7. Demuestre que el número natural $3^{2n+3}+40n-27$ es divisible por 64, sea cual sea el número natural n.

Este problema figura resuelto en la página 315 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Llamemos $a_n=3^{2n+3}+40n-27$. Probaremos que a_n es múltiplo de 64 razonando por inducción sobre n. Para $n=1$ se tiene que

$$a_1=3^5+40-27=256=4\cdot 64$$

Si suponemos que la propiedad es cierta para algún $n\geq 1$, es decir, si suponemos que a_n es múltiplo de 64, entonces

$$a_{n+1}-a_n=3^{2n+5}+40(n+1)-27-3^{2n+3}-40n+27=3^{2n+5}-3^{2n+3}+40=3^{2n+3}\cdot 8+40=8\cdot(3^{2n+3}+5)$$

y el número $3^{2n+3}+5$ es múltiplo de 8, pues

$$3^{2n+3}+5=27\cdot 9^n+5\equiv 3\cdot 1+5\equiv 8\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,8)$$

así que, $a_{n+1}-a_n=8\cdot(27\cdot 3^{2n}+5)$ es múltiplo de $8\cdot 8=64$ y por tanto $a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+a_n$ es también múltiplo de 64. Queda por tanto demostrado que a_n es, para cada $n\in\mathbb{N}$, múltiplo de 64.