5. Demuestre que la serie siguiente es convergente y calcule su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n^3 - 2n}$$

Este problema figura resuelto en la página 100 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones, de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: El denominador del término general x_n se factoriza como

$$8n^3 - 2n = 2n\,(4n^2 - 1) = 2n\,(2n-1)(2n+1)$$

Descomponiendo x_n en suma de fracciones simples, se obtiene

$$x_n = \frac{1}{2n\,(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

y su suma parcial n-ésima puede deducirse de

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1} \\ x_{n-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-3} - \dfrac{1}{2n-2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-1} \\ x_{n-2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-5} - \dfrac{1}{2n-4} + \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_2 = \dfrac{\frac{1}{2}}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{\frac{1}{2}}{5} \\ x_1 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{3} \end{cases}$$

Al sumar se obtiene:

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4n+2}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4n+2}$$

Recordando que, si se llama

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a la suma parcial n-ésima de la serie armónica, entonces son

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\, h_n$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = h_{2n} - \frac{1}{2}\, h_n$$

resulta que

$$s_n = h_{2n} - \frac{1}{2}\, h_n - \frac{1}{2}\, h_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{4n+2} = h_{2n} - h_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{4n+2} =$$

$$= \mathrm{L}\, 2n + \gamma + \varepsilon_{2n} - \mathrm{L}\, n - \gamma - \varepsilon_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{4n+2} = \mathrm{L}\, 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4n+2} + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n)$$

luego la suma de la serie es:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{L}\, 2 - \frac{1}{2}$$