Tema 3.

TÉCNICAS DE RECUENTO. COMBINATORIA

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Índice

Principios básicos (1):

- **Principio de adición.** Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$, conjuntos finitos y disjuntos, entonces

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(S_i)$$

Enunciado equivalente:
Si la tarea k-ésima se puede realizar de i_k formas, para $k = 1, \ldots, n$ y las tareas son incompatibles dos a dos, entonces hay $i_1 + i_2 + \cdots + i_n$ formas de realizar alguna de las n tareas.

Principios básicos (2):

- **Principio de multiplicación:** Sean $S_1, S_2, \cdots, S_n$ conjuntos no vacíos, entonces:

  $$\operatorname{card}(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{card}(S_i)$$

  Enunciado equivalente:
  Supongamos que una tarea puede ser dividida en n tareas consecutivas. Si hay i_1 formas de realizar la primera tarea, i_2 formas de realizar la segunda tarea y, así sucesivamente, i_n formas de realizar la tarea n-ésima, entonces hay $i_1 \cdots i_n$ formas de completar la tarea.

Principios básicos (3):

- **Principio de distribución:** Si se colocan n objetos en k cajas, alguna de las cajas contiene al menos $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ elementos.

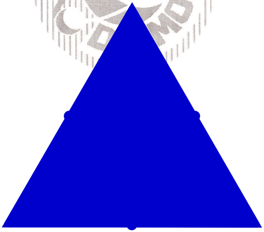
Incluir demostración

Ejemplo del principio de distribución:

En un triángulo equilátero T, cuyos lados tienen longitud 2, se seleccionan cinco puntos en su interior. Demostrar que al menos para dos de los puntos la distancia entre ellos es menor o igual a 1.

Demostración.

Comenzamos dividiendo el triángulo equilátero original en 4 triángulos equiláteros uniendo los puntos medios de cada lado:



Ejemplo del principio de distribución:

Si aplicamos el principio de distribución, al menos uno de estos nuevos 4 triángulos equiláteros contendrá dos puntos. Dado que en cada uno de estos nuevos triángulos equiláteros, la distancia máxima entre dos puntos es 1, demostramos que habrá dos puntos a distancia menor o igual que 1.

Más Ejemplos del principio de distribución:

En una reunión cualquiera hay por lo menos dos personas con el mismo número de amigos dentro de la reunión.

Demostración.

Supongamos que en esa reunión hay k personas que no tienen ningún amigo en la reunión ($0 \leq k \leq n$), el resto tendrá al menos un amigo en esta reunión. Sea S_i el conjunto formado por las personas de la reunión que tienen i amigos, donde $i \in \{1, \ldots, n-k-1\}$. Aplicando el Principio de Distribución, habrá al menos un conjunto S_i tal que

$$\operatorname{card}(S_i) \geq \left\lceil \frac{n-k}{n-k-1} \right\rceil = 2$$

- "Más ejemplos (1)"
- "Más ejemplos (2)"

Permutaciones:

- **Permutaciones.** Una *permutación* de un conjunto A es una ordenación en fila de todos sus elementos. Si A tiene n elementos, el número de permutaciones de A es

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 := n!$$

- **Permutaciones con repetición.** Una *permutación con repetición* de n objetos, de los cuales n_1 son iguales entre sí, n_2 son iguales entre sí y distintos de los anteriores, ... , y n_k son iguales entre sí y distintos de todos los anteriores $(n_1 + \cdots + n_k = n)$, a cualquier ordenación en fila de dichos n elementos. El número de estas permutaciones es

$$PR_n^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}.$$

Variaciones:

- **Variaciones ordinarias.** Sean A un conjunto finito con n elementos y $k \leq n$. Una *variación* de orden k de A es una ordenación de k elementos distintos de A. El número de variaciones de orden k del conjunto A es

$$V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- **Variaciones con repetición.** Sean A un conjunto finito con n elementos y k un entero positivo. Una *variación con repetición* de orden k de A es una ordenación de k elementos de A, no necesariamente distintos. El número de estas variaciones es

$$VR_{n,k} = n^k.$$

Combinaciones:

- **Combinaciones ordinarias.** Sean A un conjunto finito con n elementos y $k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq k \leq n$. Una *combinación* de orden k de A es un subconjunto formado por k elementos de A. El número de combinaciones de orden k del conjunto A es

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

- **Combinaciones con repetición.** Sean A un conjunto finito con n elementos y k un entero positivo. Una *combinación con repetición* de orden k de A es una elección de k elementos de A, no necesariamente distintos. El número de ellas es

$$CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Sobre las combinaciones con repetición:

El número de combinaciones con repetición de orden k de un conjunto A con n elementos coincide con el número de formas de introducir k objetos (indistinguibles) en n cajas. También coincide con el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

Incluir demostración de esta equivalencia y la deducción de la fórmula de las combinaciones con repetición.

