Ejercicios EBAU (2010-2020)

Geometría e integrales

Ejercicios de geometría analítica

1 EBAU20X

Sean $A(2{,}1{,}0)$, $B(5{,}5{,}0)$ y $C(2{,}1{,}5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2{,}4{,}0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

a) El cuarto vértice D de la cara S.
b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S.
c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E?

2 EBAU20X

Dados dos planos $\begin{cases} \pi\colon x+y-2z=3 \\ \pi'\colon x-z=5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5{,}1{,}0)$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A.
b) Calcula el punto P.

3 EBAU20O

Dados el punto $A(2{,}1{,}1)$ y la recta $r\colon \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$.

a) Calcula un vector director de la recta r.
b) La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r.
c) La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r.

4 EBAU20O

Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1{,}0{,}0)$, $B'(-1{,}2{,}2)$, \$C(0,3,0) y $C'(0{,}4{,}2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos A, B, C; y π', al que pertenecen los puntos A', B', C'. Calcula:

a) Las coordenadas de los puntos restantes: A', B.
b) La distancia entre los planos π y π'.
c) El volumen del prisma triangular.

5 EBAU19X-B

Dados el plano $\pi\colon x+y=1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1,1,1)$ con vector director $\vec{v}_r=(0,1,1)$, calcula:

a) El punto P intersección del plano π y la recta r.
b) El punto A' simétrico de A respecto al plano π.

6 EBAU19X-A

Sean $A(3,1,0)$ y $B(1,3,0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi\colon z=0$.

a) Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D.
b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M.

Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

7 EBAU19O-B

Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él.
b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

8 EBAU19O-A

Sean los planos $\pi_1\colon x+y+z=0$ y π_2. Sabiendo que su intersección es la recta $r\colon \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$, calcula:

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1,1,1)\in\pi_2$.
b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r.

9 EBAU18O-B

Dados la recta $r\colon \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$, el punto $Q(1,1,1)$ y un plano π.

a) Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P,Q)=1$ u.
b) Se sabe que $Q\in\pi$ y que $d(P,Q)=d(P,\pi)$. Determina la ecuación del plano π.

10 EBAU18X-B

Dados los puntos $A(2{,}1{,}0)$ y $B(1{,}0,-1)$ y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida por $s\colon \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas.
b) Determina el punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.

11 EBAU18X-A

Los puntos $A(0{,}1{,}0)$ y $B(-1{,}1{,}1)$ son los vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r\colon \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) Determina el punto C
b) Calcula el área del triángulo.

12 EBAU18O-A

Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones $r\colon \frac{x-1}{2}=y+1=-z+2$. Calcula:

a) Un vector director $\vec{v}_1$ de r.
b) Un vector director $\vec{v}_2$ de s sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1{,}0{,}2)$.
c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas.

13 EBAU17X-B

Dada la recta $r\colon \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-5z=2 \end{cases}$ el plano $\pi\colon ax-y+z+1=0$

a) Halla el valor de a para que sean paralelos.
b) Para $a=2$, calcula la ecuación del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

14 EBAU17X-A

Sea el punto $0A(1{,}2{,}0)$ perteneciente a un plano π. Calcula:

a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0{,}0,-2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A.
b) La ecuación de un plano paralelo a π y que esté a distancia 3 unidades del mismo.
c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi'\colon 2x-y=0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A. (Observación: $A \in \pi'$)

15 EBAU17O-B

Dados los puntos $A(1{,}2{,}0)$, $B(-1{,}1{,}1)$, $C(0{,}0{,}1)$, $D(4{,}1{,}3)$. Determina:

a) Si los cuatro puntos son coplanarios.
b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C.
c) El punto de corte de la recta r con el plano π.

16
EBAU17O-A

Dadas las rectas $r\colon \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ y $s\colon x+1=\frac{y-1}{2}=z$. Calcula:

a) Un vector director de cada recta.
b) El ángulo que forman las rectas.
c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1,2,1)$.

17
EBAU10Xs-B

Considere los puntos $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$ y $C(0,0,-1)$.

a) Dé las ecuaciones de la recta r que pasa por B y C.
b) Calcule el plano π que pasa por A y es perpendicular a r.
c) Halle el punto de corte entre r y π.
d) Obtenga el punto simétrico de A respecto de r.

18
EBAU10Xs-A

Se consideran el plano π_1 que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,-1)$, y el plano π_2 que pasa por los puntos $P(3,0,0)$, $Q(0,6,0)$ y $R(0,0,-3)$. Calcule:

a) Las ecuaciones generales o implícitas de π_1 y π_2.
b) La posición relativa de π_1 y π_2.
c) La distancia entre π_1 y π_2.

