电网络分析

网络分析的状态变量法

第四章：网络分析的状态变量法

第一节：状态变量法的基本概念

网络分析方法：输入-输出法（端部法）与状态变量法（内部法）

1. 状态变量法：

- 现代控制理论发展的成果，被广泛应用于网络分析。
- 首先分析能够代表网络内部特性的状态变量，然后通过状态变量和输入激励求得所需要的输出响应。
- 可以得到零输入响应的状态轨迹，可用于判定系统的稳定性。
- 求出网络的状态变量后，便于分析网络的可控性和客观测性。
- 网络分析的状态变量法包括两个方面：1. 状态方程的建立；2. 状态方程的求解。

2. 网络状态变量分析法的广泛适应性：

- 既能分析线性时不变网络，也能分析线性时变网络和非线性网络；
- 既能分析单输入-单输出系统，也能分析多输入-多输出系统；
- 既能分析连续时间信号系统，也能分析离散时间信号系统。

第一节：状态变量法的基本概念

一、即时网络（无记忆网络）与动态网络（记忆网络）

1、即时网络

- 由非储能元件构成的网络，在某一时刻的输出量只决定于该时刻的输入量，与它过去的工作状态无关，这样的网络称为**即时网络**或**无记忆网络**。

$$y(t)=G[f(t)] \qquad y=G(f)$$

2、动态网络

- 若网络中含有储能元件，则网络在某一时刻的输出量不仅取决于该时刻的输入量，而且取决于该时刻以前所有输入量。这样的网络称为**动态网络**或**记忆网络**。

$$N[f(t), y(t)]=0 \qquad （N\text{为积分微分算子}）$$

$$y(t)=F[f(t_0, t)]$$

第一节：状态变量法的基本概念

二、状态变量法

- 借助于一组被称为**状态变量**的辅助变量，建立起一组联系状态变量与输入变量的一阶微分方程组（**状态方程**），和一组联系输出变量、状态变量和输入变量的代数方程组（**输出方程**）。先求解状态方程，得出状态变量，然后再根据输出方程求得输出变量。

1、状态（state）

- 网络在时刻t_0的**状态**是指能和$t \geq t_0$输入激励一起**唯一确定**该网络在所有$t \geq t_0$时的输出的维数最少（即**线性无关**）的信息量的集合。
  - 电路的状态：描述电路的一组最少的数据（独立的），满足

1. 对于某一任意的时刻t_0，可以根据时刻t_0的状态（初始状态）及$t \geq t_0$时的输入波形唯一地确定$t \geq t_0$的任意一时刻的状态。
2. 根据 t 时刻的状态及 t 时刻的输入能够唯一地确定在 t 时刻的任一电路变量的值。

第一节：状态变量法的基本概念

二、状态变量法

2、状态变量（state variable）

- 能描述网络在任一瞬时状态的维数最少（即线性无关）的网络变量集合中的各变量称为网络的状态变量。
  - 状态变量是描述状态的变量。
  - 动态电路的状态变量是确定动态电路运动行为的最少一组变量。
  - 初始状态：初始时刻的状态变量，代表了电路在初始时刻$t \geq t_0$时的状态。
  - 状态向量：状态变量集合用矩阵列向量来表示。状态向量的一个分量就是状态变量。
  - 常选择的状态变量：独立的电容电压（或电荷）和独立的电感电流（或磁链）。

$$f_L(i,\psi,t)=0 \qquad \psi = Li$$

$$f_c(u,q,t)=0 \qquad q=cu \qquad u=\frac{1}{c}\int idt$$

第一节：状态变量法的基本概念

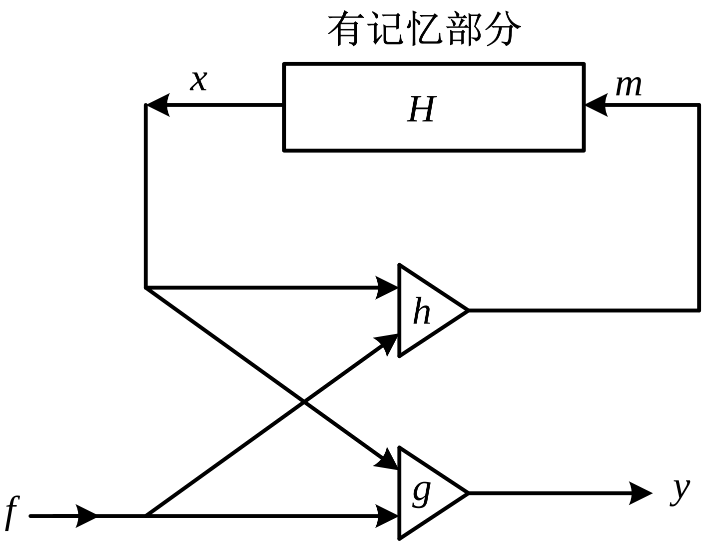
二、状态变量法

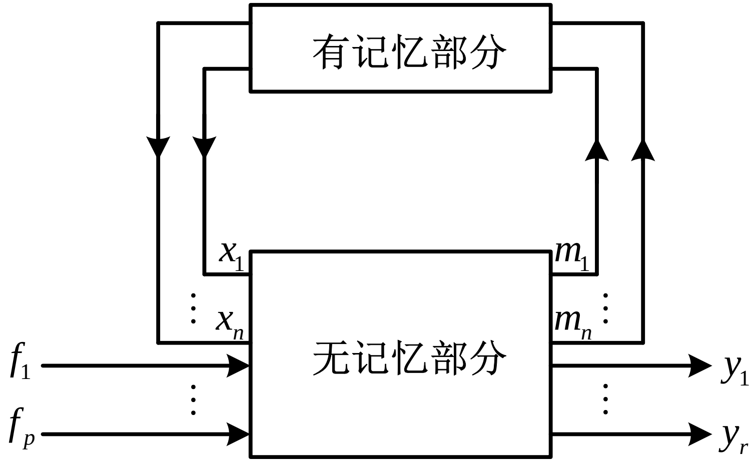
3、状态模型（state model）

- 由**有记忆部分**和**无记忆部分**组成。 m—状态修正量（state update）

$m=h(f, x)$ x—状态变量， f—输入变量

$y=g(f, x)$ 代数输出方程， y—输出变量





第一节：状态变量法的基本概念

二、状态变量法

- ✓ 一组表示状态变量与输入量之间关系的一阶微分方程称为状态方程。
- ✓ 每一个状态方程只含有一个状态变量对时间的一阶导数。（规范型状态方程）
- ✓ 一组表示输出变量与状态变量和输入变量之间关系的代数方程称为输出方程。
- ✓ 状态方程和输出方程组成网络的动态方程，既描述了网络的内部状态，又描述了网络输出，能够给网络以完全的描述，又称为状态变量模型或状态空间模型。

- 一般线性常态网络，其范式状态方程和输出方程的向量形式为:

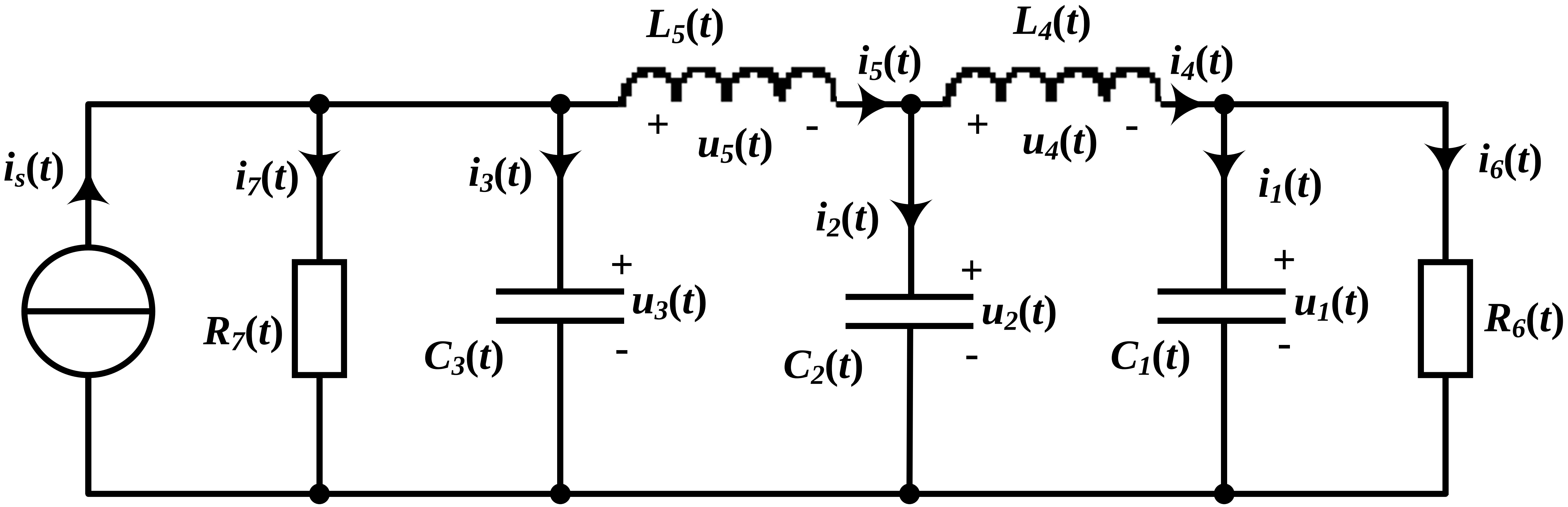
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{f}$$

第一节：状态变量法的基本概念

二、状态变量法

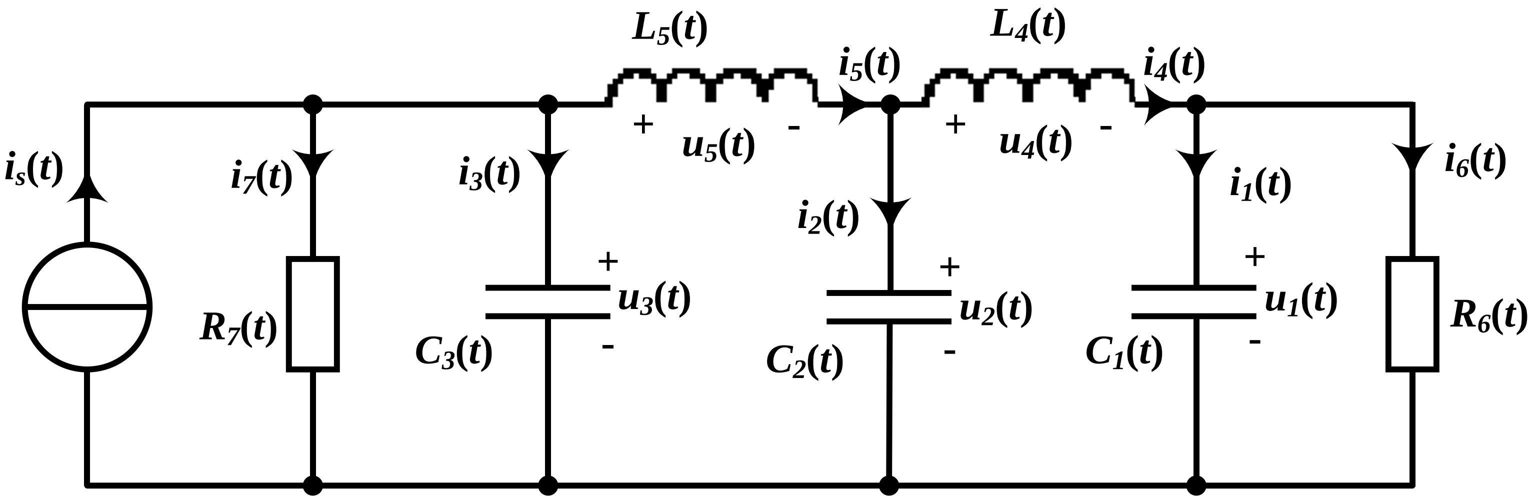
- 例4-1：列写图中所示线性时变网络的状态方程和以$u_4(t)$、 $u_5(t)$、 $i_6(t)$作为输出变量的输出方程。



第一节：状态变量法的基本概念

二、状态变量法

- **例4-1：列写图中所示线性时变网络的状态方程和以$u_4(t)$、$u_5(t)$、 $i_6(t)$作为输出变量的输出方程。**



- **列写状态方程：**

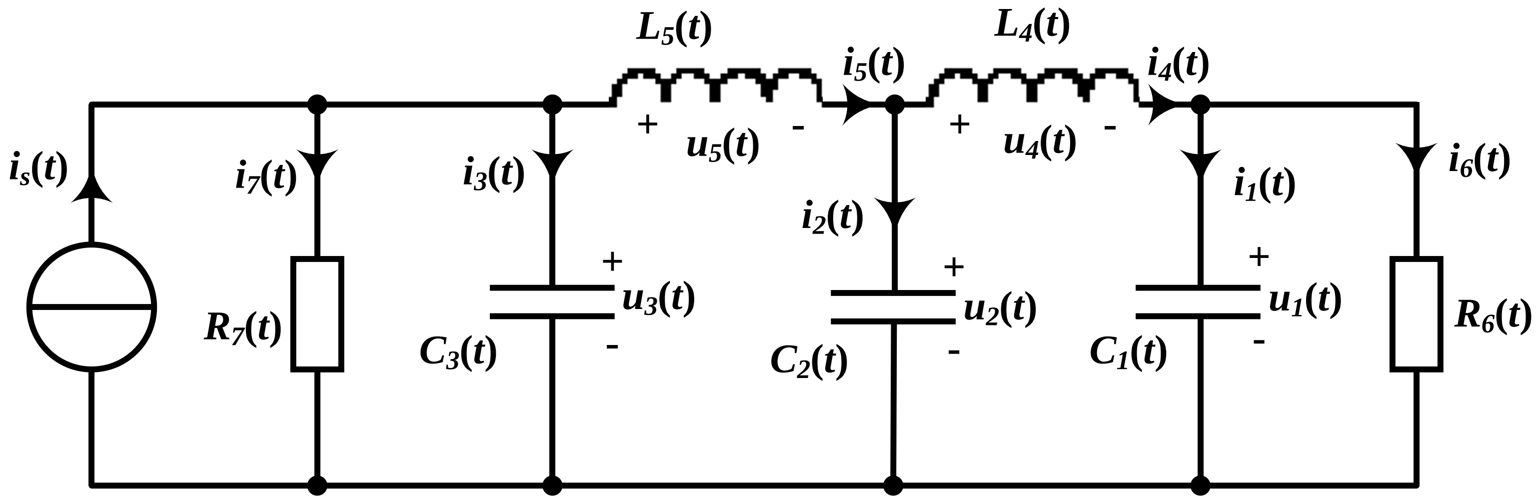
(1) 选取网络的状态变量。因为是线性时变网络，选取各电容电荷和各电感磁链为状态变量，即

$$x(t) = [q_1(t) \;\; q_2(t) \;\; q_3(t) \;\; \psi_4(t) \;\; \psi_5(t)]^{\mathrm{T}}$$

第一节：状态变量法的基本概念

二、状态变量法

- **例4-1：列写图中所示线性时变网络的状态方程和以$u_4(t)$、$u_5(t)$、$i_6(t)$作为输出变量的输出方程。**



- **列写状态方程：**

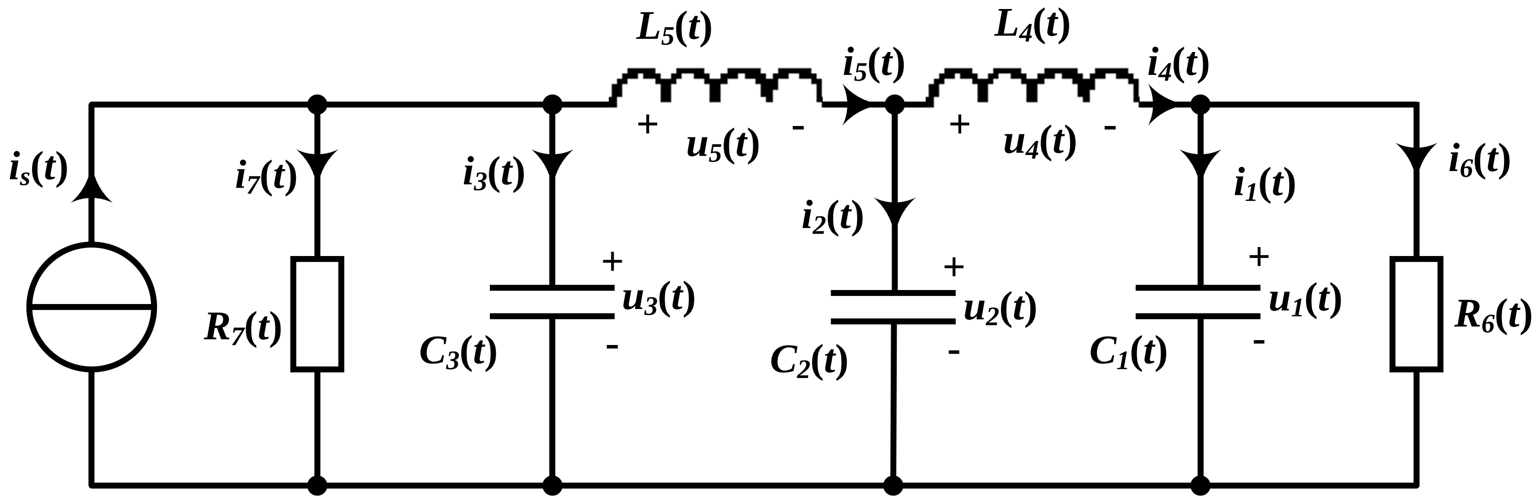
(2) 列写独立的KCL和KVL方程，使各方程左端分别为一个状态修正量，即

$$i_1(t) = i_4(t) - i_6(t)$$
$$i_2(t) = i_5(t) - i_4(t)$$
$$i_3(t) = i_s(t) - i_5(t) - i_7(t)$$
$$u_4(t) = u_2(t) - u_1(t)$$
$$u_5(t) = u_3(t) - u_2(t)$$

第一节：状态变量法的基本概念

二、状态变量法

- 例4-1：列写图中所示线性时变网络的状态方程和以$u_4(t)$、$u_5(t)$、 $i_6(t)$作为输出变量的输出方程。



- 列写状态方程：

(3)用状态变量的一阶导数替换状态修正量，并代入各动态元件的元件特性，得

$$\dot{q}_1(t)=\frac{\psi_4(t)}{L_4(t)}-i_6(t)$$

$$\dot{q}_2(t)=\frac{\psi_5(t)}{L_5(t)}-\frac{\psi_4(t)}{L_4(t)}$$

$$\dot{q}_3(t)=i_s(t)-\frac{\psi_5(t)}{L_5(t)}-i_7(t)$$

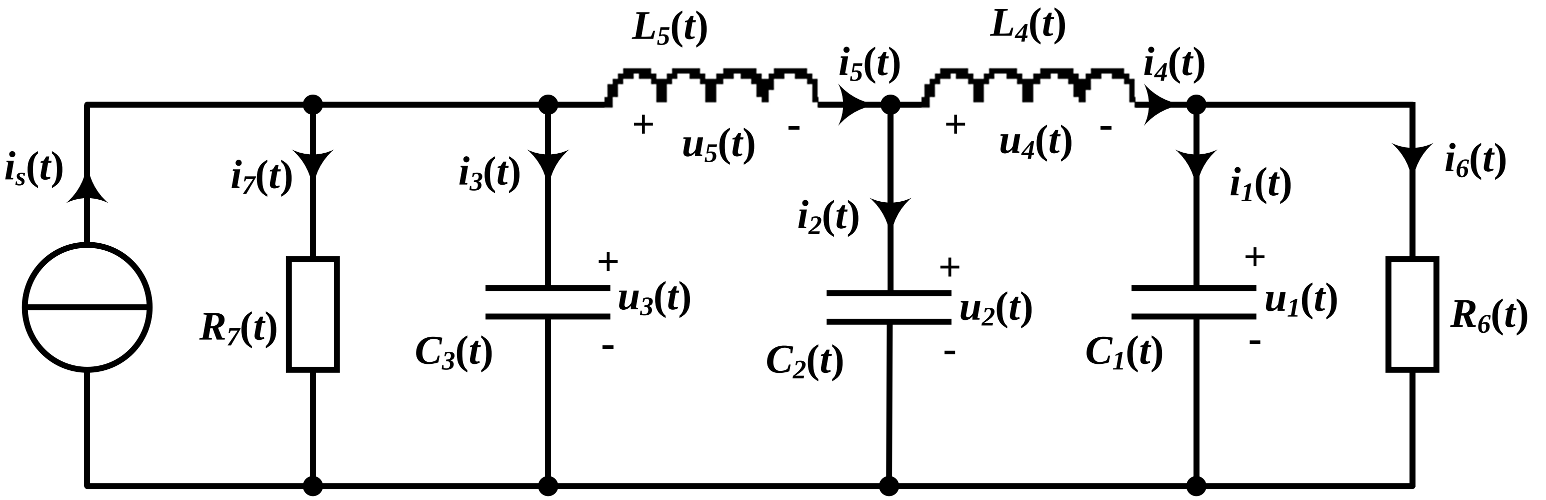
$$\dot{\psi}_4(t)=\frac{q_2(t)}{C_2(t)}-\frac{q_1(t)}{C_1(t)}$$

$$\dot{\psi}_5(t)=\frac{q_3(t)}{C_3(t)}-\frac{q_2(t)}{C_2(t)}$$

第一节：状态变量法的基本概念

二、状态变量法

- 例4-1：列写图中所示线性时变网络的状态方程和以$u_4(t)$、$u_5(t)$、$i_6(t)$作为输出变量的输出方程。



- 列写状态方程：

(4) 消去非状态变量$i_6(t)$和$i_7(t)$:

$$i_6(t)=\frac{q_1(t)}{R_6(t)C_1(t)}$$

$$i_7(t)=\frac{q_3(t)}{R_7(t)C_3(t)}$$

$$\dot{q}_1(t)=\frac{\psi_4(t)}{L_4(t)}-\boxed{i_6(t)}$$

$$\dot{q}_2(t)=\frac{\psi_5(t)}{L_5(t)}-\frac{\psi_4(t)}{L_4(t)}$$

$$\dot{q}_3(t)=i_s(t)-\frac{\psi_5(t)}{L_5(t)}-\boxed{i_7(t)}$$

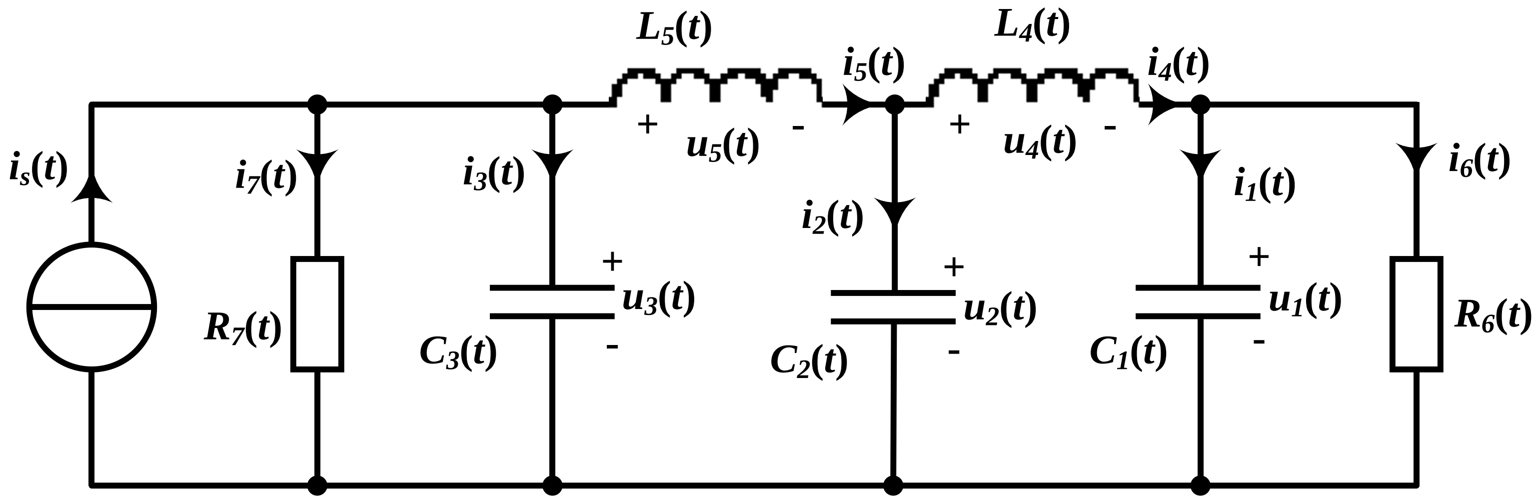
$$\dot{\psi}_4(t)=\frac{q_2(t)}{C_2(t)}-\frac{q_1(t)}{C_1(t)}$$

