12. Se consideran los polinomios de grado n:

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \qquad Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\,,$$

con los coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $r\in\mathbb{K}$.

a) Demuestre que r es raíz de $P(x)$ si y sólo si $\frac{1}{r}$ es raíz de $Q(x)$.

b) Aplique a) para calcular la suma de los inversos de los cuadrados de las soluciones de la ecuación

$$x^7-4x^6+8x^2-1=0\,.$$

El apartado b) de este problema figura resuelto en la página 364 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

SOLUCIÓN: a) Puesto que $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grado n, sus coeficientes principales $a_0=P(0)$ y $a_n=Q(0)$ son distintos de cero, por lo que si $r\in\mathbb{K}$ es raíz de $P(x)$ o de $Q(x)$, entonces $r\neq 0$. Basta observar que

$$r\in\mathbb{K}\text{ es raíz de }P(x)\quad\Leftrightarrow\quad P(r)=0\quad\Leftrightarrow\quad a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_1r+a_0=0\quad\Leftrightarrow$$

$$\underset{/r^n}{\overset{r\neq 0}{\Leftrightarrow}}\quad a_n+\frac{a_{n-1}}{r}+\cdots+\frac{a_1}{r^{n-1}}+\frac{a_0}{r^n}=0\quad\Leftrightarrow\quad Q\left(\frac{1}{r}\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{r}\text{ es raíz de }Q(x)$$

Es decir, las raíces de cualquier polinomio $P(x)$ con término independiente no nulo son las inversas de las raíces del polinomio del mismo grado que $P(x)$ y los mismos coeficientes pero escritos en orden contrario.

b) Si $x_1,\dots,x_7 \in \mathbb{C}$ son las siete soluciones de la ecuación $x^7-4x^6+8x^2-1=0$, los números complejos $\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_7}$ son las soluciones de la ecuación $-x^7+8x^5-4x+1=0$, es decir, de

$$x^7-8x^5+4x-1=0$$

Las dos primeras fórmulas de Cardano para esta ecuación establecen que

$$\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{x_i}=0, \qquad \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{7}\frac{1}{x_i x_j}=-8,$$

y de la identidad

$$\left(\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{x_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{x_i^2}+2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\frac{1}{x_i x_j}$$

se deduce que

$$\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{x_i^2}=\left(\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{x_i}\right)^2-2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{7}\frac{1}{x_i x_j}=0^2-2\cdot(-8)=16$$