Examen 3
Lógica computacional

Emmanuel Peto Gutiérrez

12 de diciembre de 2022

Problema 1

a)

- Alcance de z en $\forall z$: $S(z, x)$
- Alcance de z en $\exists z$: $T(y, z)$
- Alcance de v en $\exists v$: $(\exists x R(y, x, v)) \wedge T(x, v))$
- Alcance de x en $\exists x$: $R(y, x, v)$

b)
$FV(A) = \{x, v, y, w, z\}$
c)
$BV(A) = \{z, v, x\}$

Problema 2

a)
Observemos que la sustitución $[x, z := f(a), b]$ solo se aplica a la subfórmula que está a la derecha del $\wedge$: $\neg\exists x(L(x) \to T(y) \wedge R(z))$.

Se aplicará una $\alpha-$equivalencia de la fórmula $\neg\exists x(L(x) \to T(y) \wedge R(z))$ cambiando la variable ligada x por v: $\neg\exists v(L(v) \to T(y) \wedge R(z))$.

- $\neg\exists v(L(v) \to T(y) \wedge R(z))[x, z := f(a), b]$
- $\neg\exists v((L(v) \to T(y) \wedge R(z))[x, z := f(a), b])$
- $\neg\exists v(L(v)[x, z := f(a), b] \to (T(y) \wedge R(z))[x, z := f(a), b])$
- $\neg\exists v(L(v) \to T(y)[x, z := f(a), b] \wedge R(z)[x, z := f(a), b])$
- $\neg\exists v(L(v) \to T(y) \wedge R(b))$

La fórmula completa sería:
$\exists x(L(x) \wedge T(x)) \wedge \neg\exists v(L(v) \to T(y) \wedge R(b))$

b)

Se usará la siguiente alfa equivalencia: cambiar la x ligada por v y la y ligada por w: $\exists v(\forall w(R(v,w) \to Q(z)) \wedge S(v,y))$

- $\exists v(\forall w(R(v,w) \to Q(z)) \wedge S(v,y))[x,y,z := g(h(a,y)), g(b), f(y)]$
- $\exists v((\forall w(R(v,w) \to Q(z)) \wedge S(v,y))[x,y,z := g(h(a,y)), g(b), f(y)])$
- $\exists v(\forall w(R(v,w) \to Q(z))[x,y,z := g(h(a,y)), g(b), f(y)] \wedge S(v,y)[x,y,z := g(h(a,y)), g(b), f(y)])$
- $\exists v(\forall w(R(v,w)[x,y,z := g(h(a,y)), g(b), f(y)] \to Q(z)[x,y,z := g(h(a,y)), g(b), f(y)]) \wedge S(v,g(b)))$
- $\exists v(\forall w(R(v,w) \to Q(f(y))) \wedge S(v,g(b)))$

Problema 3

a)

Primer paso: Rectificación

1) $\forall x(P(x) \to \forall y(G(x,y) \to L(x,y)))$: ya está rectificada.

2) $\forall x(P(x) \to \forall x(G(x,y) \leftrightarrow \exists z R(x,y))) \equiv \forall x(P(x) \to \forall v(G(v,y) \leftrightarrow R(v,y)))$

3) Se va a negar la fórmula: $\forall x(P(x) \to \forall y(R(x,y) \to L(x,y)))$

$\neg\forall x(P(x) \to \forall y(R(x,y) \to L(x,y)))$
$\equiv \exists x\neg(P(x) \to \forall y(R(x,y) \to L(x,y)))$
$\equiv \exists x(P(x) \wedge \neg\forall y(R(x,y) \to L(x,y)))$
$\equiv \exists x(P(x) \wedge \exists y\neg(R(x,y) \to L(x,y)))$
$\equiv \exists x(P(x) \wedge \exists y(R(x,y) \wedge \neg L(x,y)))$

Observemos que ya está rectificada.

Segundo paso: transformación a forma normal negativa.

1) $\forall x(P(x) \to \forall y(G(x,y) \to L(x,y)))$
$\equiv \forall x(P(x) \to \forall y(\neg G(x,y) \vee L(x,y)))$
$\equiv \forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg G(x,y) \vee L(x,y)))$

2) $\forall x(P(x) \to \forall v(G(v,y) \leftrightarrow R(v,y)))$
$\equiv \forall x(\neg P(x) \vee \forall v(G(v,y) \leftrightarrow R(v,y)))$
$\equiv \forall x(\neg P(x) \vee \forall v((G(v,y) \to R(v,y)) \wedge (R(v,y) \to G(v,y))))$
$\equiv \forall x(\neg P(x) \vee \forall v((\neg G(v,y) \vee R(v,y)) \wedge (\neg R(v,y) \vee G(v,y))))$

3) $\equiv \exists x(P(x) \wedge \exists y(R(x,y) \wedge \neg L(x,y)))$ ya está en FNN.

