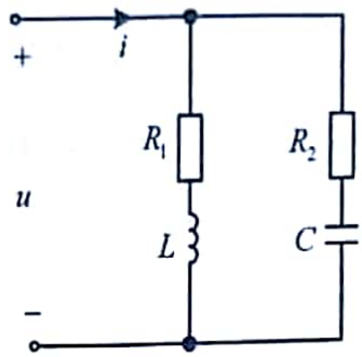
一、(10 分)图 1 是一个由线性时不变电阻、电感和电容元件构成的一端口网络。其中，$R_1=R_2=1\Omega$，$L=-1\text{H}$，$C=-1\text{F}$，储能元件的初始储能为零。请判断该网络是否为传统的有源网络？是否为端口型有源网络？



解答：

$$u_L(t)=u(t)-R_1 i_L(t)=u(t)+\int_0^t u_L(\tau)d\tau$$

$$i_C(t)=\frac{u(t)-u_C(t)}{R_2}=u(t)+\int_0^t i_c(\tau)d\tau$$

因此可知：　　$u_L(t)=i_C(t)$

一端口网络的端口电流为：

$$i(t)=i_L(t)+i_C(t)=\frac{u(t)-u_L(t)}{R_1}+i_C(t)=u(t)-u_L(t)+i_C(t)=u(t)$$

由此可得：　　$W(t_0)+W(t_0,t)=\int_0^t u(\tau)i(\tau)d\tau=\int_0^t u^2(\tau)d\tau\geq 0$

故该一端口网络为端口型无源网络。

因为该网络中含有 2 个有源元件（电容和电感），所以该网络为传统有源网络。

二、(10 分)列写图 2 所示含零泛器电路的节点方程（选择节点 6 为参考节点）。

解答：

以节点 6 为参考节点，断开零泛器后，节点导纳矩阵为：

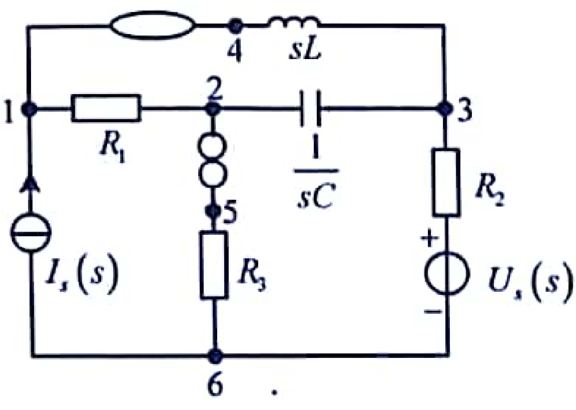
$$
\mathbf{Y}_n(s)=\begin{bmatrix}
\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{R_1} & sC+\frac{1}{R_1} & -sC & 0 & 0 \\
0 & -sC & sC+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_3}
\end{bmatrix}
$$

节点电流向量为：

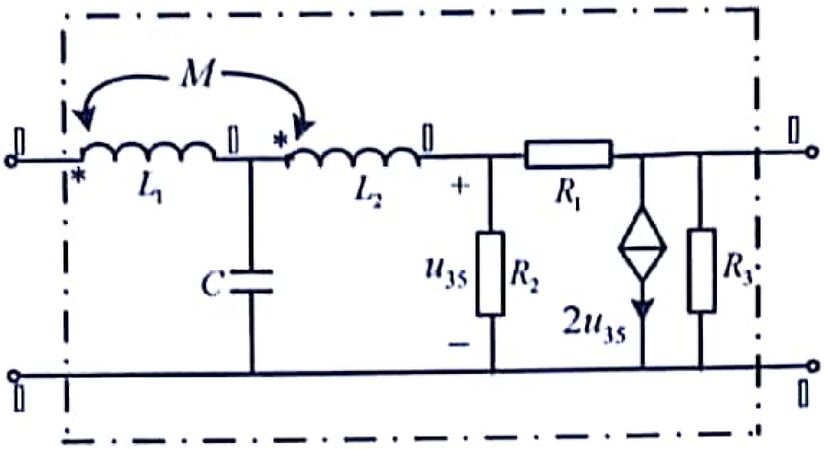
$$
\mathbf{I}_n(s)=\left[I_s\ 0\ \frac{U_s}{R_2}\ 0\ 0\ 0\right]^T
$$

