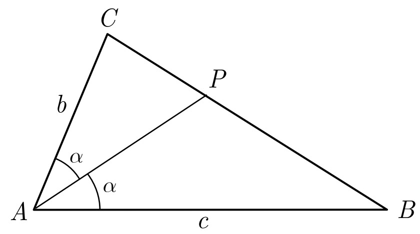
8. Dado un triángulo ABC cuyos lados miden $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$, demuestre que $a^2 - b^2 = bc$ si y sólo si $\widehat{BAC} = 2 \cdot \widehat{ABC}$

SOLUCIÓN: Sea P el pie de la bisectriz del ángulo $\widehat{BAC}$ sobre el lado BC. Probaremos que las tres condiciones siguientes son equivalentes, lo que de paso resolverá el problema:

i) $a^2 - b^2 = bc$

ii) Los triángulos ABC y PAC son semejantes

iii) $\widehat{BAC} = 2 \cdot \widehat{ABC}$



$i) \Rightarrow ii)$ Supóngase que es $a^2 - b^2 = bc$, es decir, $a^2 = b(b+c)$, o también

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c} \tag{1}$$

Los triángulos ABC y PAC comparten el ángulo en C, luego serán semejantes si y sólo si los lados AC y BC del primero son proporcionales a los lados respectivos PC y AC del segundo, es decir, si y sólo si

$$\frac{AC}{BC}=\frac{PC}{AC}, \qquad \text{o lo que es igual,} \qquad PC=\frac{b^2}{a}$$

Por el *Teorema de la bisectriz*, las longitudes PB y PC son directamente proporcionales a las longitudes c y b de los lados AB y CA, es decir,

$$\frac{PC}{b}=\frac{PB}{c}=\frac{PC+PB}{b+c}=\frac{BC}{AC+AB}=\frac{a}{b+c} \quad \Rightarrow \quad PC=\frac{ab}{b+c}$$

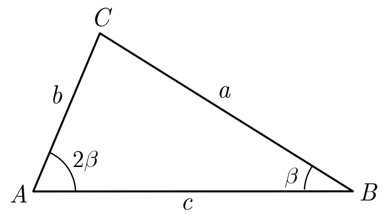
y, según (1),

$$PC=b\cdot\frac{a}{b+c}=b\cdot\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a}$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Si los triángulos ABC y PAC son semejantes, el ángulo $\widehat{PAC}$ del primero y el ángulo $\widehat{CBA}$ del segundo coinciden, así que

$$\widehat{BAC}=2\cdot\widehat{CAP}=2\cdot\widehat{ABC}$$

$iii) \Rightarrow i)$ Supongamos que se cumple la relación $\widehat{BAC}=2\cdot\widehat{ABC}$ y sea $\beta \coloneqq \widehat{ABC}$ y, por tanto, $\widehat{CAB}=2\beta$. Por el *Teorema de los senos*, es



$$\frac{a}{sen\,2\beta} = \frac{b}{sen\,\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2sen\beta\cos\beta} = \frac{b}{sen\,\beta}$$

y como es $sen\,\beta \neq 0$, deducimos que

$$\frac{a}{2\cos\beta} = b, \qquad \text{es decir,} \qquad \cos\beta = \frac{a}{2b}$$

Si ahora se aplica el *Teorema del coseno*, se obtiene que

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

y al igualar las dos expresiones de $\cos\beta$, se deduce que

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a}{2b} \quad \Rightarrow \quad a^2b + bc^2 - b^3 = a^2c \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a^2b - a^2c = b^3 - bc^2 \quad \Rightarrow \quad a^2(b-c) = b(b^2 - c^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a^2(b-c) = b(b+c)(b-c) \tag{2}$$

Si fuese $b = c$, el triángulo ABC sería isósceles y $\widehat{ACB} = \widehat{CBA} = \beta$, con lo que la suma de los ángulos del triángulo sería $4\beta = \pi$ y, en consecuencia, $2\beta = \frac{\pi}{2}$. El triángulo ABC sería entonces rectángulo además de isósceles, por lo que, según el *Teorema de Pitágoras*, sería $a^2 = b^2 + b^2 = b^2 + bc$, como buscábamos. Si es $b \neq c$, al dividir en (2) por $b - c$ se deduce que $a^2 = b(b+c)$, que no es más que otra forma de escribir $a^2 - b^2 = bc$.