

# Prueba N°2 Física Computacional I - 1S 2023

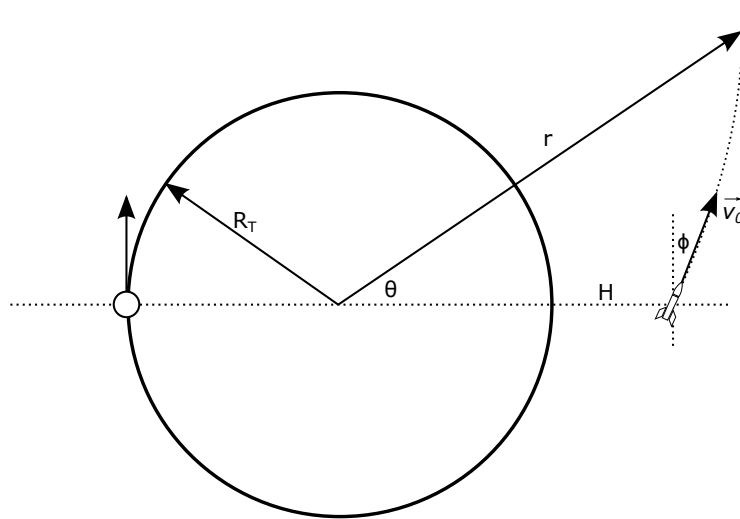
Prof. Guillermo Fonseca Kuvacic

Junio 2023

Prueba con exigencia del 60%. Se necesitan 36 puntos para alcanzar una nota de 4.0.

## Pregunta 1 - Proyectoil (30 puntos)

La figura muestra un misil que se encuentra a una distancia  $H = 1072km$  de la superficie de la tierra.



Las ecuaciones de movimiento del misil, en coordenadas polares, son las siguientes:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM_T}{r^2}$$
$$r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta}$$

Donde:

- $G = 6.674 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$
- $M_T = 5.972 \times 10^{24} kg$
- $R_T = 6371 km$

El misil parte desde  $\theta = 0^\circ$  y tiene una velocidad inicial  $|\vec{v}_0| = 7300 m/s$  y un ángulo de lanzamiento  $\phi = 15^\circ$ .

Suponga que se desea lanzar un proyectil tangente a la superficie de la tierra desde  $\theta = 180^\circ$  para interceptar al misil. El proyectil está sujeto a las mismas ecuaciones de movimiento del misil.

- Simule el proyectil interceptor estableciendo las condiciones iniciales necesarias para interceptar al misil antes que este alcance una distancia de  $2000 km$  (en descenso) sobre la superficie de la tierra.

**Hint:** Este es un sistema de 4 EDOs de primer orden, y se requiere 4 condiciones para que sea soluble. Como PVI se necesita inicialmente la posición compuesta por el radio y el ángulo, así como también de la velocidad compuesta por la velocidad radial y angular. Concluya que condiciones existen y cuales faltan (es posible que tenga relaciones entre variables en vez de variables explícitas, recordar que esto se conoce como **condición mixta**).

Finalmente defina las condiciones finales. Para esto puede calcular las condiciones finales del misil y concluir la posición final a la que debe llegar el proyectil. Con esto puede definir un PVF, que puede resolverlo con los métodos visto en clases.

- Construya un gráfico en coordenadas polares de la simulación utilizando gnuplot.

**Hint:** El siguiente código le puede ayudar:

```
#La tierra en gnuplot
set size square 1,1
set parametric;
plot [0:2*pi] 6378100.0*sin(t),6378100.0*cos(t)
```

## Pregunta 2 - Ec. de Schrödinger estacionaria (15 puntos)

Considere la ecuación de Schrödinger estacionaria y unidimensional, como un problema de autovalores:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi_n(x) + V(x)\phi_n(x) = E_n\phi_n(x)$$

Con condiciones de Dirichlet:

$$\phi_n(0) = 0 \tag{1}$$

$$\phi_n(L) = 0 \tag{2}$$

Considere el potencial:

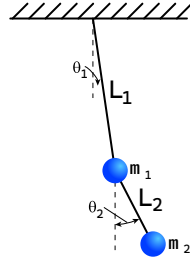
$$V(x) = \begin{cases} 50 * x/L, & \text{si } 0 < x < L \\ \infty, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Considere  $L=1$  y determine numéricamente los primeros 5 autovalores y autofunciones.

**Hint:** Puede resolver este problema con el algoritmo de Numerov, junto con el método de shooting y bisección, o puede construir una matriz con diferencias finitas y resolver el problema de autovalor como se vió en clases. Revise Capitulo 10 de *Basic Concepts in Computational Physics* (Benjamin Stickler & Ewald Schachinger).

### Pregunta 3 - Péndulo doble (15 puntos)

La figura muestra un sistema de un péndulo doble.



Las ecuaciones de movimiento de este sistema son las siguientes:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2 \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 (\dot{\theta}_2^2 L_2 + \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_1(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1^2 L_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_2(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

Considere las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\theta_1(t=0) &= \pi/2 \\ \dot{\theta}_1(t=0) &= 0 \\ \theta_2(t=3s) &= \pi \\ \dot{\theta}_2(t=0) &= 0\end{aligned}$$

Responda las siguientes preguntas.

- ¿A qué tipo de problema corresponde?
- ¿Es posible resolver el problema con los métodos visto en clases? En caso de ser así ¿Qué método utilizaría y por qué?
- Si se aplicara diferencias finitas sobre la ecuación diferencial, ¿Es posible resolver el problema mediante métodos de resolución de sistemas lineales? (como Gauss-Jordan) ¿Por qué?
- Si se utilizara el método de shooting no lineal, ¿Es posible resolver el problema mediante el método de Newton-Raphson (de una variable)? ¿Por qué?

Explique con sus propias palabras.