目次

この章では，実領域における常微分方程式の解の存在性と一意性に関する命題を扱う。参考文献は [?] takano である。

まず，記号や用語の準備をする。以下では t を実数とし，$x = (x^0, x^1, \ldots, x^{n-1})$ を $\mathbb{R}^n$ の元とする。E を $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の部分集合とし,

$$f\colon E \to \mathbb{R}^n; (t, x) \mapsto f(t, x) = (f^0(t, x), f^1(t, x), \ldots, f^{n-1}(t, x)) \tag{0.0.1}$$

を既知関数とする。以降,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{0.0.2}$$

\wtrf@n

で表される微分方程式を扱う。成分毎に書けば,

$$\frac{dx^j}{dt} = f^j\bigl(t, x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}\bigr), \quad (0 \leq j \leq n-1) \tag{0.0.3}$$

\wtrf@n

である。

程式の解 **定義 0.0.1.** I を $\mathbb{R}$ 上の区間とする。$x = x(t)$ が区間 I における式 (0.0.2) equ:ODE_R-微分方程式（ベクトル表記）の解であるとは,

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n, \forall t \in I, \frac{dx^j(t)}{dt} = f^j\bigl(t, x^0(t), x^1(t), \ldots, x^{n-1}(t)\bigr) \tag{0.0.4}$$

が成立することである。但し，区間 I に有限の上界や下界が存在する場合，区間の端での微分は片側微分係数で定める。また，$(a, b) \in E$ としたとき，条件式 $x(a) = b$ のことを初期条件といい，これを満たす解を，点 (a, b) を通る解であるという。

以下では，初期条件も含め,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(a) = b \tag{0.0.5}$$

\wtrf@n

を満たす解に関して考察する。

0.1 Picard の逐次近似法

の不等式

定理 0.1.1 (Grönwall-Bellman の不等式)**.** $a < a'$ とし，$I \coloneqq [a, a']$ とする。関数 $X\colon I \to \mathbb{R}$ は I 上で連続とする，また，関数 $c, L\colon I \to \mathbb{R}$ は I 上連続かつ非負であるとする。

$$\forall t \in I,\ 0 \le X(t) \le c(t) + \int_a^t ds\, L(s) X(s) \tag{0.1.1}$$

\wtrf@n

が成り立つとき，

$$\forall t \in I,\ 0 \le X(t) \le c(t) + \int_a^t ds\, c(s) L(s) \exp\left(\int_s^t du\, L(u)\right) \tag{0.1.2}$$

\wtrf@n

が成立する。

証明. $y\colon I \to \mathbb{R}$ を，

$$y(t) \coloneqq \int_a^t ds\, L(s) X(s) \tag{0.1.3}$$

equ:ODE_R-Gronwall-Bellman の不等式-仮定

と定めると，式 (0.1.1) から

$$0 \le X(t) \le c(t) + y(t) \tag{0.1.4}$$

\wtrf@n

となる。微積分学の基本定理により，

$$\frac{dy(t)}{dt} = L(t) X(t) \tag{0.1.5}$$

equ:ODE_R-Gronwall-Bellman の不等式-仮定

である。$L(t)$ は I 上で非負であるから，式 (0.1.1) に $L(t)$ を掛けることで

$$\forall t \in I,\ \frac{dy(t)}{dt} - L(t) y(t) \le L(t) c(t) \tag{0.1.6}$$

が得られる。ここで，両辺に $\exp(-\int_a^t du\, L(u))(> 0)$ を掛けると，I 上の任意の t に対し，

$$\exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right) \frac{dy(t)}{dt} - L(t) \exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right) y(t) \le L(t) c(t) \exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right) \tag{0.1.7}$$

が得られる。この式の左辺は，

$$\frac{d}{dt}\left[\exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right) y(t)\right] = \exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right) \frac{dy(t)}{dt} - L(t) \exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right) y(t) \tag{0.1.8}$$

と書けるから，

$$\forall t \in I,\ \frac{d}{dt}\left[\exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right)y(t)\right] \le L(t)c(t)\exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right) \tag{0.1.9}$$

が成立する。この式の両辺を a から t まで定積分することを考える。左辺について，定義から $y(a)=0$ であることに注意すると，

$$\int_a^t ds\, \frac{d}{ds}\left[\exp\left(-\int_a^s du\, L(u)\right)y(s)\right] \tag{0.1.10}$$

$$= \left[\exp\left(-\int_a^s du\, L(u)\right)y(s)\right]_a^t = \exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right)y(t) \tag{0.1.11}$$

となる。右辺は，

$$\int_a^t ds\, L(s)c(s)\exp\left(-\int_a^s du\, L(u)\right) \tag{0.1.12}$$

であるから，

$$\exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right)y(t) \le \int_a^t ds\, L(s)c(s)\exp\left(-\int_a^s du\, L(u)\right) \tag{0.1.13}$$

