P1. Problema 12.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 16$, con $1 \leq x_i \leq 6$?

Paso previo:

Comencemos realizando un cambio de variable para que las restricciones que tiene cada una de las incógnitas tengan como límite inferior el 0:

Sea $y_i = x_i - 1$, para $i = 1, 2, \ldots, 7$; de modo que

$$1 \leq x_i \leq 6 \iff 0 \leq y_i \leq 5$$

Al sustituir en la ecuación inicial, ésta se transforma en:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_7 = 9 \quad (1)$$

donde $0 \leq y_i \leq 5$.

Planteamiento:

Como en el problema anterior, sea $N =$*Número de soluciones enteras no negativas de la ecuación* (1).

Se tiene que

$$N = CR_{7,9} = \binom{15}{9}$$

Eliminemos las soluciones que tengan algún $y_i \geq 6$.

Planteamiento:

Como en el problema anterior, definamos $P_i = y_i \geq 6$ para $i = 1, 2, \ldots, 7$. Por tanto:

- $N(P_i) =$*Nº de soluciones enteras no negativas de (1) que verifican que* $y_i \geq 6$.
- $N(P_i, P_j) =$ *Nº de soluciones enteras no negativas de (1) que verifican que* $y_i \geq 6$ *y* $y_j \geq 6$.
- $N(P_i, P_j, P_k) =$ *Nº de soluciones enteras no negativas de (1) que verifican que* $y_i \geq 6$, $y_j \geq 6$, $y_k \geq 6$.
- $\ldots$
- $N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_7) =$ *Nº de soluciones enteras no negativas de (1) que verifican que* $0 \leq y_i \leq 5$ *, para* $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Aplicación de la fórmula de inclusión-exclusión:

Tal como antes, comencemos calculando $N(P_1)$:

- Sea $z_1 = y_1 - 6$. Se cumple que $y_1 \geq 6 \;\Leftrightarrow z_1 \geq 0$.
- Sustituyendo en la ecuación (1):

$$z_1 + 6 + y_2 + \cdots + y_7 = 9 \quad \Rightarrow \quad z_1 + y_2 + \cdots + y_7 = 3 \quad (2)$$

- El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación (2) coincide con el número de soluciones de la ecuación (1) que verifican que $y_1 \geq 6$, por tanto:

$$N(P_1) = CR_{7,3} = \binom{9}{3}$$

Igualmente se demuestra que

$$N(P_2) = N(P_3) = \cdots = N(P_7) = \binom{9}{3}$$

Solución:

Aplicando la fórmula de inclusión-exclusión:

$$N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_7) = N - \sum_{i=1}^{7} N(P_i)$$

$$= \binom{15}{9} - 7 \cdot \binom{9}{3} = 4417$$