P2. Problema 16.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Enunciado:

Una persona saca dos veces seguidas una bola de una urna que contiene una bola blanca y una bola negra, devolviendo la bola a la urna después de cada extracción. Si saca dos veces la bola blanca gana una cantidad S y si no saca las dos veces la bola blanca, se le permite hacer otras dos nuevas extracciones de la urna en la que se ha introducido previamente una nueva bola negra y así se continúa aumentando en cada renovación de la operación el número de bolas negras en una unidad. ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona gane la cantidad S?

Resuelto en Vol. 1. Pag. 226

Solución:

Definamos los sucesos siguientes:

- S_n =*Ganar la cantidad S en la n-ésima repetición*
- B_n =*Extraer dos bolas blancas en la n-ésima repetición*
- G_S = *Ganar la cantidad S*

Solución:

- En el primer intento, la probabilidad de ganar la cantidad S es

$$p\left(S_1\right) = \left(B_1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- En caso de no conseguirlo el primer intento, habrá un segundo intento, donde la urna estará formada por dos bolas negras y una blanca. Entonces:

$$p\left(S_2\right) = p\left(\overline{B}_1 \cap B_2\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{4 \cdot 9} = \frac{1}{12}$$

Solución:

- De nuevo, en caso de no conseguirlo , habrá un tercer intento para tratar de conseguir ganar. en este caso, la urna estará formada por tres bolas negras y una blanca, por lo que:

$$p\left(S_3\right) = p\left(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9 \cdot 16} = \frac{1}{24}$$

Solución:

La probabilidad de obtener la cantidad S en el $n-$ésimo intento será:

$$
\begin{aligned}
p\left(S_n\right) &= p\left(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \cdots \cap \overline{B}_{n-1} \cap B_n\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\
&= \frac{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)\cdots(n^2-1)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdots n^2\cdot (n+1)^2} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)(n+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdots n^2\cdot (n+1)^2} \\
&= \frac{1}{2n(n+1)}
\end{aligned}
$$

Solución:

De este modo, la probabilidad de ganar la cantidad S será:

$$p\left(G_S\right) = p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p\left(S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$$

Esta serie es *telescópica*, ya que

$$\frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$

Dado que la suma de los n primeros términos de esta serie es:

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$$

Solución:

la suma de la serie será

$$\mathcal{S} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{2}$$

Consecuentemente,

$$p\left(G_S\right) = \frac{1}{2}$$

Vamos a resolver el problema calculando previamente la probabilidad de no ganar la cantidad S (por lo que el juego no terminaría nunca). La probabilidad de que, tras n intentos, el jugador no haya conseguido la cantidad S, por lo que el juego no habrá terminado, será:

$$
\begin{aligned}
p\left(\overline{S}_n\right) &= p\left(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \cdots \cap \overline{B}_{n-1} \cap \overline{B}_n\right) = \\
&= \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\
&= \frac{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)\cdots(n^2-1)\left[(n+1)^2-1\right]}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdots n^2 \cdot (n+1)^2} = \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)(n+1) \cdot n(n+2)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdots n^2 \cdot (n+1)^2} = \\
&= \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2n+2}
\end{aligned}
$$

Solución alternativa:

De este modo, la probabilidad de no ganar la cantidad S, será:

$$p\left(\overline{G}_S\right) = \lim_{n\to\infty} p\left(\overline{S}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

Así que es inmediato concluir que

$$p\left(G_S\right) = 1 - p\left(\overline{G}_S\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$