C2

Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas

1. El álgebra de las sucesiones de números reales

Es bien sabido que una *sucesión* de números reales es una aplicación $f:\mathbb{N}^{+}\to\mathbb{R}$ que a cada número natural positivo n le asocia cierto número real $x_n=f(n)$. Dicha sucesión se escribe $(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ o, abreviadamente, (x_n) y se dice que x_n es su *término n-ésimo.*

1.1. El álgebra de las sucesiones de números reales: Al conjunto de todas las sucesiones de números reales se le representa por $\mathbb{R}^{\infty}$. Las operaciones habituales de suma de funciones reales, multiplicación de una función real por un escalar de $\mathbb{R}$ y multiplicación de funciones reales se escriben, en la notación habitual de sucesiones, como:

$$(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n),\qquad \lambda(x_n)=(\lambda x_n),\qquad (x_n)(y_n)=(x_ny_n)$$

para $(x_n),(y_n)\in\mathbb{R}^{\infty}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. Las dos primeras hacen de $\mathbb{R}^{\infty}$ *un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *de los números reales* (de tipo no finito). La primera y la tercera confieren a $\mathbb{R}^{\infty}$ estructura de *anillo unitario, conmutativo y con divisores de cero* y, como además, se cumple que $\lambda[(x_n)(y_n)]=[\lambda(x_n)](y_n)=(x_n)[\lambda(y_n)]$ para cualesquiera $\lambda\in\mathbb{R}$ y $(x_n),(y_n)\in\mathbb{R}^{\infty}$, resulta que $\mathbb{R}^{\infty}$ es un *álgebra* .

2. Progresiones aritméticas ordinarias

Una sucesión (x_n) de números reales se da en *forma recurrente* cuando se conocen sus k primeros términos $x_1,x_2,\ldots,x_k\in\mathbb{R}$ y los siguientes se dan mediante

$$x_n=\varphi(x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_{n-k}),$$

para alguna aplicación $\varphi:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$. Entre las sucesiones recurrentes, las más sencillas son las progresiones aritméticas.

2.1. Progresiones aritméticas: Se dice que una sucesión (x_n) de números reales es una *progresión aritmética* si cada término a partir del segundo se obtiene sumándole al anterior un número real fijo d, llamado *diferencia* de la progresión. Es decir, (x_n) es progresión aritmética si existe un número real d tal que, para cada número natural $n \geq 2$, ocurre que

$$x_n = x_{n-1} + d\,.$$

2.2. Propiedades de las progresiones aritméticas

1. Una progresión aritmética queda completamente determinada si se conoce un término cualquiera x_k y la diferencia d. En concreto, $x_n = x_k + (n-k)\,d$, para cualquier natural positivo n.

2. Una sucesión de números reales (x_n) es una progresión aritmética si y sólo si el término n-ésimo de la sucesión es de la forma $x_n = a + b\,n$, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Si varios números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están en progresión aritmética, la suma de cualesquiera dos términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de éstos, es decir, $x_k + x_{n-k+1} = x_1 + x_n$ para todo número natural $k \leq n$.

5. La suma $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ de n términos consecutivos de una progresión aritmética se obtiene abreviadamente como la semisuma de los extremos por el número de términos que se suman, esto es,

$$s_n = \frac{n \cdot (x_1 + x_n)}{2}$$

2.3. Ejemplo: Calcule las sumas

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$

b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$

SOLUCIÓN: Se trata calcular la suma de n términos consecutivos de dos progresiones aritméticas con diferencias respectivas 1 y 2. Según 2.2.5, dichas sumas son

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}, \qquad 1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n\cdot(1+2n-1)}{2}=n^2$$

2.4. Ejemplo: Los coeficientes c_n, c_{n+1} y c_{n+2} de los términos que ocupan los lugares n, $n+1$ y $n+2$ en el desarrollo de $(a+b)^{14}$ están en progresión aritmética. Calcule n sabiendo que es menor que 7.

Este problema figura resuelto en la página 411 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Según la fórmula del binomio de Newton, es

$$(a+b)^{14}=\sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}a^k b^{14-k}$$

El coeficiente del término k-ésimo del desarrollo anterior es

$$c_k=\binom{14}{k-1}$$

Dado que c_n, c_{n+1} y c_{n+2} están en progresión aritmética, será $c_{n+1}-c_n=c_{n+2}-c_{n+1}$, es decir,

$$\binom{14}{n}-\binom{14}{n-1}=\binom{14}{n+1}-\binom{14}{n}$$

o bien,

$$\frac{14!}{n!(14-n)!}-\frac{14!}{(n-1)!(15-n)!}=\frac{14!}{(n+1)!(13-n)!}-\frac{14!}{n!(14-n)!}$$

Multiplicando la igualdad anterior por $\frac{(n+1)!(15-n)!}{14!}$ se obtiene:

$$(n+1)(15-n)-n(n+1)=(15-n)(14-n)-(n+1)(15-n) \quad \Leftrightarrow \quad n^2-14n+45=0$$

cuyas soluciones son $n=5$ y $n=9$, de las cuales sólo $n=5$ es menor que 7.

3. Diferencias finitas de una sucesión

3.1. Diferencias finitas: Dada una sucesión (x_n) de números reales, se llama sucesión de las *diferencias primeras* de (x_n) a la sucesión (Δx_n) dada por

$$\Delta x_n = x_{n+1}-x_n\,.$$

A la sucesión $(\Delta^2 x_n)$ de las diferencias primeras de (Δx_n) se le llama sucesión de las *diferencias segundas* de (x_n). Si $k\geq 2$, la sucesión $(\Delta^k x_n)$ de las *diferencias k-ésimas* de (x_n) es la sucesión de las diferencias primeras de $(\Delta^{k-1}x_n)$, esto es, la definida por

$$\Delta^k x_n = \Delta^{k-1}x_{n+1}-\Delta^{k-1}x_n\,.$$

3.2. Ejemplo: Determine la sucesión de las diferencias k-ésimas de la sucesión (x_n) dada por $x_n = 3^{n-1}$

Este problema es parte del que figura resuelto en la página 93 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones.

