

Ejercicios EBAU

Matrices y sistemas

1 | Una persona adquiere en el mercado cierta cantidad de manzanas y naranjas a un precio de m y 105 euros el kilogramo, respectivamente. El importe total de la compra fue de 9 euros y el peso total de la misma de 7 kg.

EBAU15-Og

- a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad, en kg, de manzanas y de naranjas adquiridas en el mercado. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?
- b) ¿Qué cantidad de naranjas había comprado si el kilogramo de manzanas costase a 1 euro?

2 | Sean las matrices:

EBAU15-Og

$$A = \begin{pmatrix} m & -2 \\ m & m-1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

3 | Sean las matrices:

EBAU15-Os

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3m-1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Si $(A \cdot B - C) \cdot D = 2 \cdot E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

4 | Luis tiene ahora mismo m veces la edad de Javier. Dentro de m años, Luis tendrá el triple de años que Javier.

EBAU15-Xg

- a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la edad de Luis y de Javier, respectivamente. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que Luis tenga ahora mismo el triple de años que Javier?
- b) Resuelve el sistema para $m = 5$. ¿Cuántos años tiene Luis en este caso?

5 | Un taller tiene contratados operarios de dos tipos. En una hora cualquiera de trabajo, cada operario de tipo A cobra 10 euros, cada operario de tipo B cobra $2m$ euros y la empresa paga al total de sus operarios 780 euros por esa hora de trabajo. En el taller, por cada operario de tipo B hay $m - 1$ operarios de tipo A.

EBAU15-Xs

- a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de operarios de cada tipo contratados en el taller.
- b) Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los operarios de tipo B cobren 6 euros por hora? En caso afirmativo, ¿cuántos operarios de tipo A trabajan en el taller?

6 | Sean las matrices:

EBAU16-Og

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m-1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) Si $(A \cdot B - C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve

el sistema para $m = 3$.

7 | En una fábrica envasan los bombones en cajas de tamaño pequeño y mediano. Cierta día se envasaron 60 cajas en total, habiendo m cajas más de tamaño pequeño que de tamaño mediano.

EBAU16-Os

- a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de cajas de cada tipo envasadas ese día. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?
- b) Si ese día se envasan 4 cajas más de bombones de tamaño pequeño que de tamaño mediano, ¿cuántas se habrán envasado de cada tipo?

8 | Sean las matrices:

EBAU16-Os

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -m & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- a) Si $(A - B) \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 3$.

Programación lineal

9 | Unos grandes almacenes lanzan una campaña publicitaria con una oferta especial en dos de sus productos, ofreciendo el producto A a un precio de 100 euros y el producto B a 200 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 unidades del producto A y 10 unidades del producto B, queriendo vender al menos tantas unidades del producto A como del B. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella para estos dos productos deben ser, al menos, de 600 euros.

EBAU15-Og

- a) ¿Cuántas unidades de cada producto se podrán vender? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto

de soluciones. ¿Se podrían vender 15 unidades de cada producto?

- b) ¿Cuántas unidades de cada producto deben vender para maximizar sus ingresos?

10 | Una empresa, que abastece los lotes de perfumería de un supermercado, dispone en el almacén de 240 frascos de gel, 95 de champú y 270 de crema de manos. Los lotes son de dos tipos: A y B, de forma que el lote A está compuesto por 2 frascos de gel, 1 de champú y 3 de crema de manos, mientras que el lote B está formado por 3 frascos de gel, 1 de champú y 2 de crema de manos.

EBAU15-Os

- a) ¿Cuántos lotes de cada tipo pueden prepararse con la mercancía que tiene en el almacén? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- b) Si cada lote de tipo A le produce unos beneficios de 25 € y cada lote de tipo B de 22 €, ¿cuántos lotes de cada tipo debe preparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor del beneficio máximo que puede obtener?

11 | Una compañía dispone de 96000 euros para comprar ordenadores y licencias de un determinado software. Se sabe que necesita adquirir al menos 20 ordenadores y que el número de licencias debe ser mayor o igual que el de ordenadores. Además se tiene que el precio de cada ordenador es de 400 euros y el de cada licencia de 800 euros.

EBAU15-Xs

- a) ¿Cuántos ordenadores y cuántas licencias puede comprar para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- b) ¿Cuántos ordenadores y cuántas licencias debe comprar para que el coste total de la compra sea mínimo? ¿y para que el número de licencias sea máximo?

12 | Un instituto de investigación está planificando la compra de proyectores de dos tipos A y B. Por un convenio firmado con el proveedor, deben adquirirse al menos 10 proyectores de tipo A y nunca menos de este tipo que del tipo B. Por limitaciones de espacio se pueden adquirir como mucho 100 proyectores en total.

