Integratie dx

Academiejaar 2016-2017

Dr. Jens Buysse

HoGent
BEDRIJF
EN
ORGANISATIE

WWW.HOGENT.BE

Gegenereerd op 11 april 2017

Inhoudsopgave

1. Inleiding

2. Basisvormen

In wat volgt beschrijven we de elementaire basisvormen van de integraalrekening.

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ \ n \neq -1 \tag{2.1}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| \tag{2.2}$$

$$\int u\ dv = uv - \int v du \tag{2.3}$$

$$\int e^x\,dx = e^x \tag{2.4}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x \tag{2.5}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x \tag{2.6}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \tag{2.7}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \tag{2.8}$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| \tag{2.9}$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| \tag{2.10}$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x \tag{2.11}$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x \tag{2.12}$$

$$\int \frac{a}{a^2+x^2}\,dx = \tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{2.13}$$

$$\int \frac{a}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| \tag{2.14}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \tag{2.15}$$

$$\int \frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sec^{-1}\frac{x}{a} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \cosh^{-1}\frac{x}{a} \\ &= \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx &= \sinh^{-1}\frac{x}{a} \\ &= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\end{aligned} \tag{2.18}$$

3. Integratie door substitutie

3.1 Lineariteit van integratie

De afgeleide van het veelvoud van een functie is het veelvoud van de de afgeleide van die functie. De afgeleide van de som van twee functies is de som van de afgeleide van beide functies.

Stelling 1. *Lineariteit van de integratie Stel dat f en g twee integreerbare functies zijn, $a, b \in \mathbb{R}$, dan is*

$$\int_a^b (af(x) + bg(x))\, dx = \quad a\int_a^b f(x)\, dx + b\int_a^b g(x)\, dx \tag{3.1}$$

De kettingregel voor de afgeleide van samengestelde functies geeft aanleiding tot volgende stelling voor integralen.

Stelling 2. *Stel f een functie met een primitieve F zodat*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

en g een afleidbare functie, dan is met $g(x) = t$ en $g'(x)\, dx = dt$

$$\int f(g(x)).g'(x)\, dx = \int f(t) dt = F(g(x)) + C, C \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

4. Partiële Integratie

De productregel voor afgeleiden levert een stelling voor integralen.

Stelling 3. *Partiële integratie Zij u, v afleidbare functies, dan is*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \quad u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \tag{4.1}$$

Hierbij vallen ons twee zaken direct op:

1. Het eerste deel van de som bevat geen integraal meer.
2. Het tweede deel bevat een nieuwe afgeleide en primaire functie.

Oefening 4.1. *Hoe zou je met bovenstaande formule onderstaande integraal oplossen?*

$$\int xe^x\,dx$$

Stel $u(x) = x$ en $u'(x) = 1$ en stel $v'(x) = e^x$ zodat $v(x) = e^x$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C, C \in \mathbb{R}$$

Oefening 4.2. *Los onderstaande integraal op*

$$\int 9x^2 ln(x)\, dx$$

Stel $u(x) = ln(x)$ *en* $u'(x) = \frac{1}{x}$ *en stel* $v'(x) = 9x^2$ *zodat* $v(x) = 3x^2$. *Partiële integratie geeft dan*

$$\int 9x^2 ln(x)\, dx = ln(x)3x^2 - \int \frac{1}{x}3x^2\, dx = 3x^3 ln(x) - x^3 + C, C \in \mathbb{R}$$

Indien je de $u(x)$ en $v(x)$ verkeerd kiest kan het zijn dat je een moeilijkere integraal bekomt. Het is dus belangrijk een goede keuze te maken voor u en v.

Oefening 4.3. *Los onderstaande integraal op*

$$\int x sin(x)\, dx$$

Stel $u(x) = x$ *en* $u'(x) = 1$ *en stel* $v'(x) = sin(x)$ *zodat* $v(x) = -cos(x)$. *Partiële integratie geeft dan*

$$\int x sin(x)\, dx = -x cos(x) + \int cos(x)\, dx = -x cos(x) + sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

Oefening 4.4. *Los onderstaande integraal op*

$$\int x e^{2x}\, dx$$

Stel $u(x) = x$ *en* $u'(x) = 1$ *en stel* $v'(x) = e^{2x}$ *zodat* $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. *Partiële integratie geeft dan*

$$\int x e^{2x}\, dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = 3x^3 ln(x) - x^3 + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int x e^{2x}\, dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}\int e^{2x} d2x = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} + C, C \in \mathbb{R}$$

Enkele tips om partiële integratie te herkennen:

- Partiële integratie wordt gebruikt als de integrand geen onmiddellijke integratie toelaat.
- Partiële integratie wordt gebruikt voor integratie van een produ ct van twee functies, op voorwaarde dat de nieuwe integraal eenvoudiger word t (bv. een macht doen dalen). Eventueel

moet men herhaalde malen partieel integreren.

- Soms krijgt men na (herhaald) partieel integreren opnieuw de gevraagde integraal terug. Zie bijvoorbeeld oefening 4.5.
- Het is goed even op te merken dat, als er bij het oplossen van integralen een oplossingsmethode is, deze niet noodzakelijk uniek is.

Oefening 4.5. *Los onderstaande integraal op*

$$\int sin(x)e^x\,dx$$

Stel $u(x) = e^x$ *en* $v'(x) = sin(x)$ *zodat* $v(x) = -cos(x)$

$$\int sin(x)e^x\,dx = -e^x cos(x) + \int e^x cos(x) \tag{4.2}$$

$$-e^x cos(x) + \int e^x d sin(x) \tag{4.3}$$

$$-e^x cos(x) + e^x sin(x) - \int sin(x)e^x\,dx \tag{4.4}$$

We komen dus in het linkerlid en rechterlid hetzelfde tegen. Brengt men deze term uit het rechterlid naar het linkerlid krijg je

$$2\int sin(x)e^x\,dx = e^x(sin(x) - cos(x)) \tag{4.5}$$

$$\int sin(x)e^x\,dx = \tfrac{1}{2}(e^x(sin(x) - cos(x))) \tag{4.6}$$

■

Oefening 4.6. *Los onderstaande integraal op*

$$\int ln(x)\,dx$$

Stel $u(x) = x$ *en* $v'(x) = \frac{1}{x}$ *zodat* $v(x) = ln(x)$

$$\int ln(x)\,dx = xln(x) - \int \tfrac{x}{x}\,dx \tag{4.7}$$

$$xln(x) - \int\,dx = xln(x) - x + C \in \mathbb{R} \tag{4.8}$$

■

Oefening 4.7. *Los onderstaande integraal op*

$$\int (2x^2 - 4x)e^{2x}\,dx$$

Stel $u(x) = (2x^2 - 4x)$ *en* $v'(x) = e^{2x}$ *zodat* $v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$

$$\int (2x^2 - 4x)e^{2x}\, dx = \quad (x^2 - 4x)\tfrac{e^{2x}}{2} - \int \tfrac{e^{2x}}{2} * (4x - 4)\, dx \tag{4.9}$$

$$(x^2 - 3x + \tfrac{3}{2}e^{2x} + C \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

■

Stelling 4. *Partiële integratie voor bepaalde integralen Stel u en v functies gedefinieerd op het interval I en* $[a,b]$ *zit volledig in I dan geldt:*

$$\int_a^b u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \tag{4.11}$$

Oefening 4.8. *Lost onderstaande integraal op*

$$\int_1^e ln(x)x\, dx$$

Oplossing:

$$\int_1^e ln(x)d\frac{x^2}{2} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

■