P1. Problema 11.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, con $0 \leq x_i \leq 5$?

Planteamiento:

Sea N =*Número de soluciones enteras no negativas de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13 \quad (1)$$

Sabemos que

$$N = CR_{3,13} = \binom{15}{13}$$

Eliminemos las soluciones que tengan algún $x_i \geq 6$.

Planteamiento:

Definamos la propiedad
$P_i = x_i \geq 6$ para $i = 1, 2, 3$. De modo que

- $N(P_i) =$N^o *de soluciones enteras no negativas de (1) que verifican que* $x_i \geq 6$.
- $N(P_i, P_j) =$ N^o *de soluciones enteras no negativas de (1) que verifican que* $x_i \geq 6$ *y* $x_j \geq 6$.
- $N(P_1, P_2, P_3) =$ N^o *de soluciones enteras no negativas de (1) que verifican que* $x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 6$, $x_3 \geq 6$.
- $N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3) =$ N^o *de soluciones enteras no negativas de (1) que verifican que* $0 \leq x_i \leq 5$, *para* $i = 1, 2, 3$.

Fórmula de inclusión-exclusión:

Por el principio de inclusión-exclusión:

$$N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3) = N - \sum_{i=1}^{3} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le 3} N(P_i, P_j) - N(P_1, P_2, P_3)$$

Aplicación de la fórmula de inclusión-exclusión:

Comencemos calculando, por ejemplo $N(P_1)$:

- Sea $y_1 = x_1 - 6$. Es evidente que $x_1 \geq 6 \Leftrightarrow y_1 \geq 0$.
- Sustituyendo en la ecuación (1):

$$y_1 + 6 + x_2 + x_3 = 13 \quad \Rightarrow \quad y_1 + x_2 + x_3 = 7 \quad (2)$$

- Observemos que el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación (2) coincide con el número de soluciones de la ecuación (1) que verifican que $x_1 \geq 6$, por tanto:

$$N(P_1) = CR_{3,7} = \binom{9}{7}$$

Igualmente se demuestra que

$$N(P_2) = N(P_3) = \binom{9}{7}$$

Aplicación de la fórmula de inclusión-exclusión:

Calculemos ahora $N(P_1, P_2)$:

- Sean $y_1 = x_1 - 6$, $y_2 = x_2 - 6$. Es evidente que
$$x_1 \geq 6 \Leftrightarrow y_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 6 \Leftrightarrow y_2 \geq 0$$
- Sustituyendo en la ecuación (1):
$$y_1 + 6 + y_2 + 6 + x_3 = 13 \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 + x_3 = 1 \quad (3)$$
- El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación (3) coincide con el número de soluciones de la ecuación (1) que verifican que $x_1 \geq 6$ y $x_2 \geq 6$, por tanto:
$$N(P_1, P_2) = CR_{3,1} = \binom{3}{1}$$

Igualmente se cumple que

$$N(P_1, P_3) = N(P_2, P_3) = \binom{3}{1}$$

Solución:

Observemos también que $N(P_1, P_2, P_3) = 0$, por lo que aplicando la fórmula de inclusión-exclusión:

$$N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3) = N - \sum_{i=1}^{3} N(P_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} N(P_i, P_j) - N(P_1, P_2, P_3)$$

$$= \binom{15}{13} - 3 \cdot \binom{9}{7} + 3 \cdot \binom{3}{1} - 0 = 6$$

Observación:

La solución de este problema la podíamos haber obtenido mediante un simple recuento. Dado que ninguna de las incógnitas debe tomar valores superiores a 5, entonces es necesario que $x_i \geq 3$ para que $x_1 + x_2 + x_3 = 13$. Por tanto, las soluciones son:

- $(3, 5, 5)$
- $(4, 4, 5)$, $(4, 5, 4)$
- $(5, 3, 5)$, $(5, 4, 4)$, $(5, 5, 3)$