$$\dot{\psi}_5(t)=\frac{q_3(t)}{C_3(t)}-\frac{q_2(t)}{C_2(t)}$$

第一节：状态变量法的基本概念

二、状态变量法

- **例4-1：列写图中所示线性时变网络的状态方程和以$u_4(t)$、$u_5(t)$、 $i_6(t)$作为输出变量的输出方程。**



- **列写状态方程：**

(5) 将$i_6(t)$和$i_7(t)$代入第(3)步方程中，经整理后得状态方程为

$$\dot{q}_1(t) = -\frac{q_1(t)}{R_6(t)C_1(t)} + \frac{\psi_4(t)}{L_4(t)}$$

$$\dot{q}_2(t) = -\frac{\psi_4(t)}{L_4(t)} + \frac{\psi_5(t)}{L_5(t)}$$

$$\dot{q}_3(t) = -\frac{q_3(t)}{R_7(t)C_3(t)} - \frac{\psi_5(t)}{L_5(t)} + i_S(t)$$

$$\dot{\psi}_4(t) = -\frac{q_1(t)}{C_1(t)} + \frac{q_2(t)}{C_2(t)}$$

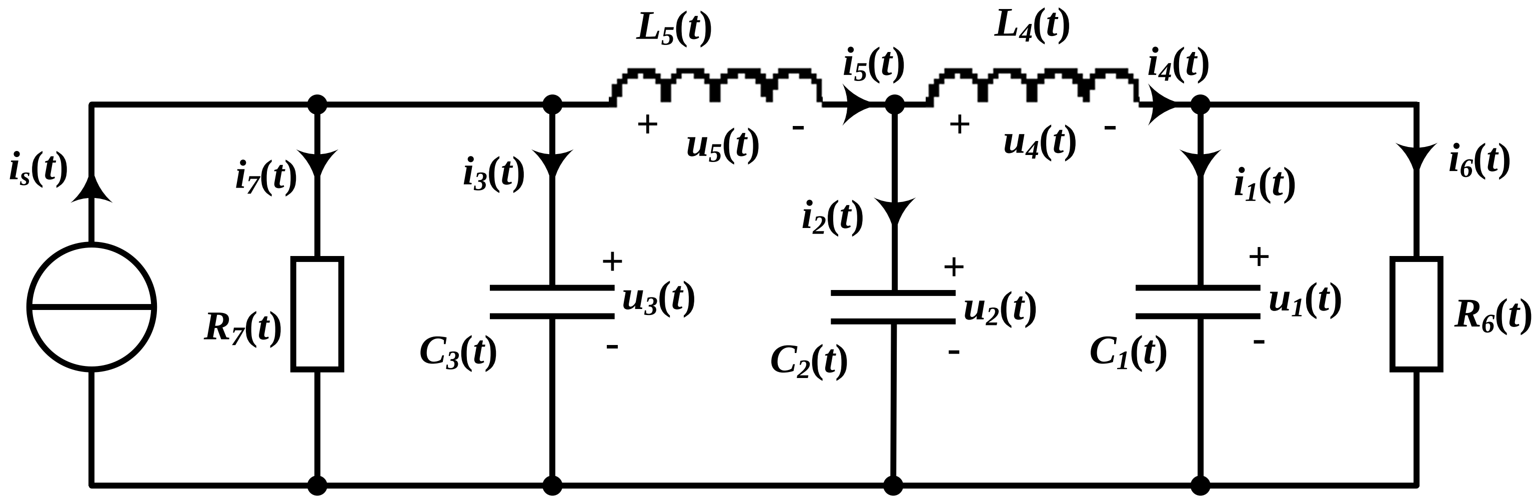
$$\dot{\psi}_5(t) = -\frac{q_2(t)}{C_2(t)} + \frac{q_3(t)}{C_3(t)}$$

第一节：状态变量法的基本概念

华南理工大学 South China University of Technology

二、状态变量法

- 例4-1：列写图中所示线性时变网络的状态方程和以$u_4(t)$、$u_5(t)$、 $i_6(t)$作为输出变量的输出方程。



- 列写输出方程：

$$u_4(t)=\frac{q_2(t)}{C_2(t)}-\frac{q_1(t)}{C_1(t)}$$

$$u_5(t)=\frac{q_3(t)}{C_3(t)}-\frac{q_2(t)}{C_2(t)}$$

$$i_6(t)=\frac{q_1(t)}{R_6(t)C_1(t)}$$

- 状态变量与修正量的关系：

$$q_1(t)=q_1(t_0)+\int_{t_0}^{t} i_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$q_2(t)=q_2(t_0)+\int_{t_0}^{t} i_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$q_3(t)t=q_3(t_0)+\int_{t_0}^{t} i_3(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\psi_4(t)=\psi_4(t_0)+\int_{t_0}^{t} u_4(\tau)d\tau$$

$$\psi_5(t)=\psi_5(t_0)+\int_{t_0}^{t} u_5(\tau)\mathrm{d}\tau$$

第一节：状态变量法的基本概念

三、状态空间描述的特征

- 状态空间描述是对电路的一种完全描述：
  - ✓ 状态空间描述考虑了输入-状态-输出的关系，它是对电路结构特性的反映。
  - ✓ 输入-输出描述是对电路端口特性的反映。
  - ✓ 具有相同端口特性的电路可以具有不同的结构特性。
- 状态变量的选择不唯一：
  - ✓ 对于给定的电路，状态变量的选择并不唯一。
- 状态变量的增加不影响动态方程的复杂性。
  - ✓ 状态变量、输入及输出变量的数目增加不会增加动态方程在表达上的复杂性。

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

一、 网络复杂性的阶数

- 网络状态变量的总数称为**网络复杂性的阶数**（order of complexity），又称**网络的阶数**。
- 网络复杂性的阶数又等于网络中可指定的**独立的初始条件**的个数（即独立完备的状态变量数目）。

✓ 一组能够描述网络动态特性的独立且充分的**状态变量**的个数；

✓ 能够完全确定网络动态响应的一组**独立初始条件**的个数；

✓ 能够完全描述网络动态响应的一组恰当的**一阶微分方程**的个数。

✓ **纯电容回路**：仅由电容元件或仅由电容元件和独立电压源构成的回路。

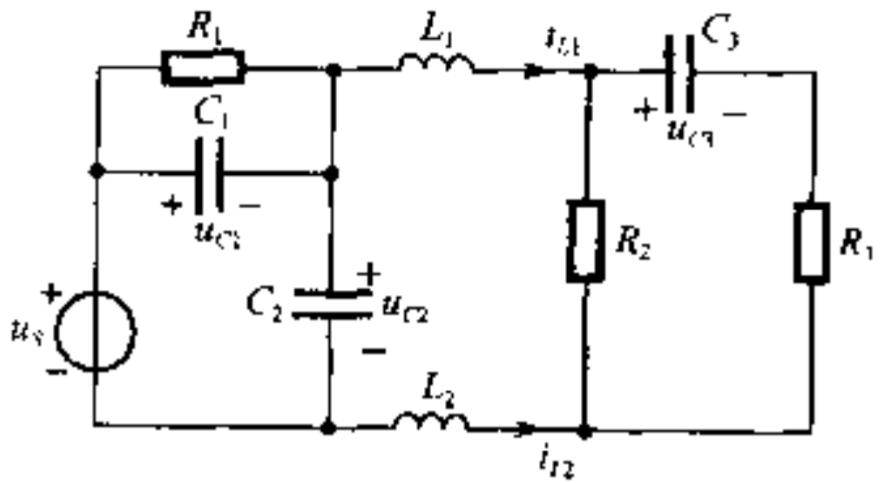
✓ **纯电感割集**：仅由电感元件或仅由电感元件和独立电流源构成的割集。

- **常态网络**：无纯电容（独立电压源）回路和无纯电感（含独立电流源）割集的网络。
- **非常态网络**：含有纯电容或纯电感割集（或两者兼有）的网络。

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

一、 网络复杂性的阶数

- ✓ 不含受控源的非常态网络中，对每一个纯电容回路，根据KVL，该回路各电容电压之间存在一个线性约束关系，使该回路中独立的电容电压数比电容数少1；
- ✓ 对每一个纯电感割集，根据KCL，该回路各电感电流之间存在一个线性约束关系，使该回路中独立的电感电流数比电感数少1；

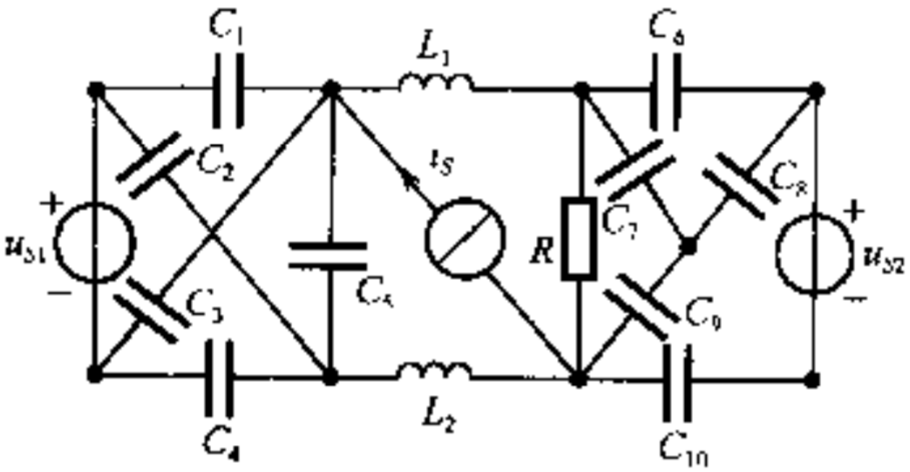


- ■ 在网络中（不含受控源的常态网络的复杂性阶数）=（网络中储能元件的总数）；
- ■ （非常态网络的阶数）=（网络中储能元件的总数） -（独立纯电容回路数和独立的纯电感割集数）。
- ✓ N_c：由电容和电压源构成的子网络（的独立回路数）。
- ✓ N_L：由电感元件和电流源构成的子网络（的基本割集数）。

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

一、网络复杂性的阶数

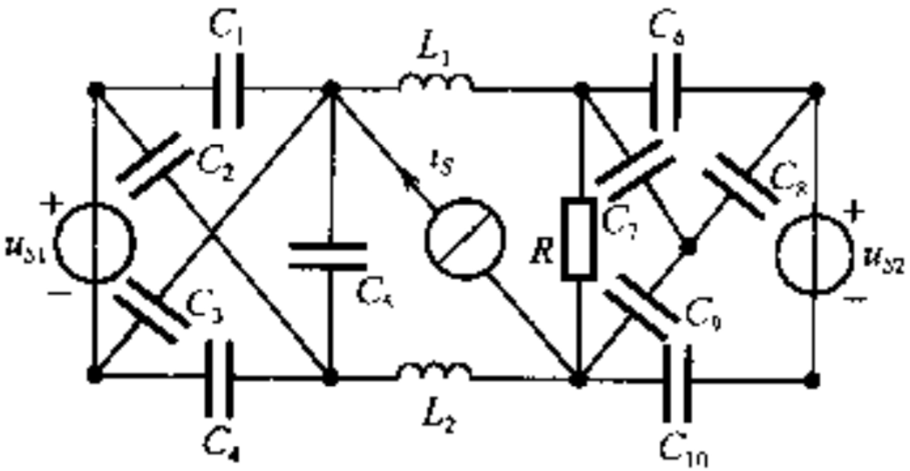
- 例4-2：确定图中非常态网络的阶数。



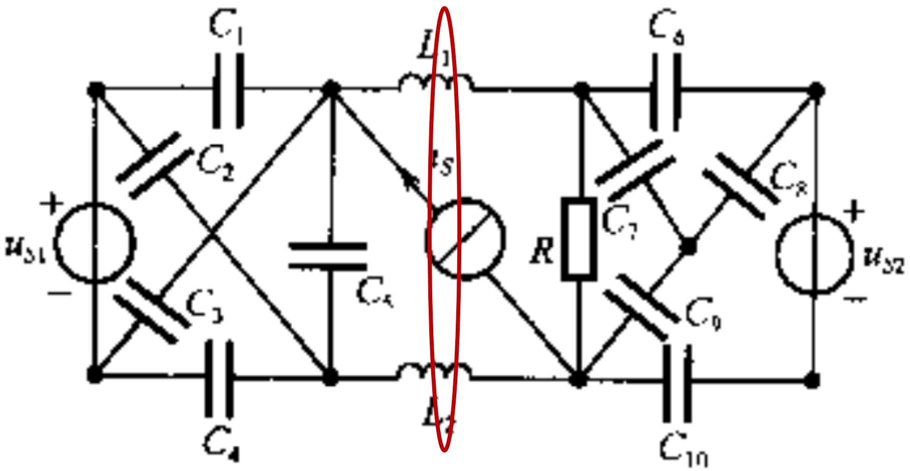
第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

一、 网络复杂性的阶数

- 例4-2：确定图中非常态网络的阶数。



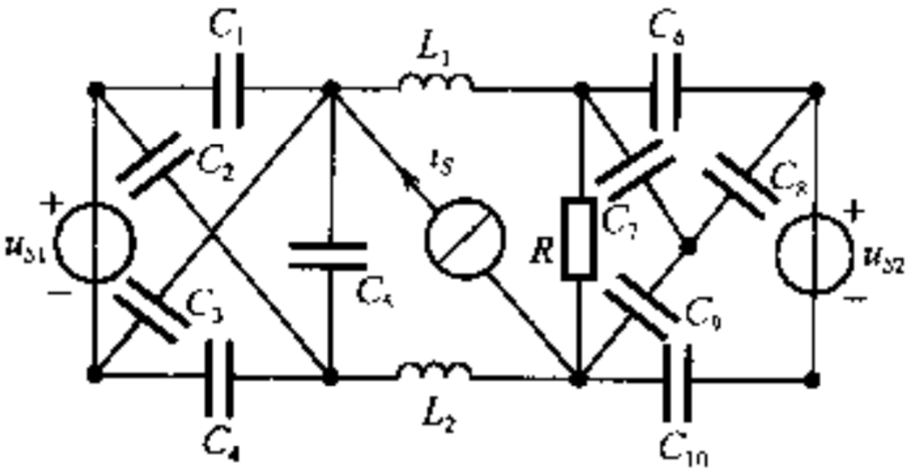
纯电感割集只有一个：



第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

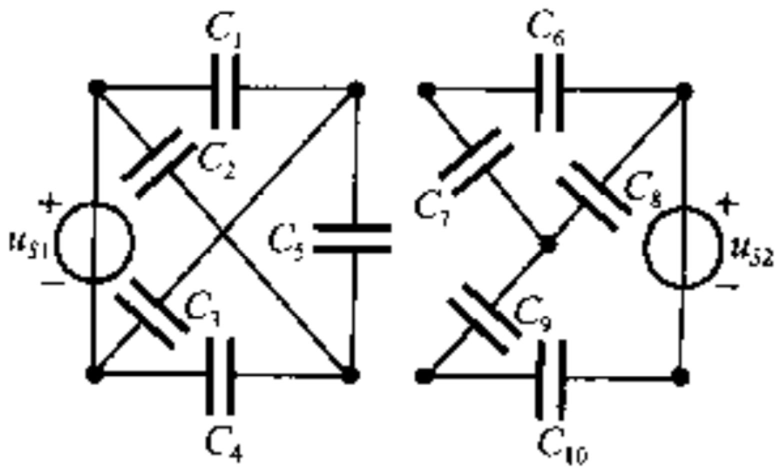
一、网络复杂性的阶数

- 例4-2：确定图中非常态网络的阶数。



独立的纯电容回路：

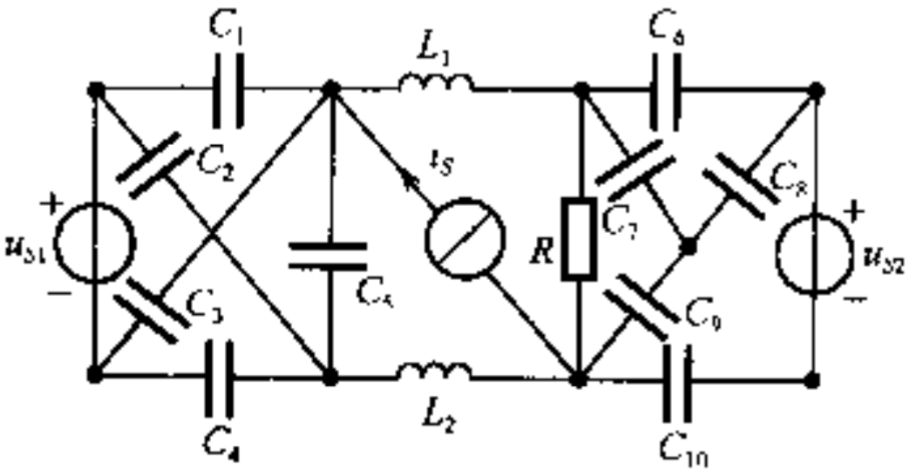
- 将网络中的所有电阻、电感、电流源断开，得到一个仅由电容和电压源构成的子网络N_c。
- 独立的纯电容回路个数等于N_c中的独立回路数。



第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

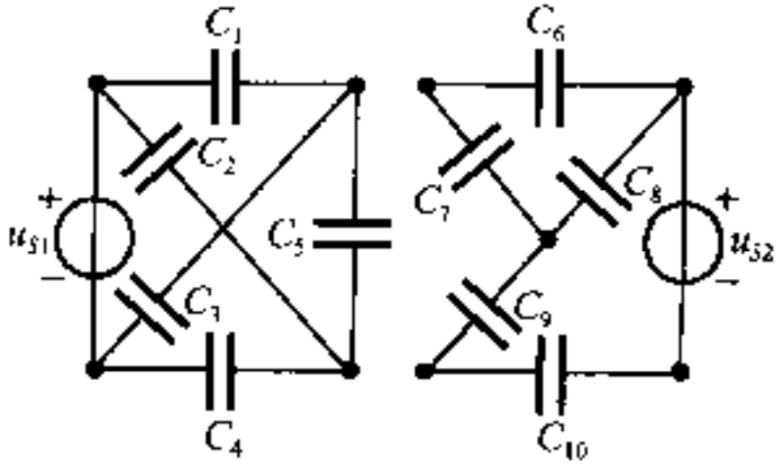
一、网络复杂性的阶数

- 例4-2：确定图中非常态网络的阶数。



独立的纯电容回路：

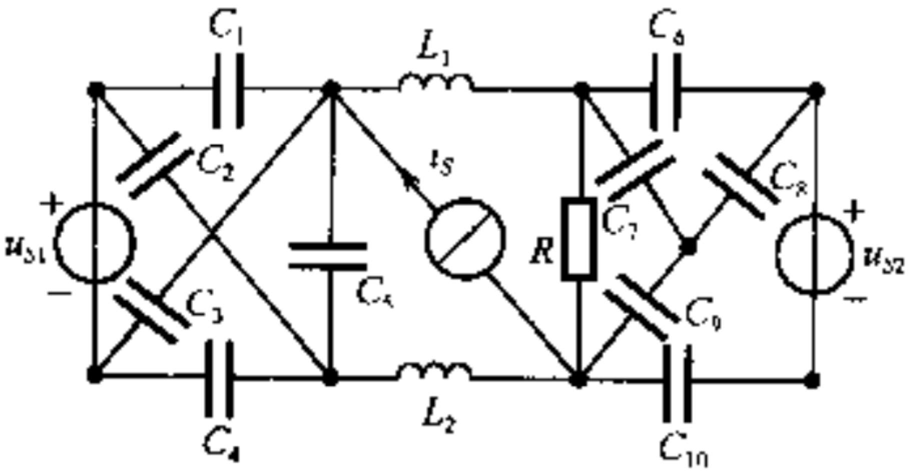
- N_c中的独立回路数等于3+2=5（9个节点12条支路，12-(9-2)=5）
- 图中的非常态网络含有12个储能元件，则其阶数等于12-(5+1)=6



第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

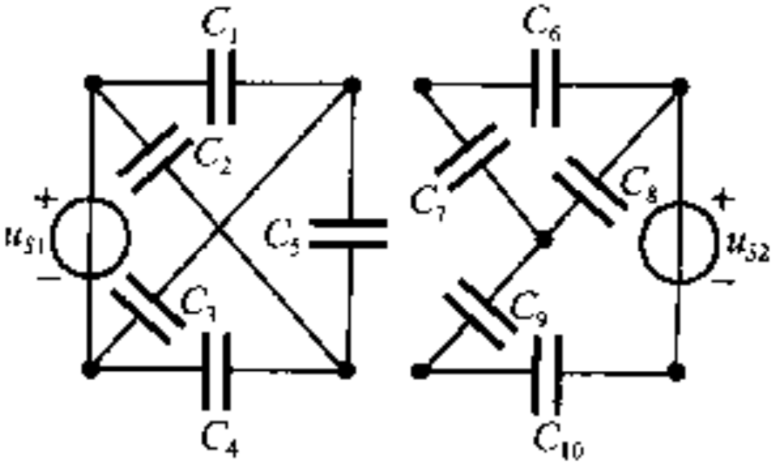
一、网络复杂性的阶数

- **例4-2：确定图中非常态网络的阶数。**



独立的纯电容回路：

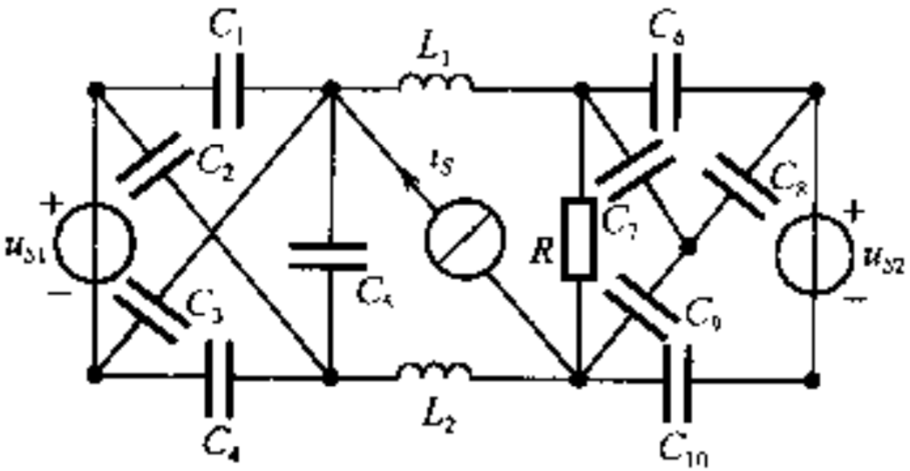
- **将网络中的所有电阻、电感、电流源断开，得到一个仅由电容和电压源构成的子网络N_c。**
- **独立的纯电容回路个数等于N_c中的独立回路数。**



第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

一、网络复杂性的阶数

- 例4-2：确定图中非常态网络的阶数。



独立的纯电容回路：

- 将网络中的所有电阻、电感、电流源断开，得到一个仅由电容和电压源构成的子网络N_c。
- 独立的纯电容回路个数等于N_c中的独立回路数。

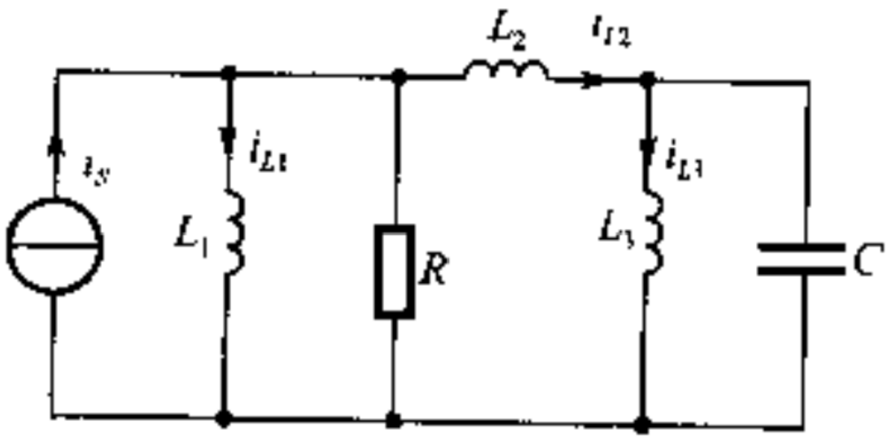
独立的纯电感割集：

- 将网络中的所有电阻、电容、电压源短路，得到一个仅由电感和电流源构成的子网络N_L。
- 独立的纯电感割集个数等于N_L中的独立割集数。

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

一、 网络复杂性的阶数

- **说明:**
- ✓ 纯电容割集和纯电感回路不会改变网络的阶数.



