2010年:

一. (1) 端口型无源和有源网络指:

设n端口网络于t_0时刻的初始储能为$W(t_0)$, 在t_0至t时间内, 由电源传送至n端口网络的能量为 $W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} u^T(\tau)\, i(\tau)\, d\tau$, 其中 $u(\tau)$、$i(\tau)$ 分别为n端口的电压与电流向量。

若对所有的初始时刻t_0, 对所有的$t\geq t_0$, 对所有的电压电流容许信号偶向量, 都有 $W(t_0)+W(t_0,t)\geq 0$, 则该网络为端口型无源网络;

若对某些t_0, 对某些$t\geq t_0$, 对某些容许信号向量偶, 有 $W(t_0)+W(t_0,t)<0$, 则该网络为端口型有源网络。

(2) 设$L(t)$为线性时变电感, 证: 当且仅当 $L(t)\geq 0$ 和 $\dot{L}(t)\geq 0$ (对所有t) 该电感为无源的。

~~证明: 初始时变电感储能为: $W(t_0)=\frac{1}{2}L(t_0)\,i^2(t_0)$~~

~~由t_0至t时刻内电源传送至电感能量~~ $W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} u(t)\,i(t)\,dt=\int_{t_0}^{t} u_L(t)\,i_L(t)\,dt$

$$=\int_{t_0}^{t}\left[\dot{L}(t)\,i(t)+L(t)\,\dot{i}(t)\right]i(t)\,dt=\int_{t_0}^{t}L(t)\,i(t)\,d\,i(t)+\int_{t_0}^{t}i^2(t)\,dL(t)$$

$$=\frac{1}{2}L(t)\,i^2(t)\Big|_{t_0}^{t}+L(t)\,i^2(t)\Big|_{t_0}^{t}=\frac{1}{2}L(t)\,i^2(t)-\frac{1}{2}L(t_0)\,i^2(t_0)+L(t)\,i^2(t)-L(t_0)\,i^2(t_0)$$

$=$

证明: 设初始电感储能 $W(t_0)=\frac{1}{2}L(t_0)\,i^2(t_0)$

由t_0到t时间内, 电源送至电感能量 $W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}u(\tau)\,i(\tau)\,d\tau$

$$=\int_{t_0}^{t}\left[\dot{L}(\tau)\,i(\tau)+L(\tau)\,\dot{i}(\tau)\right]i(\tau)\,d\tau=\int_{t_0}^{t}\dot{L}(\tau)\,i^2(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}L(\tau)\,i(\tau)\,d\,i(\tau)$$

$$=\frac{1}{2}L(\tau)\,i^2(\tau)\Big|_{t_0}^{t}+\int_{t_0}^{t}\dot{L}(\tau)\,i^2(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}L(t)\,i^2(t)-\frac{1}{2}L(t_0)\,i^2(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot{L}(\tau)\,i^2(\tau)\,d\tau$$

则 $W(t_0)+W(t_0,t)=\frac{1}{2}L(t)\,i^2(t)+\int_{t_0}^{t}\dot{L}(\tau)\,i^2(\tau)\,d\tau$

则要使电感无源即上式≥ 0, 则 $L(t)\geq 0$ 和 $\dot{L}(t)\geq 0$ 同时成立.

综上: $L(t)$为线性时变电感, 当且仅当 $L(t)\geq 0$ 和 $\dot{L}(t)\geq 0$, 该电感是无源的.

三、证明：三端网络的Y参数方程：

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix}$$

零和特性：每行诸元之和为0，每列诸元之和为0。

有 $Y_{31}U_1(s)+Y_{32}U_2(s)+Y_{33}U_3(s)=I_3(s)$，又输出端3开路，即 $I_3(s)=0$。

则 $T_1(s)=\frac{U_3(s)}{U_1(s)}\Big|_{U_2(s)=0} = -\frac{Y_{31}}{Y_{33}}$　　$T_2(s)=\frac{U_3(s)}{U_2(s)}\Big|_{U_1(s)=0} = -\frac{Y_{32}}{Y_{33}}$

根据不定导纳矩阵的零和特性：$T_1(s)+T_2(s) = -\frac{Y_{31}}{Y_{33}}-\frac{Y_{32}}{Y_{33}} = \frac{Y_{33}}{Y_{33}}=1$　得证。