由于节点 1 和 4 之间接有一个零器，将导纳矩阵中的第 4 列元素加到第 1 列元素中去，删除第 4 列元素，同事删除节点电压向量中的变量 U_{n4}。节点 2 和 5 之间接有一个泛器，将导纳矩阵中的第 5 行元素加到第 2 行元素中去，删除第 6 行元素，同事删除 $I_n(s)$ 向量中的第 5 个元素，得到的节点方程如下：

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{R_1} & sC+\frac{1}{R_1} & -sC & \frac{1}{R_3} \\
-\frac{1}{sL} & -sC & sC+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{sL} & 0 \\
\frac{1}{sL} & 0 & -\frac{1}{sL} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n5} \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \\ \frac{U_s}{R_2} \\ 0 \end{bmatrix}
$$



三、（20 分）图 3 所示的线性二端口网络中，已知 $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$，$L_1 = L_2 = 2\text{H}$，$M = 1\text{H}$，$C = 1\text{F}$，写出其原始不定导纳矩阵，并根据原始不定导纳矩阵求出该二端口网络的短路导纳矩阵。



解答：

1）用观察法写出的该网络的原始不定导纳矩阵

令：$D = s\left(L_1L_2 - M^2\right) = 3s$

电流　$i_{25} = 2u_{35} = 2u_3 - 2u_5$，故原始不定导纳矩阵为：

$$
\mathbf{Y}_i(s) = \begin{bmatrix}
\frac{L_2}{D} & -\frac{L_2+M}{D} & \frac{M}{D} & 0 & 0 \\
-\frac{L_2+M}{D} & sC+\frac{L_1+L_2+2M}{D} & -\frac{L_1+M}{D} & 0 & -sC \\
\frac{M}{D} & -\frac{L_1+M}{D} & G_1+G_2+\frac{L_1}{D} & -G_1 & -G_2 \\
0 & 0 & -G_1+2 & G_1+G_3 & -G_3-2 \\
0 & -sC & -G_2-2 & -G_3 & sC+G_2+G_3+2
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\frac{2}{3s} & -\frac{1}{s} & \frac{1}{3s} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{s} & s+\frac{2}{s} & -\frac{1}{s} & 0 & -s \\
\frac{1}{3s} & -\frac{1}{s} & 2+\frac{2}{3s} & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\
0 & -s & -3 & -1 & s+4
\end{bmatrix}
$$

划去第 5 行第 5 列，消除节点 2 和节点 3 并令

$$k=\frac{2}{3s}-\frac{1}{s^3+2s}$$

可得该二端口网络的短路导纳矩阵为：

$$\mathbf{Y}_{sc}(\mathbf{s})=\begin{bmatrix} k-\dfrac{\left(k-\dfrac{1}{3s}\right)^2}{k+2} & \dfrac{\left(k-\dfrac{1}{3s}\right)}{k+2} \\ -\dfrac{\left(k-\dfrac{1}{3s}\right)}{k+2} & 2+\dfrac{1}{k+2} \end{bmatrix}$$

四、(20 分）图 4 图 5 所示线性网中，$R_1=R_2=R_3=1\Omega$，$L_1=L_2=1\,\text{H}$，$M=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\text{H}$，$C=1\,\text{F}$，$\varepsilon(t)$表示单位阶跃函数，单位为 V。电压初始值$u(0_-)=1\,\text{V}$，电流初始值$i_1(0_-)=1\,\text{A}$，$i_2(0_-)=2\text{A}$。

（1）列写状态方程，画出对应的状态转移图；

（2）用 Mason 公式求出转移函数$T_1=\dfrac{U(s)}{E(s)}$、预解矩阵$\mathbf{\Phi}(s)$；

（3）求电流$I_1(s)$。

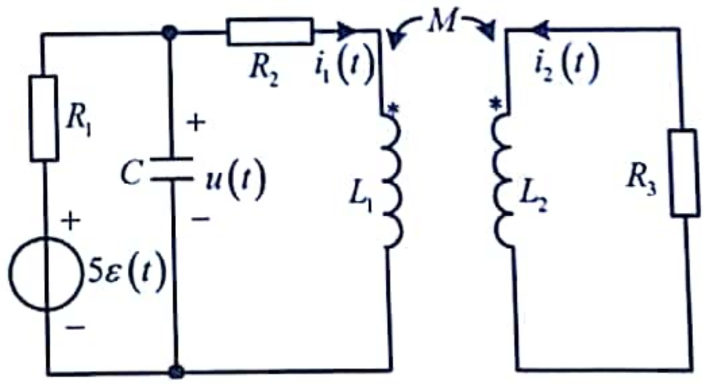


图 4

解答：

（1）选取$u(t)$、$i_1(t)$和$i_2(t)$为状态变量

令：$u_1(t)=u(t)-R_2i_1(t)$，$u_2(t)=-R_3i_2(t)$，由互感电路，可知：

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{di_1(t)}{dt} \\ \dfrac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