EBAU15-Xs

- a) ¿Cuántos proyectores de cada tipo puede comprar para cumplir con todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- b) Si cada proyector de tipo A cuesta 3000 euros y cada proyector de tipo B cuesta 7000 euros, ¿cuántos tendría que comprar de cada tipo para minimizar el coste? ¿A cuánto ascendería dicho coste?

13

EBAU15-Os

Una empresa de refrescos produce dos tipos de bebidas: normal y ligera. Cada una de ellas necesita pasar por tres procesos productivos de la fábrica, designados por P_1 , P_2 y P_3 . El número de horas empleado en cada uno de ellos por lote de refresco producido, así como los beneficios unitarios por lote de refresco vendido, pueden verse en la siguiente tabla:

Refresco	Tiempo P_1	Tiempo P_2	Tiempo P_3	Beneficio
Normal	6 h	1 h	4 h	650 €
Ligera	8 h	2 h	4 h	800 €

Además se sabe que los tiempos de producción disponibles son de 360 horas para P_1 , 80 horas para P_2 y 200 horas para P_3 .

- a) ¿Cuántos lotes de cada tipo puede producir? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- b) ¿Cuántos lotes de cada tipo tendría que producir para maximizar el beneficio? ¿A cuánto ascendería dicho beneficio?

14

EBAU15-Xs

Un empresario abrirá en breve una fábrica de mermeladas y debe contratar dos tipos de empleados: personal especializado para elaborar el producto y personal no cualificado para empaquetarlo. Sólo ha recibido el curriculum de 12 personas especializadas, de modo que como mucho podrá contratar a esa cantidad de personas para la fase de producción. Por experiencias previas, el empresario sabe que debe tener al menos el doble de empleados no cualificados que especializados y como mucho, el triple.

- a) ¿Cuántos empleados de cada tipo puede contratar? Plantea

el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratar a 5 empleados especializados y 12 no cualificados?

- b) Según la legislación correspondiente, la empresa recibirá una subvención de 100 euros mensuales por cada empleado no cualificado que contrate. La subvención será de 120 euros si el personal es especializado. ¿Cuántos empleados de cada tipo debe contratar para maximizar los ingresos por subvenciones? ¿a cuánto ascienden tales ingresos?

15

EBAU15-Xs

Los empleados de un banco deben rellenar cada tarde el cajero automático de su sucursal con billetes de 20 y de 50 euros. Por motivos de seguridad, la máquina nunca contiene más de 20 000 euros. Por otro lado, dado que los clientes prefieren los billetes de 20, deben introducir al menos el doble de billetes de 20 que de 50 euros. Finalmente, siempre incluyen al menos 100 billetes de 50 euros.

- a) Suponiendo que el cajero está vacío, ¿cuántos billetes de cada tipo puede haber en el cajero cuando se rellena? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- b) Si quieren que el cajero tenga el menor número de billetes posible, ¿cuántos deben rellenar de cada tipo? ¿cuánto dinero habrá en el cajero en ese caso?

16

EBAU16-Og

Una familia desea invertir 6500 euros en acciones de la compañía A y de la compañía B. Cada acción de la compañía A cuesta 100 euros y tiene unos beneficios esperados de 22 euros. Cada acción de la compañía B cuesta 600 euros y tiene unos beneficios esperados de 108 euros. Además se sabe que está obligada a comprar al menos 5 acciones de cada compañía.

- a) ¿Cuántas acciones de cada tipo puede comprar con el dinero disponible? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- b) ¿Cuántas debe comprar para maximizar el beneficio esperado? ¿cuánto vale dicho beneficio esperado máximo?

17

EBAU16-Og

Una empresa dedicada a la fabricación de trofeos deportivos recibe el encargo de un ayuntamiento de elaborar una serie de trofeos para la Semana Deportiva Municipal. Los trofeos que

se han de entregar corresponden a las modalidades de fútbol y baloncesto. Cada trofeo requiere una serie de materiales para su fabricación: madera para la base, acero para la estructura y oro para los dorados y embellecedores. Estos datos, junto con los ingresos para la empresa por cada tipo de trofeo, aparecen en la siguiente tabla:

Trofeo	Madera	Acero	Oro	Ingresos
Fútbol	0,4 kg	0,6 kg	0,4 kg	1200 €
Baloncesto	0,5 kg	0,3 kg	0,1 kg	750 €

Además se sabe que las disponibilidades de la tienda son: 56 kg de madera, 39 kg de acero y 16 kg de oro.