SOLUCIÓN: Para $k=1$ y $k=2$ se tiene que

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^{n-1} = 2\left(3^n - 3^{n-1}\right) = 2^2 \cdot 3^{n-1}$$

Razonando mediante inducción, si suponemos que $\Delta^k x_n = 2^k \cdot 3^{n-1}$ para algún $k \geq 1$, entonces

$$\Delta^{k+1} x_n = \Delta^k x_{n+1} - \Delta^k x_n = 2^k \cdot 3^n - 2^k \cdot 3^{n-1} = 2^k\left(3^n - 3^{n-1}\right) = 2^{k+1} \cdot 3^{n-1}$$

Por tanto, para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}^+$ es

$$\Delta^k x_n = 2^k \cdot 3^{n-1}$$

3.2. Fórmulas de Newton: *Sea (x_n) una sucesión cualquiera de números reales y sea $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ la suma de sus n primeros términos, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$x_n = \binom{n-1}{0} x_1 + \binom{n-1}{1} \Delta x_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 x_1 + \cdots + \binom{n-1}{n-1} \Delta^{n-1} x_1, \qquad s_n = \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} \Delta x_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 x_1 + \cdots + \binom{n}{n} \Delta^{n-1} x_1$$

4. Progresiones aritméticas de orden superior

Las fórmulas anteriores son de suma utilidad práctica cuando se aplican a sucesiones cuyas diferencias de cierto orden p son constantes (lo que supone que las de orden mayor que p son nulas). A este tipo de sucesiones se las llama *progresiones aritméticas de orden p* y generalizan a las progresiones aritméticas ordinarias.

4.1. Progresiones aritméticas de orden p: Una sucesión $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ es una *progresión aritmética de orden* $p \in \mathbb{N}$ si la sucesión $(\Delta^p x_n)$ de sus diferencias de orden p es constante y no nula.

El teorema siguiente caracteriza a las progresiones aritméticas de orden p como las sucesiones cuyo término n-ésimo es un polinomio de grado p en la indeterminada n.

4.2. Caracterización de las progresiones aritméticas de orden p: *Una sucesión* (x_n) *de números reales es una progresión aritmética de orden* $p \in \mathbb{N}$ *si y sólo si existen ciertos* $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$, *con* $a_p \neq 0$, *tales que para cada* $n \in \mathbb{N}^+$:

$$x_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0$$

4.3. Ejemplo: Los términos de la sucesión

$$(x_n) = (2, 1, 2, 5, 10, 17, \ldots)$$

forman una progresión aritmética de orden mayor que 1. Halle su término n-ésimo y obtenga la suma de sus n primeros términos.

SOLUCIÓN: Calculamos las diferencias finitas de los primeros órdenes de la sucesión.

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
x_i & \mathbf{2} & & 1 & & 2 & & 5 & & 10 & & 17 & & \ldots \\
\Delta x_i & & \mathbf{-1} & & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \ldots & \\
\Delta^2 x_i & & & \mathbf{2} & & 2 & & 2 & & 2 & & \ldots & &
\end{array}$$

La sucesión de las diferencias segundas de (x_n) es constante y no nula, por lo que, según 4.2, (x_n) es una progresión aritmética de segundo orden. Su término n-ésimo x_n y su suma parcial n-ésima $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ son, respectivamente,

$$x_n=\binom{n-1}{0}x_1+\binom{n-1}{1}\Delta x_1+\binom{n-1}{2}\Delta^2 x_1=1\cdot\mathbf{2}+(n-1)\cdot(\mathbf{-1})+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\mathbf{2}=2-(n-1)+(n-1)(n-2)=n^2-4n+5$$

$$s_n=\binom{n}{1}x_1+\binom{n}{2}\Delta x_1+\binom{n}{3}\Delta^2 x_1=n\cdot\mathbf{2}-\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot(\mathbf{-1})+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{6}\cdot\mathbf{2}=2n-\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{3}=\frac{n\cdot(2n^2-9n+19)}{6}$$

4.4. Ejemplo: Calcule la suma de los cubos de los n primeros números naturales positivos.

SOLUCIÓN: La suma a calcular, esto es,

$$1^3+2^3+\cdots+n^3,$$

es la suma s_n de los n primeros términos de la progresión aritmética de orden tres (n^3). Sus diferencias hasta el orden 3 son:

x_i	**1**	8	27	64	125	216	…
Δx_i	**7**	19	37	61	91	…	
$\Delta^2 x_i$	**12**	18	24	30	…		
$\Delta^3 x_i$	**6**	6	6	…			

luego

$$s_n=\binom{n}{1}x_1+\binom{n}{2}\Delta x_1+\binom{n}{3}\Delta^2 x_1+\binom{n}{4}\Delta^3 x_1=n\cdot\mathbf{1}+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot\mathbf{7}+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{6}\cdot\mathbf{12}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\cdot\mathbf{6}=$$

$$=n+\frac{7n\cdot(n-1)}{2}+2n\cdot(n-1)(n-2)+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Es decir,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

En 2.3 se comprobó la igualdad $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$, con lo que al sustituir en la fórmula recién obtenida para la suma de cubos se obtiene la siguiente curiosa identidad:

$$(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

5. Progresiones geométricas

5.1. Definición: Se dice que una sucesión (x_n) de números reales es una *progresión geométrica* si cada término a partir del segundo se obtiene multiplicando el anterior por un número real fijo $r \neq 0$, llamado *razón* de la progresión. Es decir, (x_n) es progresión geométrica si existe $r \in \mathbb{R}$ no nulo tal que para cada $n \geq 2$ es

$$x_n = x_{n-1} \cdot r$$

5.2. Propiedades de las progresiones geométricas

1. Una progresión geométrica queda completamente determinada en cuanto se conoce un término cualquiera x_k y la razón r. Concretamente, $x_n = x_k \cdot r^{n-k}$, para todo n.

