Lógica Computacional 2023-1, nota de clase 12
El cálculo de secuentes

Favio Ezequiel Miranda Perea   Araceli Liliana Reyes Cabello
Lourdes Del Carmen González Huesca   Pilar Selene Linares Arévalo

2 de diciembre de 2022

En esta nota presentamos un sistema de deducción para Lógica de Predicados, con contextos o hipótesis localizadas, es decir, en cada paso de la deducción de una fórmula estarán disponibles todas las hipótesis representadas por un contexto. Las fórmulas serán representadas por letras mayúsculas y los contextos por letras griegas mayúsculas.

Este sistema permite construir derivaciones de expresiones de la forma $\Gamma \vdash A$ llamados **secuentes**, a diferencia del sistema de lógica ecuacional donde las expresiones derivadas son simplemente ecuaciones de fórmulas o de expresiones de un lenguaje particular. Esta presentación podría parecer más complicada que otras, sin embargo la disponibilidad de todo el conjunto de hipótesis en cada momento es de gran utilidad.

Definición 1 *Un contexto es una colección*[1] *finita de fórmulas* $\{A_1, \ldots, A_n\}$. *Usualmente denotaremos un contexto con las letras* Γ, Δ, Π. *En lugar de* $\Gamma \cup \Delta$ *escribimos* $\Gamma; \Delta$. *Análogamente* Γ, A *denota al contexto* $\Gamma \cup \{A\}$. *Es decir, la operación de unión de contextos se denota con punto y coma, mientras que la operación de agregar un elemento a un contexto se denota con coma.*

Si $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ entonces el conjunto de variables libres de Γ, denotado $FV(\Gamma)$, se define como la unión de los conjuntos de variables libres $FV(A_i)$ para cada $A_i \in \Gamma$.

1. Reglas de inferencia

Recordemos que las reglas de inferencia permiten encadenar razonamientos, de esta forma se relacionan dos o varios secuentes mediante una línea horizontal. Las reglas pueden leerse en dos sentidos: de arriba hacia abajo y viceversa, dependiendo del propósito en el desarrollo de una demostración (generar, derivar o deducir información).

Un secuente representa la relación de derivabilidad o deducibilidad $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}$, leida como:

“la fórmula A es derivable o deducible en el contexto Γ”

Esta relación se define recursivamente a continuación mediante reglas que se clasifican en izquierdas y derechas, y que enfatizan cada conectivo que está presente en el sistema.

Reglas derechas: consideran cada forma sintáctica de la fórmula que está a la derecha del símbolo de derivabilidad $\vdash$. Estas reglas sirven para derivar fórmulas de manera directa de acuerdo a su conectivo principal, también se conocen como reglas de introducción.

[1] Esta colección puede implementarse de distintas maneras, como lista, multiconjunto o conjunto.

Reglas izquierdas: consideran cada forma sintáctica para una fórmula particular en el contexto, es decir, a la izquierda del símbolo de derivabilidad $\vdash$.

Veamos cada regla particular:

- Regla[2] inicial o de hipótesis:

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (\textsc{Hip})$$

Es decir, una fórmula A es derivable si en el contexto figura ella misma como una de las hipótesis. Es importante recalcar que si bien escribimos Γ, A por simplicidad, A no necesariamente es la última fórmula en el contexto, sino que basta con que sea una de las fórmulas en él. Esto aplica para todas las reglas presentadas abajo.

- Reglas derechas:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge\,\mathrm{R}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee\,\mathrm{R}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee\,\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to\mathrm{R}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A}\ (\exists\,\mathrm{R}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\forall\,\mathrm{R})$$

Obsérvese que estas reglas capturan el razonamiento matemático natural para concluir una proposición de manera directa, de acuerdo a su operador principal. Tambien es importante observar que en el caso de la regla $(\wedge\,\mathrm{R})$ que tiene dos premisas, los contextos de cada una de ellas deben ser iguales. Esto se conoce como el estilo multiplicativo en reglas de inferencia[3]. En ciertas ocasiones, cuando los contextos son diferentes podemos transformarlos para que sean iguales mediante el uso de las llamadas reglas estructurales que enunciamos en la proposición 1.1.

En el caso de la regla $(\exists R)$ el término t requerido en la premisa debe ser propuesto por el usuario o agente que construye la prueba. En el caso de $(\forall R)$ la condición lateral $x \notin FV(\Gamma)$ corresponde al hecho de que para concluir $\forall x A$ basta demostrar A siempre y cuando el contexto no "hable" de x, es decir, no contenga información particular acerca de x lo cual significa que x no debe aparecer libre en el contexto.

