电网络分析

灵敏度分析

第六章：灵敏度分析

一、网络的灵敏度
二、灵敏度恒等式
三、增量网络法
四、伴随网络法
五、符号网络函数法

第一节：网络的灵敏度

一、网络的灵敏度

- 为了引入网络灵敏度的概念，首先研究一个简单的例子，即213页图6-1。
- 观察一个集总、线性、时不变网络N，其某一网络函数为$T(s)$。设 x 为与该网络某元件有关的参数，它可以是元件值，或是影响元件值的一些物理量（如温度、压力）。为研究 x 的微小变化对网络性能的影响，将网络函数表示为 $T(s,x)$。设参数 在标称值 x_0 附近有微小变化：

$$\Delta x = x - x_0$$

- ✓ 将 $T(s,x)$ 在 x_0 附近用泰勒级数展开：

$$T(s,x)=T(s,x_0)+\left.\frac{\partial T(s,x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}\Delta x+\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 T(s,x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}\Delta x^2+\ldots$$

第一节：网络的灵敏度

一、网络的灵敏度

- 设函数 $T(s,x)$在 x_0 处连续，且 Δx 很小，忽略 Δx^2 及各高次项，得：

$$\Delta T = T(s,x) - T(s,x_0) = \left.\frac{\partial T(s,x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} \Delta x$$

- 网络函数 $T(s,x)$相对于参数 x 的未归一化灵敏度定义为：

$$\hat{S}_x^T = \frac{\partial T}{\partial x}$$

- 网络函数 $T(s,x)$相对于参数 x 的归一化灵敏度（简称灵敏度）定义为：

$$S_x^T = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{x}{T} = \frac{\partial T}{T}\bigg/\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln x}$$

第一节：网络的灵敏度

二、网络函数的偏差及相对偏差与灵敏度的关系

- **网络函数的偏差及相对偏差与灵敏度的关系为：**

$$\Delta T=\frac{\partial T(s,x)}{\partial x}\Delta x=\hat{S}_x^T\Delta x \qquad \frac{\Delta T}{T}=S_x^T\frac{\Delta x}{x}$$

- **如果网络中有多个元件参数 $x_1,x_2,\ldots x_n$ 同时产生微小变化，网络函数 T 对各元件参数的灵敏度分别为 S_{x1}^T，$S_{x2}^T,\ldots S_{xn}^T$ ，则这些参数同时改变所引起网络函数 T 的偏差和相对偏差分别为：**

$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial T}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial T}{\partial x_n}\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial x_k}\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}S_x^T\frac{\Delta x_k}{x_k}T$$

$$\frac{\Delta T}{T}=\sum_{k=1}^{n}S_{x_k}^T\frac{\Delta x_k}{x_k}$$

第一节：网络的灵敏度

三、网络输出变量对某些参数的灵敏度

- 一般而言，将网络函数表示为：

$$T(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$$

$$\frac{\partial T(s)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R(s)}{E(s)}\right)=\frac{1}{E(s)}\frac{\partial R(s)}{\partial x}$$

- $T(s)$ 对 x 的灵敏度为：

$$S_x^{T(s)}=\frac{\partial T(s)}{\partial x}\frac{x}{T}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R(s)}{E(s)}\right)\frac{xE(s)}{R(s)}=\frac{\partial R(s)}{\partial x}\frac{x}{R(s)}=S_x^{R(s)}$$

第一节：网络的灵敏度

四、增益灵敏度和相位灵敏度

- **频域网络函数：** $T(j\omega)=|T(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$
- **$T(j\omega)$ 对参数 x 的灵敏度为：**

$$S_x^{T(j\omega)}=\frac{\partial \ln T(j\omega)}{\partial \ln x}=x\frac{\partial \ln T(j\omega)}{\partial x}$$

$$\ln T(j\omega)=\ln|T(j\omega)|+j\phi(\omega)$$

$$S_x^{T(j\omega)}=x\frac{\partial \ln|T(j\omega)|}{\partial x}+jx\frac{\partial \phi(\omega)}{\partial x}$$

✓ **分别对上式取实部和虚部，得：**

$$\mathrm{Re}[S_x^{T(j\omega)}]=x\frac{\partial \ln|T|}{\partial x}=S_x^{|T|} \qquad \mathrm{Im}[S_x^{T(j\omega)}]=x\frac{\partial \phi}{\partial x}=\phi S_x^{\phi}$$

第一节：网络的灵敏度

四、增益灵敏度和相位灵敏度

- 上两式中，$S_x^{|T|}$ 为增益 $|T(j\omega)|$ 对 x 的灵敏度， S_x^{Φ} 为相角 $\Phi(\omega)$ 对 x 的灵敏度，可由网络的复增益 $T(j\omega)$ 对 x的 灵敏度取实、虚部而得：

$$S_x^{|T|} = \mathrm{Re}[S_x^{T(j\omega)}]$$

$$S_x^{\phi} = \frac{1}{\phi}\mathrm{Im}[S_x^{T(j\omega)}]$$

第二节：灵敏度恒等式

- 以下灵敏度恒等式均就归一化灵敏度而言

1、如果 T 不是 x 的函数，则： $S_x^T=0$

2、设 C 是任意常数，则： $S_x^{Cx}=1$

3、 $$S_x^{1/T}=-S_x^T$$

4、 $$S_{1/x}^T=-S_x^T$$

5、设 T 是 y 的函数，y 是 x 的函数，则：

$$S_x^T=S_y^T S_x^y$$

第二节：灵敏度恒等式

- 以下灵敏度恒等式均就归一化灵敏度而言

6、 $$S_x^{T_1T_2} = S_x^{T_1} + S_x^{T_2}$$

7、 $$S_x^{T_1/T_2} = S_x^{T_1} - S_x^{T_2}$$

8、 $$S_x^{T^n} = nS_x^T \qquad S_x^{x^n} = nS_x^x = n \qquad S_x^{Cx^n} = S_x^{x^n} = n$$

9、 $$S_{x^n}^T = \frac{1}{n} S_x^T$$

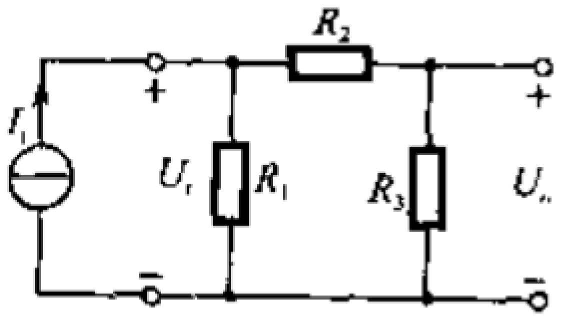
10、 $$S_x^{Cf(x)} = S_x^{f(x)}$$

11、 $$S_x^{(T_1+T_2)} = \frac{T_1}{T_1+T_2} S_x^{T_1} + \frac{T_2}{T_1+T_2} S_x^{T_2}$$

第二节：灵敏度恒等式

- **例6-1 如图，Π形电阻网络的网络函数为：**

$$T=\frac{U_o}{I_i}=\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

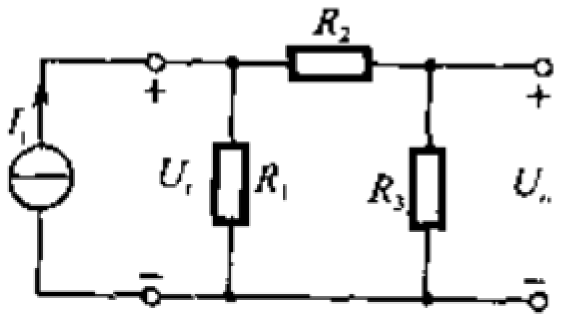


用灵敏度恒等式求T对R_1的灵敏度

第二节：灵敏度恒等式

- **例6-1 如图，Π形电阻网络的网络函数为：**

$$T=\frac{U_o}{I_i}=\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}$$



用灵敏度恒等式求T对R_1的灵敏度

解：

$$S_{R_1}^{T}=S_{R_1}^{R_1R_3}-S_{R_1}^{(R_1+R_2+R_3)}$$

$$=1-[\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}S_{R_1}^{R_1}+\frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}S_{R_1}^{(R_2+R_3)}]$$

$$=1-\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$$

$$=\frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

第二节：灵敏度恒等式

- **例6-2 某二阶低通滤波器的转移函数为：**

$$T(s)=\frac{K}{s^2+(\frac{\omega_0}{Q})s+\omega_0^2}$$

式中ω_0和Q分别为二阶滤波器的极点频率和极点Q值，K为正实常数。试求增益 $|T(j\omega)|$对ω_0的灵敏度$S_{\omega_0}^{|T|}$和对Q的灵敏度$S_{Q}^{|T|}$.

第二节：灵敏度恒等式

■ **例6-2**

解： **令s=jω，得频域转移函数：**

$$T(j\omega)=\frac{K}{(\omega_0^2-\omega^2)+j\omega\omega_0/Q}$$

对上式取模得增益函数：

$$|T(j\omega)|=\frac{K}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\omega_0/Q)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

增益对ω_0的灵敏度：

$$S_{\omega_0}^{|T|}=S_{\omega_0}^{K}-S_{\omega_0}^{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\omega_0/Q)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\omega_0/Q)^2}\cdot$$

$$[|\omega_0^2-\omega^2|^2\cdot S_{\omega_0}^{(\omega_0^2-\omega^2)^2}+|\omega\omega_0/Q|^2 S_{\omega_0}^{(\omega\omega_0/Q)^2}]$$

式中：

$$S_{\omega_0}^{(\omega_0^2-\omega^2)^2}=2S_{\omega_0}^{(\omega_0^2-\omega^2)}=2\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}S_{\omega_0}^{\omega_0^2}=4\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$S_{\omega_0}^{(\omega\omega_0/Q)^2}=2$$

第二节：灵敏度恒等式

■ **例6-2**

解：（续上）故

$$S_{\omega_0}^{|T|}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\omega_0^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+2(\omega\omega_0/Q)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\omega_0/Q)^2}$$

分子分母各项除以ω_0^4，并令归一化频率：

$$\Upsilon=\frac{\omega}{\omega_0}$$

得：

$$S_{\omega_0}^{|T|}=-\frac{2(1-\Upsilon^2)+\Upsilon^2/Q^2}{(1-\Upsilon^2)^2+\Upsilon^2/Q^2}$$

同理可求出对Q的灵敏度：

$$S_{\omega_0}^{|T|}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\omega\omega_0/Q)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\omega_0/Q)^2}\cdot S_Q^{(\omega\omega_0/Q)^2}$$

$$=\frac{(\omega\omega_0/Q)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\omega_0/Q)^2}$$

第三节：增量网络法

一、增量网络法

- 增量网络法是一种根据给定电网络直接求网络变量对网络元件参数的非归一化灵敏度的方法。
- 考察一个含线性时不变电阻、电感、电容元件、线性受控源和独立源的网络 N（称为原网络），指定参考节点并任选一树。网络 N 的基本方程为：

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{I}_b = 0 \\ \mathbf{B}_f \mathbf{U}_b = 0 \end{cases}$$

- ✓ 此处及以下各节一般均略去复频域变量符号(s)。
- “微扰网络”(perturbed network)，用符号 N_p 表示。 N_p 与N 有相同的拓扑结构，故 N_p 的KCL、KVL方程为

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{I}_b + \Delta\mathbf{I}_b) = 0 \\ \mathbf{B}_f(\mathbf{U}_b + \Delta\mathbf{U}_b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}\,\Delta\mathbf{I}_b = 0 \\ \mathbf{B}_f\,\Delta\mathbf{U}_b = 0 \end{cases}$$

第三节：增量网络法

一、增量网络法

- 设想构造一个与原网络 N 拓扑结构相同的“增量网络”N_i (incremental network)， N_i 的各支路电流、电压就是增量电流向量 $\Delta \mathrm{I}_b$、增量电压向量$\Delta \mathrm{U}_b$ 的各元，而 N_i 的支路特性应按 N_p 中各支路增量电流与增量电压间的关系确定。

