Matrices y sistemas de ecuaciones

Ejercicios EBAU

1 EBAU15-Xs

Dada la función $f(x) = x^2 - x$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(6) = 50$.
b) Estudiar y representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

2 EBAU15-Xs

En un restaurante han estudiado el dinero que los clientes gastan en cenas en funcióon de la edad. El gasto estimado en euros viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = -\frac{x^2}{30} + 3x - 5, \qquad 18 \leq x \leq 65$$

donde x representa la edad, en años, del cliente.

a) ¿Disminuye el gasto estimado a alguna edad?
b) ¿A qué edad los clientes tienen un gasto estimado mayor? ¿Cuánto se estima que gastan a esa edad? ¿A qué edad tienen un gasto estimado menor?
c) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[18; 65]$.

3 EBAU16-Og

El beneficio mensual de una empresa (f), en miles de euros, se relaciona con las toneladas de producto vendido (x) tal como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ 1805 & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

a) Estudia y representa gráficamente la función f. Comenta dicha gráfica indicando cuál es el beneficio mensual mínimo y cómo evoluciona (aumenta o disminuye) el beneficio según la cantidad de producto vendido.

b) ¿Puede llegar alguna vez a tener unos beneficios de 1900 miles de euros? ¿y de 1815 miles de euros? En caso de que alcance alguno de estos dos beneficios, indica cuántas toneladas de producto habría vendido.

4 EBAU16-Og

La función de costes marginales de una empresa es $f(x) = \frac{20}{(x+2)^2}$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(3) = 0$.
b) Estudiar y representar gráficamente la función f. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

5 EBAU16-Os

La propensión marginal al consumo viene dada por una función f con $f(x) = 0,6 - 0,01x$, donde x representa los ingresos. Se pide:

a) Encontrar la función de consumo F, si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que $F(0) = 0,2$.
b) Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, 60]$. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 2$.

6 EBAU16-Os

La función de costes de una factoría, se puede estimar mediante la expresión

$$f(x) = 40 - 6x + x^2$$

donde x representa la cantidad producida de determinado artículo, con lo que $x \geq 0$.

a) ¿Disminuye el coste alguna vez? Determina la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo. ¿Cuánto vale dicho coste?
b) ¿Cuánto vale el coste si no se produce nada de ese artículo?
c) Estudia y representa gráficamente la función f.

7 EBAU16-Xg

Tras un estudio detallado de la producción de una fábrica se ha determinado que el rendimiento de un obrero, medido en %, dentro de su turno de trabajo se puede aproximar por la función $f(t) = 48t - 6t^2$, donde t representa el tiempo, en horas, que el obrero lleva trabajando en esa jornada, con lo que $0 \leq t \leq 8$.

a) ¿Es alguna vez el rendimiento nulo? ¿en qué momentos?

b) ¿Cuándo aumenta y/o disminuye el rendimiento? ¿Cuándo se obtiene el rendimiento máximo y qué porcentaje está rindiendo en ese momento?
c) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,8]$.

8
EBAU16-Xg

Dada la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$, se pide:

a) Encontrar una primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$.
b) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,5]$. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

9
EBAU16-Xs

Dada la función $f(x) = 4x - x^3$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 7$.
b) Estudiar y representar gráficamente la función f. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 4$.

10
EBAU16-Xs

En un determinado proceso industrial, la relación existente entre la temperatura del horno y el tiempo que lleva funcionando viene modelizada a través de la siguiente expresión ($f(x)$ representa la temperatura en °C a los x minutos de funcionamiento):

$$f(x) = \begin{cases} 16x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 10 + \frac{500}{x} & \text{si } 10 < x \leq 30 \end{cases}$$

a) ¿Es la temperatura una función continua del tiempo? ¿En qué momento se alcanza la temperatura máxima? ¿Cuál es dicha temperatura?
b) Estudia y representa gráficamente la función f.

