



华南理工大学
South China University of Technology

电网络分析

线性网络的信号流图分析法

第五章：线性网络的信号流图（SFG）分析法

- 一、信号流图
- 二、信号流图的变换规则
- 三、Mason（梅森）公式
- 四、线性网络的 SFG 分析
- 五、状态转移图

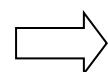
第一节：信号流图

- 信号流图(signal-flow graph SFG)是表示线性代数方程组的一种加权有向图，它是图论应用的一个重要分支。

一、信号流图

- 一个信号流图对应于一个写为因果形式的线性代数方程组。它是由节点和联接在节点之间的有向支路构成；
- 节点的权值代数所描述系统的变量，也称为节点变量，权值为 x 的节点可称为节点 x ；
- 支路的权值就是方程组中作为因的变量所乘的系数. 支路的方向离开作为因的变量节点，指向作为果的变量节点。

如： $y=ax$



第一节：信号流图

一、信号流图

- 若节点 x_i 有两条或两条以上的入支路，其对应方程为 \sum (入支路传输值 \times 该入支路起始点的节点变量)
- 若节点 x_i 有两条或两条以上的出支路，则信号(x_i)要沿节点 x_i 的每一条支路传输；
- 一个含有 n 个变量的线性代数方程：

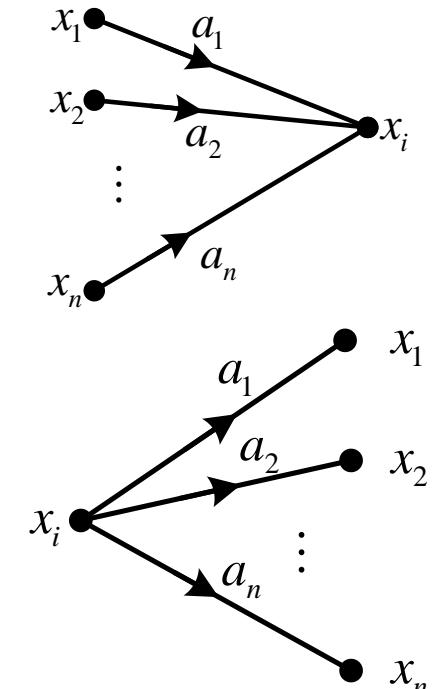
$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

可以用以下方法写成以 x_j 为输出量的因果形式方程：

$$x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n a_i x_i + (a_j + 1)x_j$$

通过移项，也能得出因果形式的方程，即：

$$x_j = -\frac{1}{a_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_i x_i$$



第一节：信号流图

二. SFG的绘制规则及SFG和代数方程间对应关系

- 在写出以某变量做为果的变量方程时，只需考虑该节点的入支路的影响，而与其出支路无关。
- 用SFG求解线性方程组时，必须首先将每个方程写为因果形式的方程，方程组的每个变量必须有且仅有一次作为果出现在一个因果形式的方程中，在其它方程中则只能作为因出现。
- 一个线性方程组所对应的SFG不是唯一的,但它们是相互等效的.
- 对于代表线性代数方程组的向量方程

$$AX = BF$$

✓ $A(n \times n)$, $B(n \times p)$, X (n 维变量向量) , F (p 维输入向量)

■ 定义联接矩阵:

$$C = [1 + A | -B]$$

则:

$$X = C \begin{bmatrix} X \\ F \end{bmatrix}$$

第一节：信号流图

二．SFG的绘制规则及SFG和代数方程间对应关系

- C 是一个 $(n \times n+p)$ 的增广矩阵,它描述了图的关联性和支路的权值。C 矩阵的每一行对应于一个作为果的变量, 每一列对应于作为一个作为因的变量。它的元素 C_{ij} 为 0 时表示节点j至节点 i 之间没有支路 C_{ij} 不为 0 时表示节点j至节点 i 之间有一条权值为 C_{ij} 的有向支路。

三、SFG分析中的一些常用术语

- 源节点 : 只有出支路的节点;
- 汇节点 : 只有入支路的节点;
- 开路径 : 从某一节点,沿支路方向连续经过一些不同的支路和节点而终止在另一个节点,这样一种拓朴结构称为开路径, 其传输值就是开路径上所有支路传输值之积;
- 前向路径 : 从源节点到汇节点的开路径,称为前向路径,其传输值就是路径上所有支路传输值之积;
- 回路(环) : 从某一个节点出发,沿着支路方向连续经过不同的支路和节点又回在到该节点的闭合路径,称为回路, 其传输值就是回路上所有支路传输值之积;
- 自环 : 从某一节点出发,只经一条路又终止在同一节点上的环路, 其传输值就是该支路上传输值;
- 回路不相接触 : 回路与回路之间无公共节点;
- 回路与前向路径不相接触 : 回路与前向路径之间无公共支路和 (或) 公共节点。

第一节：信号流图

- 例5-1-1 写出下列方程组的因果形式，并画出相应的SFG。

$$-2x_1 + 17x_2 + 10x_3 = 3f_s$$

$$4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 10f_s$$

$$-4x_1 + 10x_2 + 9x_3 = -7f_s$$

第一节：信号流图

■ 例5-1-1 写出下列方程组的因果形式，并画出相应的SFG。

$$-2x_1 + 17x_2 + 10x_3 = 3f_s$$

$$4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 10f_s$$

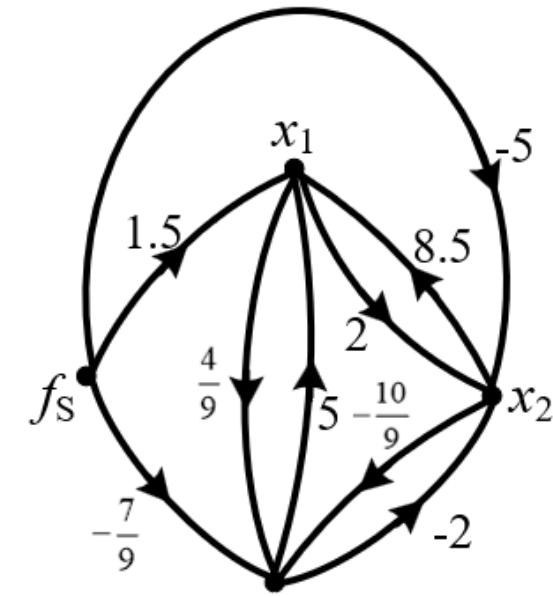
$$-4x_1 + 10x_2 + 9x_3 = -7f_s$$

解：第一种形式

$$x_1 = 8.5x_2 + 5x_3 - 1.5f_s$$

$$x_2 = 2x_1 - 2x_3 - 5f_s$$

$$x_3 = \frac{4}{9}x_1 - \frac{10}{9}x_2 - \frac{7}{9}f_s$$



图(a)

其相应SFG如图(a)所示：

第一节：信号流图

■ 例5-1-1 写出下列方程组的因果形式，并画出相应的SFG。

$$-2x_1 + 17x_2 + 10x_3 = 3f_s$$

$$4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 10f_s$$

$$-4x_1 + 10x_2 + 9x_3 = -7f_s$$

解：第二种形式

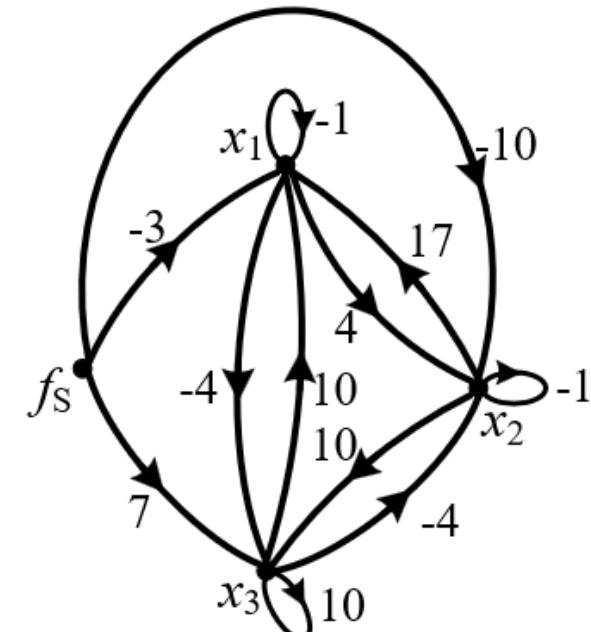
$$x_1 = -x_1 + 17x_2 + 10x_3 - 3f_s$$

$$x_2 = 4x_1 - x_2 - 4x_3 - 10f_s$$

$$x_3 = -4x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 7f_s$$

其相应SFG如图(b)所示：

以上例子表明，一个线性方程组所对应的SFG不是惟一的，
但它们是相互等效的。



图(b)

第一节：信号流图

- 例5-1-2 已知某电路节点电压方程为

$$8U_1 - 2U_2 = 16i_s$$

$$-2U_1 + 9U_2 = 0$$

画出该方程组对应的SFG。

第一节：信号流图

■ 例5-1-2 已知某电路节点电压方程为

$$8U_1 - 2U_2 = 16i_s$$

$$-2U_1 + 9U_2 = 0$$

画出该方程组对应的SFG。

解：将节点电压方程写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix} i_s$$

其联接矩阵：

$$C = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -16 \\ -2 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

第一节：信号流图

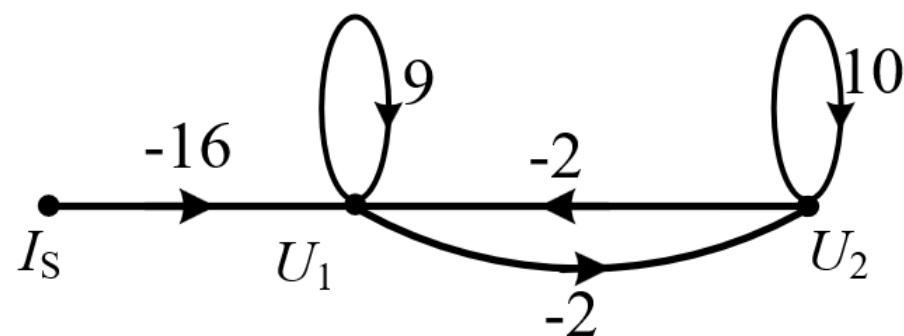
■ 例5-1-2 已知某电路节点电压方程为

$$8U_1 - 2U_2 = 16i_s$$

$$-2U_1 + 9U_2 = 0$$

画出该方程组对应的SFG。

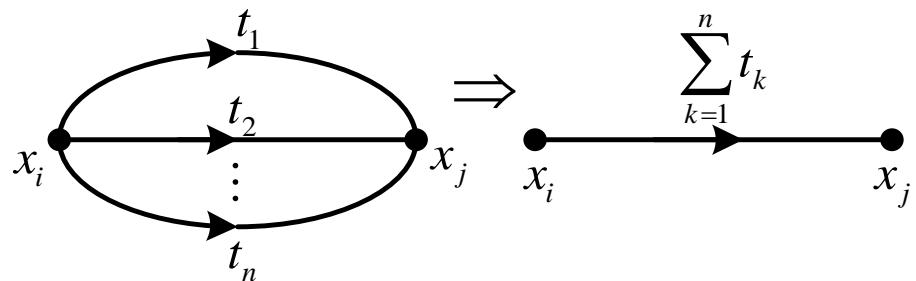
在绘制SFG时，首先画出节点 U_1 、 U_2 和 i_s 。节点位置的设置是任意的，一般应使SFG图形清晰，尽量避免支路相交叉。然后根据 C_{ij} 在节点间添加支路。如 $C_{23}=0$ 表示节点 U_2 、 i_s 之间无支路， $C_{12}=-2$ 表示从节点 U_1 至 U_2 有一条权值为(-2)的有向支路，等等。由此便可绘出方程组对应的SFG，如图(a)所示。



(a)

第二节：信号流图的变换规则

一、同方向并联支路简化规则



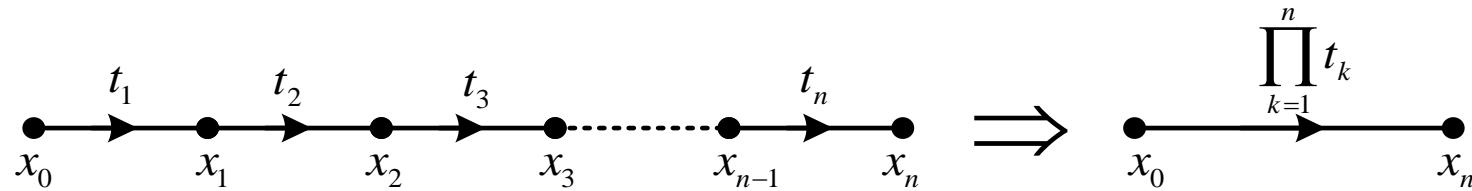
$$x_j = t_1 x_i + t_2 x_i + \cdots + t_n x_i$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n t_k \right) x_i$$

- n 条同方向并联支路可用一条支路代替，该支路的传输值等于 n 条并联支路传输值之和。

第二节：信号流图的变换规则

二、同方向级联支路简化规则



$$x_1 = t_1 x_0$$

$$x_2 = t_2 x_1$$

...

$$\Rightarrow x_n = t_1 t_2 \cdots t_n x_0 = \left(\prod_{k=1}^n t_k \right) x_0$$

$$x_n = t_n x_{n-1}$$

- n 条同方向级联支路可用一条支路代替，该支路的传输值等于 n 条级联支路传输值之积。

第二节：信号流图的变换规则

- 例5-2-1 已知线性方程组为

$$U_1 = 11U_S$$

$$8U_1 - I_1 = 3U_S$$

$$9I_1 - U_2 = 0$$

其中 $U_S = 1V$ 。用SFG分析法求电压 U_2 之值。

第二节：信号流图的变换规则

■ 例5-2-1 已知线性方程组为

$$U_1 = 11U_s$$

$$8U_1 - I_1 = 3U_s$$

$$9I_1 - U_2 = 0$$

其中 $U_s = 1V$ 。用SFG分析法求电压 U_2 之值。

解：(1) 将方程组改写为向量方程，为使SFG中节点 U_1 上无自环，式中已将原方程组的第一方程两端同时反号。

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} U_s$$

(2) 写出联接矩阵：

$$C = \begin{bmatrix} -1+1 & 0 & 0 & 11 \\ 8 & -1+1 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & -1+1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 11 \\ 8 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第二节：信号流图的变换规则

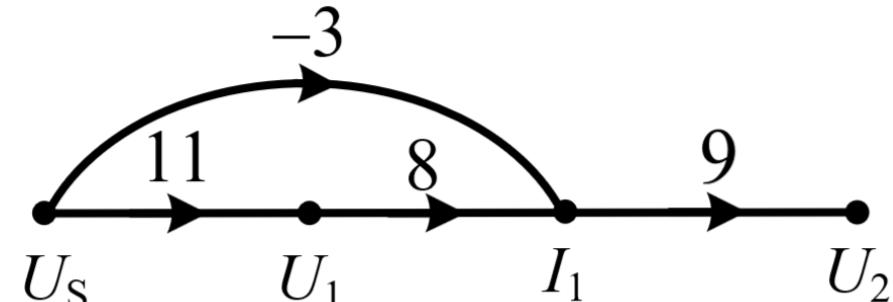
■ 例5-2-1 已知线性方程组为

$$U_1 = 11U_S$$

$$8U_1 - I_1 = 3U_S$$

$$9I_1 - U_2 = 0$$

其中 $U_S = 1V$ 。用SFG分析法求电压 U_2 之值。



图(a)

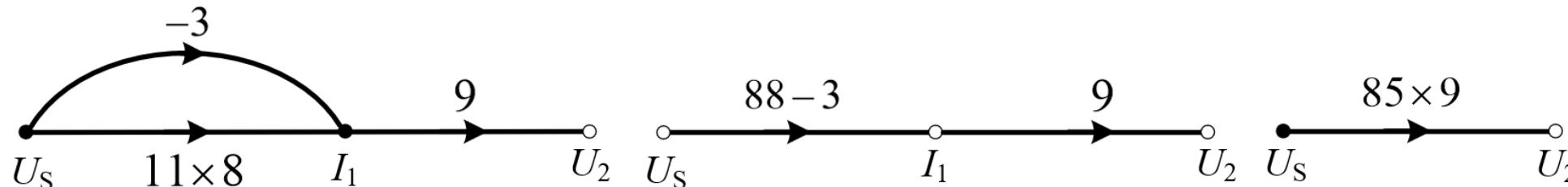
(3) 根据联接矩阵C绘出其对应的SFG，如图(a)所示。

(4) 将 U_S 、 I_1 间级联支路化简，得到如图(b)所示的SFG。

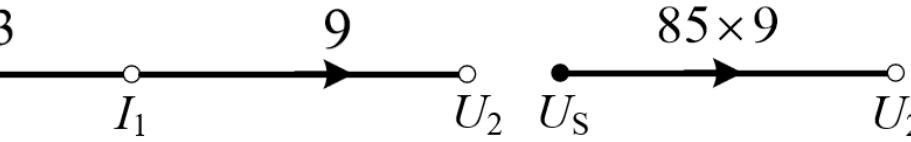
(5) U_S 、 I_1 间两支路为同方向并联支路，化简后的SFG如图(c)所示。

(6) U_S 、 U_2 间两支路为同方向级联支路，化简后的SFG如图(d)所示。则电压 U_2 之值为：

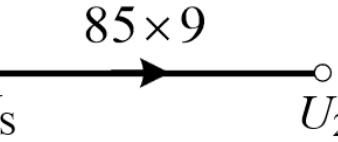
$$U_2 = 85 \times 9 = 765V$$



图(b)