2. Una sucesión de números reales (x_n) es una progresión geométrica si y sólo si el término n-ésimo de la sucesión es $x_n = a \cdot b^n$, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$.

3. Si varios números están en progresión geométrica, el producto de dos términos equidistantes de los extremos es igual al producto de éstos, es decir, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están en progresión geométrica, entonces $x_1 x_n = x_2 x_{n-1} = x_3 x_{n-2} = \ldots$

4. El producto $p_n = x_1 x_2 \dots x_n$ de n términos consecutivos de una progresión geométrica cumple que

$$p_n^2 = (x_1 x_n)^n$$

5. La suma $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 + x_1 r + \cdots + x_1 r^{n-1}$ de n términos consecutivos de una progresión geométrica de razón $r \neq 1$ es:

$$s_n = \frac{x_n \cdot r - x_1}{r-1} = x_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$$

Cuando es $r = 1$, los n términos coinciden, luego su suma es $s_n = n x_1$.

5.3. Ejemplo: Si a, b y c son, respectivamente, los términos p-ésimo, q-ésimo y r-ésimo de una progresión aritmética y de una progresión geométrica de números reales, demuestre que se cumple la igualdad

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1$$

Este problema figura resuelto en la página 548 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Por ser a, b y c los términos p-ésimo, q-ésimo y r-ésimo de una progresión aritmética, si d es su diferencia, serán

$$a - b = (p-q)\,d\,, \qquad b - c = (q-r)\,d\,, \qquad c - a = (r-p)\,d$$

y entonces

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = a^{(q-r)\,d} \cdot b^{(r-p)\,d} \cdot c^{(p-q)\,d} = (a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q})^d$$

Como además, a, b y c ocupan los mismos lugares de una progresión geométrica, si se llama k a la razón de la misma, serán

$$b = a \cdot k^{q-p}\,, \qquad c = a \cdot k^{r-p}$$

y por tanto,

$$a^{q-r}\cdot b^{r-p}\cdot c^{p-q}=a^{q-r}\cdot a^{r-p}\cdot k^{(q-p)(r-p)}\cdot a^{p-q}\cdot k^{(r-p)(p-q)}=a^0k^0=1\,,\qquad \text{luego}\qquad a^{b-c}\cdot b^{c-a}\cdot c^{a-b}=1^d=1$$

5.4. Ejemplo: Determine, según los valores de $x\in\mathbb{R}$, la suma

$$s_n(x)=1+e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}$$

SOLUCIÓN: Deben sumarse $n+1$ términos consecutivos de una progresión geométrica de primer término 1 y razón $r=e^x$. Como es $r=1$ si y sólo si $x=0$, debemos distinguir como sigue:

- Si $x=0$, entonces

$$s_n(0)=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n+1}=n+1$$

- Si $x\neq 0$, de la fórmula 5.2.5 se sigue que

$$s_n(x)=1+e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}=\frac{e^{nx}\cdot e^x-1}{e^x-1}=\frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1}$$

6. Progresiones aritmético-geométricas

6.1. Progresiones aritmético-geométricas: Se dice que una sucesión $(x_n)\in\mathbb{R}^\infty$ es una *progresión aritmético-geométrica* de razón $r\in\mathbb{R}$ ($r\neq 0$) si es producto de una progresión aritmética y una progresión geométrica de razón r, esto es, si su término n-ésimo es de la forma:

$$x_n=(a+bn)\cdot r^n$$

para ciertos $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $b\neq 0$.

La suma $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmético-geométrica se reduce a la suma correspondiente a una progresión geométrica si se calcula la diferencia

$$s_n - rs_n = (1-r)s_n\,.$$

6.2. Ejemplo: Determine la suma

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

SOLUCIÓN: Se trata de sumar n términos de una progresión aritmético-geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Calculamos para ello

$$s_n - \frac{1}{2}s_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{3}{2^3} - \frac{2}{2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{2^n} - \frac{n-1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{2^{n+1}}$$

Los primeros n términos del último miembro forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$, luego

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

y por tanto

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$$

6.3. Progresiones aritmético-geométricas de orden superior: Se dice que una sucesión $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ es una *progresión aritmético-geométrica de orden* $k \in \mathbb{N}$ y razón $r \in \mathbb{R}$ $(r \neq 0)$ si es producto de una progresión aritmética de orden k y una progresión geométrica de razón r, esto es, si su término n-ésimo es de la forma:

$$x_n = (a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k) \cdot r^n$$

donde $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ y $a_k \neq 0$. Para determinar la suma s_n de los n primeros términos de una progresión aritmético-geométrica de orden k, repárese en que la diferencia $s_n - rs_n = (1-r)s_n$ es, salvo quizás un par de términos, una suma de términos consecutivos de una progresión aritmético-geométrica de orden $k-1$. Reiterando este proceso k veces, la suma a calcular se reduce a la obtención de una suma de términos consecutivos de una progresión geométrica, que es inmediata.

