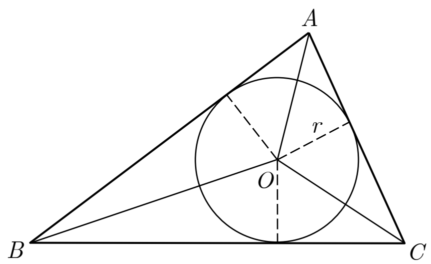
16. Sea G el baricentro de un triángulo ABC, sean g_a, g_b, y g_c, las distancias desde G a los lados respectivos BC, AC y AB del triángulo y sea r el radio de la circunferencia inscrita en dicho triángulo. Demuestre que:

a) $g_a \geq \frac{2r}{3}$, $g_b \geq \frac{2r}{3}$, $g_c \geq \frac{2r}{3}$

b) $\frac{g_a + g_b + g_c}{3} \geq r$

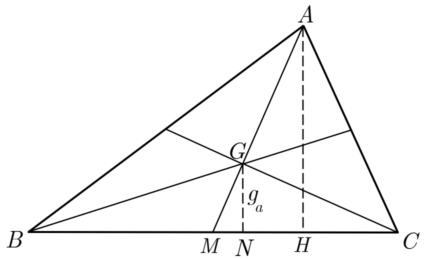
SOLUCIÓN: a) Debe probarse que la distancia del baricentro a cada uno de los lados es mayor o igual que $\frac{2r}{3}$, luego basta probarlo para uno de ellos, por ejemplo el lado BC. De hecho probaremos la desigualdad estricta $g_a > \frac{2r}{3}$, para lo que expresaremos de dos modos distintos el área S del triángulo ABC.

Por un lado, las perpendiculares desde su incentro O son alturas de los triángulos AOB, BOC y COA y todas ellas miden r. Por tanto, si a lo largo del ejercicio llamamos p al semiperímetro del triángulo ABC, se tiene



$$S = \text{área}(ABC) = \text{área}(AOB) + \text{área}(BOC) + \text{área}(COA) = \frac{r(c+a+b)}{2} = rp \qquad (1)$$

Expresamos ahora el área S en función de g_a, g_b, y g_c. Sea M el punto medio del lado BC, y N y H, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde G y A al lado BC. Como los triángulos AMH y GMN son semejantes y además, $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ se tiene



$$\frac{AH}{g_a} = \frac{AH}{GN} = \frac{AM}{GM} = 3$$

Por tanto, $AH = 3g_a$, luego

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}a \cdot (3g_a) \tag{2}$$

A partir de las igualdades (1) y (2) resulta

$$g_a = \frac{2r}{3} \cdot \frac{p}{a} \tag{3}$$

y todo se reduce a comprobar que p es mayor que a. Para ello basta restar, ya que

$$p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} > 0$$

pues en todo triángulo cada lado mide menos que la suma de los otros dos.

c) En el apartado anterior hemos probado que $\frac{g_a}{r} = \frac{2p}{3a}$, y por simetría también se tiene $\frac{g_b}{r} = \frac{2p}{3b}$ y $\frac{g_c}{r} = \frac{2p}{3c}$. A la vista de la desigualdad que nos piden probar uno está tentado a sumar estas cantidades, pero resulta más útil sumar sus inversos, que tienen el mismo denominador:

$$r\left(\frac{1}{g_a}+\frac{1}{g_b}+\frac{1}{g_c}\right)=\frac{3(a+b+c)}{2p}=3$$

o bien

$$\frac{3}{\frac{1}{g_a}+\frac{1}{g_b}+\frac{1}{g_c}}=r$$

es decir, la media armónica de g_a, g_b, y g_c vale r. Es conocido que la media aritmética es mayor o igual que la armónica, por lo que

$$\frac{g_a+\ g_b+g_c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{g_a}+\frac{1}{g_b}+\frac{1}{g_c}}=r$$