19
EBAU10Xg-B

En el espacio se consideran las rectas: r, que pasa por el punto $P(1,2,1)$ y tiene como vector director $v=(1,-1,1)$; y s que pasa por los puntos $A(2,3,2)$ y $B(3,2,3)$.

a) Obtenga las ecuaciones de r y de s.
b) Dé la posición relativa de r y s.

20
EBAU10Xg-A

Sea el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ y+2z-4=0 \end{cases}$. Halle la ecuación del plano que pasa por el punto A y contiene a la recta r.

21
EBAU10Os-B

Considere las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z$ y $s \equiv \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=z$.

a) Dé su posición relativa.

b) Obtenga, si es posible, un plano paralelo a s que contenga a r.

22 EBAU10Os-A

Se consideran la recta r que pasa por los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,-1,3)$, y el plano π que contiene a los puntos $A(1,0,1)$, $B(2,-1,3)$ y $C(4,1,0)$. Calcule:

a) Las ecuaciones implícitas de r y π.
b) La posición relativa de r y π.

23 EBAU10Og-B

Dado el punto $A(0,1,2)$ y el plano $\pi\colon x-y+z=0$

a) Calcule la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto A.
b) Halle el punto intersección entre r y π.
c) Halle el punto simétrico de A respecto de π.

24 EBAU10Og-A

Sean el punto $P(-1,2,0)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{y}{2} = z$. Calcule:

a) La ecuación del plano π perpendicular a r pasando por P.
b) El punto intersección entre r y π.
c) La distancia del punto P la recta r.

Ejercicios de integrales

25 EBAU20X

Calcula una primitiva de la función $f(x) = x\cos(x) - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $(0,3)$.

26 EBAU20O

Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área.
b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2 divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos.
c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene al punto $P(0,1)$.

27 EBAU19X-B

Dadas las curvas $y = \frac{x^2}{2}$ e $y = \frac{4}{x}$.

a) Calcula sus puntos de corte.
b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1,3]$.
c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1,3]$.

28 EBAU19O-A

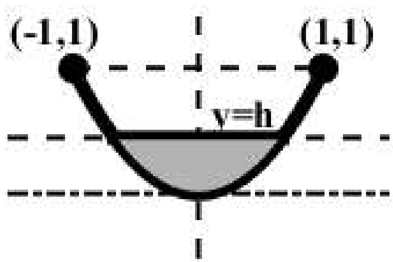
Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx$.

29 EBAU18X-A

Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y de altura 1 m. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.

a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de h se puede expresar como $S(h) = \dfrac{4h\sqrt{h}}{3}$.

b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: $Volumen = S \times longitud$).



30 EBAU18O-B

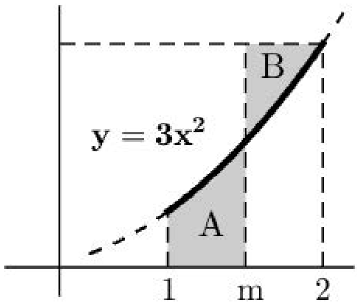
Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-6}$, calcula una primitiva de la función.

31 EBAU17X-A

Sea la gráfica de la parábola $y = 3x^2$ en el intervalo [1,2] y m un valor de dicho intervalo.

a) Halla, en función de m, el área de cada una de las partes sombreadas A y B.

b) ¿Cuál es el valor de m que hace mínima la suma de esas áreas?



32 EBAU17O-A

Sean las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g.
b) Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área.

33 EBAU10Xs-B

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ e^{x-2} + k^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Determine el valor de k para que la función sea continua en el intervalo [0,4].
b) Suponiendo que $k = 1$ halle la recta tangente $x = 3$.
c) Suponiendo que $k = 1$ halle el área que la función determina con el eje OX, para $x \in [0,4]$.

34 EBAU10Xs-A

Se considera la parábola $y = 6x - x^2$.

a) Calcule la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de la parábola en los puntos de corte con el eje OX.
b) Dibuje un esquema del recinto limitado por la gráfica de la parábola y las rectas halladas anteriormente.
c) Calcule el área de ese recinto.

35 EBAU10Xg-B

La curva $y = x^2 + 3$ y la recta $y = 2x + 3$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuje un esquema del recinto.
b) Calcule su área.

36 EBAU10Xg-A | Resuelva por partes $\displaystyle\int e^x \cos 3x\, dx$.

37 EBAU10Os-B | La gráfica de la curva $f(x) = \dfrac{4}{2-x}$ y las rectas $y = 4$ y $x = 0$ encierran un recinto plano.

a) Dibuje aproximadamente dicho recinto.
b) Calcule el área de ese recinto.