例：电路如图所示，

列L_1、 L_2、 L_3构成的纯电感回路的KVL：

$$L_2\frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}+L_3\frac{\mathrm{d}i_{L3}}{\mathrm{d}t}-L_1\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_2i_{L2}+L_3i_{L3}-L_1i_{L1})=0$$

从0_+积分t，得：

$$L_2i_{L2}(t)+L_3i_{L3}(t)-L_1i_{L1}(t)=L_2i_{L2}(0_+)+L_3i_{L3}(0_+)-L_1i_{L1}(0_+)=k$$

根据磁通守恒，有：

$$\sum Li(0_+)=\sum Li(0\_)$$

所以

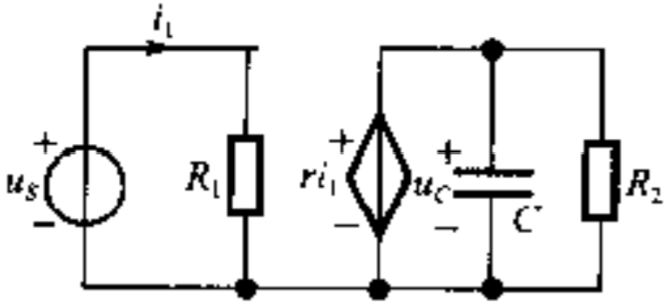
$$k=L_2i_{L2}(0\_)+L_3i_{L3}(0\_)-L_1i_{L1}(0\_)$$

纯电容割集和纯电感回路不会改变网络的阶数。

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

一、网络复杂性的阶数

- **说明:**
- ✓ 纯电容割集和纯电感回路不会改变网络的阶数.
- ✓ 网络的非 0 值自然频率的数目等于网络复杂性的阶数减去独立的纯电感回路数和独立的纯电容割集数.
- ✓ 当网络中存在受控源时，网络的阶数难于确定:



$$u_C = ri_1 = r\frac{u_S}{R_1}$$

受控源降低了网络的阶数。

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

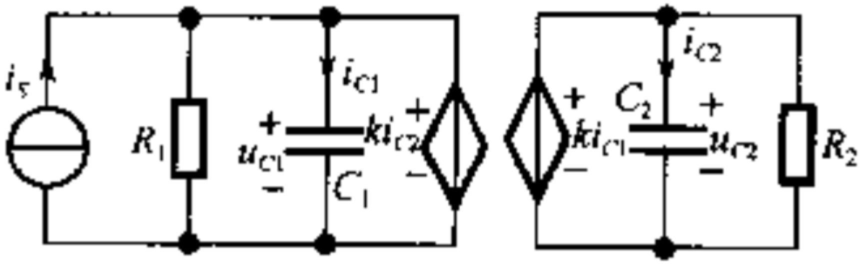
一、网络复杂性的阶数

■ **说明:**

✓ **纯电容割集和纯电感回路不会改变网络的阶数.**

✓ **网络的非 0 值自然频率的数目等于网络复杂性的阶数减去独立的纯电感回路数和独立的纯电容割集数.**

✓ **当网络中存在受控源时，网络的阶数难于确定:**



$$u_{C1} = ki_{C2} = kC_2 \frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{C2} = ki_{C1} = kC_1 \frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}$$

写出状态方程:

$$\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{kC_1} u_{C2}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{kC_2} u_{C_1}$$

受控源对网络的阶数没有影响!

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

一、网络复杂性的阶数

■ 说明:

✓ 纯电容割集和纯电感回路不会改变网络的阶数.

✓ 网络的非 0 值自然频率的数目等于网络复杂性的阶数减去独立的纯电感回路数和独立的纯电容割集数.

✓ 当网络中存在受控源时，网络的阶数难于确定.

■ 结论:

✓ 一般而言，若网络中储能元件的总数为 N_{LC}，独立纯电容回路数为 N_c，独立纯电感数割集数为 N_L，则网络阶数 N 满足。

$$N_{LC} - N_c - N_L \geq N \geq 0$$

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

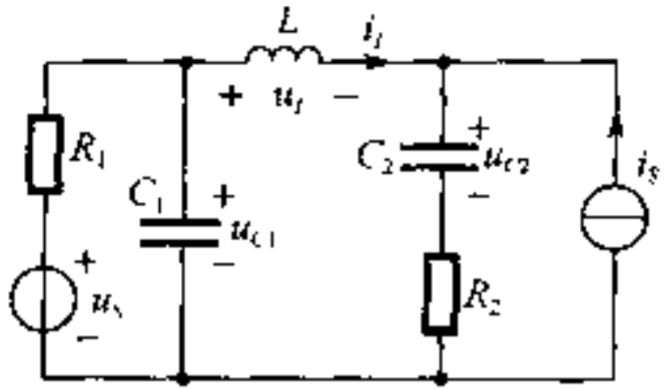
二、状态变量的选取（非唯一）

- ✓ 对于**线性时不变网络**，常选一组独立的电容电压和电感电流作为状态变量（$i_L(t)$，$u_C(t)$）。
- ✓ 对于**线性时变网络**宜选取一组独立的电容电荷和电感磁链作为状态变量（$q(t)$，$\psi(t)$）。

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

二、状态变量的选取（非唯一）

- ✓ 在某些情况下，网络中的某些变量（支路电流、节点电压、割集电压、回路电流及它们的导数等）与一组独立的（ $i_L(t)$，$u_C(t)$ ）或（ $q(t)$，$\psi(t)$ ）之间存在非奇异的线性变换关系，则这些变量也可选作状态变量。



可以选为（ $u_{C1}(t)$，$u_{C2}(t)$，$u_L(t)$ ）状态变量，则网络的状态方程为：

$$\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}=-\frac{R_1+R_2}{C_1R_1R_2}u_{C1}+\frac{1}{C_1R_2}u_{C2}+\frac{1}{C_1R_2}u_L+\frac{1}{C_1R_1}u_S+\frac{1}{C_1}i_S$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{C_2R_2}u_{C1}-\frac{1}{C_2R_2}u_{C2}-\frac{1}{C_2R_2}u_L$$

$$\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}=-\frac{-R_1(C_1+C_2)+C_2R_2}{C_1C_2R_1R_2}u_{C1}+\frac{C_1+C_2}{C_1C_2R_2}u_{C2}$$

$$+\frac{L(C_1+C_2)-C_1C_2R_2^2}{LC_1C_2R_2}u_L+\frac{1}{C_1R_1}u_S+\frac{1}{C_1}i_S-R_2\dot{i}_S$$

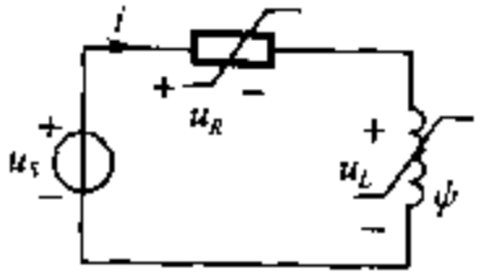
因为有

$$u_L=u_{C1}-u_{C2}-R_2(i_L+i_S)$$

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

二、状态变量的选取（非唯一）

✓ 对于**非线性网络**，不一定能建立起状态方程，因此非线性网络中状态变量的选取主要考虑能否建立起状态方程。



根据KVL，有 $u_R + u_L = u_S$

代入元件特性，得

$$u_R + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = u_S$$

$$u_R + f_2'(i)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u_S$$

设非线性电阻的元件特性为

$$i = g_1(u_R)$$

非线性电感的元件特性为

$$\psi = f_2(i)$$

由于电阻元件为压控的，无法用i置换u_R，所以不能列出状态方程。如果该电阻元件是流控的，即$u_R = f_1(i)$，则可以写出网络的状态方程

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{f_2'(i)}[u_S - f_1(i)]$$

第二节：网络的复杂性阶数和状态变量的选取

二、状态变量的选取（非唯一）

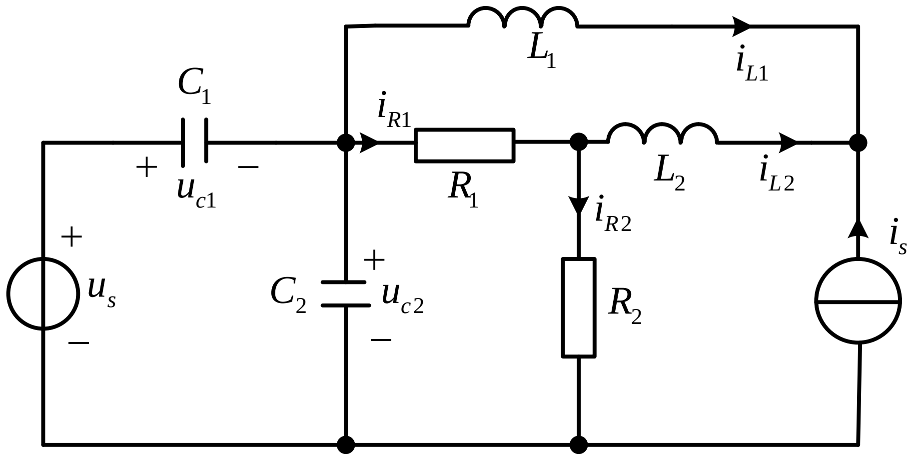
- ✓ 对于**线性时不变网络**，常选一组独立的电容电压和电感电流作为状态变量（$i_L(t)$，$u_C(t)$）。
- ✓ 对于**线性时变网络**宜选取一组独立的电容电荷和电感磁链作为状态变量（$q(t)$，$\psi(t)$）。
- ✓ 在某些情况下，网络中的某些变量（支路电流、节点电压、割集电压、回路电流及它们的导数等）与一组独立的（ $i_L(t)$，$u_C(t)$ ）或（ $q(t)$，$\psi(t)$ ）之间存在非奇异的线性变换关系，则这些变量也可选作状态变量。
- ✓ 对于**非线性网络**，不一定能建立起状态方程，因此非线性网络中状态变量的选取主要考虑能否建立起状态方程。

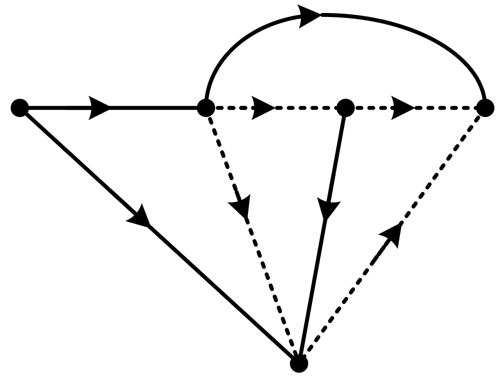
第三节：线性非常态网络的状态方程

一、规范树

- 选一种树，（每个网络元件看做一条支路）使其包含网络中的全部电压源，尽可能多的电容，尽可能少的电感和必要的电阻。但不包含任何电流源，这样的树称为**规范树**。

✓ 规范树中所有树支电容电压和连支电感电流都是线性独立的，可构成一组状态变量。





第三节：线性非常态网络的状态方程

二、线性非常态网络的状态方程建立步骤

1、选取一个规范树。

2、选取状态变量，以规范树中的树支电容电压（u_{C1}）和连支电感电流（i_{L2}）作为网络的状态变量。

3、建立电容树支所属基本割集的 KCL 方程和电感连支所属基本回路的 KVL 方程。

4、将上述方程中非状态变量及其一阶导数用状态变量、输入量和它们的一阶导数表示（电容连支所属基本回路方程和电感树支所属基本割集方程，电阻树支所属基本割集方程和电阻连支所属基本回路方程）。

5、将 4 中各式代入 3 中方程，消去非状态变量及其一阶导数，经整理后写成矩阵形式。

- 线性非常态网络的范式方程形式为：

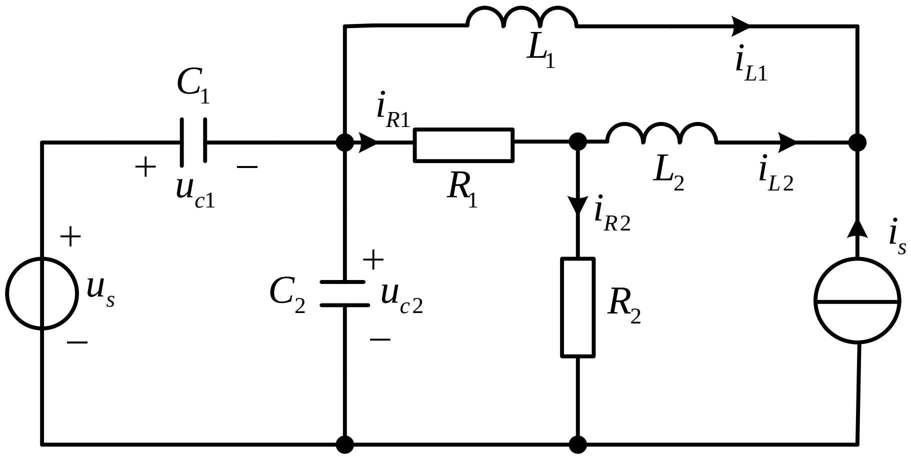
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{f} + \mathbf{B}_2\dot{\mathbf{f}} & \text{状态方程} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_1\mathbf{f} + \mathbf{D}_2\dot{\mathbf{f}} & \text{输出方程} \end{cases}$$

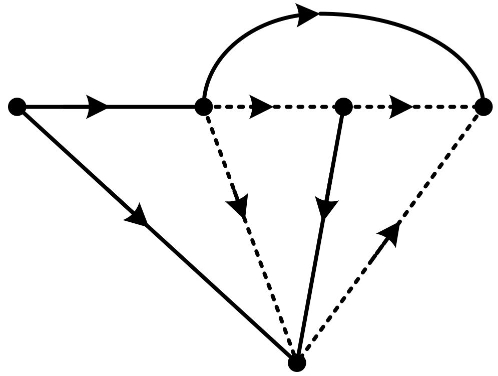
第三节：线性非常态网络的状态方程

一、规范树

1、选取一个规范树。

2、选取状态变量，以规范树中的树支电容电压（u_{C1}）和连支电感电流（i_{L2}）作为网络的状态变量。



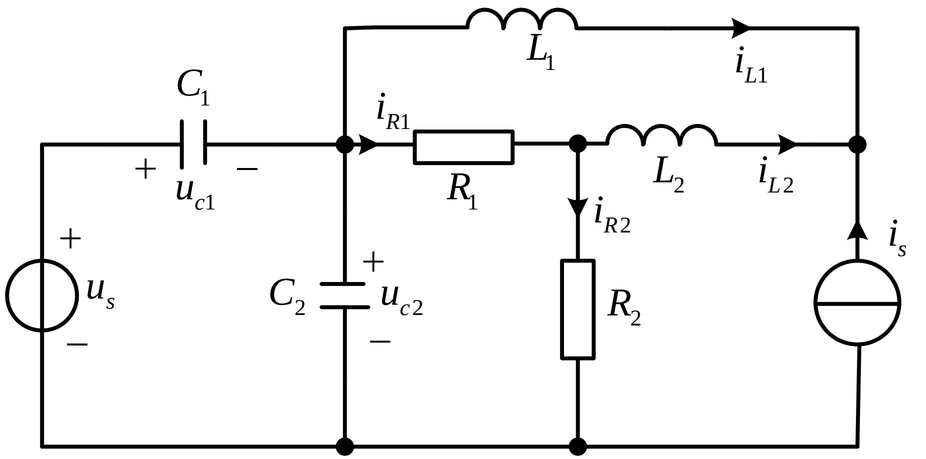


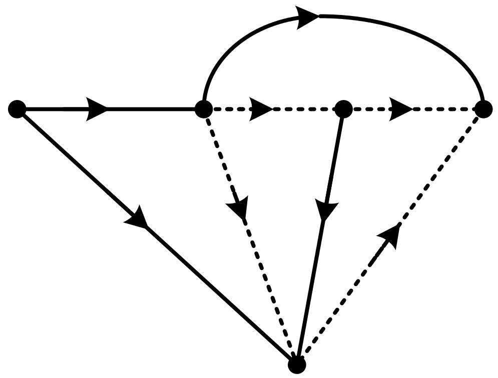
$$x = [u_{C1}, i_{L2}]^T$$

第三节：线性非常态网络的状态方程

一、规范树

3、建立电容树支所属基本割集的 KCL 方程和电感连支所属基本回路的 KVL 方程。





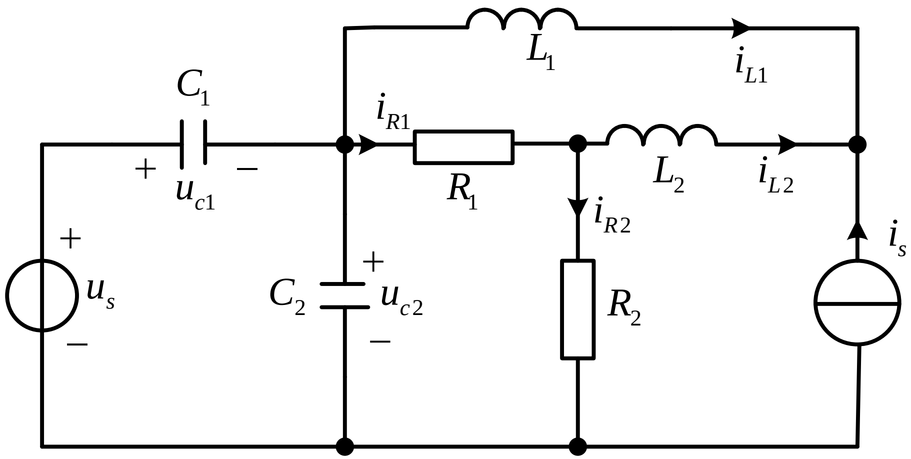
$$C_1\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}=C_2\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t}+i_{R_1}-i_{L_2}-i_S$$

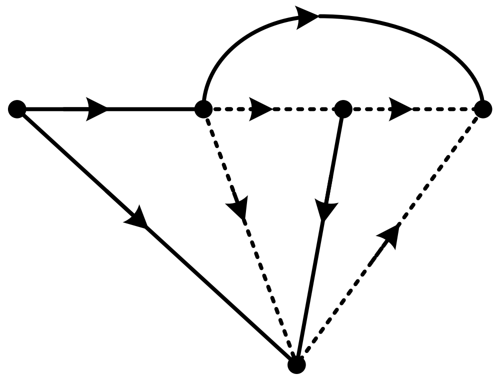
$$L_2\frac{\mathrm{d}i_{L_2}}{\mathrm{d}t}=L_1\frac{\mathrm{d}i_{L_1}}{\mathrm{d}t}+u_{C_1}-u_S+R_2 i_{R_2}$$

第三节：线性非常态网络的状态方程

一、规范树

4、将上述方程中非状态变量及其一阶导数用状态变量、输入量和它们的一阶导数表示（电容连支所属基本回路方程和电感树支所属基本割集方程，电阻树支所属基本割集方程和电阻连支所属基本回路方程）。





$$i_{R_1} = \frac{u_S - u_{C_1} + R_2 i_{L_2}}{R_1 + R_2}$$

$$i_{R_2} = \frac{u_S - u_{C_1} - R_1 i_{L_2}}{R_1 + R_2}$$

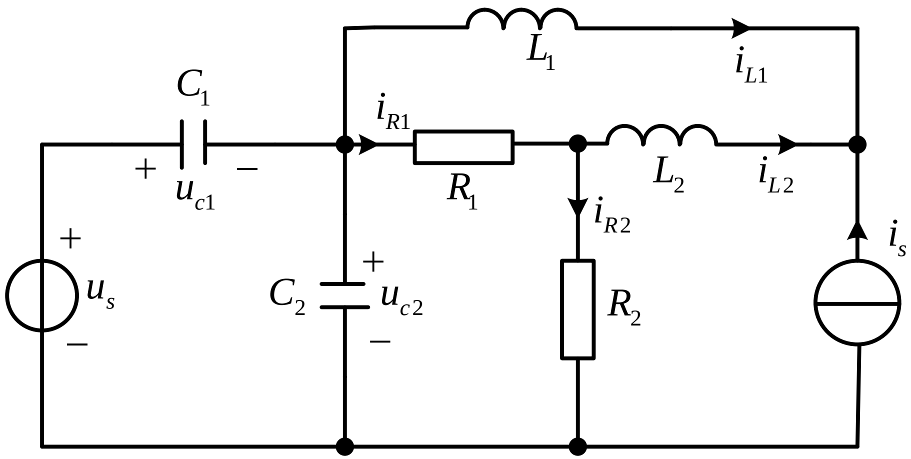
$$\dot{u}_{C_2} = \dot{u}_S - \dot{u}_{C_1}$$

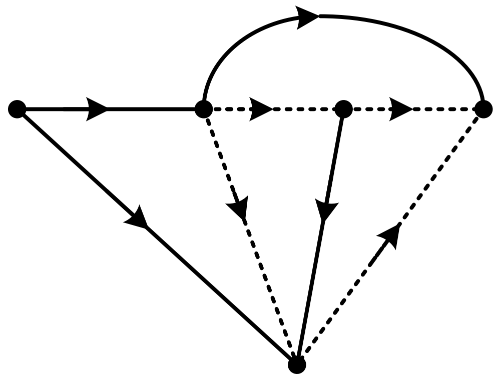
$$\dot{i}_{L_1} = -\dot{i}_{L_2} - \dot{i}_S$$

第三节：线性非常态网络的状态方程

一、规范树

5、将 4 中各式代入 3 中方程，消去非状态变量及其一阶导数，经整理后写成矩阵形式。





$$C_1\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}=C_2\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t}+i_{R_1}-i_{L_2}-i_S$$

$$L_2\frac{\mathrm{d}i_{L_2}}{\mathrm{d}t}=L_1\frac{\mathrm{d}i_{L_1}}{\mathrm{d}t}+u_{C_1}-u_S+R_2 i_{R_2}$$

$$i_{R_1}=\frac{u_S-u_{C_1}+R_2 i_{L_2}}{R_1+R_2}$$

$$i_{R_2}=\frac{u_S-u_{C_1}-R_1 i_{L_2}}{R_1+R_2}$$

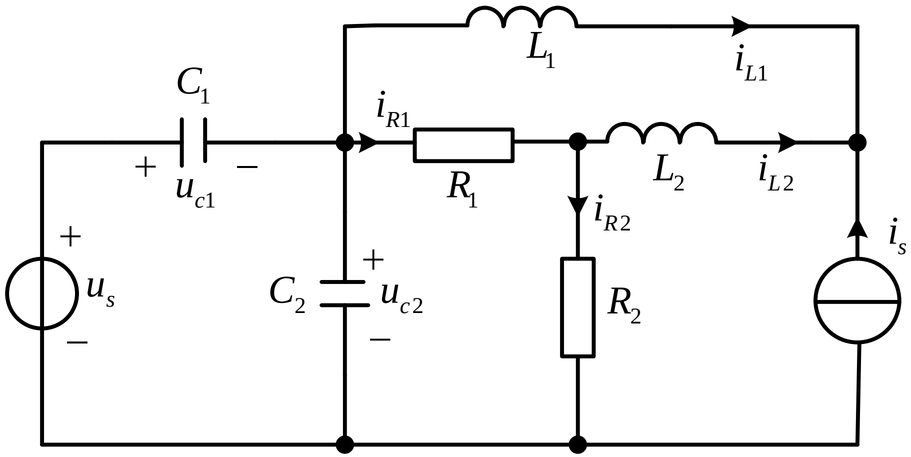
$$\dot{u}_{C_2}=\dot{u}_S-\dot{u}_{C_1}$$

