Integratie dx

Academiejaar 2016-2017

Dr. Jens Buysse

HoGent
BEDRIJF
EN
ORGANISATIE

WWW.HOGENT.BE

Gegenereerd op 18 april 2017

Inhoudsopgave

1. Inleiding

2. Basisvormen

In wat volgt beschrijven we de elementaire basisvormen van de integraalrekening.

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ \ n \neq -1 \tag{2.1}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| \tag{2.2}$$

$$\int u\ dv = uv - \int v du \tag{2.3}$$

$$\int e^x\,dx = e^x \tag{2.4}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x \tag{2.5}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x \tag{2.6}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \tag{2.7}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \tag{2.8}$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| \tag{2.9}$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| \tag{2.10}$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x \tag{2.11}$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x \tag{2.12}$$

$$\int \frac{a}{a^2+x^2}\,dx = \tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{2.13}$$

$$\int \frac{a}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| \tag{2.14}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \tag{2.15}$$

$$\int \frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sec^{-1}\frac{x}{a} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \cosh^{-1}\frac{x}{a} \\ &= \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx &= \sinh^{-1}\frac{x}{a} \\ &= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\end{aligned} \tag{2.18}$$

3. Integratie door substitutie

3.1 Lineariteit van integratie

De afgeleide van het veelvoud van een functie is het veelvoud van de de afgeleide van die functie. De afgeleide van de som van twee functies is de som van de afgeleide van beide functies.

Stelling 1. *Lineariteit van de integratie Stel dat f en g twee integreerbare functies zijn, $a, b \in \mathbb{R}$, dan is*

$$\int_a^b (af(x) + bg(x))\, dx = \quad a \int_a^b f(x)\, dx + b \int_a^b g(x)\, dx \tag{3.1}$$

De kettingregel voor de afgeleide van samengestelde functies geeft aanleiding tot volgende stelling voor integralen.

Stelling 2. *Stel f een functie met een primitieve F zodat*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

en g een afleidbare functie, dan is met $g(x) = t$ en $g'(x)\, dx = dt$

$$\int f(g(x)).g'(x)\, dx = \int f(t) dt = F(g(x)) + C, C \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

4. Partiële Integratie

De productregel voor afgeleiden levert een stelling voor integralen.

Stelling 3. *Partiële integratie Zij u, v afleidbare functies, dan is*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \quad u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \tag{4.1}$$

Hierbij vallen ons twee zaken direct op:

1. Het eerste deel van de som bevat geen integraal meer.
2. Het tweede deel bevat een nieuwe afgeleide en primaire functie.

Oefening 4.1. *Hoe zou je met bovenstaande formule onderstaande integraal oplossen?*

$$\int xe^x\,dx$$

Stel $u(x) = x$ en $u'(x) = 1$ en stel $v'(x) = e^x$ zodat $v(x) = e^x$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C, C \in \mathbb{R}$$

Oefening 4.2. *Los onderstaande integraal op*

$$\int 9x^2 ln(x)\, dx$$

Stel $u(x) = ln(x)$ *en* $u'(x) = \frac{1}{x}$ *en stel* $v'(x) = 9x^2$ *zodat* $v(x) = 3x^2$. *Partiële integratie geeft dan*

$$\int 9x^2 ln(x)\, dx = ln(x)3x^2 - \int \frac{1}{x} 3x^2\, dx = 3x^3 ln(x) - x^3 + C, C \in \mathbb{R}$$

Indien je de $u(x)$ en $v(x)$ verkeerd kiest kan het zijn dat je een moeilijkere integraal bekomt. Het is dus belangrijk een goede keuze te maken voor u en v.

Oefening 4.3. *Los onderstaande integraal op*

$$\int x sin(x)\, dx$$

Stel $u(x) = x$ *en* $u'(x) = 1$ *en stel* $v'(x) = sin(x)$ *zodat* $v(x) = -cos(x)$. *Partiële integratie geeft dan*

$$\int x sin(x)\, dx = -x cos(x) + \int cos(x)\, dx = -x cos(x) + sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

Oefening 4.4. *Los onderstaande integraal op*

$$\int x e^{2x}\, dx$$

Stel $u(x) = x$ *en* $u'(x) = 1$ *en stel* $v'(x) = e^{2x}$ *zodat* $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. *Partiële integratie geeft dan*

$$\int x e^{2x}\, dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = 3x^3 ln(x) - x^3 + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int x e^{2x}\, dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{4} \int e^{2x} d2x = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} + C, C \in \mathbb{R}$$

Enkele tips om partiële integratie te herkennen:

- Partiële integratie wordt gebruikt als de integrand geen onmiddellijke integratie toelaat.
- Partiële integratie wordt gebruikt voor integratie van een produ ct van twee functies, op voorwaarde dat de nieuwe integraal eenvoudiger word t (bv. een macht doen dalen). Eventueel

moet men herhaalde malen partieel integreren.

- Soms krijgt men na (herhaald) partieel integreren opnieuw de gevraagde integraal terug. Zie bijvoorbeeld oefening 4.5.
- Het is goed even op te merken dat, als er bij het oplossen van integralen een oplossingsmethode is, deze niet noodzakelijk uniek is.