从上述方程可解得（代入参数）：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_1(t)}{dt} \\ \dfrac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

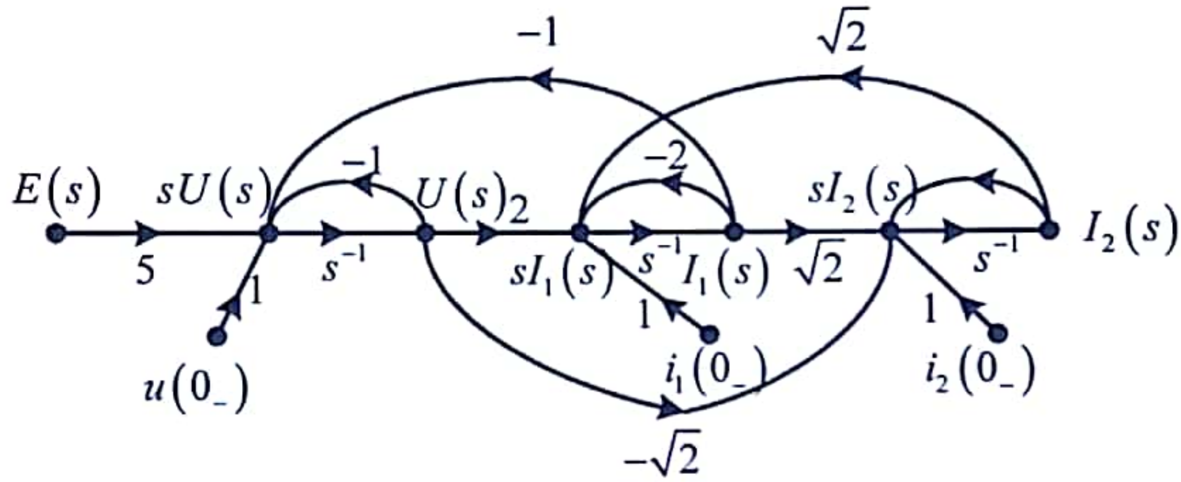
又从电路可知：

$$C\frac{du(t)}{dt} = \frac{5\varepsilon(t) - u(t)}{R_1} - i_1(t)$$

将参数代入上述方程并整理，可得状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du(t)}{dt} \\ \dfrac{di_1(t)}{dt} \\ \dfrac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$

可画出相应的状态转移图：



（2）由 Mason 公式可知：图行列式为

$$\Delta = 1 - \left(-s^{-1} - 2s^{-1} - 2s^{-1} - 2s^{-2} + 2s^{-2} + 2s^{-3}\right) + \left(2s^{-2} + 2s^{-2} + 4s^{-2} + 4s^{-3} - 2s^{-3}\right) - \left(-4s^{-3}\right)$$
$$= 1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}$$

求转移函数 T_1： $P_1 = 5s^{-1}$， $\Delta_1 = 1 - \left(-2s^{-1} - 2s^{-1} + 2s^{-2}\right) + 4s^{-2} = 1 + 4s^{-1} + 2s^{-2}$

$$T_1 = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{5s^{-1} + 20s^{-2} + 10s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{5s^2 + 20s + 10}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

求预解矩阵 $\phi(s)$：

$$\phi_{11}(s) = \frac{s^{-1} + 4s^{-2} + 2s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

$$\phi_{12}(s)=\frac{-s^{-2}-2s^{-3}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}=\frac{-s-2}{s^3+5s^2+8s+4}$$

$$\phi_{13}(s)=\frac{-\sqrt{2}s^{-3}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}=\frac{-\sqrt{2}}{s^3+5s^2+8s+4}$$

$$\phi_{21}(s)=\frac{2s^{-2}+4s^{-3}-2s^{-3}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}=\frac{2s+2}{s^3+5s^2+8s+4}$$

$$\phi_{22}(s)=\frac{s^{-1}+3s^{-2}+2s^{-3}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}=\frac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+8s+4}$$

