T15. Ecuaciones diofánticas

1. La ecuación lineal con dos incógnitas

- Enunciad con precisión el teorema que da las soluciones enteras de la ecuación lineal con dos incógnitas y demostradlo.
- Comentad cómo obtener una solución particular de la ecuación lineal con dos incógnitas $ax+by=c$ a partir del Algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de a y b.
- Poned de manifiesto que la resolución de una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas es equivalente a la resolución de una congruencia lineal y reflejad que las congruencias lineales proporcionan un método alternativo para obtener las soluciones enteras de una ecuación lineal con dos incógnitas $ax+by=c$, que no requiere del cálculo de una solución particular y tampoco precisa del conocimiento de la fórmula que da su solución general. Resolved como ejemplo de esto el problema de las garrafas de vino de Euler.

15.2. La ecuación lineal con n incógnitas $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=c$

- Enunciad la condición necesaria y suficiente para que una ecuación lineal con n incógnitas tenga solución entera y comentad que la solución puede obtenerse a partir del teorema equivalente para $n=2$ razonando por inducción sobre n.

- Enunciad el resultado que permite resolver ecuaciones lineales con más de dos incógnitas cuando hay al menos dos coeficientes primos entre sí. Podéis dar la demostración que viene en el texto o podéis incluir un ejemplo como el siguiente (es el ejemplo 1.6 del documento N2)

1.6. Ejemplo: Resolvemos la ecuación lineal diofántica $2x-6y+3z+12u=5$.

SOLUCIÓN: Como es $\operatorname{mcd}(2,-6,3,12)=1$, la ecuación tiene solución. Como es $\operatorname{mcd}(2,3)=1$, si llamamos $y=r$, $u=s$, donde $r,s\in\mathbb{Z}$, debemos resolver la ecuación con dos incógnitas:

$$2x+3z=5+6r-12s \tag{1}$$

Buscamos para ello una solución particular de $2x+3z=1$. Se observa inmediatamente que el par $(-1,1)$ lo es, por lo que una solución particular de (1) es $(x_0,z_0)=(-5-6r+12s,\ 5+6r-12s)$, y cualquier solución de (1) es de la forma:

$$(x,z)=(-5-6r+12s+3t, 5+6r-12s-2t), \qquad t\in\mathbb{Z}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son las cuaternas (x,y,z,u) tales que

$$(x,y,z,u)=(-5-6r+12s+3t,\ r,\ 5+6r-12s-2t,\ s)\,, \qquad (r,s,t\in\mathbb{Z})\ \blacksquare$$

- Enunciad el segundo resultado que permite resolver ecuaciones lineales con más de dos incógnitas cuando no hay dos coeficientes primos entre sí. Podéis dar las indicaciones que se dan en el último párrafo de 15.2.3 o bien podéis incluir un ejemplo como el siguiente (es el ejemplo 1.8 del documento N2).

1.8. Ejemplo: Resolvemos la ecuación diofántica lineal $6x+10y+15z=8$.

SOLUCIÓN: Observamos que $\mathrm{mcd}(6,10,15)=1$ y no hay dos coeficientes primos entre sí. Escribimos entonces $6x+10y=8-15z$, es decir, $3x+5y=\frac{8-15z}{2}$. Como el primer miembro es entero, también lo es el segundo y, para algún $u\in\mathbb{Z}$, será $\frac{8-15z}{2}=u$, es decir,

$$2u+15z=8$$

No hay que discurrir mucho para obtener $(u_0,z_0)=(4,0)$ como solución particular de la ecuación anterior, por lo que su solución general es $u=4+15s$, $z=-2s$, con $s\in\mathbb{Z}$. Al sustituir el valor obtenido para u en $3x+5y=u$, debemos resolver la ecuación

$$3x+5y=4+15s \qquad (2)$$

Como una solución particular de la ecuación $3x+5y=1$ es, a simple vista, $(2,-1)$, deducimos que $(x_0,y_0)=(2(4+15s),-(4+15s))=(8+30s,-4-15s)$ es solución particular de (2), así que cualquier solución entera de (2) es

$$(x,y)=(8+30s+5t,\ -4-15s-3t),$$

donde también $t\in\mathbb{Z}$. Se obtiene así que cualquier solución de la ecuación original es:

$$(x,y,z)=(8+30s+5t,\ -4-15s-3t,\ -2s), \qquad (s,t\in\mathbb{Z})$$

3. La ecuación $x^2-y^2=n$

- Enunciad y demostrad el teorema que da las soluciones de la ecuación $x^2-y^2=n$.
- Discutir las soluciones de la ecuación según la paridad de n como se indica en la Observación tras el teorema anterior.

4. La ecuación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$

- Poned de manifiesto que encontrar las soluciones enteras y positivas de la ecuación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ equivale a encontrar todos los triángulos rectángulos cuyos lados miden longitudes enteras y que a dichos triángulos rectángulos se les llama *triángulos pitagóricos*.

- Enunciad y demostrad el teorema fundamental que da las soluciones enteras y positivas de la ecuación pitagórica cuando $\text{mcd}(x, y, z) = 1$ (ternas primitivas pitagóricas).

- Como observaciones, dad las soluciones enteras y positivas de la ecuación pitagórica en el caso general y construid la tabla que da las longitudes de los primeros triángulos pitagóricos.

- Enunciad y demostrad el resultado según el cual el radio de la circunferencia inscrita en cualquier triángulo pitagórico es siempre un número entero.

5. La ecuación $x^n + y^n = z^n$. Último Teorema de Fermat.

- Enunciad con precisión el Teorema y escribid algo sobre la historia y reciente demostración del mismo.