Oefening 4.5. *Los onderstaande integraal op*

$$\int sin(x)e^x\,dx$$

Stel $u(x) = e^x$ *en* $v'(x) = sin(x)$ *zodat* $v(x) = -cos(x)$

$$\int sin(x)e^x\,dx = \quad -e^x cos(x) + \textstyle\int e^x cos(x) \tag{4.2}$$

$$-e^x cos(x) + \textstyle\int e^x d sin(x) \tag{4.3}$$

$$-e^x cos(x) + e^x sin(x) - \textstyle\int sin(x)e^x\,dx \tag{4.4}$$

We komen dus in het linkerlid en rechterlid hetzelfde tegen. Brengt men deze term uit het rechterlid naar het linkerlid krijg je

$$2\int sin(x)e^x\,dx = \quad e^x(sin(x) - cos(x)) \tag{4.5}$$

$$\int sin(x)e^x\,dx = \quad \tfrac{1}{2}(e^x(sin(x) - cos(x))) \tag{4.6}$$

■

Oefening 4.6. *Los onderstaande integraal op*

$$\int ln(x)\,dx$$

Stel $u(x) = x$ *en* $v'(x) = \frac{1}{x}$ *zodat* $v(x) = ln(x)$

$$\int ln(x)\,dx = \quad xln(x) - \textstyle\int \frac{x}{x}\,dx \tag{4.7}$$

$$xln(x) - \textstyle\int\, dx = xln(x) - x + C \in \mathbb{R} \tag{4.8}$$

■

Oefening 4.7. *Los onderstaande integraal op*

$$\int (2x^2 - 4x)e^{2x}\,dx$$

Stel $u(x) = (2x^2 - 4x)$ *en* $v'(x) = e^{2x}$ *zodat* $v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$

$$\int (2x^2 - 4x)e^{2x}\,dx = \quad (x^2 - 4x)\tfrac{e^{2x}}{2} - \int \tfrac{e^{2x}}{2} * (4x - 4)\,dx \tag{4.9}$$

$$(x^2 - 3x + \tfrac{3}{2}e^{2x} + C \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

■

Stelling 4. *Partiële integratie voor bepaalde integralen Stel u en v functies gedefinieerd op het interval I en* $[a,b]$ *zit volledig in I dan geldt:*

$$\int_a^b u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \tag{4.11}$$

Oefening 4.8. *Lost onderstaande integraal op*

$$\int_1^e ln(x)x\,dx$$

Oplossing:

$$\int_1^e ln(x)d\frac{x^2}{2} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

■

5. Inhoudsberekening

5.1 Volume van omwentelingslichamen

Een continue functie $f(x) > 0$ in interval $[a,b]$ wentelt om de x-as en bepaalt zo een omwentelingslichaam met een zeker volume of inhoud.

Laten we eens zien hoe we een formule kunnen opstellen om dit volume te berekenen.

5.1.1 Riemansom van omwentelingslichaam

In het interval $[a,b]$ kiezen we de waarden $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$. Neem $a = x_0$ en $b = x_n$. We kiezen in elk deelinterval $[x_{i-1}, x_i]$ een waarde s_i die de functiewaarde in dat interval zo goed mogelijk benadert. Beschouw de rechthoeken met basis $(x_i - x_{i-1})$ en hoogte s_i. Als een dergelijke rechthoek wentelt om de x-as, bepaalt het een cilinder met volume

$$\pi \times s_i^2 \times (x_i - x_{i-1})$$

De som van al deze cilinderinhouden is dan een Riemannsom

$$\sum_i^n \pi \times s_i^2 \times (x_i - x_{i-1})$$

De limiet van deze som, voor $n \to \infty$, is de bepaalde integraal

$$\int_a^b \pi f(x)^2\, dx$$

Stelling 5. *Formule omwentelingslichaam Een continue functie $f(x)$ met positieve beelden in interval $[a,b]$, en wentelend om de x-as definieert een lichaam met volume*

$$\int_a^b \pi f(x)^2\, dx \tag{5.1}$$

Voorbeeld 5.1. *de vergelijking van een cirkel is $x^2+y^2=r^2$. Als de kromme $y=\sqrt{(r^2-x^2)}$ wentelt om de x-as ontstaat een bol met straal r. Het volume wordt dan voorgesteld als*

$$\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\, dx=\cdots=(4/3).\pi.r^3$$

■

5.2 Voorbeelden

5.2.1 Inhoud afgeknotte kegel

De afgeknotte kegel ontstaat door wentelen van een rechthoekig trapezium om zijn rechthoekzijde. De richtingscoëfficiënt van de rechte PQ is $\frac{(g-b)}{h}$ en de vergelijking van PQ is

$$y=\frac{(g-b)}{h}x+b$$

We noemen G en B de oppervlakte van respectievelijk grondvla k en bovenvlak. De inhoud van de afgeknotte kegel kan je dan berekenen.

Oefening 5.1. *Bereken de inhoud van de afgeknotte kegel.* ■

5.2.2 Inhoud bolsegment, bol, bolschijf en bolschil

De bol heeft straal r. De inhoud van het segment met hoogte h is kan je bereken als je weet dat de de hoogte met de x-as en de y-as een vierkant maakt.

Oefening 5.2. *Bereken de inhoud van het bolsegment.* ■

Oefening 5.3. *Hoe moeten we h aanpassen om de inhoud van de volledige bol te verkrijgen?* ■