G1

Geometría del triángulo. Puntos notables.

Primeras relaciones métricas

1. Rectas y puntos notables

1.1. Concurrencia de las mediatrices. Circuncentro: Las *mediatrices* de un triángulo son las rectas perpendiculares a los lados en sus puntos medios. Como la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos, el punto común a dos mediatrices de un triángulo equidista de los tres vértices, luego pertenece a la tercera. Así las tres mediatrices de un triángulo coinciden en un punto llamado *circuncentro* que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

1.2. Concurrencia de las bisectrices. Incentro: Las *bisectrices interiores* son las rectas que dividen en dos partes iguales los ángulos del triángulo, y las *bisectrices exteriores* las que dividen en dos partes iguales los ángulos que forman los lados con las prolongaciones de los adyacentes. Al ser la bisectriz de un ángulo que forman dos semirrectas concurrentes el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas, se sigue que el punto común a dos bisectrices interiores de un triángulo equidista de los tres lados, luego pertenece a la tercera. El punto en el que concurren las tres bisectrices se llama *incentro* y es el centro de la circunferencia inscrita en un triángulo.

Notad que este mismo argumento prueba la existencia de los llamados *exincentros* del triángulo, puntos de intersección de pares de bisectrices exteriores y una bisectriz interior.

Una interesante propiedad de las bisectrices interiores es la siguiente: *Las bisectrices de un triángulo dividen al lado opuesto en dos segmentos de longitud proporcional a la longitud de sus lados adyacentes.*

1.3. Alturas. Ortocentro: Las *alturas* son las perpendiculares a los lados que pasan por los vértices opuestos. Recurriendo al triángulo mediano (por ejemplo) se demuestra fácilmente que las alturas son concurrentes, su punto común de denomina *ortocentro* del triángulo.

1.4. Medianas. Baricentro: Las *medianas* son las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. Se puede recurrir al triángulo mediano (como en el caso de las alturas) para demostrar que las medianas son concurrentes, su punto común de denomina *baricentro* del triángulo.

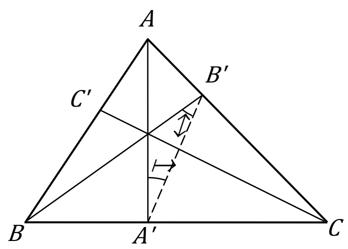
Algunas propiedades interesantes de las medianas son las siguientes:

i. El segmento de cada mediana comprendido entre su pie y el baricentro es un tercio de la misma.
ii. Cada una de las tres medianas divide al triángulo en dos triángulos de áreas iguales.
iii. Las tres medianas dividen al triángulo en seis triángulos de áreas iguales.

1.5. Ejemplo: Dado un triángulo ABC en el que $\measuredangle BAC = 70^{\circ}$ y $\measuredangle CBA = 60^{\circ}$, y otro triángulo $A'B'C'$, donde A', B' y C' son los pies de las alturas del triángulo desde A, B y C, respectivamente (triángulo órtico), puede probarse que las alturas del triángulo ABC son las bisectrices del triángulo $A'B'C'$. Determine, haciendo uso de esta propiedad, los ángulos del triángulo $A'B'C'$.

(Cataluña)

SOLUCIÓN: Con las notaciones de la figura, y teniendo en cuenta que las alturas del triángulo ABC son bisectrices del triángulo órtico, los ángulos buscados son $\measuredangle B'A'C' = 2\alpha$, $\measuredangle C'B'A' = 2\beta$ y $\measuredangle A'C'B' = 180^{\circ} - 2\alpha - 2\beta$.



Los puntos A' y B' son de la circunferencia de diámetro AB ya que los ángulos $\measuredangle AB'B$ y $\measuredangle AA'B$ son rectos.

En consecuencia, como $\measuredangle CBA = 60^{\circ}$ y $\measuredangle BB'A' = \measuredangle BAA'$, por ser ángulos inscritos en la misma circunferencia que abarcan el mismo arco sobre ella, se tiene

$$\beta = \measuredangle BB'A' = \measuredangle BAA' = 180^{\circ} - \measuredangle AA'B - \measuredangle A'BA = 180^{\circ} - 90^{\circ} - \measuredangle CBA = 30^{\circ}$$

Además, de los datos del enunciado se desprende que

$$\measuredangle B'CA' = \measuredangle ACB = 180^{\circ} - \measuredangle BAC - \measuredangle CBA = 180^{\circ} - 70^{\circ} - 60^{\circ} = 50^{\circ}$$

