Trigonometría

1. Identidades trigonométricas
2. Teoremas importantes
3. Algunas expresiones para el área de un triángulo

1. Identidades trigonométricas

1.1. Identidades trigonométricas: Para cualesquiera ángulos $x, y \in \mathbb{R}$ en los que están definidas las funciones circulares que aparecen en las siguientes fórmulas, se cumple que

1.1.1. Fórmula fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

1.1.2. Fórmulas para el ángulo suma:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

1.1.3. Fórmulas para el ángulo diferencia:

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

1.1.4. Fórmulas para el ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$
$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

1.1.5. Fórmulas para el ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$
$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

1.1.6. Fórmulas que transforman sumas o diferencias de senos o cosenos en productos:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x+\tan y=\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cos y}$$

$$\tan x-\tan y=\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x\cos y}$$

1.1.7. Fórmulas que transforman productos de senos o cosenos en sumas:

$$\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\cos x\cos y=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\operatorname{sen} x\cos y=\frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$$

1.2. Ejemplo: Resolver la ecuación $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$.

SOLUCIÓN: Si usamos la identidad trigonométrica $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ para escribir de una forma alternativa el primer y el tercer sumando del primer miembro, queda:

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\cos^2 2x+\frac{1+\cos 6x}{2}=1,\quad \text{o bien,}\quad \cos^2 2x+\frac{\cos 2x+\cos 6x}{2}=0$$

Expresamos ahora la suma de cosenos del numerador como producto:

$$\cos^2 2x + \cos\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 2x + \cos 4x \cdot \cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x\left(\cos 2x + \cos 4x\right) = 0$$

Expresamos también la suma de cosenos $\cos 2x + \cos 4x$ como producto:

$$\cos 2x \cdot 2\cos\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 0$$

que conduce a las tres ecuaciones más simples:

- $\cos x = 0$, entonces $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos 2x = 0$, entonces $2x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ y $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos 3x = 0$, entonces $3x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, es decir, $x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Las soluciones de la ecuación son por tanto:

$$x = \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}, \qquad x = \left(2k+1\right)\frac{\pi}{4}, \qquad x = \left(2k+1\right)\frac{\pi}{6} \qquad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

1.3. Ejemplo: Demuestre que $\operatorname{tg} 15^{\text{o}} \cdot \operatorname{tg} 25^{\text{o}} \cdot \operatorname{tg} 35^{\text{o}} \cdot \operatorname{tg} 85^{\text{o}} = 1$.

UNA SOLUCIÓN: Dado que ángulos complementarios tienen tangentes inversas, resulta que $\operatorname{tg} 85^{\text{o}} = \frac{1}{\operatorname{tg} 5^{\text{o}}}$, de modo que la igualdad a probar equivale a la siguiente:

$$\operatorname{tg} 15^{\text{o}} \cdot \operatorname{tg} 25^{\text{o}} \cdot \operatorname{tg} 35^{\text{o}} = \operatorname{tg} 5^{\text{o}}$$

Llamamos $t = \operatorname{tg} 5^{\text{o}}$ y expresamos el primer miembro de la igualdad anterior en función de t. Por un lado:

$$\operatorname{tg} 15^{\text{o}} = \operatorname{tg}\left(10^{\text{o}} + 5^{\text{o}}\right) = \frac{\operatorname{tg} 10^{\text{o}} + \operatorname{tg} 5^{\text{o}}}{1 - \operatorname{tg} 10^{\text{o}} \cdot \operatorname{tg} 5^{\text{o}}} = \frac{\frac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \frac{2t}{1-t^2}\, t} = t\, \frac{3 - t^2}{1 - 3t^2}$$

y por otro lado,

$$\operatorname{tg} 25^{\text{o}} \cdot \operatorname{tg} 35^{\text{o}} = \operatorname{tg}\left(30^{\text{o}} - 5^{\text{o}}\right) \operatorname{tg}\left(30^{\text{o}} + 5^{\text{o}}\right) = \frac{\operatorname{tg} 30^{\text{o}} + \operatorname{tg} 5^{\text{o}}}{1 - \operatorname{tg} 30^{\text{o}} \operatorname{tg} 5^{\text{o}}} \cdot \frac{\operatorname{tg} 30^{\text{o}} - \operatorname{tg} 5^{\text{o}}}{1 + \operatorname{tg} 30^{\text{o}} \operatorname{tg} 5^{\text{o}}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 30^{\text{o}} - \operatorname{tg}^2 5^{\text{o}}}{1 - \operatorname{tg}^2 30^{\text{o}} \operatorname{tg}^2 5^{\text{o}}} = \frac{\frac{1}{3} - t^2}{1 - \frac{1}{3} t^2} = \frac{1 - 3t^2}{3 - t^2}$$