38 EBAU10Os-A | La gráfica de la parábola $y^2 = 8x$ la recta $x = 2$ encierran un recinto plano.

a) Dibuje aproximadamente dicho recinto.
b) Calcule el área de ese recinto.

39 EBAU10Og-B | Resuelva por cambio de variable $\displaystyle\int \frac{e^x - 4e^{2x}}{1+e^x}\, dx$.

40 EBAU10Og-A |

a) Resuelva por partes la siguiente integral: $\displaystyle\int x(1-\ln x)\, dx$.
b) De todas las primitivas de $f(x) = x(1-\ln x)$ calcule la que pasa por el punto (1,3).

Soluciones a los ejercicios

S1 |

a) $D = (5,5,5)$
b) $\pi\colon 4x - 3y + 20 = 0$
c) A es el vértice adyacente.

S2 |

a) $\left\{x + z = 5y = 1\right.$
b) $P(4,1,1)$

S3 |

a) $\vec{v}_r = (-1,1,-1)$
b) $\pi\colon 2x + y - z = 4$
c) $s\colon \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$

S4 |

a) $A = (1,1,2)$ y $B = (-1,1,0)$
b) $\pi\colon z = 0$ y $\pi'\colon z = 2$. La distancia es $d(\pi,\pi') = 2$ u.
c) El volumen del prisma es 5 u^3.

S5 |

a) $P(1,0,0)$
b) $A'(0,0,1)$

S6 |

a) $\vec{v}_r \equiv (1,1,2)$; la recta es $r\colon \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$.
b) $C(3,3,0)$ y $D(1,1,0)$

S7 | a) $\pi\colon y + z = 0$
b) $C(1{,}1/3{,}1/3)$ y $D(1, -1/3, -1/3)$

S8 | a) $\pi_2\colon x - 2y + z = 0$
b) $\pi_1'\colon x + y + z \pm 3 = 0$

S9 | a) $P(1{,}1{,}0)$
b) $\pi\colon z = 1$

S10 | a) Al resolver el sistema se obtiene un sistema compatible determinado. Por lo tanto, las rectas **se cortan en un punto**
b) Existen dos soluciones: $C(1{,}1, -1)$ y $C(2{,}0{,}0)$

S11 | a) $C(4{,}1{,}1)$
b) $A = 5/2 = 2{,}5\ \mathrm{u}^2$

S12 | a) $\vec{v}_1 = (2{,}1, -1)$
b) $\vec{v}_2 = (2, -5, -1)$
c) $\pi\colon x + 2z = 5$

S13 | a) Para que sean paralelos, $a = 2$
b) $\pi'\colon 4x + y - 7z - 4 = 0$

S14 | a) $\pi\colon x + 2y + 2z = 5$
b) Dos planos posibles son $\pi_1''\colon x+2y+2z = -4$ o $\pi_2''\colon x+2y+2z = 14$
c) Dos soluciones posibles: $B_1(-1, -2{,}5)$ ó $B_2(3{,}6, -5)$

S15 | a) No son coplanarios
b) $r\colon x - 4 = y - 1 = \frac{z-3}{3}$
c) $C(3{,}0{,}0)$

S16 | a) $\vec{v}_r = (-2{,}1{,}0)$, $\vec{v}_s = (1{,}2{,}1)$
b) $\alpha = \pi/2$, es decir, son perpendiculares.
c) $\pi\colon x + 2y - 5z = 0$

S26 | a) $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \frac{32}{3} = 10{,}6667\ \mathrm{u}^2$
b) $A(-1{,}3)$ y $B(1{,}3)$
c) $\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\,dx = \frac{16}{3} = 5{,}3333\ \mathrm{u}^2$

S27 | a) Punto $(2{,}2)$
b) Esbozo de gráfica
c) $A = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2}\right) dx + \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}\right) dx = 3{,}1507\ \mathrm{u}^2$

S28 | $F(x) = x - \ln(2 + e^x) + C$

S29 | a) $S(h) = \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} (h - x^2)\,dx = \frac{4h\sqrt{h}}{3}\ \mathrm{m}^2$
b) $h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0{,}63$ m.

S30 | $F(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right|^{1/5}\right) + C$

S31

a) $A = (m^3 - 1)$ u^2. $B = (m^3 - 12m + 16)$ u^2

b) La suma de las áreas es mínima para $m = \sqrt{2} = 1{,}4142$

S32

a) $A(0{,}0)$ y $B(4{,}4)$

b) $\text{Área} = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3}$ u^2

S39 $5\ln|e^x + 1| - 4e^x - 4 + C.$

S40

a) $\dfrac{1}{2}x^2(1 - \ln x) + \dfrac{x^2}{4} + C$

b) $\dfrac{1}{2}x^2(1 - \ln x) + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{9}{4}$