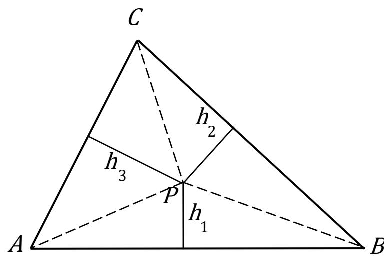
lo que sustituido en la igualdad $\measuredangle B'CA' + \measuredangle CA'B' + \measuredangle A'B'C = 180^{\circ}$, da $50^{\circ} + (90^{\circ} - \alpha) + (90^{\circ} - \beta) = 180^{\circ}$ y, como es $\beta = 30^{\circ}$, se tiene $\alpha = 20^{\circ}$. En consecuencia, los ángulos buscados valen

$$\measuredangle B'A'C' = 40^{\circ}, \qquad \measuredangle C'B'A' = 60^{\circ}, \qquad \measuredangle A'C'B' = 180^{\circ} - 40^{\circ} - 60^{\circ} = 80^{\circ}$$

1.6. Ejemplo: Dado un triángulo ABC, encuentre un punto P interior al triángulo tal que las áreas de los triángulos ABP, BCP y CAP sean proporcionales a las longitudes m, n y p de tres segmentos conocidos.

(Cataluña)

SOLUCIÓN: Sea P un punto como el del enunciado y S_1, S_2 y S_3 las áreas de los triángulos ABP, BCP y CAP, respectivamente. Calcularemos las alturas h_1, h_2 y h_3 de dichos triángulos sobre los lados AB, BC y AC, cuyas longitudes son $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$. El área S del triángulo ABC cumple $S_1 + S_2 + S_3 = S$, luego



$$\frac{S_1}{m} = \frac{S_2}{n} = \frac{S_3}{p} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{m+n+p} = \frac{S}{m+n+p}$$

Por otro lado, las áreas S_i son $S_1 = \frac{1}{2}ch_1$, $S_2 = \frac{1}{2}ah_2$, $S_3 = \frac{1}{2}bh_3$ y permiten reescribir las igualdades precedentes como sigue:

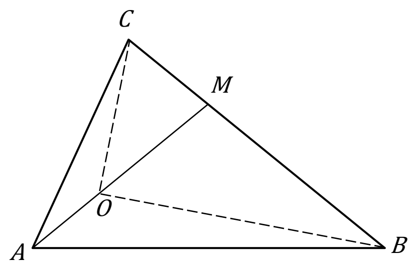
$$h_1 = \frac{2Sm}{c(m+n+p)}, \qquad h_2 = \frac{2Sn}{a(m+n+p)}, \qquad h_3 = \frac{2Sp}{b(m+n+p)}$$

De este modo las alturas h_1, h_2 y h_3 se expresan a partir de los datos, y P es el punto en que se cortan las rectas paralelas a los lados AB, BC y AC del triángulo dado situadas en el mismo semiplano que el vértice opuesto y que distan h_1, h_2 y h_3 de dichos lados.

1.7. Ejemplo: Demuestre que la suma de las distancias de un punto interior de un triángulo a los tres vértices del mismo es mayor que la mitad del perímetro de éste y menor que su perímetro.

(Cataluña)

SOLUCIÓN: Sean A, B y C los vértices del triángulo, sea O el punto interior al mismo. Por la desigualdad triangular podemos escribir:



$$OA + OB > AB\,, \qquad OA + OC > AC\,, \qquad OB + OC > BC$$

Si es p el perímetro del triángulo, al sumar las tres desigualdades miembro a miembro obtenemos:

$$2(OA + OB + OC) > AB + AC + BC = p \quad \Rightarrow \quad OA + OB + OC > \frac{p}{2} \tag{1}$$

Para demostrar que la suma del primer miembro es menor que el perímetro p, llamemos M al punto de corte de la recta AO con el lado BC. Se tiene así:

$$AC + BC = AC + CM + MB > AM + MB = AO + OM + MB > AO + OB$$

Razonando análogamente sobre las sumas $BA + CA$ y $AB + CB$ obtenemos:

$$BA + CA > BO + OC, \qquad AB + CB > AO + OC$$

Al sumar ahora las tres desigualdades anteriores obtenemos:

$$2(AB + BC + AC) > 2(AO + BO + CO)$$

y, dividiendo por dos:

$$p > OA + OB + OC \tag{2}$$

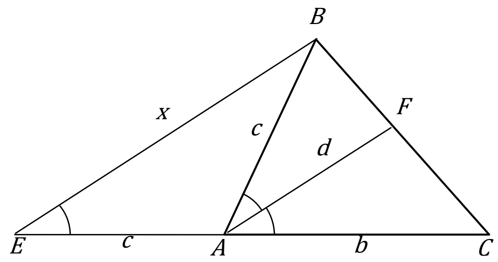
De la reunión de (1) y (2) se deduce el resultado:

$$\frac{p}{2} < OA + OB + OC < p$$

1.8. Ejemplo: Construya un triángulo conociendo los lados b y c y la bisectriz d del ángulo que forman. Discusión del problema a resolver.

