

一、选择、填空题

P₁₈

1. 线性规划具有唯一最优解是指 C

- (A) 最优表中存在非基变量的检验数为零。
- (B) 最优表中存在常数项为零。
- (C) 最优表中非基变量检验数全部非零。
- (D) 可行解集合有界。

2. 在求极小值的线性规划问题中，引入人工变量的目标是 D

- (A) 将不等式约束化为等式约束
- (B) 建立单纯形初表
- (C) 求初始可行解
- (D) 方便地生成一个可行基底

3. 线性规划(P)和(D)互为对偶，若(P)的第k个约束条件为小于等于，则(D)中对应的第k个变量 y_k 是 A。

- (A) $y_k \geq 0$;
- (B) $y_k \leq 0$;
- (C) 自由变量;
- (D) $y_k = 0$.

4. 设 $f(x)$ 是 S 上的二阶连续可微函数，则下列说法哪个正确 D。

(A) 若 $\nabla^2 f(x)$ 是不定的，则驻点 x 可能是极值点，也可能不是极值点。

(B) $f(x)$ 是 S 上严凸函数 $\Leftrightarrow \nabla^2 f(x)$ 在 S 上是正定矩阵。半正定

(C) $f(x)$ 是 S 上严凸函数 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in S$ 且 $x_1 \neq x_2$, $\nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1) < f(x_1) - f(x_2)$

(D) 无约束优化的目标函数 $f(x)$ 是严格凸函数则全局极小点唯一。

5. 求线性规划问题 $\min\{-2x_1 - 3x_2 : x_1 + 2x_2 \leq 8, 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 3\}$ 的最优解 (4, 2)。

P₄₉ 6. 极大化的线性规划问题为无界解时，则对偶问题 必无可行解。

P₆ 7. 线性规划的解有唯一最优解、无穷多最优解、无界解 和无可行解四种情形。

二、建立线性规划数学模型（不必求解）：P₈₃

某投资者有 50 万元可以用于长期投资，可供选择的投资项目包括购买国库券、购买公司债券、投资房地产、购买股票、银行短期或长期储蓄，各种投资方式的投资期限、年收益率、风险系数、增长潜力的具体参数见表 1。若投资者希望投资组合的平均年限不超过 5 年，平均的期望收益率不低于 13%，风险系数不超过 4，收益的增长潜力不低于 10%。问在满足上述要求的前提下，投资者该如何选择投资组合使平均年收益率最高？试建立线性规划模型。

$$\max Z = 11\% x_1 + 15\% x_2 + 25\% x_3 + 20\% x_4 + 10\% x_5 + 12\% x_6.$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 50.$$

$$3x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 5 \times 6.$$

$$11\% x_1 + 15\% x_2 + 25\% x_3 + 20\% x_4 + 10\% x_5 + 12\% x_6 \geq 13\% \times 50.$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 6x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 4 \times 50.$$

$$0.7x_1 + 1.5x_2 + 3.0x_3 + 2.0x_4 + 5.0x_5 + 10.0x_6 \geq 10\% \times 50.$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

表 1 各种投资项目的参数表

序号	投资方式	投资期限/年	年收益率/%	风险系数	增长潜力/%
1	国库券	3	11	1	0
2	公司债券	10	15	3	15
3	房地产	6	25	8	30
4	股票	2	20	6	20
5	短期储蓄	1	10	1	5
6	长期储蓄	5	12	2	10

三、用单纯形法求解线性规划问题:

$$\min Z = -2x_1 - 3x_2$$

$$s.t. \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

x_1	b					
x_2	3	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	4	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_3	3	0	0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
	0	0	0	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$

并分析下列各种条件下最优解的变化:

(1) 确定目标函数中变量 x_1 的系数 c_1 在什么范围内变化最优解不变;

$$\Delta c_1 \in [-7, \frac{1}{2})$$

(2) 当约束条件右端项由 $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ 变化到 $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ 时原问题的最优解是否保持不变? 若变化, 请变. 有~~用对偶单纯形~~

求得改变后的最优解。

四、给定线性规划问题

$$\min z = 5x_1 + 21x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \geq b \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

其中 b 是某个正数, 已知这个问题的一个最优解是 $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)$.

(1) 写出对偶问题; (2) 求对偶问题的最优解。 $(\frac{11}{4}, \frac{9}{4})$ 互补松弛.

$$\begin{aligned} -\frac{4}{5}x_1 + \frac{5}{3} &= -\frac{4}{15} + \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{15} + \frac{5}{3} &= -\frac{4}{15} + \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{15} + \frac{5}{3} &= -\frac{4}{15} + \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{15} + \frac{5}{3} &= -\frac{4}{15} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$