Ejercicios de EBAU - Matrices y sistemas

1 | Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles (2.5 puntos)

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

2 | Dada la matriz A, calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Su rango. *(1.5 puntos)*
b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. *(0.5 puntos)*
c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. *(0.5 puntos)*

3 | Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$

a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad, O matriz nula). *(1 punto)*
b) Calcula A^12 para los valores de x que verifican la condición anterior. *(0.75 puntos)*
c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A. *(0.75 puntos)*

4 | Dado el sistema $\begin{cases} x + y + az = a \\ x + (a-1)y + az = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases}$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$. *(1.5 puntos)*
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$. *(1 punto)*

5 | En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m centimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) [**0,5 puntos**] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.
b) [**2 puntos**] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución?_ En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

Solución: 5 |

a) $\begin{cases} x + y & = 550 \\ mx + 4my & = 350 \end{cases}$

b) Es necesario discutir primero el sistema, ya sea por Gauss o mediante Rouché-Fröbenius. En ambos casos, se llega a las siguientes conclusiones:

- Si $m = 0$, el sistema es **incompatible** y no tiene solución.
- Si $m \neq 0$, el sistema es **compatible determinado** y tiene una solución única.

El sistema tiene solución para cualquier valor de m diferente de 0 ($m \neq 0$), y la solución es siempre única.

Si cada fotocopia en color cuesta 2 céntimos, tenemos que $m = 2/4 = 0,5$. Obtenemos un *sistema compatible determinado*, que podemos resolver con el método que prefiramos (Gauss o Cramer). Las soluciones del sistema, independientemente del método empleado, son:

$$\begin{cases} x = 500 \\ y = 50 \end{cases}$$

Por lo tanto, se hicieron 500 fotocopias en blanco y negro.

6 | *[EBAU20-X]* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$$

a) **[1 puntos]** Si $(A + B) \cdot C = B \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

Solución: 6 |

a) $(A + B) \cdot C = B \cdot C \iff \begin{cases} mx - y & = 1 \\ -x + my & = 1 - 2m \end{cases}$

b) Es necesario discutir primero el sistema, ya sea por Gauss o mediante Rouché-Fröbenius. En ambos casos, se llega a las siguientes conclusiones:

- Si $m = -1$, el sistema es **incompatible** y no tiene solución.
- Si $m = 1$, el sistema es **compatible indeterminado** y tiene infinitas soluciones.
- Si $m \neq \pm 1$, el sistema es **compatible determinado** y tiene una solución única.

El sistema tiene solución para cualquier valor de m diferente de -1 ($m \neq -1$), y la solución es única cuando $m \neq \pm 1$.

Para $m = 2$, por lo tanto, obtenemos un *sistema compatible determinado*, que podemos resolver con el método que prefiramos (Gauss o Cramer).

Las soluciones del sistema en cualquier caso son:

$$\begin{cases} x = -1/3 \\ y = -5/3 \end{cases}$$