Si ahora se multiplican miembro a miembro las igualdades obtenidas para $\operatorname{tg} 15^{\text{o}}$ y $\operatorname{tg} 25^{\text{o}} \cdot \operatorname{tg} 35^{\text{o}}$ se obtiene lo que había que demostrar:

$$\operatorname{tg} 15^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 25^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 35^{\circ} = t\,\frac{3-t^2}{1-3t^2}\cdot\frac{1-3t^2}{3-t^2} = t = \operatorname{tg} 5^{\circ}$$

OTRA SOLUCIÓN: Si aplicamos un par de veces las fórmulas que transforman productos de senos y/o cosenos en sumas o restas de dichas razones, obtenemos:

$$\operatorname{tg} 35^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 85^{\circ} = \frac{\operatorname{sen} 35^{\circ} \cdot \operatorname{sen} 85^{\circ}}{\cos 35^{\circ} \cdot \cos 85^{\circ}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\cos\left(85^{\circ}-35^{\circ}\right)-\cos\left(85^{\circ}+35^{\circ}\right)\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos\left(85^{\circ}-35^{\circ}\right)+\cos\left(85^{\circ}+35^{\circ}\right)\right]} = \frac{\cos 50^{\circ}-\cos 120^{\circ}}{\cos 50^{\circ}+\cos 120^{\circ}} = \frac{\cos 50^{\circ}+\frac{1}{2}}{\cos 50^{\circ}-\frac{1}{2}}$$

y entonces:

$$\operatorname{tg} 25^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 35^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 85^{\circ} = \frac{\operatorname{sen} 25^{\circ}}{\cos 25^{\circ}} \cdot \frac{\cos 50^{\circ}+\frac{1}{2}}{\cos 50^{\circ}-\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{sen} 25^{\circ}\cos 50^{\circ}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 25^{\circ}}{\cos 25^{\circ}\cos 50^{\circ}-\frac{1}{2}\cos 25^{\circ}} = \frac{\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(25^{\circ}-50^{\circ}\right)+\operatorname{sen}\left(25^{\circ}+50^{\circ}\right)\right]+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 25^{\circ}}{\frac{1}{2}\left[\cos\left(25^{\circ}-50^{\circ}\right)+\cos\left(25^{\circ}+50^{\circ}\right)\right]-\frac{1}{2}\cos 25^{\circ}} =$$

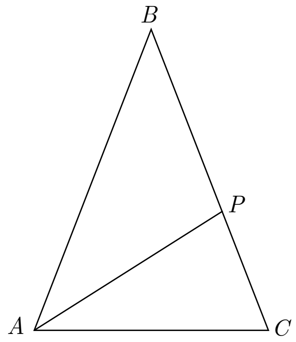
$$= \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(-25^{\circ}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 75^{\circ}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 25^{\circ}}{\frac{1}{2}\cos\left(-25^{\circ}\right)+\frac{1}{2}\cos 75^{\circ}-\frac{1}{2}\cos 25^{\circ}} = \frac{-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 25^{\circ}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 75^{\circ}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 25^{\circ}}{\frac{1}{2}\cos 25^{\circ}+\frac{1}{2}\cos 75^{\circ}-\frac{1}{2}\cos 25^{\circ}} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen} 75^{\circ}}{\frac{1}{2}\cos 75^{\circ}} = \operatorname{tg} 75^{\circ}$$

Por tanto, la igualdad a probar es equivalente a $\operatorname{tg} 15^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 75^{\circ} = 1$, pero ésta es inmediata pues ángulos complementarios (15° y 75°) tienen tangentes inversas

1.4. Ejemplo: En un triángulo isósceles ABC cuyos lados iguales son AB y BC, existe un punto P en el lado BC tal que $BP = PA = AC$.

a) Halle el valor de la razón $\frac{BP}{PC}$. ¿Qué relación tiene con la proporción áurea?

b) Calcule la medida de los ángulos del triángulo ABC y el coseno de dichos ángulos.



SOLUCIÓN:

a) La condición $PA = AC$ evidencia que el triángulo CAP es isósceles. Este triángulo es semejante al triángulo ABC, pues $\measuredangle CPA = \measuredangle ACP = \measuredangle ACB$ y, consecuencia de ello, los otros dos pares de ángulos de ambos triángulos isósceles son también iguales.

