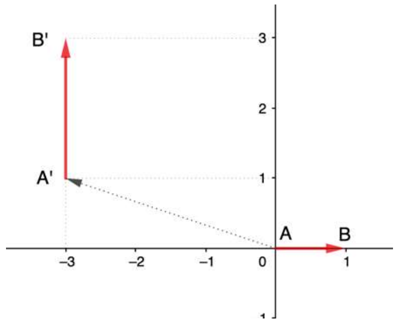
Problema 6. Hallar la matriz y las ecuaciones de la transformación puntual del plano en la que el homólogo del punto $A(0,0)$ es $A'(-3,1)$ y el homólogo del punto $B(1,0)$ es $B'(-3,3)$. Hallar la homóloga de la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 1.

Solución

La transformación se puede descomponer en una homotecia de centro A y razón 2, en un giro de centro A y amplitud $\frac{\pi}{2}$ y en una traslación de ventor $v := (-3,1)$. La matriz de la semejanza es, pues,



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2\cos\frac{\pi}{2} & -2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ 1 & 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & 2\cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la semejanza son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2y - 3 \\ y' = 2x + 1 \end{cases}$$

La homóloga de una circunferencia mediante una semejanza es otra circunferencia cuyo centro es el homólogo del centro de la circunferencia original, en este caso, $(x',\ y') = (-2\cdot 1 - 3, 2\cdot 1 + 1) = (-5,3)$ y cuyo radio es el radio de la circunferencia original multiplicado por el valor absoluto de la razón de la homotecia, en nuestro caso, el radio de la circunferencia homóloga mide $2\cdot 1 = 2$. De donde, la ecuación implícita de la circunferencia homóloga es

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 4$$