(Andalucía)

SOLUCIÓN: Damos en primer lugar una solución totalmente geométrica del problema. Supongamos construido el triángulo ABC cuyos lados miden $AB = c$, $AC = b$ y cuya bisectriz AF del ángulo en A mide d.



Con las notaciones de la figura, sea E el punto situado en la recta que une A con C a la izquierda del vértice A y a distancia c del mismo. Vamos a calcular la distancia x entre los puntos E y B. La clave consiste en observar que la recta que los une es paralela a AF. En efecto, basta probar que los ángulos $\measuredangle AEB$ y $\measuredangle CAF$ coinciden. Ahora bien, como el triángulo BAE es isósceles, entonces

$$\measuredangle AEB = \frac{1}{2}(\measuredangle AEB + \measuredangle EBA) = \frac{1}{2}(\pi - \measuredangle BAE) = \frac{1}{2}\measuredangle CAB = \measuredangle CAF$$

donde para la última igualdad hemos empleado el que AF es bisectriz. En consecuencia, los triángulos CAF y CEB son semejantes, pues sus lados son paralelos dos a dos, luego

$$\frac{EB}{AF} = \frac{EC}{AC}, \quad \text{esto es,} \quad \frac{x}{d} = \frac{b+c}{b}, \quad \text{luego} \quad x = \frac{d\,(b+c)}{b}$$

Ahora ya estamos en condiciones de construir un triángulo en las condiciones del enunciado. Para ello elegimos dos puntos B y E que disten x y tomamos como A un punto de intersección, si existe, de las circunferencias de radio c centradas en los puntos B y E, respectivamente. El tercer vértice C es el único punto situado a distancia b del vértice A y pertenece a la semirrecta, distinta de la que contiene a E, de las dos en que el punto A divide a la recta que lo une con E.

Nótese que la existencia de un triángulo como el del enunciado garantiza la del triángulo isósceles auxiliar BAE, y recíprocamente. Por tanto, el problema tiene solución si y sólo si las circunferencias de radio c centradas en B y E se cortan fuera de la recta que une B con E, esto es, si la distancia x entre sus centros es menor que la suma $2c$ de sus radios, es decir,

$$\frac{d\,(b+c)}{b} < 2c\,, \quad \text{o lo que es igual,} \quad \frac{1}{d} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

que es lo mismo que

$$d < \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

y que definitivamente afirma que la construcción es posible sólo cuando la bisectriz d del ángulo que forman los dos lados b y c es más corta que la media armónica de las longitudes de dichos lados.

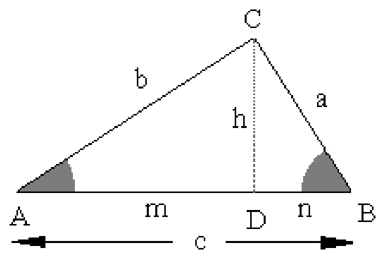
Existe una curiosa propiedad, debida a Euler (1765), relativa al baricentro, circuncentro y ortocentro de un triángulo. Es la siguiente:

1.9. Recta de Euler: El baricentro G de cualquier triángulo está alineado con el ortocentro H y con el circuncentro O, siendo la distancia GH doble que GO.

2. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

2.1. Relaciones métricas: En el triángulo ABC rectángulo en C, si a y b son los catetos, c la hipotenusa , h la altura, y m y n las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa se tiene:

i. $h^2 = m \cdot n$
ii. $a^2 = c \cdot n$
iii. $b^2 = c \cdot m$



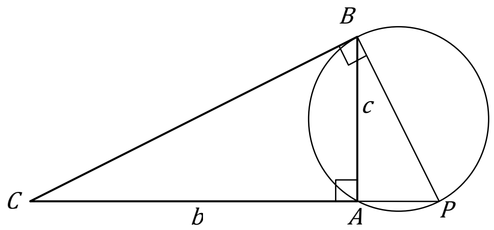
iv. $c^2 = a^2 + b^2$

v. $h = \frac{ab}{c}$

2.2. Ejemplo: Dado un triángulo rectángulo ABC, con el ángulo recto en A, se traza la perpendicular a BC por el punto B, se corta esta recta con la prolongación del cateto AC y se obtiene así el punto P. Determine el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABP en función de las longitudes b y c de los catetos del triángulo inicial.

