2. Estudie la convergencia de las series de término general

a) $x_n = \dfrac{n+1}{n} \cdot \tan \dfrac{1}{n} \cdot \mathrm{L}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

b) $x_n = \dfrac{a^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} \quad (a>0)$

c) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$

d) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$

Los apartados c) y d) son los problemas IV-43 y IV-14 del volumen Problemas de Cálculo Infinitesimal, de E. Tébar. El apartado b) es parte del problema 8.10 del libro Ejercicios de Análisis, de Braulio De Diego.

SOLUCIÓN:

a) $x_n = \dfrac{n+1}{n} \cdot \tan \dfrac{1}{n} \cdot \mathrm{L}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

La serie de término general x_n es de términos positivos, pues $0<\frac{1}{n}<\frac{\pi}{2}$ para todo n natural y por tanto $\tan \frac{1}{n}>0$, además de que $\mathrm{L}\,\frac{n+1}{n}$ es positivo por ser $\frac{n+1}{n}>1$. Como es

$$x_n = \frac{n+1}{n} \cdot \tan \frac{1}{n} \cdot \mathrm{L}\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim 1 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

y la serie armónica de orden 2 es convergente, también lo es la serie $\sum x_n$.

b) $x_n = \dfrac{a^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} \qquad (a>0)$

Dado que

$$x_n \sim \frac{a^n}{\operatorname{L} n}$$

las series $\sum x_n$ y $\sum \frac{a^n}{\operatorname{L} n}$ son del mismo carácter. Distinguimos según los siguientes valores de a:

- Si $a>1$, entonces $\frac{a^n}{\operatorname{L} n} \to +\infty$ y la serie $\sum \frac{a^n}{\operatorname{L} n}$ diverge, luego $\sum x_n$ diverge.
- Si $a=1$, se trata de la serie $\sum \frac{1}{\operatorname{L} n}$, que es divergente, pues para cada $n \geq 2$ es $\operatorname{L} n \leq n$, y por tanto $\frac{1}{\operatorname{L} n} \geq \frac{1}{n}$, así que como la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge, también la serie $\sum \frac{1}{\operatorname{L} n}$ es divergente.
- Si $0<a<1$, la serie es convergente, como se deduce del Criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}\operatorname{L} n}{a^n \operatorname{L}(n+1)} = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{L} n}{\operatorname{L}(n+1)} = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{L} n}{\operatorname{L} n} = a < 1$$

c) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$

Como es

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$$

y $\lim \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$, no puede aplicarse el Criterio del cociente. Si acudimos al Criterio de Raabe y recordamos que $a^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n \, \mathrm{L}\, a$ cuando $\varepsilon_n \to 0$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{x_n}{x_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right] = -\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right)}{n} = \mathrm{L}\, 2 < 1$$

por lo que la serie es divergente.

d) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$

El Criterio de la raíz no da frutos pues $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$. Si acudimos al Criterio logarítmico, recordando que cuando $\varepsilon_n \to 0$, entonces $\mathrm{L}(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$, obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\mathrm{L}\, n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{\mathrm{L}\, n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{L}\, n} \cdot \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{L}\, n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{L}\, n} = +\infty > 1$$

como se deduce de la comparación del infinito potencial $\sqrt{n}$ con el logarítmico $\mathrm{L}\, n$. Del mencionado Criterio logarítmico se deduce que la serie es convergente.