11
EBAU17-O

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, se pide:

a) [**0,75 puntos**] Encontrar la primitiva F de $f4 verificando que $F(2) = 1$.
b) [**2,25 puntos**] Estudiar y representar gráficamente la función f. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

12
EBAU17-O

La temperatura de un laboratorio se puede relacionar con el tiempo desde que comienza la jornada laboral mediante la siguiente expresión ($f(x)$ representa la temperatura, en grados centígrados, y x es el tiempo transcurrido, en minutos, desde que comienza la jornada laboral):

$$f(x) = 20 - \frac{5}{4x+5} \qquad x \geq 0$$

a) **[2.5 puntos]** ¿Disminuye en algún momento la temperatura? Estudia y representa gráficamente la función f.
b) **[0.5 puntos]** El sistema de aire acondicionado comenzará a funcionar si la temperatura sube de los 21 grados. ¿Se encenderá el sistema de aire acondicionado en algún instante de tiempo?

13 EBAU17-X

El salario de un trabajador durante los primeros tres años en determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x) = \begin{cases} 1500 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1300 + 200x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -x^2 + 5,5x + 1693 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** ¿Es continua para $x = 2$?
b) **[2,25 puntos]** Estudia y representa la función f. ¿En qué momento el trabajador cobra más? ¿y menos?

14 EBAU17-X

Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función $f(x) = 5 + 6x + 24x^2$. Se pide:

a) **[0,75 puntos]** Encontrar la función del coste total F, si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que $F(2) = 90$.
b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

15 EBAU18-O

El directivo de una empresa cobra cada mes un sueldo fijo de 4000 euros, más una comisión de 30 euros por cantidad de producto vendido, en toneladas. Además, si un mes las ventas superan las 200 toneladas, el directivo recibe un suplemento de 1000 euros.

a) **[1 punto]** Si $f(x)$ representa el sueldo mensual del directivo en función de las toneladas vendidas x, obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 200$.

b) **[2 puntos]** Estudia y representa la función f para valores de x en el intervalo $[0, \infty)$. Considera un mes en el que no se han superado las 200 toneladas de producto vendido, si el directivo ha cobrado el sueldo máximo posible, ¿cuántas ventas ha habido? ¿Y si el directivo ha cobrado el sueldo mínimo posible?

16 EBAU18-O

Dada la función $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(4) = 0$.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 3$.

17 EBAU18-X

La cotización de las acciones (en euros) de una determinada sociedad suponiendo que la bolsa funcionó de continuo todos los días de un mes de 30 días, respondió a la siguiente ley:

$$f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30000}{100} \qquad \text{con } 0 \leq x \leq 30$$

donde x representa el tiempo (en días).

a) **[1,5 puntos]** Determina el período de tiempo en el que la cotización descendió. ¿En qué momento la cotización fue máxima? ¿A cuánto ascendió dicha cotización? ¿En qué momento la cotización fue mínima?

b) **[1,5 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, 30]$.

18 EBAU18-X

Dada la función $f(x) = 4x^3 - 36x$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 0$.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$.

19 EBAU19-O

El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

a) **[1 punto]** Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 30$.
b) **[2 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

20 EBAU19-O

La variación instantánea de la cotización viene dada por la función $f(x) = 0,02x^2 + 1$ donde x representa el tiempo que lleva cotizando desde el comienzo de la semana. Se pide:

a) **[0,75 puntos]** Determinar la función cotización F, si se sabe que dicha función es la primitiva de f y que en el momento inicial la cotización era de 5.
b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función g definida como $g(x) = f(x) - 9, \forall x \in \mathbb{R}$ y calcular el área limitada por la curva g y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

21 EBAU19-X

Dos fuentes de energía A y B producen electricidad a la vez durante 6 horas. Si dado un instante de tiempo x en el intervalo [0,6] se tiene que $f(x) = -x^2 + 6x + 3$ representa la electricidad producida por la fuente A y $g(x) = x+9$ representa la electricidad producida por la fuente B, se pide:

a) **[1 punto]** Determinar en qué momentos están produciendo la misma cantidad de electricidad ambas fuentes. ¿A cuánto asciende la producción de electricidad de cualquiera de las dos fuentes en esos momentos?
b) **[1 punto]** Determinar en qué momentos la producción de la fuente A decrece.
c) **[1 punto]** Obtener el instante de tiempo en el que la producción conjunta de las dos fuentes es máxima.