✓ 设原网络 N 的第 j 条支路阻抗为 Z_j，则该支路电压电流方程：

$$U_j = Z_j I_j$$

✓ 当网络中某些参数有微小变化时，在微扰网络 N_p 中第 j 条支路电压电流方程：

$$\begin{aligned} U_j + \Delta U_j &= (Z_j + \Delta Z_j)(I_j + \Delta I_j) \\ &= Z_j I_j + Z_j \Delta I_j + I_j \Delta Z_j + \Delta Z_j \Delta I_j \end{aligned}$$

✓ 忽略高阶无穷小，有： $$\Delta U_j = Z_j \Delta I_j + I_j \Delta Z_j$$

- 上式表明，在增量网络 N_i中，第 j 条支路应由原网络 N 的第 j 支路阻抗 Z_j与电压为 $I_j\,\Delta\,Z_j$ 的电压源串联构成。

第三节：增量网络法

一、增量网络法

- 增量网络的构成见表6-1。
  - ✓ 应当注意，Z、Y 和受控源在增量网络中的对应支路分别较原网络增加了串联电压源和并联电流源，而这些电源的表达式均含原网络某些支路电流或电压，因此，求解增量网络之前必须先对原网络求解。

    例题6-3。从该例题可以看到：
  - ➢ 如果列出原网络 N 的方程为：

$$\mathbf{PX}=\mathbf{Y}$$

  - ✓ 则增量网络N_i 的方程必为：

$$\mathbf{P\Delta X}=\hat{\mathbf{Y}}$$

- 设 N 的关联矩阵为 A，支路导纳矩阵为 $\mathbf{Y}_b$，则节点方程为

$$\mathbf{AY}_b\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_n=\mathbf{A}(\mathbf{I}_s-\mathbf{Y}_b\mathbf{U}_s)$$

第三节：增量网络法

一、增量网络法

- 当支路导纳矩阵有微小改变 $\Delta\mathbf{Y}_b$ 时，节点电压向量改变 $\Delta\mathbf{U}_n$ ，写出增量网络的节点方程的一阶近似式为：

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_b\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{U}_n+\mathbf{A}\Delta\mathbf{Y}_b\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_n=-\mathbf{A}\Delta\mathbf{Y}_b\mathbf{U}_S$$

即：

$$\mathbf{Y}_n\Delta\mathbf{U}_n=-\mathbf{A}\Delta\mathbf{Y}_b\left(\mathbf{U}_S+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_n\right)$$

$$\because\mathbf{U}_b=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_n$$

- 复合支路中各部分电压间的关系所给出的导抗元件电压向量：

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}_b+\mathbf{U}_s\qquad\therefore\quad\mathbf{Y}_n\Delta\mathbf{U}_n=-\mathbf{A}\Delta\mathbf{Y}_b\left(\mathbf{Y}_S+\mathbf{U}_b\right)\qquad\mathbf{Y}_n\Delta\mathbf{U}_n=-\mathbf{A}\Delta\mathbf{Y}_b\mathbf{U}$$

- 如果去网络 N 中全部导纳元件均以导纳参数表示，且受控源一律换为等效的压控流源，按表6-1规则绘出其增量网络 N_i ，对N列写出节点方程，直接便得到上式，根据上式可求出：

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{U}_n=-\mathbf{Y}_n^{-1}\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{Y}_b\cdot\mathbf{U}$$

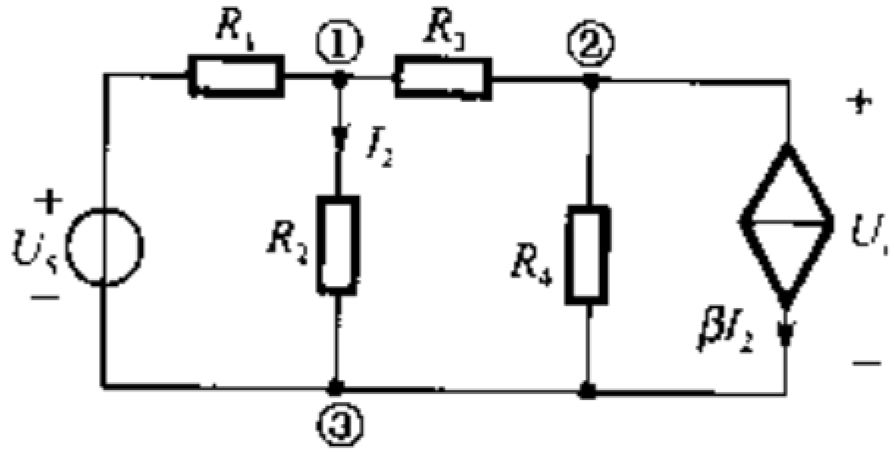
第三节：增量网络法

二、增量网络法求非归一化灵敏度的基本步骤

- ✓ 根据题意所要求的非归一化灵敏度确定哪些元件参数是可微变参数，构造相应的增量网络 N_i；
- ✓ 求解原网络 N，求出增量网络 N_i 中所需原网络 N 的网络变量;
- ✓ 求解增量网络 N_i，导出有关网络变量增量与各可微变参数增量间的关系式;
- ✓ 应用上一步骤中所得关系式求网络变量对元件参数的偏导数。将以上结果除以激励电压(或电流)，便可得到有关网络函数对该元件参数的偏导数。

第三节：增量网络法

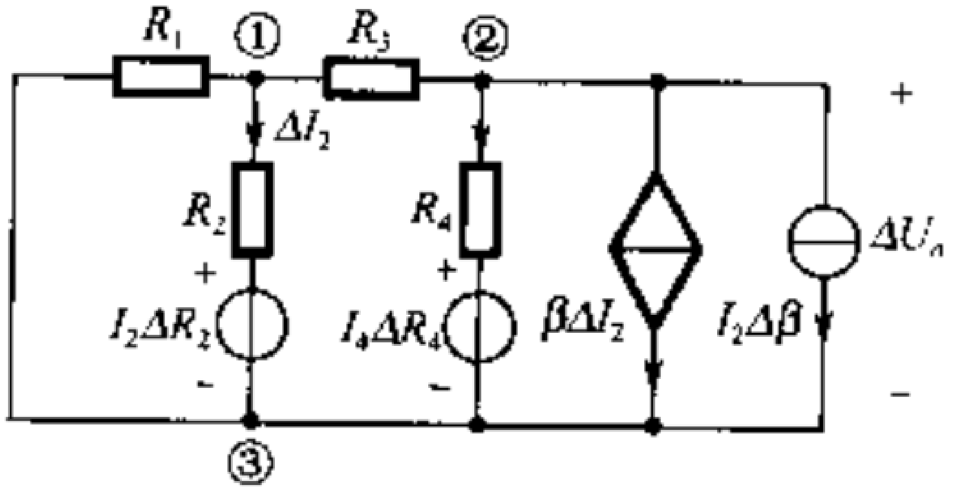
- **例6-3　在下图所示有源网络中，各元件参数标称值为：$R_1=1\Omega$，$R_2=\frac{1}{3}\Omega$，$R_3=\frac{1}{2}\Omega$，$R_4=\frac{1}{8}\Omega$，$\beta=\frac{4}{3}$. 用增量网络法求输出电压U_0对R_2、R_4及β的偏导数。设转移函数$T=U_o/U_S$,求偏导数$\partial T/\partial\beta$.图中电压源电压$U_S=4V$.**



第三节：增量网络法

- 例6-3

解：　考虑参数R_2、R_4及β可能发生微小改变的情形，构造增量网络，如图所示。增量网络中含原网络支路电流I_2、I_4的解，故首先对原网络求解。



以节点③为参考节点，写出原网络的节点方程：

$$(G_1+G_2+G_3)U_{①}-G_3U_{②}=G_1U_S$$

$$-G_3U_{①}+(G_3+G_4)U_{②}=-\beta I_2$$

$$I_2=G_2U_{①}$$

将元件参数代入节点方程，有：$6U_{①}$-$2U_{②}=4$；$2U_{①}+10U_{②}=0$。解得$U_{①}$=5/8V；$U_{②}$=-1/8V.

则电流$I_2=\dfrac{U_{①}}{R_2}=\dfrac{15}{8}A;I_4=\dfrac{U_{②}}{R_2}=-1A.$

对增量网络N_i求解ΔU_o,仍采用节点分析法：

$$(G_1+G_2+G_3)\Delta U_{①}-G_3\Delta U_{②}=G_2I_2\Delta R_2$$

$$-G_3\Delta U_{①}+(G_3+G_4)\Delta U_{②}=G_4I_4\Delta R_4-\beta\Delta I_2-I_2\Delta\beta$$

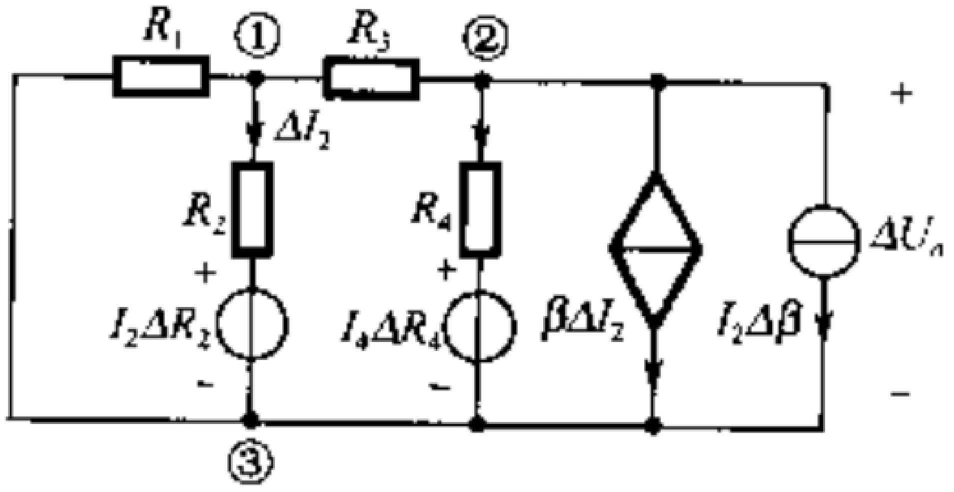
$$\Delta I_2=G_2(\Delta U_i-I_2\Delta R_2)$$

代入元件参数和电流I_2、I_4的解，有：$6\Delta U_{①}$-$2\Delta U_{②}=\dfrac{45}{8}\Delta R_2$；$2\Delta U_{①}+10\Delta U_{②}=\dfrac{15}{2}\Delta R_2-8\Delta R_4-\dfrac{15}{8}\Delta\beta$

解上式，求$\Delta U_{②}$：　$\Delta U_o=\Delta U_{②}=\dfrac{135}{256}\Delta R_2-\dfrac{3}{4}\Delta R_4-\dfrac{45}{256}\Delta\beta$

第三节：增量网络法

例6-3



解：（续上）为求偏导数$\frac{\partial U_o}{\partial R_2}$,令上式中$\Delta R_4$=0，$\Delta\beta = 0$，令$\Delta R_2 \to 0$,有：

$$\frac{\partial U_o}{\partial R_2} = \frac{135}{256} = 0.5273$$

同理可得：

$$\frac{\partial U_o}{\partial R_4} = -\frac{3}{4} = -0.75$$

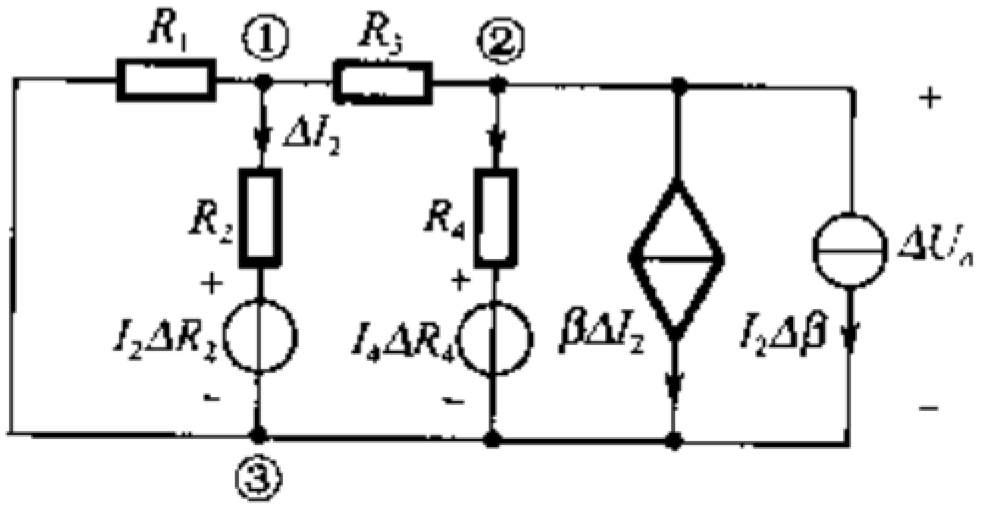
$$\frac{\partial U_o}{\partial \beta} = -\frac{45}{256} = -0.1758$$