Tercer paso: transformar a forma normal prenex.

1) $\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg G(x,y) \vee L(x,y)))$
$\equiv \forall x\forall y(\neg P(x) \vee \neg G(x,y) \vee L(x,y))$

2) $\forall x(\neg P(x) \vee \forall v((\neg G(v,y) \vee R(v,y)) \wedge (\neg R(v,y) \vee G(v,y))))$
$\equiv \forall x\forall v(\neg P(x) \vee ((\neg G(v,y) \vee R(v,y)) \wedge (\neg R(v,y) \vee G(v,y))))$

3) $\exists x(P(x) \wedge \exists y(R(x,y) \wedge \neg L(x,y)))$
$\exists x \exists y(P(x) \wedge R(x,y) \wedge \neg L(x,y))$

Cuarto paso: transformar a forma normal de Skolem.

1) $\forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg G(x,y) \vee L(x,y))$ ya está en FNS y la matriz es $\neg P(x) \vee \neg G(x,y) \vee L(x,y)$.

2) $\forall x \forall v(\neg P(x) \vee ((\neg G(v,y) \vee R(v,y)) \wedge (\neg R(v,y) \vee G(v,y))))$ ya está en FNS y la matriz es $\neg P(x) \vee ((\neg G(v,y) \vee R(v,y)) \wedge (\neg R(v,y) \vee G(v,y)))$

3) $\exists x \exists y(P(x) \wedge R(x,y) \wedge \neg L(x,y))$
Se realiza la sustitución $[x, y := a, b]$ sobre la matriz
$P(a) \wedge R(a,b) \wedge \neg L(a,b)$

Quinto paso: transformación a forma normal conjuntiva.

1) $\neg P(x) \vee \neg G(x,y) \vee L(x,y)$ ya está en FNC.

2) $\neg P(x) \vee ((\neg G(v,y) \vee R(v,y)) \wedge (\neg R(v,y) \vee G(v,y)))$
$\equiv (\neg P(x) \vee \neg G(v,y) \vee R(v,y)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg R(v,y) \vee G(v,y))$

3) $P(a) \wedge R(a,b) \wedge \neg L(a,b)$ ya está en FNC.

Finalmente se procederá a hacer resolución binaria.

1) $\neg P(x) \vee \neg G(x,y) \vee L(x,y)$
2) $\neg P(x) \vee \neg G(v,y) \vee R(v,y)$
3) $\neg P(x) \vee \neg R(v,y) \vee G(v,y)$
4) $P(a)$
5) $R(a,b)$
6) $\neg L(a,b)$
7) $\neg P(a) \vee \neg G(a,b)$ Res(1, 6), $[x, y := a, b]$
8) $\neg P(x) \vee G(a,b)$ Res(3, 5), $[v, y := a, b]$
9) $\neg P(a)$ Res(7, 8), $[x := a]$
10) $\square$ Res(4, 9)

b)

Rectificación. **1)** $\exists z Q(z) \rightarrow \exists w \forall z(L(z,z) \rightarrow \neg H(z))$
$\equiv \exists z Q(z) \rightarrow \forall x(L(x,x) \rightarrow \neg H(x))$

2) $\exists x B(x) \rightarrow \forall y(A(y) \rightarrow H(y))$ ya está rectificada

3) $\forall u(\exists w(Q(w) \wedge B(w)) \rightarrow \forall y(L(y,y) \rightarrow \neg A(y)))$
$\equiv \exists w(Q(w) \wedge B(w)) \rightarrow \forall y(L(y,y) \rightarrow \neg A(y))$

La fórmula negada es: $\neg(\exists w(Q(w) \wedge B(w)) \rightarrow \forall y(L(y,y) \rightarrow \neg A(y)))$

Forma normal negativa.

1) $\neg \exists z Q(z) \vee \forall x(L(x,x) \rightarrow \neg H(x))$
$\equiv \neg \exists z Q(z) \vee \forall x(\neg L(x,x) \vee \neg H(x))$
$\equiv \forall z \neg Q(z) \vee \forall x(\neg L(x,x) \vee \neg H(x))$