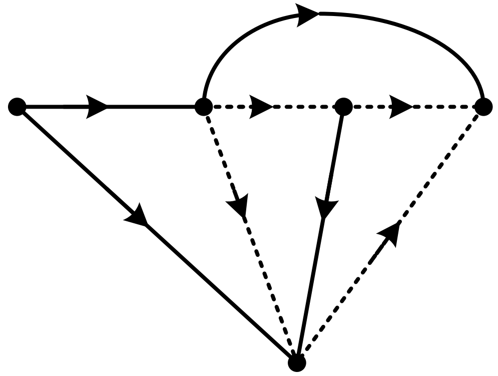
$$\dot{i}_{L_1}=-\dot{i}_{L_2}-\dot{i}_S$$

第三节：线性非常态网络的状态方程

一、规范树

5、将 4 中各式代入 3 中方程，消去非状态变量及其一阶导数，经整理后写成矩阵形式。



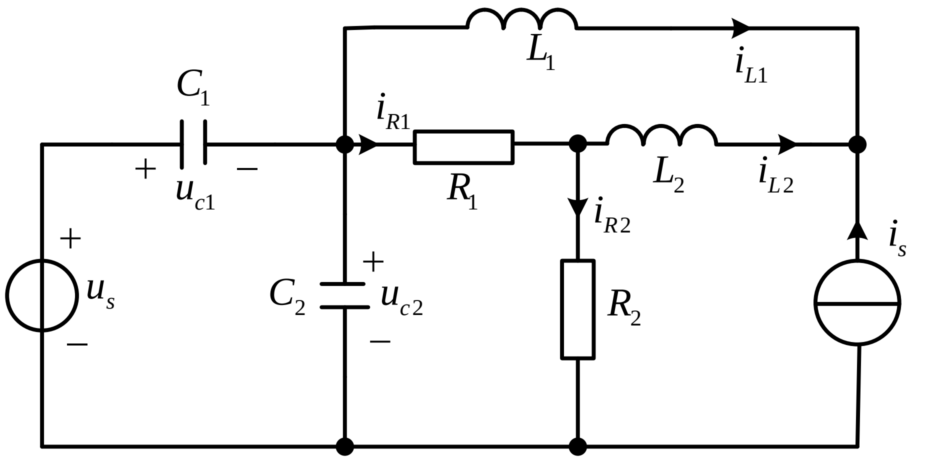


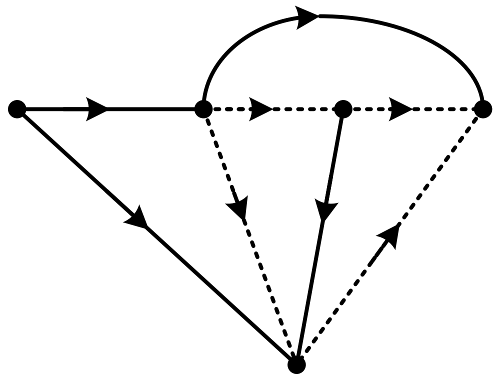
$$
\begin{bmatrix} \dot{u}_{C_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{(C_1+C_2)(R_1+R_2)} & \dfrac{-R_1}{(C_1+C_2)(R_1+R_2)} \\ \dfrac{R_1}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)} & \dfrac{-R_1R_2}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(C_1+C_2)(R_1+R_2)} & \dfrac{-1}{C_1+C_2} \\ \dfrac{-R_1}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{C_2}{C_1+C_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-L_1}{L_1+L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_S \\ \dot{i}_S \end{bmatrix}
$$

第三节：线性非常态网络的状态方程

一、规范树

5、将 4 中各式代入 3 中方程，消去非状态变量及其一阶导数，经整理后写成矩阵形式。





如果以i_{R1}、i_{R2}、 u_{L1}和u_{C2}作为网络的输出变量，则由图4-10(a)可得

$$i_{R_1}=\frac{-1}{R_1+R_2}u_{C_1}+\frac{R_2}{R_1+R_2}i_{L_2}+\frac{1}{R_1+R_2}u_S$$

$$i_{R_2}=\frac{-1}{R_1+R_2}u_{C_1}-\frac{R_1}{R_1+R_2}i_{L_2}+\frac{1}{R_1+R_2}u_S$$

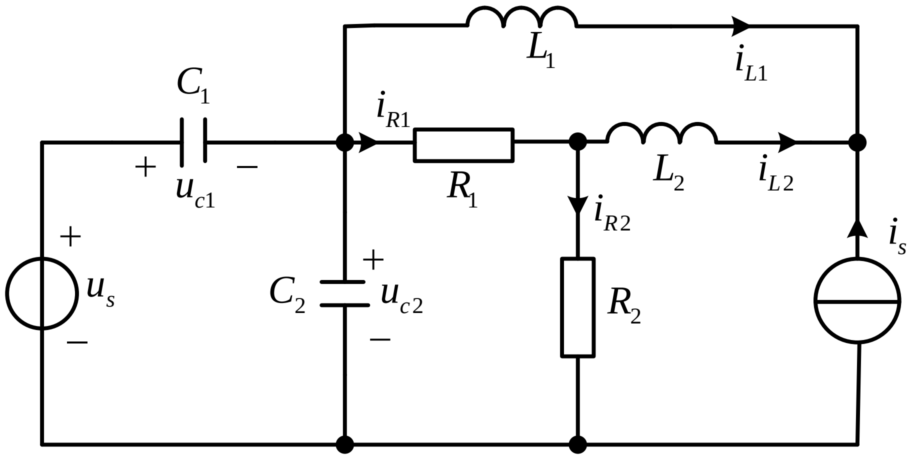
$$u_{L_1}=-\frac{R_1L_1}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)}u_{C_1}+\frac{R_1R_2L_1}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)}i_{L_2}+\frac{R_1L_1}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)}u_S-\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}\dot{i}_S$$

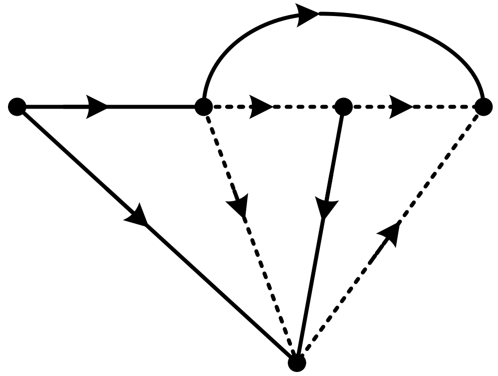
$$u_{C_2}=-u_{C_1}+u_S$$

第三节：线性非常态网络的状态方程

一、规范树

5、将 4 中各式代入 3 中方程，消去非状态变量及其一阶导数，经整理后写成矩阵形式。





写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} i_{R_1} \\ i_{R_2} \\ u_{L_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{R_1+R_2} & \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \\ \dfrac{-1}{R_1+R_2} & \dfrac{-R_1}{R_1+R_2} \\ \dfrac{-R_1L_1}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)} & \dfrac{R_1R_2L_1}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1+R_2} & 0 \\ \dfrac{1}{R_1+R_2} & 0 \\ \dfrac{R_1L_1}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{L_1L_2}{L_1+L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_S \\ \dot{i}_S \end{bmatrix}$$

第三节：线性非常态网络的状态方程

二、线性非常态网络的状态方程建立步骤

1、选取一个规范树。

2、选取状态变量，以规范树中的树支电容电压（u_{C1}）和连支电感电流（i_{L2}）作为网络的状态变量。

3、建立电容树支所属基本割集的 KCL 方程和电感连支所属基本回路的 KVL 方程。

4、将上述方程中非状态变量及其一阶导数用状态变量、输入量和它们的一阶导数表示（电容连支所属基本回路方程和电感树支所属基本割集方程，电阻树支所属基本割集方程和电阻连支所属基本回路方程）。

5、将 4 中各式代入 3 中方程，消去非状态变量及其一阶导数，经整理后写成矩阵形式。

- 线性非常态网络的范式方程形式为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{f} + \mathbf{B}_2\dot{\mathbf{f}} & \text{状态方程} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_1\mathbf{f} + \mathbf{D}_2\dot{\mathbf{f}} & \text{输出方程} \end{cases}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

一、基本子阵Q_l

- 对于含线性电阻、电感、电容和独立源的非常态网络，选取网络的一个**规范树**。按先树支后连支的顺序对各支路编号。对于树支再按电压源、电容、电导和倒电感的顺序编号，对于连支再按倒电容、电阻、电感和电流源的顺序编号。则支路电压向量和支路电流向量分块如下：

$$\mathbf{u}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_V & \mathbf{u}_C & \mathbf{u}_G & \mathbf{u}_\Gamma & \mathbf{u}_S & \mathbf{u}_R & \mathbf{u}_L & \mathbf{u}_I \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{i}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_V & \mathbf{i}_C & \mathbf{i}_G & \mathbf{i}_\Gamma & \mathbf{i}_S & \mathbf{i}_R & \mathbf{i}_L & \mathbf{i}_I \end{bmatrix}^T$$

- 包含全部电压源
- 尽可能多的电容
- 尽可能少的电感
- 不包含任何电流源

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

一、基本子阵$\mathbf{Q}_l$

■ 对于基本割集和基本回路分别按上述树支编号和连支编号的顺序编号，则基本割集矩阵 $\mathbf{Q}_f$ 中表示基本割集与连支关联关系的基本子阵 $\mathbf{Q}_l$ 可分块为：

$$\mathbf{Q}_l = -\mathbf{B}_t^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S & R & L & I \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{Q}_{VS} & \mathbf{Q}_{VR} & \mathbf{Q}_{VL} & \mathbf{Q}_{VI} \\ \mathbf{Q}_{CS} & \mathbf{Q}_{CR} & \mathbf{Q}_{CL} & \mathbf{Q}_{CI} \\ \mathbf{Q}_{GS} & \mathbf{Q}_{GR} & \mathbf{Q}_{GL} & \mathbf{Q}_{GI} \\ \mathbf{Q}_{\Gamma S} & \mathbf{Q}_{\Gamma R} & \mathbf{Q}_{\Gamma L} & \mathbf{Q}_{\Gamma I} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ V \\ C \\ G \\ \Gamma \end{array}$$

✓ 式中 $\mathbf{B}_t$ 为基本回路矩阵 $\mathbf{B}_f$ 中表示基本回路与树支关联关系的子阵。

➢ 由于电容尽可能划在树支，由电容连支构成的基本回路中必定不含电阻和电感。所以，$\mathbf{Q}_{GS}=0$，$\mathbf{Q}_{\Gamma S}=0$。

➢ 由于电感尽可能划在树余中，由电感树支决定的基本割集中必定不包含电阻和电容，故有：$\mathbf{Q}_{\Gamma R}=0$，$\mathbf{Q}_{\Gamma S}=0$。

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

一、基本子阵$\mathbf{Q}_l$

- 因此基本割集矩阵 $\mathbf{Q}_f$ 中表示基本割集与连支关联关系的基本子阵 $\mathbf{Q}_l$ 可分块为：

$$\mathbf{Q}_l=\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{VS} & \mathbf{Q}_{VR} & \mathbf{Q}_{VL} & \mathbf{Q}_{VI} \\ \mathbf{Q}_{CS} & \mathbf{Q}_{CR} & \mathbf{Q}_{CL} & \mathbf{Q}_{CI} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{GR} & \mathbf{Q}_{GL} & \mathbf{Q}_{GI} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\Gamma L} & \mathbf{Q}_{\Gamma I} \end{bmatrix}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

二、基本割集KCL方程和基本回路KVL方程

■ 基本割集KCL方程和基本回路KVL方程为：

$$\mathbf{Q}_f\mathbf{i}_b=\begin{bmatrix}\mathbf{1}_t & \mathbf{Q}_l\end{bmatrix}\mathbf{i}_b=\mathbf{0}\qquad \mathbf{B}_f\mathbf{u}_b=\begin{bmatrix}-\mathbf{Q}_l^T & \mathbf{1}_l\end{bmatrix}\mathbf{u}_b=\mathbf{0}$$

✓ 展开后，可得：

- **KCL**

$$\begin{cases}\mathbf{i}_V+\mathbf{Q}_{VS}\mathbf{i}_S+\mathbf{Q}_{VR}\mathbf{i}_R+\mathbf{Q}_{VL}\mathbf{i}_L+\mathbf{Q}_{VI}\mathbf{i}_I=\mathbf{0} & (a)\\ \mathbf{i}_C+\mathbf{Q}_{CS}\mathbf{i}_S+\mathbf{Q}_{CR}\mathbf{i}_R+\mathbf{Q}_{CL}\mathbf{i}_L+\mathbf{Q}_{CI}\mathbf{i}_I=\mathbf{0} & (b)\\ \mathbf{i}_G+\mathbf{Q}_{GR}\mathbf{i}_R+\mathbf{Q}_{GL}\mathbf{i}_L+\mathbf{Q}_{GI}\mathbf{i}_I=\mathbf{0} & (c)\\ \mathbf{i}_\Gamma+\mathbf{Q}_{\Gamma L}\mathbf{i}_L+\mathbf{Q}_{\Gamma I}\mathbf{i}_I=\mathbf{0} & (d)\end{cases}\qquad (1)$$

- **KVL**

$$\begin{cases}-\mathbf{Q}_{VS}^T\mathbf{u}_V-\mathbf{Q}_{CS}^T\mathbf{u}_C+\mathbf{u}_S=\mathbf{0} & (a)\\ -\mathbf{Q}_{VR}^T\mathbf{u}_V-\mathbf{Q}_{CR}^T\mathbf{u}_C-\mathbf{Q}_{GR}^T\mathbf{u}_G+\mathbf{u}_R=\mathbf{0} & (b)\\ -\mathbf{Q}_{VL}^T\mathbf{u}_V-\mathbf{Q}_{CL}^T\mathbf{u}_C-\mathbf{Q}_{GL}^T\mathbf{u}_G-\mathbf{Q}_{\Gamma L}^T\mathbf{u}_\Gamma+\mathbf{u}_L=\mathbf{0} & (c)\\ -\mathbf{Q}_{VI}^T\mathbf{u}_V-\mathbf{Q}_{CI}^T\mathbf{u}_C-\mathbf{Q}_{GI}^T\mathbf{u}_G-\mathbf{Q}_{\Gamma I}^T\mathbf{u}_\Gamma+\mathbf{u}_I=\mathbf{0} & (d)\end{cases}\qquad (2)$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

三、非源二端元件的电压电流关系（网络的一次参数矩阵）

1、电容元件：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_C \\ \mathbf{i}_S \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix}\right\}$$

2、电感元件：

✓ 设电感树支与电感连支之间无耦合，则有：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_\Gamma \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{L}_\Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{i}_\Gamma \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix}\right\}$$

3、电阻元件：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_G \\ \mathbf{u}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_G & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u}_G \\ \mathbf{i}_R \end{bmatrix}$$

✓ 其中$\mathbf{C}_C$，$\mathbf{C}_S$，$\mathbf{G}_G$，$\mathbf{R}_R$ 都是由正实数组成的对角阵，而$\mathbf{L}_\Gamma$，$\mathbf{L}_L$ 则是由正实数组成的对称阵（无互感则为对角阵），它们称为网络的**一次参数矩阵**。

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

四、网络的范式状态方程

1、网络的二次参数矩阵

- 电容树支所属基本割集的KCL方程由(1)(*b*)可得：

$$\boxed{\mathbf{i}_C + \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{i}_S = -\mathbf{Q}_{CR}\mathbf{i}_R - \mathbf{Q}_{CL}\mathbf{i}_L - \mathbf{Q}_{CI}\mathbf{i}_I}$$

上式左端可改写为：

$$\mathbf{i}_C + \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{i}_S = [\mathbf{1} \quad \mathbf{Q}_{CS}]\begin{bmatrix}\mathbf{i}_C\\ \mathbf{i}_S\end{bmatrix} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{Q}_{CS}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{C}_C & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_S\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_C\\ \mathbf{u}_S\end{bmatrix}\right\}$$

- 由(2)(*a*)可得：（电容连支所属基本回路方程）

$$\boxed{\begin{bmatrix}\mathbf{u}_C\\ \mathbf{u}_S\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{Q}_{CS}^T\end{bmatrix}\mathbf{u}_C + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Q}_{VS}^T\end{bmatrix}\mathbf{u}_V}$$

则：

$$\mathbf{i}_C + \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{i}_S = [\mathbf{1} \quad \mathbf{Q}_{CS}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{C}_C & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_S\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{Q}_{CS}^T\end{pmatrix}\mathbf{u}_C + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Q}_{VS}^T\end{pmatrix}\mathbf{u}_V\right]\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\mathbf{C}_C + \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{C}_S\mathbf{Q}_{CS}^T\right)\mathbf{u}_C + \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{C}_S\mathbf{Q}_{CS}^T\mathbf{u}_V\right]$$

$$= -\mathbf{Q}_{CR}\mathbf{i}_R - \mathbf{Q}_{CL}\mathbf{i}_L - \mathbf{Q}_{CI}\mathbf{i}_I \qquad \text{(右边)}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

四、网络的范式状态方程

1、网络的二次参数矩阵

- 令:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_C + \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{C}_S\mathbf{Q}_{CS}^T$$

- 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{u}_C + \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{C}_S\mathbf{Q}_{CS}^T\mathbf{u}_V\right] = -\mathbf{Q}_{CR}\mathbf{i}_R - \mathbf{Q}_{CL}\mathbf{i}_L - \mathbf{Q}_{CI}\mathbf{i}_I \qquad (3)$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

四、网络的范式状态方程

1、网络的二次参数矩阵

- **电感连支所属基本回路的KVL方程由(2)(*c*)可得：**

$$\boxed{\mathbf{u}_L - \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{Q}_{VL}^T \mathbf{u}_V + \mathbf{Q}_{CL}^T \mathbf{u}_C + \mathbf{Q}_{GL}^T \mathbf{u}_G}$$

上式左端可改写为：

$$\mathbf{u}_L - \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{u}_\Gamma = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{\Gamma L}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\Gamma \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{u}_\Gamma & \mathbf{1} \end{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_\Gamma \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix} \right\}$$

- **由(1)(*d*)可得：（电感树支所属KCL方程）**

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{i}_\Gamma \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{\Gamma L} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{i}_L + \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{\Gamma I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{i}_I}$$

则：

$$\mathbf{u}_L - \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{u}_\Gamma = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{TL}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_L \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} -\mathbf{Q}_{\Gamma L} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{i}_L + \begin{pmatrix} -\mathbf{Q}_{\Gamma I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{i}_I \right] \right\}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\left(\mathbf{L}_L + \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{L}_\Gamma \mathbf{Q}_{\Gamma L} \right) \mathbf{i}_L + \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{L}_\Gamma \mathbf{Q}_{\Gamma I} \mathbf{i}_I \right]$$

$$= \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{u}_V + \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{u}_C + \mathbf{Q}_{GL}^T \mathbf{u}_G$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

四、网络的范式状态方程

1、网络的二次参数矩阵

- 令:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_L + \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{L}_\Gamma \mathbf{Q}_{\Gamma L}$$

- 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{i}_L + \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{L}_\Gamma \mathbf{Q}_{\Gamma L} \mathbf{i}_I\right] = \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{u}_V + \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \mathbf{u}_C + \mathbf{Q}_{GL}^T \mathbf{u}_G \qquad (4)$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

四、网络的范式状态方程

1、网络的二次参数矩阵

- 为消去(3)，(4)式中的非状态变量 i_R 和 u_G，（电阻树支所属基本割集方程和电阻连支所属基本回路方程）将电阻元件参数方程展开并分别代入(1)(c)和(2)(b)得：

$$\begin{cases} \mathbf{G}_G\mathbf{u}_G + \mathbf{Q}_{GR}\mathbf{i}_R + \mathbf{Q}_{GL}\mathbf{i}_L + \mathbf{Q}_{GI}\mathbf{i}_I = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_R\mathbf{i}_R - \mathbf{Q}_{VR}^T\mathbf{u}_V - \mathbf{Q}_{CR}^T\mathbf{u}_C - \mathbf{Q}_{GR}^T\mathbf{u}_G = \mathbf{0} \end{cases}$$

✓ 联立求解得：

$$\mathbf{i}_R = \tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{VR}^T\mathbf{u}_V + \tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{CR}^T\mathbf{u}_C - \tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{CR}^T\mathbf{G}_G^{-1}\mathbf{Q}_{GL}\mathbf{i}_L - \tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{GR}^T\mathbf{G}_G^{-1}\mathbf{Q}_{GI}\mathbf{i}_I$$

$$\mathbf{u}_G = -\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GR}\mathbf{R}_R^{-1}\mathbf{Q}_{VR}^T\mathbf{u}_V - \tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GR}\mathbf{R}_R^{-1}\mathbf{Q}_{CR}^T\mathbf{u}_C - \tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GL}i_L - \tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GI}\mathbf{i}_I$$

其中：

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_R + \mathbf{Q}_{GR}^T\mathbf{G}_G^{-1}\mathbf{Q}_{GR} \qquad \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_G + \mathbf{Q}_{GR}\mathbf{R}_R^{-1}\mathbf{Q}_{GR}^T$$

✓ $\tilde{\mathbf{R}},\tilde{\mathbf{G}},\tilde{\mathbf{C}},\tilde{\mathbf{L}}$ 称为网络的二次参数矩阵。

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

四、网络的范式状态方程

2、网络的范式状态方程

- 将上面的 i_R ，u_G 分别代入(3)，(4)，整理后：

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{u}_C] = &-\mathbf{Q}_{GR}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{CR}^T\mathbf{u}_C + [\mathbf{Q}_{CR}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{CR}^T\mathbf{G}_G^{-1}\mathbf{Q}_{GL} - \mathbf{Q}_{CL}]\mathbf{i}_L - \mathbf{Q}_{CR}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{VR}^T\mathbf{u}_V \\ &+ [\mathbf{Q}_{CR}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{GR}^T\mathbf{G}_G^{-1}\mathbf{Q}_{GI} - \mathbf{Q}_{CI}]\mathbf{i}_I - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{Q}_{CS}\mathbf{C}_S\mathbf{Q}_{VS}^T]\mathbf{u}_V\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{i}_L] = &[\mathbf{Q}_{CL}^T - \mathbf{Q}_{GL}^T\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GR}\mathbf{R}_R^{-1}\mathbf{Q}_{CR}^T]\mathbf{u}_C - \mathbf{Q}_{GL}^T\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GL}\mathbf{i}_L \\ &+ [\mathbf{Q}_{VL}^T - \mathbf{Q}_{GL}^T\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GR}\mathbf{R}_R^{-1}\mathbf{Q}_{VR}^T]\mathbf{u}_V - \mathbf{Q}_{GL}^T\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GI}\mathbf{i}_I - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{Q}_{\Gamma L}^T\mathbf{L}_\Gamma\mathbf{Q}_{\Gamma I}]\mathbf{i}_I\end{aligned}}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

四、网络的范式状态方程

2、网络的范式状态方程

- 令混合矩阵为：

$$\mathbf{H}_{CC}=\mathbf{Q}_{CR}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{CR}^{T}$$

$$\mathbf{H}_{CL}=\mathbf{Q}_{CL}-\mathbf{Q}_{CR}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{GR}^{T}\mathbf{G}_{G}^{-1}\mathbf{Q}_{GL}$$

$$\mathbf{H}_{CV}=\mathbf{Q}_{CR}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{VR}^{T}$$

$$\mathbf{H}_{CI}=\mathbf{Q}_{CI}-\mathbf{Q}_{CR}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{Q}_{GR}^{T}\mathbf{G}_{G}^{-1}\mathbf{Q}_{GI}$$

$$\mathbf{H}_{LC}=\mathbf{Q}_{GL}^{T}\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GR}\mathbf{R}_{R}^{-1}\mathbf{Q}_{CR}^{T}-\mathbf{Q}_{CL}^{T}$$

$$\mathbf{H}_{LL}=\mathbf{Q}_{GL}^{T}\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GL}$$

$$\mathbf{H}_{LV}=\mathbf{Q}_{GL}^{T}\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GR}\mathbf{R}_{R}^{-1}\mathbf{Q}_{VR}^{T}-\mathbf{Q}_{VL}^{T}$$

$$\mathbf{H}_{LI}=\mathbf{Q}_{GL}^{T}\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}_{GI}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

