Academia DEIMOS
Oposiciones: a) Secundaria.
b) Diplomados en
Estadística del Estado.
☎ 669 31 64 06
MADRID
www.academiadeimos.es
http://academiadeimos.blogspot.com.es
academia@academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es

Documento P1

Técnicas de recuento, combinatoria

1. Principios básicos de recuento.

1.1. Principio de multiplicación.

Sean $A_1, ..., A_n$ conjuntos finitos y no vacíos. Entonces el conjunto $A_1 \times \cdots \times A_n$ es finito y

$$\mathrm{card}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathrm{card}(A_1) \cdots \mathrm{card}(A_n).$$

Observación: $\mathrm{card}(A)$ representa el cardinal del conjunto A.

El Principio de multiplicación admite el siguiente enunciado equivalente en términos combinatorios: *Supongamos que una tarea puede ser dividida en n tareas consecutivas. Si hay i_1 formas de realizar la primera tarea, i_2 formas de realizar la segunda tarea y, así sucesivamente, i_n formas de realizar la tarea n-ésima, entonces hay $i_1 \cdots i_n$ formas de completar la tarea.*

Ejemplo 1.1 *Calculamos el número de maneras distintas en las que pueden sentarse tres chicos y tres chicas en seis butacas consecutivas de un cine de forma que no haya ni dos chicos ni dos chicas sentados en butacas consecutivas.*

- *La primera butaca puede ser ocupada por cualquiera de los 6 amigos.*

- *Elegida la primera persona, hay 3 elecciones posibles entre las personas de sexo contrario para la segunda butaca.*
- *La tercera butaca ha de ser ocupada por una de las 2 personas restantes cuyo sexo coincide con el de la primera.*
- *También hay* 2 *opciones para ocupar la cuarta butaca.*
- *Una vez ocupadas las cuatro primeras butacas, las dos personas restantes ya no tienen elección.*

Luego hay $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 72$ *ordenaciones posibles.*

1.2. Principio de adición.

Sean $A_1, ..., A_n$ conjuntos finitos, no vacíos y disjuntos dos a dos. Entonces el conjunto $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ es finito y

$$\operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \operatorname{card}(A_1) + \cdots + \operatorname{card}(A_n).$$

En términos combinatorios, el Principio de adición establece que *si la tarea k-ésima se puede realizar de* i_k *formas, para* $k = 1, \ldots, n$ *y las tareas son incompatibles dos a dos, entonces hay* $i_1 + i_2 + \cdots + i_n$ *formas de realizar alguna de las* n *tareas.*

Ejemplo 1.2 *Cada usuario de un banco tiene una clave de acceso con una longitud entre seis y ocho caracteres, cada uno de los cuales es, bien un dígito o bien una letra mayúscula de entre las 26 del abecedario. Cada clave debe contener al menos un dígito. ¿Cuántas claves distintas admite el sistema?*

Si se llama N_i*, para* $i = 6, 7, 8$*, al número de claves de longitud* i*, según el Principio de adición, el total de claves es* $N_6 + N_7 + N_8$.

- *El número de claves de 6 caracteres (dígitos o letras) que se pueden formar con los 10 dígitos y las 26 letras es* $VR_{36,6} = 36^6$ *y el número de ellas que solo tienen letras es* $VR_{26,6} = 26^6$*. Por tanto, hay tantas claves de 6 caracteres con algún dígito como* $N_6 = 36^6 - 26^6$.
- *Análogamente,* $N_7 = 36^7 - 26^7$ *y* $N_8 = 36^8 - 26^8$,

El número total de claves admisibles es

$$N_6 + N_7 + N_8 = 1333 \cdot 36^6 - 703 \cdot 26^6$$

1.3. Principio de distribución.

Si se realiza una partición de un conjunto finito de n elementos en k partes, alguna de las partes tiene, al menos, $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ objetos.

Observación: $\lceil x \rceil$ representa la función *techo*:

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ [x] + 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

El Principio de distribución se enuncia habitualmente así: *Si se colocan* n *objetos en* k *cajas, alguna de las cajas contiene al menos* $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ *elementos.*

Ejemplo 1.3 *Demostrar que si tenemos un conjunto de 14 números enteros distintos, siempre hay dos tales que su diferencia es múltiplo de 13.*

Sea $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_{14}\}$ *el conjunto formado por dichos números. Tomemos los restos de dividir cada uno de los números entre 13:* $x_i = 13q_i + r_i$ *, donde* $r_i \in \{0, 1, 2, ..., 12\}$ *, para cada* $i = 1, 2, ..., 14$ *. Definamos ahora:*

$$S_j = \{\ x_i \in C \mid r_i = j\}\ ,\ j = 0, 1, 2, ..., 12$$

El principio de distribución nos asegura que alguno de los conjuntos S_j *contiene al menos dos elementos, por tanto, existirán al menos dos números del conjunto* C *cuya diferencia será un múltiplo de 13.*

2. Variaciones, permutaciones y combinaciones

2.1. Permutaciones.

Sea A un conjunto finito y no vacío. Una *permutación* de dicho conjunto es una ordenación en fila de todos sus elementos. Si A tiene n elementos, el número de permutaciones de A se designa P_n, y es