No obstante, resulta a menudo más cómodo reducir la suma a calcular escribiéndola como una suma de derivadas, esto es, como la derivada de una suma de términos consecutivos de una progresión geométrica. Es lo que se hace en el ejemplo que sigue:

6.4. Ejemplo: Determine la suma

$$s_n(x) = 1 + 3x + 7x^2 + 13x^3 + \cdots + (n^2 - n + 1)\, x^{n-1}$$

donde $x \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN: La suma a calcular se escribe abreviadamente

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k + 1)\, x^{k-1}$$

Dado que el coeficiente de la potencia x^{k-1} es k^2-k+1, para expresar el término $k-$ésimo de la suma anterior como una derivada descomponemos su coeficiente k^2-k+1 en una suma de la forma $a\,(k+1)\,k+b\,k+c$ como sigue:

$$k^2-k+1=(k+1)\,k-2k+1$$

Es así que

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)\,x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(k+1)\,kx^{k-1}-2\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{d^2}{dx^2}(x^{k+1})-2\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx}(x^k)+\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=$$

$$=\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=1}^{n}x^{k+1}\right)-2\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n}x^{k}\right)+\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}$$

Para calcular las sumas de los dos paréntesis anteriores debemos distinguir sobre los valores de x:

- Si $x=1$, entonces

$$s_n(1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)$$

  La sucesión $(a_k)=(k^2-k+1)$ es una progresión aritmética de orden 2 y sus diferencias primera y segunda son

a_i	**1**	3	7	13	21	31	…
Δa_i		**2**	4	6	8	10	…
$\Delta^2 a_i$			**2**	2	2	2	…

  luego

$$s_n(1)=\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}\Delta\, a_1+\binom{n}{3}\Delta^2 a_1=n+n\cdot(n-1)+\frac{n\cdot(n-1)\,(n-2)}{3}=\frac{n\cdot(n^2+2)}{3}$$

- Si $x\neq 1$, según la fórmula que da la suma de unos cuantos términos consecutivos de una progresión geométrica, será:

$$s_n(x)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^{n+2}-x^2}{x-1}\right)-2\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)+\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{(n^2-n+1)\cdot x^{n+2}-2n^2\cdot x^{n+1}+(n^2+n+1)\cdot x^n-x^2-1}{(x-1)^3}$$

7. Recurrencias lineales de primer orden con coeficientes constantes

7.1. Ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes: Se llaman así a las ecuaciones recurrentes del tipo

$$x_n=a x_{n-1}+b$$

para cada $n\in\mathbb{N}$, donde $a,b\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$. Obsérvese que cuando $a=1$, se trata de una progresión aritmética ordinaria de diferencia b, mientras que si es $b=0$ se trata de una progresión geométrica de razón a.

Para obtener el término n-ésimo x_n de este tipo de sucesiones escribimos la ecuación recurrente para los valores $n,n-1,\dots,2$:

$$\begin{cases} x_n=a x_{n-1}+b\\ x_{n-1}=a x_{n-2}+b\\ x_{n-2}=a x_{n-3}+b\\ \quad\cdots\cdots\\ x_3=a x_2+b\\ x_2=a x_1+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_n=a x_{n-1}+b\\ a x_{n-1}=a^2x_{n-2}+a b\\ a^2x_{n-2}=a^3x_{n-3}+a^2b\\ \quad\cdots\cdots\\ a^{n-3}x_3=a^{n-2}x_2+a^{n-3}b\\ a^{n-2}x_2=a^{n-1}x_1+a^{n-2}b\end{cases}$$

Al sumar miembro a miembro las igualdades de la derecha, se deduce que:

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b\,(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-2})$$

Para el cálculo de la suma del paréntesis debe distinguirse como sigue:

- Si $a = 1$, resulta

  $$x_n = x_1 + b\,(n-1)$$

  que es la fórmula clásica del término general de una progresión aritmética de diferencia b (la recurrencia es, en este caso, $x_n - x_{n-1} = b$).

- Si $a \neq 1$, se deduce

  $$x_n = a^{n-1}x_1 + b\,\frac{a^{n-1}-1}{a-1} = \left(x_1 + \frac{b}{a-1}\right)\cdot a^{n-1} - \frac{b}{a-1} \tag{1}$$

Es consejo de quien escribe que el lector, en lugar de memorizar la fórmula anterior, recuerde el procedimiento descrito para obtenerla.

7.2. Ejemplo: Determine el término n-ésimo de la sucesión (x_n) de números reales definida recurrentemente a partir de $x_1 = 2$ mediante

$$x_n = 5x_{n-1} + 3$$

Este problema figura resuelto en la página 253 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Razonando como en 7.1, pero considerando que aquí son $a = 5$ y $b = 3$, según la fórmula (1) se obtiene:

$$x_n = \left(2 + \frac{3}{4}\right)\cdot 5^{n-1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\,(11\cdot 5^{n-1} - 3)$$

8. Sucesiones homográficas

8.1. Sucesiones homográficas: Se dice que una sucesión (x_n) de números reales es *homográfica* si existen $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, tales que para cada $n \geq 2$,

$$x_n = \frac{ax_{n-1} + b}{cx_{n-1} + d}$$

La ecuación asociada a la recurrencia homográfica se obtiene haciendo $x_n = x_{n-1} = x$, en la recurrencia anterior y es

$$x = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad \text{o la equivalente,} \qquad cx^2 + (d - a)\,x - b = 0 \tag{2}$$

Entonces:

i) Si la ecuación (2) tiene dos soluciones distintas $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (caso de no ser reales, será una conjugada de la otra), existe $r \in \mathbb{C}$ (que será real si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) tal que si $n > 1$:

$$\frac{x_n - \beta}{x_n - \alpha} = r\,\frac{x_{n-1} - \beta}{x_{n-1} - \alpha}$$

La igualdad anterior evidencia que la sucesión $\left(\frac{x_n - \beta}{x_n - \alpha}\right)$ es una progresión geométrica de razón r, luego:

$$\frac{x_n - \beta}{x_n - \alpha} = r^{n-1} \cdot \frac{x_1 - \beta}{x_1 - \alpha}$$

y de esta igualdad se deduce inmediatamente la expresión explícita del término general x_n de la sucesión homográfica.

ii) Si la ecuación (2) tiene una única solución doble $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que para $n > 1$ es

$$\frac{1}{x_n - \alpha} = \frac{1}{x_{n-1} - \alpha} + k\,,$$

Es decir, $\left(\frac{1}{x_n - \alpha}\right)$ es una progresión aritmética con diferencia k, por lo que su término general cumple:

$$\frac{1}{x_n - \alpha} = \frac{1}{x_1 - \alpha} + k(n-1), \qquad \text{para todo } n \geq 1$$

A partir de esta igualdad se obtiene sin dificultad el término general x_n.