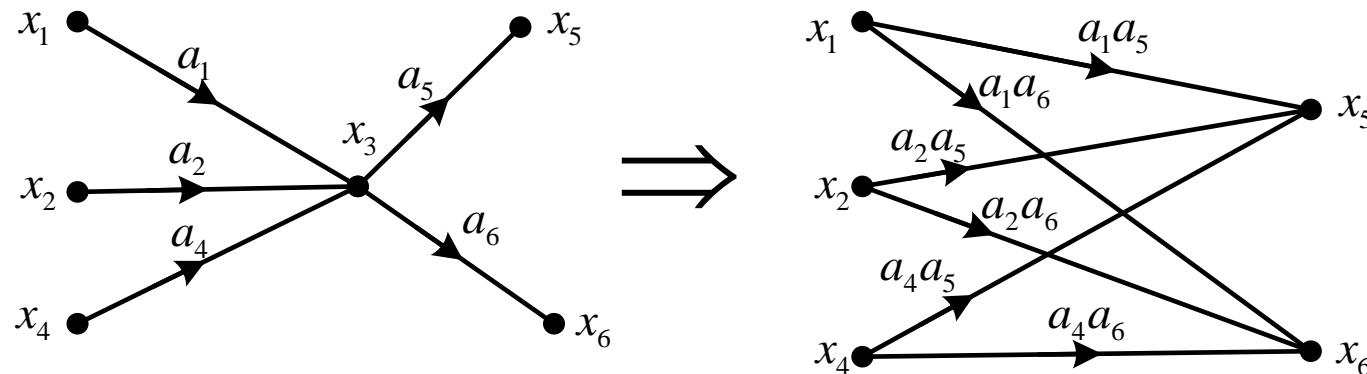
图(c)



图(d)

第二节：信号流图的变换规则

三、支路移动（节点消去）规则



$$x_5 = a_5(a_1x_1 + a_2x_2 + a_4x_4)$$

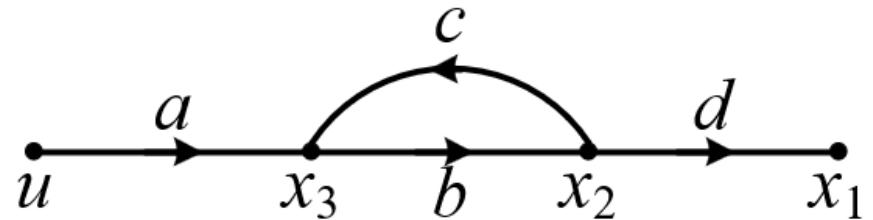
$$x_6 = a_6(a_1x_1 + a_2x_2 + a_4x_4)$$

- 消去节点 x_3 的移动规则为：为了消去节点 x_3 ，使与 x_3 相联的每一条入支路的始端不动，而其末端则分别沿着每一条支路作正向移动，移至该出支路的末端，形成 $3 \times 2=6$ 条新支路，每条新支路的传输值为被移动支路与沿其移动支路二支路传输值之积。如果被消节点有 m 条入支路， n 条出支路，则支路移动后的新支路数为 $m \times n$ 。

第二节：信号流图的变换规则

■ 例5-2-2 在图(a)所示SFG中， u 为系统的输入，试做下列化简：

- (1)保留节点 x_1 、 x_2 ，消去节点 x_3 ；
- (2)保留节点 x_1 、 x_3 ，消去节点 x_2 。



图(a)

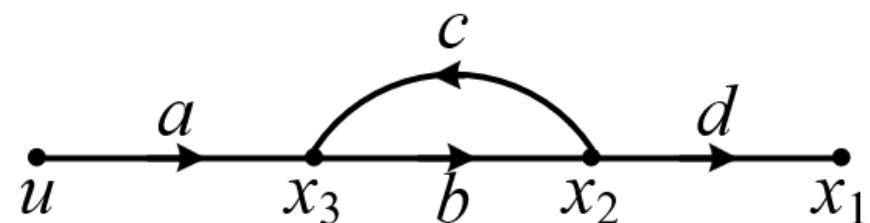
第二节：信号流图的变换规则

■ 例5-2-2 在图(a)所示SFG中， u 为系统的输入，试做下列化简：

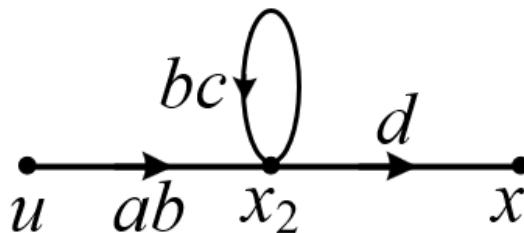
- (1)保留节点 x_1 、 x_2 ，消去节点 x_3 ；
- (2)保留节点 x_1 、 x_3 ，消去节点 x_2 。

解：(1) 消去图(a)所示SFG中节点 x_3 。与节点 x_3 相联的入支路 a 的末端沿惟一的出支路 b 移动到节点 x_2 ；入支路 c 的末端沿同一条出支路移动，回到节点 x_2 ，形成自环，如图(b)所示。两条新支路的传输值分别为 ab 和 bc 。

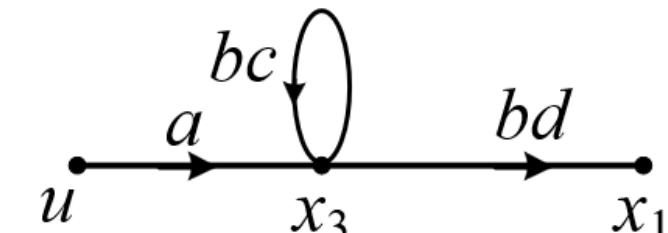
(2) 消去图(a)所示SFG中节点 x_2 。与节点 x_2 相联的有一条入支路和两条出支路。则一条新支路从节点 x_3 出发回到 x_3 ，形成传输值为 bc 的自环；另一条新支路从 x_3 出发终止于节点 x_1 ，传输值为 bd 。其SFG如图(c)所示。



图(a)



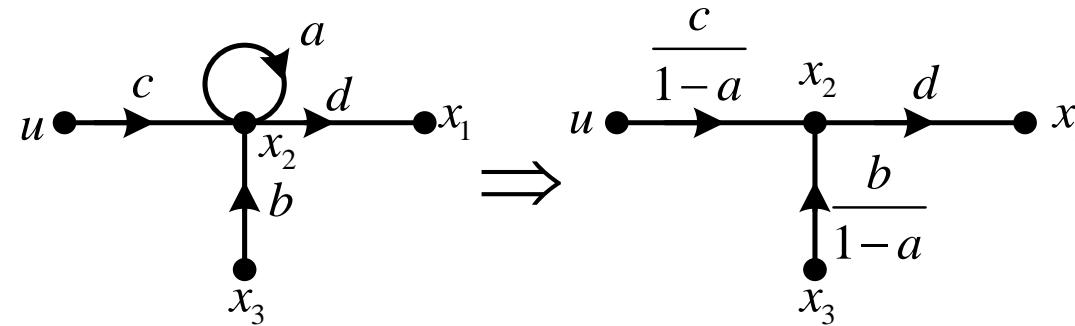
图(b)



图(c)

第二节：信号流图的变换规则

四、自环消去规则



$$x_2 = ax_2 + bx_3 + cu$$

$$x_1 = dx_2$$

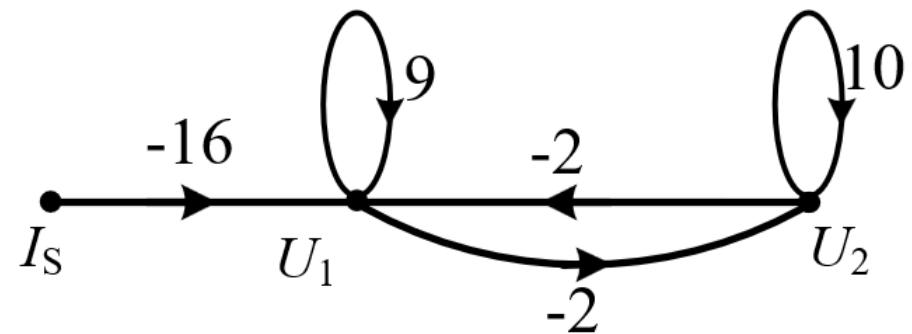
$$x_2 = \frac{b}{1-a}x_3 + \frac{c}{1-a}u$$

$$x_1 = dx_2$$

- 消去自环的规则：欲消去节点 x_2 上传输值为 a 的自环,将与节点 x_2 相连的各条入支路的传输值除以 $(1-a)$ ，同时去掉自环；消去自环对节点 x_2 的各条出支路无影响。

第二节：信号流图的变换规则

■ 例5-2-3 求图(a)所示SFG中电压 U_2 的解。

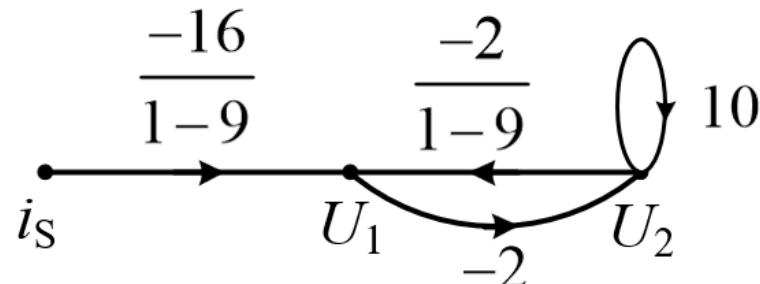


图(a)

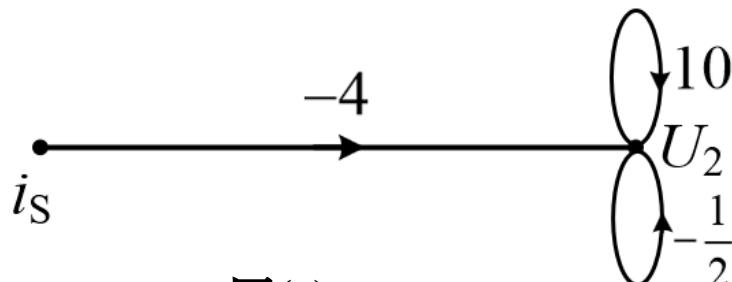
第二节：信号流图的变换规则

■ 例5-2-3 求图(a)所示SFG中电压 U_2 的解。

解：(1) 消去图(a)中节点 U_1 的自环，其SFG如图(b)所示。

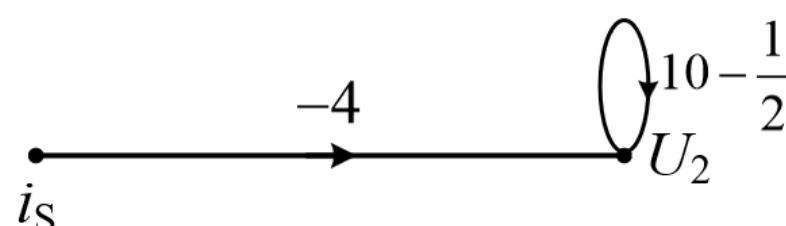


图(b)

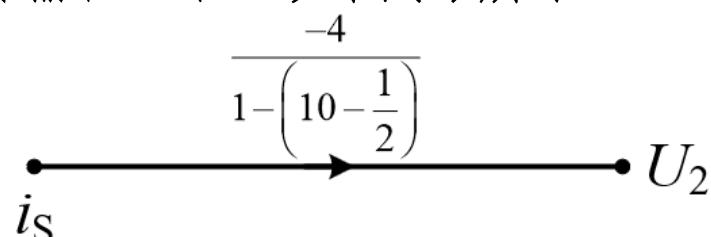


图(c)

(2) 吸收节点 U_1 ，如图(c)所示。此时SFG中节点 U_2 有两个自环。显然，当一个节点上有多个自环时，可化简为一个自环，其传输值为所有自环传输值之和。如图(d)所示。



图(d)



图(e)

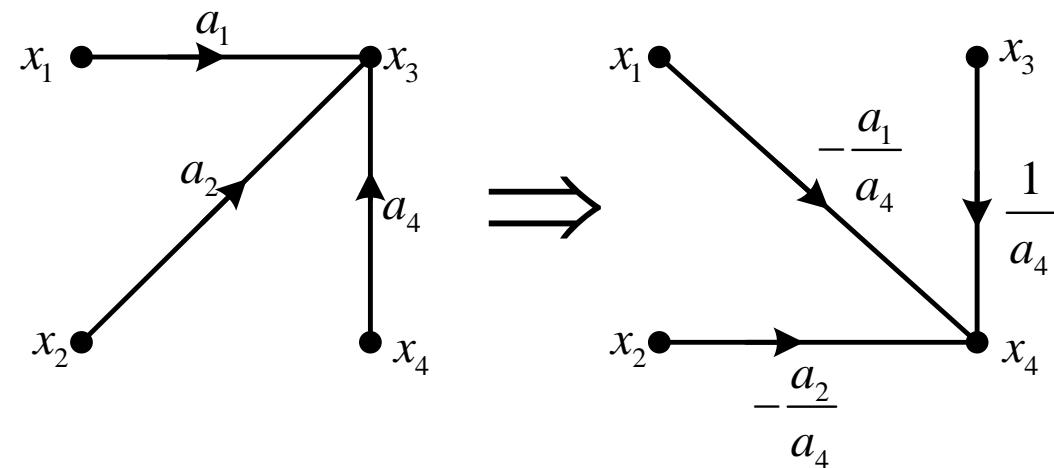
(3) 消去节点 U_2 的自环，如图(e)所示。由此可得

$$U_2 = \frac{4}{8.5} i_s = \frac{8}{17} i_s$$

第二节：信号流图的变换规则

五、倒向规则

- 在代数方程中互换二变量的因果关系，相应地，在SFG中因果两变量对应节点间的支路方向反向，也称倒向。

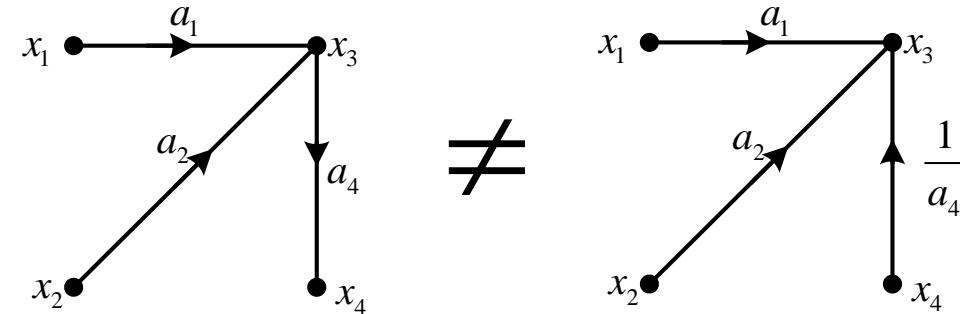


$$x_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_4$$

$$x_4 = \frac{1}{a_4} x_3 - \frac{a_1}{a_4} x_1 - \frac{a_2}{a_4} x_2$$

第二节：信号流图的变换规则

五、倒向规则



$$\begin{cases} x_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ x_4 = a_4 x_3 \end{cases} \neq x_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \frac{1}{a_4} x_4$$

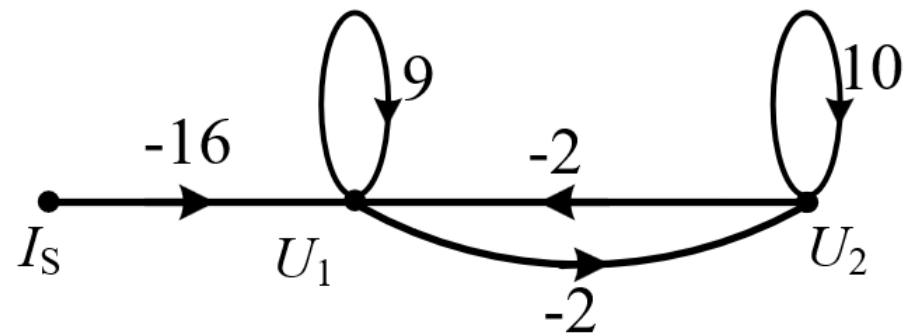
倒向错误，倒向支路不是从源节点出发

SFG 中支路倒向规则：

- ✓ 从源节点出发的支路可以倒向；不是从源节点出发的单支路不能倒向。
- ✓ 将两节点之间的支路倒向后，支路传输值为原支路传输值的倒数。
- ✓ 将原来终结在被倒向支路末端节点的其他支路全部改为终结在倒向后支路末端节点上，其传输值乘以倒向支路传输值的负倒数。

第二节：信号流图的变换规则

- 例5-2-4 用倒向规则求图(a)所示SFG中电压 U_2 的解。



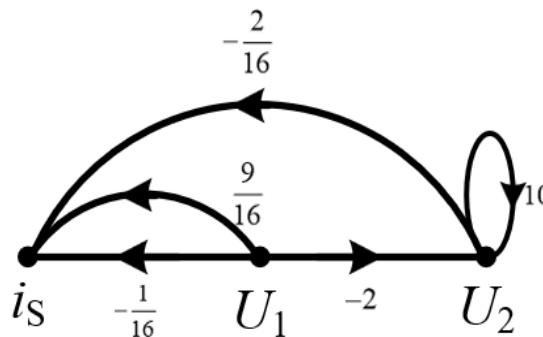
图(a)