转移函数T对β的偏导数为：

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{U_o}{U_S}\right) = \frac{1}{U_S}\cdot\frac{\partial U_o}{\partial \beta} = \frac{1}{4}\times(-0.1758) = -0.04395$$

第三节：增量网络法

- 例6-4 求下图网络的电压U_O对电导G_2、G_4和对β的偏导数。图中$G_1 = 1S, G_2 = 3S, G_3 = 2S, G_4 = 8S, \beta$=4/3

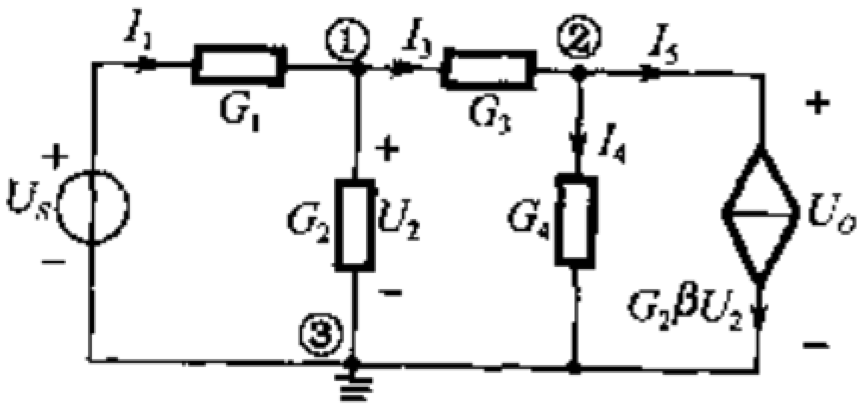


第三节：增量网络法

华南理工大学 South China University of Technology

例6-4

解：将图中各电阻元件以电导参数标出，并用压控流源等效代换图中的流控流源，重绘电路。图中标出了支路编号及参考方向。



关联矩阵：$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

支路导纳矩阵：

$$Y_b=\begin{bmatrix}G_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0\\ 0 & G_2\beta & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

节点导纳矩阵：

$$Y_n=AY_bA^T=\begin{bmatrix}G_1+G_2+G_3 & -G_3\\ G_2\beta-G_3 & G_3+G_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 2 & 10\end{bmatrix}$$，对Y_n求逆得：$Y_n^{-1}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 2 & 10\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{64}\begin{bmatrix}10 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}=\frac{1}{32}\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

节点电源电流：

$$A(I_s-Y_bU_S)=-AY_bU_S=-\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0\\ 0 & G_2\beta & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_S\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_1U_S\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}$$

第三节：增量网络法

■ 例6-4

解：（续上）原网络节点方程的解：

$$U_n = Y_n^{-1}A(I_S - Y_bU_S) = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 20 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

支路电压向量： $U_b = A^TU_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$**;导抗元件电压向量：** $U = U_b + U_S = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

第三节：增量网络法

例6-4

解：（续上）将计算结果代入$\frac{\partial}{\partial x}U_n = -Y_n^{-1}A\frac{\partial}{\partial x}Y_b.U$： $U_{①}$-2$U_{②}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}U_{①}\\U_{②}\end{bmatrix} = -\frac{1}{32}\begin{bmatrix}5 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}G_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & G_2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & G_3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & G_4 & 0\\0 & G_2\beta & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{5}{8}\\\frac{5}{8}\\\frac{3}{4}\\-\frac{1}{8}\\-\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

令$x = G_2$求$\frac{\partial U_o}{\partial G_2}$：

$$\frac{\partial U_o}{\partial G_2} = \frac{\partial U_{②}}{\partial G_2} = -\frac{1}{32}\left(-\frac{5}{8}+\frac{15}{8}\beta\right) = -\frac{1}{32}\left(-\frac{5}{8}+\frac{15}{8}\times\frac{4}{3}\right) = -\frac{15}{256} = -0.05859$$

同理，

$$\frac{\partial U_o}{\partial G_4} = \frac{\partial U_{②}}{\partial G_4} = -\frac{1}{32}\times 3\times\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{256} = 0.01172$$

$$\frac{\partial U_o}{\partial \beta} = \frac{\partial U_{②}}{\partial G_\beta} = -\frac{1}{32}\times 3\times\frac{5}{8}G_2 = -\frac{3}{32}\times\frac{5}{8}\times 3 = -\frac{45}{256} = -0.1758$$

第四节：伴随网络法

- 伴随网络法是计算任意网络函数对网络中各元件参数的非归一化灵敏度的有效方法。

一、特勒根定理

- 研究一个集总网络 N，支路电流、电压取一致参考方向，时域中支路电流、电压向量用 $\mathbf{i}$ 、$\mathbf{u}$ 表示，节点电压向量用$\mathbf{u}_n$ 表示，N 的关联矩阵为$\mathbf{A}$，用关联矩阵表示的KCL、KVL分别为：

$$\mathbf{Ai} = 0 \qquad\qquad \mathbf{u} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_n$$

✓ 将各支路 u 、i 相乘并求和：

$$\sum ui = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{i} = \mathbf{u}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ai} = 0$$

✓ 故对任意集总网络有：

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{i} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = 0$$

- 上式表明：任意集总网络任意时刻各支路吸收的瞬时功率之和为 0，这是点网络瞬时功率守恒性的数学描述。

第四节：伴随网络法

一、特勒根定理

- 下面再考察N和另一个集总网络$\hat{N}$，$\hat{N}$和N的拓扑结构相同，对应支路元件成分可不相同，将二网络按相同序号进行支路和节点编号，则$\hat{N}$与N的关联矩阵相等，即：

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$$

✓ $\hat{N}$的KCL、KVL方程分别为： $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{i}} = 0$ $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{n}}$

✓ 将网络N的每一支路电压乘以网络$\hat{N}$的对应支路电流，然后求和可得：

$$\sum u\hat{i} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{u}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{u}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{i}} = 0$$

✓ 故对任意两个关联矩阵相同的集总网络N和$\hat{N}$有：

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{i} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{u}} = 0$$ (似功率定理)

- 上式即为特勒根定理。

在复频域中有： $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{I}}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}\mathbf{I} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{U}} = 0$

第四节：伴随网络法

二、伴随网络

1、伴随网络定义

- 两个线性时不变的集总网络 N 与 $\check{N}$，如果满足下列三个条件，则称它们互为伴随网络：

  （1） N 和 $\check{N}$ 的拓扑结构相同，即：$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$

  （2） N 和 $\check{N}$ 的非独立源支路的参数矩阵间有以下关系：

  i) 若支路阻抗矩阵 Z_b、$\check{\mathrm{Z}}_b$ 存在，则： $\mathrm{Z}_b^T = \hat{\mathrm{Z}}_b$

  ii) 若支路导纳矩阵 Y_b、$\hat{\mathrm{Y}}_b$ 存在，则： $\mathrm{Y}_b^T = \hat{\mathrm{Y}}_b$

  iii) 一般情形下，非独立源支路特性总可以用混合参数矩阵表征为：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{b1} \\ \mathrm{U}_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{H}_{11} & \mathrm{H}_{12} \\ \mathrm{H}_{21} & \mathrm{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{U}_{b1} \\ \mathrm{I}_{b2} \end{bmatrix} = \mathrm{H}_b \begin{bmatrix} \mathrm{U}_{b1} \\ \mathrm{I}_{b2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{I}}_{b1} \\ \hat{\mathrm{U}}_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{H}}_{11} & \hat{\mathrm{H}}_{12} \\ \hat{\mathrm{H}}_{21} & \hat{\mathrm{H}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{U}}_{b1} \\ \hat{\mathrm{I}}_{b2} \end{bmatrix} = \hat{\mathrm{H}}_b \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{U}}_{b1} \\ \hat{\mathrm{I}}_{b2} \end{bmatrix}$$

则：

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{H}}_{11} & \hat{\mathrm{H}}_{12} \\ \hat{\mathrm{H}}_{21} & \hat{\mathrm{H}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{H}_{11}^T & -\mathrm{H}_{21}^T \\ -\mathrm{H}_{12}^T & \mathrm{H}_{22}^T \end{bmatrix}$$

（3）N 和 $\check{N}$ 中的对应独立源支路具有相同性质，即同为电流源或同为电压源，但可有不同的值。

第四节：伴随网络法

二、伴随网络

1、伴随网络定义

- 以上即伴随网络的定义。可以看出，条件 (2) 中的 i)、ii) 两种情形均属 iii) 的特例。 N 与 $\check{N}$ 互为伴随网络，则称网络 N 与 $\check{N}$ 具有相互互易性 (interreciprocity)。

✓ 注意构造伴随网络时的支路划分，独立源应单独作为一个支路，受控源必须采用其二端口模型。即包括控制支路和受控支路，控制电流视为一个短路支路的电流，控制电压视为一个开路支路的电压。

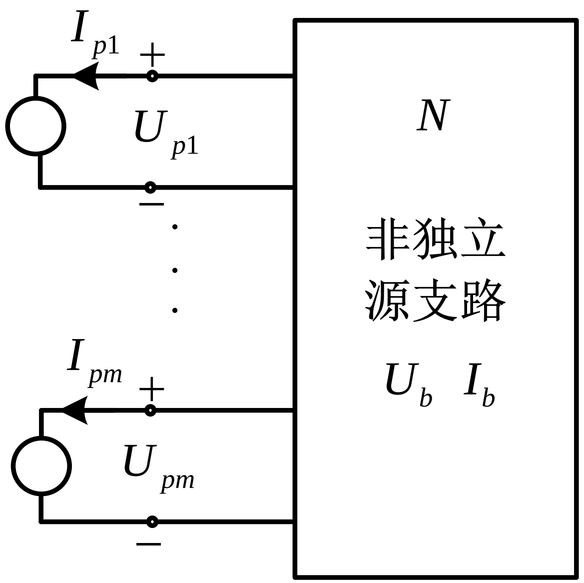
表6-2 各类网络元件在伴随网络中的对应元件

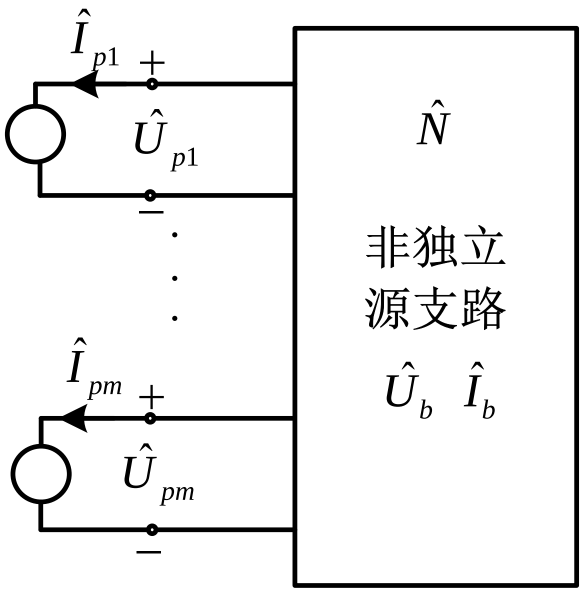
第四节：伴随网络法

二、伴随网络

2、 N 和 Ň 的端口参数间的关系

- 将 *N* 和 *Ň* 的全部独立源抽出，形成多端口网络，如图所示





第四节：伴随网络法

二、伴随网络

2、 N 和 Ň 的端口参数间的关系

- 非独立源支路电流、电压向量用 I_b、U_b 及 $\hat{I}_b$、$\hat{U}_b$表示。
  - ✓ 如果支路阻抗矩阵存在，则：

$$U_b = Z_b I_b \qquad \hat{U}_b = \hat{Z}_b \hat{I}_b$$

且有： $$\hat{Z}_b = Z_b^T$$

  - ✓ 端口电流、电压向量用 I_p、U_p 及 $\hat{I}_p$、$\hat{U}_p$表示。如果多端口网络的开路阻抗矩阵存在，则：

$$U_p = -Z_{oc} I_p \qquad \hat{U}_p = -\hat{Z}_{oc} \hat{I}_p$$

  - ✓ 式中负号是考虑到开路阻抗矩阵是在端口支路电流、电压参考方向相反的情况下定义的。可以证明：

$$\hat{Z}_{oc} = Z_{oc}^T$$

第四节：伴随网络法

二、伴随网络

2、 N 和 Ň 的端口参数间的关系

- 如果多端口网络的短路导纳矩阵存在，即：

$$\mathbf{I}_p = -\mathbf{Y}_{sc}\mathbf{U}_p \qquad \hat{\mathbf{I}}_p = -\hat{\mathbf{Y}}_{sc}\hat{\mathbf{U}}_p$$

