4. Encuentre el menor número natural N tal que $\frac{N}{2}$ sea cuadrado perfecto, $\frac{N}{3}$ sea cubo perfecto, y $\frac{N}{5}$ sea una potencia quinta perfecta.

Este problema es el 03.1 del volumen 4 de Problemas de oposiciones de Editorial Deimos y allí figura resuelto.

SOLUCIÓN: Del enunciado se deduce inmediatamente que el número N es múltiplo de 2, de 3 y de 5, por lo que N admite una factorización del tipo

$$N = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot m$$

donde $a, b, c \geq 1$ y $m \in \mathbb{N}^+$ es primo relativo con 2, 3 y 5. El número natural

$$\frac{N}{2} = 2^{a-1} \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot m$$

es un cuadrado perfecto, luego los exponentes $a-1$, b y c son pares. Como el número

$$\frac{N}{3} = 2^a \cdot 3^{b-1} \cdot 5^c \cdot m$$

es un cubo perfecto, los exponentes a, $b-1$ y c son múltiplos de 3.

Por último, como

$$\frac{N}{5} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^{c-1} \cdot m$$

es una potencia quinta perfecta, resulta que a, b y $c-1$ son múltiplos de 5.

El menor exponente $a \in \mathbb{N}$ múltiplo de 3 y 5 y tal que $a-1$ es múltiplo de 2 es el menor número natural impar múltiplo de 15, esto es, 15. El menor exponente $b \in \mathbb{N}^+$ múltiplo de 2 y de 5, es decir, de 10 y tal que $b-1$ es múltiplo de 3 es $b = 10$, y el menor exponente $c \in \mathbb{N}$ múltiplo de 2 y 3, esto es, de 6 y tal que $c-1$ es múltiplo de 5 es $c = 6$. Como el número que se pide es el menor posible, será $m = 1$ y dicho número es

$$N = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$$