3. Resuelva las siguientes cuestiones de divisibilidad:

a) En el Parlamento español hay 350 diputados y para la aprobación de una ley es necesario un quorum de los 2/3. En la sesión en la que se aprobaron los Presupuestos Generales del Estado, una periodista observó que únicamente el $11,\widehat{1}\,\%$ de los presentes eran mujeres y que el $45,\widehat{45}\,\%$ eran mayores de 48 años. Se pide el número de diputados ausentes en la reunión.

b) Halle el número natural $N = 2^a \cdot 5^b$, sabiendo que la suma de sus divisores es 961.

El apartado a) figura resuelto en la página 293 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos. El apartado b) es el mismo apartado del problema 89.96 del volumen 3.

SOLUCIÓN: a) Sea N el número de diputados presentes en la reunión. Dado que son

$$11,\widehat{1} = \frac{100}{9} \qquad \text{y} \qquad 45,\widehat{45} = \frac{500}{11},$$

los números $\frac{100}{9}\cdot\frac{1}{100}\cdot N = \frac{1}{9}N$ y $\frac{500}{11}\cdot\frac{1}{100}\cdot N = \frac{5}{11}\cdot N$ deben ser enteros, así que como 5 y 11 son primos relativos, N tiene que ser múltiplo de 11 y de 9, es decir, múltiplo de $\operatorname{mcm}(11,9) = 99$ y además, suponiendo que hubo quorum, debe estar comprendido entre los 2/3 de 350 y 350, es decir, entre 234 y 350. El único múltiplo de 99 comprendido entre dichos números es $N = 99\cdot 3 = 297$, que es el número de diputados presentes en la reunión, así que faltaron $350 - 297 = 53$ diputados.

b) Los divisores positivos del número natural $n=2^a\cdot 5^b$, donde suponemos $a,b\geq 1$, son todos los números naturales $2^i\cdot 5^j$, para $i=0,1,\ldots,a$ y $j=0,1,\ldots,b$, y la suma de todos ellos es

$$\sigma(n)=(1+2+\cdots+2^a)\cdot(1+5+\cdots+5^b)=961 \qquad (1)$$

Como son $a,b\geq 1$, los dos factores del miembro central son divisores de $961=31^2$ mayores que 1. Como los divisores de 961 son 1, 31 y 961, sólo hay una posibilidad, que sean:

$$1+2+\cdots+2^a=31 \qquad \text{y} \qquad 1+5+\cdots+5^b=31$$

es decir, $2^{a+1}-1=31$ y $5^{b+1}-1=124$, o bien, $2^{a+1}=32$ y $5^{b+1}=125$, por lo que $a=4$ y $b=2$, así que el número que pide el problema es

$$n=2^4\cdot 5^2=400\,.$$