Ejercicio 1
Lógica computacional

Emmanuel Peto Gutiérrez

30 de agosto de 2022

1.
a)
Sean A y B fórmulas, y sea p una variable proposicional. Se define eln recursivamente de la siguiente manera:
$eln(\top) = \top$
$eln(\bot) = \bot$
$eln(p) = p$
$eln(\neg A) = (eln(A) \to \bot)$
$eln(A \star B) = eln(A) \star eln(B)$, donde $\star \in \{\to, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$
$eln((A)) = (eln(A))$

b)
$eln(\neg p \wedge \neg(q \vee r))$
$= eln(\neg p) \wedge eln(\neg(q \vee r))$
$= (eln(p) \to \bot) \wedge (eln((q \vee r)) \to \bot)$
$= (p \to \bot) \wedge ((eln(q \vee r)) \to \bot)$
$= (p \to \bot) \wedge ((eln(q) \vee eln(r)) \to \bot)$
$= (p \to \bot) \wedge ((q \vee r) \to \bot)$

c)
La relación es que $\mathcal{I}$ es modelo de A si y sólo si $\mathcal{I}$ es modelo de $eln(A)$. Esto se debe a que $\neg A \equiv A \to \bot$, lo cual se puede comprobar mediante sus tablas de verdad:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	$A \to \bot$
0	1
1	0

2.
Se usará el método indirecto para demostrar que el siguiente argumento es correcto:
$(s \to p) \vee (t \to q) / \therefore (s \to q) \vee (t \to p)$

Es decir, para demostrar la correctitud del argumento $\Gamma / \therefore A$, se mostrará que el conjunto $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible.

$\Gamma \cup \{\neg A\} = \{(s \to p) \vee (t \to q), \neg((s \to q) \vee (t \to p))\}$

Para simplificar, se pasará la fórmula $\neg((s \to q) \vee (t \to p))$ a su equivalente en forma normal negativa.

$\neg((s \to q) \vee (t \to p))$
$\equiv \neg(s \to q) \wedge \neg(t \to p)$
$\equiv s \wedge \neg q \wedge t \wedge \neg p$

Así, hay que mostrar que el conjunto de fórmulas
$\{(s \to p) \vee (t \to q), s \wedge \neg q \wedge t \wedge \neg p\}$
es insatisfacible.

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación tal que $\mathcal{I}(s \wedge \neg q \wedge t \wedge \neg p) = 1$. Entonces

- $\mathcal{I}(s) = 1$
- $\mathcal{I}(\neg q) = 1 \Rightarrow \mathcal{I}(q) = 0$
- $\mathcal{I}(t) = 1$
- $\mathcal{I}(\neg p) = 1 \Rightarrow \mathcal{I}(p) = 0$

Con esto se tiene que sólo existe una asignación de valores a las variables s, q, t y p tal que $\mathcal{I}(s \wedge \neg q \wedge t \wedge \neg p) = 1$. Pero con esta asignación $\mathcal{I}(s \to p) = 0$, $\mathcal{I}(t \to q) = 0$ y entonces $\mathcal{I}((s \to p) \vee (t \to q)) = 0$. Por lo que no existe un estado $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}((s \to p) \vee (t \to q)) = 1$ y $\mathcal{I}(s \wedge \neg q \wedge t \wedge \neg p) = 1$, y por lo tanto el conjunto $\Gamma \cup \{\neg A\} = \{(s \to p) \vee (t \to q), s \wedge \neg q \wedge t \wedge \neg p\}$ es insatisfacible. ■

Se usará el método directo para demostrar la correctitud del argumento
$p \wedge q,\ r \wedge \neg s,\ q \to p \to t,\ t \to \neg(\neg s \to w) \to \neg r \ / \therefore w$

Es decir, que dada una $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(F) = 1, \forall F \in \Gamma$, se concluye que $\mathcal{I}(w) = 1$.

1) $\mathcal{I}(p \wedge q) = 1$
2) $\mathcal{I}(r \wedge \neg s) = 1$
3) $\mathcal{I}(q \to p \to t) = 1$
4) $\mathcal{I}(t \to \neg(\neg s \to w) \to \neg r) = 1$
5) $\mathcal{I}(p) = 1$, por 1)
6) $\mathcal{I}(q) = 1$, por 1)
7) $\mathcal{I}(r) = 1$, por 2)
8) $\mathcal{I}(\neg s) = 1$, por 2)
9) $\mathcal{I}(s) = 0$, por 8)
10) $\mathcal{I}(p \to t) = 1$, por 3) y 6)
11) $\mathcal{I}(t) = 1$, por 5) y 10)
12) $\mathcal{I}(\neg(\neg s \to w) \to \neg r) = 1$, por 4) y 11)
13) $\mathcal{I}(\neg r) = 0$, por 7)
14) $\mathcal{I}(\neg(\neg s \to w)) = 0$, por 12) y 13)
15) $\mathcal{I}(\neg s \to w) = 1$, por 14)
16) $\mathcal{I}(w) = 1$, por 8) y 15) ■

3.

Para demostrar que las fórmulas son equivalentes, se tomará la fórmula $p \lor q \to p \lor r$ y se aplicarán reglas de equivalencia hasta llegar a $p \lor (q \to r)$.

$p \lor q \to p \lor r$
$\equiv \neg(p \lor q) \lor (p \lor r)$, por eliminación del conectivo $\to$
$\equiv (\neg p \land \neg q) \lor (p \lor r)$, por De Morgan
$\equiv (p \lor r) \lor (\neg p \land \neg q)$, por conmutatividad de $\lor$
$\equiv (p \lor r \lor \neg p) \land (p \lor r \lor \neg q)$, por distributividad y asociatividad
$\equiv (p \lor \neg p \lor r) \land (p \lor \neg q \lor r)$, por conmutatividad de $\lor$
$\equiv ((p \lor \neg p) \lor r) \land (p \lor (\neg q \lor r))$, por asociatividad
$\equiv (\top \lor r) \land (p \lor (\neg q \lor r))$, por tercer excluido
$\equiv \top \land (p \lor (\neg q \lor r))$, por dominancia
$\equiv p \lor (\neg q \lor r)$, por neutralidad
$\equiv p \lor (q \to r)$, por eliminación del conectivo $\lor$. $\blacksquare$