2) $\exists x B(x) \to \forall y(A(y) \to H(y))$
$\equiv \exists x B(x) \to \forall y(\neg A(y) \lor H(y))$
$\equiv \neg \exists x B(x) \lor \forall y(\neg A(y) \lor H(y))$
$\equiv \forall x \neg B(x) \lor \forall y(\neg A(y) \lor H(y))$
3) $\neg(\exists w(Q(w) \land B(w)) \to \forall y(L(y,y) \to \neg A(y)))$
$\equiv \exists w(Q(w) \land B(w)) \land \neg \forall y(L(y,y) \to \neg A(y))$
$\equiv \exists w(Q(w) \land B(w)) \land \exists y \neg(L(y,y) \to \neg A(y))$
$\equiv \exists w(Q(w) \land B(w)) \land \exists y(L(y,y) \land A(y))$
Forma normal prenex
1) $\forall z \neg Q(z) \lor \forall x(\neg L(x,x) \lor \neg H(x))$
$\equiv \forall z \forall x(\neg Q(z) \lor \neg L(x,x) \lor \neg H(x))$

2) $\forall x \neg B(x) \lor \forall y(\neg A(y) \lor H(y))$
$\equiv \forall x \forall y(\neg B(x) \lor \neg A(y) \lor H(y))$
3) $\exists w(Q(w) \land B(w)) \land \exists y(L(y,y) \land A(y))$
$\exists w \exists y(Q(w) \land B(w) \land L(y,y) \land A(y))$
Forma normal de Skolem
1) $\forall z \forall x(\neg Q(z) \lor \neg L(x,x) \lor \neg H(x))$
$\sim \neg Q(z) \lor \neg L(x,x) \lor \neg H(x)$
2) $\forall x \forall y(\neg B(x) \lor \neg A(y) \lor H(y))$
$\sim \neg B(x) \lor \neg A(y) \lor H(y)$
3 $\exists w \exists y(Q(w) \land B(w) \land L(y,y) \land A(y))$
Se hace la sustitución $[w, y := a, b]$ en la matriz
$Q(a) \land B(a) \land L(b,b) \land A(b)$
Las fórmulas ya están en forma normal conjuntiva, así que se puede proceder a hacer resolución binaria.

1) $\neg Q(z) \lor \neg L(x,x) \lor \neg H(x)$
2) $\neg B(x) \lor \neg A(y) \lor H(y)$
3) $Q(a)$
4) $B(a)$
5) $L(b,b)$
6) $A(b)$
7) $\neg L(x,x) \lor \neg H(x)$ Res(1, 3), $[z := a]$
8) $\neg H(b)$ Res(5, 7), $[x := b]$
9) $\neg A(y) \lor H(y)$ Res(2, 4) $[x := a]$
10) $H(b)$ Res(6, 9) $[y := b]$
11) $\Box$ Res(8,10)

Problema 5

Universo: $\{a, b\}$
Conjuntos de predicados:

- $A : \{a\}$
- $B : \{b\}$
- $C : \{b\}$

Se cumple $\exists x A(x)$, pues $a \in A$.
Se cumple $\forall x(A(x) \to \neg C(x))$, pues todos los elementos de A (solo a) cumplen que no están en C ($a \notin C$).
Se cumple $\exists y B(y)$, pues $b \in B$.
Sin embargo, el consecuente es falso.
Se cumple $\exists z C(z)$, pues $b \in C$. Pero no se cumple $\exists z(B(z) \land \neg C(z))$ pues los conjuntos B y C son iguales.

Problema 6

a)
Se tratarán los argumentos de un predicado como una lista y se definirá la función `tsr` (términos sin repeticiones) que recibe una lista de términos y devuelve la lista con los mismos términos pero sin repeticiones.

```
tsr::[t]->[t]
tsr [] = []
tsr (x:xs) = let resto = tsr xs
             in if elem x resto
                then resto
                else (x:resto)
```

termF :: $F \to [t]$
termF $\top = \emptyset$
termF $\bot = \emptyset$
termF (P terms) = tsr terms
termF $(\neg f)$ = termF f
termF $(f1 \land f2)$ = (termF $f1$) $\cup$ (termF $f2$)
termF $(t1 = t2) = \{t1\} \cup \{t2\}$
termF $(f1 \lor f2)$ = (termF $f1$) $\cup$ (termF $f2$)
termF $(f1 \to f2)$ = (termF $f1$) $\cup$ (termF $f2$)
termF $(f1 \leftrightarrow f2)$ = (termF $f1$) $\cup$ (termF $f2$)
termF $(\exists x f)$ = termF f
termF $(\forall x f)$ = termF f
b)

i) $A = P(x)$

ii) No puede existir una fórmula así. Pues si A tiene al menos una variable libre, digamos x, entonces $x \in \mathrm{termF}(A)$, por lo que $\mathrm{termF}(A) \neq \emptyset$

iii) $A = P(c) \to Q(c)$

iv) No puede existir una fórmula que cumpla eso porque el conjunto que devuelve la función $termF$ siempre es finito.