则：

$$\hat{\mathbf{Y}}_{sc} = \mathbf{Y}_{sc}^T$$

- 在一般情况下，多端口网络的混合参数矩阵为：

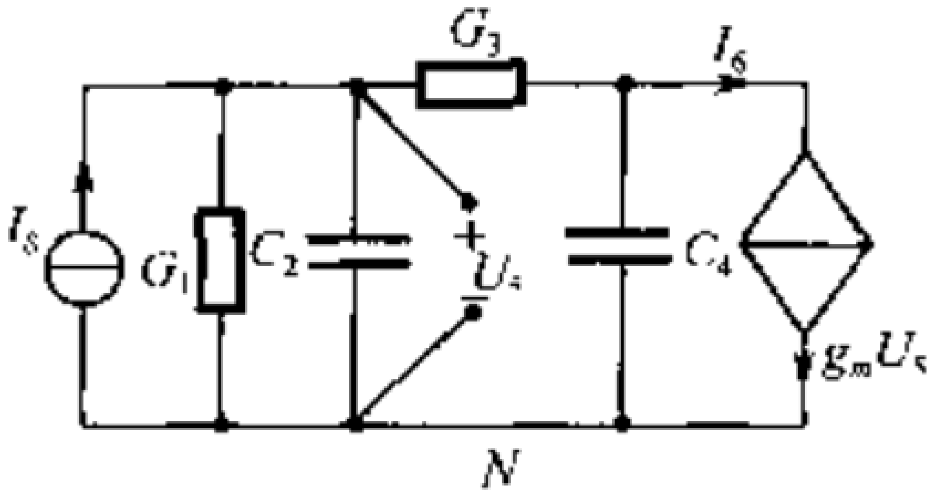
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_E \\ \mathbf{U}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{EE} & \mathbf{H}_{EJ} \\ \mathbf{H}_{JE} & \mathbf{H}_{JJ} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{U}_E \\ \mathbf{I}_J \end{bmatrix} = \mathbf{H}\begin{bmatrix} \mathbf{U}_E \\ \mathbf{I}_J \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}_E \\ \hat{\mathbf{U}}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{EE} & \hat{\mathbf{H}}_{EJ} \\ \hat{\mathbf{H}}_{JE} & \hat{\mathbf{H}}_{JJ} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_E \\ \hat{\mathbf{I}}_J \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{H}}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_E \\ \hat{\mathbf{I}}_J \end{bmatrix}$$

- 中下标 E 表示独立电压源，下标 J 表示独立电流源。可以证明，H 和 $\hat{\mathbf{H}}$ 存在以下关系：

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{EE} & \hat{\mathbf{H}}_{EJ} \\ \hat{\mathbf{H}}_{JE} & \hat{\mathbf{H}}_{JJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{EE}^T & -\mathbf{H}_{JE}^T \\ -\mathbf{H}_{EJ}^T & \mathbf{H}_{JJ}^T \end{bmatrix}$$

第四节：伴随网络法

- **例6-5　对下图所示网络N构成其伴随网络$\hat{N}$**



第四节：伴随网络法

■ 例6-5

解：网络的支路导纳矩阵为：

$$Y_b=\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sG_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sG_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_m & 0 \end{bmatrix}$$

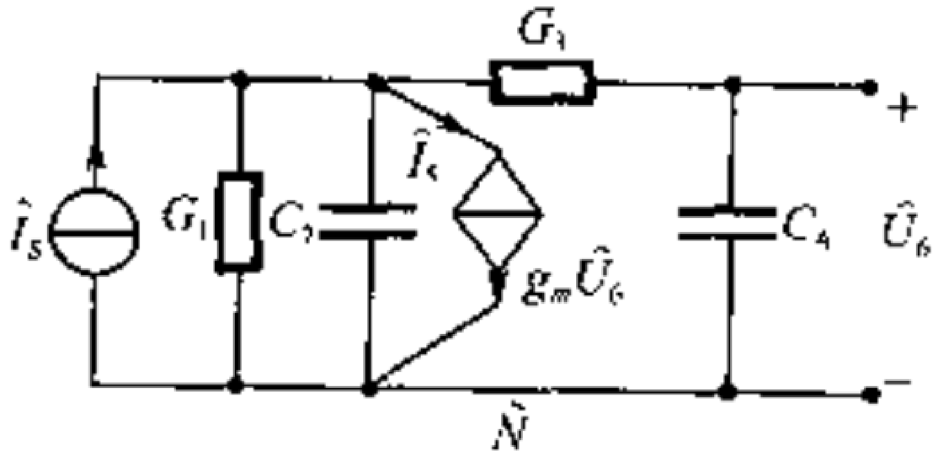
则伴随网络的支路导纳矩阵为：

$$\widehat{Y_b}=Y_b^T=\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sG_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sG_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由$\widehat{Y_b}$所给出的支路特性有：

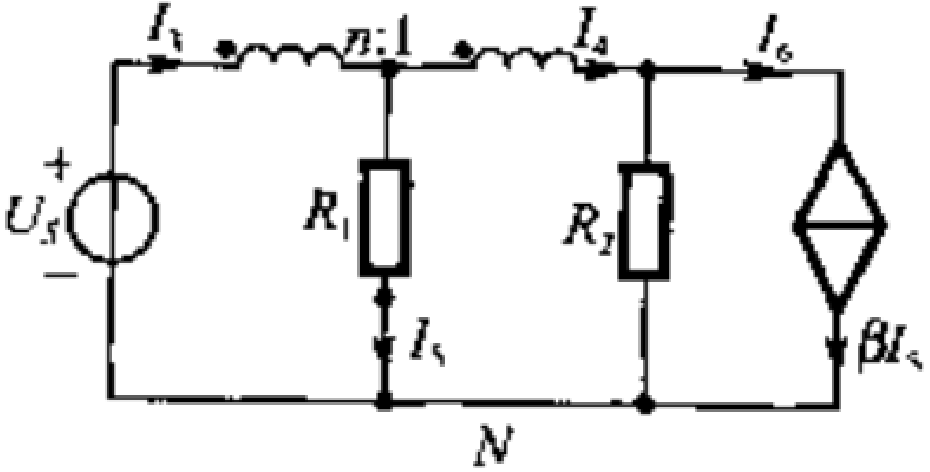
$$\widehat{I_5}=g_m\widehat{U_6},\widehat{I_6}=0$$

$\widehat{N}$的所有二端导抗元件支路均与原网络N中对应支路特性相同，据此构造伴随网络$\widehat{N}$：



第四节：伴随网络法

■ **例6-6　对下图所示网络N构成其伴随网络$\hat{N}$**



第四节：伴随网络法

■ **例6-6**

解： 在原网络N中含一个理想变压器和一个CCCS，它们的元件特性方程为

$$U_3 = nU_4, I_4 = -nI_3, I_6 = \beta I_5, U_5 = 0$$

据此写出网络N的非独立源支路的混合变量方程：

$$\begin{bmatrix} I_4 \\ I_6 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_4 \\ U_6 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_5 \end{bmatrix}$$

伴随网络$\hat{N}$的非独立源支路有以下混合变量方程：

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_4 \\ \hat{I}_6 \\ \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \hat{U}_3 \\ \hat{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_4 \\ \hat{U}_6 \\ \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \\ \hat{I}_5 \end{bmatrix}$$

上式给出的第3、4、5、6支路的支路特性为：

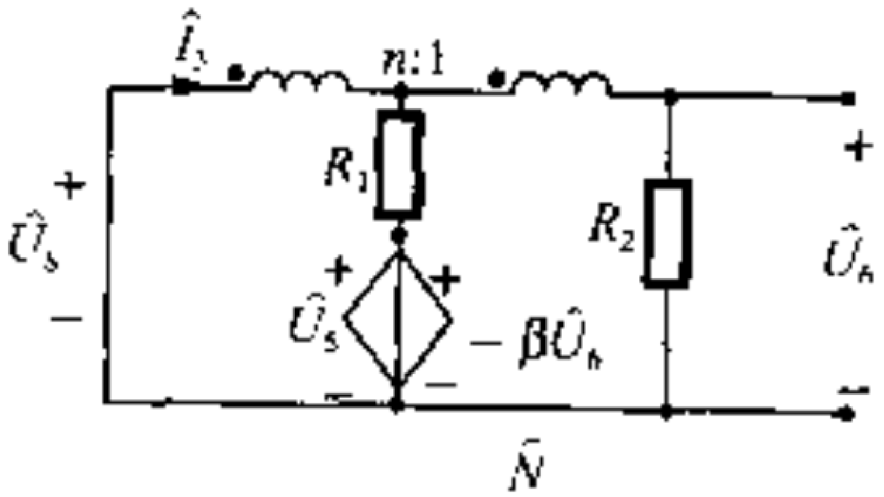
$$\hat{U}_3 = \mathrm{n}\hat{U}_4, \hat{I}_4 = -n\hat{I}_3, \hat{U}_5 = -\beta\hat{U}_6, \hat{I}_6 = 0$$

第四节：伴随网络法

- **例6-6**

解：（续上） 由此可知，N中理想变压器对应的伴随网络$\hat{N}$中的元件仍为理想变压器，变比不变。而网络N中的CCCS则对应于网络$\hat{N}$中的VCVS，控制支路与受控支路互换位置，且控制参数反号。

根据以上结果构成伴随网络$\hat{N}$：



第四节：伴随网络法

三、用伴随网络法计算灵敏度

- 设N的微扰网络为 N_p，伴随网络为 $\check{N}$， $\mathbf{I}$ 、$\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I}$ 、$\check{\mathbf{I}}$ 和 $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{U}+\Delta\mathbf{U}$ 、$\check{\mathbf{U}}$ 分别为以上三网络的电流向量和电压向量。由于N 、 N_p 和 $\check{N}$ 三者有相同的拓扑结构，其中任意二网络的电流、电压均满足特勒根定理所给出的关系，故有：

$$\hat{\mathbf{I}}^T\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}^T\mathbf{I} = 0$$

$$\hat{\mathbf{I}}^T(\mathbf{U}+\Delta\mathbf{U}) - \hat{\mathbf{U}}^T(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I}) = 0 \qquad \Rightarrow \hat{\mathbf{I}}^T\Delta\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}^T\Delta\mathbf{I} = 0$$

✓ 将上式中各电流、电压向量按端口支路与内部支路的划分的分块形式，得：

$$\left[\hat{\mathbf{I}}_p{}^T\Delta\mathbf{U}_p + \hat{\mathbf{I}}_b{}^T\Delta\mathbf{U}_b\right] - \left[\hat{\mathbf{U}}_p{}^T\Delta\mathbf{I}_p + \hat{\mathbf{U}}_b{}^T\Delta\mathbf{I}_b\right] = 0$$

$$\boxed{-\hat{\mathbf{I}}_p{}^T\Delta\mathbf{U}_p + \hat{\mathbf{U}}_p{}^T\Delta\mathbf{I}_p = \hat{\mathbf{I}}_b{}^T\Delta\mathbf{U}_b - \hat{\mathbf{U}}_b{}^T\Delta\mathbf{I}_b}$$

- 上式是推导灵敏度计算公式的依据。以下按网络N的端口参数及内部(非源支路)参数的几种类型分别进行讨论。

第四节：伴随网络法

三、用伴随网络法计算灵敏度

1、多端口网络 N 的开路阻抗矩阵 Z_{oc} 存在，内部支路阻抗 Z_b存在

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{Z}_b\mathbf{I}_b \qquad \mathbf{U}_p = -\mathbf{Z}_{oc}\mathbf{I}_p$$

