9. Los cuatro primeros términos de la sucesión (a_n) son $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ y su ley de recurrencia es

$$a_{n+4} + a_{n+3} + 2a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 12n\,.$$

a) Calcule el término general de la sucesión en función de n.

b) Calcule el término a_{90}.

Este problema es el 00.18 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

SOLUCIÓN:

Solución general de la ecuación homogénea: La ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^4 + 2x^2 + 1) + (x^3 + x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+1)^2 + x(x^2+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+1)(x^2+x+1) = 0$$

cuyas soluciones $\cos\frac{\pi}{2} \pm i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3} \pm i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$, dan la solución general de la homogénea:

$$c_0\cos\frac{n\pi}{2} + c_1\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + c_2\cos\frac{2n\pi}{3} + c_3\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}$$

Solución particular de la ecuación completa: El término independiente de la ecuación completa, $12n$, es de la forma $p(n)\cdot s^n$, con $p(n) = 12n$ y $s = 1$. Además, $s = 1$ no es raíz de la ecuación característica de la homogénea, y por tanto puede encontrarse como solución particular un polinomio del mismo grado a lo sumo que $12n$, es decir, de grado menor o igual que uno. Sea $a+bn$ dicho polinomio. Sustituyendo en la completa:

$$a+b(n+4)+a+b(n+3)+2a+2b(n+2)+a+b(n+1)+a+bn=12n$$

es decir, $6a+12b+6bn=12n$. Identificando coeficientes resulta $a=-4,\ b=2$, y la solución particular es

$$a_n=-4+2n\,.$$

Solución general de la ecuación completa:

$$a_n=-4+2n+c_0\cos\frac{n\pi}{2}+c_1\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}+c_2\cos\frac{2n\pi}{3}+c_3\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}$$

Teniendo en cuenta que los cuatro primeros términos son nulos se determinan los c_i. Resultan de esta forma $c_0=0,\ c_1=6,\ c_2=4,\ c_3=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ y entonces:

$$a_n=-4+2n+6\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}+4\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}$$

El término que ocupa el lugar 90 en la sucesión es:

$$a_{90}=-4+180+6\operatorname{sen}45\pi+4\cos 60\pi-\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}60\pi=-4+180+4=180$$