Tema 38: Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones

Autor: Juan Manuel Hernández

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

Contenidos

Introducción

En la primera sección expresamos las funciones trigonométricas de la suma de dos ángulos en función de las de los sumandos. Los teoremas del seno, del coseno y de la tangente se demuestran en la sección segunda, y se emplean en la resolución de triángulos. Algunas aplicaciones, entre las que cabe señalar las fórmulas Briggs y Herón y otras fórmulas para el cálculo del área de un triángulo, son objeto de la última sesión.

Notaciones

En lo que sigue emplearemos la siguiente notación. Para cada triángulo $\mathcal{T} := \triangle ABC$ designaremos por a, b y c, respectivamente, las longitudes de los segmentos $S(B,C)$, $S(A,C)$ y $S(A,B)$, y por $\alpha := \measuredangle BAC$, $\beta := \measuredangle CBA$ y $\gamma := \measuredangle ACB$ las amplitudes de los ángulos en los vértices A, B y C. Sean R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita a $\mathcal{T}$, respectivamente, y $p := \frac{a+b+c}{2}$ su semiperímetro.

Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

Sean α y β las amplitudes de dos ángulos cualesquiera. Entonces:

- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$.

Algunas fórmulas trigonométricas.

Sean α y β las amplitudes de dos ángulos de modo que no se anulen los denominadores de las expresiones que aparecen a continuación. Entonces se cumple:

Ángulo doble

- $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

Ángulo mitad

- $\left|\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
- $\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
- $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$

Algunas fórmulas trigonométricas.

Suma y diferencia de senos

- $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Suma y diferencia de cosenos

- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Teoremas fundamentales.

Teorema del seno. Sea $\mathcal{T} := \triangle ABC$ un triángulo. Entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

Teorema del coseno. Sea $\mathcal{T} := \triangle ABC$ un triángulo. Entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Teorema de la tangente. Sea $\mathcal{T} := \triangle ABC$ un triángulo tal que $a \neq b$. Entonces

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Resolución de triángulos.

Caso 1: Existe un triángulo $\triangle ABC$ cuyos lados miden $a \leqslant b \leqslant c$ si y sólo si $c < a + b$. Además, en tal caso, dicho triángulo es único.

Caso 2: Existe un único triángulo $\triangle ABC$ en el que son dados los lados a y b y el ángulo $\gamma \in (0, \pi)$.

Caso 3: Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Caso 4: Existe un único triángulo $\triangle ABC$ en el que son dados el lado a y los águlos β y γ si y sólo si $\beta + \gamma < \pi$.

Aplicaciones

Fórmulas de Briggs: Sean las α, β γ las medidas de los ángulos de un triángulo cuyos lados opuestos tienen por longitudes a, b y c, cuyo en mi perímetro denotamos por p. Entonces se cumple:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \text{y} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Fórmula de Herón: Para cada triángulo $\mathcal{T} := \triangle ABC$ se tiene:

$$\mathrm{Area}\,(\mathcal{T}) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

Aplicaciones

Relación entre el área de un triángulo y los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita.

- Sean r el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo $\mathcal{T} := \triangle ABC$ y p su semiperímetro. Entonces,

$$\mathrm{Area}\,(\mathcal{T}) = pr.$$

- Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\mathcal{T}$. Se tiene

$$\mathrm{Area}\,(\mathcal{T}) = \frac{abc}{4R}.$$

Bibliografía

- Retorno a la Geometría. H.S.M Coxeter. S.L. Greitzer. La Tortuga de Aquiles.
- Fundamentos de la Geometría. David hilbert. CSIC.
- Curso de geometría básica. Antonio F. Costa. Ed. Sanz y Torres.
- Curso de geometría métrica. Tomo 1. Puig Adam.
- Geometría. S. Xambó. Edicions UPB.