四、网络的范式状态方程

2、网络的范式状态方程

- 二次参数矩阵为：

$$\hat{\hat{\mathbf{C}}} = \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{C}_S\mathbf{Q}_{VS}^T$$

$$\hat{\hat{\mathbf{L}}} = \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T\mathbf{L}_\Gamma\mathbf{Q}_{\Gamma I}$$

则有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{u}_C] = -\mathbf{H}_{CC}\mathbf{u}_c - \mathbf{H}_{CL}\mathbf{i}_L - \mathbf{H}_{CV}\mathbf{u}_V - \mathbf{H}_{CI}\mathbf{i}_I - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{\hat{\mathbf{C}}}\mathbf{u}_V]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{i}_L] = -\mathbf{H}_{LC}\mathbf{u}_C - \mathbf{H}_{LL}\mathbf{i}_L - \mathbf{H}_{LV}\mathbf{u}_V - \mathbf{H}_{LI}\mathbf{i}_I - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{\hat{\mathbf{L}}}\mathbf{i}_I]$$

✓ 式中矩阵H_{CC} 是电导矩阵，H_{LL} 是电阻矩阵，它们都是对称矩阵，而矩阵H_{CL} 和H_{LC} 则都是转移函数矩阵，且 H_{LC}=-H_{CL}^T 则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{u}_c\\ \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{i}_L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\mathbf{H}_{CC} & -\mathbf{H}_{CL}\\ -\mathbf{H}_{LC} & -\mathbf{H}_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_C\\ \mathbf{i}_L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{H}_{CV} & -\mathbf{H}_{CI}\\ -\mathbf{H}_{LV} & -\mathbf{H}_{LI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_V\\ \mathbf{i}_I\end{bmatrix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\hat{\hat{\mathbf{C}}}\mathbf{u}_V\\ \hat{\hat{\mathbf{L}}}\mathbf{i}_I\end{bmatrix}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

四、网络的范式状态方程

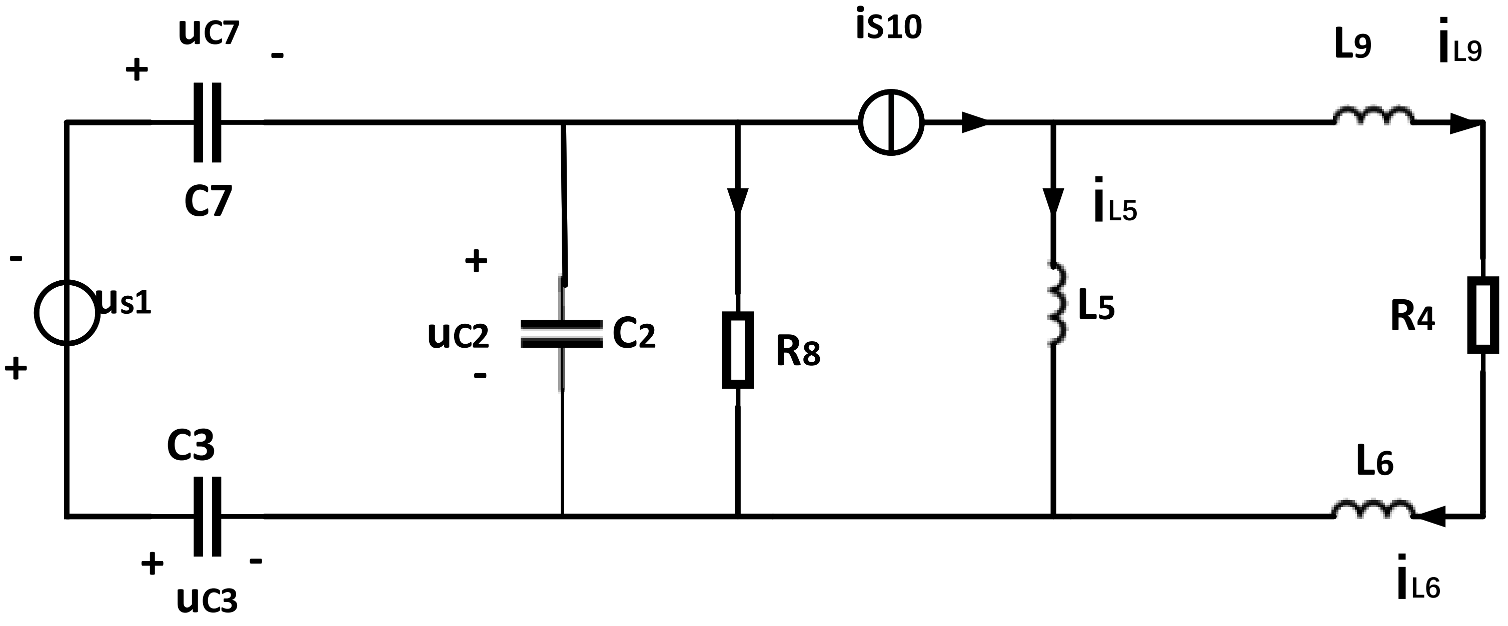
2、网络的范式状态方程

- ✓ 若网络中不含纯电容电路，或纯电容回路中不含电压源，则 $\hat{\tilde{\mathbf{C}}} = \mathbf{0}$
- ✓ 若网络中不含纯电感割集，或纯电感割集中不含电流源，则 $\hat{\tilde{\mathbf{L}}} = \mathbf{0}$
- ✓ 上式既适用于线性时不变网络，也适用于线性时变网络。
- ✓ 对于线性时不变网络，二次参数矩阵和混合参数矩阵均为常数，则以树支电容电压和连支电感电流作状态变量范式状态方程为：

$$
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_C \\ \dot{\mathbf{i}}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{L}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{CC} & -\mathbf{H}_{CL} \\ -\mathbf{H}_{LC} & -\mathbf{H}_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{L}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{CV} & -\mathbf{H}_{CI} \\ -\mathbf{H}_{LV} & -\mathbf{H}_{LI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_V \\ \mathbf{i}_I \end{bmatrix}
$$
$$
- \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{L}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\tilde{\mathbf{C}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\tilde{\mathbf{L}}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_V \\ \dot{\mathbf{i}}_I \end{bmatrix}
$$

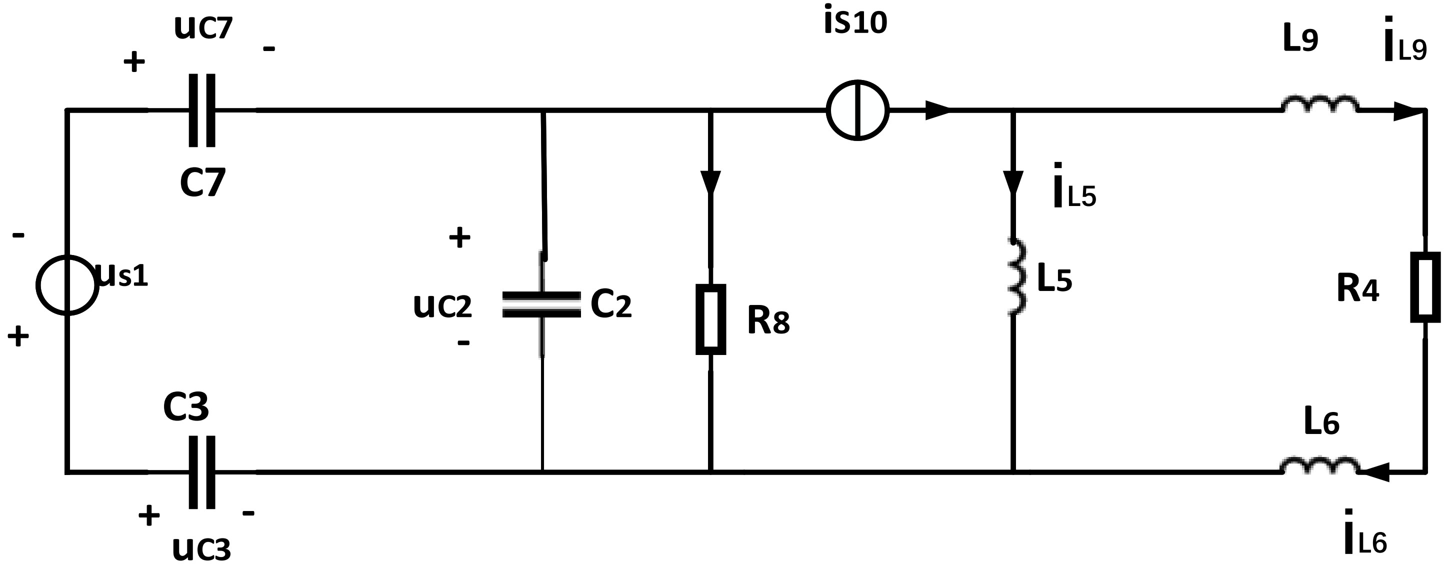
第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

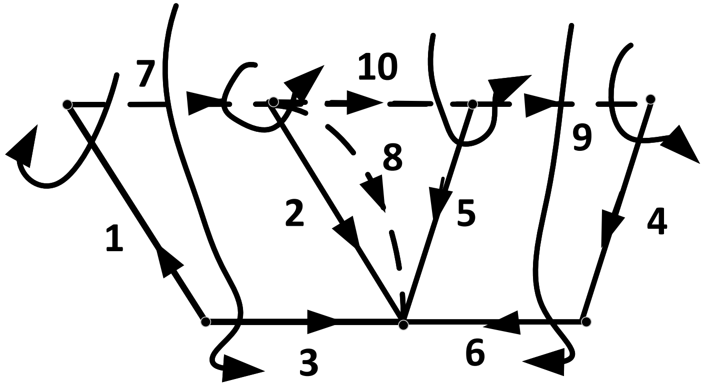
例4-4-1 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程



第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-1 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程



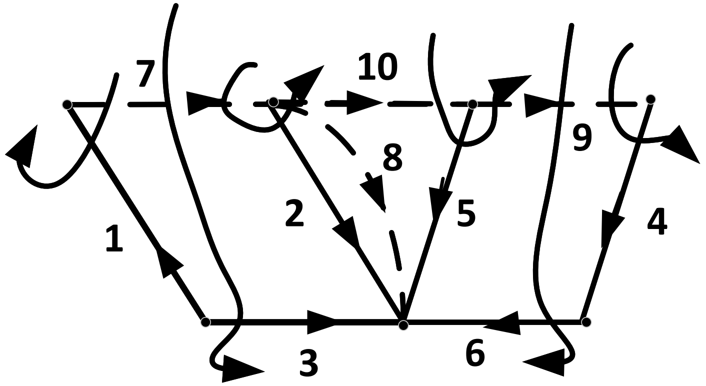


解：该网络中有六个动态元件、一个纯电容回路、两个独立的纯电感割集，故网络的复杂性阶数为6-(1+2)=3，作出网络的线性图，选一规范树，支路1、2、3、4、5、6为树支，如图(b)所示。

状态变量为树支电容电压$\mathbf{u_{C2}}$、$\mathbf{u_{C3}}$和连支电感电流$\mathbf{i_{L9}}$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-1 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程



解:

写出基本割集矩阵$\mathbf{Q_f}$:

$$
Q_f = \begin{array}{c} \\ V \\ C \\ C \\ G \\ \Gamma \\ \Gamma \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} V & C & & G & \Gamma & & S & R & L & I \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{1} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{Q_l} \end{array}
\end{array}
$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-1 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程

解:

由此得出基本子阵$\mathbf{Q_l}$的各分块矩阵为

$$Q_{VS}=\left[-1\right]\quad Q_{VR}=\left[0\right]\quad Q_{VL}=\left[0\right]\quad Q_{VI}=\left[0\right]$$

$$Q_{CS}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\quad Q_{CR}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\quad Q_{CL}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\quad Q_{CI}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$Q_{GS}=\left[0\right]\quad Q_{GR}=\left[0\right]\quad Q_{GL}=\left[-1\right]\quad Q_{GI}=\left[0\right]$$

$$Q_{\Gamma S}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\quad Q_{\Gamma R}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\quad Q_{\Gamma L}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\quad Q_{\Gamma I}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

网络元件的参数矩阵为:

$$C_C=\begin{bmatrix}C_2&0\\0&C_3\end{bmatrix}\quad C_S=\left[C_7\right]\quad R_R=\left[R_8\right]$$

$$G_G=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_4}\end{bmatrix}\quad L_\Gamma=\begin{bmatrix}L_5&0\\0&L_6\end{bmatrix}\quad L_L=\left[L_9\right]$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-1 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程

解：计算下式中个系数矩阵分块阵：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{C}u_C \\ \tilde{L}i_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-H_{CC} & -H_{CL} \\ -H_{LC} & -H_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C \\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-H_{CV} & -H_{CI} \\ -H_{LV} & -H_{LI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_V \\ i_L\end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{\tilde{C}}u_V \\ \hat{\tilde{L}}i_I\end{bmatrix}$$

$$C=C_C+Q_{CS}C_SQ_{CS}^T=\begin{bmatrix}\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_7 & \text{-}\mathrm{C}_7 \\ \text{-}\mathrm{C}_7 & \mathrm{C}_3+\mathrm{C}_7\end{bmatrix}$$

$$L=LL+Q_{\Gamma L}^TL_\Gamma Q_{\Gamma L}=\left[L_5+L_6+L_9\right]$$

$$R=RR+Q_{GR}^TG_G^{-1}Q_{GR}=\left[R_8\right]$$

$$G=G_G+Q_{GR}R_R^{-1}Q_{GR}^T=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_4}\end{bmatrix}$$

$$H_{CC}=Q_{CR}R^{-1}Q_{CR}^T=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_8} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$H_{CL}=Q_{CL}-Q_{CR}R^{-1}Q_{GR}G_G^{-1}Q_{GL}=\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$H_{CV}=Q_{CR}R^{-1}Q_{VR}^T=\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$H_{CI}=Q_{CI}-Q_{CR}R^{-1}Q_{GR}^TG_G^{-1}Q_{GI}=\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-1 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程

解：计算下式中个系数矩阵分块阵：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \tilde{C}u_C \\ \tilde{L}i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{CC} & -H_{CL} \\ -H_{LC} & -H_{LL} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{CV} & -H_{CI} \\ -H_{LV} & -H_{LI} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_V \\ i_L \end{bmatrix} - \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{\tilde{C}}u_V \\ \hat{\tilde{L}}i_I \end{bmatrix}$$

$$H_{LC} = -H_{CL}^T = [0 \quad 0]$$

$$H_{LL} = Q_{GL}^T G^{-1} Q_{GL} = [R_4]$$

$$H_{LI} = Q_{GL}^T G^{-1} Q_{GI} = [0]$$

$$H_{LV} = Q_{GL}^T G^{-1} Q_{GR} R_R^{-1} Q_{VR}^T - Q_{VL}^T = [0]$$

$$\dot{C} = Q_{CS} C_S Q_{VS}^T = \begin{bmatrix} C_7 \\ -C_7 \end{bmatrix}$$

$$\dot{L} = Q_{\Gamma L}^T L_\Gamma Q_{\Gamma I} = [-L_5]$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-1 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程

解：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{C}u_C \\ \tilde{L}i_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-H_{CC} & -H_{CL} \\ -H_{LC} & -H_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C \\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-H_{CV} & -H_{CI} \\ -H_{LV} & -H_{LI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_V \\ i_L\end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{\tilde{C}}u_V \\ \hat{\tilde{L}}i_I\end{bmatrix}$$

由上式可得：

$$\frac{d}{dt}\left\{\begin{bmatrix}C_2+C_7 & -C_7 & 0 \\ -C_7 & C_3+C_7 & 0 \\ 0 & 0 & L_5+L_6+L_9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C2} \\ u_{C3} \\ i_{L9}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C2} \\ u_{C3} \\ i_{L9}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{s1} \\ i_{s10}\end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\left\{\begin{bmatrix}C_7 & 0 \\ -C_7 & 0 \\ 0 & -L_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{s1} \\ i_{s10}\end{bmatrix}\right\}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-1 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程

解：因为网络是时不变的，且：

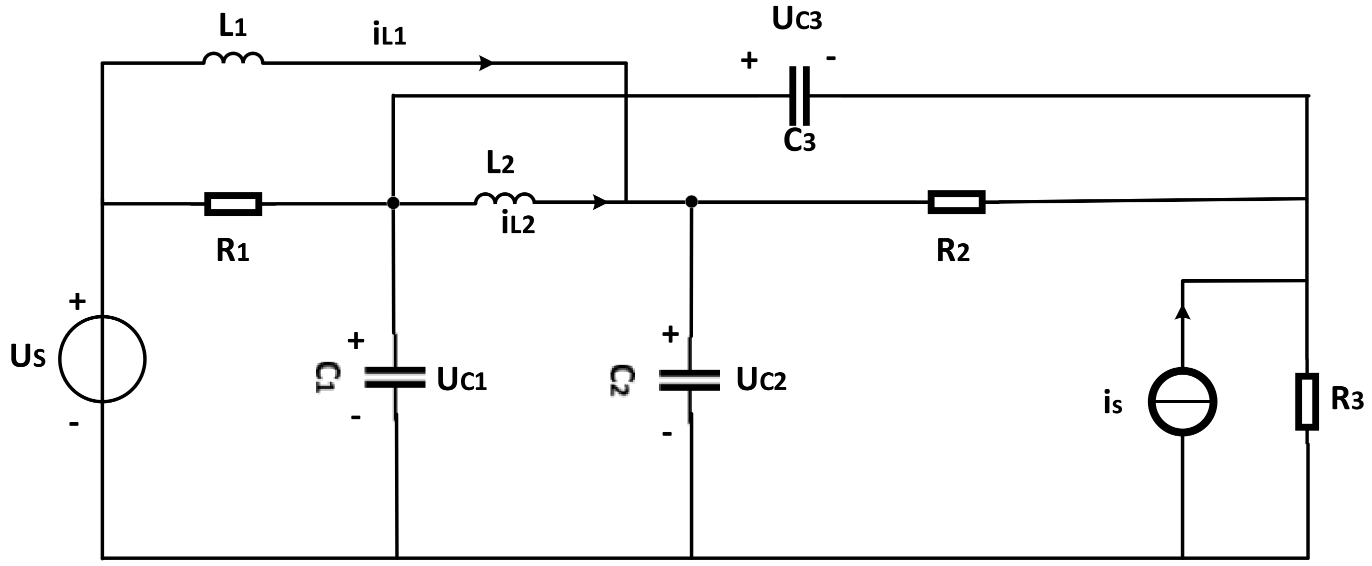
$$\begin{bmatrix} C2+C7 & -C7 & 0 \\ -C7 & C3+C7 & 0 \\ 0 & 0 & L5+L6+L9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_3+C_7}{C_2C_3+C_2C_7+C_3C_7} & \dfrac{C3}{C_2C_3+C_2C_7+C_3C_7} & 0 \\ \dfrac{C_7}{C_2C_3+C_2C_7+C_3C_7} & \dfrac{C_2+C_7}{C_2C_3+C_2C_7+C_3C_7} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{L_2+L_6+L_9} \end{bmatrix}$$

故状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C2} \\ \dot{u}_{C3} \\ \dot{i}_{L9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-(C_3+C_7)}{R_8(C_2C_3+C_2C_7+C_3C_7)} & 0 & 0 \\ \dfrac{-C_7}{R_8(C_2C_3+C_2C_7+C_3C_7)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-R_4}{L_5+L_6+L_9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C2} \\ u_{C3} \\ i_{L9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-(C_3+C_7)}{C_2C_3+C_2C_7+C_3C_7} \\ 0 & \dfrac{-C_7}{C_2C_3+C_2C_7+C_3C_7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{S1} \\ i_{S10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{C_3C_7}{C_2C_3+C_2C_7+C_3C_7} & 0 \\ \dfrac{-C_2C_7}{C_2C_3+C_2C_7+C_3C_7} & 0 \\ 0 & \dfrac{-L_5}{L_5+L_6+L_9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{S1} \\ \dot{i}_{S10} \end{bmatrix}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-2 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程



解：先确定系统网络的阶数

1）由图可知网络有5个储能元件

2）确定独立纯电容回路数

3)确定独立纯电感割集数

故系统网络的阶数为(储能元件个数-独立纯电容数-独立纯电感割集数)，即5-0-1=4阶

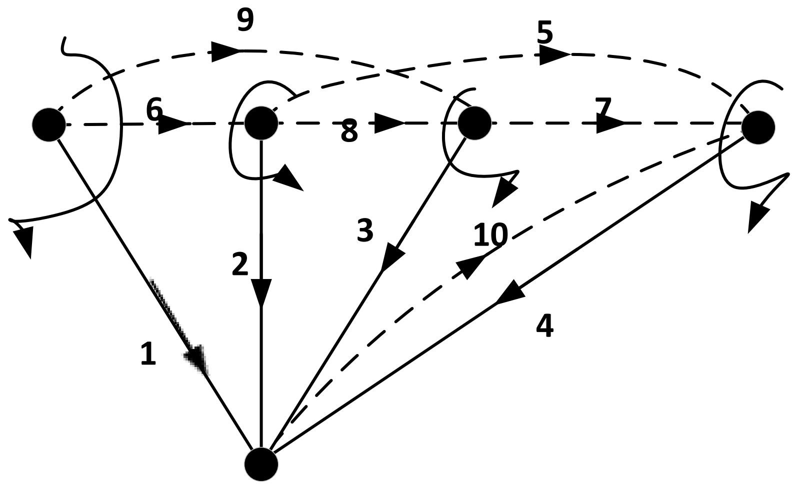
第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-2 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程

解：作网络的线型图，选取一个规范树，如图所示，再对规范树按照先树支后连支的顺序对各支路编号。

对于树支再按电压源、电容、电导和倒电感的顺序编号；

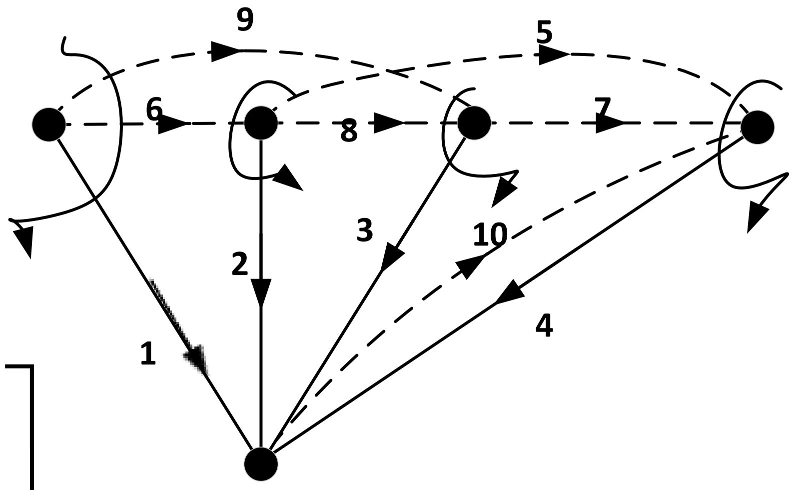
对于连支再按倒电容、电阻、电感和电流源的顺序编号。



选取状态变量$\mathbf{x=[u_{C1},u_{C2},i_{L1},i_{L2}]}$，以规范树中的树支电容电压$\mathbf{C_1}$、$\mathbf{C_2}$和连支电感电流$\mathbf{L_1}$、$\mathbf{L_2}$作为网络的状态变量。

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-2 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程



解：写出基本割集矩阵：

$$
Q_f = \begin{array}{c} \\ V \\ C \\ C \\ G \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|cccccc} V & C & G & \Gamma & S & R & & L & & I \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right] \\
\underbrace{\hphantom{0000000000}}_{1} \qquad \underbrace{\hphantom{000000000000000}}_{Q_l}
\end{array}
$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-2 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程

可得基本子阵$\mathbf{Q_l}$各分块矩阵：

$$Q_{VS}=[0] \quad Q_{VR}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \quad Q_{VL}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \quad Q_{VI}=[0]$$

$$Q_{CS}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad Q_{CR}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad Q_{CL}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & -1\end{bmatrix} \quad Q_{CI}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$Q_{GS}=[-1] \quad Q_{GR}=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix} \quad Q_{GL}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} \quad Q_{GI}=[-1]$$

$$Q_{\Gamma S}=0 \quad Q_{\Gamma R}=0 \quad Q_{\Gamma L}=0 \quad Q_{\Gamma I}=0$$

