T16. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouchè. Regla de Cramer. Método de Gauss-Jordan

1. Sistemas de ecuaciones lineales

- Definición de *sistema* de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Definición de los *coeficientes* y los *términos independientes* del sistema. Definid con precisión *solución* de un sistema de ecuaciones lineales y lo que se entiende por *resolver* dicho sistema. Clasificad los sistemas de ecuaciones lineales según su número de soluciones. Definid *discutir* un sistema.

- Demostrad que si un sistema de ecuaciones lineales tiene más de una solución, necesariamente tiene infinitas soluciones.

- Definid *matriz de los coeficientes*, *matriz de los términos independientes* y *matriz ampliada* de un sistema de ecuaciones lineales y dad la expresión matricial de un tal sistema.

2. Sistemas equivalentes

- Definid sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.
- Definid las operaciones elementales sobre las ecuaciones de un sistema y enunciad y demostrad la propiedad fundamental de equivalencia.

- Explicad brevemente (véase primer párrafo de la página 4) en qué consiste el método de Gauss-Jordan

3. El método de Gauss-Jordan

- Definid matriz escalonada reducida. Un ejemplo de tal matriz puede ser la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Definid sistema de ecuaciones lineales escalonado reducido. Dos sistemas escalonados reducidos que tienen por matriz de coeficientes a la anterior son

$$\text{a)} \left\{ \begin{aligned} x + 2y \qquad + 5v \quad &= 1 \\ z \quad + 3v \quad &= -2 \\ u - 4v \quad &= 5 \\ w &= 3 \\ 0 &= 4 \end{aligned} \right. \qquad \text{b)} \left\{ \begin{aligned} x + 2y \qquad + 5v \quad &= 1 \\ z \quad + 3v \quad &= -2 \\ u - 4v \quad &= 5 \\ w &= 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right.$$

- Enunciad y demostrad el teorema que discute los sistemas escalonados reducidos. En cualquiera de los dos sistemas anteriores, el número de filas de A es $m=5$, de las que $r=4$ son no nulas. Como es $m-r=1$ y el último término independiente del sistema a) es no nulo, el sistema no tiene solución.

  El sistema b) es compatible porque el último término independiente es nulo; dado que además $r=4<6=n$, el sistema b) es indeterminado. Para dar sus infinitas soluciones, podemos escribirlo en la forma equivalente

$$\begin{cases} x=1-2y-5v \\ z=-2-3v \\ u=5+4v \\ w=3 \\ 0=0 \end{cases}$$

  y si ahora asignamos parámetros a las incógnitas y y v poniendo $y=\lambda$, $v=\mu$, llegamos a que las infinitas soluciones del sistema son

$$(x,y,z,u,v,w)=(1-2\lambda-5\mu,\ \lambda,\ -2-3\mu,\ 5+4\mu,\ \mu,\ 3)\,, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

- Enunciad el método de eliminación de Gauss-Jordan y escribid las comprobaciones de la forma más rigurosa posible. El siguiente es un ejemplo de cómo transformar un sistema de ecuaciones lineales cualquiera en otro equivalente que sea escalonado reducido.

$$\begin{cases} 2x+y-z+u=3 \\ x+2y+z-u=0 \\ 4x+5y+z-u=3 \\ 3x-y+z+4u=1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{e_2 \\ e_1 \\ e_3 \\ e_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{e_1 \\ e_2-2e_1 \\ e_3-4e_1 \\ e_4-3e_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{e_1 \\ -(1/3)e_2 \\ -(1/3)e_3 \\ e_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{e_1-2e_2 \\ e_2 \\ e_3-e_2 \\ e_4+7e_2}}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{e_1 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{5e_1+e_3 \\ -5e_2+e_3 \\ e_3 \\ e_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1/5)e_1 \\ (-1/5)e_2 \\ (1/5)e_3 \\ e_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se obtiene así que el sistema inicial es equivalente al sistema escalonado reducido:

$$\begin{cases} x \quad\quad + u = \frac{4}{5} \\ \quad y \quad - u = \frac{1}{5} \\ \quad\quad z \quad\quad = -\frac{6}{5} \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

Llamando ahora $u = \lambda$, llegamos a que las infinitas soluciones del sistema son las cuaternas

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{4}{5} - \lambda,\ \frac{1}{5} + \lambda, -\frac{6}{5}, \lambda\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

4. Sistemas de Cramer

- Definid con precisión lo que se entiende por sistema de Cramer.
- Enunciad y demostrad la Regla de Cramer para la resolución de sistemas de Cramer.

5. Teorema de Rouchè

- Enunciad con precisión y demostrad el teorema de Rouchè.

