


## P1. Problema 8.

Autor: José María Lorenzo Magán

*Academia Deimos*  
[www.academiadeimos.com](http://www.academiadeimos.com)

A circular logo with a stylized 'D' and 'E' inside, surrounded by the word 'DEIMOS' in a circular arrangement.

# Enunciado:

En un examen se propone un test de quince preguntas, numeradas del 1 al 15. Después de ser corregido, se observa que ningún alumno ha contestado bien a dos preguntas consecutivas del test. Si el número de exámenes corregidos es 1600, ¿se puede asegurar que al menos dos alumnos han contestado de igual forma?

*Resuelto en Vol. 4. Ej. 96.34*

# Primer paso:

Vamos a determinar el número de formas de responder al examen sin acertar dos preguntas consecutivas.

Para ello vamos a definir:

$N_i$  = "número de formas de responder al examen acertando  $i$  respuestas pero nunca dos consecutivas.

Observemos que  $i = 0, 1, 2, \dots, 8$ .

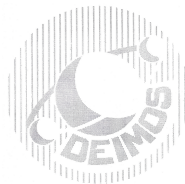
De este modo, el número de formas de responder al examen sin acertar dos preguntas consecutivas será:

$$N = \sum_{i=0}^8 N_i$$

## Segundo paso:

Es evidente que

- $N_0 = 1$ .
- $N_1 = 15$ .



## Segundo paso:

Para el cálculo de  $N_2$  recurramos a la misma estrategia que en el problema 5.

Dado que se van a responder dos preguntas correctamente y 13 incorrectamente, entonces vamos a identificar la respuesta correcta con un 1 y la respuesta incorrecta con un 0:

- Coloquemos 13 cuadrados y 14 círculos, de modo que a la derecha y a la izquierda de cada cuadrado haya un círculo.

○ □ ○ □ ○ □ ○ ... ○ □ ○

- Coloquemos en cada cuadrado un cero.
- Seleccionemos 2 de los 14 círculos donde pondremos los unos.
- Una vez colocados estos unos, eliminamos el resto de los círculos y obtendremos una secuencia de unos y ceros sin unos consecutivos.

0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

## Segundo paso:

Se tiene entonces que

$$N_2 = C_{14,2} = \binom{14}{2}$$

Este mismo argumento se puede repetir para el resto de los  $N_i$  con  $i \geq 3$ . Así por ejemplo, para calcular  $N_3$  dispondríamos de 12 cuadrados y 13 círculos de los que seleccionaremos 3, de modo que

$$N_3 = C_{13,3} = \binom{13}{3}$$

En general,

$$N_i = C_{16-i,i} = \binom{16-i}{i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, 8$$

# Solución:

De este modo, el número de formas de responder al examen sin acertar dos preguntas consecutivas será:

$$N = \sum_{i=0}^8 N_i = \sum_{i=0}^8 \binom{16-i}{i} = 1 + 15 + \binom{14}{2} + \binom{13}{3} + \cdots \binom{8}{8}$$

El valor de esta suma es  $N = 1597$ .

Dado que el número de exámenes corregidos es 1600, por el *Principio de Distribución*, podemos asegurar que **al menos dos alumnos han respondido de la misma forma**.