8.2. Ejemplo: Halle el término general de la sucesión (u_n) definida recurrentemente a partir de $u_1 = 4$ para cada $n \geq 2$ mediante

$$u_n = \frac{-17u_{n-1} + 24}{4u_{n-1} - 13}$$

SOLUCIÓN: Se trata de una sucesión homográfica cuya ecuación asociada es

$$x = \frac{-17x + 24}{4x - 13} \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 13x = -17x + 24 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

Sus soluciones son $\alpha = -3$ y $\beta = 2$, distintas, por lo que la sucesión $\left(\frac{u_n - 2}{u_n + 3}\right)$ es una progresión geométrica, así que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{u_n - 2}{u_n + 3} = r^{n-1} \cdot \frac{u_1 - 2}{u_1 + 3} \tag{3}$$

Determinamos r a partir del conocimiento de $u_1 = 4$ y $u_2 = \frac{-17\cdot 4+24}{4\cdot 4-13} = -\frac{44}{3}$. Al hacer $n = 2$ en (3) y sustituir estos valores en dicha igualdad se tiene:

$$\frac{-\frac{44}{3} - 2}{-\frac{44}{3} + 3} = r \cdot \frac{4-2}{4+3} \qquad \Rightarrow \qquad r = 5$$

Sustituyendo de nuevo en (3) se deduce que para cada $n \geq 2$

$$\frac{u_n - 2}{u_n + 3} = \frac{2}{7} \cdot 5^{n-1}$$

Despejando u_n de la ecuación anterior, se tiene:

$$u_n = \frac{6 \cdot 5^{n-1} + 14}{7 - 2 \cdot 5^{n-1}}$$

8.3. Ejemplo: Determine la expresión del término general de la sucesión (v_n) definida recurrentemente a partir de $v_1 = 3$ para cada $n \geq 2$ mediante

$$v_n = \frac{5v_{n-1} - 4}{v_{n-1} + 1}$$

SOLUCIÓN: La sucesión (v_n) es homográfica y su ecuación asociada es

$$x = \frac{5x-4}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 0$$

Su solución es $\alpha = 2$ (doble), por lo que la sucesión $\left(\frac{1}{v_n - 2}\right)$ es una progresión aritmética, es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \geq 1$ es

$$\frac{1}{v_n-2}=\frac{1}{v_1-2}+k(n-1) \tag{4}$$

Como son $v_1=3$ y $v_2=\frac{5\cdot 3-4}{3+1}=\frac{11}{4}$, haciendo $n=2$ en (4) y sustituyendo estos valores en dicha igualdad se tiene:

$$\frac{1}{\frac{11}{4}-2}=\frac{1}{3-2}+k \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{3}=1+k \quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{3}$$

Sustituyendo de nuevo en (4) se deduce que para cada $n\geq 2$

$$\frac{1}{v_n-2}=1+\frac{1}{3}(n-1)$$

Despejando v_n de la ecuación anterior, se tiene:

$$v_n=\frac{2n+7}{n+2}$$

8.4. Ejemplo: Halle la expresión del término general de la sucesión (w_n) definida recurrentemente a partir de $w_1=2$ para cada $n\geq 2$ mediante

$$w_n=\frac{w_{n-1}-1}{w_{n-1}+1}$$

SOLUCIÓN: Se trata de una sucesión homográfica cuya ecuación asociada es

$$x=\frac{x-1}{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x=x-1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+1=0$$

Sus soluciones son $\alpha = i$ y $\beta = -i$, distintas, por lo que la sucesión $\left(\frac{w_n+i}{w_n-i}\right)$ es una progresión geométrica, así que existe $r \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\frac{w_n + i}{w_n - i} = r^{n-1} \cdot \frac{w_1 + i}{w_1 - i} \quad \Rightarrow \quad \frac{w_n + i}{w_n - i} = r^{n-1} \cdot \frac{2+i}{2-i} \quad \Rightarrow \quad \frac{w_n + i}{w_n - i} = r^{n-1} \cdot \frac{3+4i}{5} \tag{5}$$

Determinamos r a partir del conocimiento de $w_1 = 2$ y $w_2 = \frac{1}{3}$. Al hacer $n = 2$ en (5) se tiene:

$$\frac{\frac{1}{3} + i}{\frac{1}{3} - i} = r \cdot \frac{3+4i}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4+3i}{5} = r \cdot \frac{3+4i}{5} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{-4+3i}{3+4i} = i$$

Sustituyendo de nuevo en (5) se deduce que para cada $n \geq 2$

$$\frac{w_n + i}{w_n - i} = i^{n-1} \cdot \frac{3+4i}{5}$$

Despejando w_n de la ecuación anterior, se tiene:

$$w_n = i \cdot \frac{(3+4i) \cdot i^{n-1} + 5}{(3+4i) \cdot i^{n-1} - 5}$$

Como son $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$, deducimos que la sucesión (w_n) es la definida mediante:

$$w_{4n} = i \cdot \frac{(3+4i) \cdot (-i) + 5}{(3+4i) \cdot (-i) - 5} = -3\,, \qquad w_{4n+1} = i \cdot \frac{(3+4i) + 5}{(3+4i) - 5} = 2\,, \qquad w_{4n+2} = i \cdot \frac{(3+4i) \cdot i + 5}{(3+4i) \cdot i - 5} = \frac{1}{3}\,, \qquad w_{4n+3} = i \cdot \frac{(3+4i)(-1) + 5}{(3+4i)(-1) - 5} = -\frac{1}{2}$$

9. Ecuaciones recurrentes lineales con coeficientes constantes

9.1. Ecuaciones lineales, con coeficientes constantes y homogéneas de orden *k*: Se llaman así a las ecuaciones recurrentes

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \cdots + a_kx_{n-k} = 0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ son conocidos. Una *solución* de dicha ecuación es cualquier sucesión (x_n) de números reales que cumpla la ecuación recurrente anterior para todo $n > k$.

