Tema 37: La relación de semejanza en el plano. Consecuencias. Teorema de Thales. Razones trigonométricas.

Autor: Juan Manuel Hernández

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Contenidos

Introducción

En la primera sección se introduce la relación de semejanza en el plano y se demuestra el teorema de Thales, se utiliza en la segunda para obtener los criterios de semejanza de triángulos. Como aplicación obtenemos los teoremas del cateto y de la altura. El teorema de Thales hace consistentes las definiciones de las razones trigonométricas, de cuyas propiedades nos ocupamos en la última sección.

Triángulos semajantes

Se dice que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$ son *semejantes*, y lo denotaremos $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, si se cumplen las igualdades

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}.$$

Nótese que la relación de semejanza es de equivalencia. Si los cocientes anteriores valen 1 se dice que los triángulos son *congruentes.*

Teorema de Thales

Dados un triángulo $\triangle ABC$ *y dos puntos* $D \in S(B, C)$ *y* $E \in S(A, B)$ *de modo que las rectas* $r(D, E)$ *y* $r(A, C)$ *son paralelas, los triángulos* $\triangle ABC$ *y* $\triangle EBD$ *son semejantes.*

[Incluir demostracción]

Semejanza de triángulos

1. Sean $\triangle ABC$ un triángulo y $D \in S(B,C)$ y $E \in S(A,B)$ dos puntos tales que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle EBD$ son semejantes. Entonces las rectas $r(A,C)$ y $r(D,E)$ son paralelas.
2. **[Criterios de semejanza de triángulos]** *Sean* $\mathcal{T}_1 := \triangle ABC$ *y* $\mathcal{T}_2 := \triangle MNP$*.*

   (1) *Si* $\measuredangle BAC = \measuredangle NMP$ *y* $\measuredangle CBA = \measuredangle PNM$, *entonces* $\mathcal{T}_1$ *y* $\mathcal{T}_2$ *son semejantes.*

   (2) *Si* $\measuredangle BAC = \measuredangle NMP$ *y* $AB \cdot MP = AC \cdot MN$, *entonces* $\mathcal{T}_1$ *y* $\mathcal{T}_2$ *son semejantes.*

Algunas consecuencias.

Sean $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en A y H la proyección ortogonal de A sobre la recta $r(B, C)$. Se cumplen las siguientes igualdades:

(1) $AB^2 = BC \cdot HB$ (*Teorema del cateto*).

(2) $AH^2 = CH \cdot BH$ (*Teorema de la altura*).

(3) $BC^2 = AB^2 + AC^2$ *(*Teorema de Pitágoras*)*.

Razones trigonométricas

Sea $\mathcal{R} := \{O; e_1, e_2\}$ un sistema de referencia ortogonal de $\mathbb{R}^2$, Γ la circunferencia de centro O y radio 1 y Q el punto cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ son $(1, 0)$. Para cada punto $P \in \Gamma$ cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ son (x, y) denotamos $\alpha := \measuredangle(r^+, s^+)$, donde r^+ y s^+ son las semirrectas de origen O que pasan por Q y P, respectivamente. Las *razones trigonométricas* de α son los siguientes números:

(1) *Coseno* de α, que se denota $\cos\alpha := x$.

(2) *Seno* de α, que se denota $\operatorname{sen}\alpha := y$.

(3) *Tangente* de α, que se denota $\operatorname{tg}\alpha := \frac{y}{x}$, si $x \neq 0$.

(4) *Cotangente* de α, que se denota $\alpha := \frac{x}{y}$, si $y \neq 0$.

(5) *Secante* de α, que se denota $\sec\alpha := \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$.

Razones trigonométricas

Observaciones:

(1) Sea Γ_1 otra circunferencia concéntrica con Γ de radio $r > 0$. Los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OP'Q'$ son semejantes pues las amplitudes de sus ángulos son iguales dos a dos. Sea M el pie de la perpendicular a la recta $r(O,Q)$ trazada desde P. Entonces $P' := (rx, ry)$ y $Q' := (r, 0)$, por lo que se tiene

$$\cos\alpha = \frac{OM}{OP} = x = \frac{rx}{r} \quad ; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{MP}{OP} = y = \frac{ry}{r}.$$

Por ello es consistente definir las razones trigonométricas de la amplitud $\alpha := \measuredangle BAC$ del ángulo en A del triángulo $\triangle ABC$ rectángulo en B, como

$$\operatorname{sen}\alpha := \frac{BC}{AC} \quad \text{y} \quad \cos\alpha := \frac{AB}{AC},$$

Razones trigonométricas

(2) En términos de las razones trigonométricas el teorema de Pitágoras se reformula:

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = 1.$$

En particular, $|\cos\alpha| \leq 1$ y $|\operatorname{sen}\alpha| \leq 1$. Dividiendo la anterior relación, respectivamente entre $\cos\alpha^2$ y $\operatorname{sen}^2\alpha$ cuando estos números no son nulos, resulta

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \quad \text{y} \quad 1 +^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

(3) Las razones trigonométricas han sido definidas para amplitudes de ángulos en el intervalo $[0, 2\pi)$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un único entero k tal que $\alpha - 2k\pi \in [0, 2\pi)$, así que podemos extender por prolongación periódica a toda la recta real las fun-

Razones trigonométricas

(4) De la simetría de la circunferencia se siguen las llamadas fórmulas *de reducción:*
Para cualquier ángulo α se cumplen las siguientes igualdades:
(i) $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, $\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$.
(ii) $\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$.
(iii) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$.

Bibliografía

- Retorno a la Geometría. H.S.M Coxeter. S.L. Greitzer. La Tortuga de Aquiles.
- Fundamentos de la Geometría. David Hilbert. CSIC.
- Curso de geometría básica. Antonio F. Costa. Ed. Sanz y Torres.
- Curso de geometría métrica. Tomo 1. Puig Adam.
- Geometría. S. Xambó. Edicions UPB.