第二节：信号流图的变换规则

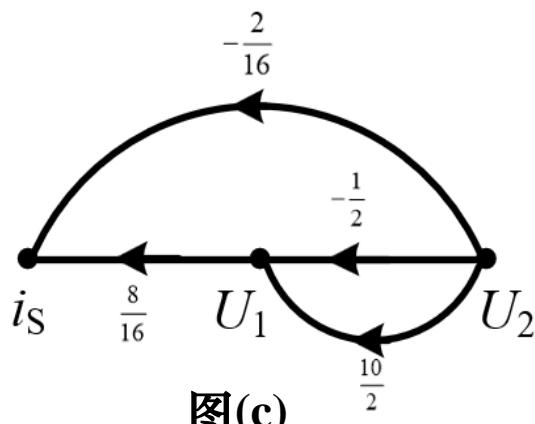
■ 例5-2-4 用倒向规则求图(a)所示SFG中电压 U_2 的解。

解：(1) 将图(a)中源节点 i_S 与节点 U_1 之间的支路倒向，其中节点 U_1 的自环变换规则与一般入支路相同。倒向后的SFG如图(b)所示，此图中节点 U_1 为源节点，节点 i_S 为汇节点。

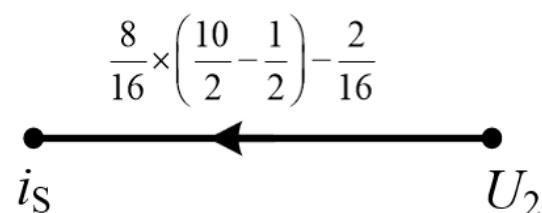
(2) 将图(b)中源节点 U_1 与节点 U_2 之间的支路倒向，如图(c)所示。此时节点 U_2 为源节点，节点 U_1 变为一般节点。



图(b)



图(c)



图(d)

(3) 用并联、级联规则进一步化简为图(d)所示SFG，由此可得

$$i_S = \left[-\frac{2}{16} + \frac{8}{16} \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{10}{2} \right) \right] U_2 = \frac{17}{8} U_2$$

故

$$U_2 = \frac{8}{17} i_S$$

第二节：信号流图的变换规则

- 例5-2-5 已知某二端口网络的短路导纳矩阵 Y_{SC} ，用SFG分析该网络的传输参数矩阵 T 。

第二节：信号流图的变换规则

■ 例5-2-5 已知某二端口网络的短路导纳矩阵 \mathbf{Y}_{SC} ，用SFG分析该网络的传输参数矩阵 \mathbf{T} 。

解：写出用短路导纳矩阵 \mathbf{Y}_{SC} 表示的二端口网络方程

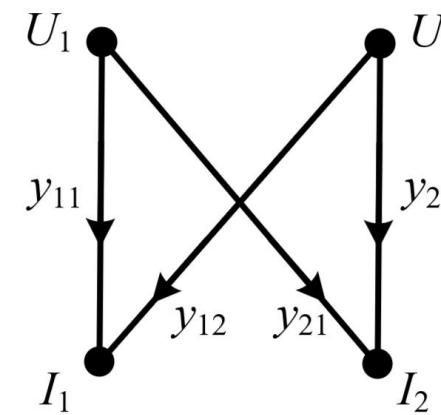
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

和用传输参数矩阵 \mathbf{T} 表示的二端口网络方程

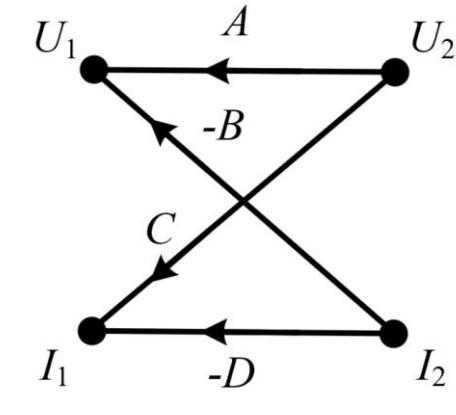
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

这两个方程所对应的SFG分别如图(a)、(b)所示。

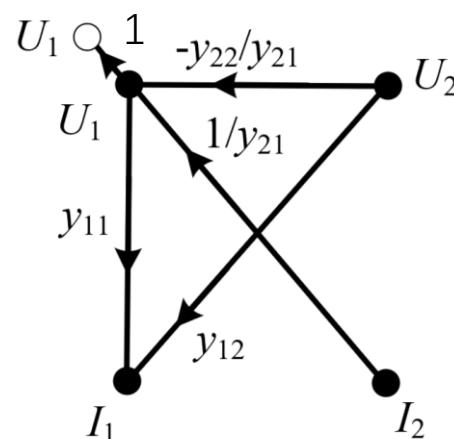
比较图(a)、(b)，两图中由节点 U_2 到 I_1 的支路方向是相同的，而 U_1 、 I_2 两节点间的支路方向是相反的。为了用短路导纳参数表示传输参数，对(a)图进行变换。考虑到(a)图中 U_1 是源节点，可以实施倒向。倒向后的SFG如图(c)所示。



图(a)



图(b)



图(c)

第二节：信号流图的变换规则

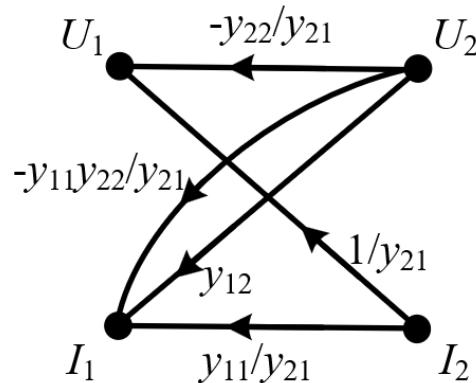
■ 例5-2-5 已知某二端口网络的短路导纳矩阵 Y_{SC} ，用SFG分析该网络的传输参数矩阵T。

将图(c)与图(b)相比较，节点 I_1 与 I_2 间缺少一条支路，而节点 U_1 与 I_1 间的支路则是不希望存在的。所以设置新节点 U_1^* ，令 $U_1^* = U_1$ ，再消去原节点 U_1 ，得到图(d)。通过并联化简，可得到图(e)所示的SFG。比较图(e)与图(b)，可以得出以下结果：

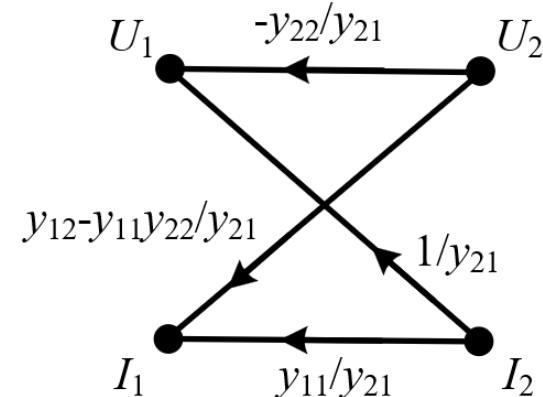
$$A = -\frac{y_{22}}{y_{11}}$$

$$B = -\frac{1}{y_{21}}$$

$$C = y_{12} - \frac{y_{11}y_{22}}{y_{21}} = \frac{y_{12}y_{21} - y_{11}y_{22}}{y_{21}} \quad D = -\frac{y_{11}}{y_{21}}$$



图(d)



图(e)

第三节：Mason（梅森）公式

- 在一个 SFG 中，设源节点变量为 F ，汇节点变量为 x_j ，定义 SFG 的图增益（传输值）为 $T_j = x_j/F$ ，对于 SFG 所表示的电网络来说，SFG 的图增益就是其网络函数。

一、Mason 图增益公式（简称 Mason 公式）

- Mason 公式直接根据 SFG 的结构绘出传输值的解，应用更加方便。Mason 公式为：

$$T_j = \frac{x_j}{F} = \frac{\sum_m P_m \Delta_m}{\Delta}$$

系数行列式 Δ 为传递函数的分子，1 减去不与前向通路接触的回路增益，包括一阶，二阶，三阶… 即从分母 Δ 中除去接触的部分。

- ✓ 其中 Δ 为图行列式， Δ 由下式确定：

$$\Delta = 1 - \sum L_k^1 + \sum L_k^2 - \sum L_k^3 + \cdots + (-1)^i \sum L_k^i + \cdots$$

- ✓ 其中， L_k^1 表示第 k 个一阶回路的传输值，求和 $\sum L_k^1$ 是对全部一阶回路进行的； L_k^i 表示第 k 个 i 阶回路的传输值，求和 $\sum L_k^i$ 是对全部 i 阶回路进行的。

第三节：Mason（梅森）公式

- ✓ 在 SFG 中，定义 n 个互不接触的回路为 n 阶回路，其传输值 L_k^n 为这 n 个回路传输值之积，一个一阶回路就是一个回路。
- ✓ P_m 为从源节点到汇节点的第 m 条前向路径的传输值。
- ✓ Δ_m 为和第 m 条前向路径不相接触的子图的图行列式，又称为第 m 条前向路径的路径因子，求和是对从源节点到汇节点的所有前向路径进行的。

二、信号流图的迭加性

- 当线性网络中有多个激励同时作用时，根据线性网络的可加性，可写出输出

$$x_j = T_{j1}F_1 + T_{j2}F_2 + \cdots + T_{jp}F_p$$

- ✓ 式中 F_1, F_2, \dots, F_p 为网络的 p 个激励。 T_{ji} ($i=1, 2, \dots, p$) 代表以 F_i 为输入节点， x_j 为输出节点的图增益。

- 由 Mason 公式：

$$x_j = \sum_{i=1}^p F_i T_{ji} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^p F_i \sum_m p_{m(i)} \Delta_{m(i)}$$

- ✓ 式中 $p_m(i)$ 代表从输入节点 F_i 到输出节点 x_j 的第 m 条前向路径的传输值； $\Delta_m(i)$ 则是上述前向路径因子，上式表明了信号流图的迭加性。

第三节：Mason（梅森）公式

三、闭合 SFG

- 从 SFG 的汇节点到源节点增添一条权值为 $-B$ 的有向支路，该支路与每一前向路径均构成一个新的回路，修改后的 SFG 称为闭合 SFG。
- ✓ 闭合 SFG 的图行列式 Δ_c 为：

$$\Delta_c = 1 - \sum L_{kc}^1 + \sum L_{kc}^2 - \sum L_{kc}^3 + \cdots + (-1)^i \sum L_{kc}^i + \cdots$$

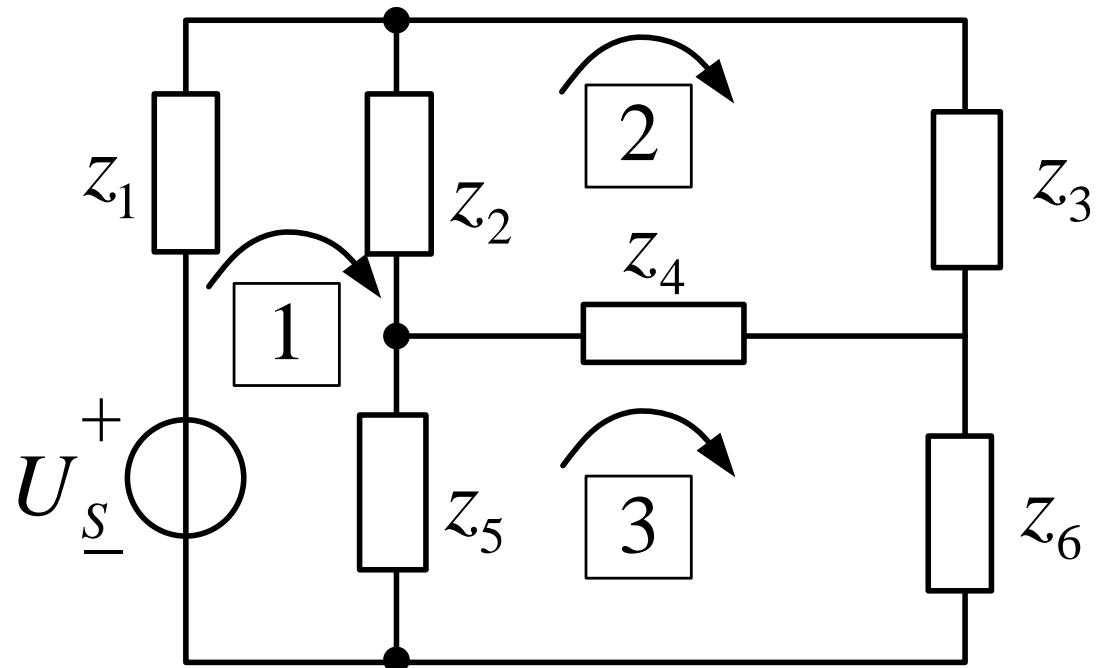
- ✓ 其中 $\sum L_{kc}^i$ 已含原 SFG 的*i*阶回路的传输和新增 *i* 阶回路的传输值。新增的 *i* 阶回路就是含原前向径与新增加支路所形成回路在内的 *i* 阶回路，其传输值为 $(-BP_m)$ 和与其对应的 $(i-1)$ 阶回路传输值之乘积，因此，可将 Δ_c 改写为：

$$\Delta_c = \Delta + B \sum_m P_m \Delta_m$$

- 上式表明，将闭合 SFG 的图行列式上所有的项按是否含 B 划分为两部分，对含 B 各项之和提出因子 B 后，剩余部分便是等于Mason 公式的分子 $\sum P_m \Delta_m$ 。而不含 B 的各项之和则等于 Mason 公式的分母 Δ 。这样，用一个计算程序便能同时得到Mason 公式的分子和分母。

第三节：Mason（梅森）公式

■ 例题5-3-1 用 Mason 公式求解图(a)所示电路的回路3的电流

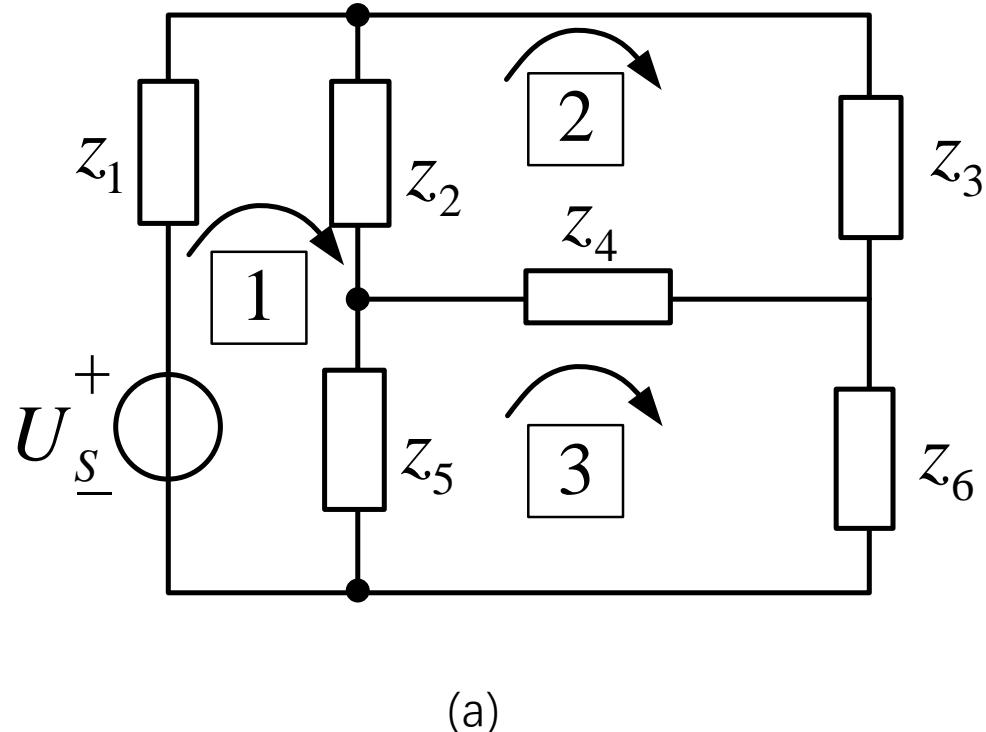


(a)

第三节：Mason（梅森）公式

■ 例题5-3-1 用 Mason 公式求解图(a)所示电路的回路3的电流

解：列写出图(a)所示电路的回路方程



$$\begin{cases} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + z_{13}I_3 = U_s \\ z_{21}I_1 + z_{22}I_2 + z_{23}I_3 = 0 \\ z_{31}I_1 + z_{32}I_2 + z_{33}I_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$z_{11} = z_1 + z_2 + z_5 \quad z_{22} = z_2 + z_3 + z_4 \quad z_{33} = z_4 + z_5 + z_6$$

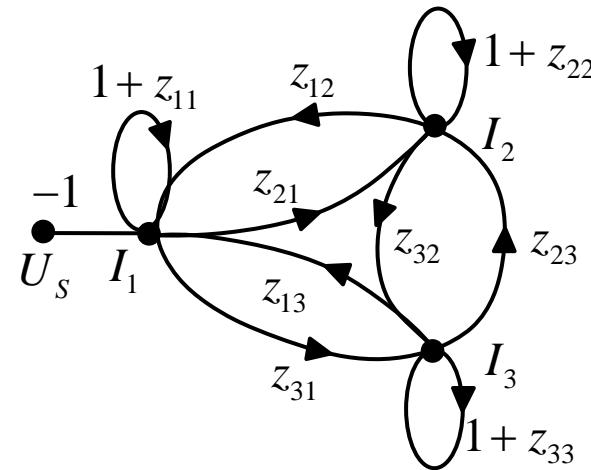
$$z_{12} = z_{21} = -z_2 \quad z_{13} = z_{31} = -z_5 \quad z_{23} = z_{32} = -z_4$$