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 := n!$$

2.2. Permutaciones con repetición.

Se llama *permutación con repetición* de n objetos, de los cuales n_1 son iguales entre sí, n_2 son iguales entre sí y distintos de los anteriores, ... , y n_k son iguales entre sí y distintos de todos los anteriores, y por tanto $n_1 + \cdots + n_k = n$, a cualquier ordenación en fila de dichos n elementos. El número de tales permutaciones distintas se escribe $PR_n^{n_1,\ldots,n_k}$, y es

$$PR_n^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}.$$

2.3. Variaciones ordinarias.

Sean A un conjunto finito con n elementos y k un entero positivo menor o igual que n. Una *variación* de orden k de A es una ordenación de k elementos distintos de A. El número de variaciones de orden k del conjunto A se designa $V_{n,k}$ y es

$$V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Se les llama también *variaciones ordinarias* de n elementos tomados de k en k.

2.4. Variaciones con repeticion.

Sean A un conjunto finito con n elementos y k un entero positivo. Una *variación con repetición* de orden k de A es una ordenación de k elementos de A, no necesariamente distintos. El número de estas variaciones se escribe $VR_{n,k}$ y es

$$VR_{n,k} = n^k.$$

Se llaman también *variaciones con repetición* de n elementos tomados de k en k.

2.5. Combinaciones ordinarias.

Sean A un conjunto finito con n elementos y $k \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq k \leq n$. Una *combinación* de orden k de A es un subconjunto formado por k elementos de A. El número de combinaciones de orden k del conjunto A se escribe $C_{n,k}$ y es

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Se les llama habitualmente *combinaciones* de n elementos tomados de k en k.

2.6. Combinaciones con repetición.

Sean A un conjunto finito con n elementos y k un entero positivo. Una *combinación con repetición* de orden k de A es una elección de k elementos de A, no necesariamente distintos. Al número de ellas se le designa $CR_{n,k}$ y es

$$CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

El número de combinaciones con repetición de orden k de un conjunto A con n elementos coincide con el número de formas de introducir k objetos (indistinguibles) en n cajas. También coincide con el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

2.7. Ejemplos.

Ejemplo 2.1 *En cierto juego de cartas se eligen al azar 10 de ellas y se gana si se obtienen 4 cartas de un palo, 3 cartas de otro palo, 2 cartas de un tercer palo distinto de los dos primeros y 1 carta del palo restante. Vamos a calcular en cuántas elecciones de 10 cartas se gana.*

Como hay 10 *cartas de cada palo en la baraja, existen $C_{10,4}$ maneras diferentes de elegir 4 cartas de bastos. Para cada una de estas maneras, hay $C_{10,3}$ formas distintas de elegir 3 cartas de copas; para cada una de las elecciones de bastos y copas hay $C_{10,2}$ formas de elegir 2 cartas de espadas y, una vez elegidas bastos, copas y espadas, sólo hay $C_{10,1}$ elecciones posibles para la carta de oros. Como los cuatro palos pueden ordenarse de P_4 formas distintas, el número total de elecciones es*

$$P_4 \cdot C_{10,4} \cdot C_{10,3} \cdot C_{10,2} \cdot C_{10,1} = \binom{10}{4}\binom{10}{3}\binom{10}{2}\binom{10}{1} = 272160000.$$

Ejemplo 2.2 *Vamos a calcular de cuántas maneras se pueden repartir* 10 *bolas idénticas en* 6 *urnas para que* 2 *urnas prefijadas queden vacías.*

La cuestión es sencilla: habrá tantas configuraciones como maneras distintas de repartir todas las bolas en $6-2=4$ urnas, es decir, el número de tales repartos será

$$CR_{4,10} = \binom{13}{10} = 286.$$

Ejemplo 2.3 *Pretendemos colocar once libros distintos en uno de los huecos de la estantería. Cuatro de ellos son de Cálculo, dos de Álgebra y cinco de Geometría. Vamos a responder a las siguientes preguntas. ¿De cuántas formas podemos colocarlos? ¿Y si queremos poner los dos más gruesos en los extremos? ¿Y si queremos que se encuentren agrupados por materias?*

Situándolos de izquierda a derecha, hay 11 elecciones posibles para el primer libro; una vez ubicado éste, hay 10 libros que podemos colocar en la segunda posición; una vez situados los dos primeros, hay 9 elecciones para el libro que ocupará la tercera posición, y así sucesivamente, por lo que hay $P_{11} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdots 2 \cdot 1 = 11! = 39916800$ *ordenaciones.*

Para la segunda parte observamos que hay dos formas de colocar los dos libros más gruesos en los extremos y, para cada una de ellas, los nueve libros restantes pueden ordenarse de P_9 *formas. Hay por tanto* $2 \cdot P_9 = 2 \cdot 9! = 725760$ *de estas ordenaciones.*