(Cataluña)

SOLUCIÓN: El triángulo ABP es rectángulo, por lo que su hipotenusa BP es el diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. El radio de dicha circunferencia es entonces $R = \frac{1}{2}BP$.



Reparamos en que APB es un triángulo rectángulo semejante al ABC pues ambos son semejantes al BPC, ya que comparten un ángulo agudo con éste. Por la semejanza entre los triángulos ABC y APB, se tiene:

$$\frac{BP}{AB} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad BP = \frac{AB \cdot BC}{AC}$$

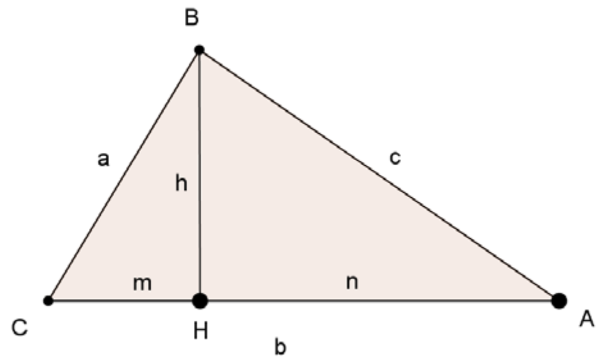
y de aquí que el radio que pide el problema es

$$R = \frac{1}{2}BP = \frac{c\sqrt{b^2 + c^2}}{2b}.$$

3. Cuadrado de un lado de un triángulo

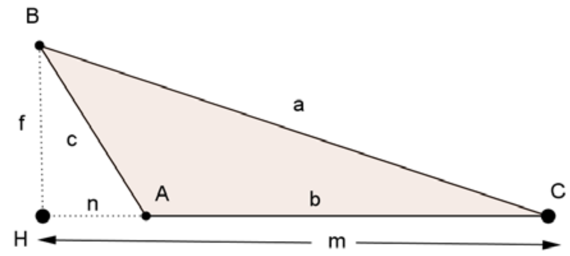
Para calcular el cuadrado de un lado de un triángulo distinguiremos según que el ángulo opuesto sea agudo u obtuso pues si es recto disponemos del teorema de Pitágoras. Si el ángulo A es agudo, llamando H al pie de la altura desde B, dado que $m = b - n$, las cuentas son las siguientes:

$$a^2 = m^2 + h^2 = (b-n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 - 2bn$$



Obsérvese que en la figura anterior podríamos haber dibujado el triángulo obtusángulo en C, razonando de la misma forma se obtiene la misma relación. Sin embargo, si el lado a es opuesto a un ángulo obtuso se tiene:

$$a^2 = m^2 + h^2 = (b+n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 + 2bn$$

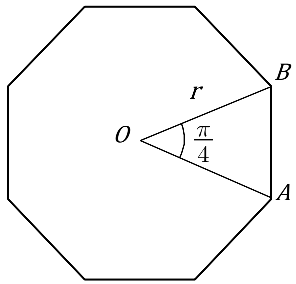


Esto es, *el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo (obtuso) de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos (más) el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

Este resultado se conoce en la literatura como *teorema generalizado de Pitágoras* y en trigonometría como teorema del coseno, tiene una infinidad de aplicaciones.

3.1. Ejemplo: Determine el lado del octógono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita.

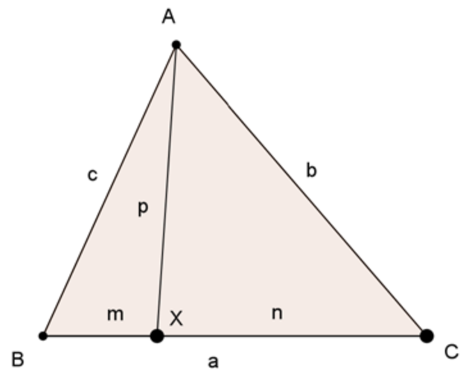
(Canarias)



SOLUCIÓN: Sean O y r el centro y el radio de la circunferencia circunscrita a un octógono regular y sean A y B dos vértices consecutivos de éste. Dado que es $\measuredangle AOB = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, al aplicar el *teorema del coseno* en el triángulo AOB se obtiene la igualdad: $AB^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\frac{\pi}{4} = \left(2-\sqrt{2}\right)r^2$ y de ella se deduce que el lado del octógono mide $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

De las fórmulas anteriores se obtienen otras para la suma y diferencia de los cuadrados de dos lados en función de la mediana. Pues bien, el teorema de Stewart constituye una generalización de estas últimas.