- Reglas izquierdas:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ (\vee\,\mathrm{L})$$

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A}{\Gamma, A \to B \vdash B}\ (\to\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C \qquad x \notin FV(\Gamma, C)}{\Gamma, \exists x A \vdash C}\ (\exists\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma, \forall x A, A[x := t] \vdash C}{\Gamma, \forall x A \vdash C}\ (\forall\mathrm{L})$$

Obsérvese que en cada secuente hay dos contextos Γ y Γ' pero cualquier de ellos puede ser vacío. Más aún, en el caso de la regla $(\forall\,\mathrm{L})$ las dos fórmulas en el contexto de la premisa se escriben juntas para simplificar y sin perder generalidad aunque en ejemplos concretos pueden estar separadas.

[2] También llamado axioma.

[3] En contraste con el estilo aditivo donde se permiten contextos distintos en las premisas y se construye el contexto unión en la conclusión.

Las reglas izquierdas se enfocan en una fórmula particular del contexto para modificarlo y simplificar la construcción de una derivación. Por ejemplo, la regla $(\vee L)$ corresponde al método de análisis de casos. En los casos para la implicación y el cuantificador universal, las fórmulas correspondientes no desaparecen del contexto, como en los otros casos, pues contienen información que puede ser usada para otros propósitos posteriormente. El razonamiento capturado por la regla $(\exists L)$ corresponde al método usual de usar una hipótesis existencial, es decir de la forma $\exists x A$, tratando al objeto x que existe como una variable libre cuya única propiedad conocida es que cumple A. Por eso se requiere la condición de que ni el contexto Γ ni la conclusión C "hablen" de A, es decir se debe cumplir $x \notin FV(\Gamma, C)$.

1.1. Sobre la regla izquierda de la implicación

La regla izquierda para la implicación que presentamos aquí no es la que se usa comúnmente. Dicha regla es:

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \to B \vdash C}\ (\to\mathrm{L})$$

Esta regla es poco intuitiva aunque representa un razonamiento donde para probar C usando, entre otra información $A \to B$, bastar probar el antecedente A para posteriormente probar C usando el consecuente B en vez de la implicación. Esto corresponde a un uso de lemas, como en la regla de corte, pero aquí, se usa el lema B para probar la fórmula C y en vez de probar dicho lema, se prueba el lema A, puesto que conocemos que $A \to B$. Por ser más intuitiva, en el resto de esta nota usaremos la regla enunciada más arriba. Cabe mencionar que en la presencia de la regla de corte, presentada más abajo, ambas reglas son equivalentes.

La noción de prueba o derivación formal es similar a la usada en la lógica ecuacional:

Definición 2 *Una derivación del secuente* $\Gamma \vdash A$ *es una sucesión finita de secuentes* $\Gamma_1 \vdash A_1, \ldots, \Gamma_n \vdash A_n$ *tal que:*

- $\Gamma_i \vdash A_i$ *es instancia de la regla* (Hip) *ó*
- $\Gamma_i \vdash A_i$ *es conclusión de alguna regla de inferencia tal que las premisas necesarias figuran antes en la sucesión.*
- $\Gamma \vdash A$ *es el último elemento de la sucesión.*

También es común ver a la derivación de un secuente como un árbol, de acuerdo a la siguiente

Definición 3 *Una prueba formal de* $\Gamma \vdash A$ *es un árbol finito, cuyos nodos están etiquetados por expresiones* $\Gamma' \vdash A'$ *y satisfacen las siguientes condiciones:*

- *La etiqueta de la raíz es* $\Gamma \vdash A$*.*
- *Todas las hojas están etiquetadas con instancias de la regla* (Hip)*.*
- *La etiqueta de un nodo padre se obtiene mediante la aplicación de una de las reglas de inferencia a los nodos hijos.*

Las pruebas más relevantes son aquellas donde el contexto final está vacío. Para esto introducimos la siguiente

Definición 4 *Si* $\vdash A$ *es derivable, es decir si* $\varnothing \vdash A$ *es derivable (*A *es derivable sin hipótesis) entonces decimos que* A *es un teorema.*

Mostramos ahora algunas reglas estructurales que pueden ser de ayuda en la construcción de derivaciones, estas reglas se necesitan de manera explícita de acuerdo a cómo se implementaron los contextos (i.e como listas, multiconjuntos o conjuntos):

Proposición 1

Las siguientes reglas de inferencia son válidas:

- Intercambio de premisas:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, B, A \vdash C}(exch)$$

- Monotonía o debilitamiento:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}(weak)$$

- Contracción:

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}(contr)$$

- Sustitución o Corte:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}(cut)$$

La regla de corte es de especial importancia ya que permite utilizar una fórmula o lema auxiliar A en la demostración de la fórmula de interés C. Similarmente a lo que ocurre con la regla $(\exists R)$, en este caso la fórmula auxiliar A debe ser propuesta por el agente humano.