$$\phi_{23}(s)=\frac{\sqrt{2}s^{-2}+\sqrt{2}s^{-3}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}=\frac{\sqrt{2}s+\sqrt{2}}{s^3+5s^2+8s+4}$$

$$\phi_{31}(s)=\frac{-\sqrt{2}s^{-2}+\sqrt{2}s^{-3}-2\sqrt{2}s^{-3}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}=\frac{-\sqrt{2}s-\sqrt{2}}{s^3+5s^2+8s+4}$$

$$\phi_{32}(s)=\frac{\sqrt{2}s^{-2}+\sqrt{2}s^{-3}+\sqrt{2}s^{-3}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}=\frac{\sqrt{2}s+2\sqrt{2}}{s^3+5s^2+8s+4}$$

$$\phi_{33}(s)=\frac{s^{-1}+3s^{-2}+2s^{-3}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}=\frac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+8s+4}$$

（3）求电流，由 Mason 公式先求出转移函数：

$$T_{i1}(s)=\frac{I_1(s)}{E(s)}=\frac{10s^{-2}+20s^{-3}-10s^{-3}}{1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}}=\frac{10s+10}{s^3+5s^2+8s+4}$$

$$I_1(s)=\phi_{21}(s)u(0_-)+\phi_{22}(s)i_1(0_-)+\phi_{23}(s)i_2(0_-)+T_{i1}(s)E(s)$$

$$=\frac{2s+2+s^2+3s+2+2\sqrt{2}s+2\sqrt{2}}{s^3+5s^2+8s+4}+\frac{10s+10}{s^3+5s^2+8s+4}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{s^2+\left(5+2\sqrt{2}\right)s+4+2\sqrt{2}}{s^3+5s^2+8s+4}+\frac{10s+10}{s^4+5s^3+8s^2+4s}=\frac{s^3+\left(5+\sqrt{2}\right)s^2+\left(14+2\sqrt{2}\right)s+10}{s^4+5s^3+8s^2+4s}$$

五、(**20 分**) 图 5 所示电路中，已知 $G_1=4\text{S}$，$G_2=G_3=2\text{S}$，$G_4=7\text{S}$，$\beta=3$，$U_S=2\text{V}$。

选择节点 0 为参考节点。

（1）请列写该网络的节点电压方程；

（2）写出联接矩阵；

（3）根据联接矩阵画出信号流图；

（4）用信号流图的变换规则求出节点电压 U_2。

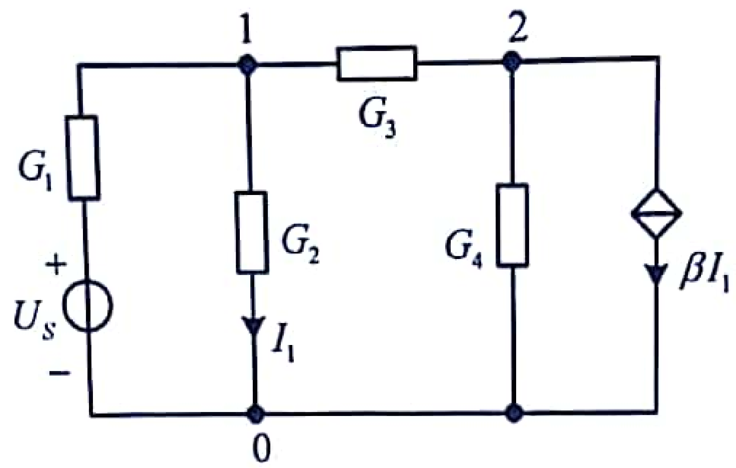


图 5

解答：

（1） 节点电压方程：

$$\begin{cases}(G_1+G_2+G_3)U_1-G_3U_2=G_1U_s\\ -G_3U_1+(G_3+G_4)U_1=-\beta I_1\\ I_1=G_2U_1\end{cases}$$

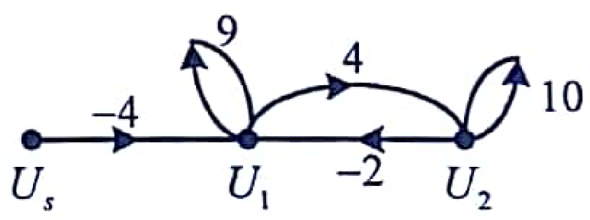
代入参数并整理后可得：

$$\begin{bmatrix}8 & -2\\ 4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}U_s$$