将式(1)写为如教材式(5-1-9)的因果形式，可得联接矩阵为

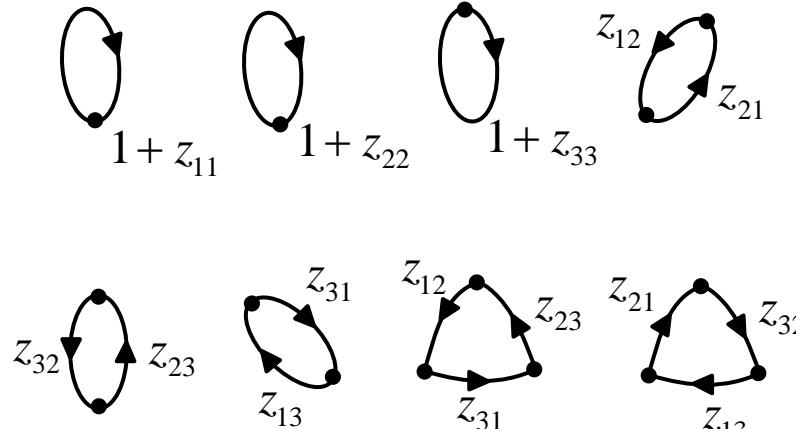
$$C = \begin{bmatrix} 1+z_{11} & z_{12} & z_{13} & -1 \\ z_{21} & 1+z_{22} & z_{23} & 0 \\ z_{31} & z_{31} & 1+z_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

第三节：Mason (梅森) 公式

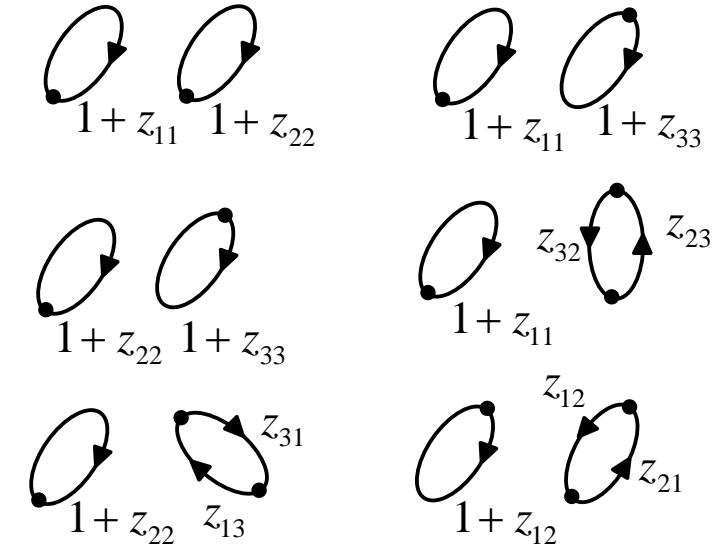
■ 例题5-3-1 用 Mason 公式求解图(a)所示电路的回路3的电流



(b)



(c)



(d)

进而画出 SFG，如图(b) 所示。图(b) 中回路有8个，如图(c) 所示；二阶回路共有6组，如图(d) 所示；而三阶回路就只有一组，由三个自环构成。根据教材式(5-3-2)，其图行列式为

$$\begin{aligned}\Delta = & 1 - [(1+z_{11}) + (1+z_{22}) + (1+z_{33}) + z_{21}z_{12} + z_{23}z_{32} + z_{13}z_{31} + z_{13}z_{32}z_{21} + z_{12}z_{23}z_{31}] \\ & + [(1+z_{11})(1+z_{22}) + (1+z_{22})(1+z_{33}) + (1+z_{11})(1+z_{33}) + (1+z_{11})z_{32}z_{23} + (1+z_{22})z_{31}z_{13} + (1+z_{33})z_{21}z_{12}] \\ & - [(1+z_{11})(1+z_{22})(1+z_{33})]\end{aligned}$$

第三节：Mason（梅森）公式

■ 例题5-3-1 用 Mason 公式求解图(a)所示电路的回路3的电流

这里 U_S 为源节点，为求 I_3 ，把 I_3 作为汇节点（实为在节点 I_3 上引一条传输值为 1 的出支路，其末端节点 $I_3^* = I_3$ ，即为汇节点），前向路径有 2 条，如图(e)所示。前向路径传输值为

$$P_1 = -z_{31} \quad P_2 = -z_{21}z_{32}$$

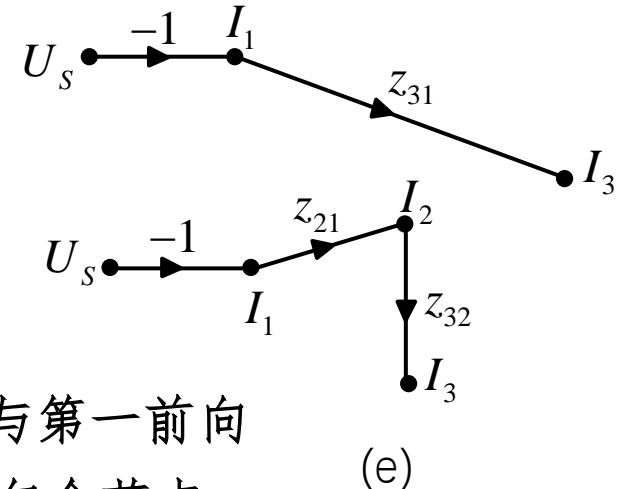
去掉第一前向路径包含的节点 U_S 、 I_1 、 I_3 及与此相联的全部支路后，得到与第一前向路径不相接触的子图是传输值为 $(1 + z_{22})$ 的自环；而去掉第二条前向路径包含节点 U_S 、 I_1 、 I_2 、 I_3 及与此相联的全部支路后，已未剩下任何子图了。故对应的路径因子分别为

$$\Delta_1 = 1 - (1 + z_{22}) = -z_{22}$$

$$\Delta_2 = 1$$

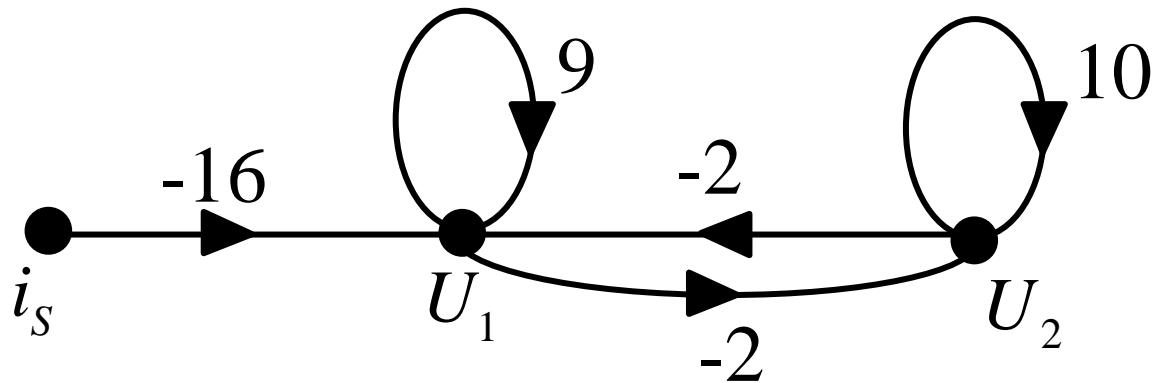
由此可得图增益：

$$T_3 = \frac{I_3}{U_s} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{-z_{31}(-z_{22}) - z_{21}z_{32}}{1 - [(1 + z_{11}) + (1 + z_{22}) + (1 + z_{33}) + z_{21}z_{12} + z_{23}z_{32} + z_{31}z_{13} + z_{13}z_{32}z_{21} + z_{12}z_{23}z_{31}] + [(1 + z_{11})(1 + z_{22}) + (1 + z_{22})(1 + z_{33}) + (1 + z_{11})(1 + z_{33}) + (1 + z_{11})z_{23}z_{32} + (1 + z_{22})z_{31}z_{13} + (1 + z_{33})z_{21}z_{12}] - [(1 + z_{11})(1 + z_{22})(1 + z_{33})]} \quad \text{则: } I_3 = T_3 U_s$$



第三节：Mason（梅森）公式

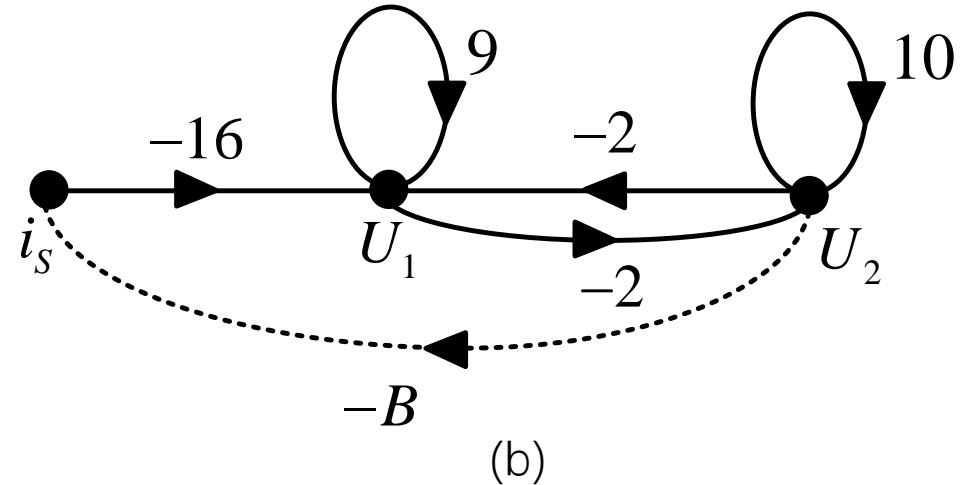
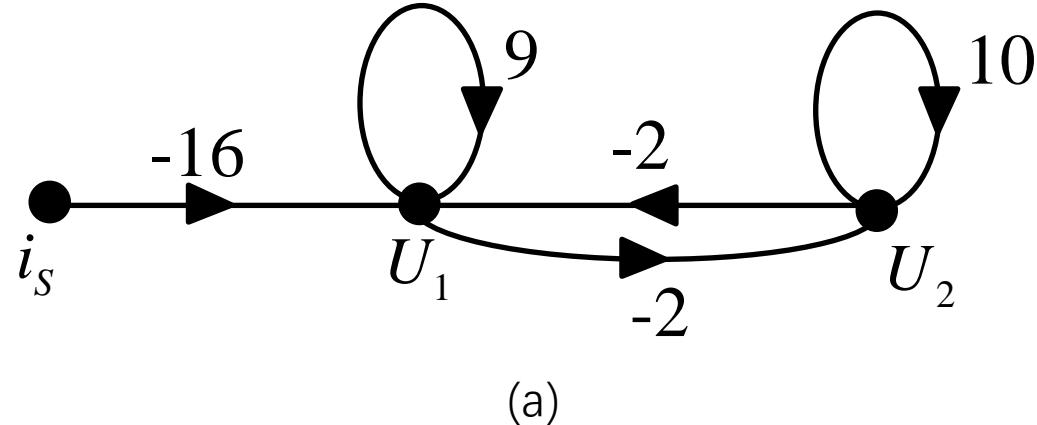
- 例题5-3-2 用闭合SFG求图(a)所示电压 U_2 的解



(a)

第三节：Mason（梅森）公式

■ 例题5-3-2 用闭合SFG求图(a)所示电压 U_2 的解



解：(1) 在图(a)所示SFG中添加一条从 U_2 到*i_s*的支路，其权值为(-B)，得闭合SFG如图(b)所示。

(2) 在图(b)中，各阶回路传输值为， L_k^1 为9, $(-2) \times (-2)$, 10, $(-B) \times (-16) \times (-2)$; L_k^2 : 9×10

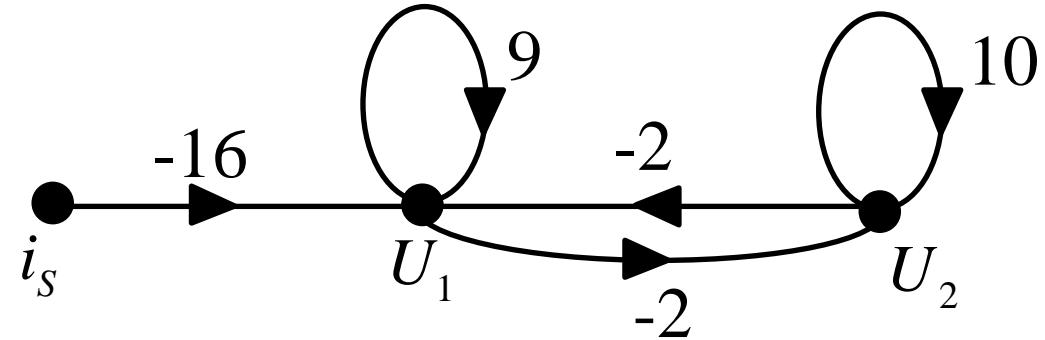
(3) 写出闭合SFG的图行列式： $\Delta_C = 1 - (9 + 4 + 10 - 32B) + 90 = 68 + 32B = \Delta + B \sum P_m \Delta_m$

(4) 用Mason公式计算图增益：

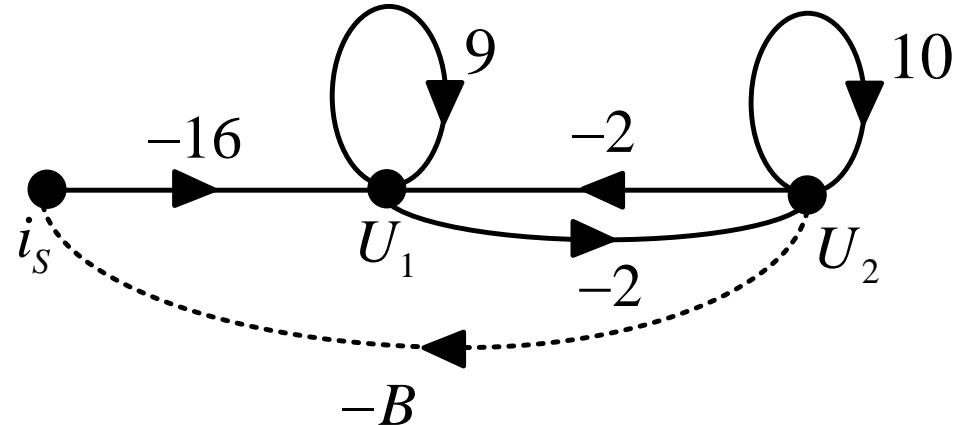
$$T_{2S} = \frac{U_2}{i_s} = \sum \frac{P_m \Delta_m}{\Delta} = \frac{32}{68}$$

第三节：Mason（梅森）公式

■ 例题5-3-2 用闭合SFG求图a所示电压 U_2 的解



(a)



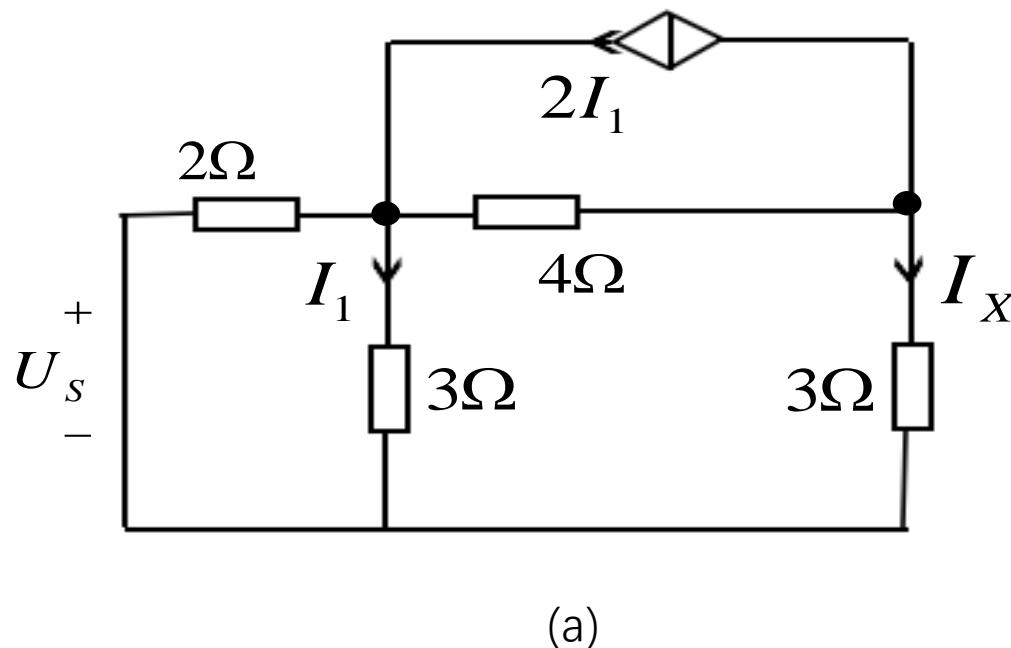
(b)