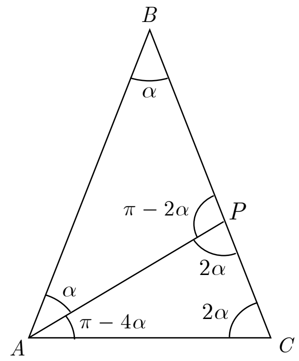
De dicha semejanza se deduce, recordando que es $AC = BP$,

$$\frac{AC}{PC} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{BP}{PC} = \frac{BC}{BP} \quad \Rightarrow \quad \frac{BP}{PC} = \frac{BP+PC}{BP} = 1 + \frac{PC}{BP} \quad \Rightarrow \quad \frac{BP}{PC} = 1 + \frac{1}{\frac{BP}{PC}}$$

Según la igualdad anterior, la razón $\frac{BP}{PC}$ es solución positiva de la ecuación $x = 1 + \frac{1}{x}$, que es equivalente a $x^2 - x - 1 = 0$. La única solución positiva de esta ecuación es $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, por lo que la razón $\frac{BP}{PC}$ es exactamente la razón áurea Φ:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

b) Por aquello de abreviar escritura, llámese $\alpha = \measuredangle ABC$. El triángulo APB es isósceles, luego $\measuredangle PAB = \measuredangle ABP = \measuredangle ABC = \alpha$ y en consecuencia $\measuredangle APB = \pi - \alpha - \alpha = \pi - 2\alpha$. De que los ángulos $\measuredangle APC$ y $\measuredangle APB$ sean suplementarios se sigue $\measuredangle APC = 2\alpha$, y de que APC sea otro triángulo isósceles se desprende que $\measuredangle ACP = \measuredangle APC = 2\alpha$, así que $\measuredangle CAP = \pi - 2\alpha - 2\alpha = \pi - 4\alpha$ y por tanto

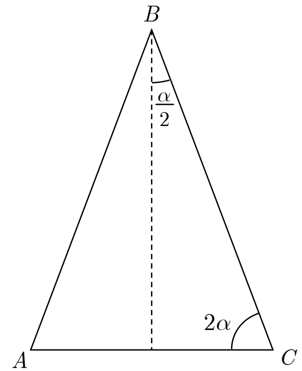


$$\measuredangle CAB = \measuredangle CAP + \measuredangle PAB = \pi - 4\alpha + \alpha = \pi - 3\alpha$$

Del carácter isósceles del triángulo ABC se deduce finalmente que $\measuredangle CAB = \measuredangle ACB = \measuredangle ACP$, es decir, $\pi - 3\alpha = 2\alpha$, y por tanto, $\alpha = \frac{\pi}{5}$. Los ángulos del triángulo ABC miden así:

$$\measuredangle ABC = \alpha = \frac{\pi}{5}, \qquad \measuredangle CAB = \measuredangle ACB = 2\alpha = \frac{2\pi}{5}$$

Para determinar el coseno de ambos ángulos, comenzamos hallando el seno de $\frac{\alpha}{2}$. Por ser ABC un triángulo isósceles, será



$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\measuredangle ABC\right) = \frac{1}{2}\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}\frac{BP}{BC} = \frac{1}{2}\frac{BP}{BP+PC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{BP}{PC}}{\frac{BP}{PC}+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Phi}{\Phi+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Phi^2-1}{\Phi+1} = \frac{\Phi-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Por tanto,

$$\cos(\measuredangle ABC) = \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

El coseno de los otros dos ángulos del triángulo es, teniendo en cuenta que 2α y $\frac{\alpha}{2}$ son ángulos complementarios,

$$\cos(\measuredangle CAB) = \cos(\measuredangle BCA) = \cos 2\alpha = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

2. Teoremas importantes

Sean α , β y γ las medidas de los ángulos de un triángulo cuyos lados opuestos tienen por longitudes a, b y c. Tenemos los siguientes resultados:

2.1. Teorema de los senos: Si R es el radio de la circunferencia circunscrita, entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

2.2. Teorema del coseno: Se verifican las siguientes igualdades,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

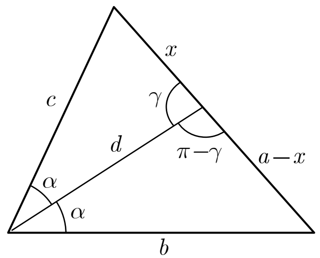
2.3. Teorema de la tangente: Siempre que $a \neq b$ se cumple

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

2.4. Observación: Estos teoremas se combinan para construir triángulos de los que se conocen tres datos, uno de los cuales es la longitud de un lado. Aunque para el caso general es suficiente aplicar los teoremas del seno y del coseno, el empleo del teorema de la tangente simplifica los cálculos.

