7. Dada la ecuación $z^2-8iz-(19-4i)=0$, cuyas soluciones son z_1 y z_2, halle los números complejos z tales que los afijos de z_1, z_2 y z formen un triángulo rectángulo isósceles cuyo vértice en el ángulo recto sea el afijo de la solución de mayor componente imaginaria.

Este problema figura resuelto en la página 214 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

SOLUCIÓN: Las soluciones de la ecuación $z^2-8iz-(19-4i)=0$ son

$$z=\frac{8i\pm\sqrt{-64+4(19-4i)}}{2}=4i\pm\sqrt{3-4i}$$

El módulo del radicando $3-4i$ es $\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$ y su argumento principal es el único ángulo $\theta\in(-\pi,\pi]$ tal que $\cos\theta=\frac{3}{5}$ y $\operatorname{sen}\theta=-\frac{4}{5}$. El módulo de cualquiera de las raíces es $\sqrt{5}$ y como θ está en el cuarto cuadrante, su argumento $\frac{\theta}{2}$ también lo está, así que

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}},\qquad \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

y las raíces cuadradas de $3-4i$ son $\pm\sqrt{5}\,(\cos\frac{\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})=\pm\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-i\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\pm(2-i)$.

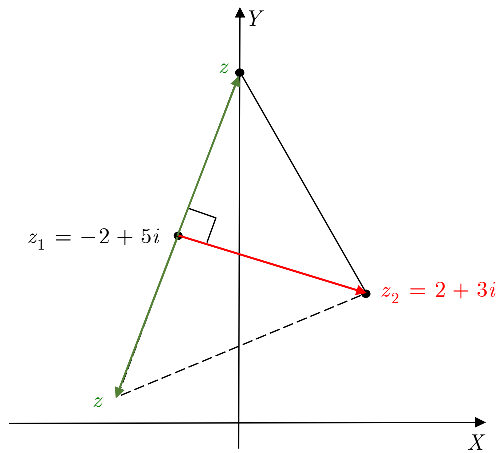
También podían haberse calculado las dos raíces cuadradas de $3-4i$ poniendo, para ciertos $x,y\in\mathbb{R}$,

$$(x+iy)^2=3-4i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2-\frac{4}{x^2}=3 \quad \Rightarrow \quad x^4-3x^2-4=0$$

Las únicas soluciones reales de la ecuación bicuadrada de la derecha son $x=\pm 2$, que conducen a las soluciones del sistema $(x,y)=(-2,1)$ y $(x,y)=(2,-1)$, y que dan las dos raíces cuadradas $\pm(2-i)$ de $4-3i$.

Sea cual sea el método seguido, las soluciones de la ecuación son $z=4i\pm(2-i)$, es decir,

$$z_1=-2+5i, \qquad z_2=2+3i$$



Se deben determinar todos los números complejos z tales que los afijos de los números complejos z_1, z_2 y z formen un triángulo rectángulo isósceles cuyo vértice en el ángulo recto sea z_1. Por tanto, el vector $z-z_1$ es el resultado de girar el vector z_2-z_1 un ángulo de $\pm\frac{\pi}{2}$ alrededor de z_1, por lo que

$$z-z_1=i\,(z_2-z_1) \qquad \text{o} \qquad z-z_1=-i\,(z_2-z_1)$$

En el primer caso será

$$z = z_1 + i\,(z_2 - z_1) = -2 + 5i + i\,(2 + 3i + 2 - 5i) = 9i$$

y en el segundo,

$$z = z_1 - i\,(z_2 - z_1) = -2 + 5i - i\,(2 + 3i + 2 - 5i) = -2 + 5i - 4i - 2 = -4 + i$$