2. La Negación

La negación es quizás el conectivo lógico más importante, recordemos por ejemplo que para definir en lógica clásica todos los conectivos y cuantificadores o para tener un conjunto completo de conectivos, basta quedarnos con uno de los conectivos binarios, un cuantificador y la negación, la cual es imprescindible. Sin embargo, el símbolo de negación $\neg$ puede definirse dando distintas reglas de inferencias o axiomas y de acuerdo a los mismos hablamos de distintas clases de negación, las cuales reflejan distintos puntos de vista acerca de qué es o cómo demostrar o verificar que una proposición negada es válida. Sin importar que otros conectivos estén presentes, discutimos ahora tres clases distintas de negación: minimal, intuicionista o constructiva y clásica.

2.1. Lógica Minimal $\mathsf{DN_m}$

Se dice que la lógica es minimal si en el sistema de deducción no hay reglas específicas para la negación $\neg$ ni para la constante de falsedad $\perp$. En un sistema minimal, la constante $\perp$ está presente pero no tiene propiedades particulares.

En la presencia de $\bot$, el símbolo de negación se define como

$$\neg A =_{def} A \to \bot$$

Aun cuando no hay reglas explícitas para $\bot$ es posible definir varias propiedades conocidas de la negación, como las siguientes cuyas demostraciones dejamos como ejercicio:

Proposición 2 (Propiedades de la negación en lógica minimal) *Las siguientes fórmulas son teoremas de la lógica minimal para cualesquiera A, B:*

- *1a. contrapositiva:* $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
- *2a. contrapositiva:* $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
- *Introducción de la doble negación:* $A \to \neg\neg A$
- *Ley de triple negación de Brouwer:* $\neg\neg\neg A \to \neg A$
- *1a ley de De Morgan:* $\neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$
- *2a ley de De Morgan:* $\neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$
- *3a ley de De Morgan:* $\neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$
- *Ley de negación de la implicación* $A \to \neg B \to \neg(A \to B)$
- *Dicotomía débil:* $(\neg A \to B) \to (A \to B) \to \neg\neg B$
- *Ley de Clavius:* $(A \to \neg A) \to \neg A$
- *Tercero excluido débil:* $\neg\neg(A \vee \neg A)$
- *Prueba por contradicción débil:* $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$
- *Principio de no contradicción:* $\neg(\neg A \wedge A)$.

2.2. Lógica Intuicionista $\mathsf{DN_i}$

La lógica intuicionista [4] se obtiene al agregar a la lógica minimal la regla de eliminación de lo falso ($\bot E$) conocida también como *ex-falso-quodlibet*, cuya versión en el cálculo de secuentes es:

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash C}\ (\text{EFQ})$$

Se observa que cualquier fórmula derivada en la lógica minimal sigue siendo derivable en la lógica intuicionista. Además se pueden derivar nuevas reglas, en particular la regla de explosión:

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash C}\ (Expl)$$

Esta regla se llama así pues una vez que se conoce información contradictoria, la lógica explota, es decir, cualquier fórmula es derivable.

Proposición 3 *Las siguientes fórmulas son teoremas en la lógica intuicionista para cualesquiera A, B.*

[4] El nombre se debe a una corriente lógica para fundamentar las matemáticas desarrollada a principios del siglo XX.

- *Silogismo disyuntivo:* $\neg A \to A \vee B \to B$
- *Silogismo disyuntivo:* $A \to \neg A \vee B \to B$
- *Definición disyuntiva de implicación:* $\neg A \vee B \to (A \to B)$

Los principios de silogismo disyuntivo generan las siguientes reglas del cálculo de secuentes:

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}\ \mathrm{SD}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \vee B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \mathrm{SD}$$

Más aún, el carácter constructivo de la negación restringe a la lógica de una manera importante, en particular el sistema no permite probar la tautología clásica $A \vee \neg A$ conocida como el principio del tercero excluido. Para convencernos de tal situación basta recordar qué significa el hecho de que una disyunción sea demostrable. En el caso del tercero excluido tendríamos que construir una prueba de A o bien una prueba de $\neg A$ lo cual no es posible en general. Este hecho implica igualmente que la fórmula $\neg\neg A \to A$ **NO** es válida. Por otro lado es fácil dar una derivación de $A \to \neg\neg A$ desde la lógica minimal.
Otras fórmulas **NO** válidas en la lógica intuicionista son:

- $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.
- $(A \to B) \vee (B \to A)$.
- $\neg\forall x A \to \exists x \neg A$.
- $\forall x(A \vee B) \to A \vee \forall x B$ con $x \notin FV(A)$.
- $(B \to \exists x A) \leftrightarrow \exists x(B \to A)$ con $x \notin FV(B)$.
- $(\forall x A \to B) \leftrightarrow \exists x(A \to B)$ con $x \notin FV(B)$.
- $\forall x \neg\neg A \to \neg\neg\forall x A$.