(5) 计算出结果：

$$U_2 = \frac{32}{68} i_s = \frac{8}{17} i_s$$

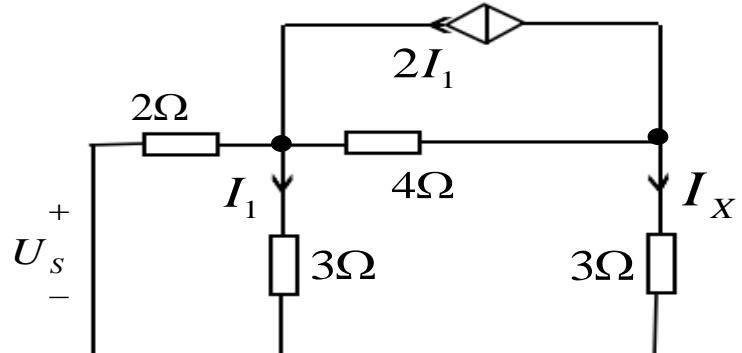
第三节：Mason（梅森）公式

- 例题5-3-3 对如图(a)所示网络选一适当树，写出其因果形式的混合变量方程，绘出相应SFG，求图中以电流 I_X 为输出的转移函数 $T = \frac{I_X}{U_S}$ 。

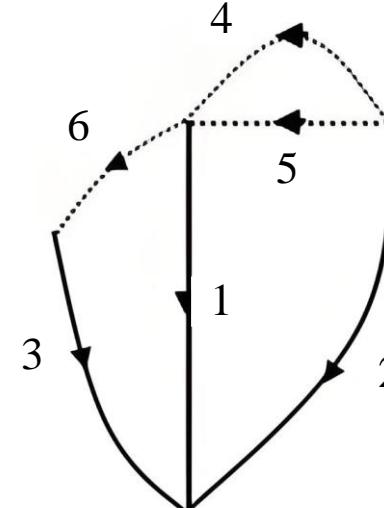


第三节：Mason（梅森）公式

■ 例题5-3-3 对如图(a)所示网络选一适当树，写出其因果形式的混合变量方程，绘出相应SFG，求图中以电流 I_X 为输出的转移函数 $T = \frac{I_X}{U_S}$ 。



(a)



(b)

解：(1) 按每一个元件一条支路画出网络的图，选一树，如图(b)所示；实线表示树支，虚线表示连支。
 (2) 根据已知网络和选择的树，以连支电流 I_4 、 I_5 、 I_6 和树支电压 U_1 、 U_2 、 U_3 作为网络变量，写出因果形式的方程：

$$I_4 = 2I_1 = 2 \frac{U_1}{3}$$

$$U_1 = 3(I_4 + I_5 - I_6)$$

$$I_5 = \frac{1}{4}(U_2 - U_1)$$

$$U_2 = 3I_X = -3(I_4 + I_5)$$

$$I_6 = \frac{1}{2}(U_1 - U_S)$$

$$U_3 = U_S$$

第三节：Mason（梅森）公式

■ 例题5-3-3 对如图(a)所示网络选一适当树，写出其因果形式的混合变量方程，绘出相应SFG，求图中以电流 I_X 为输出的转移函数 $T = \frac{I_X}{U_S}$ 。

(3) 根据以上方程组画SFG，为计算方便，从 U_2 到 U_S 添一条传输值为(-B)的支路，形成闭合的SFG，如图(c)所示：

$$I_4 = 2I_1 = 2\frac{U_1}{3}$$

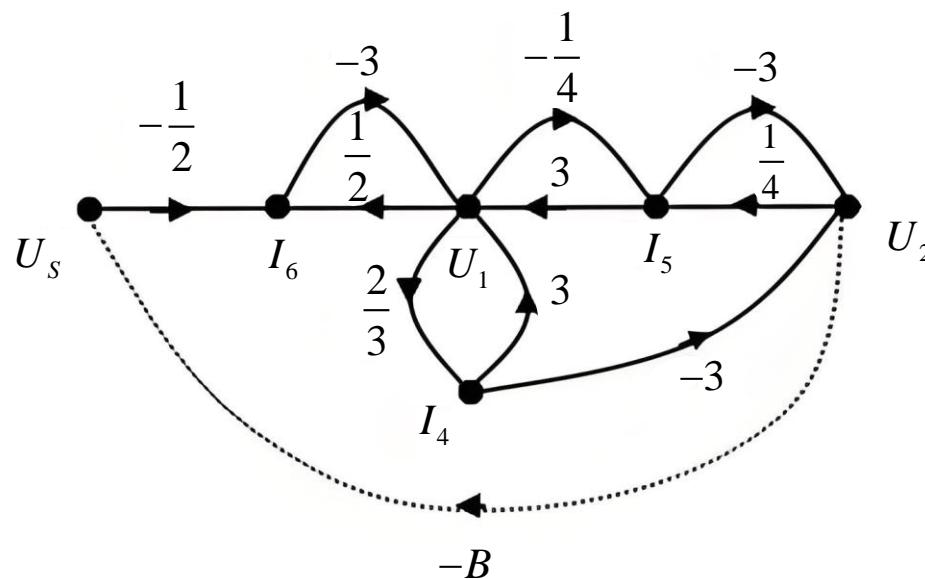
$$I_5 = \frac{1}{4}(U_2 - U_1)$$

$$I_6 = \frac{1}{2}(U_1 - U_S)$$

$$U_1 = 3(I_4 + I_5 - I_6)$$

$$U_2 = 3I_X = -3(I_4 + I_5)$$

$$U_3 = U_S$$



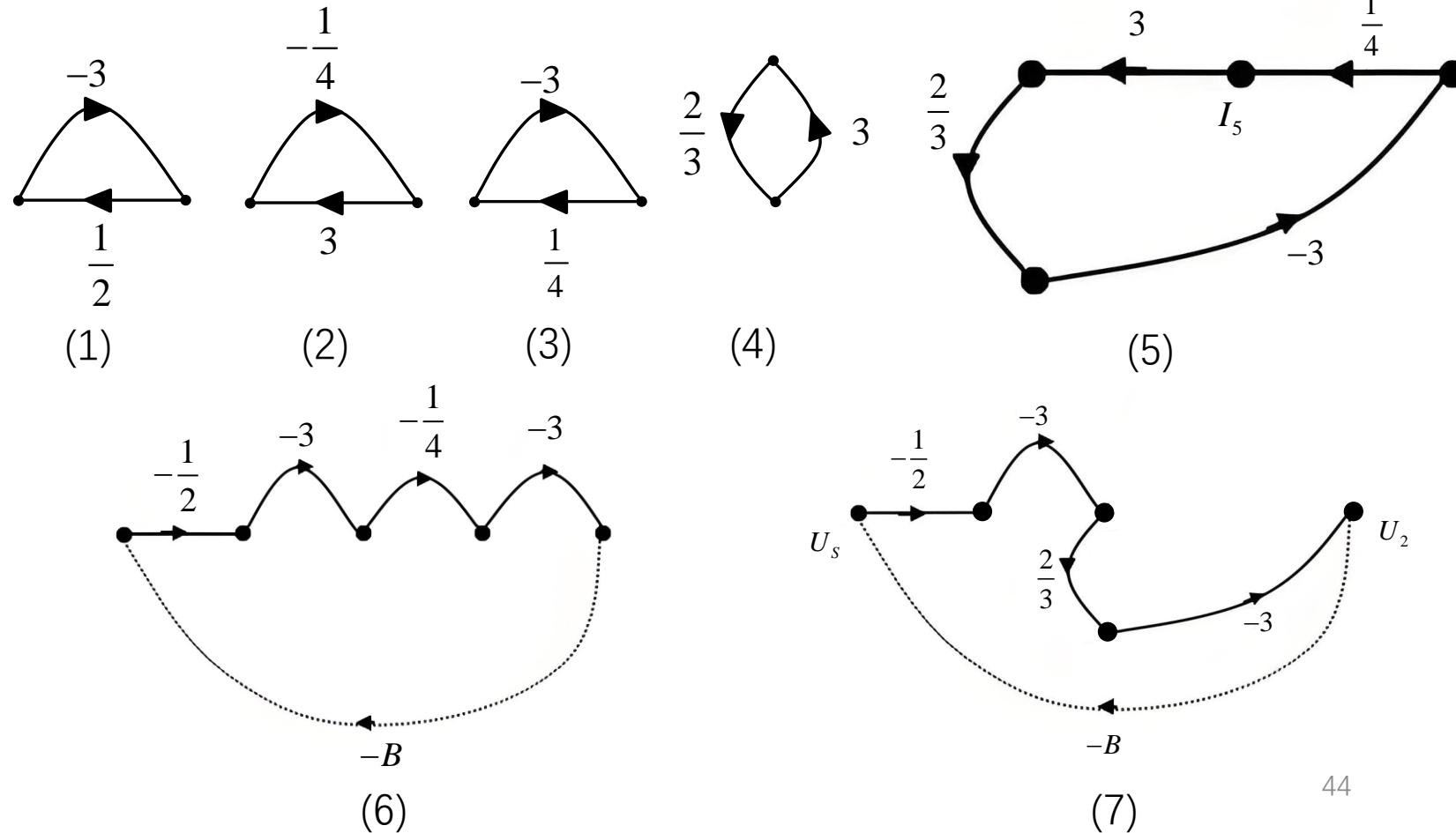
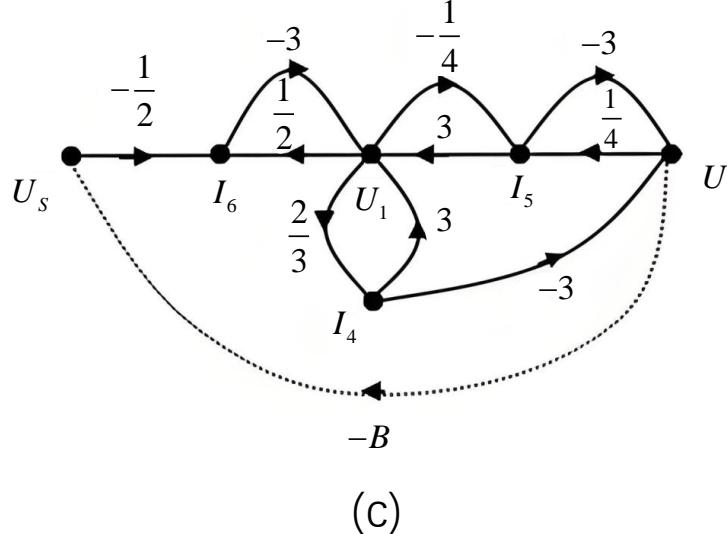
(c)

第三节：Mason（梅森）公式

■ 例题5-3-3 对如图(a)所示网络选一适当树，写出其因果形式的混合变量方程，绘出相应SFG，求图中以电流 I_X 为输出的转移函数 $T = \frac{I_X}{U_S}$ 。

(4) 用Mason公式计算图增益，一阶回路共有7个，二阶回路共有2组：

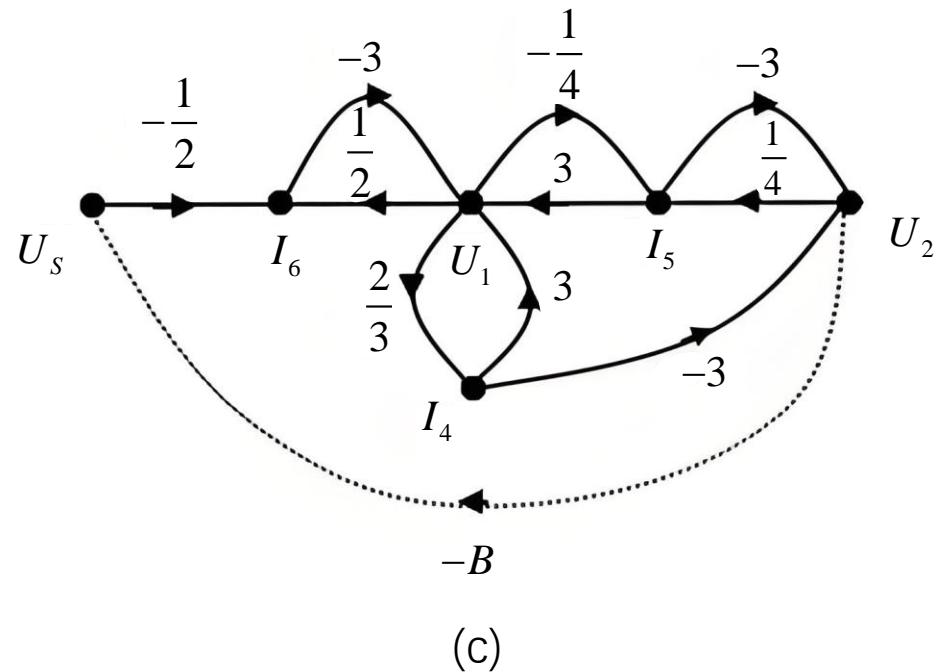
一阶回路：



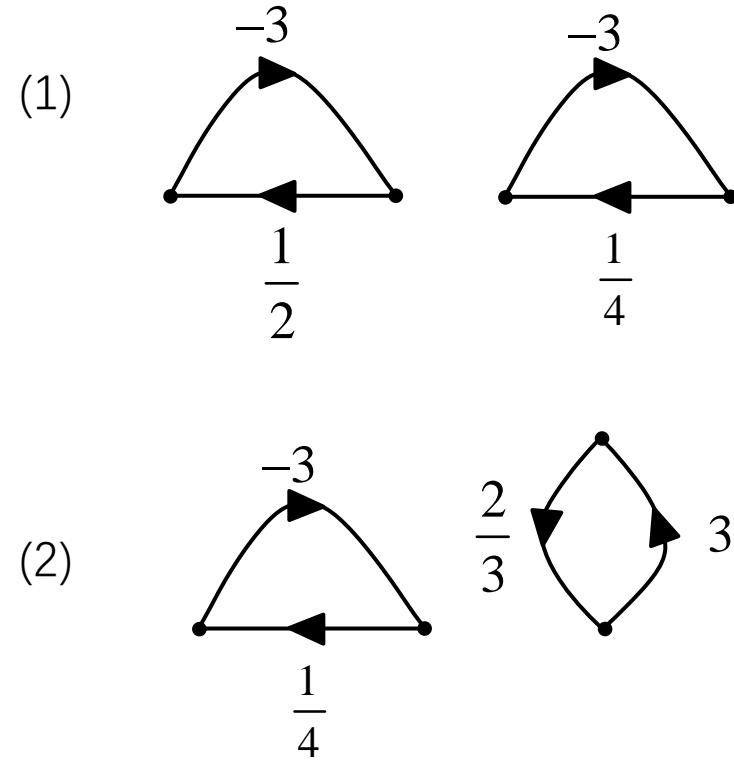
第三节：Mason（梅森）公式

■ 例题5-3-3 对如图(a)所示网络选一适当树，写出其因果形式的混合变量方程，绘出相应SFG，求图中以电流 I_X 为输出的转移函数 $T = \frac{I_X}{U_S}$ 。

(4) 用Mason公式计算图增益, 一阶回路共有6个, 二阶回路共有2组:



二阶回路：



第三节：Mason（梅森）公式

■ 例题5-3-3 对如图(a)所示网络选一适当树，写出其因果形式的混合变量方程，绘出相应SFG，求图中以电流 I_X 为输出的转移函数 $T = \frac{I_X}{U_S}$ 。

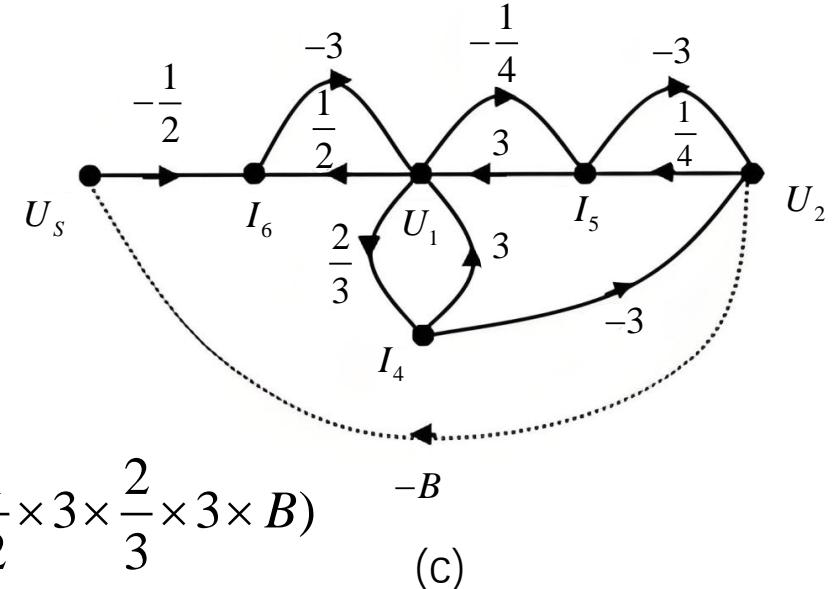
闭合SFG的图行列式为：

$$\Delta = 1 - \left(-3 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{4} - 3 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 3 \times \frac{1}{4} \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 3 \times 3 \times B + \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{3} \times 3 \times B \right)$$

$$+ \left[(-3 \times \frac{1}{2})(-3 \times \frac{1}{4}) + (3 \times \frac{2}{3})(-3 \times \frac{1}{4}) \right]$$

$$= 1 - \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + 2 - \frac{3}{2} + \frac{15}{8}B \right) + \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{25}{8} - \frac{15}{8}B$$



