Integratie dx

Academiejaar 2016-2017

Dr. Jens Buysse

HoGent
BEDRIJF
EN
ORGANISATIE

WWW.HOGENT.BE

Gegenereerd op 11 april 2017

Inhoudsopgave

1. Inleiding

2. Basisvormen

In wat volgt beschrijven we de elementaire basisvormen van de integraalrekening.

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ \ n \neq -1 \tag{2.1}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| \tag{2.2}$$

$$\int u\ dv = uv - \int vdu \tag{2.3}$$

$$\int e^x\,dx = e^x \tag{2.4}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x \tag{2.5}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x \tag{2.6}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \tag{2.7}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \tag{2.8}$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| \tag{2.9}$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| \tag{2.10}$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x \tag{2.11}$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x \tag{2.12}$$

$$\int \frac{a}{a^2+x^2}\,dx = \tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{2.13}$$

$$\int \frac{a}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| \tag{2.14}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \tag{2.15}$$

$$\int \frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sec^{-1}\frac{x}{a} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \cosh^{-1}\frac{x}{a} \\ &= \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx &= \sinh^{-1}\frac{x}{a} \\ &= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\end{aligned} \tag{2.18}$$

3. Integratie door substitutie

4. Partiële Integratie

De productregel voor afgeleiden levert een stelling voor integralen.

Stelling 1. *Partiële integratie Zij u, v afleidbare functies, dan is*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \quad u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \tag{4.1}$$

Hierbij vallen ons twee zaken direct op:

1. Het eerste deel van de som bevat geen integraal meer.
2. Het tweede deel bevat een nieuwe afgeleide en primaire functie.

Oefening 4.1. *Hoe zou je met bovenstaande formule onderstaande integraal oplossen?*

$$\int xe^x\,dx$$

Stel $u(x) = x$ en $u'(x) = 1$ en stel $v'(x) = e^x$ zodat $v(x) = e^x$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C, C \in \mathbb{R}$$

Oefening 4.2. *Los onderstaande integraal op*

$$\int 9x^2 ln(x)\, dx$$

Stel $u(x) = ln(x)$ *en* $u'(x) = \frac{1}{x}$ *en stel* $v'(x) = 9x^2$ *zodat* $v(x) = 3x^2$. *Partiële integratie geeft dan*

$$\int 9x^2 ln(x)\, dx = ln(x)3x^2 - \int \frac{1}{x} 3x^2\, dx = 3x^3 ln(x) - x^3 + C, C \in \mathbb{R}$$

■

Indien je de $u(x)$ en $v(x)$ verkeerd kiest kan het zijn dat je een moeilijkere integraal bekomt. Het is dus belangrijk een goede keuze te maken voor u en v.

Oefening 4.3. *Los onderstaande integraal op*

$$\int x sin(x)\, dx$$

Stel $u(x) = x$ *en* $u'(x) = 1$ *en stel* $v'(x) = sin(x)$ *zodat* $v(x) = -cos(x)$. *Partiële integratie geeft dan*

$$\int x sin(x)\, dx = -x cos(x) + \int cos(x)\, dx = -x cos(x) + sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

■

Oefening 4.4. *Los onderstaande integraal op*

$$\int x e^{2x}\, dx$$

Stel $u(x) = x$ *en* $u'(x) = 1$ *en stel* $v'(x) = e^{2x}$ *zodat* $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. *Partiële integratie geeft dan*

$$\int x e^{2x}\, dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = 3x^3 ln(x) - x^3 + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int x e^{2x}\, dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{4} \int e^{2x} d2x = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} + C, C \in \mathbb{R}$$

■

Enkele tips om partiële integratie te herkennen:

- Partiële integratie wordt gebruikt als de integrand geen onmiddellijke integratie toelaat.
- Partiële integratie wordt gebruikt voor integratie van een produ ct van twee functies, op voorwaarde dat de nieuwe integraal eenvoudiger word t (bv. een macht doen dalen). Eventueel

moet men herhaalde malen partieel integreren.
- Soms krijgt men na (herhaald) partieel integreren opnieuw de gevraagde integraal terug. Zie bijvoorbeeld oefening 4.5.
- Het is goed even op te merken dat, als er bij het oplossen van integralen een oplossingsmethode is, deze niet noodzakelijk uniek is.

Oefening 4.5. *Los onderstaande integraal op*

$$\int sin(x)e^x\,dx$$

Stel $u(x) = e^x$ *en* $v'(x) = sin(x)$ *zodat* $v(x) = -cos(x)$

$$\int sin(x)e^x\,dx = \quad -e^x cos(x) + \int e^x cos(x) \tag{4.2}$$

$$-e^x cos(x) + \int e^x d sin(x) \tag{4.3}$$

$$-e^x cos(x) + e^x sin(x) - \int sin(x)e^x\,dx \tag{4.4}$$

We komen dus in het linkerlid en rechterlid hetzelfde tegen. Brengt men deze term uit het rechterlid naar het linkerlid krijg je

$$2\int sin(x)e^x\,dx = \quad e^x(sin(x) - cos(x)) \tag{4.5}$$

$$\int sin(x)e^x\,dx = \quad \tfrac{1}{2}(e^x(sin(x) - cos(x))) \tag{4.6}$$

■

Stelling 2. *Partiële integratie voor bepaalde integralen Stel u en v functies gedefinieerd op het interval I en* $[a,b]$ *zit volledig in I dan geldt:*

$$\int_a^b u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \tag{4.7}$$

Oefening 4.6. *Lost onderstaande integraal op*

$$\int_1^e ln(x)x\,dx$$

Oplossing:

$$\int_1^e ln(x)d\frac{x^2}{2} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

■