3. Calcule el término general de la sucesión siguiente:

$$\frac{4\cdot \mathrm{L}5}{1},\frac{5\cdot \mathrm{L}13}{3},\frac{6\cdot \mathrm{L}23}{7},\frac{7\cdot \mathrm{L}35}{13},\ldots$$

Este problema figura resuelto en la página 161 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Se consideran las sucesiones

$$(a_n)=(5,13,23,35,\ldots), \qquad (b_n)=(1,3,7,13,\ldots)$$

La sucesión (x_n) del enunciado es la de término general

$$x_n=\frac{(n+3)\,\mathrm{L}\,a_n}{b_n}$$

Calculamos las primeras diferencias finitas de ambas sucesiones:

a_i	**5**	13	23	35	…	b_i	**1**	3	7	13	…
Δa_i	**8**	10	12	…		Δb_i	**2**	4	6	…	
$\Delta^2 a_i$	**2**	2	…			$\Delta^2 b_i$	**2**	2	…		

Por tanto, (a_n) y (b_n) son progresiones aritméticas de segundo orden y

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 = 5 + 8(n-1) + (n-1)(n-2) = n^2 + 5n - 1$$

$$b_n = \binom{n-1}{0} b_1 + \binom{n-1}{1} \Delta b_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 b_1 = 1 + 2(n-1) + (n-1)(n-2) = n^2 - n + 1$$

luego

$$x_n = \frac{(n+3)\,\mathrm{L}(n^2+5n-1)}{n^2-n+1}$$