4. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Calcule

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\,.$$

b) En un tablero de $n\times n$ cuadrículas, ¿cuántos cuadrados de diferentes tamaños se pueden formar?

c) En el mismo tablero, ¿cuántos rectángulos se podrían formar?

Este problema es el 98.12 del volumen 4 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

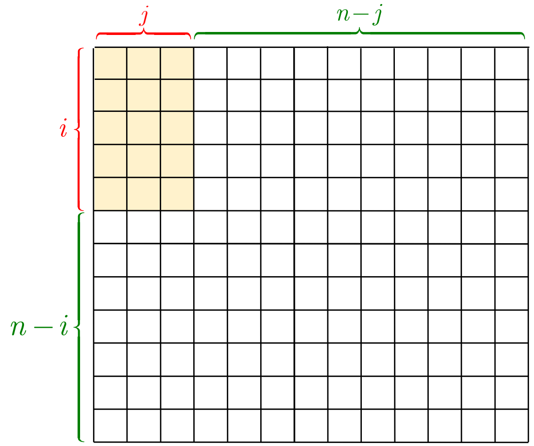
SOLUCIÓN: a) La suma S_n del enunciado es la de n términos consecutivos de una progresión aritmética de orden 2. Sus primeras diferencias finitas son

$$\begin{array}{lccccccccc}
a_i & \mathbf{1} & & 4 & & 9 & & 16 & & \dots \\
\Delta a_i & & \mathbf{3} & & 5 & & 7 & & \dots & \\
\Delta^2 a_i & & & \mathbf{2} & & 2 & \dots & & &
\end{array}$$

y de la segunda fórmula de Newton se deducen

$$S_n=\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}\Delta a_1+\binom{n}{3}\Delta^2 a_1=n+\frac{3}{2}n\,(n-1)+\frac{1}{3}n\,(n-1)(n-2)=\frac{1}{6}n\,(n+1)(2n+1)$$

c) Llamamos rectángulo $i \times j$ al que ocupa i filas y j columnas. Desplazando el rectángulo $i \times j$ sombreado en sentido vertical, puede ocupar $n-i+1$ posiciones diferentes. En sentido horizontal, puede ocupar $n-j+1$ posiciones diferentes, por lo que el número de rectángulos $i \times j$ que pueden formarse en la cuadrícula es



$$(n-i+1)(n-j+1)$$

El número total de rectángulos será:

$$\sum_{i,j=1}^{n}(n-i+1)(n-j+1)=\left(\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\right)^2=$$

$$=(n+n-1+n-2+\cdots+1)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b) Dado que hay $(n-i+1)(n-i+1)=(n-i+1)^2$ cuadrados de lado i (rectángulos $i \times i$), el número total de ellos será:

$$\sum_{i,j=1}^{n}(n-i+1)^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n\,(n+1)(2n+1)$$