得到网络元件参数矩阵：

$$C_C=\begin{bmatrix}C_1 & 0\\0 & C_2\end{bmatrix} \quad C_S=[C_3] \quad R_R=\begin{bmatrix}R_1 & 0\\0 & R_2\end{bmatrix}$$

$$G_G=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_3}\end{bmatrix} \quad L_\Gamma=0 \quad L_L=\begin{bmatrix}L_2 & 0\\0 & L_1\end{bmatrix}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-2 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程

解：计算各系数矩阵分块阵：

$$\tilde{C} = C_C + Q_{CS} C_S Q_{CS}^T = \begin{bmatrix} C_1 + C_3 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \qquad \tilde{L} = L_L + Q_{\Gamma L}{}^T L_\Gamma Q_{\Gamma L} = \begin{bmatrix} L_2 & 0 \\ 0 & L_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R} = R_R + Q_{GR}{}^T G_G{}^{-1} Q_{GR} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \qquad \tilde{G} = G_G + Q_{GR} R_R^{-1} Q_{GR}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

$$H_{CC} = Q_{CR} \tilde{R}^{-1} Q_{CR}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R_2 + R_3} \end{bmatrix} \qquad H_{CL} = Q_{CL} - Q_{CR} \tilde{R}^{-1} Q^T{}_{GR} G_G^{-1} Q_{GL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{CV} = Q_{CR} \tilde{R}^{-1} Q_{VR}^T = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}; H_{CI} = Q_{CI} - Q_{CR} \tilde{R}^{-1} Q_{GR}^T G_G^{-1} Q_{GI} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{R_3}{R_2 + R_3} \end{bmatrix}$$

$$H_{LC} = -H_{CL}{}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; H_{LL} = Q_{GL}{}^T \tilde{G}^{-1} Q_{GL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; H_{LI} = Q_{GL}{}^T \tilde{G}^{-1} Q_{GL} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{LV} = Q_{GL}{}^T \tilde{G}^{-1} Q_{GR} R_R{}^{-1} Q_{VR}{}^T - Q_{VL}{}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \dot{C} = Q_{CS} C_S Q_{VS}{}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \dot{L} = Q_{\Gamma L}{}^T L_\Gamma Q_{\Gamma I} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-2 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程

解：由下式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{C}u_C\\ \tilde{L}i_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-H_{CC} & -H_{CL}\\ -H_{LC} & -H_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-H_{CV} & -H_{CI}\\ -H_{LV} & -H_{LI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_V\\ i_L\end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{\tilde{C}}u_V\\ \hat{\tilde{L}}i_I\end{bmatrix}$$

可得到：

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{bmatrix}C_1+C_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & C_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & L_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & L_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1} & 0 & -1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{R_2+R_3} & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1} & 0\\ 0 & -\frac{R_3}{R_2+R_3}\\ 0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_V\\ i_I\end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_V\\ i_I\end{bmatrix}\right\}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

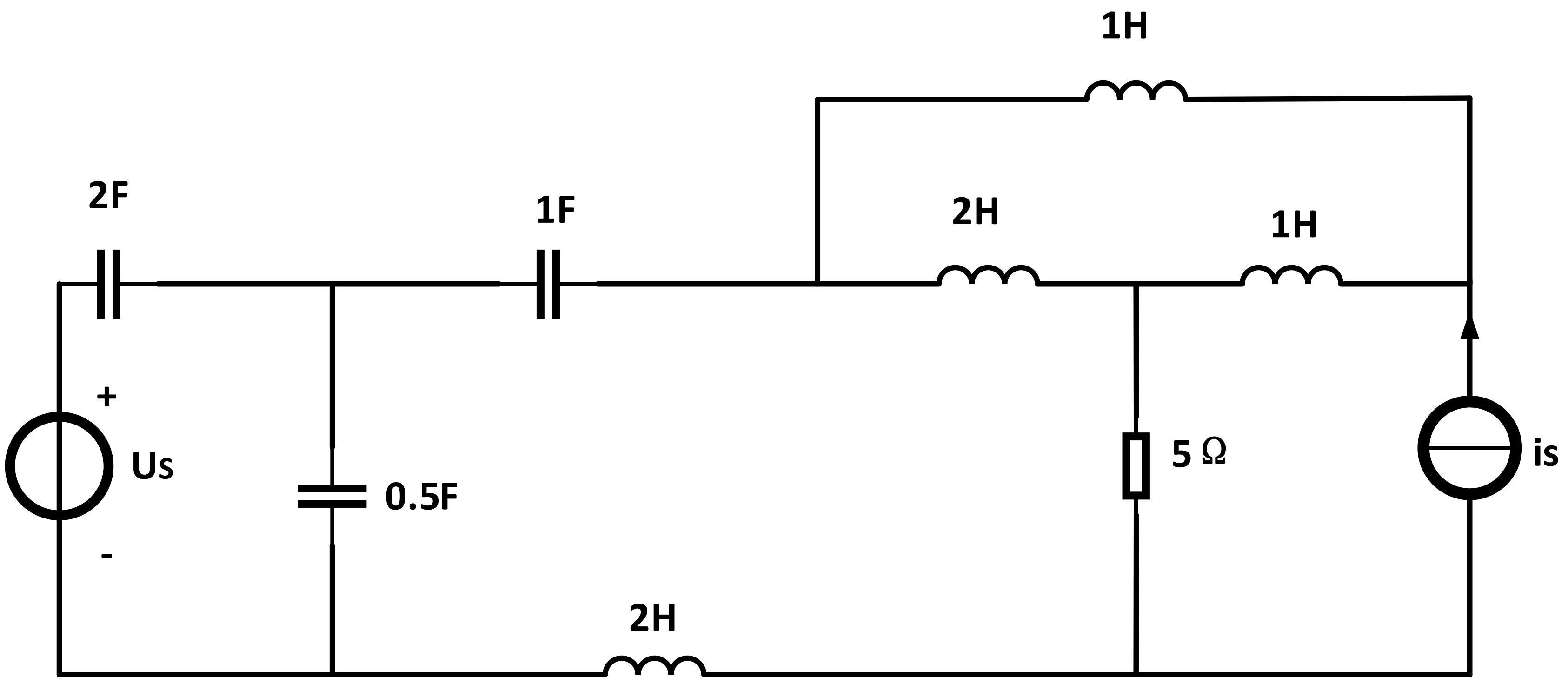
例4-4-2 用系统公式法建立下图所示线性时不变网络的状态方程

解：化简得到该系统网络状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \\ \dot{i}_{L1} \\ \dot{i}_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1\cdot(C_1+C_3)} & 0 & -\dfrac{1}{C_1+C_3} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{C_2\cdot(R_2+R_3)} & \dfrac{1}{C_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{1}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{L_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1\cdot(C_1+C_3)} & 0 \\ 0 & -\dfrac{R_3}{C_2\cdot(R_2+R_3)} \\ 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

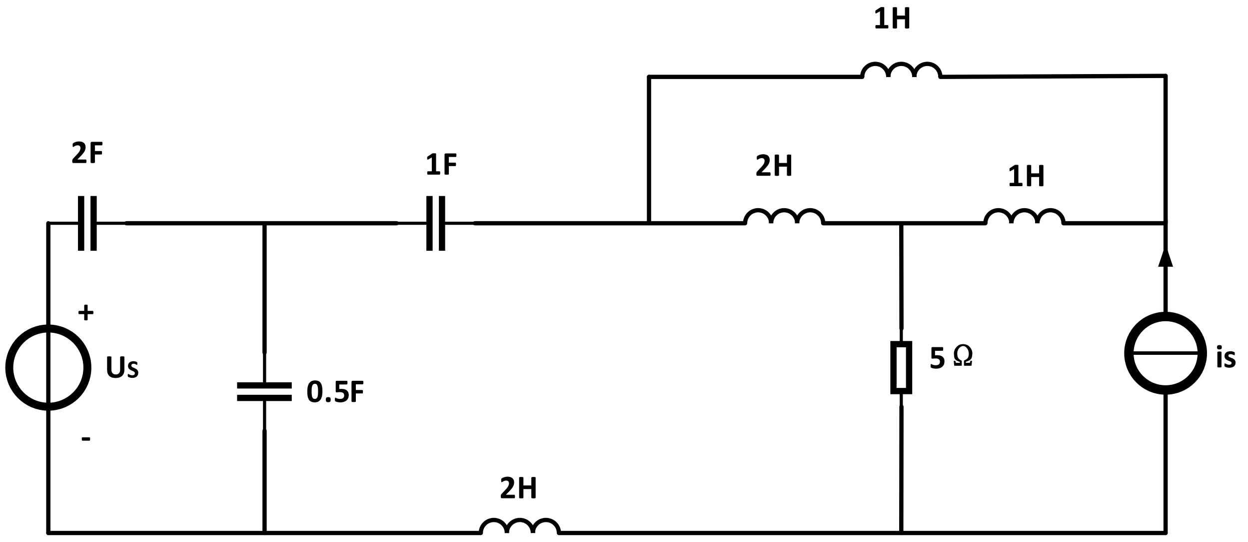
第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

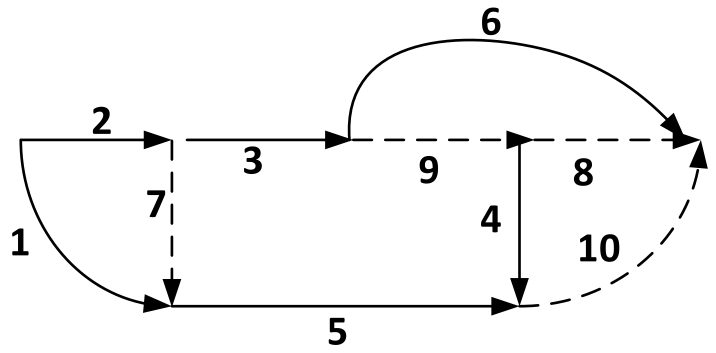
例4-4-3 用系统公式法建立下图所示网络的状态方程



第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-3 用系统公式法建立下图所示网络的状态方程





解：该网络中有七个储能元件、一个纯电容回路、两个纯电感割集，故网络的复杂性阶数为7-(1+2)=4。

作网络的线性图，选一规范树，支路1、2、3、4、5、6为树支，如图中实线所示。状态变量为树支电容电压$\mathbf{U_{C2}}$、$\mathbf{U_{C3}}$和连支电感电流$\mathbf{i_{L8}}$、$\mathbf{i_{L9}}$。

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-3 用系统公式法建立下图所示网络的状态方程

解：得到基本割集矩阵

$$
Q_f = \begin{array}{c} \\ V \\ C \\ \\ G \\ \Gamma \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc|cccc} V & C & & G & \Gamma & & S & L & & I \end{array} \\
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right.}_{1}
\underbrace{\left.\begin{array}{|cccc}
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]}_{Q_l}
\end{array}
$$

$$Q_{VS} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad Q_{VL} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_{VR} = 0 \quad Q_{VI} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{CS} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Q_{CL} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad Q_{CR} = 0 \quad Q_{CI} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{GS} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad Q_{GL} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad Q_{GR} = 0 \quad Q_{GI} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{\Gamma S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Q_{\Gamma L} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q_{\Gamma R} = 0 \quad Q_{\Gamma I} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-3 用系统公式法建立下图所示网络的状态方程

解：网络元件参数矩阵为：

$$C_C=\begin{bmatrix}C_2 & 0\\ 0 & C_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad C_S=\begin{bmatrix}C_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\end{bmatrix}\qquad R_R=0$$

$$G_G=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_4}\end{bmatrix}=0.2\quad L_\Gamma=\begin{bmatrix}L_5 & 0\\ 0 & L_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad L_L=\begin{bmatrix}L_8 & 0\\ 0 & L_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

计算各系数矩阵分块矩阵：

$$\tilde{C}=C_C+Q_{CS}C_SQ_{CS}^T=\begin{bmatrix}2.5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \tilde{L}=L_L+Q_{\Gamma L}^TL_\Gamma Q_{\Gamma L}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}=R_R+Q_{GR}^TG_G^{-1}Q_{GR}=0\qquad \tilde{G}=G_G+Q_{GR}R_R^{-1}Q_{GR}^T=0.2$$

$$H_{CC}=Q_{CR}\tilde{R}^{-1}Q_{CR}^T=0\qquad H_{CL}=Q_{CL}-Q_{CR}\tilde{R}^{-1}Q_{GR}G_G^{-1}Q_{GL}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$H_{CV}=Q_{CR}\tilde{R}^{-1}Q_{VR}^T=0\qquad H_{CI}=Q_{CI}-Q_{CR}\tilde{R}^{-1}Q_{GR}^TG_G^{-1}Q_{GI}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$H_{LC}=-H_{CL}^T=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\qquad H_{LL}=Q_{GL}^T\tilde{G}^{-1}Q_{GL}=\begin{bmatrix}5 & -5\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

$$H_{LI}=Q_{GL}^T\tilde{G}^{-1}Q_{GI}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\qquad H_{LV}=Q_{GL}^T\tilde{G}^{-1}Q_{GR}R_R^{-1}Q_{VR}^T-Q_{VL}^T=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\hat{\tilde{C}}=Q_{CS}C_SQ_{VS}^T=\begin{bmatrix}-0.5\\ 0\end{bmatrix}\qquad \hat{\tilde{L}}=Q_{\Gamma L}^TL_\Gamma Q_{\Gamma I}=\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-3 用系统公式法建立下图所示网络的状态方程

解：由公式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{C}u_C\\ \tilde{L}i_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-H_{CC} & -H_{CL}\\ -H_{LC} & -H_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-H_{CV} & -H_{CI}\\ -H_{LV} & -H_{LI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_V\\ i_L\end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{\tilde{C}}u_V\\ \hat{\tilde{L}}i_I\end{bmatrix}$$

可得：

$$\frac{d}{dt}\left\{\begin{bmatrix}2.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{C2}\\ U_{C3}\\ i_{L8}\\ i_{L9}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -5 & 5\\ -1 & -1 & 5 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{C2}\\ U_{C3}\\ i_{L8}\\ i_{L9}\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & -1\\ -1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{S1}\\ i_{S10}\end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\left\{\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{S1}\\ i_{S10}\end{bmatrix}\right\}$$

第四节：对不含受控源线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-4-3 用系统公式法建立下图所示网络的状态方程

解：由于网络是时不变，且：

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

可得状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{c2} \\ \dot{u}_{c3} \\ \dot{i}_{L8} \\ \dot{i}_{L9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c2} \\ u_{c3} \\ i_{L8} \\ i_{L9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{S1} \\ i_{S10} \end{bmatrix}$$

第五节：对含受控源的线性网络建立状态方程的系统公式法

- 假设网络中的受控源对网络复杂性的阶数无影响
- ✓ 由于受控源是**电阻性二端口元件**，因此在写电阻支路的电压电流关系方程时还应包含受控源的电压电流关系。为此，将电阻类元件的电压电流关系表示为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_R \\ \mathbf{u}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_R & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\mu} & \mathbf{R}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{i}_G \end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{i}_R = \mathbf{G}_R \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{i}_G$$

$$\mathbf{u}_G = \boldsymbol{\mu} \mathbf{u}_R + \mathbf{R}_G \mathbf{i}_G$$

- 式中：
- ✓ $\mathbf{i}_R$ 和$\mathbf{u}_R$ 分别表示连支电阻支路的电流向量和电压向量；
- ✓ $\mathbf{u}_G$ 和 $\mathbf{i}_G$分别表示树支电阻支路的电压向量和电流向量；
- ✓ $\mathbf{G}_R$ 中的元素为树余中的电导参数；$\mathbf{R}_G$ 中元素为树中的电阻参数；
- ✓ $\boldsymbol{\alpha}$ 中的元素为电流比，$\boldsymbol{\mu}$ 中元素为电压比，它们都是无量纲参数。

第五节：对含受控源的线性网络建立状态方程的系统公式法

- 由(1)(c)和(2)(b)得：

$$\mathbf{i}_G = -\mathbf{Q}_{GR}\mathbf{i}_R - \mathbf{Q}_{GL}\mathbf{i}_L - \mathbf{Q}_{GL}\mathbf{i}_I$$

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{Q}_{VR}^T\mathbf{u}_V + \mathbf{Q}_{CR}^T\mathbf{u}_C + \mathbf{Q}_{GR}^T\mathbf{u}_G$$

- 将上两式代入 $\mathbf{i}_R$ 和 $\mathbf{u}_G$ 中，整理得：

$$\left[1+\alpha\mathbf{Q}_{GR}\right]\mathbf{i}_R - \mathbf{G}_R\mathbf{Q}_{GR}^T\mathbf{u}_G = \mathbf{G}_R\mathbf{Q}_{CR}^T\mathbf{u}_C - \alpha\mathbf{Q}_{GL}\mathbf{i}_L + \mathbf{G}_R\mathbf{Q}_{VR}^T\mathbf{u}_V - \alpha\mathbf{Q}_{GL}\mathbf{i}_I$$

$$\mathbf{R}_G\mathbf{Q}_{GR}\mathbf{i}_R + \left[1-\mu\mathbf{Q}_{GR}^T\right]\mathbf{u}_G = \mu\mathbf{Q}_{CR}^T\mathbf{u}_C - \mathbf{R}_G\mathbf{Q}_{GL}\mathbf{i}_L + \mu\mathbf{Q}_{VR}^T\mathbf{u}_V - \mathbf{R}_G\mathbf{Q}_{GL}\mathbf{i}_I$$

- 写成矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix} 1+\alpha\mathbf{Q}_{GR} & -\mathbf{G}_R\mathbf{Q}_{GR}^T \\ \mathbf{R}_G\mathbf{Q}_{GR} & 1-\mu\mathbf{Q}_{GR}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{i}_R \\ \mathbf{u}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_R\mathbf{Q}_{CR}^T & \mu\mathbf{Q}_{CR}^T \\ -\alpha\mathbf{Q}_{GL} & -\mathbf{R}_G\mathbf{Q}_{GL} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_R\mathbf{Q}_{VR}^T & -\alpha\mathbf{Q}_{GL} \\ \mu\mathbf{Q}_{VR}^T & -\mathbf{R}_G\mathbf{Q}_{GL} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u}_V \\ \mathbf{i}_I \end{bmatrix}$$

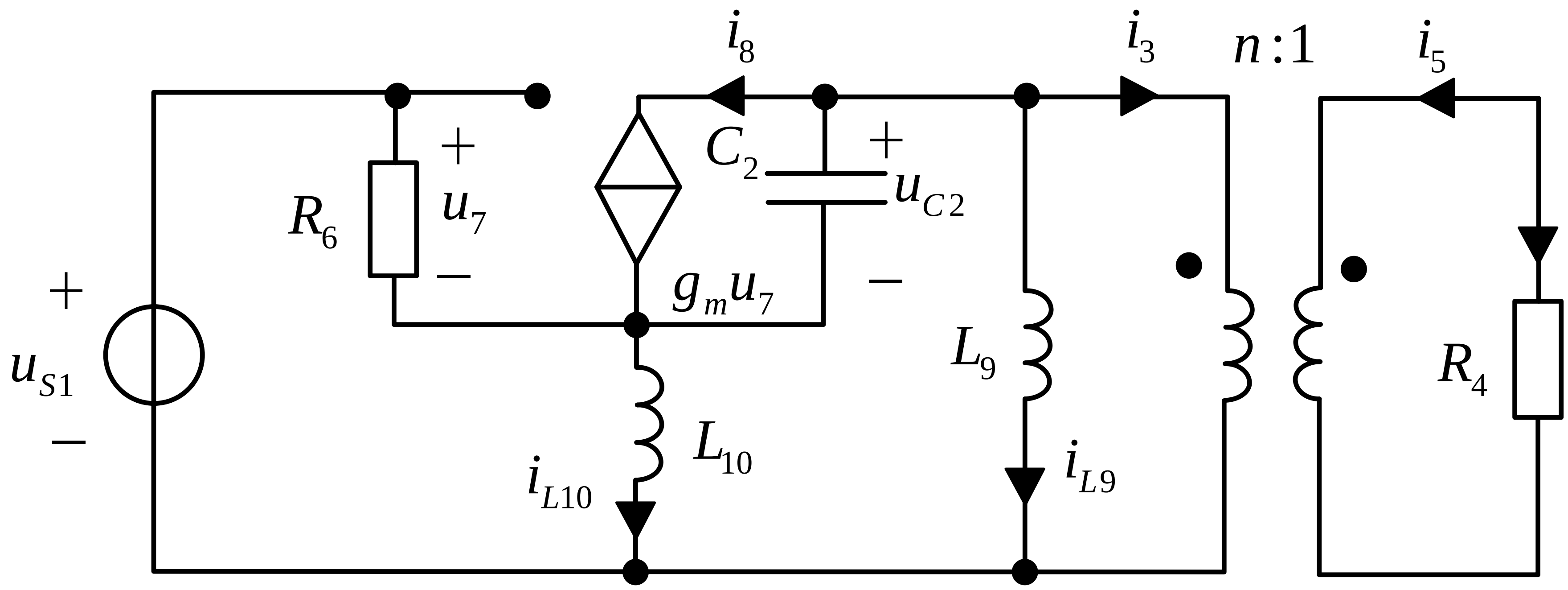
✓ 如果上式中$[\mathbf{i}_R \quad \mathbf{u}_G]^T$的系数矩阵为非奇异的，则解出 $\mathbf{i}_R$ 和 $\mathbf{u}_G$ 后，将 $\mathbf{i}_R$ 代入(3)中消去非状态变量 $\mathbf{i}_R$；将 $\mathbf{u}_G$ 代入(4)式中消去非状态变量 $\mathbf{u}_G$，整理后可得到含受控源的线性网络状态方程。

✓ 若$[\mathbf{i}_R \quad \mathbf{u}_G]^T$的系数矩阵为奇异的，则不能用此方法列写网络的状态方程。

例 4 — 4 。 P.161 说明，P.165

第五节：对含受控源的线性网络建立状态方程的系统公式法

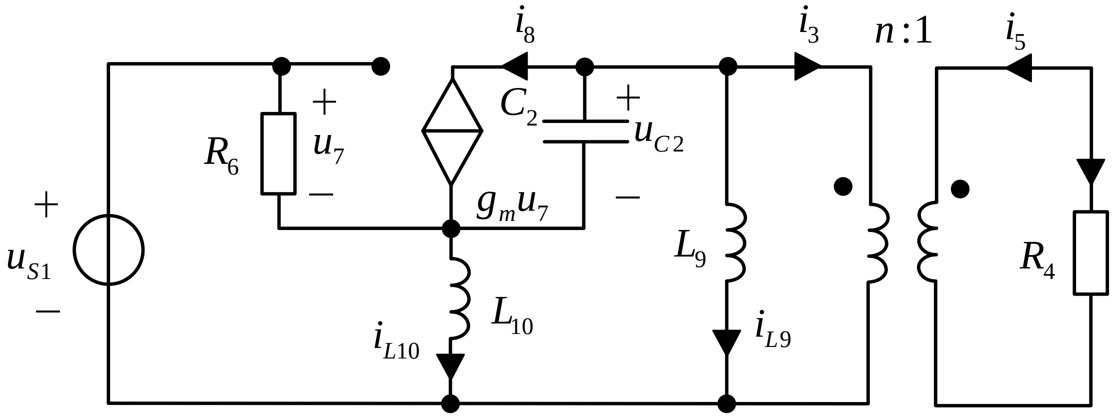
- **例4-5：用系统公式法建立图(a)所示有源网络的状态方程。**



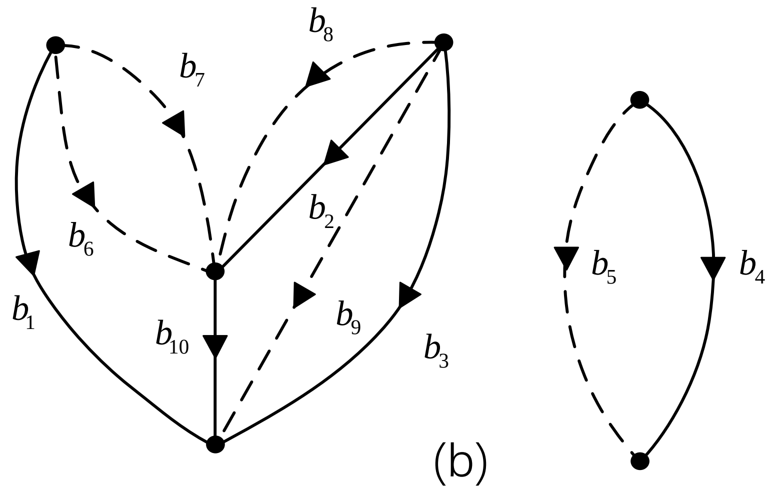
(a)

