5. Calcule las sumas:

a) $A_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ b) $B_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ c) $C_n = 1 + 4x + 9x^2 + \cdots + n^2 x^{n-1}$

Este problema figura resuelto en la página 93 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: a) $A_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón x, así que distinguimos:

- Si $x = 1$, entonces

$$A_n = 1 + 1 + 1 + \overset{n}{\cdots} + 1 = n\,.$$

- Si $x \neq 1$, entonces

$$A_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

b) $B_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ es la suma de n términos de una progresión aritmético-geométrica de primer orden y razón x, así que distinguimos:

- Si $x = 1$, entonces

$$B_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- Si $x \neq 1$, entonces

$$B_n - xB_n = \left[1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}\right]-\left[x+2x^2+3x^3+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n\right]=$$

$$=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

es decir,

$$(1-x)B_n=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n \quad\Rightarrow\quad B_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}=\frac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Un procedimiento algo más corto: Para calcular B_n cuando $x\neq 1$ puede repararse en que

$$B_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{d}{dx}(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)=\frac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

c) $C_n=1+4x+9x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$ es la suma de n términos de una progresión aritmético-geométrica de segundo orden y razón x, así que distinguimos de nuevo:

- Si $x=1$, entonces

$$C_n=1+4+9+\cdots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Si $x\neq 1$, entonces

$$C_n - xC_n = \left[1+4x+9x^2+\cdots+n^2x^{n-1}\right]-\left[x+4x^2+9x^3+\cdots+(n-1)^2x^{n-1}+n^2x^n\right]=$$

$$=1+3x+5x^2+\cdots+(2n-1)x^{n-1}-n^2x^n$$

es decir,

$$(1-x)C_n = 1+3x+5x^2+\cdots+(2n-1)x^{n-1}-n^2x^n$$

Si llamamos ahora $D_n = 1+3x+5x^2+\cdots+(2n-1)x^{n-1}$ es:

$$C_n = \frac{D_n}{1-x}-\frac{n^2x^n}{1-x}$$

$D_n = 1+3x+5x^2+\cdots+(2n-1)x^{n-1}$ es la suma de n términos de una progresión aritmético-geométrica de primer orden y razón x, así:

$$D_n - xD_n = \left[1+3x+5x^2+\cdots+(2n-1)x^{n-1}\right]-\left[x+3x^2+5x^3+\cdots+(2n-3)x^{n-1}+(2n-1)x^n\right]=$$

$$=1+2x+2x^2+\cdots+2x^{n-1}-(2n-1)x^n = 1+2\cdot(x+x^2+\cdots+x^{n-1})-(2n-1)x^n = 1+2\cdot\frac{x-x^n}{1-x}-(2n-1)x^n$$

es decir,

$$(1-x)D_n = 1+2\cdot\frac{x-x^n}{1-x}-(2n-1)x^n \quad\Rightarrow\quad D_n = \frac{1}{1-x}+2\cdot\frac{x-x^n}{(1-x)^2}-\frac{(2n-1)x^n}{1-x}$$

Por tanto:

$$C_n = \frac{D_n}{1-x}-\frac{n^2x^n}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}+2\cdot\frac{x-x^n}{(1-x)^3}-\frac{(2n-1)x^n}{(1-x)^2}-\frac{n^2x^n}{1-x} = \frac{1+x-(n^2+2n+1)\cdot x^n+(2n^2+2n-1)\cdot x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

Otra método más rápido: Para calcular C_n cuando $x\neq 1$, dado que es

$$C_n = 1+4x+9x^2+\cdots+n^2x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k^2x^{k-1},$$

poniendo $k^2 = k(k+1)-k$, resulta que

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} k^2x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{d^2}{dx^2}(x^{k+1}) - \sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx}(x^k) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=1}^{n} x^{k+1}\right)-\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) =$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2-x^{n+2}}{1-x}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1+x-(n^2+2n+1)\cdot x^n+(2n^2+2n-1)\cdot x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

OBSERVACIONES

A_n, B_n y C_n son sumas parciales n-simas de las series de números reales de términos generales x^{n-1}, nx^{n-1} y n^2x^{n-1} respectivamente. Es sabido que estas series son convergentes si y solo si la razón x cumple que $|x|<1$. En esas condiciones, las sumas de estas series valen:

$$A_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n-1}{x-1} \underset{|x|<1}{=} \frac{1}{1-x}$$

$$B_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2} \underset{|x|<1}{=} \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$C_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x-(n^2+2n+1)\cdot x^n+(2n^2+2n-1)\cdot x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3} \underset{|x|<1}{=} \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

pues $\lim_{n\to\infty} P(n)\cdot x^n \underset{|x|<1}{=} \infty\cdot 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = 0$ por la comparación de los infinitos potencial y exponencial, siendo P(n) un polinomio en n de grado $n\in\mathbb{N}$ arbitrario.