4. Teorema de Stewart



Sea AX una ceviana de longitud p, que divide BC en dos segmentos $BX = m$ y $XC = n$, como en la siguiente figura, entonces

$$a(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n$$

5. Expresión de las bisectrices en función de los lados

Denotemos por v_a la medida de la bisectriz que parte desde el vértice A hasta el lado opuesto BC (emplearemos la misma notación para la longitud de las bisectrices v_b y v_c), el semiperímetro se suele designar por $p = \frac{a+b+c}{2}$. Con estas notaciones resulta

$$v_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c} \qquad v_b = \frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c} \qquad v_c = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$$

6. Expresión de las medianas en función de los lados

Siguiendo la misma notación que en el párrafo anterior denotaremos por m_a, m_b y m_c las longitudes de las medianas correspondientes a los lados a, b y c respectivamente. Sus expresiones en términos de los lados son las siguientes

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2} \qquad m_b = \frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2} \qquad m_c = \frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$$

7. Expresión de las alturas en función de los lados

Sean ahora h_a, h_b y h_c las longitudes de las alturas correspondientes a los lados a, b y c respectivamente. Sus valores en función de los lados son

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

8. Radio de la circunferencia inscrita y circunscrita

En este punto vamos a expresar las medidas de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo en términos de sus lados. Así, manteniendo la notación empleada hasta ahora, el radio r de la circunferencia inscrita a un triángulo ABC mide

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Mientras que el radio de la circunferencia circunscrita en función de los lados es

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

9. Teoremas de Ceva y Menelao

Recordamos que el segmento que une un vértice de un triángulo con cualquier punto dado del lado opuesto se llama *ceviana*. Así, si X, Y y Z son puntos de los lados BC, CA y AB respectivamente, del triángulo ABC, los segmentos AX, BY, CZ son cevianas.

9.1 Teorema de Ceva: Tres cevianas AX, BY, CZ, cada una de ellas partiendo de un vértice de un triángulo ABC, son concurrentes si y solo si

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1$$

9.2 Teorema de Menelao: Si X, Y y Z son puntos de los lados BC, CA y AB (convenientemente prolongados) del triángulo ABC, entonces, están alineados si, y solo si,

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = -1$$

9.3. Observaciones

1. Tanto el teorema de Ceva como el de Menelao admiten reformulaciones trigonométricas y en términos de la razón simple.

2. Dado el que teorema de Ceva proporciona un criterio de concurrencia se puede emplear de manera alternativa para demostrar la existencia del baricentro, ortocentro e incentro.

3. Del mismo modo el teorema de Menelao nos ofrece un criterio de alineación muy útil para demostrar de manera elegante muchos resultados clásicos como el teorema de Pappus, el teorema de Desargues o el teorema de Pascal.

9.4. Ejemplo: Sean h_a, h_b y h_c, respectivamente, las alturas correspondientes a los vértices A, B y C de un triángulo ABC. Demuestre que si $h_a = h_b + h_c$, entonces la recta determinada por los pies de las bisectrices interiores de los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BCA$ pasa por el baricentro del triángulo.

(Valencia)

SOLUCIÓN: Sean a, b y c las longitudes de los lados del triángulo respectivamente opuestos a los vértices A, B y C. Si S es el área del triángulo, se tiene:

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S ,$$

es decir,

$$h_a = \frac{2S}{a}, \qquad h_b = \frac{2S}{b}, \qquad h_c = \frac{2S}{c}$$

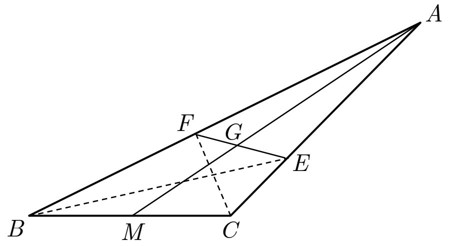
Como es $h_a = h_b + h_c$, entonces

$$\frac{2S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

o bien,

$$a(b+c) = bc$$

Sean E y F los respectivos pies de las bisectrices de los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BCA$, sea M el punto medio del lado BC y sea G el punto donde se cortan la mediana AM y la recta EF. Probaremos que G es el baricentro del triángulo ABC.