第五节：对含受控源的线性网络建立状态方程的系统公式法

- **例4-5：用系统公式法建立图(a)所示有源网络的状态方程。**



(a)



(b)

解：该网络为常态网络。作出网络的线形图，选一常态树。受控源VCCS的两条支路(b_7、b_8)均为连支，理想变压器一条支路(b_3)为树支，另一条支路(b_5)为连支。因此，常态树树支为b_1、b_2、b_3、b_4，如图(b)中实线所示。由于该网络含有理想变压器，线形图是分离的，图(b)中由两个树构成一个林。

写出基本割集矩阵：

$$Q_f = \begin{array}{c} \\ V \\ C \\ G \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} V & C & G & G & R & R & R & R & L & L \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad}_{\mathrm{I}} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{Q_l} \end{array} \end{array}$$

由此可得基本子阵Q_l的各分块阵：

$$Q_{VR} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \qquad Q_{VL} = [0 \quad 0]$$

$$Q_{CR} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \qquad Q_{CL} = [0 \quad -1]$$

$$Q_{GR} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q_{GL} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第五节：对含受控源的线性网络建立状态方程的系统公式法

■ **例4-5：用系统公式法建立图(a)所示有源网络的状态方程。**

由于无电感树支和独立电流源支路，因此

$$Q_{\Gamma R}=0 \quad Q_{\Gamma L}=0 \quad Q_{GI}=0$$

按式(4-5-1)，写出电阻支路的电压电流关系方程：

$$\begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ \cdots \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -n & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_6} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_m & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & R_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ \cdots \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$$

由此得参数矩阵：

$$G_R=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_m & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha=\begin{bmatrix} -n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu=\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_G=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_4 \end{bmatrix}$$

第五节：对含受控源的线性网络建立状态方程的系统公式法

■ **例4-5：用系统公式法建立图(a)所示有源网络的状态方程。**

式(4-5-5)、(4-5-6)中各系数矩阵为

$$1+aQ_{GR}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-n&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&-1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&n&n&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$G_RQ_{CR}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\dfrac{1}{R_6}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&g_m&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{R_6}\\0\\g_m\end{bmatrix}$$

$$G_RQ_{GR}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\dfrac{1}{R_6}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&g_m&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\\-1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\-\dfrac{1}{R_6}&0\\0&0\\-g_m&0\end{bmatrix}$$

$$aQ_{GL}=\begin{bmatrix}-n&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-n&-n\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$G_RQ_{VR}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\dfrac{1}{R_6}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&g_m&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{R_6}\\0\\g_m\end{bmatrix}$$

第五节：对含受控源的线性网络建立状态方程的系统公式法

- **例4-5：用系统公式法建立图(a)所示有源网络的状态方程。**

因为$Q_{GI}=0$，所以$aQ_{GI}=0$，$R_GQ_{GI}=0$

$$R_GQ_{GR}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & R_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\R_4 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$1-\mu Q_{GR}^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}n & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\\-1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -n\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mu Q_{CR}^T=\begin{bmatrix}n & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$R_GQ_{GL}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & R_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mu Q_{VR}^T=\begin{bmatrix}n & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

由式(4-5-5)和式(4-5-6)可得

$$\begin{bmatrix}1 & n & n & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_5\\i_6\\i_7\\i_8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{-1}{R_6} & 0\\0 & 0\\-g_m & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{R_6}\\0\\g_m\end{bmatrix}u_{C2}-\begin{bmatrix}-n & -n\\0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{L9}\\i_{L10}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{R_6}\\0\\g_m\end{bmatrix}u_{S1} \quad (4\text{-}5\text{-}8)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\R_4 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_5\\i_6\\i_7\\i_8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -n\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad (4\text{-}5\text{-}9)$$

第五节：对含受控源的线性网络建立状态方程的系统公式法

- **例4-5：用系统公式法建立图(a)所示有源网络的状态方程。**

由式(4-5-9)得

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -nR_4 & 0 & 0 & 0 \\ -R_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}5\text{-}10)$$

将式(4-5-10)代入式(4-5-8)得

$$\begin{bmatrix} 1 & n & n & 0 \\ -\dfrac{nR_4}{R_6} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -nR_4 g_m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{R_6} \\ 0 \\ g_m \end{bmatrix} u_{C2} + \begin{bmatrix} n & n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L9} \\ i_{L10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{R_6} \\ 0 \\ g_m \end{bmatrix} u_{S1}$$

求解上式可得

$$\begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} = \frac{R_6}{R_6 + n^2 R_4} \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{R_6} \\ \dfrac{1}{R_6} \\ 0 \\ g_m \end{bmatrix} u_{C2} + \frac{R_6}{R_6 + n^2 R_4} \begin{bmatrix} n & n \\ \dfrac{n^2 R_4}{R_6} & \dfrac{n^2 R_4}{R_6} \\ 0 & 0 \\ n^2 R_4 g_m & n^2 R_4 g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L9} \\ i_{L10} \end{bmatrix} + \frac{R_6}{R_6 + n^2 R_4} \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{R_6} \\ \dfrac{1}{R_6} \\ 0 \\ g_m \end{bmatrix} u_{S1} \qquad (4\text{-}5\text{-}11)$$

第五节：对含受控源的线性网络建立状态方程的系统公式法

例4-5：用系统公式法建立图(a)所示有源网络的状态方程。

将式(4-5-11)代入式(4-5-10)得

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{R_6}{R_6+n^2R_4}\begin{bmatrix} \dfrac{n^2R_4}{R_6} \\ \dfrac{nR_4}{R_6} \end{bmatrix} u_{C2} + \frac{R_6}{R_6+n^2R_4}\begin{bmatrix} -n^2R_4 & -n^2R_4 \\ -nR_4 & -nR_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{L9} \\ i_{L10} \end{bmatrix} + \frac{R_6}{R_6+n^2R_4}\begin{bmatrix} \dfrac{n^2R_4}{R_6} \\ \dfrac{nR_4}{R_6} \end{bmatrix} u_{S1} \qquad (4\text{-}5\text{-}12)$$

因$C_S = 0$, $L_\Gamma = 0$故式(4-4-16)和(4-4-21)中的参数矩阵为

$$\tilde{C} = C_C = [C_2], \quad \tilde{L} = L_L = \begin{bmatrix} L_9 & 0 \\ 0 & L_{10} \end{bmatrix}$$

将式(4-5-11)和式(4-5-12)分别代入式(4-4-16)和式(4-4-21)，经整理后写为矩阵形式，得

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C2} \\ \dot{i}_{L9} \\ \dot{i}_{L10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-(1+g_mR_6)}{C_2(R_6+n^2R_4)} & \dfrac{-n^2R_4(1+g_mR_6)}{C_2(R_6+n^2R_4)} & \dfrac{R_6(1-n^2R_4g_m)}{C_2(R_6+n^2R_4)} \\ \dfrac{n^2R_4}{L_9(R_6+n^2R_4)} & \dfrac{-n^2R_4R_6}{L_9(R_6+n^2R_4)} & \dfrac{-n^2R_4R_6}{I_9(R_6+n^2R_4)} \\ \dfrac{-R_6}{L_{10}(R_6+n^2R_4)} & \dfrac{-n^2R_4R_6}{L_{10}(R_6+n^2R_4)} & \dfrac{-n^2R_4R_6}{L_{10}(R_6+n^2R_4)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{C2} \\ i_{L9} \\ i_{L10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{-(1+g_mR_6)}{C_2(R_6+n^2R_4)} \\ \dfrac{n^2R_4}{L_9(R_6+n^2R_4)} \\ \dfrac{n^2R_4}{L_{10}(R_6+n^2R_4)} \end{bmatrix} u_{S1} \qquad (4\text{-}5\text{-}13)$$

第六节：建立状态方程的多端口公式

- 如果线性时不变网络中的纯电容回路不含电压源，纯电感割集不含电流源，则 $Q_{VS}=0$，$Q_{\Gamma I}=0$，得 $\hat{\hat{\mathbf{C}}}=0, \hat{\hat{\mathbf{L}}}=0$ （二次参数矩阵）因此：

$$\frac{d}{dt}[\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{u}_C] = -\mathbf{H}_{CC}\mathbf{u}_C - \mathbf{H}_{CL}\mathbf{i}_L - \mathbf{H}_{CV}\mathbf{u}_V - \mathbf{H}_{CI}\mathbf{i}_I$$

$$\frac{d}{dt}[\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{i}_L] = -\mathbf{H}_{LC}\mathbf{u}_C - \mathbf{H}_{LL}\mathbf{i}_L - \mathbf{H}_{LV}\mathbf{u}_V - \mathbf{H}_{LI}\mathbf{i}_I$$

考虑到：

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_C + \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{C}_S\mathbf{Q}_{CS}^T \qquad \tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_L + \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T\mathbf{L}_\Gamma\mathbf{Q}_{\Gamma L}$$

因此：

$$\frac{d}{dt}[\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{u}_C] = \frac{d}{dt}[\mathbf{C}_C\mathbf{u}_C] + \frac{d}{dt}[\mathbf{Q}_{CS}\mathbf{C}_S\mathbf{Q}_{CS}^T\mathbf{u}_C] = \mathbf{i}_C + \mathbf{Q}_{CS}\frac{d}{dt}[\mathbf{C}_S\mathbf{u}_S] = \mathbf{i}_C + \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{i}_S$$

$$\frac{d}{dt}[\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{i}_L] = \frac{d}{dt}[\mathbf{L}_L\mathbf{i}_L] + \frac{d}{dt}[\mathbf{Q}_{\Gamma L}^T\mathbf{L}_\Gamma\mathbf{Q}_{\Gamma L}\mathbf{i}_L] = \mathbf{u}_L + \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T\frac{d}{dt}[\mathbf{L}_\Gamma\mathbf{i}_\Gamma] = \mathbf{u}_L + \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T\mathbf{u}_\Gamma$$

故有：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{i}_C\\ \mathbf{u}_L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\mathbf{H}_{CC} & -\mathbf{H}_{CL}\\ -\mathbf{H}_{LC} & -\mathbf{H}_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_C\\ \mathbf{i}_L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{H}_{CV} & -\mathbf{H}_{CI}\\ -\mathbf{H}_{LV} & -\mathbf{H}_{LI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_V\\ \mathbf{i}_I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{Q}_{CS} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_{\Gamma L}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_S\\ \mathbf{u}_\Gamma\end{bmatrix}$$

四、网络的范式状态方程

2、网络的范式状态方程

- 二次参数矩阵为：

$$\hat{\hat{\mathbf{C}}} = \mathbf{Q}_{CS}\mathbf{C}_S\mathbf{Q}_{VS}^T$$

$$\hat{\hat{\mathbf{L}}} = \mathbf{Q}_{\Gamma L}^T\mathbf{L}_\Gamma\mathbf{Q}_{\Gamma I}$$

则有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{u}_C] = -\mathbf{H}_{CC}\mathbf{u}_c - \mathbf{H}_{CL}\mathbf{i}_L - \mathbf{H}_{CV}\mathbf{u}_V - \mathbf{H}_{CI}\mathbf{i}_I - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{\hat{\mathbf{C}}}\mathbf{u}_V]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{i}_L] = -\mathbf{H}_{LC}\mathbf{u}_C - \mathbf{H}_{LL}\mathbf{i}_L - \mathbf{H}_{LV}\mathbf{u}_V - \mathbf{H}_{LI}\mathbf{i}_I - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{\hat{\mathbf{L}}}\mathbf{i}_I]$$

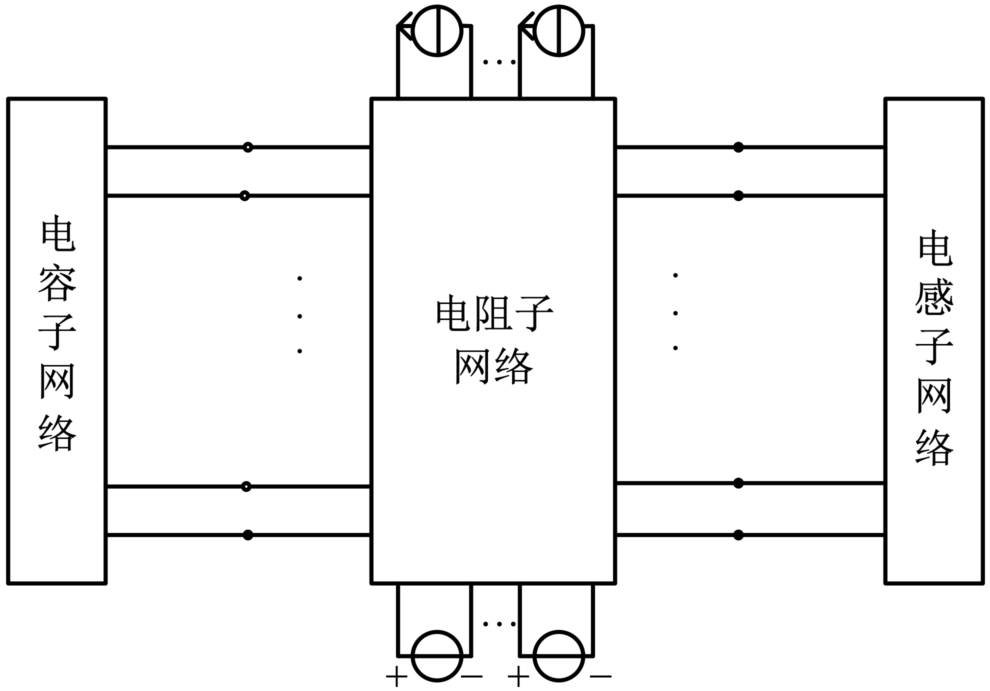
✓ 式中矩阵$\mathbf{H}_{CC}$ 是电导矩阵，$\mathbf{H}_{LL}$ 是电阻矩阵，它们都是对称矩阵，而矩阵$\mathbf{H}_{CL}$ 和$\mathbf{H}_{LC}$ 则都是转移函数矩阵，且 $\mathbf{H}_{LC}=-\mathbf{H}_{CL}^T$ 则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{u}_c\\ \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{i}_L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\mathbf{H}_{CC} & -\mathbf{H}_{CL}\\ -\mathbf{H}_{LC} & -\mathbf{H}_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_C\\ \mathbf{i}_L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{H}_{CV} & -\mathbf{H}_{CI}\\ -\mathbf{H}_{LV} & -\mathbf{H}_{LI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_V\\ \mathbf{i}_I\end{bmatrix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\hat{\hat{\mathbf{C}}}\mathbf{u}_V\\ \hat{\hat{\mathbf{L}}}\mathbf{i}_I\end{bmatrix}$$

第六节：建立状态方程的多端口公式

一、多端口公式法的基本思想

- 将全部动态元件和独立电源从网络中抽出，网络的剩余部分形成一个多端口电阻网络。



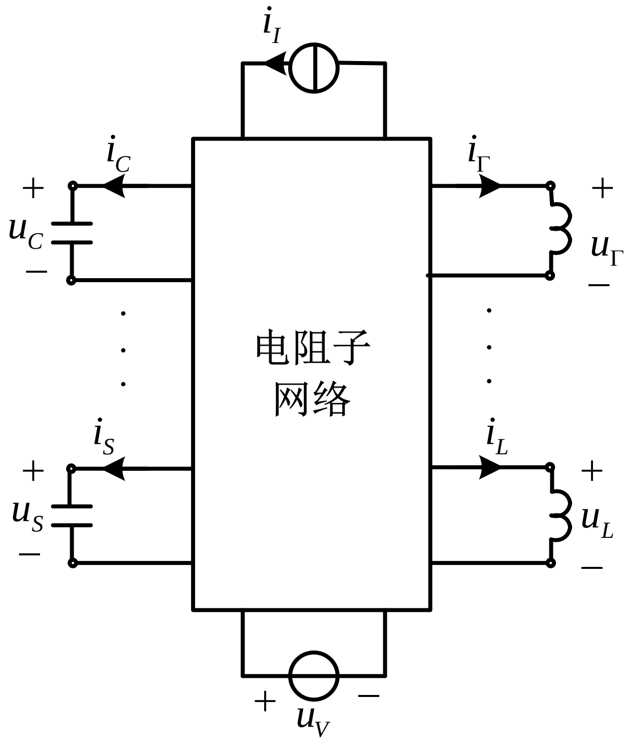
- ✓ 该多端口电阻网络的各网络函数便是8个混合矩阵中的各参数。
- ✓ 在对网络选出一规范树后，对已抽出的元件进一步按树支和连支分类。

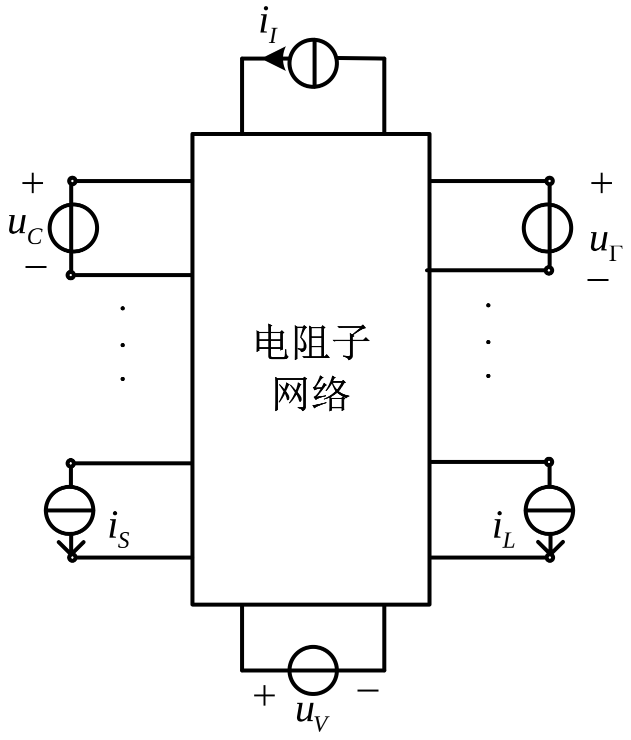
第六节：建立状态方程的多端口公式

一、多端口公式法的基本思想

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_C \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{CC} & -\mathbf{H}_{CL} \\ -\mathbf{H}_{LC} & -\mathbf{H}_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{CV} & -\mathbf{H}_{CI} \\ -\mathbf{H}_{LV} & -\mathbf{H}_{LI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_V \\ \mathbf{i}_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{CS} & 0 \\ 0 & -\mathbf{Q}_{\Gamma L}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_S \\ \mathbf{u}_\Gamma \end{bmatrix}$$

- 为了得到$\mathbf{H}_{CC}$ 、$\mathbf{H}_{LC}$ 等8个混合矩阵，根据替代定理，可设想将抽出的各类动态元件用适当的独立源代替。由于式中右端变量有 $\mathbf{u}_C$、$\mathbf{u}_\Gamma$、$\mathbf{i}_L$、$\mathbf{i}_S$，故用电压源代替树支电容和树支电感，用电流源代替连支电感和连支电容。





第六节：建立状态方程的多端口公式

二、混合矩阵中的各元素

- 参照 § 3-2中的计算 H(s) 矩阵各元素方法求混合矩阵中的各元素。
- 假定除树支电容端口外其余各类端口的激励源（含用以替代动态元件的电源）置于零，即断开连支电感、电容和电流源所接端口，短接树支电感和电压源所接端口。（$\mathbf{i}_L$=$\mathbf{i}_S$=$\mathbf{i}_I$=0），（$\mathbf{u}_\Gamma$=$\mathbf{u}_V$=0）在树支电容端口电压 $\mathbf{u}_C$ 作用下，求 $\mathbf{i}_C$ 和 $\mathbf{u}_L$ 。即

$$\begin{cases} \mathbf{i}_C = -\mathbf{H}_{CC}\mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_L = -\mathbf{H}_{LC}\mathbf{u}_C \end{cases}$$

✓ 由此可以确定 $\mathbf{H}_{CC}$ 和 $\mathbf{H}_{LC}$。

第六节：建立状态方程的多端口公式

二、混合矩阵中的各元素

- 在连支电感电流 i_L 单独作用下（$u_C=u_V=u_I=0$），（$i_I=i_S=0$），求 i_C 和 u_L。即：

$$\begin{cases} \mathbf{i}_C = -\mathbf{H}_{CL}\mathbf{i}_L \\ \mathbf{u}_L = -\mathbf{H}_{LL}\mathbf{i}_L \end{cases}$$

✓ 由此可以确定 H_{CL} 和 H_{LL}。

- 在电压源端口电压 u_V 单独作用下（$u_C=u_I=0$），（$i_L=i_I=i_S=0$），求 i_C 和 u_L。即：

$$\begin{cases} \mathbf{i}_C = -\mathbf{H}_{CV}\mathbf{u}_V \\ \mathbf{u}_L = -\mathbf{H}_{LV}\mathbf{i}_V \end{cases}$$

✓ 由此可以确定 H_{CV} 和 H_{LV}。

第六节：建立状态方程的多端口公式

二、混合矩阵中的各元素

- 在电流源电流 i_I 单独作用下（$u_C=u_V=u_\Gamma=0$），（$i_L=i_S=0$），求 i_C 和 u_L 。即：

$$\begin{cases} \mathbf{i}_C = -\mathbf{H}_{CI}\mathbf{i}_I \\ \mathbf{u}_L = -\mathbf{H}_{LI}\mathbf{i}_I \end{cases}$$

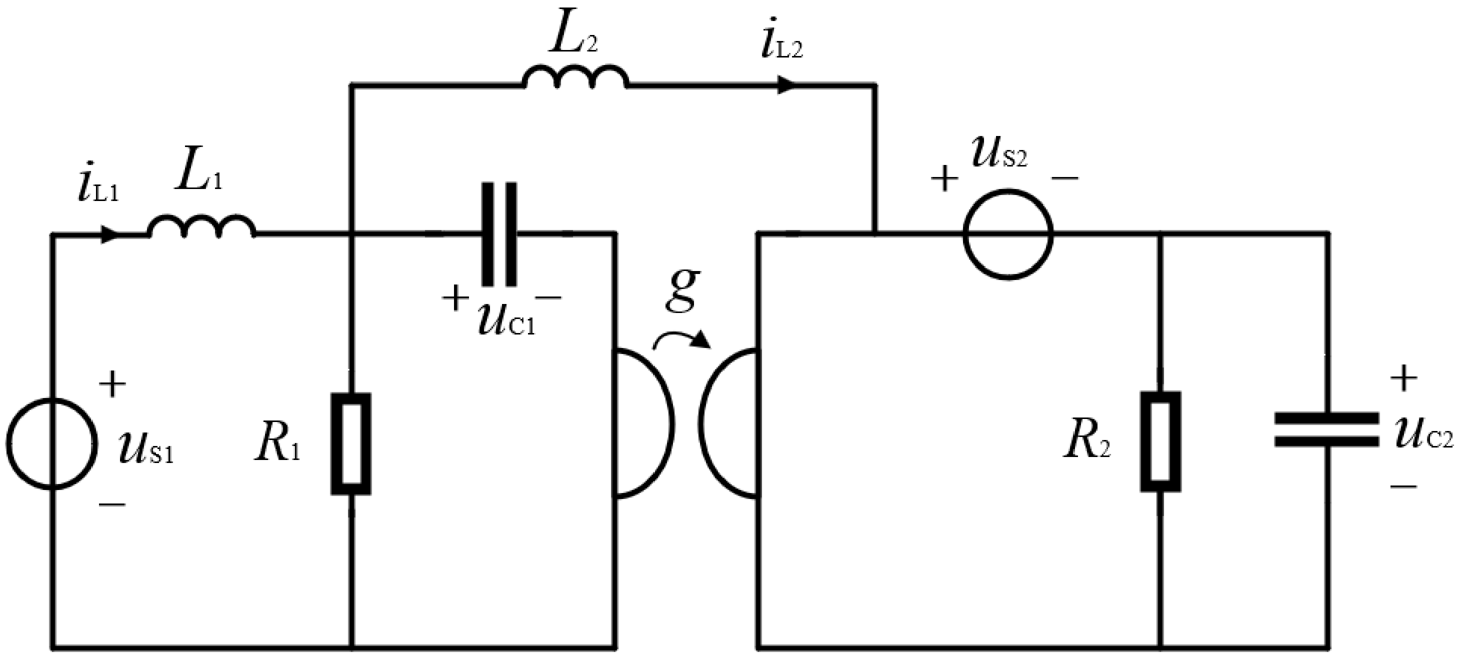
✓ 由此可以确定 H_{CI} 和 H_{LI}。

- 多端口公式法把对线性时不变动态网络建立一阶微分方程组的问题转化为对线性时不变多端口电阻网络计算转移函数的问题，可使分析计算过程得到简化。如果网络中含受控源，只要受控源的存在不影响网络的复杂性阶数，则多端口公式法仍然适用。