第三节：Mason（梅森）公式

- 例题5-3-3 对如图(a)所示网络选一适当树，写出其因果形式的混合变量方程，绘出相应SFG，求图中以电流 I_X 为输出的转移函数 $T = \frac{I_X}{U_S}$ 。

(注：由书上知识：在添加(-B)后，使得修改后的SFG称为闭合SFG。将闭合SFG的图行列式中所有的项按是否含有B来划分为两部分，对含B各项之和提出因子B后，剩余部分便等于Mason公式的分子，而不含B的各项之和则等于Mason公式的分母 Δ 。这样便可以同时得到Mason公式的分子和分母。)

$$T_1 = \frac{-\frac{15}{8}}{\frac{25}{8}} = -\frac{3}{5}$$

由题意得：

$$T = \frac{I_X}{U_S}$$

且 $3I_X = U_2 \Rightarrow I_X = \frac{U_2}{3}$

则 $T = \frac{U_2}{3U_S} = \frac{1}{3}T_1 = -\frac{1}{5}$

第四节：线性网络的 SFG 分析

一、因果形式的混合变量方程

- 本节讨论均就网络的复频域（或频域）模型而言，为表示简洁起见，略去复频变量符号（ s ）
- 选取树支电压与连支电流构成的混合变量作为不同网络变量，在常态网络中，将每一个独立源作为一条支路，选择一树，树中包含网络中所有的电压源，但不含任何电流源，并按先树枝后连支的顺序对支路编号。设 \mathbf{U}_b 、 \mathbf{I}_b 分别为支路电压向量，支路电流向量将它们按树支和连支分块为：

$$\mathbf{U}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{ta} \\ \dots \\ \mathbf{U}_{la} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ta} \\ \dots \\ \mathbf{I}_{la} \end{bmatrix}$$

- 再将电压，电流向量的树支，连支分块分别按非源支路和独立源支路分块，即：

$$\mathbf{U}_{ta} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_t \\ \mathbf{U}_v \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_{la} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{ta} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_t \\ \mathbf{I}_v \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{la} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_l \\ \mathbf{I}_I \end{bmatrix}$$

第四节：线性网络的 SFG 分析

一、因果形式的混合变量方程

■ 根据KCL方程: $\mathbf{Q}_f \mathbf{I}_b = \mathbf{0}$

可得:

$$\mathbf{I}_{ta} = -\mathbf{Q}_l \mathbf{I}_{la}$$

✓ 式中 \mathbf{Q}_l 为基本割集矩阵中对应于连支的分块, 将该式分块展开为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_t \\ \mathbf{I}_V \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{l1} & \mathbf{Q}_{I1} \\ \mathbf{Q}_{l2} & \mathbf{Q}_{I2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_l \\ \mathbf{I}_I \end{bmatrix}$$

■ 根据KVL方程: $\mathbf{B}_f \mathbf{U}_b = \mathbf{0}$

可得:

$$\mathbf{U}_{la} = -\mathbf{B}_t \mathbf{U}_{ta}$$

✓ 式中 \mathbf{B}_t 为基本回路矩阵中对应于树支的分块。将该式分块展开为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t1} & \mathbf{B}_{v1} \\ \mathbf{B}_{t2} & \mathbf{B}_{v2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_t \\ \mathbf{U}_v \end{bmatrix}$$

第四节：线性网络的 SFG 分析

一、因果形式的混合变量方程

- 写出非源支路的混合变量形式的支路电流电压关系，使方程右端向量中的元素为连支电压和树支电流,左端向量中的元素为连支电流和树支电压。即：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_l \\ \mathbf{U}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_l & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{Z}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{I}_t \end{bmatrix} \quad (8)$$

- 将 \mathbf{I}_t 和 \mathbf{U}_l 表式代入上式中：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_l \\ \mathbf{U}_t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{12}\mathbf{Q}_{l1} & \mathbf{Y}_l\mathbf{B}_{t1} \\ \mathbf{Z}_t\mathbf{Q}_{l1} & \mathbf{G}_{21}\mathbf{B}_{t1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_l \\ \mathbf{U}_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{12}\mathbf{Q}_{I1} & \mathbf{Y}_l\mathbf{B}_{v1} \\ \mathbf{Z}_t\mathbf{Q}_{I1} & \mathbf{G}_{21}\mathbf{B}_{v1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_I \\ \mathbf{U}_v \end{bmatrix}$$

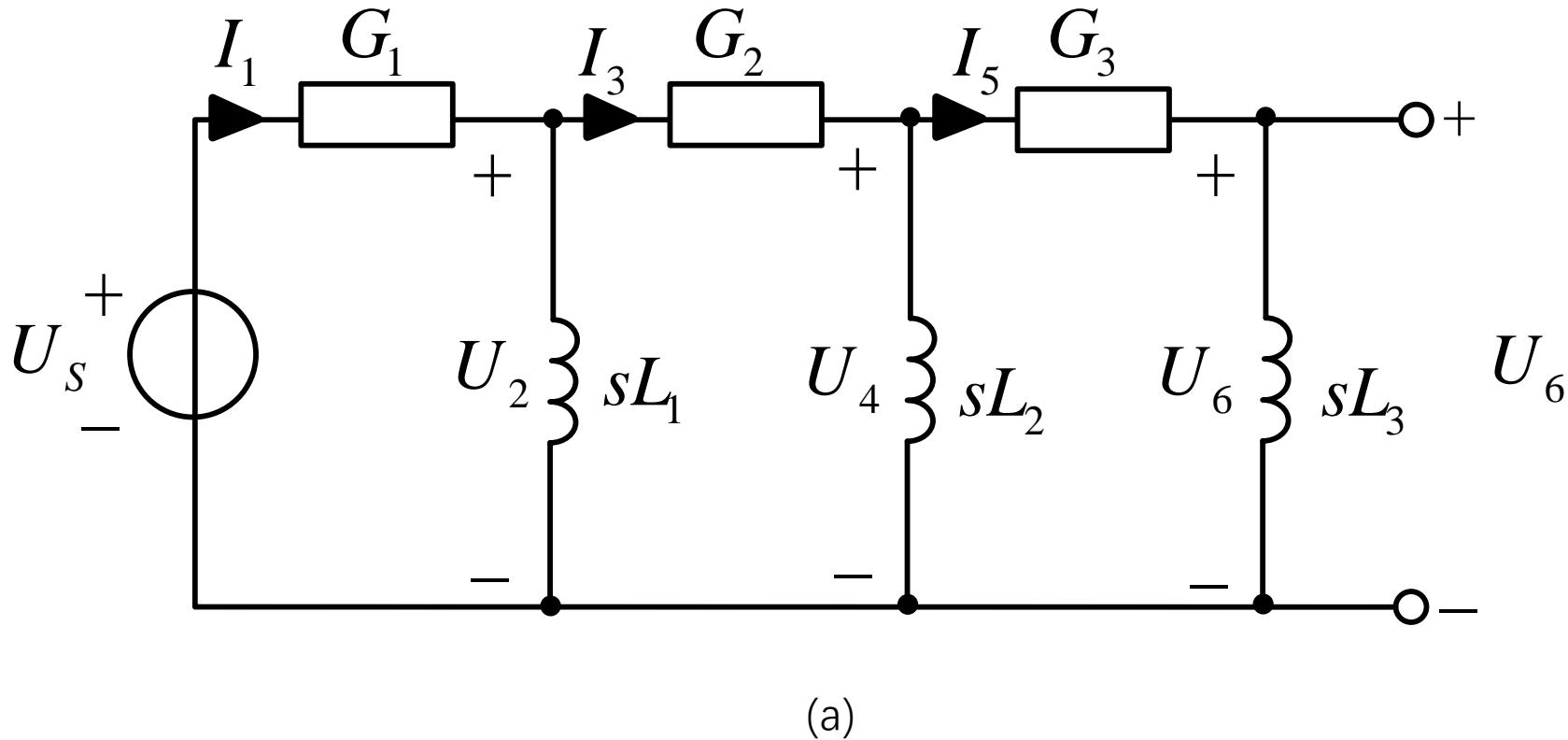
✓ 上式就是一组因果形式的混合变量方程。其网络变量为非源连支电流和树支电压。

二、讨论

- ✓ 当网络中无受控源时， \mathbf{G}_{12} 、 \mathbf{G}_{21} 两矩阵为 0，R、L、C 支路都可用阻抗或导纳表示。当有受控源等二端口元件存在时，不同的二端元件将影响上式中不同的矩阵块。
- ✓ 为了能写出式 (8) 形式的混合变量VCR方程以便写出方程式 (8)，在选树时各类二端口元件的二支路须按一定规则选为树支和连支，现将选树时对各类二端口元件的处理规则总结于表5-1中。

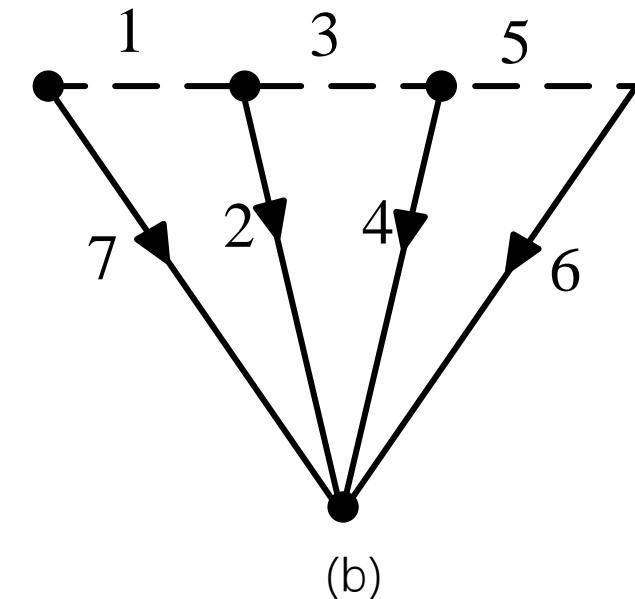
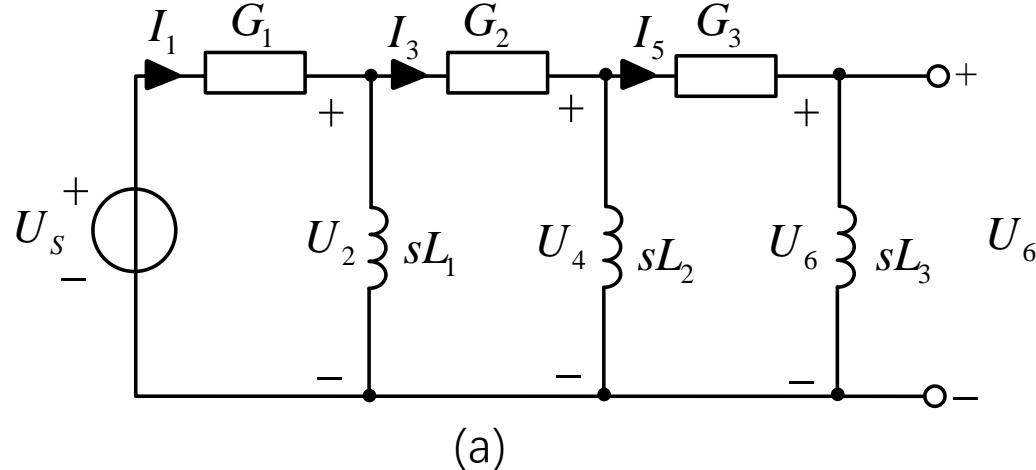
第四节：线性网络的 SFG 分析

- 例题5-4-1 用SFG 分析法写出图(a)所示网络的转移函数 $T_6 = \frac{U_6}{U_S}$



第四节：线性网络的 SFG 分析

■ 例题5-4-1 用SFG分析法写出图(a)所示网络的转移函数 $T_6 = \frac{U_6}{U_s}$



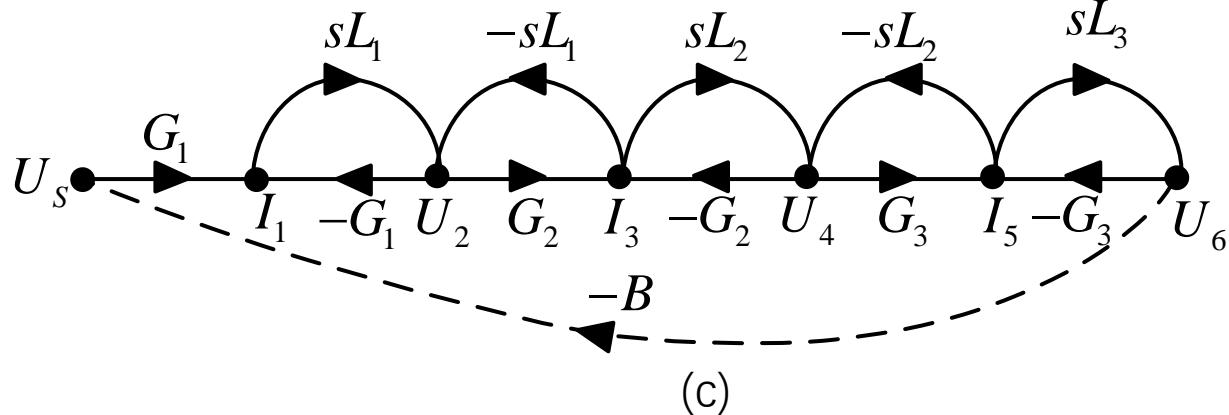
解：(1) 按每一个元件-一条支路画出网络的图。选一树，树中含电压源支路，并使待求电压 U_6 为树支电压，如图(b)所示，实线表示树支。

(2) 据已知网络和所选的树，以连支电流 I_1 、 I_3 、 I_5 和非源树支电压 U_2 、 U_4 、 U_6 作为网络变量，写出因果形式的方程：

$$\begin{aligned}
 I_1 &= G_1(U_s - U_2) & U_2 &= sI_1(I_1 - I_3) \\
 I_3 &= G_2(U_2 - U_4) & U_4 &= sL_2(I_3 - I_5) \\
 I_5 &= G_3(U_4 - U_6) & U_6 &= sL_3I_5
 \end{aligned} \tag{1}$$

第四节：线性网络的 SFG 分析

■ 例题5-4-1 用SFG 分析法写出图(a)所示网络的转移函数 $T_6 = \frac{U_6}{U_S}$



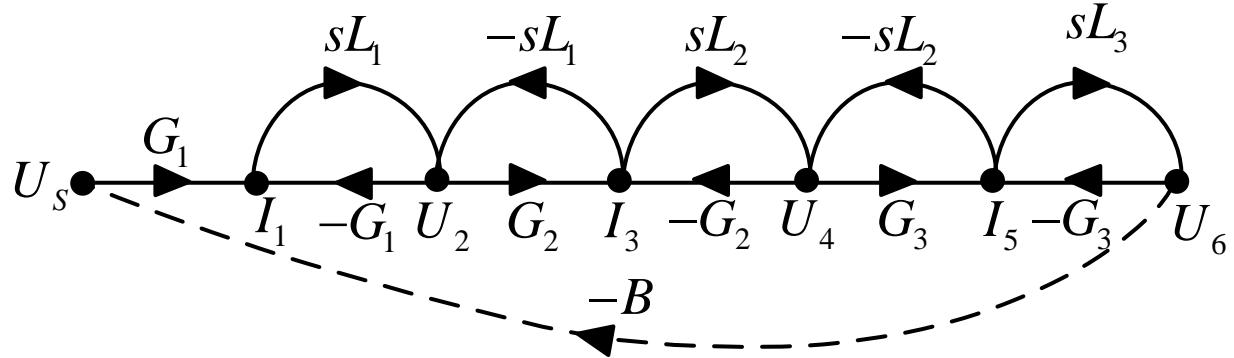
(3) 据式(1)画SFG，并从 U_6 到 U_S 添一条传输值为 ($-B$) 的支路，形成闭合SFG，如图(c)所示。

(4) 用Mason公式计算图增益。闭合 SFG的图行列式为

$$\begin{aligned}
 \Delta_C = & 1 - [-G_1sL_1 - G_2sL_1 - G_2sL_2 - G_3sL_2 - G_3sL_3 - BG_1sL_1G_2sL_2G_3sL_3] \\
 & + [(-G_1sL_1)(-G_2sL_2) + (-G_1sL_1)(-G_3sL_2) + (-G_1sL_1)(-G_3sL_3) + (-G_2sL_1)(G_3sL_2) \\
 & + (-G_2sL_1)(-G_3sL_3) + (-G_2sL_2)(-G_3sL_3)] - [(-G_1sL_1)(-G_2sL_2)(-G_3sL_3)] = 1 + s(G_1L_1 + G_2L_1 + G_2L_2 \\
 & + G_3L_2 + G_3L_3) + s^2(G_1L_1G_2L_2 + G_1L_1G_3L_2 + G_1L_1G_3L_3 \\
 & + G_2L_1G_3L_2 + G_2L_1G_3L_3 + G_2L_2G_3L_3) \\
 & + s^3G_1L_1G_2L_2G_3L_3 + Bs^3G_1L_1G_2L_2G_3L_3
 \end{aligned}$$

