño y tales que* $\mathbf{A}' = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$*, para ciertas matrices regulares* $\mathbf{P}$ *y* $\mathbf{Q}$*.*

iii) $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *son del mismo tamaño y del mismo rango.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ \mathcal{B} \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[d, "\mathbf{P}"', leftarrow] & \mathcal{B} \arrow[d, "\mathbf{P}^{-1}"] \\ \mathcal{B}' \arrow[r, "\mathbf{A}'"'] & \mathcal{B}' \end{tikzcd}$$

7.11. Matrices asociadas a un mismo endomorfismo en bases distintas: *Sea* $\mathbf{f} : V \to V$ *un endomorfismo de un especio vectorial* V *de dimensión finita sobre el mismo cuerpo* K *y sea* $\mathbf{A}$ *la matriz cuadrada asociada a* $\mathbf{f}$ *respecto de cierta base* $\mathcal{B}$ *de* V*. Entonces, si en* V *se elige una nueva base* $\mathcal{B}'$*, la matriz de* $\mathbf{f}$ *en la nueva base* $\mathcal{B}'$ *es*

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P},$$

donde $\mathbf{P}$ *es la matriz del cambio de la base* $\mathcal{B}'$ *a la base* $\mathcal{B}$*.*

7.12. Ejemplo: Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x + z, y + z, -x + y + 3z)$$

Determine la matriz de $\mathbf{f}$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

UNA SOLUCIÓN: Dado que

$$\mathbf{f}(1,0,0) = (2,0,-1), \qquad \mathbf{f}(0,1,0) = (0,1,1), \qquad \mathbf{f}(0,0,1) = (1,1,3),$$

la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ es

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Las matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}^{-1}$ del cambio de la base $\mathcal{B}'$ a la base canónica $\mathcal{B}$ y del cambio recíproco son, respectivamente (compruébese):

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz de $\mathbf{f}$ en la nueva base $\mathcal{B}'$ es por tanto

$$\mathbf{A}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 3\\ -1 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

OTRA SOLUCIÓN: La matriz $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{f}$ en la base $\mathcal{B}'=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ tiene por columnas a las coordenadas respecto de dicha base $\mathcal{B}'$ de los vectores

$$\mathbf{f}(1,1,0)=(2,1,0),\qquad \mathbf{f}(1,0,1)=(3,1,2),\qquad \mathbf{f}(0,1,1)=(1,2,4).$$

Dado que son (compruébese):

$$\mathbf{f}(1,1,0)=(2,1,0)=\tfrac{3}{2}(1,1,0)+\tfrac{1}{2}(1,0,1)-\tfrac{1}{2}(0,1,1)$$

$$\mathbf{f}(1,0,1)=(3,1,2)=1\cdot(1,1,0)+2\cdot(1,0,1)+0\cdot(0,1,1)$$

$$\mathbf{f}(0,1,1)=(1,2,4)=-\tfrac{1}{2}\cdot(1,1,0)+\tfrac{3}{2}\cdot(1,0,1)+\tfrac{5}{2}\cdot(0,1,1),$$

deducimos que las coordenadas de los vectores $\mathbf{f}(1,1,0)$, $\mathbf{f}(1,0,1)$ y $\mathbf{f}(0,1,1)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$ son $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $(1,2,0)$ y $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, obteniéndose así la matriz $\mathbf{A}'$ que se dedujo en la primera solución.

7.13. Matrices semejantes: *Dos matrices cuadradas* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *del mismo tamaño* $n\times n$ *se dicen semejantes si existe una matriz regular* $\mathbf{P}$*, de tamaño* $n\times n$*, tales que* $\mathbf{A}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$*. Dos matrices cuadradas* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *del mismo tamaño son semejantes si y sólo si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *están asociadas a un mismo endomorfismo de* $\mathbb{K}^n$ *respecto de bases adecuadas.*