が得られる。この式の両辺に $\exp\left(\int_a^t du\, L(u)\right)(>0)$ を掛ける。左辺は $y(t)$ になり，右辺は，

$$\exp\left(\int_a^t du\, L(u)\right)\int_a^t ds\, L(s)c(s)\exp\left(-\int_a^s du\, L(u)\right) \tag{0.1.14}$$

$$= \int_a^t ds\, L(s)c(s)\exp\left(\int_s^t du\, L(u)\right) \tag{0.1.15}$$

となる。ここで，指数法則と

$$\int_a^t du\, L(u) - \int_a^s du\, L(u) = \int_a^t du\, L(u) + \int_s^a du\, L(u) = \int_s^t du\, L(u) \tag{0.1.16}$$

を用いた。

これらにより，

$$y(t) \le \int_a^t ds\, L(s)c(s)\exp\left(\int_s^t du\, L(u)\right) \tag{0.1.17}$$

equ:ODE_R-Gronwall-Bellman の不等式-y の評価式
が導かれ，式 (0.1.4) と併せると，

$$0 \le X(t) \le c(t) + y(t) \le c(t) + \int_a^t ds\, c(s)L(s)\exp\left(\int_s^t du\, L(u)\right) \tag{0.1.18}$$

equ:ODE_R-Gronwall-Bellman の不等式
が従い，これは式 (0.1.2) の成立を意味する。 □

系 0.1.2. 定理0.1.1 において，c, L を単なる非負定数とすると，

$$\forall t\in I,\ 0\le X(t)\le c+L\int_a^t ds\,X(s) \tag{0.1.19}$$

が成立するとき，

$$\forall t\in I,\ 0\le X(t)\le ce^{(t-a)L} \tag{0.1.20}$$

が成り立つ。

証明. 式 (0.1.2) の右辺の積分は，

$$\int_a^t ds\,cL\exp\biggl(\int_s^t du\,L\biggr)=cL\int_a^t ds\,e^{(s-t)L}=cLe^{-tL}\cdot\left[-\frac{e^{-sL}}{L}\right]_a^t \tag{0.1.21}$$

$$=-ce^{tL}\bigl(e^{-tL}-e^{-aL}\bigr)=-c+ce^{(t-a)L} \tag{0.1.22}$$

となるから，式 (0.1.2) より，

$$\forall t\in I,\ 0\le X(t)\le c+\Bigl(-c+ce^{(t-a)L}\Bigr)=ce^{(t-a)L} \tag{0.1.23}$$

が従う。 □

定理0.1.1 から得られた系0.1.2 は，後述する定理0.1.3 の証明において，Picard の逐次近似法によって構成した解が唯一の解であることを示す際に有用である。

定理 0.1.3 (Picard の定理)**.** r, ρ を正数とする。$f(t,x)$ が $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上の有界閉領域

$$E\coloneqq\{\,(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\,;\,|t-a|\le r,\ \|x-b\|\le\rho\,\} \tag{0.1.24}$$

上で x に関して Lipschitz 連続[*1]，すなわち，

$$\exists L\in\mathbb{R}_{\ge 0};\ \forall t\in\mathbb{R},\forall x,\forall y\in\mathbb{R}^n,\ [(t,x),(t,y)\in E\ \Rightarrow\ (\|f(t,x)-f(t,y)\|\le L\|x-y\|)] \tag{0.1.25}$$

であるとする[*2]。

$$M\coloneqq\max_{(t,x)\in E}\{\|f(t,x)\|\},\ r'\coloneqq\min\Bigl\{r,\frac{\rho}{M}\Bigr\} \tag{0.1.26}$$

としたとき，式 (0.0.5) を満たす解が区間 $I'\coloneqq[a-r',a+r']$ において一意的に存在する。

[*1] 定義??参照

[*2] $f(t,x)$ と $f(t,y)$ で t は共通のものであることに注意。

方針. 式 (0.0.5) を満たすことと，

$$x(t) = b + \int_a^t ds\, f(s, x(s)) \tag{0.1.27}$$

は同値である。実際，式 (0.1.27) を満たす $x = x(t)$ の第 j 成分は，微積分学の基本定理により，

$$\frac{dx^j(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(b^j + \int_a^t ds\, f^j(s, x(s))\right) = f^j(t, x(t)) \tag{0.1.28}$$

を満たし，

$$x^j(a) = b^j + \int_a^a ds\, f^j(s, x(s)) = b^j \tag{0.1.29}$$

も満たす。ベクトルでまとめて表せば式 (0.0.5) を満たすことに他ならない。

式 (0.1.27) の解の存在性を示すために，Picard の逐次近似法によって区間 I' 上で式 (0.1.27) の解を構成する。Picard の逐次近似法では，

$$\forall t \in I',\ \|x_0(t) - b\| \leq \rho \tag{0.1.30}$$

を満たすような連続なベクトル値関数 $x_0(t)$ を用いて，

$$x_{m+1}(t) \coloneqq b + \int_a^t ds\, f(s, x_m(s)) \tag{0.1.31}$$

によって $x_1(t), x_2(t), \ldots$ を定義する。$x_{m+1}(t)$ の右辺の積分の中に $x_m(t)$ があるため，$x_m(t)$ が f の定義域に収まっていることを確認する必要がある。

