P1. Problema 8.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

En un examen se propone un test de quince preguntas, numeradas del 1 al 15. Después de ser corregido, se observa que ningún alumno ha contestado bien a dos preguntas consecutivas del test. Si el número de exámenes corregidos es 1600, ¿se puede asegurar que al menos dos alumnos han contestado de igual forma?

Resuelto en Vol. 4. Ej. 96.34

Primer paso:

Vamos a determinar el número de formas de responder al examen sin acertar dos preguntas consecutivas.
Para ello vamos a definir:
N_i ="*número de formas de responder al examen acertando* i *respuestas pero nunca dos consecutivas*.
Observemos que $i = 0, 1, 2, \ldots, 8$.
De este modo, el número de formas de responder al examen sin acertar dos preguntas consecutivas será:

$$N = \sum_{i=0}^{8} N_i$$

Segundo paso:

Es evidente que

- $N_0 = 1$.
- $N_1 = 15$.

Segundo paso:

Para el cálculo de N_2 recurramos a la misma estrategia que en el problema 5.

Dado que se van a responder dos preguntas correctamente y 13 incorrectamente, entonces vamos a identificar la respuesta correcta con un 1 y la respuesta incorrecta con un 0:

- Coloquemos 13 cuadrados y 14 círculos, de modo que a la derecha y a la izquierda de cada cuadrado haya un círculo.

$$\bigcirc \square \bigcirc \square \bigcirc \square \bigcirc \cdots \bigcirc \square \bigcirc$$

- Coloquemos en cada cuadrado un cero.
- Seleccionemos 2 de los 14 círculos donde pondremos los unos.
- Una vez colocados estos unos, eliminamos el resto de los círculos y obtendremos una secuencia de unos y ceros sin unos consecutivos.

$$0\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0$$

Segundo paso:

Se tiene entonces que

$$N_2 = C_{14,2} = \binom{14}{2}$$

Este mismo argumento se puede repetir para el resto de los N_i con $i \geq 3$. Así por ejemplo, para calcular N_3 dispondríamos de 12 cuadrados y 13 círculos de los que seleccionaremos 3, de modo que

$$N_3 = C_{13,3} = \binom{13}{3}$$

En general,

$$N_i = C_{16-i,i} = \binom{16-i}{i} \quad , \; i = 0, 1, 2, 3, \ldots, 8$$

Solución:

De este modo, el número de formas de responder al examen sin acertar dos preguntas consecutivas será:

$$N = \sum_{i=0}^{8} N_i = \sum_{i=0}^{8} \binom{16-i}{i} = 1 + 15 + \binom{14}{2} + \binom{13}{3} + \cdots \binom{8}{8}$$

El valor de esta suma es $N = 1597$.
Dado que el número de exámenes corregidos es 1600, por el *Principio de Distribución*, podemos asegurar que **al menos dos alumnos han respondido de la misma forma.**