五、解(1) 选取 u、i_1、i_2 为状态变量列写网络状态方程。　树支电容电压、连支电感电流。

$C\frac{du}{dt}=i_{R_1}-i_1$ ✓

$L_1\frac{di_1}{dt}=-M\frac{di_2}{dt}-i_1R_2+u$ ✓

$L_2\frac{di_2}{dt}=-M\frac{di_1}{dt}-R_3i_2$

用状态变量列式，最终不应用非状态量；

电容与电容、电感与电感之间的变化关系用导数（即纯电容回路、纯电感割集）。

状态变量选取也可以参考给的初始值；

状态方程左边应为状态量求导！

其中 $i_{R_1}=\frac{\varepsilon(t)-u}{R_1}$，整理得：

$\dot{u}=\frac{\varepsilon(t)-u}{CR_1}-\frac{i_1}{C}$

$\dot{i}_1=-\frac{M}{L_1}\dot{i}_2-\frac{R_2}{L_1}i_1+\frac{u}{L_1}$

$\dot{i}_2=-\frac{M}{L_2}\dot{i}_1-\frac{R_3}{L_2}i_2$

代入参数得状态方程：

$$\begin{cases} \dot{u}=\varepsilon(t)-u-i_1 \\ \dot{i}_1=+\sqrt{2}i_2-2i_1+2u \\ \dot{i}_2=\sqrt{2}i_1-\sqrt{2}u-2i_2 \end{cases}$$

状态方程右边不应含有状态变量导数。

(2) 令 $E(s)=\frac{1}{s}$ ⇒　单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 的拉普拉斯变换 $\frac{1}{s}$；

对状态方程拉氏变换：

$sU(s)=E(s)-U(s)-I_1(s)+u(0_-)$

$sI_1(s)=+\sqrt{2}I_2(s)-2I_1(s)+2U(s)+i_1(0_-)$

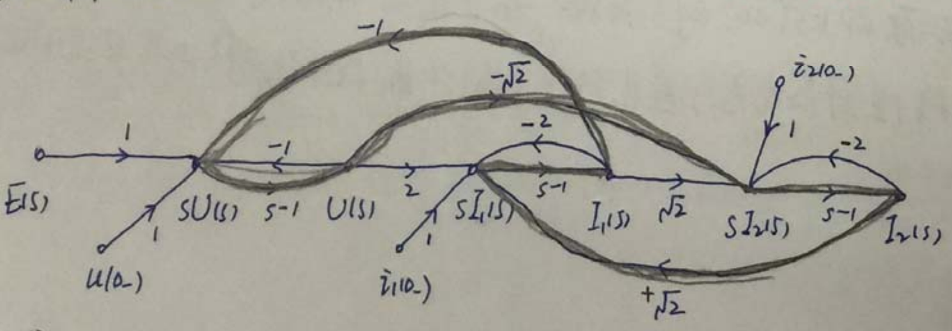
$sI_2(s)=\sqrt{2}I_1(s)-\sqrt{2}U(s)-2I_2(s)+i_2(0_-)$

要将 u 也换为源节点 $E(s)$ 才好！

拉氏变换勿忘加初始值！记乘以s.

补上关系、$U(s)=s^{-1}[sU(s)]$　$I_1(s)=s^{-1}[sI_1(s)]$　$I_2(s)=s^{-1}[sI_2(s)]$ ⇒

画状态转移图为：　尽量避免交叉，实在避不得已，少交叉。



还有一个比较恶心的一条

(3) 图行列式：$\Delta = 1-[(-s^{-1})+(-2s^{-1})+(-2s^{-1})+(-2s^{-2})+(+2s^{-3})+(+2s^{-2})]+(-s^{-1})[(-2s^{-1})+(-2s^{-1})+(+2s^{-2})]+(-2s^{-1})(-2s^{-1})+(-2s^{-1})(-2s^{-2})-(-s^{-1})(-2s^{-1})(-2s^{-1}) = 1+5s^{-1}+4s^{-3}+8s^{-2}$ ✓

$1+5s^{-1}+8s^{-2}+4s^{-3}$

$\boxed{\text{由 } E(s) \text{ 至 } U(s)}$，$P_1 = s^{-1}$，$\Delta_1 = 1-[(-2s^{-1})+(-2s^{-1})+(+2s^{-2})]+(-2s^{-1})(-2s^{-1}) = 1+2s^{-2}+4s^{-1}$

$$T_1 = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{s^{-1}+2s^{-3}+4s^{-2}}{1+5s^{-1}+4s^{-3}+8s^{-2}} = \frac{s^2+2+4s}{s^3+5s^2+4+8s}$$ 分母为源，分子为汇.

