10. Dados dos números positivos a y b, como primero y segundo término de una sucesión en la que cada uno de los siguientes es la media armónica de los dos inmediatos anteriores, halle su término general.

Este problema figura resuelto en la página 459 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Se dice que un número real positivo z es la media armónica de dos números reales positivos x e y si el inverso de z es la media aritmética de los inversos de x e y. En estos términos, la sucesión (x_n) del enunciado cumple que $x_1 = a$, $x_2 = b$ y es tal que $\frac{1}{x_n}$ es la media aritmética de $\frac{1}{x_{n-1}}$ y $\frac{1}{x_{n-2}}$, es decir,

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-2}}\right)$$

Si ahora llamamos $y_n = \frac{1}{x_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}^+$, entonces para cada $n \geq 3$ es

$$y_n = \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_{n-2})$$

La ecuación anterior es una recurrencia lineal, homogénea y de segundo orden, y su ecuación característica es

$$y^2 = \frac{y+1}{2}, \qquad \text{o bien,} \qquad 2y^2 - y - 1 = 0$$

cuyas soluciones son $y=1$ e $y=-\frac{1}{2}$. Es por ello que será, para ciertos $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$:

$$y_n=\lambda\cdot 1^n+\mu\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\lambda+\mu\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Como son $y_1=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{a}$ e $y_2=\frac{1}{x_2}=\frac{1}{b}$, al hacer $n=1$ y $n=2$ en la igualdad anterior, se obtiene el sistema

$$\begin{cases}\lambda-\frac{\mu}{2}=\frac{1}{a}\\ \lambda+\frac{\mu}{4}=\frac{1}{b}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2\lambda-\mu=\frac{2}{a}\\ 4\lambda+\mu=\frac{4}{b}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=\frac{2a+b}{3a\,b},\qquad\mu=\frac{4a-4b}{3a\,b}$$

Es por ello que

$$y_n=\frac{2a+b}{3a\,b}+\frac{a-b}{3a\,b}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

y por tanto

$$x_n=\frac{1}{y_n}=\frac{1}{\dfrac{2a+b}{3a\,b}+\dfrac{a-b}{3a\,b}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}}=\frac{3a\,b\cdot 2^{n-2}}{(2a+b)\cdot 2^{n-2}+(a-b)\,(-1)^{n-2}}$$