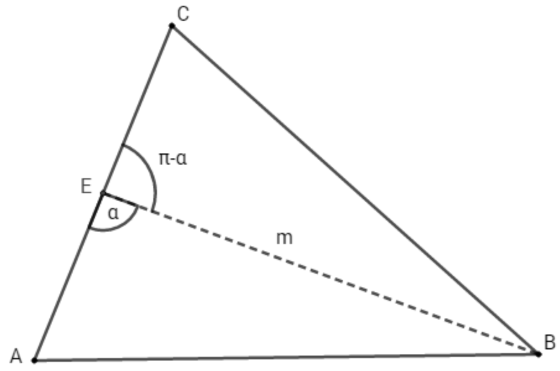
G1. El triángulo

1. Si E es el punto medio del lado CA de un triángulo cualquiera ABC, y S es el área de dicho triángulo, pruébese que:

$$\cot AEB = \frac{BC^2 - BA^2}{4S}$$



SOLUCIÓN: La expresión $BC^2 - BA^2$ nos evoca al Teorema del Coseno, pues éste da cuadrados. Por tanto aplicaremos dicho teorema a los $\triangle EBC$ y $\triangle AEB$:

$$BC^2 = EC^2 + m^2 - 2\,EC\,m\cos(\pi - \alpha)$$
$$BA^2 = AE^2 + m^2 - 2\,AE\,m\cos\alpha$$

Teniendo en cuenta que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, que $EC = AE$ por ser E el punto medio del segmento AC y restando a la primera ecuación, la segunda, obtenemos:

$$BC^2 - BA^2 = 4\,AE \cdot m\cos\alpha \qquad (1)$$

Por otro lado, necesitamos relacionar la anterior expresión con el área S del $\triangle ABC$. El área del $\triangle AEB$ es la mitad de la del $\triangle ABC$ por ser éste partido por una mediana, así:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} AE \cdot m \operatorname{sen} \alpha$$

Despejando $AE \cdot m$ de la anterior expresión:

$$AE \cdot m = \frac{S}{\operatorname{sen} \alpha}$$

que, sustituyendo en (1):

$$BC^2 - BA^2 = 4S \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow BC^2 - BA^2 = 4S \operatorname{cotg} \alpha \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{BC^2 - BA^2}{4S}$$

que es lo que había que demostrar.