6. Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cosec} 3x$$

SOLUCIÓN: Para resolver la ecuación trigonométrica debemos encontrar una equivalente pero factorizada, es decir, expresada como producto de razones trigonométricas. Por definición de la función cosecante, tenemos:

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cosec} 3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{\operatorname{sen} 3x}$$

Donde $\operatorname{sen} x \neq 0$, $\operatorname{sen} 2x \neq 0$ y $\operatorname{sen} 3x \neq 0$ pues aparecen dividiendo, o lo que es lo mismo $x \neq k\pi$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$ y $x \neq \frac{k\pi}{3}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ (es primordial en este ejercicio tener en cuenta estas restricciones).

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{\operatorname{sen} 3x} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \quad \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} 2x \cdot (\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x$$

Recordando la relación trigonométrica que transforma diferencia de senos en producto,

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Obtenemos la ecuación equivalente:

$$\operatorname{sen} 2x \cdot 2\cos 2x \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x$$

Como $\operatorname{sen} x \neq 0$ podemos dividir toda la ecuación por $\operatorname{sen} x$ obteniendo:

$$2\operatorname{sen} 2x\cos 2x = \operatorname{sen} 3x \Leftrightarrow \operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 3x \Leftrightarrow \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 3x = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{7x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0$$

Es decir:

$$\cos\frac{7x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0$$

Distinguimos como sigue:

i) $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = j\pi$ para algún $j \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = 2j\pi$, para algún $j \in \mathbb{Z}$, lo que es falso.

ii) $\cos\frac{7x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7x}{2} = (2j+1)\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = (2j+1)\frac{\pi}{7}$ para algún $j \in \mathbb{Z}$

Si parásemos aquí, estaríamos dando soluciones que no son. A saber, por ejemplo, si $j = 3$ obtendríamos que $x = \pi$, lo que es imposible por la restricción $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Así pues, para desechar las soluciones que no son, imponemos las tres restricciones:

a) $x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad (2j+1)\dfrac{\pi}{7} \neq k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(2j+1)}{7} \neq k$

Por tanto $\dfrac{(2j+1)}{7}$ no puede ser un entero, para ello buscaremos aquellos j que hacen que $\dfrac{(2j+1)}{7}$ da un entero y así desecharlos. Nos ayudamos de las congruencias:

$$2j+1 \equiv 0(\operatorname{mod} 7) \quad \Leftrightarrow \quad 2j \equiv -1(\operatorname{mod} 7) \quad \Leftrightarrow \quad 2j \equiv 6(\operatorname{mod} 7) \quad \overset{\text{mcd}(2,7)=1}{\Leftrightarrow} \quad \cancel{2}j \equiv \cancel{2} \cdot 3(\operatorname{mod} 7) \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad j \equiv 3(\operatorname{mod} 7) \quad \Leftrightarrow \quad j = 3 + 7t \ \ (t \in \mathbb{Z})$ (obsérvese que si $t = 0$, obtenemos $j = 3$, que no valía)

Por tanto, la primera restricción nos dice que $j \not\equiv 3(\operatorname{mod} 7)$.

b) $x \neq \dfrac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad (2j+1)\dfrac{\pi}{7} \neq \dfrac{k\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4j+2}{7} \neq k$

En este caso, $4j+2$ es divisible por 7 si y sólo si

$$4j+2 \equiv 0(\operatorname{mod} 7) \quad \Leftrightarrow \quad 4j \equiv -2(\operatorname{mod} 7) \quad \Leftrightarrow \quad 4j \equiv 12(\operatorname{mod} 7) \quad \overset{\text{mcd}(4,7)=1}{\Leftrightarrow} \quad \cancel{4}j \equiv \cancel{4} \cdot 3(\operatorname{mod} 7) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad j \equiv 3(\operatorname{mod} 7) \quad \Leftrightarrow \quad j = 3 + 7t \ \ (t \in \mathbb{Z})$$

Por tanto, la segunda restricción nos dice que $j \not\equiv 3(\bmod 7)$

c) $x \neq \dfrac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad (2j+1)\dfrac{\pi}{7} \neq \dfrac{k\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{6j+3}{7} \neq k$

Aquí $6j+3$ es divisible por 7 si y sólo si

$$6j+3 \equiv 0(\bmod 7) \quad \Leftrightarrow \quad 6j \equiv -3(\bmod 7) \quad \Leftrightarrow \quad 6j \equiv 18(\bmod 7) \quad \Leftrightarrow \quad \cancel{6}j \equiv \cancel{6}\cdot 3(\bmod 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad j \equiv 3(\bmod 7) \quad \Leftrightarrow \quad j = 3+7t \ \ (t \in \mathbb{Z})$$

Por tanto, la tercera restricción nos dice que $j \not\equiv 3(\bmod 7)$.

Resumiendo, las soluciones de la ecuación trigonométrica son:

$$x = (2j+1)\frac{\pi}{7}$$

tales que $j \in \mathbb{Z}$ y $j \not\equiv 3(\bmod 7)$.