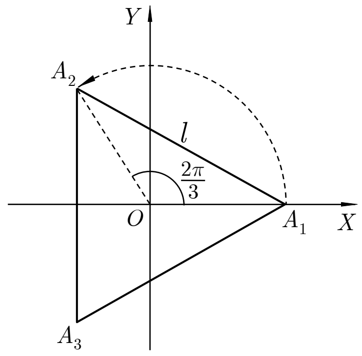
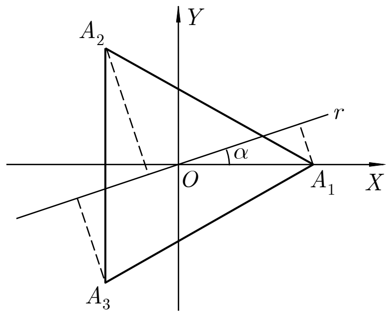
14. Se traza una recta r por el baricentro de un triángulo equilátero y en el mismo plano que éste. Demuestre que la suma de los cuadrados de las distancias de los tres vértices del triángulo a la recta r no depende de la elección de ésta.

SOLUCIÓN: Sea l la longitud del lado del triángulo equilátero y sean A_1, A_2 y A_3 sus vértices. Adoptamos por comodidad un sistema de referencia rectangular en el plano del triángulo cuyo origen es el baricentro O del mismo y cuyo semieje OX positivo pasa por el punto A_1. La abscisa de A_1 es la distancia de A_1 al baricentro O, que es los $\frac{2}{3}$ de la altura h del triángulo, que a su vez es, según el *teorema de Pitágoras*, $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$. Por tanto, $A_1 = \left(\frac{2}{3}h, 0\right) = \left(\frac{l}{\sqrt{3}}, 0\right)$.



El vértice A_2 es el resultado de girar A_1 un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ radianes alrededor del origen, es decir, $A_2 = \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\cos\frac{2\pi}{3}, \frac{l}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{l}{2\sqrt{3}}, \frac{l}{2}\right)$. El vértice A_3 es el simétrico de A_2 respecto del eje OX, luego $A_3 = \left(-\frac{l}{2\sqrt{3}}, -\frac{l}{2}\right)$.

La recta r pasa por el baricentro O, que es el origen de coordenadas, y por ello puede ser escrita en la forma $x sen\,\alpha - y cos\,\alpha$, para cierto ángulo $\alpha \in [0,\pi)$. Comprobamos que la suma de los cuadrados de las distancias de los vértices A_i a r no depende de α. Si llamamos $d_i = dist(A_i, r)$, $i = 1,2,3$, se tiene:



$$d_1 = \left|\frac{l}{\sqrt{3}} sen\,\alpha\right|,\; d_2 = \left|-\frac{l}{2\sqrt{3}} sen\,\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha\right|,$$

$$d_2 = \left|-\frac{l}{2\sqrt{3}} sen\,\alpha + \frac{l}{2}\cos\alpha\right|$$

y entonces:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \frac{l^2}{3} sen^2\alpha + \frac{l^2}{12} sen^2\alpha + \frac{l^2}{4} cos^2\alpha + \frac{l^2}{2\sqrt{3}} sen\,\alpha\cos\alpha +$$

$$+ \frac{l^2}{4} cos^2\alpha + \frac{l^2}{12} sen^2\alpha - \frac{l^2}{2\sqrt{3}} sen\,\alpha\cos\alpha = \frac{l^2}{2} sen^2\alpha + \frac{l^2}{2} cos^2\alpha = \frac{l^2}{2}$$