12. Demuestre que 437 es divisor de $16^{99}-1$ y de $18!+1$.

Este problema figura resuelto en la página 50 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

SOLUCIÓN: Dado que $437=19\cdot 23$, debemos demostrar que los números $16^{99}-1$ y $18!+1$ son ambos divisibles por 19 y por 23.

- $16^{99}-1$ es múltiplo de 437

i) $16^{99}-1$ es múltiplo de 19.

Como 19 es número primo y 2 no es divisible por 19, del *Pequeño Teorema de Fermat* se deduce que $2^{18}\equiv 1 \pmod{19}$, luego

$$16^{99}-1=2^{396}-1=(2^{18})^{22}-1\equiv 1^{22}-1\equiv 0 \pmod{19}$$

ii) $16^{99}-1$ es múltiplo de 23.

23 es número primo y 2 no es divisible por 23, del *Pequeño Teorema de Fermat* se deduce que $2^{22} \equiv 1 \pmod{23}$, luego

$$16^{99} - 1 = 2^{396} - 1 = (2^{22})^{18} - 1 \equiv 1^{18} - 1 \equiv 0 \pmod{23}$$

- $18! + 1$ es múltiplo de 437

i) $18! + 1$ es múltiplo de 19.

Como 19 es número primo, del Teorema de Wilson se deduce que $18! \equiv -1 \pmod{19}$, es decir, $18! + 1 \equiv 0 \pmod{19}$.

ii) $18! + 1$ es múltiplo de 23.

Del *Teorema de Wilson* se deduce que

$$22! \equiv -1 \pmod{23} \quad \Rightarrow \quad 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18! \equiv -1 \pmod{23} \quad \Rightarrow \quad (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot 18! \equiv -1 \pmod{23} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 24 \cdot 18! \equiv -1 \pmod{23} \quad \Rightarrow \quad 18! \equiv -1 \pmod{23} \quad \Rightarrow \quad 18! + 1 \equiv 0 \pmod{23}$$