3. Estudie la naturaleza y, en su caso, halle la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^3+3n^2+2n}$$

Este problema figura resuelto en la página 688 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Dado que se trata de una serie de términos positivos y

$$x_n = \frac{3n-1}{n^3+3n^2+2n} \sim \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}$$

y la serie armónica de orden 2 es convergente, nuestra serie es también convergente. El denominador del término general x_n se factoriza como

$$n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$$

y dicho término general se expresa como suma de fracciones simples en la forma:

$$x_n = \frac{3n-1}{n^3+3n^2+2n} = \frac{-\frac{1}{2}}{n} + \frac{4}{n+1} + \frac{-\frac{7}{2}}{n+2}$$

Al escribir esta igualdad para los valores $n, n-1, n-2, \ldots, 1$, se tiene que:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{-\frac{1}{2}}{n} + \dfrac{4}{n+1} + \dfrac{-\frac{7}{2}}{n+2} \\ x_{n-1} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{n-1} + \dfrac{4}{n} + \dfrac{-\frac{7}{2}}{n+1} \\ x_{n-2} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{n-2} + \dfrac{4}{n-1} + \dfrac{-\frac{7}{2}}{n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_2 = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2} + \dfrac{4}{3} + \dfrac{-\frac{7}{2}}{4} \\ x_1 = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1} + \dfrac{4}{2} + \dfrac{-\frac{7}{2}}{3} \end{cases}$$

Por tanto,

$$s_n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{4}{n+1} + \frac{-\frac{7}{2}}{n+1} + \frac{-\frac{7}{2}}{n+2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2n+2} - \frac{7}{2n+4}$$

y la suma de la serie es

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2n+2} - \frac{7}{2n+4}\right) = \frac{5}{4}$$