9.2. Solución general de la ecuación lineal y homogénea de orden *k*: *Dada la ecuación recurrente lineal, homogénea y con coeficientes constantes:*

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \cdots + a_kx_{n-k} = 0 \tag{6}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *y* $a_0, a_k \neq 0$, *sus soluciones* (x_n) *forman un subespacio* S *de dimensión* k *del espacio vectorial* $\mathbb{R}^\infty$ *de las sucesiones de números reales. Una base de* S *se obtiene a partir de las soluciones de la ecuación característica de la recurrencia:*

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_k = 0 \tag{7}$$

como sigue:

- *Si* $r \in \mathbb{R}$ *es solución de la ecuación característica* (7) *con multiplicidad* p $(p = 1, \ldots, k)$, *se incluyen en la base las* p *sucesiones:*

$$(r^n), (nr^n), \ldots, (n^{p-1}r^n)$$

- *Si* $\rho(\cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, *donde* $\rho,\theta\in\mathbb{R}$, *es solución de la ecuación característica* (7) *con multiplicidad* p, *se incorporan a la base las* $2p$ *sucesiones:*

$$(\rho^n\cos n\theta),(n\rho^n\cos n\theta),\ldots,(n^{p-1}\rho^n\cos n\theta),\ (\rho^n\,\mathrm{sen}\,n\theta),(n\rho^n\,\mathrm{sen}\,n\theta),\ldots,(n^{p-1}\rho^n\,\mathrm{sen}\,n\theta)\ \blacksquare$$

Una vez obtenida la base anterior de S, cualquier sucesión (x_n) de S se expresa de forma única como combinación lineal de las k sucesiones de dicha base y se habrá obtenido así la *solución general de la ecuación homogénea* (6). Los k coeficientes de dicha combinación lineal podrán determinarse si se conocen k términos $x_1,x_2,\ldots,x_k$ de la sucesión. Se habrá expresado así x_n en función únicamente de n.

9.3. Ejemplo: Obtenga el término general de la sucesión (x_n) definida recurrentemente a partir de $x_1=5$ y $x_2=2$ mediante

$$6x_n-5x_{n-1}+x_{n-2}=0$$

SOLUCIÓN: Es una recurrencia lineal, con coeficientes constantes y de segundo orden. Su ecuación característica es $6x^2-5x+1=0$ cuyas soluciones son $x=\frac{1}{2}$ y $x=\frac{1}{3}$ (reales y distintas). Existen por tanto $a,b\in\mathbb{R}$ tales que para cada $n\in\mathbb{N}$

$$x_n=a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+b\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Como son $x_1=5$, $x_2=2$, se obtiene el sistema $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=5$, $\frac{a}{4}+\frac{b}{9}=2$, cuya solución es $a=4$, $b=9$, así que para cada $n\in\mathbb{N}^+$ será

$$x_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

9.4. Ejemplo: Determine el término general de la sucesión definida recurrentemente a partir de $x_1 = -1$ y $x_2 = -\frac{1}{9}$ mediante

$$9\,x_n = 6\,x_{n-1} - x_{n-2}$$

SOLUCIÓN: La ecuación característica de la recurrencia lineal y homogénea de segundo orden es $9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2 = 0$, cuya única solución es $x = \frac{1}{3}$ (doble). Existen por tanto $a, b \in \mathbb{R}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + bn \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = (a+bn) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Como son $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{9}$, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \frac{a+b}{3} = -1 \\ \frac{a+2b}{9} = -\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -3 \\ a+2b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 2 \end{cases}$$

Por tanto,

$$x_n = (2n-5) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2n-5}{3^n}$$

9.5. Ejemplo: Halle el término general de la sucesión (x_n) definida recurrentemente a partir de $x_1 = 5$ y $x_2 = 2$ mediante

$$x_n = 2x_{n-1} - 4\,x_{n-2}\,.$$

SOLUCIÓN: La recurrencia es lineal, homogénea, con coeficientes constantes y de segundo orden. Su ecuación característica es $x^2 = 2x - 4$, cuyas soluciones son $x = 1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm\pi i/3}$. Por tanto, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$x_n = a\cdot 2^n\cdot\cos\frac{n\pi}{3} + b\cdot 2^n\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} = 2^n\cdot\left(a\cdot\cos\frac{n\pi}{3} + b\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right)$$

Dado que son $x_1 = 5$ y $x_2 = 2$, al hacer $n = 1$ y $n = 2$ en la fórmula anterior, se deduce el sistema

$$\begin{cases} a + b\sqrt{3} = 5 \\ -2a + 2b\sqrt{3} = 2 \end{cases}$$

cuya solución es $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Se tiene así que

$$x_n = 2^n\cdot\left(2\cdot\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right)$$

9.6. Ejemplo: Determine el término general de la sucesión (x_n) tal que $x_1 = -5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 55$ y para cada $n \geq 4$:

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$$

SOLUCIÓN: Se trata de una recurrencia lineal, homogénea y de tercer orden cuya ecuación característica es $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$, reales y distintas. Existen así $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que si $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = a\cdot 1^n + b\cdot 2^n + c\cdot 3^n$$

Como son $x_1 = -5$, $x_2 = 7$ y $x_3 = 55$, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a+2b+3c=-5 \\ a+4b+9c=7 \\ a+8b+27c=55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=-6 \\ c=4 \end{cases}$$