2.5. Ejemplo: Construya un triángulo conociendo los lados b y c y la bisectriz d del ángulo que forman. Discusión del problema a resolver.

SOLUCIÓN: Damos ahora argumentos basados en los teoremas de los senos y del coseno para proponer otra resolución del ejercicio que aparece en el ejemplo 1.8. del documento G1. Calcularemos la longitud a del tercer lado del triángulo. Si suponemos construido el triángulo, la bisectriz d divide al triángulo en dos triángulos. Del *Teorema de la bisectriz* se deduce que:



$$\frac{a-x}{b} = \frac{x}{c}, \qquad \text{es decir,} \qquad bx = (a-x)c$$

El *teorema del coseno* en ambos triángulos da, por otro lado:

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha \qquad ; \qquad (a-x)^2 = b^2 + d^2 - 2\,bd\cos\alpha$$

Multiplicando la primera igualdad por b^2 y la segunda por c^2 se obtienen, según (1), expresiones idénticas, es decir:

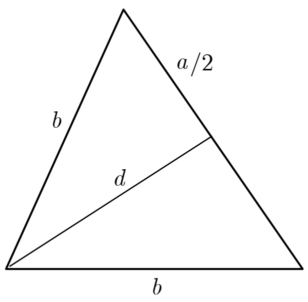
$$b^2c^2 + b^2d^2 - 2b^2cd\cos\alpha = b^2c^2 + c^2d^2 - 2bc^2d\cos\alpha$$

Simplificando la expresión anterior, resulta:

$$2bc(b-c)\cos\alpha = d(b+c)(b-c) \tag{2}$$

Por ello distinguimos:

i) $b = c$. El triángulo es isósceles y es evidente que la construcción sólo es posible si $d < b$. En tal caso, la bisectriz d divide al triángulo en dos triángulos rectángulos, y en cualquiera de ellos es



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = b^2 \quad\Rightarrow\quad a^2 = 4\left(b^2 - d^2\right) \quad\Rightarrow\quad a = 2\sqrt{b^2 - d^2}$$

Se trata del triángulo de lados iguales de longitud b y lado desigual de longitud $2\sqrt{b^2 - d^2}$.

ii) $b \neq c$. Ahora la igualdad (2) puede simplificarse, dando:

$$\cos\alpha = \frac{(b+c)\cdot d}{2b\,c} \tag{3}$$

igualdad que sólo es posible si

$$\frac{(b+c)\cdot d}{2b\,c} < 1, \qquad \text{es decir, si} \qquad d < \frac{2b\,c}{b+c}$$

Si así ocurre, el *teorema del coseno* en el triángulo completo da la igualdad $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 2\alpha$. Según (3) y dado que $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, queda:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\left(2\frac{(b+c)^2\,d^2}{4\,b^2c^2} - 1\right) = (b+c)^2\left(1 - \frac{d^2}{bc}\right)$$

La no negatividad del 2º miembro queda garantizada si se tiene en cuenta que la media armónica de dos números positivos nunca es mayor que su media geométrica, y de ahí que:

$$d < \frac{2bc}{b+c} \leq \sqrt{bc} \quad \Rightarrow \quad d^2 \leq bc \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{d^2}{bc} \geq 0$$

Resulta entonces el triángulo de lados b, c y $(b+c)\sqrt{1-\frac{d^2}{bc}}$.

En resumen, y teniendo en cuenta que i) puede englobarse en ii), podemos afirmar que el problema tiene solución si, y sólo si, $d < \frac{2bc}{b+c}$ y en tal caso el triángulo solución es el de lados b, c y $(b+c)\sqrt{1-\frac{d^2}{bc}}$.