Las demostraciones de la invalidez intuicionista de tales fórmulas utilizan técnicas de semánticas de Heyting ó forzamiento mediante marcos que no pertenecen a nuestro curso.

Las lógicas minimal e intuicionista también se conocen como lógicas constructivas porque toda fórmula se puede construir o derivar directamente, en particular se tienen las siguientes propiedades no válidas en la lógica clásica, donde $\vdash_i$ denota a la relación de derivabilidad en la lógica intuicionista:

- Propiedad Disyuntiva: Si $\vdash_i A \vee B$ entonces $\vdash_i A$ ó $\vdash_i B$.
- Propiedad Existencial: Si $\vdash_i \exists x A$ entonces existe un término t tal que $\vdash_i A[x := t]$.

2.3. Lógica clásica

La lógica clásica se caracteriza por el principio de tercero excluido:

$$A \vee \neg A$$

Este principio puede incorporarse en el cálculo de secuentes como sigue:

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (\text{TE R}) \qquad \frac{\Gamma,\ A \vee \neg A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\text{TE L})$$

Obsérvese que la regla derecha (TE R) permite probar $\vdash A \vee \neg A$ situación imposible de motivar en el ámbito constructivo. Esta situación rompe con la simetría de los conectivos dada por las reglas izquierdas y derechas. En particular en la lógica clásica podemos deducir disyunciones por medio de una regla distinta a la regla derecha para la disyunción, a saber mediante el uso de la regla del tercero excluido.

Alternativamente la lógica clásica se puede caracterizar por el principio de reducción al absurdo o prueba indirecta por contradicción:

$$(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg B) \to A$$

El cual genera las siguientes reglas del cálculo de secuentes:

- Prueba indirecta por contradicción (una contradicción implica cualquier conclusión)

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash C}\ (\textsc{Contradicción})$$

- Prueba indirecta por reducción al absurdo (si $\neg A$ lleva a una contradicción entonces se puede concluir A)

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}\ (\text{RAA})$$

Ambas reglas son similares pero mientras que en la primera se concluye C debido a que las hipótesis originales nos llevan a una contradicción (A y $\neg A$), en la segunda regla se concluye A mostrando que si agregamos $\neg A$ a las premisas llegamos a una contradicción.

La siguiente manera de caracterizar a la lógica clásica es mediante la regla de eliminación de la doble negación [5]:

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ (\neg\neg\ \text{E})$$

Finalmente otra forma de generar a la lógica clásica es agregando el razonamiento or contrapositiva:

[5] La regla dual para introducción de la doble negación es válida desde la lógica minimal:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\ (\neg\neg I)$$

$$(\neg B \to \neg A) \to A \to B$$

mediante las siguientes reglas:

$$\frac{\Gamma \neg B \to \neg A \vdash A}{\Gamma, \neg B \to \neg A \vdash B}\ (\textsc{Cp L}) \qquad \frac{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\textsc{Cp R})$$

3. Ejemplos de derivaciones

En lo que sigue denotamos con $\vdash_m, \vdash_i, \vdash_c$ a las relaciones de derivación en los sistemas minimal, intuicionista y clásico, respectivamente. De las definiciones, es claro que el sistema intuicionista es una extensión conservativa del minimal y el clásico del intuicionista. Es decir, $\Gamma \vdash_m A$ implica $\Gamma \vdash_i A$ implica $\Gamma \vdash_c A$. Sin embargo ninguna de las afirmaciones recíprocas es válida en general. En los ejemplos siguientes debe entenderse que el sistema correspondiente es estrictamente necesario, es decir, para las derivaciones en $\vdash_i$ (respectivamente $\vdash_c$) no existe una derivación en $\vdash_m$ (respectivamente $\vdash_i$), aunque para mostrar formalmente estas afirmaciones se necesitan técnicas semánticas que van más allá del alcance de nuestro curso.

Las derivaciones siguientes se presentan de forma lineal, a diferencia de los árboles de derivación introducidos al inicio de la nota. En una derivación lineal, el último paso es el secuente a demostrarse y cada paso es justificado al ser la conclusicón de la regla aplicada junto con los pasos usados como premisas.

- Mostrar que: $\vdash_m (p \wedge q \to r) \to p \to q \to r$

1	$p \wedge q \to r\ ,\ p\ ,\ q \vdash p$	(Hip)
2	$p \wedge q \to r\ ,\ p\ ,\ q \vdash q$	(Hip)
3	$p \wedge q \to r\ ,\ p\ ,\ q \vdash p \wedge q$	$(\wedge R)\ 1,2$
4	$p \wedge q \to r\ ,\ p\ ,\ q \vdash r$	$(\to L)\ 3$
5	$p \wedge q \to r\ ,\ p \vdash q \to r$	$(\to R)\ 5$
6	$p \wedge q \to r \vdash p \to q \to r$	$(\to R)\ 6$
7	$\vdash (p \wedge q \to r) \to p \to q \to r$	$(\to R)\ 7$

