


P1. Problema 3.

Autor: José María Lorenzo Magán

Academia Deimos
www.academiadeimos.com

A circular logo with a textured, radial background. In the center, there is a stylized graphic of a planet or moon with a crescent shape above it. The word "DEIMOS" is written in a bold, sans-serif font across the bottom of the circle.

¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 10$? ¿Cuántas tiene la inecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_6 < 10$?

Resuelto en Vol. 3. Ej 90.118



Combinaciones con repetición:

El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

es

$$CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Soluciones de la ecuación:

El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 10$$

es:

$$CR_{6,10} = \binom{15}{10} = 3003$$

Soluciones de la inecuación:

Para determinar el número de soluciones enteras no negativas de la inecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 < 10$, consideremos las ecuaciones

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = k \quad \text{donde } k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

El número de soluciones enteras no negativas de cada una de estas ecuaciones es

$$N_k = CR_{6,k} = \binom{5+k}{k} = \binom{5+k}{5}$$

Soluciones de la inecuación:

El número de soluciones enteras no negativas de la inecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 < 10$$

será, por tanto:

$$\sum_{k=0}^9 N_k = \sum_{k=0}^9 \binom{5+k}{5} = \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \cdots + \binom{14}{5} = \binom{15}{6} = 5005$$

Recordando que

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$