3. Algunas expresiones para el área de un triángulo

Sean α , β y γ las medidas de los ángulos de un triángulo cuyos lados opuestos tienen por longitudes a, b y c. Tenemos los siguientes resultados:

3.1. Cálculo trigonométrico del área de un triángulo: Como la expresión trigonométrica de la altura h_a desde el vértice A es $h_a = b\operatorname{sen}\gamma = c\operatorname{sen}\beta$, sustituyendo su valor en $S=\frac{1}{2}ah_a$ se obtiene

$$S=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma=\frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\beta$$

Análogamente se tiene

$$S=\frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\alpha$$

3.2. Fórmulas de Briggs: Las siguientes fórmulas tienen muchas aplicaciones, una de ellas es proporcionar una demostración sencilla de la fórmula de Herón. Se deducen del teorema del coseno y son las siguientes:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{bc}}$$

En la literatura también se pueden encontrar bajo la siguiente forma más simétrica.

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p\,(p-a)}},\qquad \tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p\,(p-b)}},\qquad \tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

3.3. Fórmula de Herón: Combinando el punto (3.1) con las fórmulas de Briggs el área S de un triángulo de lados a, b y c mide

$$S=\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$$

3.4. Cálculo del área en términos de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita: Empleando el primer punto de este párrafo y el teorema del seno se obtiene que el área S de un triángulo mide

$$S=\frac{abc}{4R}$$

Si llamamos r al radio de la circunferencia inscrita y expresamos S como suma de las áreas de los triángulos cuyos vértices son dos de los del triángulo y su incentro se obtiene

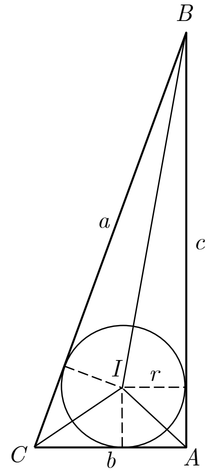
$$S=p\cdot r$$

3.5. Ejemplo: El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo es $\frac{13}{2}$ y el radio de su circunferencia inscrita es 2. Calcule los lados a, b y c.

SOLUCIÓN: Utilizamos la misma notación que en la primera solución. Deducimos la hipotenusa a a partir del teorema de los senos, según el cual los lados del triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, siendo la constante de proporcionalidad el diámetro $2R$ de la circunferencia circunscrita. Según esto,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R = 13\,, \qquad \text{y como } \hat{A} \text{ es recto,} \qquad a = 13$$

Obtenemos otra relación entre los lados de un triángulo rectángulo y el radio de su circunferencia inscrita razonando sobre áreas. Dividimos para ello el triángulo ABC en otros tres triángulos a partir de los vértices A, B y C y el incentro I del triángulo (centro de la circunferencia inscrita). Se tiene:



$$\text{área}\left(ABC\right) = \text{área}\left(ABI\right) + \text{área}\left(ACI\right) + \text{área}\left(BCI\right)$$

Si en cada uno de dichos triángulos se adopta como base el lado correspondiente del triángulo ABC, la altura sobre dicha base es la distancia común del incentro I a cualquiera de los lados, es decir, el radio r de la circunferencia inscrita. Por ello, la igualdad de áreas anterior se escribe como:

$$\frac{bc}{2} = \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} = \frac{r}{2}\left(a+b+c\right) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{bc}{a+b+c}$$

Añadiendo a esta relación la que resulta de aplicar el *teorema de Pitágoras* en nuestro triángulo rectángulo, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2 = \frac{bc}{13+b+c} \\ b^2 + c^2 = 13^2 \end{cases}, \qquad \text{o el equivalente} \qquad \begin{cases} bc = 2(13+b+c) \\ b^2 + c^2 = 169 \end{cases}$$

Para no tener que resolver una ecuación de cuarto grado, podemos actuar así. Llamemos $s = b + c$ y $p = bc$. El sistema puede entonces ser escrito:

$$\begin{cases} p = 2(13+s) \\ 169 = b^2 + c^2 = (b+c)^2 - 2bc = s^2 - 2p \end{cases}, \qquad \text{es decir,} \qquad \begin{cases} p = 2(13+s) \\ s^2 - 2p = 169 \end{cases}$$

Sustituimos en la segunda igualdad el valor de p que nos da la primera:

$$0 = s^2 - 2p - 169 = s^2 - 4(13+s) - 169 = s^2 - 4s - 221 = (s-2)^2 - 15^2$$

Como s es positivo, $s - 2 = 15$, esto es, $s = 17$ y $p = 2(13+s) = 60$. En consecuencia, b y c son las raíces del polinomio de segundo grado $x^2 - 17x + 60 = (x-12)(x-5)$, es decir, bien $b = 5$, $c = 12$, bien $c = 5$, $b = 12$.