- Sea $\Gamma = \{p \to q \vee r\ ,\ q \to r\ ,\ r \to s\}$, queremos mostrar $\Gamma \vdash_m p \to s$

1	$\Gamma,\ p,\ q \vdash\ q$	(Hip)
2	$\Gamma,\ p,\ q \vdash\ r$	$(\to L)\ 1$
3	$\Gamma,\ p,\ q \vdash\ s$	$(\to L)\ 2$
4	$\Gamma,\ p,\ r \vdash\ r$	(Hip)
5	$\Gamma,\ p,\ r \vdash\ s$	$(\to L)\ 4$
6	$\Gamma,\ p,\ q \vee r\ \vdash\ s$	$(\vee L)\ 3,5$
7	$\Gamma,\ p\ \vdash\ p$	(Hip)
8	$\Gamma,\ p\ \vdash\ q \vee r$	$(\to L)\ 6$
9	$\Gamma,\ p\ \vdash\ s$	$(cut)\ 6,8$
10	$\Gamma\ \vdash\ p \to s$	$(\to R)\ 8$

- Demostrar que $\vdash_m A \to \neg\neg A$, aplicando la definición de negación y la regla derecha de la implicación basta mostrar que $A, A \to \bot \vdash \bot$:

1	$A, A \to \bot \vdash A$	(Hip)
2	$A, A \to \bot \vdash \bot$	$(\to L)\ 1$

- Demostrar que $\vdash_m \neg\neg(A \vee \neg A)$, aplicando la definición de negación y la regla derecha de la implicación basta derivar $A \vee \neg A \to \bot \vdash_m \bot$:

1.	$A \vee \neg A \to \bot, A \vdash A$	(Hip)	
2.	$A \vee \neg A \to \bot, A \vdash A \vee \neg A$	$(\vee R)$ 1	
3.	$A \vee \neg A \to \bot, A \vdash \bot$	$(\to L)$ 2	
4.	$A \vee \neg A \to \bot \vdash A \to \bot$	$(\to R)$ 3	$\neg A =_{def} A \to \bot$
5.	$A \vee \neg A \to \bot \vdash A \vee \neg A$	$(\vee R)$ 4	
6.	$A \vee \neg A \to \bot \vdash \bot$	$(\to L)$ 5	

- Demostrar el teorema $\vdash_i \neg A \vee B \to A \to B$.

1	$\neg A,\ A \vdash B$	$(Expl)$
2	$B,\ A \vdash B$	(Hip)
3	$\neg A \vee B,\ A \vdash B$	$(\vee L)$ 1, 2
4	$\neg A \vee B \vdash A \to B$	$(\to R)$ 3
5	$\vdash \neg A \vee B \to A \to B$	$(\to R)$ 4

- Para el teorema $\vdash_c \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ se tienen dos partes: la parte "$\leftarrow$" es válida minimalmente y por lo tanto tambien válida en lógica clásica (se deja como ejercicio); para la otra parte hay que derivar $\neg(A \wedge B) \vdash_c \neg A \vee \neg B$:

1	$\neg(A \wedge B), A, B \vdash A$	(Hip)
2	$\neg(A \wedge B), A, B \vdash B$	(Hip)
3	$\neg(A \wedge B), A, B \vdash A \wedge B$	$(\wedge R)$ 1, 2
4	$\neg(A \wedge B), A, B, A \wedge B \vdash \neg A \vee \neg B$	$(Expl)$
5	$\neg(A \wedge B), A, B \vdash \neg A \vee \neg B$	(cut) 3, 4
6	$\neg(A \wedge B), A, \neg B \vdash \neg B$	(Hip)
7	$\neg(A \wedge B), A, \neg B \vdash \neg A \vee \neg B$	$(\vee R)$ 6
8	$\neg(A \wedge B), A, B \vee \neg B \vdash \neg A \vee \neg B$	$(\vee L)$ 5, 7
9	$\neg(A \wedge B), A \vdash \neg A \vee \neg B$	$(TE\ L)$ 8
10	$\neg(A \wedge B), \neg A \vdash \neg A$	(Hip)
11	$\neg(A \wedge B), \neg A \vdash \neg A \vee \neg B$	$(\vee R)$ 10
12	$\neg(A \wedge B), A \vee \neg A \vdash \neg A \vee \neg B$	$(\vee L)$ 9, 11
13	$\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$	$(TE\ L)$ 12

- Ley de Peirce: $\vdash_c ((A \to B) \to A) \to A$. Por la ley de contrapositiva [6] basta mostrar $\neg A \vdash_c \neg((A \to B) \to A)$. Por otra parte, se puede probar que $C \wedge \neg D \vdash_m \neg(C \to D)$ para cualesquiera fórmulas C y D. Por lo que basta mostrar $\neg A \vdash_c (A \to B) \wedge \neg A$, lo cual se sigue de $\neg A, A \vdash_c B$ y que es inmediato de la regla $(\neg E)$.