例4-5 P.167　　例4-6 P.169

第六节：建立状态方程的多端口公式

例4-6-1 用多端口公式建立如图(a)所示线性网络的状态方程。



(a)

第六节：建立状态方程的多端口公式

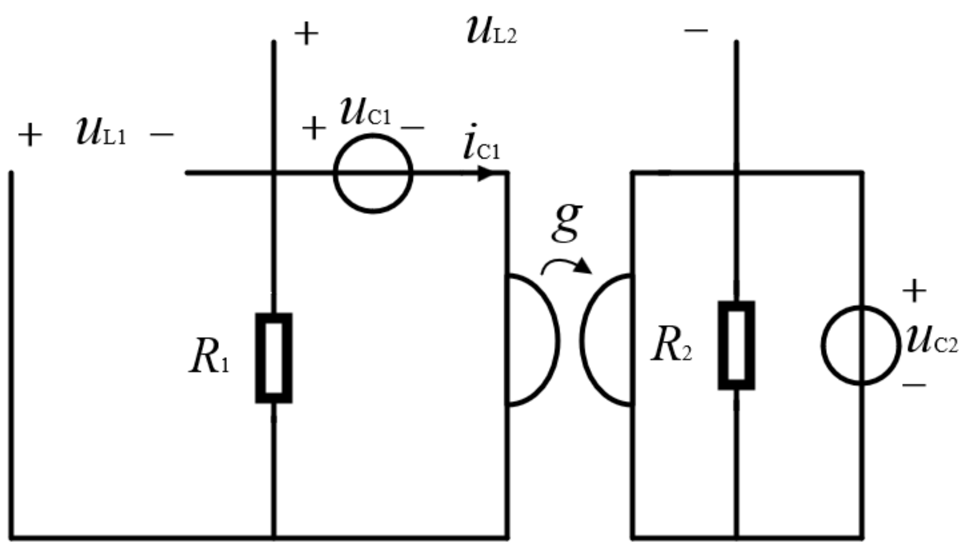
例4-6-1 用多端口公式建立如图(a)所示线性网络的状态方程。

- 解：该网络为常态网络，因此两个电感支路均为连支，电压源和电容支路全为树支。故 $Q_{CS}=0$，$Q_{\Gamma L}^{T}=0$。

将两条电感支路断开、两个电压源支路短路，并以电压为$\boldsymbol{u_{C1}}$、$\boldsymbol{u_{C2}}$的两个电压源分别替代电容$\boldsymbol{C_1}$、$\boldsymbol{C_2}$，如图(b)所示。对于图(b)求$\boldsymbol{i_{C1}}$、$\boldsymbol{i_{C2}}$和$\boldsymbol{u_{L1}}$、$\boldsymbol{u_{L2}}$，得：

$$\begin{bmatrix} i_{C1} \\ i_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & -\dfrac{(1+g^2R_1R_2)}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & gR_1 \\ 0 & -(1+gR_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix}$$



(b)

则有

$$-H_{CC} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & -\dfrac{1+g^2R_1R_2}{R_2} \end{bmatrix} \qquad -H_{LC} = \begin{bmatrix} 0 & gR_1 \\ 0 & -(1+gR_1) \end{bmatrix}$$

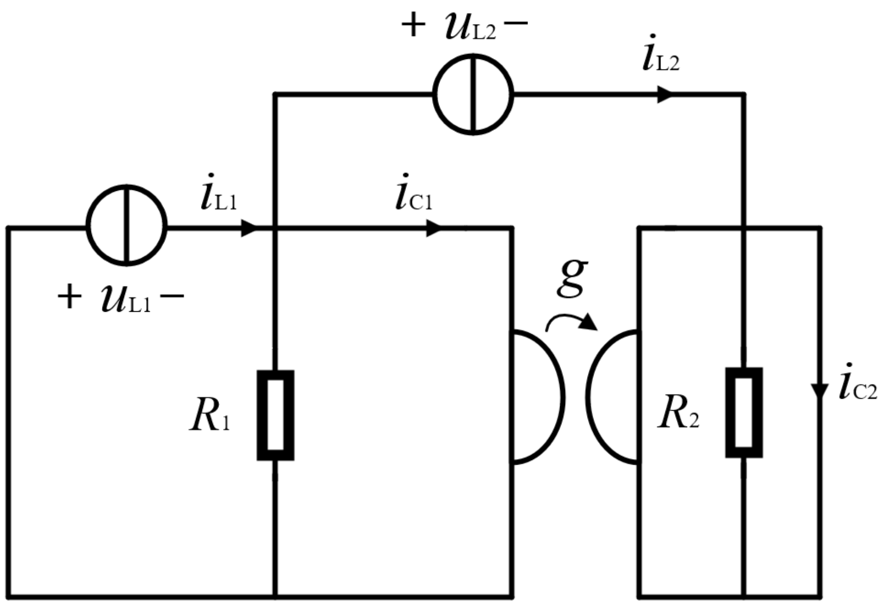
第六节：建立状态方程的多端口公式

例4-6-1 用多端口公式建立如图(a)所示线性网络的状态方程。

- 将图(a)网络中的全部电容支路和电压源支路短接，并以电流$\boldsymbol{i_{L1}}$、$\boldsymbol{i_{L2}}$ 的两个电流源分别替代电感$\boldsymbol{L_1}$、$\boldsymbol{L_2}$，如图(c)所示。对图(c)求$\boldsymbol{i_{C1}}$、$\boldsymbol{i_{C2}}$和$\boldsymbol{u_{L1}}$、 $\boldsymbol{u_{L2}}$，得：

$$\begin{bmatrix} i_{C1} \\ i_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ gR_1 & 1-gR_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}$$



(c)

因此

$$-H_{CL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ gR_1 & 1-gR_1 \end{bmatrix} \qquad -H_{LL} = \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & -R_1 \end{bmatrix}$$

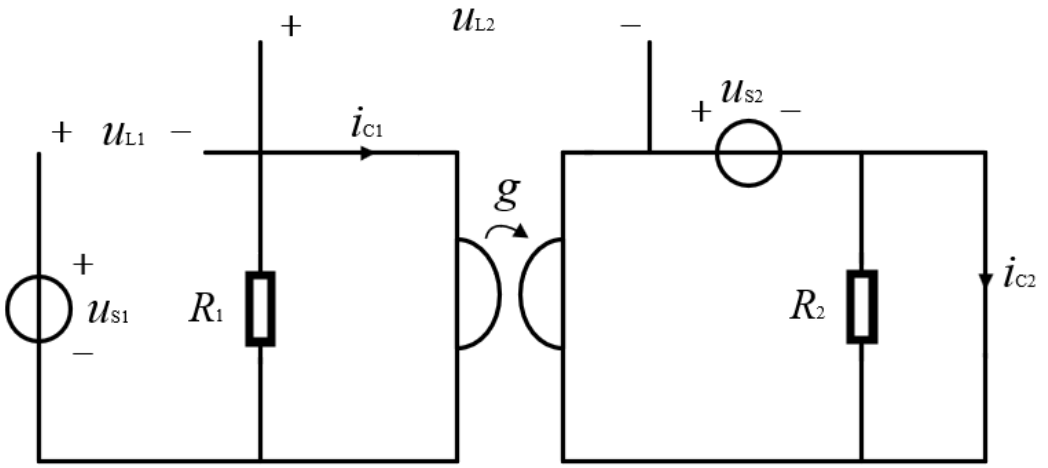
第六节：建立状态方程的多端口公式

例4-6-1 用多端口公式建立如图(a)所示线性网络的状态方程。

- 将图(a)网络中的两条电感支路断开、两条电容支路短接，如图(d)所示。对图(d)求$\boldsymbol{i_{C1}}$、$\boldsymbol{i_{C2}}$和$\boldsymbol{u_{L1}}$、$\boldsymbol{u_{L2}}$，得：

$$\begin{bmatrix} i_{C1} \\ i_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -gR_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & gR_1 \\ 0 & -(1+gR_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \end{bmatrix}$$



(d)

故

$$-H_{CV} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -gR_1 \end{bmatrix} \qquad -H_{LV} = \begin{bmatrix} 1 & gR_1 \\ 0 & -(1+gR_1) \end{bmatrix}$$

第六节：建立状态方程的多端口公式

例4-6-1 用多端口公式建立如图(a)所示线性网络的状态方程。

- 由于网络中不含电流源，则$\mathbf{H_{CI}=0}$，$\mathbf{H_{LI}=0}$。根据以上所求系数矩阵，可以得到：

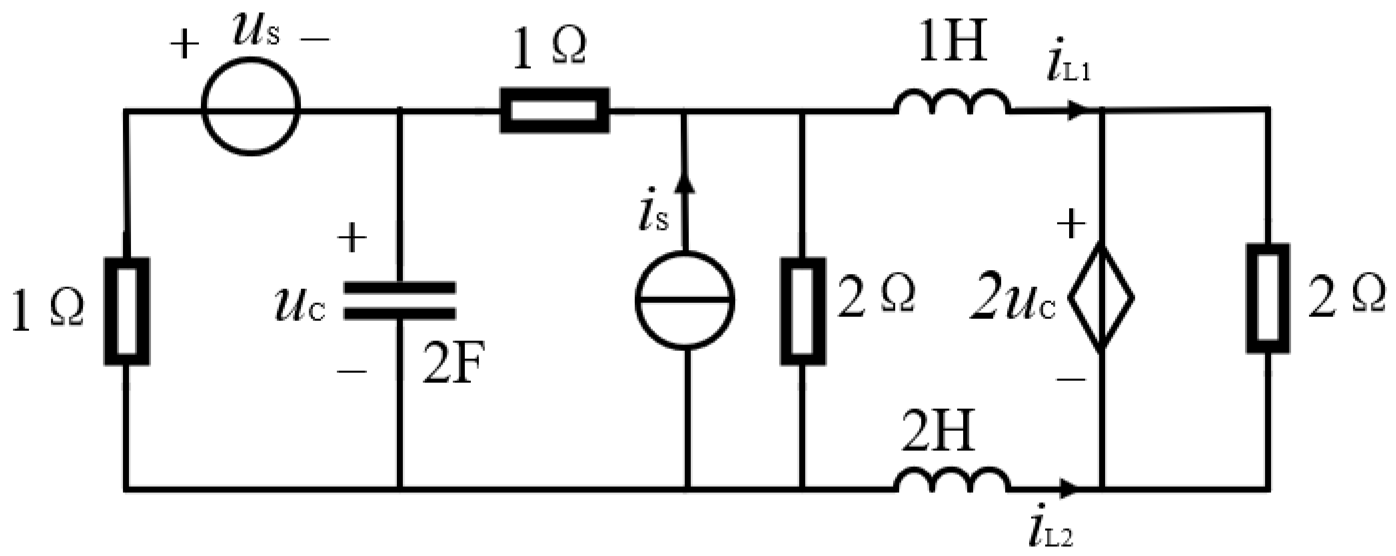
$$
\begin{bmatrix} C_1\dot{u}_{C1} \\ C_2\dot{u}_{C2} \\ L_1\dot{i}_{L1} \\ L_2\dot{i}_{L2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & g & 0 & 0 \\
-g & -\dfrac{1+g^2R_1R_2}{R_2} & gR_1 & 1-gR_1 \\
0 & gR_1 & -R_1 & R_1 \\
0 & -(1+gR_1) & R_1 & -R_1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & g \\
0 & -gR_1 \\
1 & gR_1 \\
0 & -(1+gR_1)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \end{bmatrix}
$$

网络的状态方程为：

$$
\begin{bmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \\ \dot{i}_{L1} \\ \dot{i}_{L2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & \dfrac{g}{C_1} & 0 & 0 \\
-\dfrac{g}{C_2} & -\dfrac{1+g^2R_1R_2}{C_2R_2} & \dfrac{gR_1}{C_2} & \dfrac{1-gR_1}{C_2} \\
0 & \dfrac{gR_1}{L_1} & \dfrac{-R_1}{L_1} & \dfrac{R_1}{L_1} \\
0 & -\dfrac{(1+gR_1)}{L_2} & \dfrac{R_1}{L_2} & -\dfrac{R_1}{L_2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & \dfrac{g}{C_1} \\
0 & -\dfrac{gR_1}{C_2} \\
\dfrac{1}{L_1} & \dfrac{gR_1}{L_1} \\
0 & -\dfrac{(1+gR_1)}{L_2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \end{bmatrix}
$$

第六节：建立状态方程的多端口公式

例4-6-2 用多端口公式建立图(a)所示线性网络的状态方程。

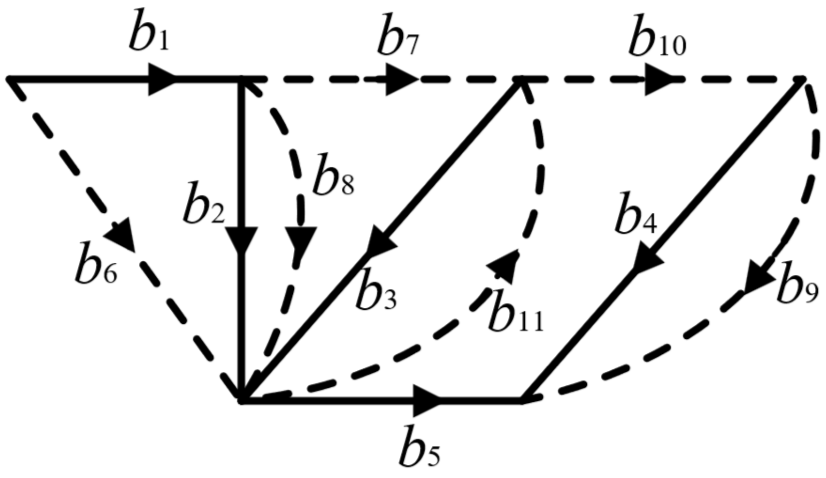


图(a)

第六节：建立状态方程的多端口公式

例4-6-2 用多端口公式建立图(a)所示线性网络的状态方程。

- **解：** 图(a)所示网络为非常态网络，含一个纯电感割集，不含纯电容回路，网络阶数为3-1=2。绘出该网络的线形图，并选择一规范树。对于网络中的VCVS，应将控制支路作为连支，受控支路作为树支，故选支路b_1、b_2、b_3、b_4、b_5为树支，如图(b)中实线所示。状态变量为树支电容电压u_C和连支电感电流i_{L1}。



图(b)

由于网络中只有一个电感树支（b_5），且它所决定的基本割集仅含一个电感连支（b_{10}），因此，$Q_{\Gamma L}=[1]$，又因没有纯电容电路，$Q_{CS}=[0]$。可得二次参数矩阵为：

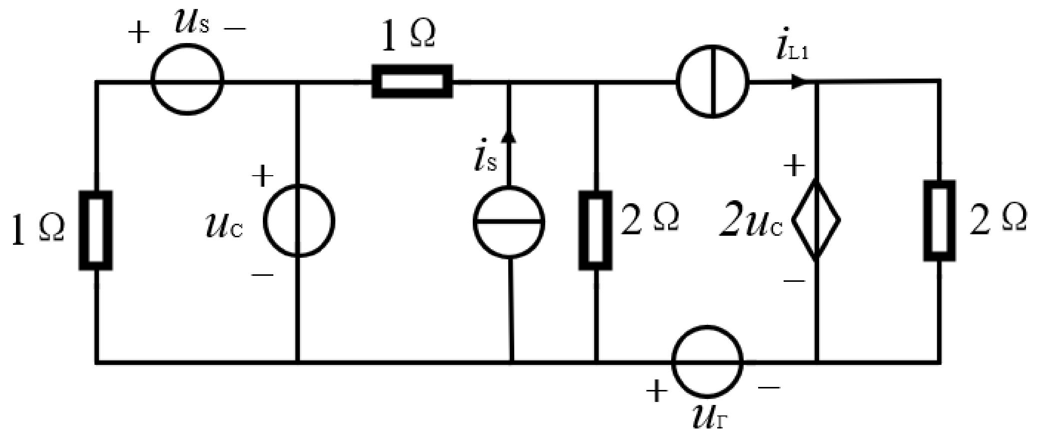
$$\tilde{C}=C_C+Q_{CS}C_CQ_{CS}^T=2$$

$$\tilde{L}=L_L+Q_{\Gamma L}L_\Gamma Q_{\Gamma L}^T=3$$

第六节：建立状态方程的多端口公式

例4-6-2 用多端口公式建立图(a)所示线性网络的状态方程。

- 对于图(a)，将树支电容、树支电感分别用电压$\boldsymbol{u}_{C}$和$\boldsymbol{u}_{\Gamma}$的电压源代替，将连支电感用电流为$\boldsymbol{i}_{L1}$的电流源代替，其等效电路如图(a)所示。



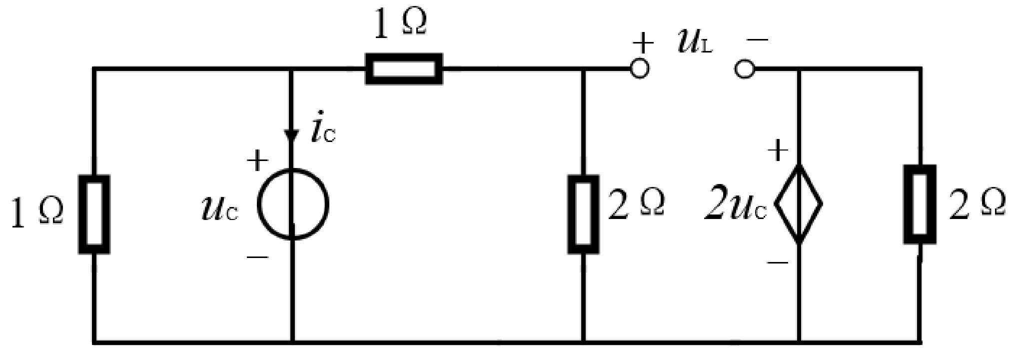
(a)

在树支电容端口电压$\boldsymbol{u}_{C}$单独作用下（图(b))求$\boldsymbol{i}_{C}$和$\boldsymbol{i}_{L}$，得

$$i_C = -\frac{4}{3}u_C \quad u_L = -\frac{4}{3}u_C$$

有

$$-H_{CC} = -\frac{4}{3} \quad -H_{LC} = -\frac{4}{3}$$



(b)

第六节：建立状态方程的多端口公式

例4-6-2 用多端口公式建立图(a)所示线性网络的状态方程。

- 在连支电感端口电流$\boldsymbol{i}_{\mathbf{L1}}$单独作用下（图(c)）求$\boldsymbol{i}_{\mathbf{C}}$和$\boldsymbol{u}_{\mathbf{L}}$，得

$$i_C = -\frac{2}{3} i_{L1} \quad u_L = -\frac{2}{3} i_{L1}$$

可得

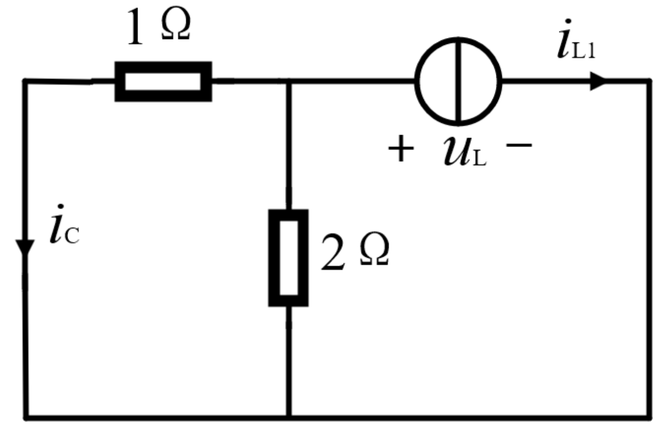
$$-H_{CL} = -\frac{2}{3} \quad -H_{LL} = -\frac{2}{3}$$

在独立电压源$\boldsymbol{u}_{\mathbf{S}}$单独作用下（图(d))求$\boldsymbol{i}_{\mathbf{C}}$和$\boldsymbol{u}_{\mathbf{L}}$，得

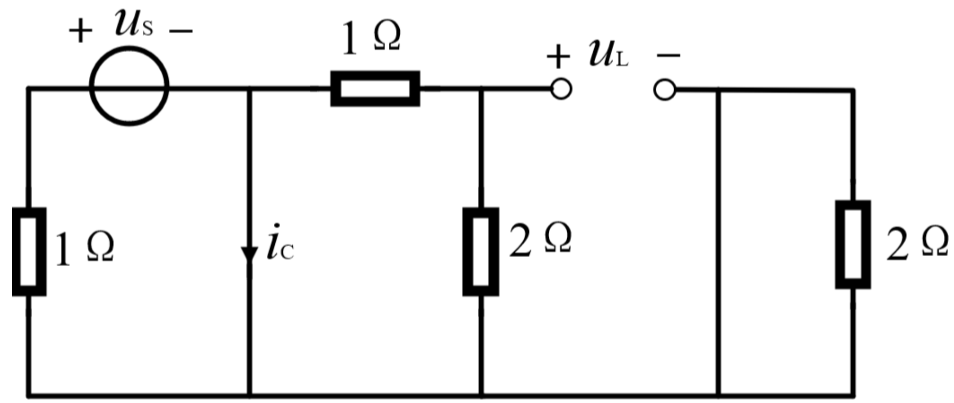
$$i_C = -u_S \quad u_L = 0$$

则有

$$-H_{CV} = -1 \quad -H_{LV} = 0$$



(c)



(d)

第六节：建立状态方程的多端口公式

例4-6-2 用多端口公式建立图(a)所示线性网络的状态方程。

- 在独立电流源$\boldsymbol{i}_S$单独作用下（图(e)）求$\boldsymbol{i}_C$和$\boldsymbol{u}_L$，得

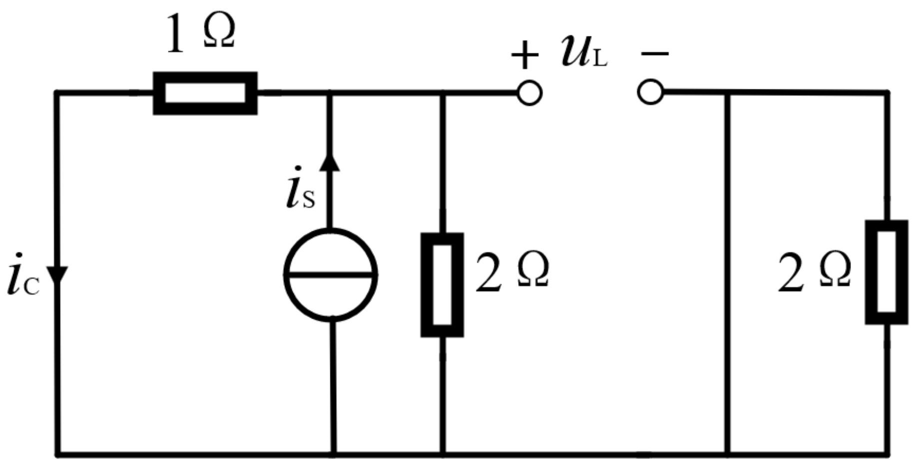
$$i_C=-\frac{2}{3}i_S \quad u_L=-\frac{2}{3}i_S \quad \text{可得：} \quad -H_{CI}=\frac{2}{3} \quad -H_{LI}=\frac{2}{3}$$

将以上所求系数代入式（4-6-1），写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2\dot{u}_{C2} \\ 3\dot{i}_{L1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

网络的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C2} \\ \dot{i}_{L1} \end{bmatrix}==\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$



(e)