- 当网络内部阻抗参数发生微小改变而引起网络扰动时，上两式一阶近似为：

$$\Delta\mathbf{U}_b = \Delta\mathbf{Z}_b\mathbf{I}_b + \mathbf{Z}_b\Delta\mathbf{I}_b \qquad \Delta\mathbf{U}_p = -\Delta\mathbf{Z}_{oc}\mathbf{I}_p - \mathbf{Z}_{oc}\Delta\mathbf{I}_p$$

则（1）式右边为： $\hat{\mathbf{I}}_b^T\left(\Delta\mathbf{Z}_b\mathbf{I}_b + \mathbf{Z}_b\Delta\mathbf{I}_b\right) - \left(\hat{\mathbf{Z}}_b\hat{\mathbf{I}}_b\right)^T\Delta\mathbf{I}_b = \hat{\mathbf{I}}_b^T\Delta\mathbf{Z}_b\mathbf{I}_b$

（1）式左边为： $-\hat{\mathbf{I}}_p^T(-\Delta\mathbf{Z}_{oc}\mathbf{I}_p - \mathbf{Z}_{oc}\Delta\mathbf{I}_p) + (-\hat{\mathbf{Z}}_{oc}\hat{\mathbf{I}}_p)^T\Delta\mathbf{I}_p = \hat{\mathbf{I}}_p^T\Delta\mathbf{Z}_{oc}\mathbf{I}_p$

于是： $\boxed{\hat{\mathbf{I}}_p^T\Delta\mathbf{Z}_{oc}\mathbf{I}_p = \hat{\mathbf{I}}_b^T\Delta\mathbf{Z}_b\mathbf{I}_b}$

- 上式给出了N的端口阻抗参数增量 ΔZ_{oc}与内部阻抗参数增量 ΔZ_b间的关系，是用伴随网络法计算灵敏度的公式之一。

第四节：伴随网络法

三、用伴随网络法计算灵敏度

2、多端口网络 N 的短路导纳矩阵$\mathbf{Y}_{sc}$ 存在，内部支路阻抗 $\mathbf{Y}_b$ 存在

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b\mathbf{U}_b \qquad \mathbf{I}_p = -\mathbf{Y}_{sc}\mathbf{U}_p$$

- 当网络内部导纳参数发生微小改变而引起网络扰动时，上两式一阶近似为：

$$\Delta\mathbf{I}_b = \Delta\mathbf{Y}_b\mathbf{U}_b + \mathbf{Y}_b\Delta\mathbf{U}_b \qquad \Delta\mathbf{I}_p = -\Delta\mathbf{Y}_{sc}\mathbf{U}_p - \mathbf{Y}_{sc}\Delta\mathbf{U}_p$$

则（1）式右边为：$\left(\hat{\mathbf{Y}}_b\hat{\mathbf{U}}_b\right)^T\Delta\mathbf{U}_b - \hat{\mathbf{U}}_b^T\left(\Delta\mathbf{Y}_b\mathbf{U}_b + \mathbf{Y}_b\Delta\mathbf{U}_b\right) = -\hat{\mathbf{U}}_b^T\Delta\mathbf{Y}_b\mathbf{U}_b$

（1）式左边为：$-\left(-\hat{\mathbf{Y}}_{sc}\hat{\mathbf{U}}_p\right)^T\Delta\mathbf{U}_p + \hat{\mathbf{U}}_p^T\left(-\Delta\mathbf{Y}_{sc}\mathbf{U}_p - \mathbf{Y}_{sc}\Delta\mathbf{U}_p\right) = -\mathbf{U}_p^T\Delta\mathbf{Y}_{sc}\mathbf{U}_p$

于是：$\boxed{\hat{\mathbf{U}}_p^T\Delta\mathbf{Y}_{sc}\mathbf{U}_p = \hat{\mathbf{U}}_b^T\Delta\mathbf{Y}_b\mathbf{U}_b}$

- 上式给出了N的端口导纳抗参数增量 $\Delta\mathbf{Y}_{sc}$ 与内部阻抗参数增量 $\Delta\mathbf{Y}_b$ 间的关系，是用伴随网络法计算灵敏度的公式之二。

第四节：伴随网络法

三、用伴随网络法计算灵敏度

3、一般情形下，网络N 的端口特性用混合参数矩阵 H 表示，内部非源支路特性用混合参数矩阵 H_b 表示

$$\begin{bmatrix} I_E \\ U_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{EE} & H_{EJ} \\ H_{JE} & H_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_E \\ I_J \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} U_E \\ I_J \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{b1} \\ U_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix} = H_b \begin{bmatrix} U_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix}$$

- 网络 N 的伴随网络 $\check{N}$ 的参数矩阵分别为 $\hat{H}$、$\hat{H}_b$。$\check{N}$ 和 N 的对应参数矩阵间关系如式(6-4-30)、(6-4-15)所示。

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{EE} & \hat{H}_{EJ} \\ \hat{H}_{JE} & \hat{H}_{JJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{EE}^T & -H_{JE}^T \\ -H_{EJ}^T & H_{JJ}^T \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^T & -H_{21}^T \\ -H_{12}^T & H_{22}^T \end{bmatrix}$$

第四节：伴随网络法

三、用伴随网络法计算灵敏度

3、一般情形下，网络N 的端口特性用混合参数矩阵 H 表示，内部非源支路特性用混合参数矩阵 $\mathbf{H}_b$ 表示

- 令网络N内部参数（ $\mathbf{H}_b$ 各元素）发生微小改变而引起网络扰动，基于由特勒根定理，可推导出下列两式:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{I}}_b^T \Delta \mathbf{U}_b - \hat{\mathbf{U}}_b^T \Delta \mathbf{I}_b = [-\hat{\mathbf{U}}_{b1}^T \quad \hat{\mathbf{I}}_{b2}^T] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{H}_{11} & \Delta \mathbf{H}_{12} \\ \Delta \mathbf{H}_{21} & \Delta \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{b1} \\ \mathbf{I}_{b2} \end{bmatrix} \\ -\hat{\mathbf{I}}_p^T \Delta \mathbf{U}_p + \hat{\mathbf{U}}_p^T \Delta \mathbf{I}_p = [\hat{\mathbf{U}}_E^T \quad -\hat{\mathbf{I}}_J^T] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{H}_{EE} & \Delta \mathbf{H}_{EJ} \\ \Delta \mathbf{H}_{JE} & \Delta \mathbf{H}_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_E \\ \mathbf{I}_J \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\hat{\mathbf{U}}_E^T \ -\hat{\mathbf{I}}_J^T] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{H}_{EE} & \Delta \mathbf{H}_{EJ} \\ \Delta \mathbf{H}_{JE} & \Delta \mathbf{H}_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_E \\ \mathbf{I}_J \end{bmatrix} = [-\hat{\mathbf{U}}_{b1}^T \quad \hat{\mathbf{I}}_{b2}^T] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{H}_{11} & \Delta \mathbf{H}_{12} \\ \Delta \mathbf{H}_{21} & \Delta \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{b1} \\ \mathbf{I}_{b2} \end{bmatrix}$$

第四节：伴随网络法

三、用伴随网络法计算灵敏度

3、一般情形下，网络N 的端口特性用混合参数矩阵 H 表示，内部非源支路特性用混合参数矩阵 H_b 表示

$$[\hat{U}_E^T \ \ -\hat{I}_J^T]\begin{bmatrix}\Delta H_{EE} & \Delta H_{EJ}\\ \Delta H_{JE} & \Delta H_{JJ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_E\\ I_J\end{bmatrix}=[-\hat{U}_{b1}^T \ \ \hat{I}_{b2}^T]\begin{bmatrix}\Delta H_{11} & \Delta H_{12}\\ \Delta H_{21} & \Delta H_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{b1}\\ I_{b2}\end{bmatrix}$$

- 上式是用伴随网络法计算网络的非归一化灵敏度的一般公式。左端向量$\check{U}_E$ 、$\check{I}_J$ 、U_E 、I_J 的元素是$\check{N}$ 和N的端口激励电压和电流，在灵敏度计算时可以根据需要适当取值，使左端矩阵相乘的结果仅含我们所关注的网络函数的增量。
- 上式右端增量矩阵的元素决定于内部非源支路特性，分块矩阵 H_{11}、H_{22}、H_{12}、H_{21}的元素应分别为导纳、阻抗、电流比和电压比，因此，在该式右端矩阵乘积展开式中，各类非源元件的贡献分别属于下列各项：

第四节：伴随网络法

三、用伴随网络法计算灵敏度

3、一般情形下，网络*N* 的端口特性用混合参数矩阵 H 表示，内部非源支路特性用混合参数矩阵 H_b 表示

- ✓ 导纳: $-\hat{U}_{b1}^{T}\Delta H_{11}U_{b1}$
- ✓ 阻抗 : $\hat{I}_{b2}^{T}\Delta H_{22}I_{b2}$
- ✓ 电流比: $-\hat{U}_{b1}^{T}\Delta H_{12}I_{b2}$
- ✓ 电压比: $\hat{I}_{b2}^{T}\Delta H_{21}U_{b1}$

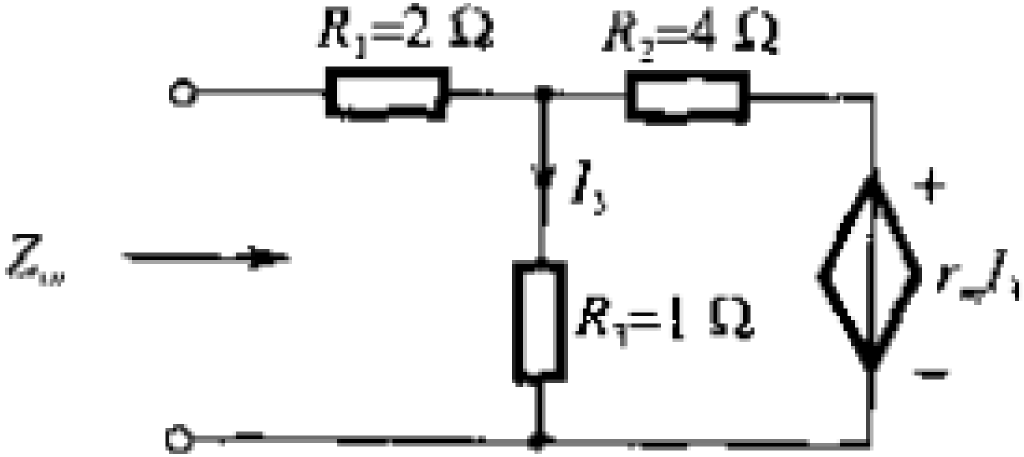
■ 根据以上讨论，可将式（1）右端展开式 $\hat{I}_{b}^{T}\Delta U_{b}-\hat{U}_{b}^{T}\Delta I_{b}=\sum(\hat{I}_{b}\Delta U_{b}-\hat{U}_{b}\Delta I_{b})$

✓ 上式所含各项（称为“灵敏度分量”）与各类元件参数的对应关系归纳于表6-3。进行灵敏度计算时可以直接借助于该表求非归一化灵敏度的一般公式右端。

表6-3 灵敏度分量

第四节：伴随网络法

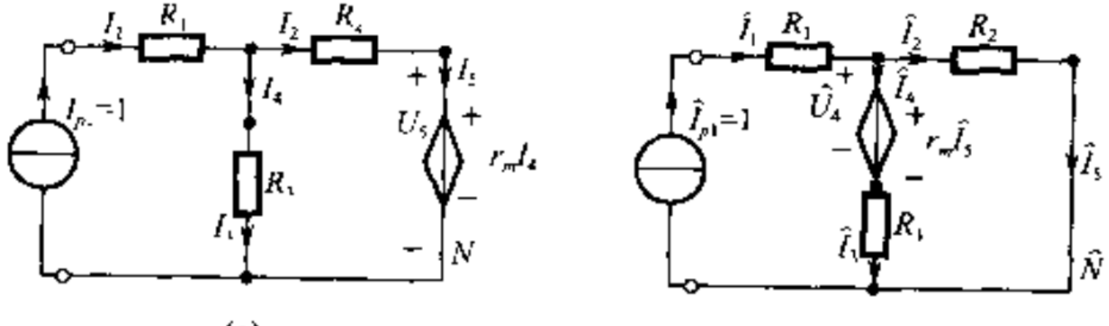
- **例6-7　下图所示网络的输入阻抗为Z_{in}, r_m=2Ω。用伴随网络法求非归一化灵敏度$\frac{\partial Z_{in}}{\partial R_1}$、$\frac{\partial Z_{in}}{\partial R_2}$、$\frac{\partial Z_{in}}{\partial R_3}$和$\frac{\partial Z_{in}}{\partial r_m}$**