- ¿Cuántos trofeos de cada tipo puede hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- ¿Cuántos trofeos de cada tipo tendría que hacer para maximizar los ingresos? ¿a cuánto ascenderían dichos ingresos?

18

EBAU16-0s

Una fábrica va a lanzar al mercado dos nuevos productos A y B. El coste de fabricación del producto A es de 100 € por unidad y el del producto B es de 150 € por unidad, disponiendo para esta operación de 6000 €. Para evitar riesgos, es necesario fabricar al menos tantas unidades del producto A como del producto B y, en todo caso, no fabricar más de 45 unidades del producto A.

- De acuerdo con las restricciones anteriores, ¿cuántas unidades de cada producto puede fabricar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- Si su objetivo es maximizar el número total de productos fabricados, ¿cuántas unidades de cada producto debe fabricar? ¿a cuánto asciende el coste total de fabricación de dichas unidades?

19

EBAU20-X

Una empresa puede contratar trabajadores de tipo A y trabajadores de tipo B en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de

tipo A que de tipo B y que el número de trabajadores de tipo A no supere al doble del número de trabajadores de tipo B. En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo A y de 40 de tipo B.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B?
- b) **[0,75 puntos]** Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo A es de 240 euros y por cada trabajador de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

20 | Una compañía fabrica y venden dos modelos de lámpara L_1 y L_2 . Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y de 30 minutos para el L_2 ; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo L_1 y de 10 minutos para L_2 . Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 y 10 euros para L_1 y L_2 , respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

21 | Con el comienzo del curso se va a lanzar unas ofertas de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas; en el primer bloque pondrá 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos; en el segundo, pondrán 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán 6.5 y 7 €, respectivamente.

¿Cuántos paquetes le conviene poner de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

22 | En una granja de pollos se da una dieta, para engordar, con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentra dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y 5 de B, y el otro tipo, Y, con una composición

de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 10 euros y del tipo Y es de 30 €.

¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

- 23** | Unos grandes almacenes desean liquidar 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello lanzan, dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón, que se venden a 30 €; la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 20 lotes de la oferta A ni menos de 10 de la B.

¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar la ganancia?

- 24** | En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2 . El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?
- b) **[0,75 puntos]** Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

- 25** | Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa

empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

- a) **[2 puntos]** ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?
- b) **[1 punto]** Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

Funciones

- 26** | Dada la función $f(x) = x^2 - x$, se pide:
- EBAU15-Xs
- a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(6) = 50$.
 - b) Estudiar y representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

- 27** | En un restaurante han estudiado el dinero que los clientes gastan en cenas en función de la edad. El gasto estimado en euros viene dado por la siguiente función:
- EBAU15-Xs

$$f(x) = -\frac{x^2}{30} + 3x - 5, \quad 18 \leq x \leq 65$$

donde x representa la edad, en años, del cliente.

- a) ¿Disminuye el gasto estimado a alguna edad?
- b) ¿A qué edad los clientes tienen un gasto estimado mayor? ¿Cuánto se estima que gastan a esa edad? ¿A qué edad tienen un gasto estimado menor?
- c) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[18; 65]$.

- 28** | El beneficio mensual de una empresa (f), en miles de euros, se relaciona con las toneladas de producto vendido (x) tal como
- EBAU16-Og

sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ 1805 & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

- a) Estudia y representa gráficamente la función f . Comenta dicha gráfica indicando cuál es el beneficio mensual mínimo y cómo evoluciona (aumenta o disminuye) el beneficio según la cantidad de producto vendido.
- b) ¿Puede llegar alguna vez a tener unos beneficios de 1900 miles de euros? ¿y de 1815 miles de euros? En caso de que alcance alguno de estos dos beneficios, indica cuántas toneladas de producto habría vendido.

29

EBAU16-Og

La función de costes marginales de una empresa es $f(x) = \frac{20}{(x+2)^2}$, se pide:

- a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(3) = 0$.
- b) Estudiar y representar gráficamente la función f . Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

30

EBAU16-Os

La propensión marginal al consumo viene dada por una función f con $f(x) = 0,6 - 0,01x$, donde x representa los ingresos. Se pide:

- a) Encontrar la función de consumo F , si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que $F(0) = 0,2$.
- b) Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, 60]$. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 2$.

31

EBAU16-Os

La función de costes de una factoría, se puede estimar mediante la expresión

$$f(x) = 40 - 6x + x^2$$

donde x representa la cantidad producida de determinado artículo, con lo que $x \geq 0$.

- a) ¿Disminuye el coste alguna vez? Determina la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo. ¿Cuánto vale dicho coste?
- b) ¿Cuánto vale el coste si no se produce nada de ese artículo?
- c) Estudia y representa gráficamente la función f .