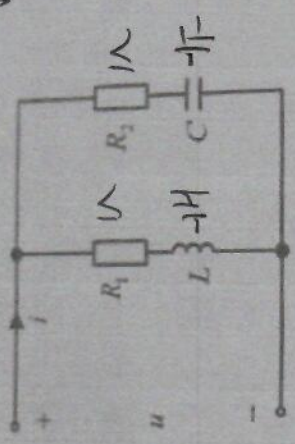


2017.1.1

一、(10分) 图1是一个由线性时不变电阻、电感和电容元件构成的一端口网络。其中， $R_1 = R_2 = 1\Omega$ ， $L = 1H$ ， $C = 1F$ ，储能元件的初始储能为零。请判断该网络是否为零功率有源网络？是否为零功率无源网络？



零功率有源网络 (有源元件)，零功率无源网络 (无源元件)
 $u = \frac{d}{dt} \int u dt$

$$u_L = u - i R_1 - i R_2 = u - 2i$$

$$i_C = \frac{u - u_L}{R_2} = u - \int i_C dt$$

解答：

$$u_L(t) = i_C(t)$$

$$u_L(t) = u(t) - R_1 i_L(t) = u(t) + \int_0^t u_L(\tau) d\tau$$

$$i_C(t) = \frac{u(t) - u_L(t)}{R_2} = u(t) + \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

因此可知：

$$u_L(t) = i_C(t)$$

一端口网络的端口电流为：

$$i(t) = i_L(t) + i_C(t) = \frac{u(t) - u_L(t)}{R_1} + i_C(t) = u(t) - u_L(t) + i_C(t) = u(t)$$

由此可得：

$$W(t_0) + W(t_0, t) = \int_0^t u(\tau) i(\tau) d\tau = \int_0^t u^2(\tau) d\tau \geq 0$$

故该一端口网络为零功率无源网络。

因为该网络中含有2个有源元件（电容和电感），所以该网络为传统有源网络。

二、(10分) 列写图2所示含零泛器电路的节点方程（选择节点6为参考节点）。

2017.1.1

解答:

以节点 6 为参考节点, 断开零泛器后, 节点导纳矩阵为:

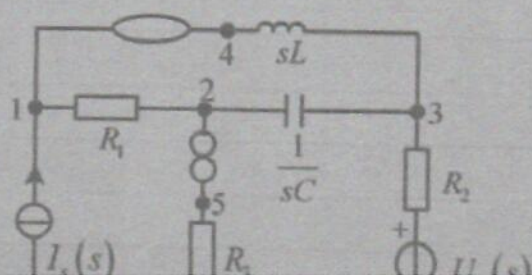
$$Y_n(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & sC + \frac{1}{R_1} & -sC & 0 & 0 \\ 0 & -sC & sC + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

节点电流向量为:

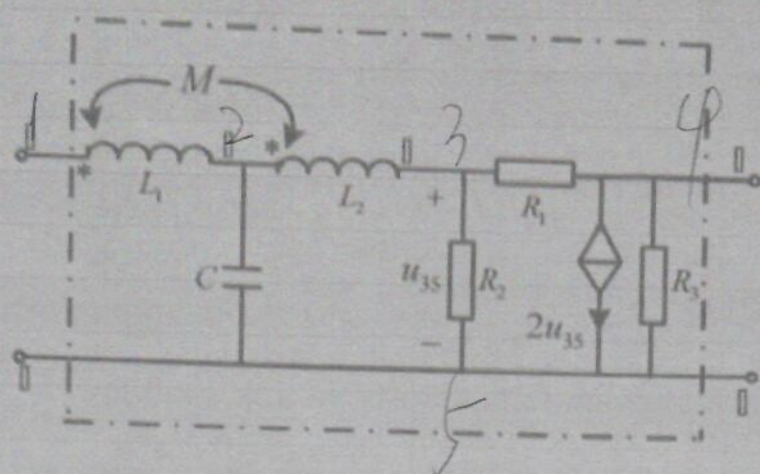
$$I_n(s) = \begin{bmatrix} I_s & 0 & \frac{U_s}{R_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

