7. Calcule los límites siguientes:

a) $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n}}$

b) $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \cdots + \sqrt[n]{a_k}}{k} \right)^n \qquad (a_1, \ldots, a_k > 0)$

c) $M = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{sen}^4 \dfrac{(n+1)\pi}{3n^2}}$

d) $N = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \qquad (a, b > 0)$

e) $P = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

El apartado a) figura resuelto en la página 688 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones. El apartado c) es el problema 04.44 del volumen 4 de la misma colección.

SOLUCIÓN:

a) $K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n}}$

Este límite puede escribirse como:

$$K = \lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}\right]^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^2}\mathrm{L}\left[\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}\right]} = e^{\lambda}$$

donde:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left[\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}\right]}{n^2} \underset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left[\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}\right]-\mathrm{L}\left[\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-1}{n-1}\right]}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\dfrac{\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}}{\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-1}{n-1}}}{2n-1}$$

Dado que para cada $k=0,1,\ldots,n-1$:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}} = \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}} = \frac{n}{n-k}$$

resulta que:

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\,\dfrac{\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}}{\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-1}{n-1}}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(\dfrac{n}{n}\cdot\dfrac{n}{n-1}\cdots\dfrac{n}{1}\cdot 1\right)}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)}{2n-1}$$

La sucesión $(2n-1)$ del denominador es monótona divergente hacia $+\infty$, así que al aplicar de nuevo la *Regla de Stolz* se deduce:

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)-\mathrm{L}\left(\dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)}{(2n-1)-(2n-3)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\left(\frac{n^n\cdot(n-1)!}{(n-1)^{n-1}\cdot n!}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,e=\frac{1}{2}$$

luego

$$K=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

b) $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n \qquad (a_1,\ldots,a_k>0)$

Se trata de una indeterminación del tipo $\left(\frac{k}{k}\right)^{+\infty} = 1^{+\infty}$. Ponemos entonces $L = e^{\lambda}$, donde

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_k}}{k}-1\right) = \frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}\left[n\,(a_1^{1/n}-1)+\cdots+n\,(a_k^{1/n}-1)\right]$$

y, como es $a_j^{1/n}-1 \sim \frac{1}{n}\mathrm{L}\,a_j$, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} n\,(a_j^{1/n}-1) = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n}\mathrm{L}\,a_j = \mathrm{L}\,a_j\,,$$

luego

$$\lambda = \frac{1}{k}\cdot(\mathrm{L}\,a_1+\cdots+\mathrm{L}\,a_k) = \frac{1}{k}\mathrm{L}(a_1\cdots a_k) = \mathrm{L}\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$$

y por tanto

$$L = e^{\lambda} = \sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$$

c) $M = \lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{sen}^4 \dfrac{(n+1)\pi}{3n^2} \right)^{1/n}$

Cuando $n \to \infty$, la base tiende a $\operatorname{sen}^4 0 = 0$, así que se trata de una indeterminación 0^0. Según la *Regla de la raíz*:

$$M = \lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{sen}^4 \frac{(n+1)\pi}{3n^2} \right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 \frac{(n+1)\pi}{3n^2}}{\operatorname{sen}^4 \frac{n\pi}{3(n-1)^2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{3n^2}}{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{3(n-1)^2}} \right)^4 =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\pi}{3n^2}}{\frac{n\pi}{3(n-1)^2}} \right)^4 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{n}{(n-1)^2}} \right)^4 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)^2}{n^3} \right)^4 = 1^4 = 1$$

es decir,

$$M = 1$$

d) $N = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \qquad (a, b > 0)$

- Si $a = b$, entonces

$$N = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2a^n} = a \cdot \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = a$$

- Si $a < b$, según la *Regla de la raíz*, será:

$$N = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(\frac{a}{b}\right)^n + b}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} = b$$

Por tanto, en cualquier caso es

$$N = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$$

e) $P = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Aplicando de nuevo la *Regla de la raíz*, se tiene que

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}$$

Otra forma: Como es $\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}$, resulta que

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{en}=\frac{1}{e}$$