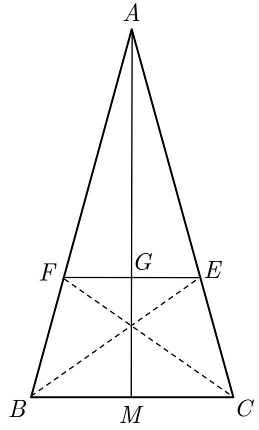
Del *Teorema de la bisectriz* se sigue que:

$$\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \qquad \frac{FB}{FA} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} \qquad (1)$$

Distinguimos entonces:

i) $b = c$. En este caso el triángulo ABC es isósceles y como $a(b+c) = bc$, resulta $b = c = 2a$ y, por (1):

$$\frac{EC}{EA}=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{FB}{FA}=\frac{a}{b}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

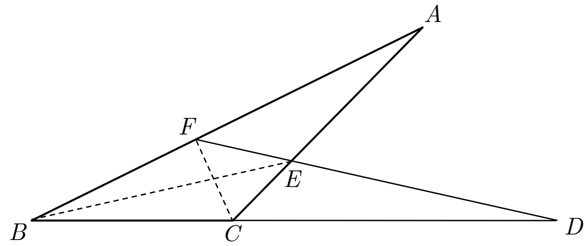


Así, pues, $\frac{EC}{EA}=\frac{FB}{FA}$ y del *Teorema de Thales* se desprende que las rectas EF y BC son paralelas y que, por tanto:

$$\frac{GM}{GA}=\frac{EC}{EA}=\frac{1}{2}$$

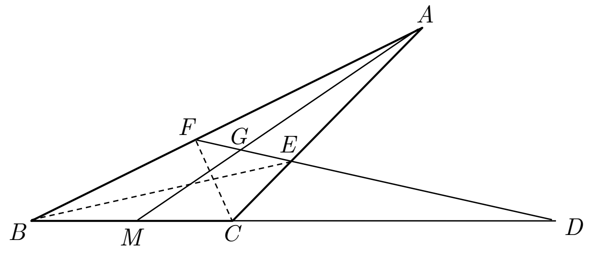
Es decir, G es el punto de la mediana AM situado a doble distancia de A que de M, o lo que es igual, G es el baricentro del triángulo ABC.

ii) $b<c$. En este caso se cumple que $\frac{EC}{EA}=\frac{a}{c}<\frac{a}{b}=\frac{FB}{FA}$, lo que supone, según el *Teorema de Thales*, que las rectas EF y BC se cortan en un punto D situado en la prolongación del lado BC por el vértice C. Como los puntos D, E y F son de las rectas que contienen a los lados del triángulo ABC y además están alineados, del *Teorema de Menelao* (ver observaciones al final de esta primera solución) se deduce cualquiera de las igualdades siguientes, que son equivalentes entre sí:



$$(DBC)(ECA)(FAB)=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{DB}{DC}\cdot\left(-\frac{EC}{EA}\right)\cdot\left(-\frac{FA}{FB}\right)=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{DB}{DC}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}$$

Como es $DB=DC+a$, la última proporción se escribe:



$$\frac{DC+a}{DC}=\frac{c}{b} \qquad \Rightarrow \qquad DC=\frac{ab}{c-b}$$

y entonces:

$$DM=DC+CM=\frac{ab}{c-b}+\frac{a}{2}=\frac{a(b+c)}{2(c-b)}$$

Si se aplica de nuevo el *Teorema de Menelao* a los puntos alineados D, E y G de las rectas que contienen a los lados del triángulo AMC, deducimos que $(GMA)(EAC)(DCM)=1$, es decir:

$$\left(-\frac{GM}{GA}\right)\cdot\left(-\frac{EA}{EC}\right)\cdot\frac{DC}{DM}=1$$

o bien,

$$\frac{GM}{GA}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{\frac{ab}{c-b}}{\frac{a(b+c)}{2(c-b)}}=1$$

luego:

$$\frac{GM}{GA}=\frac{a(b+c)}{2bc}$$

Concluimos ya que G es el baricentro del triángulo ABC, pues como $a(b+c)=bc$, resulta:

$$\frac{GM}{GA}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$$

iii) El caso $b>c$ es análogo al anterior intercambiando los papeles de b y c.