Veamos ahora algunos ejemplos con cuantificadores:

- Mostrar que:

$$\vdash_m \forall w(Pw \to Qw) \to \forall x(\exists y(Py \wedge Rxy) \to \exists z(Qz \wedge Rxz))$$

[6] Se puede mostrar que esta ley es un teorema, es decir que $\vdash_c (A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$.

1	$\forall w(Pw \to Qw)\,,\ Py,\ Rxy,\ Py \to Qy \vdash Rxy$	(Hip)
2	$\forall w(Pw \to Qw)\,,\ Py, Rxy, Py \to Qy \vdash Py$	(Hip)
3	$\forall w(Pw \to Qw)\,,\ Py, Rxy, Py \to Qy \vdash Qy$	$(\to L)\ 2$
4	$\forall w(Pw \to Qw)\,,\ Py,\ Rxy,\ Py \to Qy \vdash Qy \wedge Rxy$	$(\wedge R)\ 1,3$
5	$\forall w(Pw \to Qw)\,,\ Py,\ Rxy \vdash Qy \wedge Rxy$	$(\forall L)\ 4$
6	$\forall w(Pw \to Qw)\,,\ Py, Rxy \vdash \exists z(Qz \wedge Rxz)$	$(\exists\, R)\ 5$
7	$\forall w(Pw \to Qw)\,,\ Py \wedge Rxy \vdash \exists z(Qz \wedge Rxz)$	$(\wedge L)\ 6$
8	$\forall w(Pw \to Qw),\ \exists y(Py \wedge Rxy) \vdash \exists z(Qz \wedge Rxz)$	$(\exists\, L)\ 7$
9	$\forall w(Pw \to Qw) \vdash \exists y(Py \wedge Rxy) \to \exists z(Qz \wedge Rxz)$	$(\to R)\ 9$
10	$\forall w(Pw \to Qw) \vdash \forall x(\exists y(Py \wedge Rxy) \to \exists z(Qz \wedge Rxz))$	$(\forall R)\ 9$
11	$\vdash \forall w(Pw \to Qw) \to \forall x(\exists y(Py \wedge Rxy) \to \exists z(Qz \wedge Rxz))$	$(\to R)\ 10$

- Demostrar que para cualesquiera fórmulas A y B con $x \notin FV(B)$, se cumple que $\vdash_m \exists x(A \to B) \to (\forall xA \to B)$

1.	$A \to B,\ \forall xA, A \vdash A$	(Hip)
2.	$A \to B,\ \forall xA, A \vdash B$	$(\to L)\ 1$
3.	$A \to B,\ \forall xA \vdash B$	$(\forall L)\ 2$
4.	$\exists x(A \to B),\ \forall xA \vdash B$	$(\exists E)\ 3\ x \notin FV(\{\exists x(A \to B), B\})$
5.	$\exists x(A \to B) \vdash \forall xA \to B$	$(\to R)\ 4$
6.	$\vdash \exists x(A \to B) \to \forall xA \to B$	$(\to R)\ 5$

- $\vdash_c \neg\exists x\neg A \to \forall xA$. Basta ver que $\neg\exists x\neg A \vdash_c \forall xA$ y como $x \notin FV(\neg\exists x\neg A)$ basta con $\neg\exists x\neg A \vdash_c A$, para lo cual mostramos $\neg\exists x\neg A \vdash_c \neg\neg A$, es decir $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash_c \bot$

1	$\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \neg A$	(Hip)
2	$\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \exists x\neg A$	$(\exists R)1\quad [x := x]$
3	$\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \bot$	$(\to L)2\quad \neg\exists x\neg A =_{def} \exists x\neg A \to \bot$

4. Estrategias de derivación

Las siguientes estrategias se basan en la lectura hacia atras o hacia arriba de las reglas de inferencia. En el caso de las reglas derechas dicha lectura permite construir una fórmula de acuerdo a su conectivo principal.