由于节点 1 和 4 之间接有一个零器, 将导纳矩阵中的第 4 列元素加到第 1 列元素中去, 删除第 4 列元素, 同事删除节点电压向量中的变量 U_{n4} 。节点 2 和 5 之间接有一个泛器, 将导纳矩阵中的第 5 行元素加到第 2 行元素中去, 删除第 5 行元素, 同事删除 $I_n(s)$ 向量中的第 5 个元素, 得到的节点方程如下:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & sC + \frac{1}{R_1} & -sC & \frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{sL} & -sC & sC + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} & 0 \\ \frac{1}{sL} & 0 & -\frac{1}{sL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ 0 \\ \frac{U_s}{R_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



三、(20 分) 图 3 所示的线性二端口网络中, 已知 $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 2H$, $M = 1H$, $C = 1F$, 写出其原始不定导纳矩阵, 并根据原始不定导纳矩阵求出该二端口网络的短路导纳矩阵。



解答:

1) 用观察法写出的该网络的原始不定导纳矩阵

令: $D = s(L_1 L_2 - M^2) = 3s$

电流 $i_{2s} = 2u_{3s} = 2u_3 - 2u_5$, 故原始不定导纳矩阵为:

$$Y_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{D} & -\frac{L_2 + M}{D} & \frac{M}{D} & 0 & 0 \\ -\frac{L_2 + M}{D} & sC + \frac{L_1 + L_2 + 2M}{D} & -\frac{L_1 + M}{D} & 0 & -sC \\ \frac{M}{D} & -\frac{L_1 + M}{D} & G_1 + G_2 + \frac{L_1}{D} & -G_1 & -G_2 \\ 0 & 0 & -G_1 + 2 & G_1 + G_3 & -G_3 - 2 \\ 0 & -sC & -G_2 - 2 & -G_3 & sC + G_2 + G_3 + 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3s} & -\frac{1}{s} & \frac{1}{3s} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{s} & s + \frac{2}{s} & -\frac{1}{s} & 0 & -s \\ \frac{1}{3s} & -\frac{1}{s} & 2 + \frac{2}{3s} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -s & -3 & -1 & s + 4 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{2}{3s} - \frac{1}{s^3 + 2s}$$

可得该二端口网络的短路导纳矩阵为:

$$\mathbf{Y}_{sc}(s) = \begin{bmatrix} k - \frac{\left(k - \frac{1}{3s}\right)^2}{k+2} & \frac{\left(k - \frac{1}{3s}\right)}{k+2} \\ -\frac{\left(k - \frac{1}{3s}\right)}{k+2} & 2 + \frac{1}{k+2} \end{bmatrix}$$

四、(20 分) 图 4 图 5 所示线性网中, $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 1\text{H}$, $M = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{H}$,

$C = 1\text{F}$, $\varepsilon(t)$ 表示单位阶跃函数, 单位为 V。电压初始值 $u(0_-) = 1\text{V}$, 电流初始值

$i_1(0_-) = 1\text{A}$, $i_2(0_-) = 2\text{A}$ 。

(1) 列写状态方程, 画出对应的状态转移图;

(2) 用 Mason 公式求出转移函数 $T_1 = \frac{U(s)}{E(s)}$ 、预解矩阵 $\Phi(s)$;

(3) 求电流 $I_1(s)$ 。

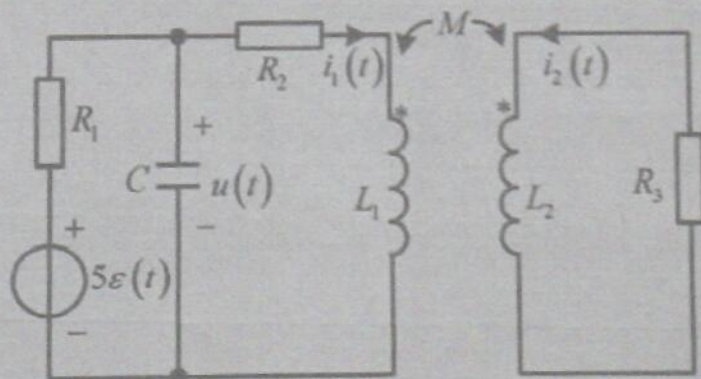


图 4

解答:

(1) 选取 $u(t)$ 、 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 为状态变量

令: $u_1(t) = u(t) - R_2 i_1(t)$, $u_2(t) = -R_3 i_2(t)$, 由互感电路, 可知:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

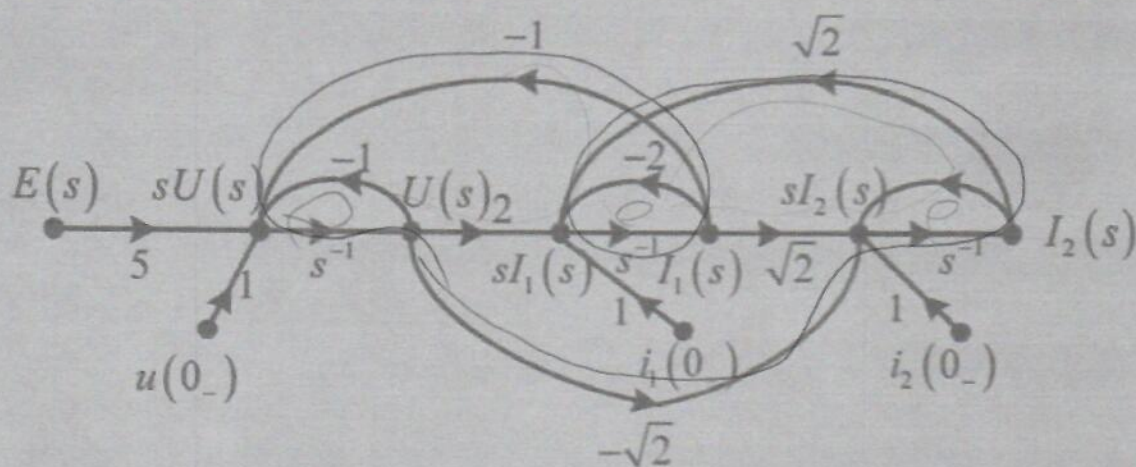
又从电路可知:

$$C \frac{du(t)}{dt} = \frac{5\varepsilon(t) - u(t)}{R_1} - i_1(t)$$

将参数代入上述方程并整理, 可得状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \frac{du(t)}{dt} \\ \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$

可画出相应的状态转移图:



(2) 由 Mason 公式可知: 图行列式为

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (-s^{-1} - 2s^{-1} - 2s^{-1} - 2s^{-2} + 2s^{-2} + 2s^{-3}) + (2s^{-2} + 2s^{-2} + 4s^{-2} + 4s^{-3} - 2s^{-3}) - (-4s^{-3}) \\ &= 1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3} \end{aligned}$$

求转移函数 T_1 : $P_1 = 5s^{-1}$, $\Delta_1 = 1 - (-2s^{-1} - 2s^{-1} + 2s^{-2}) + 4s^{-2} = 1 + 4s^{-1} + 2s^{-2}$

$$T_1 = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{5s^{-1} + 20s^{-2} + 10s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{5s^2 + 20s + 10}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

求预解矩阵 $\phi(s)$:

$$\phi_{12}(s) = \frac{-s^{-2} - 2s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{-s - 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

$$\phi_{13}(s) = \frac{-\sqrt{2}s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{-\sqrt{2}}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

$$\phi_{21}(s) = \frac{2s^{-2} + 4s^{-3} - 2s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{2s + 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

$$\phi_{22}(s) = \frac{s^{-1} + 3s^{-2} + 2s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

$$\phi_{23}(s) = \frac{\sqrt{2}s^{-2} + \sqrt{2}s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{\sqrt{2}s + \sqrt{2}}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

$$\phi_{31}(s) = \frac{-\sqrt{2}s^{-2} + \sqrt{2}s^{-3} - 2\sqrt{2}s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{-\sqrt{2}s - \sqrt{2}}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

$$\phi_{32}(s) = \frac{\sqrt{2}s^{-2} + \sqrt{2}s^{-3} + \sqrt{2}s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{\sqrt{2}s + 2\sqrt{2}}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

$$\phi_{33}(s) = \frac{s^{-1} + 3s^{-2} + 2s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