第四节：伴随网络法

- **例6-7**

解： 为应用伴随网络法求灵敏度，重绘原网络于图（a），绘出端口电流I_{p1}，并设置电流为I_4的短路电流作为CCVS的控制支路。又根据伴随网络的绘制规则绘出伴随网络$\widehat{N}$,如图（b）所示。



(a) (b)

根据公式有： $\widehat{I}_p^T \Delta Z_{OC} I_p = \widehat{I}_b^T \Delta Z_b I_b$

本例中N为一端口网络，$\Delta Z_{OC} = \Delta Z_{in}, I_p = I_{p1}, \widehat{I_p} = \widehat{I_{p1}}$

支路阻抗矩阵：$Z_b = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_m & 0 \end{bmatrix}$

令网络N中I_{p1}=1A，解各支路电流，得$I_1 = 1$A，$I_2 = I_5 = -\frac{1}{3}$A，$I_3 = I_4 = \frac{4}{3}A$

则 $I_b = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$

第四节：伴随网络法

例6-7

解：（续上）令伴随网络$\hat{N}$中$\widehat{I_{p1}} = 1A$，解各支路电流，得$\widehat{I_1} = 1A, \widehat{I_2} = \widehat{I_5} = \frac{1}{3}A, \widehat{I_3} = \widehat{I_4} = \frac{2}{3}A,$

则
$$\widehat{I_b} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$$

$$1 \cdot \Delta Z_{in} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta r_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$$

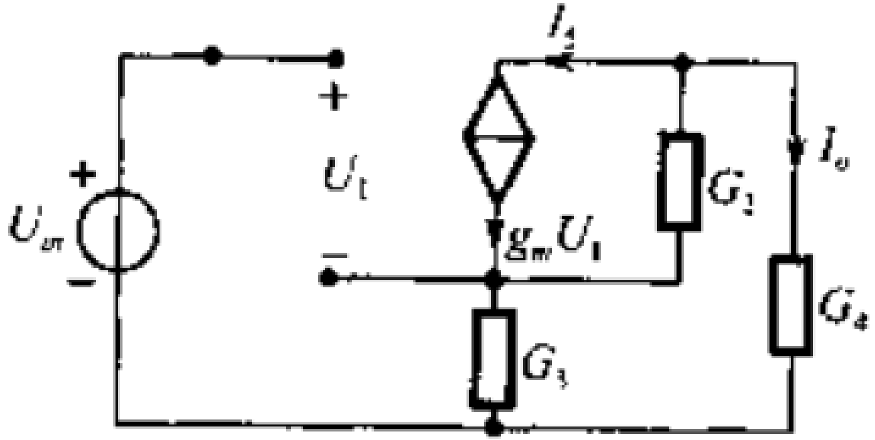
令网络内部支路参数逐一分别产生无限小的改变，可得：

$$\frac{\partial Z_{in}}{\partial \mathrm{R}_1} = 1 \times 1 = 1, \quad \frac{\partial Z_{in}}{\partial \mathrm{R}_2} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9}$$

$$\frac{\partial Z_{in}}{\partial \mathrm{R}_3} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}, \quad \frac{\partial Z_{in}}{\partial \mathrm{r}_\mathrm{m}} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$$

第四节：伴随网络法

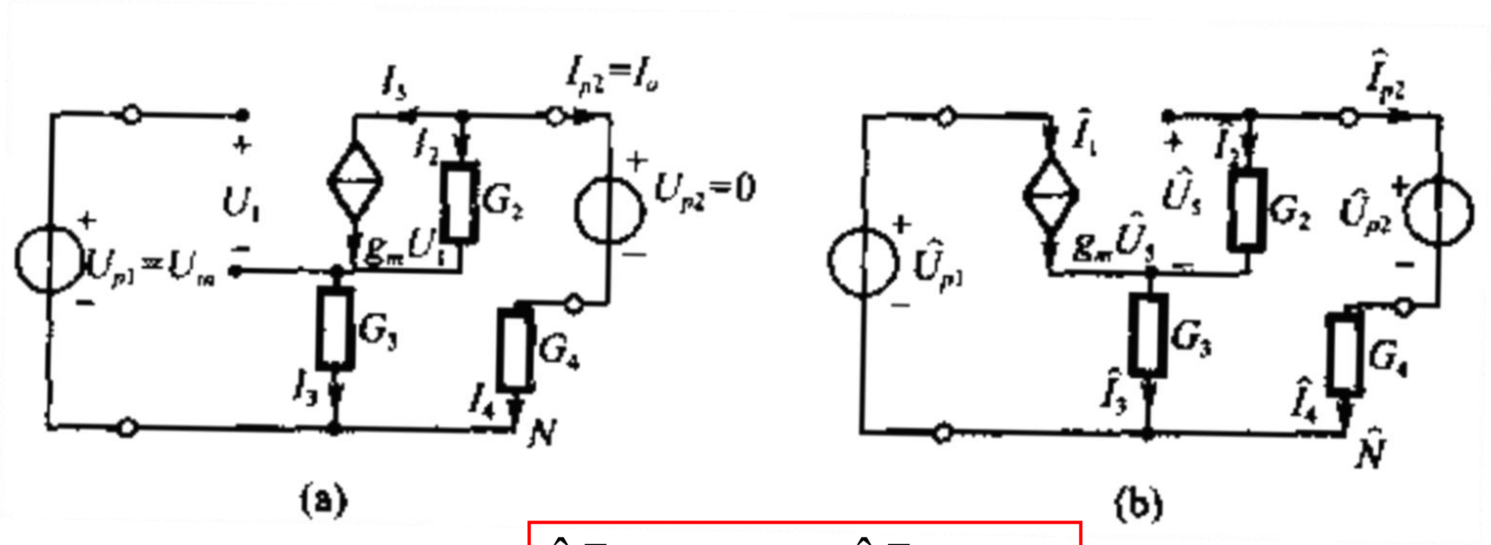
- **例6-8** 下图所示网络的转移函数为$T=I_O/U_{in}$。用伴随网络法求以下偏导数：$\frac{\partial T}{\partial G_2}$、$\frac{\partial T}{\partial G_3}$、$\frac{\partial T}{\partial G_4}$和$\frac{\partial T}{\partial g_m}$



第四节：伴随网络法

- **例6-8**

解： 我们关注输出变量I_o为G_4支路的电流，在4支路串接以电源电压$U_{p2}=0$的电压源接口，构成图（a）中的二端口网络N，其伴随网络$\hat{N}$如图（b）所示：



根据公式：
$$\boxed{\hat{U}_p^T \Delta Y_{sc} U_p = \hat{U}_b^T \Delta Y_b U_b}$$

对于本例，转移函数为：
$$T = \frac{I_o}{U_{in}} = \frac{I_{p2}}{U_{p1}} = -Y_{21}$$

令
$$U_{p1} = 1, U_{p2} = 0, \widehat{U_{p1}} = 0, \widehat{U_{p2}} = -1$$

第四节：伴随网络法

- **例6-8**

解： （续上）则式左端为：$\widehat{U_{p2}^{T}}\Delta Y_{sc}U_p = \begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta Y_{11} & \Delta Y_{12}\\ \Delta Y_{21} & \Delta Y_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = -\Delta Y_{21} = \Delta T$

网络N内部支路阻抗矩阵为：

$$Y_b = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0\\ g_m & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

代入式右端，得：

$$\widehat{U_b^T}\Delta Y_b U_b = \begin{bmatrix}\widehat{U_1} & \widehat{U_2} & \widehat{U_3} & \widehat{U_4} & \widehat{U_5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Delta G_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta G_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Delta G_4 & 0\\ \Delta g_m & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\end{bmatrix}$$

$$= \widehat{U_2}U_2\Delta G_2 + \widehat{U_3}U_3\Delta G_3 + \widehat{U_4}U_4\Delta G_4 + \widehat{U_5}U_1\Delta g_m$$

故有：

$$\Delta T = \widehat{U_2}U_2\Delta G_2 + \widehat{U_3}U_3\Delta G_3 + \widehat{U_4}U_4 + \widehat{U_5}U_1\Delta g_m$$

第四节：伴随网络法

- **例6-8**

解：（续上）令$U_{p1}=1V, U_{p2}=0$,解网络N，得

$$U_1=\frac{7}{9}V, U_2=U_5=-\frac{4}{9}V, U_3=\frac{2}{9}V, U_4=-\frac{2}{9}V$$

即：

$$U_b=\begin{bmatrix}\frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9}\end{bmatrix}^T$$

令$\widehat{U_{p1}}=0, \widehat{U_{p2}}=-1V$,解网络$\widehat{N}$，得

$$\widehat{U_1}=-\widehat{U_3}=\frac{4}{9}V, \widehat{U_2}=\widehat{U_5}=-\frac{4}{9}V, \widehat{U_4}=\frac{1}{9}V$$

即：

$$\widehat{U_b}=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\end{bmatrix}^T$$

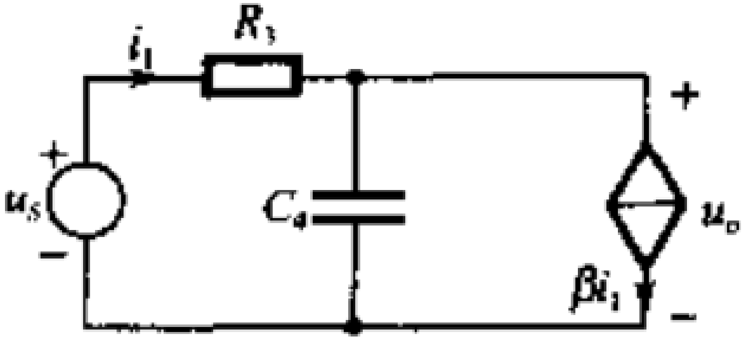
令Y_b各元素逐一分别产生无限小的改变，求出以下非归一化灵敏度：

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{G_2}}=\widehat{U_2}U_2=\frac{16}{81}, \frac{\partial T}{\partial \mathrm{G_3}}=\widehat{U_3}U_3=-\frac{8}{81}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{G_4}}=\widehat{U_3}U_3=-\frac{2}{81}, \frac{\partial T}{\partial \mathrm{g_m}}=\widehat{U_5}U_1=-\frac{28}{81}$$

第四节：伴随网络法

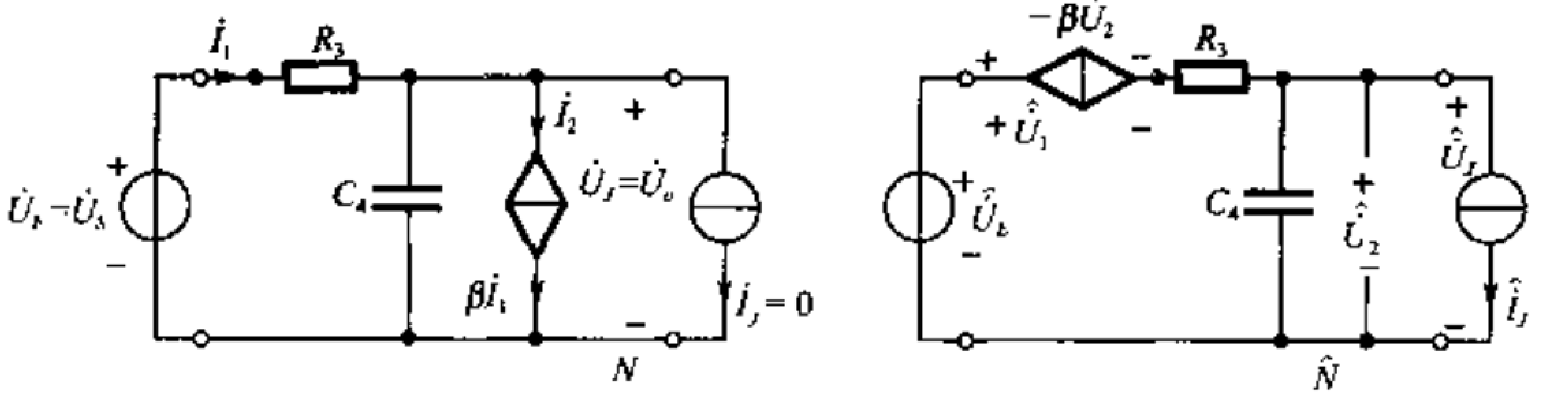
- **例6-9** 下图所示网络处于正弦稳态。正弦电压源u_s的角频率$\omega = 2000\text{rad/s}$， $R_3 = 1\Omega$， $C_4 = \frac{1}{2000}F$，$\beta = 2$，频域转移函数为$T = \frac{U_o(j\omega)}{U_S(j\omega)} = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_S}$。用伴随网络法求转移函数对网络各参数的偏导数：$\frac{\partial T}{\partial R_3}$、$\frac{\partial T}{\partial C_4}$、$\frac{\partial T}{\partial \beta}$。