- $(\to R)$: Para derivar $\Gamma \vdash A \to B$ basta derivar $\Gamma, A \vdash B$.
- $(\wedge R)$: Para derivar $\Gamma \vdash A \wedge B$ basta derivar $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash B$
- $(\vee R)$: Para derivar $\Gamma \vdash A \vee B$ basta derivar $\Gamma \vdash A$
- $(\vee R)$: Para derivar $\Gamma \vdash A \vee B$ basta derivar $\Gamma \vdash B$
- $(\forall R)$: Para derivar $\Gamma \vdash \forall xA$ basta derivar $\Gamma \vdash A$ siempre y cuando $x \notin FV(\Gamma)$. En caso de que esta condición no se cumpla se debe usar la α-equivalencia.
- $(\exists R)$: Para derivar $\Gamma \vdash \exists xA$ basta hallar un término t y derivar $\Gamma \vdash A[x := t]$

Las siguientes estrategias se basan en las reglas izquierdas y permiten concluir una fórmula C usando una premisa particular:

- $(\to L)$: Para derivar $\Gamma, A \to B \vdash B$, basta derivar $\Gamma, A \to B \vdash A$
- $(\wedge L)$: Para derivar $\Gamma, A \wedge B \vdash C$ basta derivar $\Gamma, A, B \vdash C$
- $(\vee L)$: Para derivar $\Gamma, A \vee B \vdash C$ basta derivar ambas $\Gamma, A \vdash C$ y $\Gamma, B \vdash C$
- $(\exists L)$: Para derivar $\Gamma, \exists x A \vdash C$ basta derivar $\Gamma, A \vdash C$ siempre y cuando $x \notin FV(\Gamma, C)$. En caso de que esta condición no se cumpla se debe usar la α-equivalencia.
- $(\forall L)$: Para derivar $\Gamma, \forall x A; \Gamma' \vdash C$ basta hallar un término t y derivar $\Gamma, \forall x A, A[x := t] \vdash C$.

La siguiente estrategia corresponde a la regla de corte es decir al uso de un lema, a saber la fórmula A. Se recomienda utilizar esta estrategia sólo cuando las anteriores no funcionan directamente. Nótese que el lema A es algo que se debe proponer de acuerdo a cada caso particular.

- Aserción: Para derivar $\Gamma \vdash C$ basta proponer A y derivar tanto $\Gamma \vdash A$ como $\Gamma, A \vdash C$.

El uso adecuado de las estrategias anteriores nos llevar eventualmente a buscar pruebas más sencillas que las originales. Las siguientes estrategias permiten reducir el número de pruebas buscadas y terminar el proceso de búsqueda.

- Para derivar $\Gamma, A; \Gamma' \vdash A$ no hay nada más que hacer pues esta es una derivación válida.
- Para derivar $\Gamma, \forall x A; \Gamma' \vdash A[x := t]$ no hay nada más que hacer pues esta es una derivación válida.

5. Tácticas

Las estrategias anteriores pueden mecanizarse mediante un procedimiento de búsqueda de pruebas orientado a metas. Una meta es simplemente un secuente $\Gamma \vdash A$ correspondiente a la prueba deseada. Usando las estrategias definidas en la sección anterior, este secuente se transforma en una secuencia de uno o más secuentes digamos $\Gamma_1 \vdash A_1; \ldots; \Gamma_k \vdash A_k$ siendo la nueva meta a resolver el secuente $\Gamma_1 \vdash A_1$, el cual genera nuevas submetas, y así sucesivamente. El proceso de búsqueda se simplifica con las siguientes definiciones:

- $\mathcal{S}$ denota a una secuencia finita de metas (posiblemente vacía, denotada $\checkmark$, lo cúal indica que hemos acabado con éxito)
$$\mathcal{S} =_{def} \mathcal{G}_1; \ldots; \mathcal{G}_k$$
- El proceso de búsqueda aplica una estrategia a la primera meta de la secuencia actual Si al aplicar cierta estrategia a la meta $\mathcal{G}_1$ se generan las submetas $\mathcal{G}'_{11}; \mathcal{G}'_{12}; \ldots; \mathcal{G}'_{1k}$ entonces escribimos
$$\mathcal{G}_1; \mathcal{S} \ \rhd \ \mathcal{G}'_{11}; \mathcal{G}_{;12}; \ldots; \mathcal{G}_{1k}; \mathcal{S}$$
y a este proceso le llamamos táctica.
- La relación $\mathcal{S} \rhd \mathcal{S}'$ puede leerse como "para demostrar la secuencia $\mathcal{S}$ es suficiente demostrar la secuencia $\mathcal{S}'$". Por ejemplo:
    - Para demostrar que $p, q \vdash (q \vee r) \wedge p$
    es suficiente demostrar que $p, q \vdash q \vee r$ y que $p, q \vdash p$ por lo que escribimos $p, q \vdash (q \vee r) \wedge p \ \rhd \ p, q \vdash q \vee r \ ; \ p, q \vdash p$.

- Para demostrar que $p, q \vdash q \vee r$ y $p, q \vdash p$
  es suficiente demostrar $p, q \vdash q$ y $p, q \vdash p$ por lo que escribimos $p, q \vdash q \vee r\ ;\ p, q \vdash p\ \triangleright\ p, q \vdash q\ ;\ p, q \vdash p$.
- Para demostrar que $p, q \vdash q$ y $p, q \vdash p$
  es suficiente demostrar $p, q \vdash p$ (pues $p, q \vdash q$ es inmediato) por lo que escribimos $p, q \vdash q\ ;\ p, q \vdash p\ \triangleright\ p, q \vdash p$.
- Para demostrar $p, q \vdash p$
  hemos terminado pues $p, q \vdash p$ es inmediato por lo que escribimos $p, q \vdash p\ \triangleright\ \square$, donde el símbolo $\square$ denota a la secuencia vacía de metas.