(4) 预解矩阵的元素

$$\Phi_{ij}(s) = \frac{\sum_m P_{m(ij)}\Delta_{m(ij)}}{\Delta} \quad (i=1,2,3;\ j=1,2,3)$$

从 $u(0_-)$ 至 $U(s)$ 的前向路径：$P_{1(11)} = s^{-1}$，$\Delta_{1(11)} = 1-[(-2s^{-1})+(-2s^{-1})+2s^{-2}]+(2s^{-1})(-2s^{-1})$
$= 1+2s^{-2}+4s^{-1}$

从 $u(0_-)$ 至 $I_1(s)$ 的前向路径：$P_{1(21)} = 2s^{-2}$，$\Delta_{1(21)} = 1+2s^{-1}$

从 $u(0_-)$ 至 $I_2(s)$ 的前向路径：$P_{1(31)} = 2\sqrt{2}s^{-3}$，$\Delta_{1(31)} = 1$

从 $i_1(0_-)$ 至 $U(s)$ 的前向路径：$P_{1(12)} = \cancel{+2s^{-2}}$，$\Delta_{1(12)} = 1+2s^{-1}$

从 $i_1(0_-)$ 至 $I_1(s)$ 的前向路径：$P_{1(22)} = s^{-1}$，$\Delta_{1(22)} = 1-[(-s^{-1})+(-2s^{-1})]+(-s^{-1})(-2s^{-1}) = 1+3s^{-1}+2s^{-2}$

从 $i_1(0_-)$ 至 $I_2(s)$ 的前向路径：$P_{1(32)} = \sqrt{2}s^{-2}$，$\Delta_{1(23)} = 1+s^{-1}$

从 $i_2(0_-)$ 至 $U(s)$ 的前向路径：$P_{1(13)} = -\sqrt{2}s^{-3}$ $\Delta_{1(13)} = 1\cancel{+2s^{-1}}$

从 $i_2(0_-)$ 至 $I_1(s)$ 的前向路径：$P_{1(23)} = +\sqrt{2}s^{-2}$，$\Delta_{1(23)} = 1+s^{-1}$

从 $i_2(0_-)$ 至 $I_2(s)$ 的前向路径：$P_{1(33)} = s^{-1}$，$\Delta_{1(33)} = 1-[(-s^{-1})+(-2s^{-1})+(-2s^{-2})]+2s^{-2} = 1+3s^{-1}+4s^{-2}$

$\Phi_{11} = \dfrac{s^2+2+4s}{s^3+5s^2+4+8s}$ $\Phi_{21} = \dfrac{2s+4}{s^3+5s^2+4+8s}$ $\Phi_{31} = \dfrac{2\sqrt{2}}{s^3+5s^2+4+8s}$ $\Phi_{12} = \dfrac{-2s}{s^3+5s^2+4+8s}$ $\Phi_{22} = \dfrac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+4+8s}$ $\Phi_{32} = \dfrac{\sqrt{2}s+\sqrt{2}}{s^3+5s^2+4+8s}$

$\Phi_{13} = \dfrac{-\sqrt{2}}{s^3+5s^2+4+8s}$ $\Phi_{23} = \dfrac{+\sqrt{2}s+\sqrt{2}}{s^3+5s^2+4+8s}$ $\Phi_{33} = \dfrac{s^2+3s+4}{s^3+5s^2+4+8s}$

$$\text{预解矩阵 } \Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2-2}{s^3+5s^2-6} & \frac{-2s^2}{s^3+5s^2-6} & \frac{-\sqrt{2}s^3-2\sqrt{2}s^2}{s^3+5s^2-6} \\ \frac{2s-4}{s^3+5s^2-6} & \frac{s^2-s-2}{s^3+5s^2-6} & \frac{-\sqrt{2}s-\sqrt{2}}{s^3+5s^2-6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{s^3+5s^2-6} & \frac{\sqrt{2}s+\sqrt{2}}{s^3+5s^2-6} & \frac{s^2+3s+4}{s^3+5s^2-6} \end{bmatrix} \quad \frac{1}{s^3+5s^2+8s+4}\begin{bmatrix} s^2+4s+2 & -2-s & -\sqrt{2} \\ 2s+4 & s^2+3s+2 & \sqrt{2}s+\sqrt{6} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2}s+\sqrt{2} & s^2+3s+4 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{ij} = \frac{X_i(s)}{X_j(0_-)}$$

$$X_i(s) = \Phi_{ij}\, X_j(0_-)$$

$\boxed{(5)}$ $I_1(s) = \underline{\Phi_{21}(s)u(0_-)} + \underline{\Phi_{22}(s)i_1(0_-)} + \underline{\overset{=0}{\Phi_{23}(s)i_2(0_-)}} \cancel{+} \quad T_1'\,\underline{E(s)}$

$-E(s)$ 到 $i_1(0_-)$

$$= \frac{1}{s^3+5s^2+4+8s}\left[2s+4+s^2+3s+2+\frac{s^{-1}(2s-2)(1+2s^{-1})}{s^3}\right] = \frac{s^3+5s^2+8s+4}{s^4+5s^3+8s^2+4s} = \frac{1}{s}$$

s^2

$P' = 2s^{-2}$ $\Delta' = 1+2s^{-1}$

六 解：增量网络法：根据给定电网络直接求网络变量对网络元件参数和非归一化灵敏度.