第四节：线性网络的 SFG 分析

- 例题5-4-1 用SFG 分析法写出图(a)所示网络的转移函数 $T_6 = \frac{U_6}{U_S}$



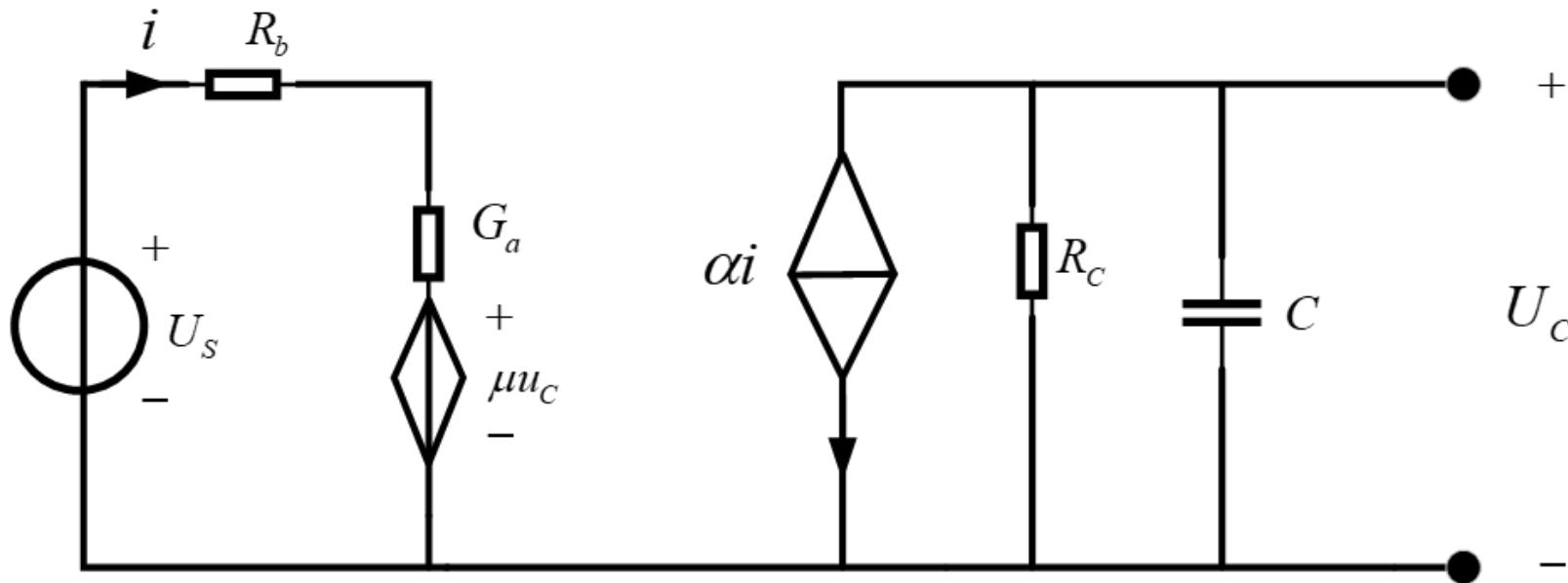
(c)

故转移函数

$$T_6 = \frac{s^3 G_1 L_1 G_2 L_2 G_3 L_3}{s^3 G_1 L_1 G_2 L_2 G_3 L_3 + s^2(G_1 L_1 G_2 L_2 + G_1 L_1 G_3 L_2 + G_1 L_1 G_3 L_3 + G_2 L_1 G_3 L_2 + G_2 L_1 G_3 L_3 + G_2 L_2 G_3 L_3) + s(G_1 L_1 + G_2 L_1 + G_2 L_2 + G_3 L_2 + G_3 L_3) + 1}$$

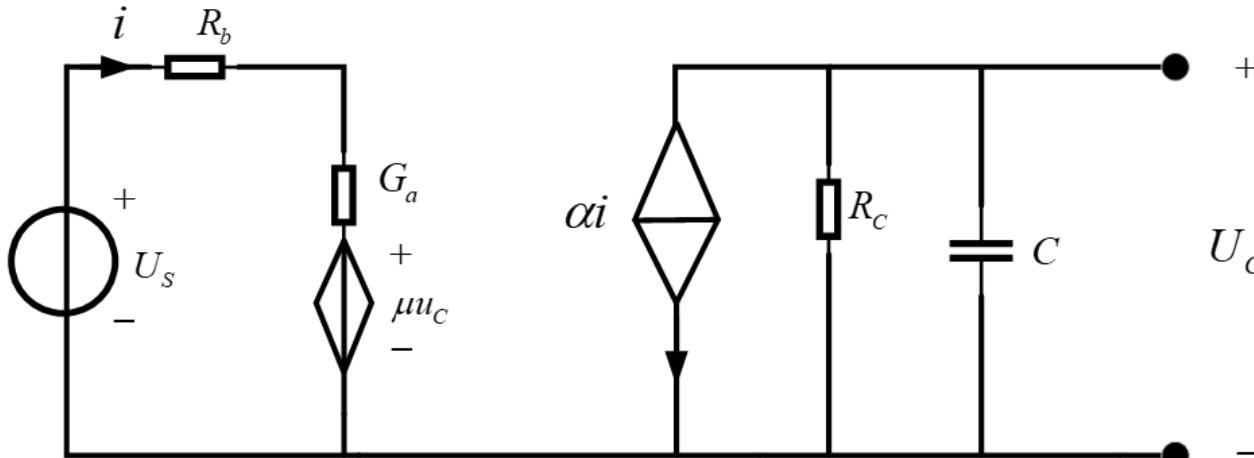
第四节：线性网络的 SFG 分析

- 例5-4-2 写出下图所示有源网络的状态转移函数 $T = \frac{U_c}{U_s}$

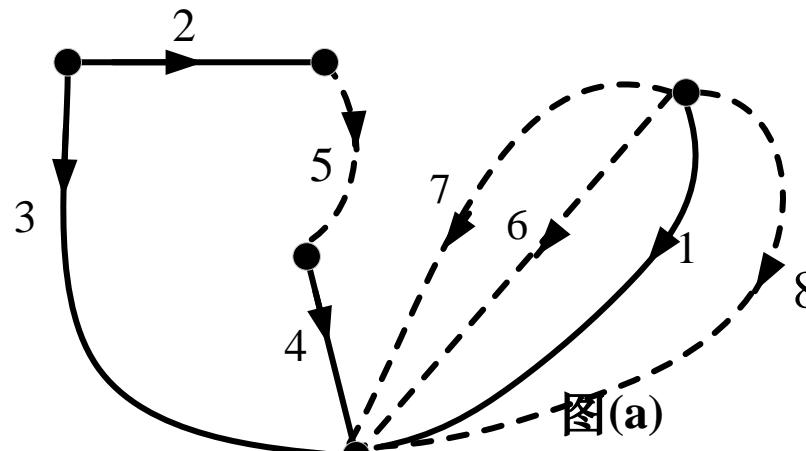


第四节：线性网络的 SFG 分析

- 例5-4-2 写出下图所示有源网络的状态转移函数 $T = \frac{U_c}{U_s}$



解：画出网络的图并选一树，如图(a)所示。其中电压源为树支；VCVS控制支路8(开路支路)为连支，受控支路4为树支；而CCCS控制支路2为树支，受控支路7为连支。



第四节：线性网络的 SFG 分析

■ 例5-4-2 写出下图所示有源网络的状态转移函数 $T = \frac{U_C}{U_S}$

解：

连支电流：

$$I_5 = G_a(U_s - U_2 - U_4)$$

$$I_6 = \frac{U_1}{R_C} \quad I_7 = \alpha I_5$$

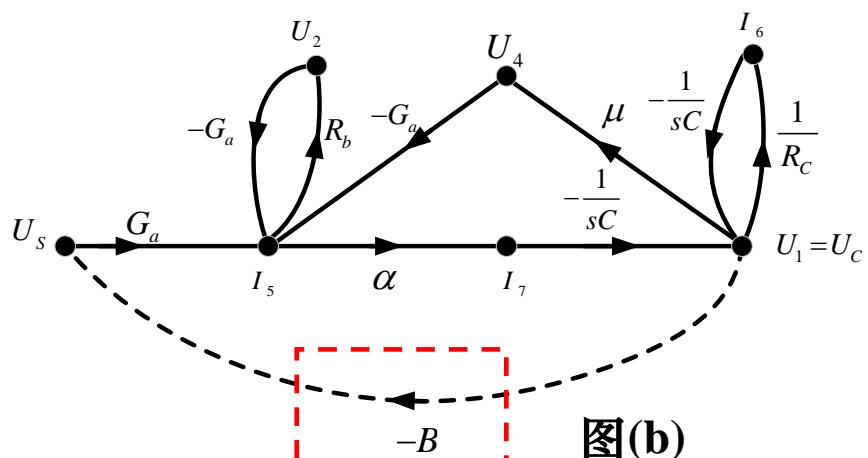
树支电压：

$$U_1 = -\frac{1}{sC}(I_6 + I_7)$$

$$U_2 = R_b I_2 = R_b I_5$$

$$U_4 = \mu U_1$$

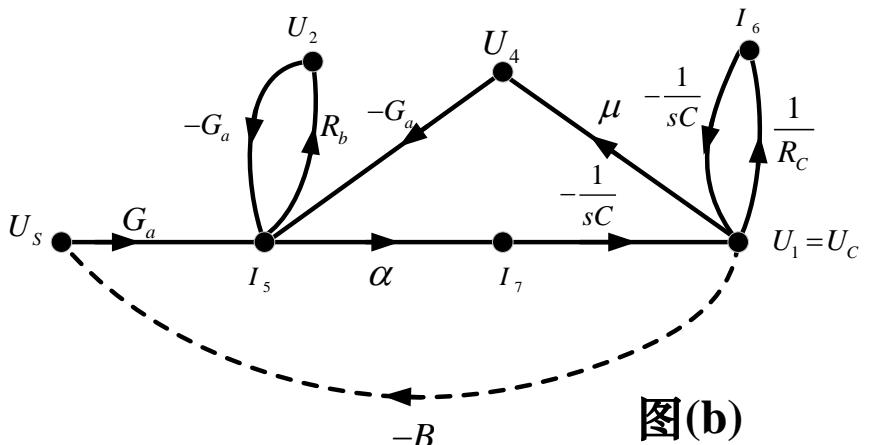
据此画出SFG，为计算方便，从 U_C 到 U_S 添一条传输值为 $-B$ 的支路，形成闭合SFG，如图(b)



第四节：线性网络的 SFG 分析

■ 例5-4-2 写出下图所示有源网络的状态转移函数 $T = \frac{U_C}{U_S}$

解：



图(b)

用Mason公式计算图增益。闭合SFG的图行列式为：

$$\Delta_C = 1 - \left[-G_a R_b + \frac{\mu \alpha G_a}{sC} - \frac{1}{sCR_C} + B \frac{\alpha G_a}{sC} \right] + \left[\frac{G_a R_b}{sCR_C} \right]$$

故转移函数：

$$\begin{aligned} T = \frac{U_C}{U_S} &= \frac{-\frac{\alpha G_a}{sC}}{1 + G_a R_b - \frac{\mu \alpha G_a}{sC} + \frac{1}{sCR_C} + \frac{G_a R_b}{sCR_C}} \\ &= \frac{-\alpha G_a R_C}{(1 + G_a R_b)(sCR_C + 1) - \mu \alpha G_a R_C} \end{aligned}$$

第五节：状态转移图

一、根据状态方程建立系统的状态转移图

- 状态转移图 (state transition diagram) 与它所描述的时域状态方程之间有清晰的对应关系，而且它很容易根据系统的转移函数得到,因而在有源网络综合中是一种很有用的工具。
- ✓ 描述一个线性动态网络的状态方程的一般形式是：

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t)$$

- ✓ 拉氏变换：

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BF}(s) + \mathbf{x}(0_-)$$

相应的因果形式的方程为：

$$\mathbf{X}(s) = s^{-1}\mathbf{AX}(s) + s^{-1}\mathbf{BF}(s) + s^{-1}\mathbf{x}(0_-)$$

- 由此可以画出相应的 SFG。 (205页二阶单输入系统例子)
- 状态转移图清晰地描述了系统中各状态变量，状态变量的导数和输入量之间的关系。由状态转移图不仅能方便地写出状态方程，而且可以求得网络的转移函数。

第五节：状态转移图

二、根据状态转移图求它所描述的状态方程的解

■ 状态方程的复频域解

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}(0_-) + \mathbf{B}\mathbf{F}(s)] = \Phi(s) [\mathbf{x}(0_-) + \mathbf{B}\mathbf{F}(s)]$$

✓ 式中: $\Phi(s) = (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$

称为预解矩阵, 如果网络的输入为 0, 则: $\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0_-)$

■ 预解矩阵中的元素

$$\varphi_{ij} = \left. \frac{X_i(s)}{x_j(0_-)} \right|_{x_k(0_-)=0} \quad (k=1,2,\dots,n; \quad k \neq j)$$

- 可以看出, 在状态转移图中求输入节点 $x_j(0_-)$ 至输出节点 $X_i(s)$ 的图增益便等于上式中的 $\varphi_{ij}(s)$ 。用这种方法, 令 $i=1,2,3\dots,n; j=1,2,3\dots, n$ 便可求出 $n \times n$ 矩阵 $\Phi(s)$ 中各元素。
(例题5-12)

第五节：状态转移图

三、根据时域输入-输出方程或复频域转移函数求状态转移图

- 考察一个单输入，单输出的线性动态系统，时域用输入-输出方程求解：

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) =$$

$$b_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} e(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

- 在复频域中相应的转移函数为：

$$T(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

第五节：状态转移图

三、根据时域输入-输出方程或复频域转移函数求状态转移图

- 为了画出系统的SFG，将转移函数的分子分母，同乘以中间变量 $s^{-n}Z$ ，于是可将分子分母分别写成：

$$R(s) = (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0) s^{-n} Z \quad (20)$$

$$E(s) = (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) s^{-n} Z$$

- 定义变量集合： $\{X_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

则： $X_i = s^{-n+i-1} Z$

$$sX_i = X_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

即：

$$sX_1 = X_2, sX_2 = X_3, \dots, sX_{n-1} = X_n, sX_n = Z, X_1 = s^{-n} Z$$

第五节：状态转移图

三、根据时域输入-输出方程或复频域转移函数求状态转移图

■ 于是有：

$$R(s) = b_0 X_1 + b_1 X_2 + \dots + b_{n-2} X_{n-1} + b_{n-1} X_n + b_n Z$$

$$sX_n = Z = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n + E(s)$$

■ 则 n 个状态方程的复频域形式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} sX_1 = X_2 \\ sX_2 = X_3 \\ \dots \\ sX_{n-1} = X_n \\ sX_n = -a_0 X_1 - a_1 X_2 - \dots - a_{n-2} X_{n-1} - a_{n-1} X_n + E(s) \end{array} \right.$$

- ✓ 其中 X_1 、 X_2 、 \dots X_n 为状态变量 x_1 、 x_2 、 \dots x_n 的拉氏变换，而输出方程的复频域形式为 (20)。因此，根据上述状态方程输出方程可绘出系统的状态转移图。（208页例如及209页例题5-13）

第五节：状态转移图

三、根据时域输入-输出方程或复频域转移函数求状态转移图

- 在由转移函数画状态转移图，进而写出状态方程和输出方程的过程中，如该系统中对应初始状态不为0，则在变量集合中令：

$$sX_i = X_{i+1} + x_i(0_-)$$

- 即在SFG 中的节点 sX_i 上增加一个传输值为 1 的入支路，支路另一端节点变量为初值 $x_i(0_-)$ 。

第五节：状态转移图

■ 例5-5-1 已知状态方程为：

$$\begin{aligned}\dot{i}_1(t) &= -3i_1(t) - i_2(t) + 2\varepsilon(t) \\ \dot{i}_2(t) &= 2i_1(t)\end{aligned}$$

和初始值 $i_1(0_-) = 2, i_2(0_-) = 3$, 画出状态转移图，并求转移函数 $T_1 = \frac{I_1(s)}{E(s)}$ 、预解矩阵 $\phi(s)$ 和电流 $i_1(t)$

第五节：状态转移图

■ 例5-5-1 已知状态方程为：
 $\dot{i}_1(t) = -3i_1(t) - i_2(t) + 2\varepsilon(t)$
 $\dot{i}_2(t) = 2i_1(t)$

和初始值 $i_1(0_-) = 2, i_2(0_-) = 3$, 画出状态转移图，并求转移函数 $T_1 = \frac{I_1(s)}{E(s)}$ 、预解矩阵 $\phi(s)$ 和电流 $i_1(t)$

