C3. Sucesiones convergentes y divergentes. Cálculo de límites

1. Dado el número real $a>0$, estudie la convergencia de la sucesión definida recurrentemente a partir de $x_1=\sqrt{a}$ mediante

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Este problema figura resuelto en las páginas 548, 684 y 730 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

2. Sea $\alpha>0$. Se define por recurrencia la sucesión (x_n) mediante $x_1=\alpha$,

$$2x_{n+1}=\frac{1}{2}+x_n^2, \qquad n\in\mathbb{N}$$

Estudie la convergencia de la sucesión según los valores de α.

Este problema es el 16.8 del volumen 8 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < b < 1$. Eligiendo $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, se construye la sucesión (x_n) dada por:

$$x_n = a + b \operatorname{sen} x_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Demuestre que la sucesión (x_n) es convergente.

Este problema es el 00.45 y el 04.40 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

4. Dados los números reales x_1 e y_1 tales $0 < x_1 < y_1$, se define la recurrencia:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

a) Demuestre que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < y_n < \cdots < y_2 < y_1$.

b) Demuestre que ambas sucesiones convergen a un límite común y calcúlelo.

Este problema figura resuelto en la página 523 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

5. Calcule los siguientes límites:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt{n^2+1}-n)}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+h}-\sqrt[4]{n+k}}{\sqrt[3]{n+h}-\sqrt[3]{n+k}}\cdot \sqrt[12]{n+j} \qquad (h\neq k)$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\frac{\pi n}{2n+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}$$

Los apartados b) y c) de este problema figuran resueltos en las páginas 40 y 414 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos

6. Calcule los límites siguientes:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,\mathrm{L}\,\frac{4}{2}+3\,\mathrm{L}\,\frac{5}{3}+\cdots+n\,\mathrm{L}\,\frac{n+2}{n}}{n}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(2+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)$$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}\cdots\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{b}}\right)}{\operatorname{sen}1+\operatorname{sen}\frac{1}{2}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$ $\qquad (a,b>0)$

El apartado b) es el problema 04.44 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos. El apartado c) figura resuelto en la página 688 del volumen 2 de la misma colección.

7. Calcule los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n}}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n$ $\qquad (a_1,\ldots,a_k>0)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{sen}^4\frac{(n+1)\pi}{3n^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$ $\qquad (a,b>0)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

El apartado a) figura resuelto en la página 688 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones. El apartado c) es el problema 04.44 del volumen 4 de la misma colección.

8. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$$

Los apartados a) y b) figuran resueltos, respectivamente, en las páginas 232 y 689 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

9. Sea (h_n) la sucesión de las sumas parciales de la serie armónica, esto es, la de término n-ésimo

$$h_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Demuestre que:

a) La sucesión $(h_n-\mathrm{L}\,n)$ es convergente.

b) Existe un único $\gamma\in\mathbb{R}$ (llamado *constante de Euler*) tal que

$$h_n=\mathrm{L}\,n+\gamma+\varepsilon_n\,,$$

donde $\varepsilon_n\to 0$, y deduzca de ello que $h_n\sim\mathrm{L}\,n$ cuando $n\to\infty$.

c) Si $p\in\mathbb{N}$, $p>1$, la sucesión (a_n) es convergente y calcule su límite, donde

$$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{np}$$

Este problema es un compendio de los problemas 98.28 y 98.44 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.