**4.** Demuestre que todo número complejo $z \neq -1$ tal que $|z| = 1$ puede escribirse, para algún $a \in \mathbb{R}$, en la forma

$$z = \frac{1+ai}{1-ai}.$$

**Este problema figura resuelto en la página 50 del volumen 5 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.**

SOLUCIÓN: Sea $\theta \in (-\pi, \pi]$ el argumento principal del número complejo $z$. Dado que es $z \neq -1$, será $\theta \neq \pi$ y como además el módulo de $z$ es la unidad, podemos escribir $z = e^{i\theta}$, para cierto $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Supongamos que $a \in \mathbb{R}$ cumple la igualdad del enunciado; si ponemos $1 + a\,i$ en forma exponencial, será $1 + ai = re^{i\alpha}$, donde $r > 0$ y $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, esto último por tener $1 + a\,i$ parte real positiva. Se tiene entonces que:

$$e^{i\theta} = z = \frac{1+ai}{1-ai} = \frac{re^{i\alpha}}{re^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

luego $2\alpha = \theta + 2k\pi$, es decir, $\alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Por ser $\theta \in (-\pi, \pi)$ se deduce que $\frac{\theta}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, así que como $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, necesariamente es $\alpha = \frac{\theta}{2}$. Como son $r\cos\alpha = 1$ y $r\,\text{sen}\,\alpha = a$, al dividir ambas igualdades resulta:

$$a = \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\frac{\theta}{2}$$

Recíprocamente, sea cual sea $a \in \mathbb{R}$, el número complejo $\frac{1+ai}{1-ai}$ es distinto de $-1$, pues si fuese $\frac{1+ai}{1-ai} = -1$ sería $1 = -1$, falso, y además tiene módulo 1, pues:

$$\left|\frac{1+ai}{1-ai}\right| = \frac{|1+ai|}{|1-ai|} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$$