解：(1) 将状态方程进行拉氏变换，有：

$$sI_1(s) = -3I_1(s) - I_2(s) + 2E(s) + i_1(0_-)$$

$$sI_2(s) = 2I_1(s) + i_2(0_-)$$

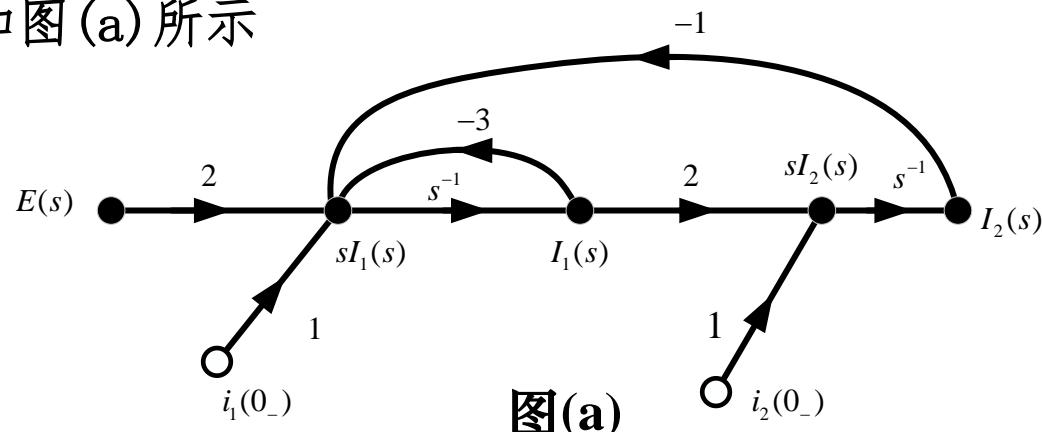
其中， $E(s) = \frac{1}{s}$

补上关系：

$$I_1(s) = s^{-1}[sI_1(s)]$$

$$I_2(s) = s^{-1}[sI_2(s)]$$

画出相应状态转移图如图(a)所示



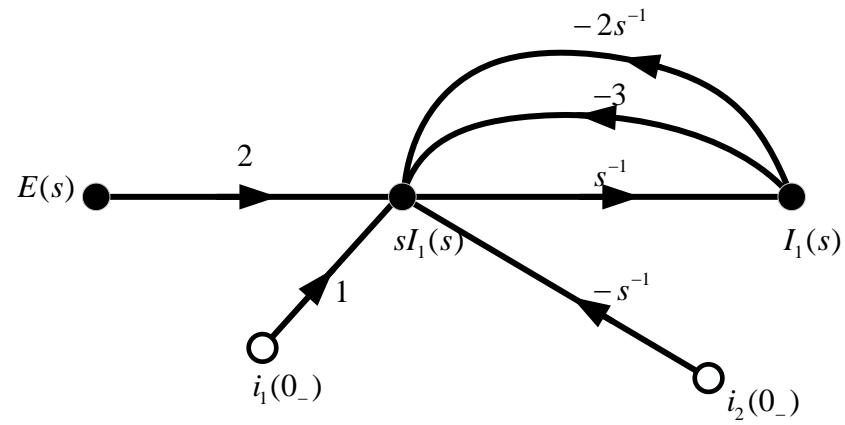
第五节：状态转移图

■ 例5-5-1 已知状态方程为：
 $\dot{i}_1(t) = -3i_1(t) - i_2(t) + 2\varepsilon(t)$
 $\dot{i}_2(t) = 2i_1(t)$

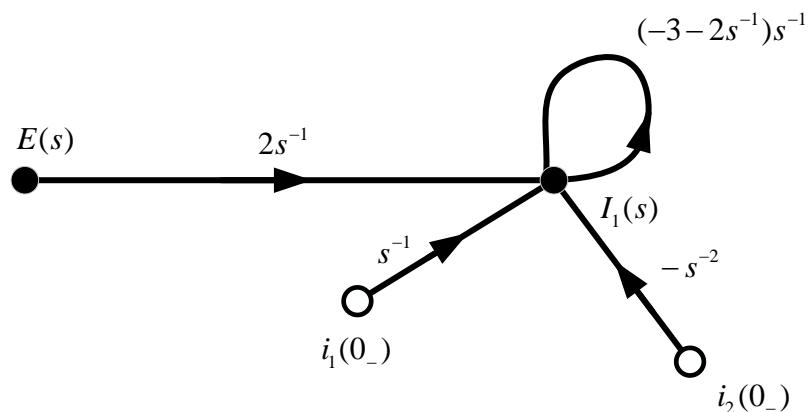
和初始值 $i_1(0_-) = 2, i_2(0_-) = 3$, 画出状态转移图，并求转移函数 $T_1 = \frac{I_1(s)}{E(s)}$ 、预解矩阵 $\phi(s)$ 和电流 $i_1(t)$

解：

(2) 首先消去图(a)中的节点 $I_2(s)$ 、 $sI_2(s)$ ，得到图(b)，再消去 $sI_1(s)$ ，得到图(c)



图(b)



图(c)

第五节：状态转移图

■ 例5-5-1 已知状态方程为：
 $\dot{i}_1(t) = -3i_1(t) - i_2(t) + 2\varepsilon(t)$
 $\dot{i}_2(t) = 2i_1(t)$

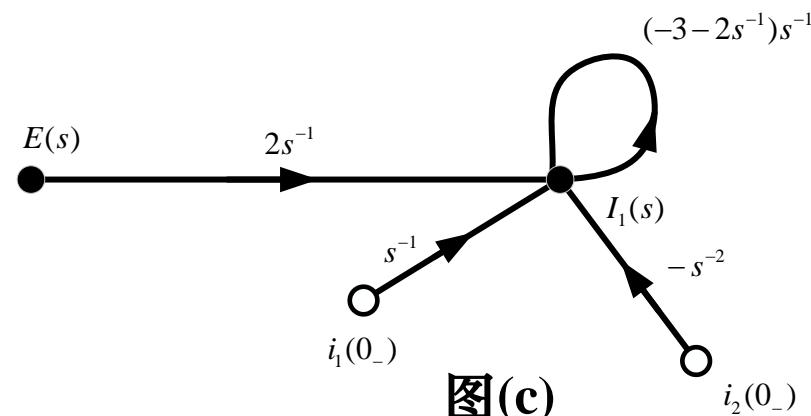
和初始值 $i_1(0_-) = 2, i_2(0_-) = 3$, 画出状态转移图，并求转移函数 $T_1 = \frac{I_1(s)}{E(s)}$ 、预解矩阵 $\phi(s)$ 和电流 $i_1(t)$

解：

最后消去图(c)中的节点 $I_1(s)$ 自环，即可写出 $I_1(s)$ 的解：

$$I_1(s) = \frac{2s^{-1}E(s) + s^{-1}i_1(0_-) - s^{-2}i_2(0_-)}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{2sE(s) + si_1(0_-) - i_2(0_-)}{s^2 + 3s + 2}$$

(3) 令: $i_1(0_-) = i_2(0_-) = 0$ ，即可得到转移函数: $T_1 = \frac{I_1(s)}{E(s)} = \frac{2s}{s^2 + 3s + 2}$



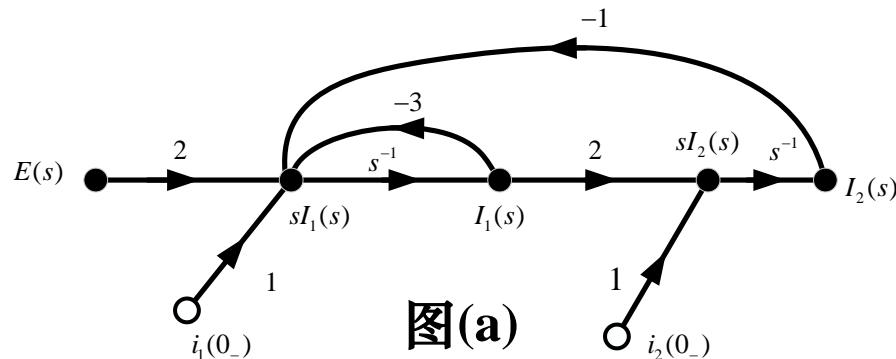
第五节：状态转移图

■ 例5-5-1 已知状态方程为：
 $i_1(t) = -3i_1(t) - i_2(t) + 2\varepsilon(t)$

$$i_2(t) = -2i_1(t)$$

和初始值 $i_1(0_-) = 2, i_2(0_-) = 3$, 画出状态转移图，并求转移函数 $T_1 = \frac{I_1(s)}{E(s)}$ 、预解矩阵 $\phi(s)$ 和电流 $i_1(t)$
 解：

(4) 根据图(a)求预解矩阵 $\phi(s)$ ，下面用Mason公式求其各元素



图(a)

预解矩阵元素为：

$$\phi_{ij}(s) = \frac{\sum_{m=1}^m P_{m(ij)} \Delta_{m(ij)}}{\Delta} \quad (i=1,2, j=1,2)$$

式中 $P_{m(ij)}$ 为从输入节点 $x_j(0_-)$ 至 $X_i(s)$ 的第 m 条前向路径传输值， $\Delta_{m(ij)}$ 为上述前向路径的路径因子。

图行列式：

$$\Delta = 1 - (-3s^{-1} - 2s^{-2}) = 1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}$$

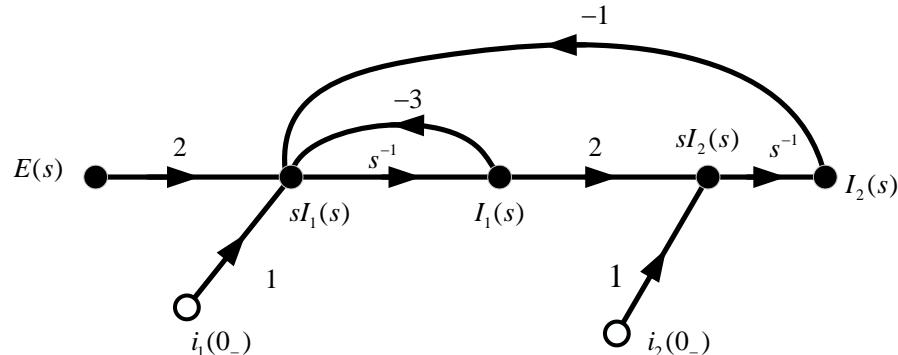
第五节：状态转移图

■ 例5-5-1 已知状态方程为: $\dot{i}_1(t) = -3i_1(t) - i_2(t) + 2\varepsilon(t)$

$$\dot{i}_2(t) = -2i_1(t)$$

和初始值 $i_1(0_-) = 2, i_2(0_-) = 3$, 画出状态转移图，并求转移函数 $T_1 = \frac{I_1(s)}{E(s)}$ 、预解矩阵 $\phi(s)$ 和电流 $i_1(t)$

解:



图(a)

计算各前向路径:

从 $i_1(0_-)$ 到 $I_1(s)$ 的前向路径: $P_{1(11)} = s^{-1}, \Delta_{1(11)} = 1$

从 $i_1(0_-)$ 到 $I_2(s)$ 的前向路径: $P_{1(21)} = 2s^{-2}, \Delta_{1(21)} = 1$

从 $i_2(0_-)$ 到 $I_1(s)$ 的前向路径: $P_{1(12)} = -s^{-2}, \Delta_{1(12)} = 1$

从 $i_2(0_-)$ 到 $I_2(s)$ 的前向路径: $P_{1(22)} = s^{-1}, \Delta_{1(22)} = 1 - (-3s^{-1}) = 1 + 3s^{-1}$

$$\phi_{11}(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} \quad \phi_{12}(s) = \frac{-1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\phi_{21}(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \quad \phi_{22}(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

故预解矩阵为:

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(s) & \phi_{12}(s) \\ \phi_{21}(s) & \phi_{22}(s) \end{bmatrix}$$

第五节：状态转移图

■ 例5-5-1 已知状态方程为: $\dot{i}_1(t) = -3i_1(t) - i_2(t) + 2\varepsilon(t)$

$$\dot{i}_2(t) = -2i_1(t)$$

和初始值 $i_1(0_-) = 2, i_2(0_-) = 3$, 画出状态转移图, 并求转移函数 $T_1 = \frac{I_1(s)}{E(s)}$ 、预解矩阵 $\phi(s)$ 和电流 $i_1(t)$

解:

(5) 将 $E(s)$ 、 $i_1(0_-)$ 、 $i_2(0_-)$ 带入下式:

$$I_1(s) = \frac{2s^{-1}E(s) + s^{-1}i_1(0_-) - s^{-2}i_2(0_-)}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{2sE(s) + si_1(0_-) - i_2(0_-)}{s^2 + 3s + 2}$$

可得:

$$I_1 = \frac{2s - 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{-3}{s + 1} + \frac{5}{s + 2}$$

进行拉氏反变换得:

$$i_1(t) = (-3e^{-t} + 5e^{-2t})\varepsilon(t)$$

第五节：状态转移图

- 例5-5-2 已知某网络转移函数为：

$$T(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s^2 + 5s + 4}{s^3 + 7s^2 + 17s + 15}$$

绘出网络状态转移图，并写出相应状态方程和以 $r(t)$ 为输出的输出方程。

第五节：状态转移图

■ 例5-5-2 已知某网络转移函数为: $T(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s^2 + 5s + 4}{s^3 + 7s^2 + 17s + 15}$, 绘出网络状态转移图, 并写出相应状态方程和以 $r(t)$ 为输出的输出方程。

解: 用 $s^{-3}Z$ 乘转移函数 $T(s)$ 的分子、分母, 并令 $X_1 = s^{-3}Z, X_2 = s^{-2}Z, X_3 = s^{-1}Z$, 则有:

$$sX_1 = X_2$$

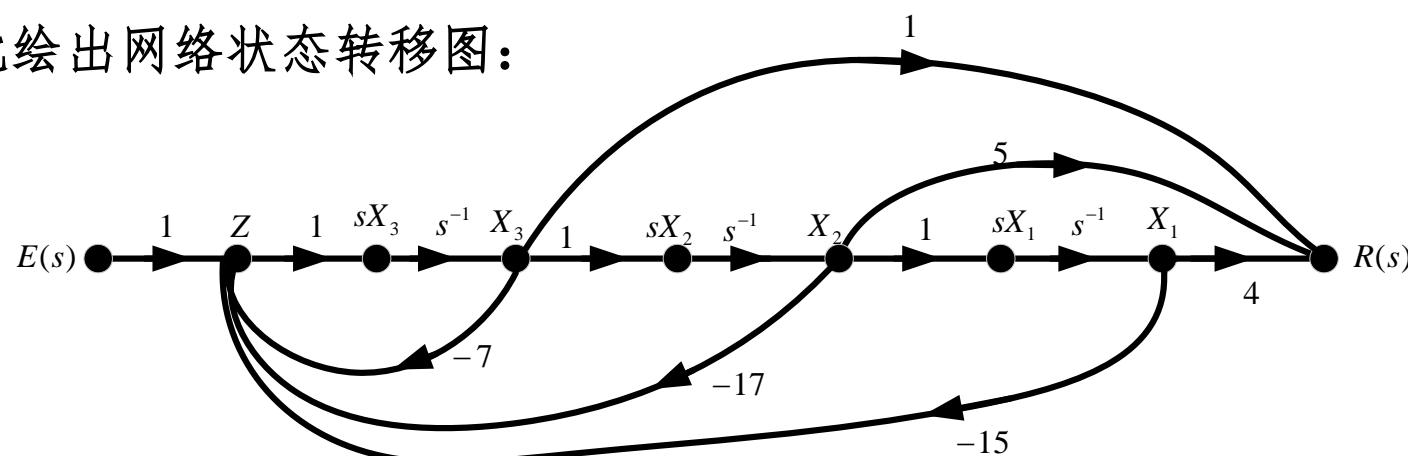
$$sX_2 = X_3$$

$$sX_3 = Z$$

$$R(s) = X_3 + 5X_2 + 4X_1$$

$$Z(s) = E(s) - 7X_3 - 17X_2 - 15X_1$$

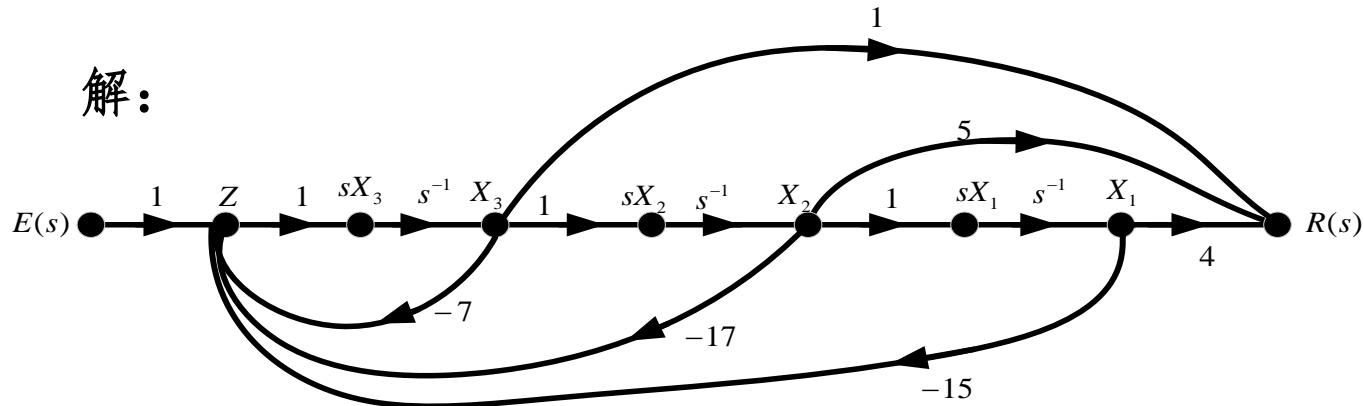
据此绘出网络状态转移图:



第五节：状态转移图

■ 例5-5-2 已知某网络转移函数为: $T(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s^2 + 5s + 4}{s^3 + 7s^2 + 17s + 15}$, 绘出网络状态转移图，并写出相应状态方程和以 $r(t)$ 为输出的输出方程。

解:



对应网络状态方程:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -15x_1 - 17x_2 - 7x_3 + e(t)$$

对应输出方程为:

$$r(t) = 4x_1 + 5x_2 + x_3$$

在由转移函数画出状态转移图，进而写出状态方程和输出方程的过程中，若系统中对应初始状态**不为零**，则令

$$sX_i = X_{i+1} + x_i(0_-)$$

即在SFG中的节点 sX_i 上增加一个传输值为1的入支路，支路另一端节点变量为初值 $x_i(0_-)$