Por tanto,

$$x_n = 4\cdot 3^n - 6\cdot 2^n - 5$$

9.7. Ejemplo: Determine el término general de la sucesión (x_n) tal que $x_0 = 1$, $x_1 = k$, $x_2 = k^2$ y para cada $n \geq 3$:

$$x_n - 3kx_{n-1} + 3k^2x_{n-2} - k^3x_{n-3} = 0 \qquad (k \in \mathbb{R})$$

SOLUCIÓN: La ecuación característica de la recurrencia lineal, homogénea y de tercer orden es $x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3 = (x-k)^3 = 0$ cuya única solución es $x = k$ (triple). Existen por tanto $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = a\cdot k^n + bn\cdot k^n + cn^2\cdot k^n = (a + bn + cn^2)\cdot k^n$$

Como son $x_0 = 1$, $x_1 = k$, $x_2 = k^2$, debe resolverse el sistema:

$$a = 1, \qquad (a+b+c)k = k, \qquad (a+2b+4c)k^2 = k^2$$

Hay que distinguir:

- Si $k = 0$, entonces es $x_n = 0$ para todo $n \geq 1$.
- Si $k \neq 0$, entonces son $a = 1$, $b + c = 0$, $2b + 4c = 0$, cuya única solución es $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, por lo que $x_n = k^n$.

9.8. Ejemplo: Determine el término general de la sucesión (x_n) tal que $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -4$ y para cada $n \geq 3$:

$$x_n + 2x_{n-2} + x_{n-4} = 0$$

SOLUCIÓN: La ecuación característica de la recurrencia es $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$, es decir, $(x^2+1)^2 = 0$ cuyas soluciones son $x = i = e^{\pi i/2}$ y $x = -i = e^{-\pi i/2}$, ambas dobles. Existen por tanto $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = a\cos\frac{n\pi}{2} + bn\cos\frac{n\pi}{2} + c\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + dn\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = (a+bn)\cos\frac{n\pi}{2} + (c+dn)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

Como son $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -4$, se obtiene el sistema

$$a = 1, \quad c + d = 2, \quad -a - 2b = -3, \quad -c - 3d = -4$$

cuya única solución es $a = b = c = d = 1$. Por tanto,

$$x_n = (1+n)\cos\frac{n\pi}{2} + (1+n)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = (1+n)\left(\cos\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right).$$

9.9. Ecuaciones en diferencias lineales y completas de orden k: *Se considera la ecuación en diferencias, lineal y completa (no homogénea):*

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \cdots + a_kx_{n-k} = r_n \tag{8}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, con $a_0, a_k \neq 0$. Entonces, la solución general de la ecuación completa se obtiene sumando una solución particular de la misma y la solución general de la ecuación homogénea

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \cdots + a_kx_{n-k} = 0 \tag{9}$$ ■

El *método de los coeficientes indeterminados* que ahora se enuncia permite calcular una solución particular de la ecuación completa cuando el término independiente es de la forma $p(n)\cdot s^n$, donde p es una función polinómica y s es una constante real.

9.10. Solución particular de la ecuación en diferencias lineal y completa (Método de los coeficientes indeterminados): *Dada la ecuación en diferencias, lineal y completa*

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \cdots + a_kx_{n-k} = p(n)\cdot s^n \tag{10}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, $a_0, a_k \neq 0$, *donde* $p(n)$ *es un polinomio en* n *con coeficientes reales y* $s \in \mathbb{R}$, *se cumple que:*

- *Si* s *no es raíz de la ecuación característica de la homogénea* (9), *puede obtenerse una solución particular de la ecuación completa* (10) *de la forma* $x_n = q(n)\cdot s^n$, *donde* $q(n)$ *es un polinomio de grado menor o igual que el de* $p(n)$, *cuyos coeficientes pueden determinarse imponiendo que* (x_n) *cumpla la ecuación completa.*

- *Si* s *es raíz de orden* p *de la ecuación característica de la homogénea* (9), *puede obtenerse una solución particular de la ecuación* (10) *de la forma* $x_n = n^p\cdot q(n)\cdot s^n$, *siendo* $q(n)$ *un polinomio con las mismas características del caso anterior.*

9.11. Ejemplo: Obtenga el término general x_n de las sucesiones que cumplen la recurrencia:

$$x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 6^n$$

SOLUCIÓN: Se trata de una ecuación recurrente lineal, completa (no homogénea) y de tercer orden. Su solución general se obtiene sumando una solución particular de la misma y la solución general de la homogénea.

- *Solución general de la ecuación homogénea:* La ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$x^3+3x^2+3x+1=0\,,\qquad \text{es decir,}\qquad (x+1)^3=0\,,$$

  cuya solución es $x=-1$ (triple). La solución general de la homogénea es por tanto

$$(c_0+c_1n+c_2n^2)\cdot(-1)^n$$

- *Solución particular de la ecuación completa:* Podemos hacer $6^n=p(n)\cdot s^n$ tomando $p(n)=1$ y $s=6$. Como $s=6$ no es solución de la ecuación característica de la homogénea, existe una solución particular de la completa de la forma $x_n=q(n)\cdot 6^n$, donde $\operatorname{gr} q(n)=0$, es decir, $x_n=k\cdot 6^n$. Sustituyendo en la ecuación completa:

$$k\cdot 6^{n+3}+3k\cdot 6^{n+2}+3k\cdot 6^{n+1}+k\cdot 6^n=6^n \quad \overset{:6^n}{\Rightarrow}\quad 216k+108k+18k+k=1 \quad\Rightarrow\quad 343k=1\quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{343}$$

  La solución particular de la completa es por tanto $x_n=\frac{1}{343}\cdot 6^n$.

- *Solución general de la ecuación completa:*

$$x_n=\frac{6^n}{343}+(c_0+c_1n+c_2n^2)\cdot(-1)^n$$

9.12. Ejemplo: Obtenga el término general x_n de las sucesiones que cumplen la recurrencia

$$x_{n+3}-7x_{n+2}+16x_{n+1}-12x_n=n\cdot 2^n$$

SOLUCIÓN: Es una recurrencia lineal, completa y de tercer orden.