(3) 求电流, 由 Mason 公式先求出转移函数:

$$T_{11}(s) = \frac{I_1(s)}{E(s)} = \frac{10s^{-2} + 20s^{-3} - 10s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 8s^{-2} + 4s^{-3}} = \frac{10s + 10}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \phi_{21}(s)u(0_-) + \phi_{22}(s)i_1(0_-) + \phi_{23}(s)i_2(0_-) + T_{11}(s)E(s) \\ &= \frac{2s + 2 + s^2 + 3s + 2 + 2\sqrt{2}s + 2\sqrt{2}}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} + \frac{10s + 10}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{s^2 + (5 + 2\sqrt{2})s + 4 + 2\sqrt{2}}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} + \frac{10s + 10}{s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 4s} = \frac{s^3 + (5 + \sqrt{2})s^2 + (14 + 2\sqrt{2})s + 10}{s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 4s} \end{aligned}$$

五、(20 分) 图 5 所示电路中, 已知 $G_1 = 4S$, $G_2 = G_3 = 2S$, $G_4 = 7S$, $\beta = 3$, $U_s = 2V$ 。

选择节点 0 为参考节点。

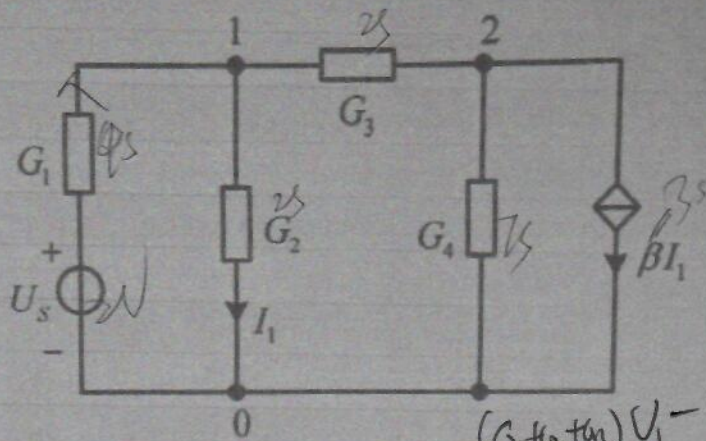


图 5

解答:

(1) 节点电压方程:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)U_1 - G_3U_2 = G_1U_s \\ -G_3U_1 + (G_3 + G_4)U_2 = -\beta I_1 \\ I_1 = G_2U_1 \end{cases}$$

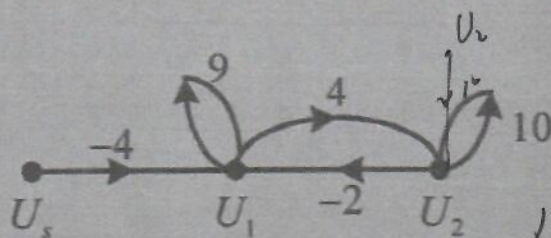
代入参数并整理后可得:

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} U_s$$

(2) 联接矩阵

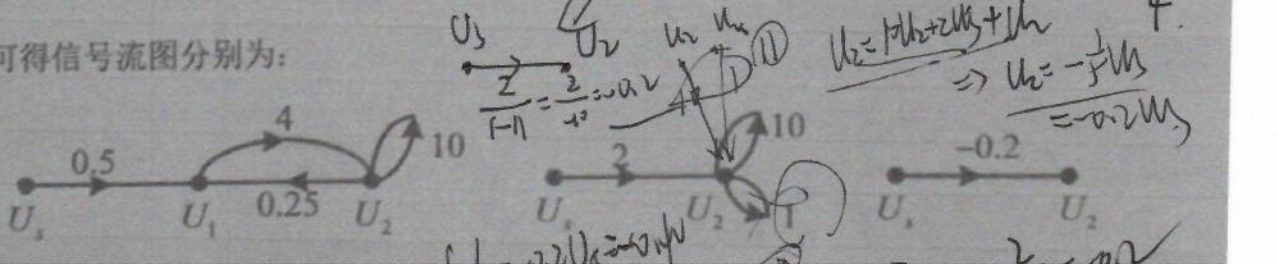
$$C = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 4 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 信号流图