そして，このように構成した関数列 $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ の $m \to \infty$ における各点極限関数 $x(t)$ が式 (0.0.5) の解になっていることを示す。そのためには，式 (0.1.25) の Lipschitz 連続の条件と，定理 **??**を用いて $x_m(t)$ が各点極限関数 $x(t)$ に一様収束することを確かめる。一様収束することが確かめられたら，式 (0.1.31) の両辺で $m \to \infty$ の極限を取る。左辺は $x(t)$ になる。右辺は，f の連続性と命題**??**を用いて積分と極限の順序交換を行って

$$\lim_{m\to\infty}\left[b + \int_a^t ds\, f(s, x_m(s))\right] = b + \int_a^t ds \lim_{m\to\infty} f(s, x_m(s)) = b + \int_a^t ds\, f(s, x(s)) \tag{0.1.32}$$

とすれば，Picard の逐次近似法式 (0.1.31) で定義された関数列が式 (0.1.27) の解であることが分かる。

そして，構成した解が唯一の解であることを定理0.1.1 から得られた系0.1.2 の不等式を用いて示す。

証明. 方針で述べたように，式 (0.0.5) の微分方程式と等価な，式 (0.1.27) の積分方程式を考察する。

まずは解の存在性を示すための Picard の逐次近似法について述べる。$x_0(t)$ は,

$$\forall t \in I',\ \|x_0(t) - b\| \leq \rho \tag{0.1.33}$$

を満たす任意の連続関数とする。このとき,

$$x_1(t) \coloneqq b + \int_a^t ds\, f(s, x_0(s)) \tag{0.1.34}$$

によって $x_1(t)$ を定めると,

$$\forall t \in I',\ \|x_1(t) - b\| \leq \rho \tag{0.1.35}$$

も満たすことを示す。実際,

$$\|x_1(t) - b\| = \left\| \int_a^t ds\, f(s, x_0(s)) \right\| \leq \left| \int_a^t ds\, \|f(s, x_0(s))\| \right| \leq M|t-a| \leq Mr' \leq \rho \tag{0.1.36}$$

である。

式 (0.1.36) のそれぞれの不等号の理由を順に述べる。最初の不等号では，命題??の不等式を用いており，今回は $t \in I' = [a - r', a + r']$ であるから，$t < a$ の場合もあるので最初の不等号の式には絶対値が付く。二番目の不等号では式 (0.1.26) における M の定義から,

$$\forall (t, x) \in E,\ \|f(t, x)\| \leq M \tag{0.1.37}$$

が成立することと式 (??) の不等式を用いている。最後の不等号では，式 (0.1.26) における r' の定義から，$r' \leq \rho/M$ であり，これを M で払うことで $Mr' \leq \rho$ である。

これにより，$t \in I'$ のとき $\|x_1(t) - b\| \leq \rho$ である。次に，式 (0.1.33) を満たす $x_0(t)$ を用いて,

$$x_{m+1}(t) \coloneqq b + \int_a^t ds\, f(s, x_m(t)),\ (m \in \mathbb{N},\, t \in I') \tag{0.1.38}$$

によって $x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t), \ldots$ を定める。f の定義域は式 (0.1.24) で定義された E 上であるから，右辺の積分が定義されるためには,

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall t \in I',\ \|x_m(t) - b\| \leq \rho \tag{0.1.39}$$

である必要があるが，これは次に述べるように満たされている。適当な自然数 m で,

$$\forall t \in I',\ \|x_m(t) - b\| \leq \rho \tag{0.1.40}$$

が満たされていると仮定すると，式 (0.1.36) の議論と全く同じように任意の $t \in I'$ に対して

$$\|x_{m+1}(t) - b\| = \left\| \int_a^t ds\, f(s, x_m(s)) \right\| \leq \left| \int_a^t ds\, \|f(s, x_m(s))\| \right| \leq M|t-a| \leq Mr' \leq \rho \tag{0.1.41}$$

であり，$x_1(t)$ についての成立は式 (0.1.36) で確かめているので，数学的帰納法によって式 (0.1.39) は成立する。

以上の議論により，式 (0.1.38) によって任意の自然数 m に対して $x_m(t)$ が定まる。次に，式 (0.1.38) で定義された $x_m(t)$ は，$m \to \infty$ の極限で式 (0.1.27) の解になることを示す。そのためには，$x_m(t)$ が一様収束することを示し，f の連続性から極限と積分を入れ替えられることを用いる。 $\square$