- *Solución general de la ecuación homogénea:* La ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0\,, \qquad \text{es decir,} \qquad (x-2)^2(x-3) = 0\,,$$

cuyas soluciones son $x = 2$ (doble) y $x = 3$ (simple). La solución general de la homogénea será por tanto de la forma

$$(c_0 + c_1 n)\cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$$

- *Solución particular de la ecuación completa:* El término independiente de la ecuación completa es $p(n)\cdot s^n = n\cdot 2^n$ y $s = 2$ es solución doble de la ecuación característica de la homogénea, luego existe una solución particular de la completa de la forma

$$x_n = n^2 \cdot q(n)\cdot 2^n\,,$$

donde $\operatorname{gr} q \le 1$, es decir, $q(n) = an + b$ y $x_n = n^2\cdot(an+b)\cdot 2^n = (an^3 + bn^2)\cdot 2^n$. Sustituyendo en la ecuación completa, resulta

$$[a(n+3)^3 + b(n+3)^2]\cdot 2^{n+3} - 7\cdot[a(n+2)^3 + b(n+2)^2]\cdot 2^{n+2} + 16\cdot[a(n+1)^3 + b(n+1)^2]\cdot 2^{n+1} - 12\cdot[an^3 + bn^2]\cdot 2^n = n\cdot 2^n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 8\cdot[a(n+3)^3 + b(n+3)^2] - 28\cdot[a(n+2)^3 + b(n+2)^2] + 32\cdot[a(n+1)^3 + b(n+1)^2] - 12\cdot[an^3 + bn^2] = n$$

Igualando los coeficientes de las potencias de n (o dando a n los valores $n = -1$, $n = -2$), se obtienen $a = -\frac{1}{24}$, $b = -\frac{1}{8}$, y una solución particular de la completa es

$$x_n = \left(-\frac{1}{24}n^3 - \frac{1}{8}n^2\right)\cdot 2^n\,.$$

- *Solución general de la ecuación completa:*

$$x_n = (c_0 + c_1 n)\cdot 2^n + c_2\cdot 3^n + \left(-\frac{1}{24}n^3 - \frac{1}{8}n^2\right)\cdot 2^n = \left(c_0 + c_1 n - \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{24}n^3\right)\cdot 2^n + c_2\cdot 3^n \ \blacksquare$$

En el caso de que el término independiente de la ecuación en diferencias completa sea combinación lineal de sucesiones del tipo $p(n)\cdot s^n$, basta obtener una solución particular de cada una de ellas. Aplicándoles la misma combinación lineal se obtendrá una solución particular de la completa.

9.13. Ejemplo: Obtenga el término general x_n de las sucesiones que cumplen la recurrencia

$$x_{n+3} - x_{n+2} - 4\,x_{n+1} + 4\,x_n = 1 + n + 2^n$$

SOLUCIÓN:

- *Solución general de la ecuación homogénea:* La ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x-1) - 4(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-4)(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-2)(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2,\ x=1,\ x=2$$

  Las tres raíces son reales y simples, luego la solución general de la homogénea será de la forma

$$c_0 + c_1\cdot 2^n + c_2\cdot(-2)^n$$

- *Solución particular de la ecuación completa* $L[x_n] = 1 + n$: Podemos hacer $p(n)\cdot s^n = 1+n$ tomando $p(n) = 1+n$ y $s=1$, que es raíz simple de la ecuación característica de la homogénea. Existe por tanto una solución particular de la completa de la forma

$$x_n = n \cdot (a + bn) \cdot 1^n = an + bn^2 ,$$

Sustituyendo en la ecuación completa, resulta

$$a(n+3) + b(n+3)^2 - a(n+2) - b(n+2)^2 - 4a(n+1) - 4b(n+1)^2 + 4an + 4bn^2 = 1 + n$$

Identificando coeficientes o, más rápido, dando a n los valores $n = -2$, $n = -1$, se tiene el sistema:

$$\begin{cases} -3a + 13b = -1 \\ -3a + 7b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{7}{18} \\ b = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Una solución particular de la ecuación completa $L[x_n] = 1 + n$ es por tanto

$$x_n = -\frac{7}{18} n - \frac{1}{6} n^2 .$$

- *Solución particular de la ecuación completa* $L[x_n] = 2^n$: Puede hacerse $p(n) \cdot s^n = 2^n$ tomando $p(n) = 1$ y $s = 2$, que es raíz simple de la ecuación característica de la homogénea. Existe por tanto una solución particular de la completa de la forma

$$x_n = n \cdot k \cdot 2^n = kn2^n ,$$

Sustituyendo en la ecuación completa, resulta

$$k(n+3) \cdot 2^{n+3} - k(n+2) \cdot 2^{n+2} - 4k(n+1) \cdot 2^{n+1} + 4kn \cdot 2^n = 2^n \quad \Rightarrow \quad 8k(n+3) - 4k(n+2) - 8k(n+1) + 4kn = 1$$

Identificando coeficientes o, más rápido, dando a n el valor $n=-1$, se tiene:

$$16k-4k-4k=1 \quad \Rightarrow \quad 8k=1 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{1}{8}$$

La solución particular de la ecuación completa $L[x_n]=2^n$ es por tanto

$$x_n=\frac{1}{8}n\cdot 2^n.$$

- *Solución particular de la ecuación completa* $L[x_n]=1+n+2^n$: Una solución particular de la ecuación completa del enunciado es por tanto

$$x_n=-\frac{7}{18}n-\frac{1}{6}n^2+\frac{1}{8}n\cdot 2^n$$

- *Solución general de la ecuación completa* $L[x_n]=1+n+2^n$:

$$x_n=c_0+c_1\cdot 2^n+c_2\cdot(-2)^n-\frac{7}{18}n-\frac{1}{6}n^2+\frac{1}{8}n\cdot 2^n$$