(4) 由信号流图变换规则求节点电压 \$U_2\$

先消除传输值为 9 的自环, 再消除节点 \$U_1\$, 再将 2 个自环用同方向并联后, 消除该自环, 可得信号流图分别为:



六、(20分) 图6所示线性时不变网络中, 已知 $u_s(t) = (\sqrt{2}U_s \cos \omega t) \varepsilon(t)$ V, ($\varepsilon(t)$ 为单位阶跃函数), $R = 5\Omega$, $L = 0.02\text{H}$, $C = 0.01\text{F}$, $\omega = 100\text{rad/s}$, 储能元件中的初始储能均为零。试求:

(1) 网络函数 $T(s) = \frac{U_o(s)}{U_s(s)}$ 。

(2) 网络达到稳态后, 用符号网络函数法求出上述频域网络函数对参数 R 、 L 的增益灵敏度和相位灵敏度。

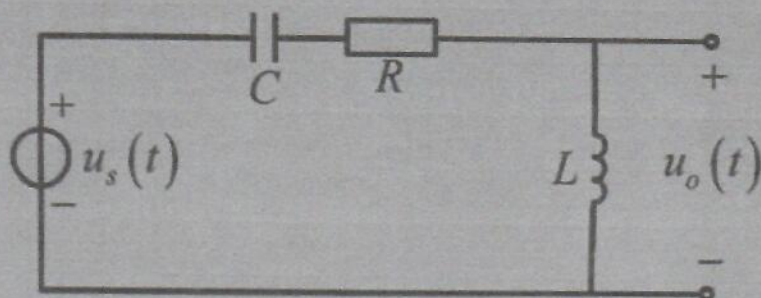


图6

解答:

(1) 求网络函数:

$$T(s) = \frac{U_o(s)}{U_s(s)} = \frac{sL}{sL + R + 1/sC} = \frac{LCs^2}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{2s^2}{2s^2 + 500s + 10000}$$

(2) 求增益灵敏度和相位灵敏度:

$$T(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1} = \frac{-2}{-2 + j5 + 1} = \frac{\sqrt{26}}{13} \angle 78.7^\circ = \frac{\sqrt{26}}{13} \angle 1.37$$

$$S_R^{T(j\omega)} = R \frac{\partial \ln T(j\omega)}{\partial R} = -R \frac{jC\omega}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1} = \frac{-j5}{-1 + j5} = -\frac{25}{26} + j\frac{5}{26}$$

$$S_R^{|T(j\omega)|} = -\frac{25}{26} = -0.96$$

$$S_R^{\angle T(j\omega)} = \frac{1}{\phi} \frac{5}{26} = \frac{1}{1.37} \times \frac{5}{26} = 0.14$$

$$S_L^{T(j\omega)} = L \frac{\partial \ln T(j\omega)}{\partial L} = L \frac{-C\omega^2}{-LC\omega^2} - L \frac{-C\omega^2}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1} = 1 - \frac{-2}{-1 + j5} = \frac{-1 - j5}{1 - j5} = \frac{12}{13} - j\frac{5}{13}$$

$$S_L^{|T(j\omega)|} = \frac{12}{13} = 0.92$$

$$S_L^{\angle T(j\omega)} = -\frac{1}{\phi} \frac{5}{13} = -\frac{1}{1.37} \times \frac{5}{13} = -0.28$$

Handwritten notes:
 $F = a + jb$
 $= F / (a + jb)$
 $F = |F| e^{j\theta}$
 $= |F| \angle \theta$

Handwritten notes:
 $a + jb = 14 \angle 0^\circ$
 $\cdot |F| \angle 0^\circ$
 $\frac{78.7^\circ}{180^\circ} \times 2 = 1.37$