6. Fibonacci supuso que cada pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes, y que cada pareja nacida sólo era fértil a partir del segundo mes. Halle el número f_n de parejas nacidas en el n-ésimo mes.

Este problema figura resuelto en la página 193 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Llamemos $a_n =$ "Número de parejas existentes al final del mes n" = "Número de parejas existentes al comienzo del mes n" + "Número de parejas f_n nacidas el mes n". Es $a_0 = 1$, pues se parte de una pareja fértil. En el primer mes sólo nace $f_1 = 1$ pareja de la pareja inicial, luego al final del primer mes hay $a_1 = 2$ parejas, de las cuales solo la inicial es fértil y dará una pareja nueva el mes siguiente. Al final del segundo mes hay 3 parejas de conejos, la inicial y las nacidas en los meses 1 y 2 de la pareja de partida. Dos de ellas darán 2 parejas nuevas en el tercer mes, pues la pareja nacida el primer mes, ya será fértil en el tercero. El cuadro siguiente resume la situación en los primeros meses:

	1º mes	2º mes	3º mes	4º mes	5º mes
Nº parejas al inicio del mes n	1	2	3	5	8
Nº de parejas f_n nacidas en el mes n	1	1	2	3	5
Nº parejas a_n al final del mes n	2	3	5	8	13
Nº de parejas fértiles el mes n+1	1	2	3	5	8

Como se puede ver en el cuadro, se cumple que las parejas nacidas en un mes n coinciden con las parejas existentes al final del mes n-2, por tanto:

$$f_n = a_{n-2}$$

Por otro lado, como las parejas que hay al final de un determinado mes coinciden con las que había al final del mes anterior más las nacidas ese mes, es:

$$a_{n-2} = a_{n-3} + f_{n-2} \Rightarrow f_n = a_{n-3} + f_{n-2}$$

Y por último, de nuevo, como las parejas nacidas en un determinado mes n coinciden con las parejas existentes al final del mes n-2, es:

$$f_n = a_{n-3} + f_{n-2} \underset{a_{n-3}=f_{n-1}}{=} f_{n-1} + f_{n-2}$$

Se tiene pues la ecuación recurrente:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para n>2, siendo } f_1 = f_2 = 1.$$

La ecuación característica de la recurrencia es

$$x^2 = x + 1$$

Las soluciones de dicha ecuación son $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, reales y simples, por lo que será

$$f_n = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

para ciertos $a,b\in\mathbb{R}$.

Haciendo ahora uso de las condiciones iniciales se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, a y b:

$$\left.\begin{array}{l} f_1=1=a\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+b\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ f_2=1=a\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+b\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2=a\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)+b\cdot\left(1-\sqrt{5}\right) \\ 4=a\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)^2+b\cdot\left(1-\sqrt{5}\right)^2 \end{array}\right\}\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{5}},\ b=\frac{-1}{\sqrt{5}}$$

y por tanto el número de parejas nacidas durante el mes n es:

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$