- Explicad cómo se obtienen las infinitas soluciones de un sistema compatible e indeterminado (véase el subepígrafe 16.5.2). Un ejemplo de lo que allí se cuenta es el siguiente:

Ejemplo: Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + y - z + u = 2 \\ x + 2y + z - u = 0 \\ -x + 3y + 2z - 2u = 1 \\ 6x + y - 3z + 3u = 3 \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2 & -2\\ 6 & 1 & -3 & 3\end{pmatrix},\qquad (A\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 2 & -2 & 1\\ 6 & 1 & -3 & 3 & 3\end{array}\right)$$

Como es $\det A=0$ y el menor formado por las tres primeras filas y las tres primeras columnas es no nulo (menor principal):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-6\neq 0$$

deducimos que $\operatorname{rang} A=3$. Si en la matriz ampliada orlamos el menor anterior de orden 3 con la última fila y la última columna se obtienen el menor de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 1\\ 6 & 1 & -3 & 3\end{vmatrix}=0$$

por lo que también $\operatorname{rang}(A\,|\,B)=3$ y el sistema es compatible e indeterminado. Para obtener las infinitas soluciones escribimos el sistema equivalente que resulta de eliminar la última ecuación y pasar al segundo miembro la incógnita u (las que no intervienen en el menor principal de orden 3 no nulo). Se trata del sistema

$$\begin{cases} 2x+y-z=2-u \\ x+2y+z=u \\ -x+3y+2z=1+2u \end{cases}$$

Si asignamos el parámetro λ a la variable u, el sistema que resulta es, para cada $\lambda\in\mathbb{R}$, un sistema de Cramer:

$$\begin{cases} 2x+y-z=2-\lambda \\ x+2y+z=\lambda \\ -x+3y+2z=1+2\lambda \end{cases}$$

Su solución se obtiene acudiendo a la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & -1\\ \lambda & 2 & 1\\ 1+2\lambda & 3 & 2\end{vmatrix}}{-6}=-\frac{5}{6},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2-\lambda & -1\\ 1 & \lambda & 1\\ -1 & 1+2\lambda & 2\end{vmatrix}}{-6}=\frac{9}{6},\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2-\lambda\\ 1 & 2 & \lambda\\ -1 & 3 & 1+2\lambda\end{vmatrix}}{-6}=-\frac{13}{6}+\lambda$$

Las infinitas soluciones de nuestro sistema son, por tanto,

$$(x,y,z,u)=\left(-\frac{5}{6},\frac{9}{6},-\frac{13}{6}+\lambda,\lambda\right),\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

- Definid sistemas homogéneos de ecuaciones lineales y aplicad a los mismos el teorema de Rouchè.

5. Eliminación lineal de parámetros

- Explicad brevemente que la eliminación lineal de parámetros consiste en, dadas unas ecuaciones paramétricas de una subvariedad afín de $\mathbb{K}^n$, encontrar unas ecuaciones implícitas de dicha subvariedad.

- Detallad el proceso que se sigue para la eliminación lineal de parámetros. Si os queda tiempo en el examen podéis incluir un ejemplo como el siguiente:

16.6.2. Ejemplo: Obténganse unas ecuaciones implícitas de la subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que admite por ecuaciones paramétricas a las

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 3\mu + 2\nu \\ y = 2 + 3\lambda - \mu + \nu \\ z = -1 - \lambda + \nu \\ u = \lambda - 5\mu - 2\nu \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Un punto $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ será de la subvariedad afín si y sólo si el sistema de ecuaciones lineales (de incógnitas λ, μ, ν) tiene solución:

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu + 2\nu = x - 1 \\ 3\lambda - \mu \quad + \nu = y - 2 \\ -\lambda \qquad + \nu = z + 1 \\ \lambda - 5\mu - 2\nu = u \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x-1 \\ 3 & -1 & 1 & y-2 \\ -1 & 0 & 1 & z+1 \\ 1 & -5 & -2 & u \end{pmatrix}$$

y su rango es $\operatorname{rang} A = 3$ porque el menor de orden 3 formado por las tres primeras filas es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 .$$

Por tanto, el punto $(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4$ será de la subvariedad afín si y sólo si el rango de la matriz ampliada es también 3, lo que equivale, por tratarse de una matriz cuadrada de orden 4, a que su determinante sea nulo, es decir, a que sea

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & x-1 \\ 3 & -1 & 1 & y-2 \\ -1 & 0 & 1 & z+1 \\ 1 & -5 & -2 & u \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -21(x-1)+12(y-2)-15u=0 \quad \Leftrightarrow \quad 7x-4y+5u=15$$

La última es una ecuación implícita de la subvariedad afín.