5. Los afijos de los números complejos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 y z_6 son vértices consecutivos de un hexágono regular. Sabiendo que $z_1 = 0$ y $z_4 = 4+6i$, donde $i = \sqrt{-1}$, halle los restantes vértices.

Este problema es el 18.21 del volumen 9 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: El centro del hexágono es el punto medio del segmento que une $z_1 = 0$ y $z_4 = 4+6i$; se trata del complejo $g = 2+3i$. Para los restantes vértices,

$$z_2 = g + e^{\pi i/3}(z_1 - g) = 2+3i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2-3i) = \frac{2+3\sqrt{3}}{2} + \frac{3-2\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = g + e^{2\pi i/3}(z_1 - g) = 2+3i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2-3i) = \frac{6+3\sqrt{3}}{2} + \frac{9-2\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_5 = g + e^{-2\pi i/3}(z_1 - g) = 2+3i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2-3i) = \frac{6-3\sqrt{3}}{2} + \frac{9+2\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_6 = g + e^{-\pi i/3}(z_1 - g) = 2+3i + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2-3i) = \frac{2-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3+2\sqrt{3}}{2}i$$