2. Los números reales no nulos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los sucesivos términos de una progresión aritmética. Calcule, en función de los extremos, la suma:

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$$

Este problema figura resuelto en la página 313 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Distinguimos según la eventual nulidad de la diferencia d de la progresión aritmética:

- Si $d = 0$, entonces $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ y

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_1^2} = \frac{n-1}{a_1^2}$$

- Si $d \neq 0$, al descomponer en suma de fracciones simples cada sumando, se obtiene, para cada $k = 1, \ldots, n-1$:

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_k(a_k + d)} = \frac{A}{a_k} + \frac{B}{a_k + d} \qquad (1)$$

De aquí se deduce que $A(a_k+d)+Ba_k=1$, es decir, $(A+B)a_k+Ad=1$, y para que se cumpla esta igualdad podemos tomar $A=\frac{1}{d}$ y $B=-A=-\frac{1}{d}$, de modo que es

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_k+d}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

Entonces

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{d}\cdot\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{d}\cdot\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{d}\cdot\frac{a_n-a_1}{a_1 a_n}=\frac{1}{d}\cdot\frac{d\cdot(n-1)}{a_1 a_n}=\frac{n-1}{a_1 a_n}$$

De este modo, tanto si $d=0$ como si $d\neq 0$ ocurre que

$$S_n=\frac{n-1}{a_1 a_n}$$