第四节：伴随网络法

■ **例6-9**

解：本例输出电压为受控电流源支路电压，故在该支路两端并接以电流为零的电流源，形成二端口网络N，如图（a）所示，其伴随网络$\hat{N}$见图（b），各变量以频域变量表示。



(a) (b)

二端口网络N的混合参数端口电压、电流关系方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_E\\ \dot{U}_J\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{EE} & H_{EJ}\\ H_{JE} & H_{JJ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_E\\ \dot{I}_J\end{bmatrix}$$

式中，

$$H_{JE}=T=\frac{\dot{U}_J}{\dot{U}_E}\Big|_{\dot{I}_J=0}=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_S}$$

第四节：伴随网络法

- **例6-9**

解：（续上）令$\dot{U}_E=1,\dot{I}_J=0,\widehat{\dot{U}_E}=0,\widehat{\dot{I}_J}=-1$,则非归一化灵敏度的一般公式左端为：

$$\left[\widehat{\dot{U}_E}\ -\widehat{\dot{I}_J}\right]\begin{bmatrix}\Delta H_{EE} & \Delta H_{EJ}\\ \Delta H_{JE} & \Delta H_{JJ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_E\\ \dot{I}_J\end{bmatrix}=-\widehat{\dot{I}_J}\dot{U}_E\Delta H_{JE}=\Delta T$$

二端口网络N内部非源支路的混合参数VCR方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_2\\ \dot{I}_4\\ \dot{U}_1\\ \dot{U}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \beta & 0\\ 0 & j\omega C_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & R_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{U}_4\\ \dot{I}_1\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}$$

非归一化灵敏度的一般公式右端为:

$$\left[-\widehat{\dot{U}_2}\quad -\widehat{\dot{U}_4}\quad \dot{I}_1\quad \dot{I}_3\right]\begin{bmatrix}0 & 0 & \Delta\beta & 0\\ 0 & j\omega\Delta C_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Delta R_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{U}_4\\ \dot{I}_1\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}=-\widehat{\dot{U}_2}\dot{I}_1\Delta\beta-\hat{\dot{U}}\dot{U}_4\cdot j\omega\Delta C_4+\widehat{\dot{I}_3}\dot{I}_3\Delta R_3$$

第四节：伴随网络法

■ **例6-9**

解：（续上）令$\dot{U}_E = 1, \dot{I}_J = 0$,解网络N：

$$\dot{U}_4 = \frac{\frac{\dot{U}_s}{R_3} - \beta(\frac{\dot{U}_s - \dot{U}_4}{R_3})}{\frac{1}{R_3} + j\omega C_4} = \frac{1 - 2(1 - \dot{U}_4)}{1 + j1} = \frac{1}{1 + j1}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 = \frac{\dot{I}_3 - \dot{U}_4}{R_3} = \frac{-j1}{1 - j1}$$

令$\widehat{\dot{U}_E} = 0, \widehat{\dot{I}_J} = -1$,解网络$\widehat{N}$：

$$\widehat{\dot{U}_2} = \frac{\frac{1}{R_3} \cdot \beta\widehat{\dot{U}_2} + (-\widehat{\dot{I}_{p2}})}{\frac{1}{R_3} + j\omega C_4} = \frac{2\dot{U}_2 + 1}{1 + j1} \rightarrow \widehat{\dot{U}_2} = \widehat{\dot{U}_4} = \frac{-1}{1 - j1}$$

$$\widehat{\dot{I}_3} = \frac{\beta\widehat{\dot{U}_2} - \widehat{\dot{U}_2}}{R_3} = \widehat{\dot{U}_2} = \frac{-1}{1 - j1}$$

第四节：伴随网络法

- **例6-9**

解：（续上）

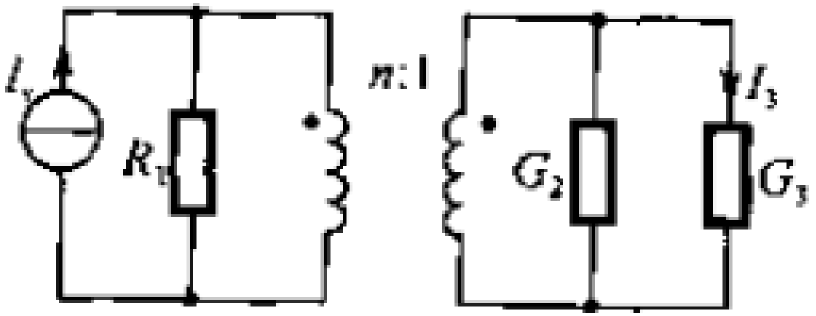
$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{R}_3}=\widehat{\dot{I}_3}\dot{I}_3=\left(\frac{-1}{1-j1}\right)\cdot\left(\frac{-j1}{1-j1}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial C_4}=-j\omega\widehat{\dot{U}_4}\dot{U}_4=-j2000\times\left(-\frac{1}{(1-j1)^2}\right)=-1000$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta}=-\widehat{\dot{U}_2}\dot{I}_1=\left(\frac{1}{1-j1}\right)\cdot\left(\frac{-j1}{1-j1}\right)=\frac{1}{2}$$

第四节：伴随网络法

- **例6-10 下图所示的网络中，R_1=6Ω，G_2= G_3=2S，n=4，转移函数为$T = I_3/I_s$。用伴随网络法求转移函数对各参数的偏导数：$\frac{\partial T}{\partial R_1}$、$\frac{\partial T}{\partial G_2}$、$\frac{\partial T}{\partial G_3}$和$\frac{\partial T}{\partial n}$**

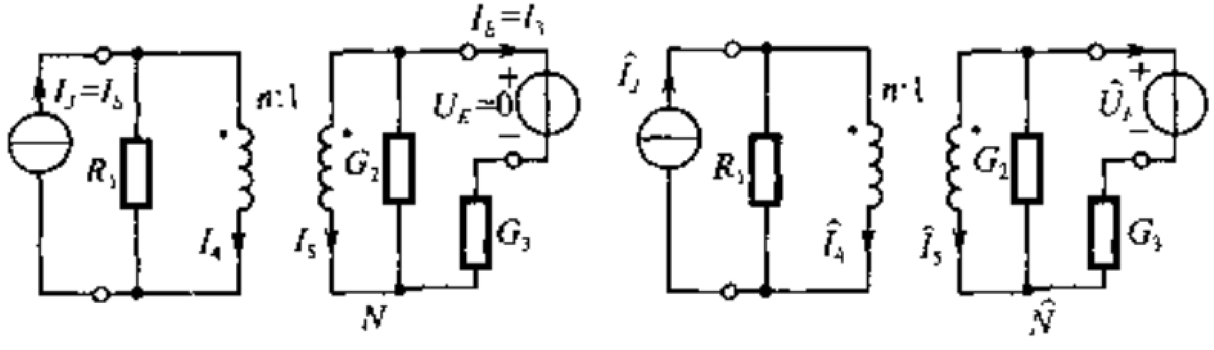


第四节：伴随网络法

例6-10

解：　本例关注输出是电导G_3支路的电流I_3，在G_3支路串接电压为0的电压源，其电流$I_E = I_3$,形成二端口网络N，如图a所示，其伴随网络见图b。

二端口网络N的混合参数方程为： $\begin{bmatrix} I_E \\ U_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{EE} & H_{EJ} \\ H_{JE} & H_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_E \\ I_J \end{bmatrix}$**,式中**$H_{EJ} = \frac{I_E}{I_J}|_{U_E=0} = \frac{I_3}{I_s} = T$



(a)　　　　　　　　(b)

令$U_E = 0, I_J = 1, \widehat{U_E} = 1, \widehat{I_J} = 0$**，则伴随网络法计算网络的非归一化灵敏度的一般公式左端：**

$$[\widehat{U_E} - \widehat{I_J}]\begin{bmatrix} \Delta H_{EE} & \Delta H_{EJ} \\ \Delta H_{JE} & \Delta H_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_E \\ I_J \end{bmatrix} = \Delta H_{EJ} = \Delta T$$

右端借助表6-3得到：$\Delta T = \widehat{I_1} I_1 \Delta R_1 - \widehat{U_2} U_2 \Delta G_2 - \widehat{U_3} U_3 \Delta G_3 + (\widehat{I_4} U_5 + \widehat{U_5} I_4)\Delta n$

第四节：伴随网络法

■ 例6-10

解：(续上) 令$U_E = 0, I_J = 1$,解网络N：折算至原边的等效电路如图所示，图中R_{23}代表G_2与G_3并联后的等效电阻。

$$R_{23} = \frac{1}{G_2 + G_3} = \frac{1}{4}\Omega$$

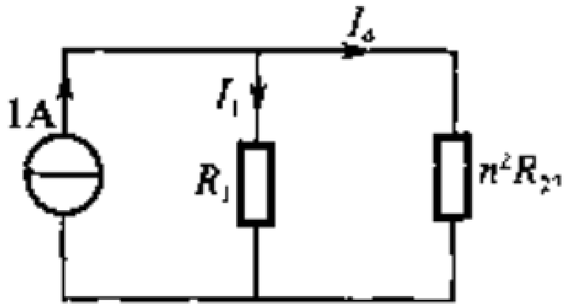
$$n^2 R_{23} = 4^2 \times \frac{1}{4} = 4\Omega$$

$$I_1 = \frac{n_2 R_{23}}{R_1 + n^2 R_{23}} = \frac{4}{6+4} = \frac{2}{5}A$$

$$I_4 = 1 - I_1 = \frac{3}{5}\text{A}$$

$$I_5 = -nI_4 = -4 \times \frac{3}{5} = -\frac{12}{5}A$$

$$U_2 = U_3 = U_5 = -I_5 R_{23} = \frac{12}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{5}V$$



第四节：伴随网络法

例6-10

解：(续上) 令$\widehat{U_E}=1,\widehat{I_J}=0$,解网络$\widehat{N}$：折算至含电压源$\widehat{U_E}$边的等效电路如图所示，图中$\frac{R_1}{n^2}=\frac{6}{4^2}=\frac{3}{8}\Omega$, $\frac{R_1}{n^2}$与G_2并联后的等效电阻为R_{12}。

$$R_{12}=\frac{\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}}=\frac{3}{14}\Omega$$

$$\widehat{I_3}=-\frac{1}{R_{12}+\frac{1}{G_3}}=-\frac{1}{\frac{3}{14}+\frac{1}{2}}=-\frac{7}{5}A$$

