9. Hallar la relación entre las longitudes de los lados de dos polígonos regulares de n y m lados respectivamente, para que tengan igual área.

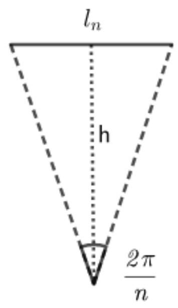
SOLUCIÓN: Vamos en busca de la razón K entre los lados de dos polígonos regulares que tienen igual área. Uno de ellos tiene n lados, llamemos l_n al lado de éste. Entonces, al lado del otro lo llamaremos l_m por tener m lados. Por tanto, debemos hallar:

$$K = \frac{l_n}{l_m}$$

La condición del enunciado nos dice que las áreas de ambos polígonos son iguales, es decir, si S_n es el área del polígono de n lados, S_m el de m lados, tenemos:

$$S_n = S_m$$

Hallemos dichas áreas. Para ello, nos centramos en uno de los n ”quesitos” (triángulos isósceles) que tiene el polígono regular de n lados. La altura h divide en dos triángulos rectángulos dicho quesito. Por tanto, se cumple que:



$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=\frac{\frac{l_n}{2}}{h} \quad \Rightarrow \quad h=\frac{l_n}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

El área de este quesito será:

$$\frac{1}{2}\cdot l_n\cdot h=\frac{1}{2}\cdot l_n\cdot\frac{l_n}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}=\frac{l_n^{\,2}}{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

Como tenemos n quesitos, el área S_n es:

$$S_n=\frac{n\,l_n^{\,2}}{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

Del mismo modo:

$$S_m=\frac{m\,l_n^{\,2}}{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{m}}$$

Igualando áreas:

$$S_n=S_m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n\,l_n^{\,2}}{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}=\frac{m\,l_m^{\,2}}{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{m}}$$

De esta última igualdad, sacamos la razón K :

$$\frac{l_n^{\,2}}{l_m^{\,2}}=\frac{m\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{m}}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{l_n}{l_m}\right)^2=\frac{m\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{m}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{K=\frac{l_n}{l_m}=\sqrt{\frac{m\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{m}}}}$$