22 EBAU19-X

Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.
b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por

la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

23 EBAU20-O

Dada la función $f(x) = \frac{a}{x+1}$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10 \cdot \ln(2)$, donde F denota una primitiva de f.

b) **[2 puntos]** Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = -2$.

Solución:

a) Para $a = 10$ se obtiene $F(x) = 10 \cdot \ln|x + 1|$

b) Estudio de la función para $a = 10$:
   - Dominio: $\mathbb{R} - -1$
   - Corte con ordenadas: $(0, 10)$
   - Corte con abscisas: no existe ($f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$)
   - Continuidad: en todos los $\mathbb{R}$ menos en -1 (es decir, en todo su dominio)
   - Asíntotas verticales: $x = -1$
   - Asíntotas horizontales: $y = 0$
   - Máximos: no tiene. Mínimos: no tiene
   - Monotonía: decreciente en todo su dominio
   - Concavidad: cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$ y hacia arriba en $(-1, \infty)$

   El área limitada por la curva, el eje X y las rectas $x = -3$ y $x = -2$ es $10 \cdot \ln(2) \approx 6,931$.

24 EBAU20-O

A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado x toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\frac{1}{900}(-x^2 + 100x - 1600)$ millones de euros, mientras que si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1 - \frac{120}{x}$ millones de euros.

a) **[1,75 puntos]** Obtén la expresión de la función f. Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$.

b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{900}(-x^2 + 100x - 1600) & \text{si } 0 \leq x \leq 100 \\ 1 - \frac{120}{x} & \text{si } 100 < x \end{cases}$$

Estudio de la función:

- Definida en: $[0, \infty)$
- Corte con ordenadas: $(0, -1,78)$
- Corte con abscisas: $(20, 0), (80, 0), (120, 0)$
- Continuidad: NO. Presenta discontinuidad en $x = 100$
- Asíntotas verticales: no tiene
- Asíntotas horizontales: $y = 1$
- Máximos: $(50, 1)$. Mínimos: no tiene
- Monotonía: creciente en $(-\infty, 50)$ y $(100, \infty)$, decreciente en $(50, 100)$
- Concavidad: cóncava hacia abajo en $(0, 100)$ y $(100, \infty)$

b) Beneficio máximo de 1 millón de euros para 50 toneladas de producto fabricadas. El beneficio positivo se alcanza cuando se fabrican entre 20 y 80 toneladas o más de 120 toneladas.

25
EBAU20-X

Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los 2 primeros gigabytes en gratis, pero a partir de 2 gigabytes, pasa a tarifar los gigabytes restantes a 10 céntimos de euro por gigabyte.

a) **[0,75 puntos]** Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x. ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?

b) **[1,75 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una transferencia ha sido de 2,25 euros, ¿cuántos gigabytes se han transferido? ¿Cuál es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

Solución:

a) Si x representa la cantidad transferida, en gigabytes, el coste total en céntimos de euro viene dado por la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 25 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 25 + 10(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudiando la continuidad en el único punto posible ($x = 2$), se obtiene

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} = f(2) = 25$$

Luego el coste es una función continua.

b) Una transferencia que ha costado 2,25 euros habrá sido de 22 gigabytes. No existe coste máximo, ya que la función crece infinitamente.

26
EBAU20-X

Dada la función $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 2$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:

a) $F(x) = 6 \cdot \ln(x+1) - 2x + 2$

b) Estudio de la función:
- Definida en: $[0, \infty)$
- Corte con ordenadas: $(0, 4)$
- Corte con abscisas: $(2, 0)$
- Asíntotas verticales: no tiene
- Asíntotas horizontales: $y = -2$
- Máximos: no tiene. Mínimos: no tiene

La función es siempre decreciente y es cóncava hacia arriba. El área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$ es 2,866.