Por último, el número de formas de colocar a la izquierda los cuatro libros de Cálculo, en el centro los dos de Álgebra y a la derecha los cinco de Geometría, es $P_4 \cdot P_2 \cdot P_5 = 4! \cdot 2! \cdot 5!$ *formas. Como hay* $P_3 = 3!$ *modos de ordenar las tres materias, el número de ordenaciones con los libros agrupados por materias es*

$$P_3 \cdot P_4 \cdot P_2 \cdot P_5 = 3! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 5! = 34560.$$

3. Propiedades de los números combinatorios.

Los números combinatorios satisfacen las propiedades siguientes:

$$\boxed{(1) \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad (2) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad (3) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.}$$

Consecuencia: *Si n y k son números enteros tales que $1 \leq k \leq n$, entonces*

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Fórmula del binomio. *Sean x e y dos variables y n un número natural. Entonces,*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Consecuencias. *Sean m, n y k enteros no negativos tal que $k \leq n$. Entonces,*

- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$
- $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$
- Identidad de Vandermonde:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{k-2} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}.$$

En particular,

$$\binom{m}{0}^2 + \binom{m}{1}^2 + \binom{m}{2}^2 + \cdots + \binom{m}{m}^2 = \binom{2m}{m}.$$

Ejemplo 3.1 *Sean j y n dos números naturales tales que $j \leq n$, calculamos la suma*

$$\sum_{k=j}^{n} k(k-1)\cdots(k-j+1).$$

Para cada $k \geq j$ se tiene

$$k(k-1)\cdots(k-j+1) = \frac{k!}{(k-j)!} = j! \cdot \frac{k!}{j!(k-j)!} = j! \cdot \binom{k}{j}.$$

Por tanto, según la primera de las consecuencias de las propiedades de los números combinatorios:

$$\sum_{k=j}^{n} k(k-1)\cdots(k-j+1) = j! \cdot \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} = j! \cdot \binom{n+1}{j+1}.$$

4. Principio de Inclusión-Exclusión.

Sean $A_1, ..., A_n$ conjuntos finitos y no vacíos. Entonces el conjunto $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ es finito y se cumple la igualdad

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = & \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \operatorname{card}(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\
& + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \cdots \\
& + (-1)^{n-2} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-1} \leq n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}) \\
& + (-1)^{n-1} \operatorname{card}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).
\end{aligned}$$

Este resultado se puede enunciar de un modo alternativo: Sea S un conjunto finito y $P_1, P_2, ..., P_n$ propiedades que cada uno de los elementos de S puede o no satisfacer. Denotemos por $N(P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_k})$ al número de elementos de S que verifican las propiedades $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_k}$, por $N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n)$ al número de elementos que no verifican ninguna de las propiedades y por N al cardinal de S, entonces

$$\begin{aligned}
N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n) = \; & N - \sum_{i=1}^{n} N(P_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(P_i, P_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(P_i, P_j, P_k) - \cdots \\
& + (-1)^n N(P_1, P_2, ... P_n).
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1 *Vamos a contar cuántos enteros comprendidos entre* 1 *y* 100 *no son múltiplos ni de* 2*, ni de* 3 *ni de* 5*.*

Es más sencillo contar cuántos son múltiplos de alguno de estos tres números y después restar. Denotamos A_k *al conjuntos de enteros comprendidos entre* 1 *y* 100 *que son múltiplos de* k *para* $k = 2, 3, 5$*. Sabemos que* $\operatorname{Card}(A_k) = [100/k]$*, donde* $[\cdot]$ *denota la "parte entera". Por tanto,*

$$\operatorname{Card}(A_2) = 50, \quad \operatorname{Card}(A_3) = 33 \quad y \quad \operatorname{Card}(A_5) = 20.$$

Como $A_2 \cap A_3 = A_6$*, mientras que* $A_2 \cap A_5 = A_{10}$*,* $A_3 \cap A_5 = A_{15}$ *y* $A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$*, tenemos*

$$\operatorname{Card}(A_2 \cap A_3) = 16, \; \operatorname{Card}(A_2 \cap A_5) = 10, \; \operatorname{Card}(A_3 \cap A_5) = 6 \; y \; \operatorname{Card}(A_2 \cap A_3 \cap A_5) = 3.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card}(A_2 \cup A_3 \cup A_5) &= \operatorname{Card}(A_2) + \operatorname{Card}(A_3) + \operatorname{Card}(A_5) - \operatorname{Card}(A_2 \cap A_3) \\
&\quad - \operatorname{Card}(A_2 \cap A_5) - \operatorname{Card}(A_3 \cap A_5) + \operatorname{Card}(A_2 \cap A_3 \cap A_5) \\
&= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74,
\end{aligned}$$

por lo que el número de enteros comprendidos entre 1 *y* 100 *no son múltiplos ni de* 2*, ni de* 3 *ni de* 5 *es* $100 - 74 = 26$.

Utilizando la notación alternativa, sea P_i *la propiedad "el número es múltiplo de* i*". Entonces, dado que* $N(P_i) = \mathrm{Card}(A_i)$*:*

$$N\left(\overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_5\right) = N - N(P_2) - N(P_3) - N(P_5) + N(P_2 \cap P_3) + N(P_2 \cap P_5) + N(P_3 \cap P_5) - N(P_2 \cap P_3 \cap P_5)$$

$$= 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26$$