参考节点不列节点方程，其电压为0！

(1) 以节点③为参考节点，列写节点方程：$\boxed{电流入正出负！}$

$$(G_1+G_2+G_3)U_{n1}-G_3U_{n2}-\cancel{G_2U_{n3}}=U_sG_1$$

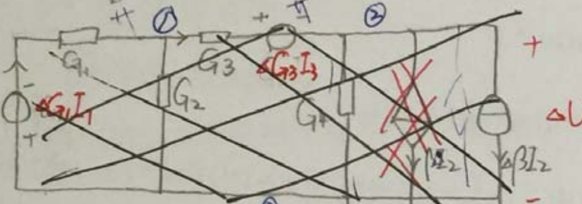
$$-G_3U_{n1}+(G_3+G_4)U_{n2}=-\beta I_2$$

$$I_2=G_2U_{n1}$$

求解节点电压： $U_{n1}=\frac{10}{17}$ $\quad U_{n2}=-\frac{4}{17}$

则电流： $I_1=\frac{U_s-U_{n1}}{R_1}=(4-\frac{10}{17})\times1=\frac{58}{17}$ $\quad I_3=2\times(\frac{10}{17}+\frac{4}{17})=\frac{28}{17}$ $\quad I_2=U_{n1}G_2=\frac{30}{17}$

(2) 考虑参数 G_1、G_3、β 可能发生微小扰动的情形，构造增量网络，

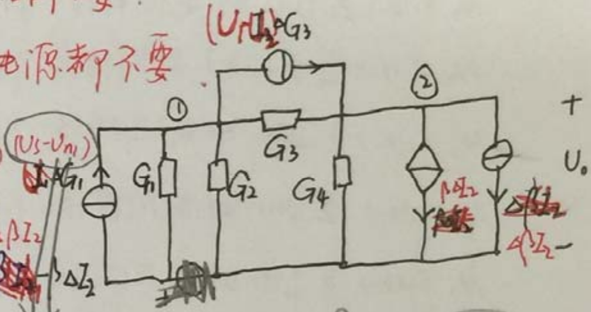


电阻串联、电导并联、受控源系也要保留

按原电流方向！

原网络压源不要！

原网络电源都不要



对增量网络 N_i 求解 ΔU_0，仍用节点法：

$$(G_1+G_2+G_3)\Delta U_{n1}-G_3\Delta U_{n2}=\Delta G_1(U_s-U_{n1})-\Delta G_3(U_{n1}-U_{n2})$$

$$-G_3\Delta U_{n1}+(G_3+G_4)\Delta U_{n2}=\Delta G_3(U_1-U_2)-\beta\Delta I_2-\Delta\beta I_2$$

$$\Delta I_2=G_2\Delta U_{n1}$$

联立求 $\Delta U_0=\Delta U_{n2}=\frac{35}{289}\Delta G_3-\frac{58}{289}\Delta G_1-\frac{45}{289}\Delta\beta$

原网络元支 支路两端电压

ΔG、$\Delta\beta\rightarrow$ 增

$\cancel{\hat{S}^{U_0}_{G_1}=\frac{dU_0}{dG_1}=\frac{29}{238}=0.1218 \quad \hat{S}^{U_0}_{G_3}=\frac{dU_0}{dG_3}=\frac{4}{17}=0.2353 \quad \hat{S}^{U_0}_{\beta}=-\frac{45}{238}=-0.1891}$

$$\hat{S}^{T}_{\beta}=\frac{dT}{d\beta}=\frac{d}{d\beta}\left(\frac{U_0}{U_s}\right)=\frac{dU_0}{d\beta}\cdot\frac{1}{U_s}=-\frac{45}{289}\times\frac{1}{4}=\cancel{-0.0389}$$

-0.0389

$-\frac{58}{289}$ $\quad \frac{35}{289}$ $\quad -\frac{45}{289}$ $\quad -0.0389$