A continuación definimos las tácticas particulares. Aquí $\mathcal{S}$ denota a una secuencia arbitraria de metas

- $(\to R)$: $\quad \Gamma \vdash A \to B; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma, A \vdash B; \mathcal{S}$
- $(\wedge R)$: $\quad \Gamma \vdash A \wedge B; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma \vdash A; \Gamma \vdash B; \mathcal{S}$
- $(\vee R)$: $\quad \Gamma \vdash A \vee B; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma \vdash A; \mathcal{S}$
- $(\vee R)$: $\quad \Gamma \vdash A \vee B; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma \vdash B; \mathcal{S}$
- $(\forall R)$: $\quad \Gamma \vdash \forall x A; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma \vdash A; \mathcal{S}$ siempre y cuando $x \notin FV(\Gamma)$
- $(\exists R)$: $\quad \Gamma \vdash \exists x A; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma \vdash A[x := t]; \mathcal{S}$ para algún t.
- $(\to L)$: $\quad \Gamma, A \to B \vdash B; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma, A \to B \vdash A; \mathcal{S}$
- $(\wedge L)$: $\quad \Gamma, A \wedge B \vdash C; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma, A, B \vdash C; \mathcal{S}$
- $(\vee L)$: $\quad \Gamma, A \vee B \vdash C; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma, A \vdash C\ ;\ \Gamma, B \vdash C; \mathcal{S}$
- $(\forall L)$: $\quad \Gamma, \forall x A \vdash C; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma, \forall x A, A[x := t]\ \vdash C; \mathcal{S}$
- $(\exists L)$: $\quad \Gamma, \exists x A \vdash C; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma, A \vdash C; \mathcal{S}$ siempre y cuando $x \notin FV(\Gamma, C)$
- (Hip) : $\quad \Gamma, A \vdash A; \mathcal{S}\ \triangleright\ \mathcal{S}$. En particular se tiene que $\Gamma, A \vdash A\ \triangleright\ \checkmark$
- $(cut\ A)$: $\quad \Gamma \vdash C; \mathcal{S}\ \triangleright\ \Gamma \vdash A\ ;\ \Gamma,\ A \vdash C; \mathcal{S}$

Veamos algunos ejemplos de derivación mediante tácticas.

- Probar que: $\vdash (p \wedge q \to r) \to p \to q \to r$

$$
\begin{array}{lr}
\vdash (p \wedge q \to r) \to p \to q \to r & (\to R) \\
p \wedge q \to r \vdash p \to q \to r & (\to R) \\
p \wedge q \to r \ , \ p \vdash q \to r & (\to R) \\
p \wedge q \to r \ , \ p \ , \ q \vdash r & (\to L) \\
p \wedge q \to r \ , \ p \ , \ q \vdash p \wedge q & (\wedge R) \\
p \wedge q \to r \ , \ p \ , \ q \vdash p \quad ; \quad p \wedge q \to r \ , \ p \ , \ q \vdash q & (Hip) \\
p \wedge q \to r \ , \ p \ , \ q \vdash q & (Hip) \\
\checkmark &
\end{array}
$$

- Sea $\Gamma = \{p \to q \vee r,\ q \to r,\ r \to s\}$. Queremos mostrar que $\Gamma \vdash p \to s$

$$
\begin{array}{rll}
1 & \Gamma \vdash p \to s & (\to R) \\
2 & \Gamma,\ p \vdash s & (\to L) \\
3 & \Gamma,\ p \vdash r & (Cut\ q \vee r) \\
4 & \Gamma,\ p \vdash q \vee r \quad ; \quad \Gamma,\ p,\ q \vee r \vdash r & (\to L) \\
5 & \Gamma,\ p \vdash p \quad ; \quad \Gamma,\ p,\ q \vee r \vdash r & (Hip) \\
6 & \Gamma,\ p,\ q \vee r \vdash r & (\vee L) \\
7 & \Gamma,\ p,\ q \vdash r \quad ; \quad \Gamma,\ p,\ r \vdash r & (\to L) \\
8 & \Gamma,\ p,\ q \vdash q \quad ; \quad \Gamma,\ p,\ r \vdash r & (Hip) \\
9 & \Gamma,\ p,\ r \vdash r & (Hip) \\
10 & \square &
\end{array}
$$

Dejamos como ejercicio enunciar las tácticas para las reglas que involucran a la negación así como el desarrollo de derivaciones en lógica clásica.