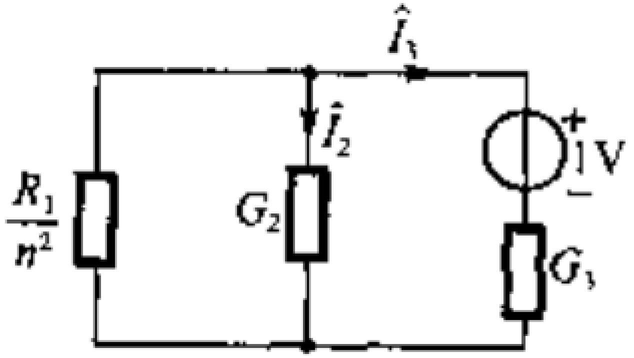
$$\widehat{U_3}=\frac{\widehat{I_3}}{G_3}=-\frac{7}{5}\times\frac{1}{2}=-\frac{7}{10}\text{V}$$

$$\widehat{U_2}=\widehat{U_5}=-I_3R_{12}=\frac{3}{10}V$$

$$\widehat{I_5}=\frac{\widehat{U_5}}{R_1/n^2}=\frac{4}{5}V$$

$$\widehat{I_4}=-\frac{1}{n}\widehat{I_5}=-\frac{1}{5A}$$

$$\widehat{I_1}=-\widehat{I_4}=\frac{1}{5}\text{A}$$



第四节：伴随网络法

- **例6-10**

解：(续上) 可得下列偏导数：

$$\frac{\partial T}{\partial R_1}=\widehat{I_1}I_1=\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$$

$$\frac{\partial T}{\partial G_2}=-\widehat{U_2}U_2=-\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}=-\frac{9}{50}$$

$$\frac{\partial T}{\partial G_3}=-\widehat{U_3}U_3=\frac{7}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{50}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}=\widehat{I_4}U_5+\widehat{U_5}I_4=-\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

第五节：符号网络函数法

一、符号网络函数

- 网络的支路特性不是用数值，而是用某些变量表示，这样得到的网络函数就是符号网络函数。

1、全符号网络函数

- 全部元件参数（R、L、C）均用符号表示，复频域变量用 s 表示。

2、部分符号网络函数

- 部分元件参数用符号表示，另一部分元件参数用数值表示，复频域变量用 s 表示。

3、具有数值系数的 s 的有理函数

- 全部元件参数均用数值表示，复频域变量用 s 表示。

二、符号网络函数法

- 符号网络函数法是计算全符号网络函数和部分符号网络函数对网络元件参数的归一化灵敏度的一种方法。
- 这种方法的优点是计算步骤简单，而且灵敏度表达式能清楚地反映出各种因素对灵敏度的影响。此外，在频域分析中，如果需要计算的灵敏度项目较少，而频率采样点很多，在这种情况下，符号网络函数法更显示出其优越性。

第五节：符号网络函数法

二、符号网络函数法

- 设集总、线性、时不变网络 N 由二端电阻、电感、电容和四类受控源组成。将 N 中所有的（或部分的）网络元件参数分别用不同的变量 $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ 表示，网络 N 的网络函数 T（T 可为 U_o/U_{in}、U_o/I_{in}、I_o/I_{in} 或 I_o/U_{in}）必定可以表示为两个多项式之比，且每一多项式对于代表元件参数的任一变量都是一次的，即网络函数T可表示为:

$$T=\frac{N(x_1,\cdots,x_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)} \qquad (1)$$

✓ 例如，将 N 中两个元件参数分别用 x_1,x_2 表示，其余元件参数用数值表示，则:

$$T=\frac{A_0+A_1x_1+A_2x_2+A_{12}x_1x_2}{B_0+B_1x_1+B_2x_2+B_{12}x_1x_2} \qquad (2)$$

✓ 式中 $A_0,\ldots,A_{12}$，$B_0,\ldots,B_{12}$ 为常数，利用网络函数T的以上性质，可以推导出灵敏度计算的符号网络函数法。

第五节：符号网络函数法

South China University of Technology

二、符号网络函数法

- 式(1)可改写为：

$$
\begin{aligned}
H &= D(x_1,\cdots,x_n)-\frac{1}{T}N(x_1,\cdots,x_n)\\
&= D(x_1,\cdots,x_n)-PN(x_1,\cdots,x_n)=0 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

✓ 上式中，$P=T^{-1}$，式(3)中的 H 对于 P 以及对于每一个 $x_i(i=1,2,n)$ 都是一次的，而 P 对于式中任一 x_i 都是隐函数关系。

- 为寻求 T 对 x_i的灵敏度，首先计算 P 对 x_i 的灵敏度，假设(3)中作为变量的元件参数为 x_i ，则该式可表示为：

$$H = A+Bx_i+CP+FPx_i=0 \qquad (4)$$

✓ 式中 A、B、C、F 为常数，应用隐函数求导公式得：

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial H}{\partial P}} = -\frac{B+FP}{C+Fx_i} \qquad (5)$$

第五节：符号网络函数法

二、符号网络函数法

- **P 对 x_i 的归一化灵敏度为：**

$$S_{x_i}^{P}=\frac{x_i}{P}\cdot\frac{\partial P}{\partial x_i} \qquad (6)$$

- **由(4)有**

$$P=-\frac{A+Bx_i}{C+Fx_i} \qquad (7)$$

$$x_i=-\frac{A+CP}{B+FP} \qquad (8)$$

- **将(5)、(7)、(8)代入(6)，得：**

$$S_{x_i}^{P}=-\frac{A+CP}{B+FP}\cdot\frac{C+Fx_i}{A+Bx_i}\cdot\frac{B+FP}{C+Fx_i}=-\frac{A+CP}{A+Bx_i} \qquad (9)$$

$$S_{x_i}^{T}=S_{x_i}^{\frac{1}{P}}=-S_{x_i}^{P}=\frac{A+CP}{A+Bx_i} \qquad (10)$$

- **对比上式与(4)，可以看出，上式右端分式的分子为 H 中不含 x_i 的各项之和，分母为 H 中不含 P 的各项之和，即：**

$$S_{x_i}^{T}=\frac{H\text{中不含}x_i\text{的各项之和}}{H\text{中不含}P\text{的各项之和}}$$

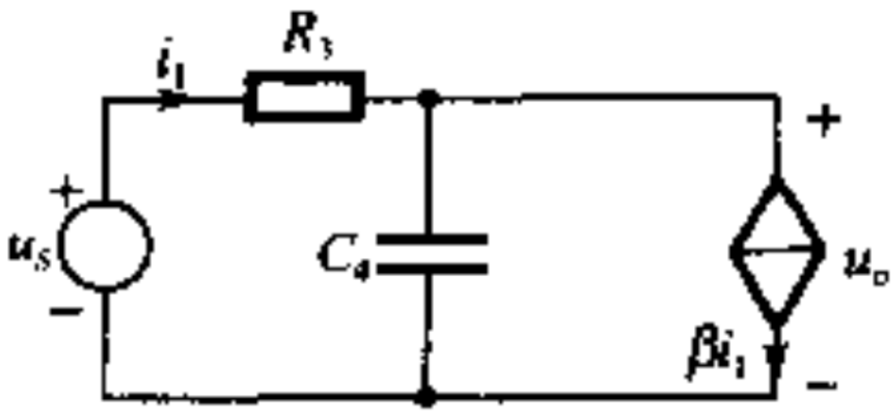
第五节：符号网络函数法

三、符号网络函数法应用条件：

- 为了使网络函数 $T=N/D$ 的分子多项式 N 和分母多项式D 对于代表网络元件的任一变量都是一次的，要求这些元件必须符合前面所指出的元件类型范围（*RLC*和四种受控源），而且网络函数T也限定在所提出的四类之中。反之，如果理想变压器的变比 n、回转器的回转电阻 r 等出现在网络函数 T 中，或者 T 不属于所提出的四种类型，则应用符号网络函数法的前提不能成立。

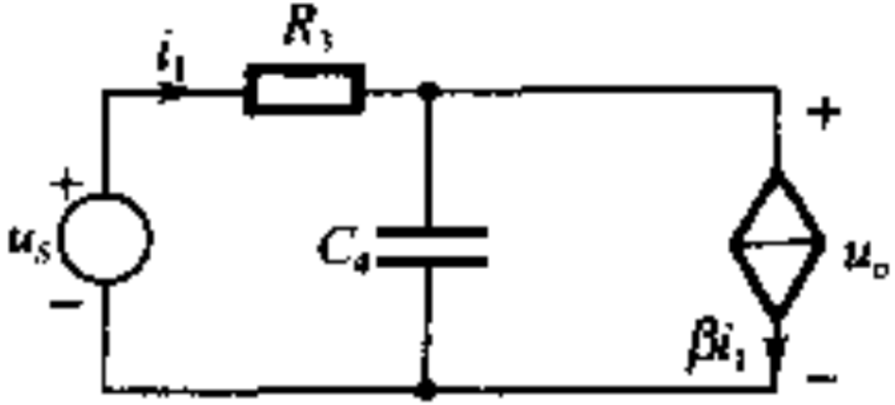
第五节：符号网络函数法

- 例6-11 在下图所示网络中，设$R_3=100k\Omega$，$C_4=20\mu F,\beta=5$,频域转移函数$T=\frac{U_o(j\omega)}{U_S(j\omega)}=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_S}$.用符号网络函数求$T$对各元件参数的灵敏度$S_{R_3}^{T}$、$S_{C_4}^{T}$、$S_{\beta}^{T}$；计算$T$对$C_4$的增益灵敏度$S_{C_4}^{|T|}$及其在$\omega=1,2,4,6,8,10$处之值



第五节：符号网络函数法

- **例6-11** 在下图所示网络中，设$R_3=100k\Omega$，$C_4=20\mu F$,$\beta=5$,频域转移函数$T=\dfrac{U_O(j\omega)}{U_S(j\omega)}=\dfrac{\dot{U}_O}{\dot{U}_S}$.用符号网络函数求$T$对各元件参数的灵敏度$S_{R_3}^{T}$、$S_{C_4}^{T}$、$S_{\beta}^{T}$；计算$T$对$C_4$的增益灵敏度$S_{C_4}^{|T|}$及其在$\omega=1,2,4,6,8,10$处之值



第五节：符号网络函数法

例6-11

解：　首先求转移函数T。由节点分析有：$\dot{U}_o=\frac{G_3\dot{U}_s-\beta\dot{I}_1}{G_3+j\omega C_4}$

式中： $\dot{I}_1=G_3(\dot{U}_s-\dot{U}_o)$

整理得： $[G_3(1-\beta)+j\omega C_4]\dot{U}_o=G_3(1-\beta)\,\dot{U}_s$

故转移函数为： $T=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_s}=\frac{G_3(1-\beta)}{G_3(1-\beta)+j\omega C_4}=\frac{N}{D}=\frac{1-\beta}{(1-\beta)+j\omega C_4R_3}$

应用式（3），有： $H=D-\frac{1}{T}N=(1-\beta)+j\omega C_4R_3-P(1-\beta)=0$

根据符号网络函数法得到以下灵敏度：

$$S_{R_3}^{T}=\frac{1-\beta-P(1-\beta)}{(1-\beta)+j\omega C_4R_3}=\frac{(1-P)(1-\beta)}{(1-\beta)+j\omega C_4R_3}=\frac{-j\omega C_4R_3}{(1-\beta)+j\omega C_4R_3}=\frac{-j2\omega}{-4+j2\omega}=\frac{j2\omega}{4-j2\omega}$$

$$S_{C_4}^{T}=\frac{1-\beta-P(1-\beta)}{(1-\beta)+j\omega C_4R_3}=\frac{(1-P)(1-\beta)}{(1-\beta)+j\omega C_4R_3}=\frac{-j\omega C_4R_3}{(1-\beta)+j\omega C_4R_3}=\frac{-j2\omega}{-4+j2\omega}=\frac{j2\omega}{4-j2\omega}$$

$$S_{\beta}^{T}=\frac{1-P+j\omega C_4R_3}{(1-\beta)+j\omega C_4R_3}=\frac{(-j\omega C_4R_3/(1-\beta))+j\omega C_4R_3}{(1-\beta)+j\omega C_4R_3}=\frac{j\omega C_4R_3/(1-\beta)}{(1-\beta)+j\omega C_4R_3}=\frac{j5\omega}{8-j4\omega}$$

第五节：符号网络函数法

例6-11

解：（续上）将$S_{C_4}^{T}$改写为：
$$S_{C_4}^{T}=\frac{-4\omega^2}{16+4\omega^2}+j\frac{8\omega^2}{16+4\omega^2}$$

转移函数对C_4的灵敏度：
$$S_{C_4}^{|T|}=Re\left[S_{C_4}^{T}\right]=\frac{-4\omega^2}{16+4\omega^2}$$

将所给定的频率代入上式，得到$S_{C_4}^{|T|}$在各频率点之值。结果如下表所示：

ω	1	2	4	6	8	10
$S_{C_4}^{\|T\|}$	-0.2	-0.5	-0.8	-0.9	-0.941	-0.962

本课程已经顺利结束！
祝各位同学考试取得优异成绩！

谢谢！