Permutaciones circulares (*Opcional*):

Una permutación circular de m objetos distintos de orden n $(m \geq n)$, es una colocación ordenada de n de los m objetos en n posiciones igualmente espaciadas sobre una circunferencia. Dos permutaciones circulares serán iguales si una puede ser obtenida de la otra mediante una rotación de la circunferencia. Si $n = m$ tenemos una permutación circular de n elementos.

- Número de permutaciones circulares de m objetos distintos de orden n:

$$\binom{m}{n}(n-1)!$$

- Número de permutaciones circulares de n elementos:

$$PC_n = (n-1)!$$

Propiedades básicas:

$$(1) \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$(2) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$(3) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Consecuencia: *Si n y k son números enteros tales que $1 \leq k \leq n$, entonces*

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Triángulo de Pascal:

Incluir la obtención del triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Fórmula del Binomio y consecuencias (*Opcional*):

Fórmula del binomio. *Sean x e y dos variables y n un número natural. Entonces,*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Consecuencias. *Sean m, n y k enteros no negativos tal que $k \leq n$. Entonces,*

- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$
- $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$

Fórmula del Binomio y consecuencias (*Opcional*):

- *Identidad de Vandermonde:*

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\cdots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$
$$=\binom{m+n}{k}.$$

En particular,

$$\binom{m}{0}^2+\binom{m}{1}^2+\binom{m}{2}^2+\cdots+\binom{m}{m}^2=\binom{2m}{m}.$$

Enunciado del Principio de Inclusión-Exclusión:

Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos y no vacíos. Entonces el conjunto $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ es finito y se cumple la igualdad

$$\operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \operatorname{card}(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \cdots + (-1)^{n-1} \operatorname{card}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

Enunciado alternativo:

Sea S un conjunto finito y $P_1, P_2, ..., P_n$ propiedades que cada uno de los elementos de S puede o no satisfacer. Si $N(P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_k})$ es el número de elementos de S que cumplen las propiedades $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_k}$, por $N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n)$ al número de elementos que no verifican ninguna de las propiedades y por N al cardinal de S, entonces

$$N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(P_i) + \sum_{1\leq i<j\leq n} N(P_i, P_j) -$$

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq n} N(P_i, P_j, P_k) - \cdots + (-1)^n N(P_1, P_2, ...P_n).$$

Clave para la demostración:

Si $a \in \cup A_i$, pertenece a r de esos n conjuntos entonces:

- Es contado $\binom{r}{1}$ veces en $\sum \text{card}(A_{i_1})$
- Es contado $\binom{r}{2}$ veces en $\sum \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2})$
- Es contado $\binom{r}{3}$ veces en $\sum \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$
- $\cdots$
- Es contado $\binom{r}{r}$ veces en $\sum \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_r})$

En total, el número de veces que a es contado será

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \cdots (-1)^{r-1} \binom{r}{r} = 1$$

Ejemplos:

- Permutaciones de orden n que no dejen fijo ningún elementos.
- Soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

  donde $0 \leq x_i \leq k$
- Número de formas de obtener una determinada suma al lanzar n dados con 6 caras numeradas del 1 al 6.

Ejemplo resuelto:

Calculemos los números enteros positivos no mayores que 1000 que no son múltiplos de 2, 3 y 5.

Definamos

- $P_1 =$"*el número es múltiplo de 2.*
- $P_2 =$"*el número es múltiplo de 3.*
- $P_3 =$"*el número es múltiplo de 5.*

Ejemplo resuelto:

- $N(P_1) = \left[\dfrac{1000}{2}\right] = 500$
- $N(P_2) = \left[\dfrac{1000}{3}\right] = 333$
- $N(P_3) = \left[\dfrac{1000}{5}\right] = 200$
- $N(P_1 \cap P_2) = \left[\dfrac{1000}{6}\right] = 166$
- $N(P_1 \cap P_3) = \left[\dfrac{1000}{10}\right] = 100$

Ejemplo resuelto:

- $N(P_2 \cap P_3) = \left[\frac{1000}{15}\right] = 66$
- $N(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = \left[\frac{1000}{30}\right] = 33$

$$N(\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \overline{P}_3) = 1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33$$

$$= 266$$

Bibliografía:

- Ian Anderson. *Introducción a la Combinatoria*. Editorial: Vicens Vives.
- N. L. Biggs. *Matemática Discreta*. Editorial: Vicens Vives.
- Emilio Bujalance, José A. Bujalance. *Elementos de Matemática Discreta.* Editorial: Sanz y Torres.
- Víctor Hernández, Ricardo Vélez. *Dados, Monedas y Urnas*. Editorial: Uned.
- María Teresa Hortalá, Javier Leach, Mario Rodríguez. *Matemática Discreta y Lógica Matemática*. Editorial: Complutense.
- "El discreto encanto de la matemática" (Enlace al proyecto de libro de Pablo Fernández Gallardo y José Luis Fernández Pérez)