（2） 联接矩阵

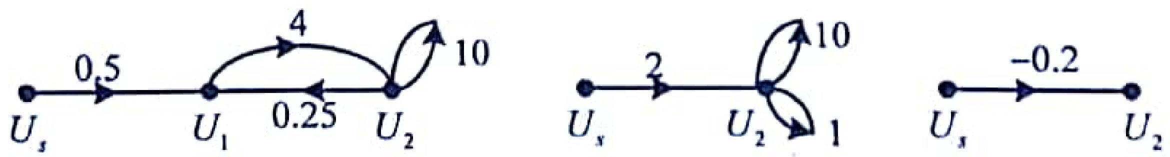
$$C=\begin{bmatrix}9 & -2 & -4\\ 4 & 10 & 0\end{bmatrix}$$

（3） 信号流图



（4） 由信号流图变换规则求节点电压U_2

先消除传输值为 9 的自环，再消除节点U_1，再将 2 个自环用同方向并联后，消除该自环，可得信号流图分别为：



所以：

$$U_2=-0.2U_s=-0.4\text{ V}。$$

六、（20 分）图 6 所示线性时不变网络中，已知$u_s(t)=\left(\sqrt{2}U_s\cos\omega t\right)\varepsilon(t)$ V，（$\varepsilon(t)$为单位阶跃函数），$R=5\Omega$，$L=0.02\text{H}$，$C=0.01\text{F}$。$\omega=100\,\text{rad/s}$，储能元件中的初始储能均为零。试求：

（1）网络函数$T(s)=\dfrac{U_o(s)}{U_s(s)}$。

（2.）网络达到稳态后，用符号网络函数法求出上述频域网络函数对参数R、L的增益灵敏度和相位灵敏度。

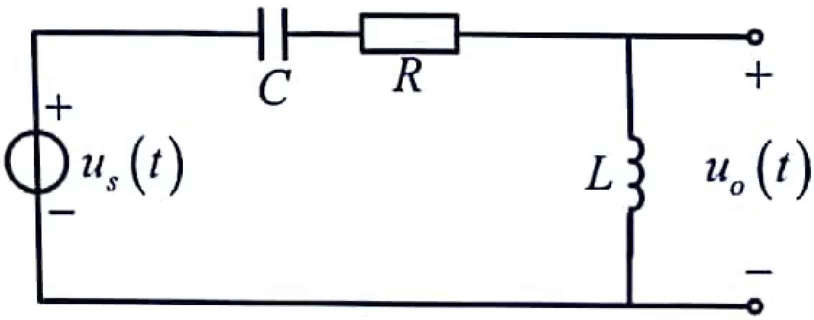


图 6

解答：

（1）　求网络函数：

$$T(s)=\frac{U_o(s)}{U_s(s)}=\frac{sL}{sL+R+1/sC}=\frac{LCs^2}{LCs^2+RCs+1}=\frac{2s^2}{2s^2+500s+10000}$$

（2）　求增益灵敏度和相位灵敏度：

$$T(j\omega)=\frac{-LC\omega^2}{-LC\omega^2+jRC\omega+1}=\frac{-2}{-2+j5+1}=\frac{\sqrt{26}}{13}\angle 78.7^\circ=\frac{\sqrt{26}}{13}\angle 1.37$$

$$S_R^{T(j\omega)}=R\frac{\partial\ln T(j\omega)}{\partial R}=-R\frac{jC\omega}{-LC\omega^2+jRC\omega+1}=\frac{-j5}{-1+j5}=-\frac{25}{26}+j\frac{5}{26}$$

$$S_R^{|T(j\omega)|}=-\frac{25}{26}=-0.96 \qquad S_R^{\phi(j\omega)}=\frac{1}{\phi}\frac{5}{26}=\frac{1}{1.37}\times\frac{5}{26}=0.14$$

$$S_L^{T(j\omega)}=L\frac{\partial\ln T(j\omega)}{\partial L}=L\frac{-C\omega^2}{-LC\omega^2}-L\frac{-C\omega^2}{-LC\omega^2+jRC\omega+1}=1-\frac{-2}{-1+j5}=\frac{-1-j5}{1-j5}=\frac{12}{13}-j\frac{5}{13}$$

$$S_L^{|T(j\omega)|}=\frac{12}{13}=0.92 \qquad S_L^{\phi(j\omega)}=-\frac{1}{\phi}\frac{5}{13}=-\frac{1}{1.37}\times\frac{5}{13}=-0.28$$