目次

のノルム

0.1 実線型空間上のノルム

0.1.1 ノルムの定義と連続性

ノルムに関する以下の定義や命題は nomura [?] に拠る。

ルム-定義

定義 0.1.1 (ノルム)**.** V を $\mathbb{R}$ 上の線型空間とする。$|\cdot|$ を実数の絶対値とする。関数 $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ が以下の条件を満たすとき，$\|x\|$ を x のノルムという：

(i)（正値性）$\forall x \in V,\ \|x\| \geq 0$

(ii)（一意性）$\forall x \in V,\ \left[\|x\| = 0 \iff x = 0\right]$

(iii)（同次性）$\forall k \in \mathbb{R},\ \forall x \in V,\ \|kx\| = |k|\|x\|$

(iv)（三角不等式）$\forall x, \forall y \in V,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ノルムの定義された線型空間をノルム空間という。

角不等式

命題 0.1.2 (三角不等式)**.** ノルムは次の性質も満たす：

$$\forall x, \forall y \in V,\ \bigl|\|x\| - \|y\|\bigr| \leq \|x - y\|. \tag{0.1.1}$$

証明. まず，$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ から $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ が従う。同様に

$$\|y\| = \|(y-x)+x\| \leq \|(-1)(x-y)\| + \|x\| = |-1|\|x-y\| + \|x\| = \|x-y\| + \|x\| \tag{0.1.2}$$

なので，$\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$ である。また，絶対値の特徴付け $|a| = \max\{a, -a\}$ を用いると，$\max\{\|x\|-\|y\|, \|y\|-\|x\|\} = \bigl|\|x\|-\|y\|\bigr| \leq \|x-y\|$ である。これらにより，$\bigl|\|x\|-\|y\|\bigr| \leq \|x-y\|$ が成立する。 □

角不等式

系 0.1.3 (三角不等式)**.** 命題 prop: 実ノルム-三角不等式 0.1.2 において，$y \mapsto -y$ として，元の三角不等式と併せれば，

$$\bigl|\|x\| - \|y\|\bigr| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{0.1.3}$$

が従う。

ム-連続性

命題 0.1.4 (ノルムの連続性)**.** ノルムは連続関数である。

証明. 示すべきことは以下の通り（定義 defi:Lipschitz-関数の連続性 0.2.1 も参照）：

$$\forall x, \forall y \in V,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0};\ \Bigl[\|x-y\| < \delta \implies \bigl|\|x\|-\|y\|\bigr| < \varepsilon\Bigr]. \tag{0.1.4}$$

実際，$\delta := \varepsilon$ と取れば，命題 prop: 実ノルム-三角不等式 0.1.2 により，$\bigl|\|x\|-\|y\|\bigr| \leq \|x-y\| < \delta = \varepsilon$ であるから，ノルムは連続関数である。 □

の同値性

0.1.2 ノルムの同値性

の同値性

定義 0.1.5 (ノルムの同値性)**.** 以下が成立するとき，V 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であるという：

$$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Bigl[0 < m \leq M\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Bigr]. \tag{0.1.5}$$

同値関係

命題 0.1.6. ノルムの同値性は同値関係である。

証明. ノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であることを $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と記すことにする。すなわち，

$$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1 \ :\overset{\text{def}}{\iff}\ \exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Bigl[0 < m \leq M \wedge (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Bigr]. \tag{0.1.6}$$

このとき関係 $\sim$ が反射律，対称律，推移律を満たすことを示す。

- （反射律）任意の $\|\cdot\|$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。実際，$m = M = 1$ とすれば，

$$0 < m = 1 \leq M = 1\ \wedge\ (\forall x \in V,\ 1 \cdot \|x\| \leq \|x\| \leq 1 \cdot \|x\|) \tag{0.1.7}$$

  であるから成立。

- （対称律）$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$，すなわち

$$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big] \tag{0.1.8}$$

  のとき，$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。後半の不等式を書き直すと，$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|$ であり，$0 < m \leq M$ であるから $0 < \frac{1}{M} \leq \frac{1}{m}$ であり，$m' \coloneqq \frac{1}{M}$, $M' \coloneqq \frac{1}{m}$ と取れば確かに $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ の成立が判る。
- （推移律）3 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ のとき，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ が成立することを示す。仮定から，

$$\exists m_1, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_1 \leq M_2\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M_1\|x\|_1)\Big], \tag{0.1.9}$$

$$\exists m_2, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_2 \leq M_2\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M_2\|x\|_2)\Big] \tag{0.1.10}$$

  の両方が成立しているから，$\|x\| \leq M_1\|x\|_1 \leq M_1M_2\|x\|_2$ 及び，$\|x\| \geq m_1\|x\|_1 \geq m_1m_2\|x\|_2$ より，$m_1m_2\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M_1M_2\|x\|_2$ が従う。これより，$m \coloneqq m_1m_2$, $M \coloneqq M_1M_2$ と取れば $0 < m_1m_2 \leq M_1M_2$ も成立するので $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ である。

以上により，ノルムの同値性は同値関係である。 □

記法 0.1.7 (上添字)**.** $\mathbb{R}^n$ のベクトル x の成分の添字は上に付けて表すことにする。すなわち，$x = (x^0, x^1, \ldots, x^{n-1})$ のように記す。成分の冪を表すわけではないことに注意。ベクトルの添字を $x_0 = (x_0^0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1})$, $x_1 = (x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{n-1}), \ldots$ のように下に付けて記した場合，複数あるベクトルのいずれかの番号を意味する。

ム-同値性

定理 0.1.8 (有限次元線型空間上のノルムの同値性)**.** 線型空間 V が有限次元であれば，V 上の任意の 2 つのノルムは同値である。

証明. V を有限次元線型空間とし，$n \coloneqq \dim V$ とする。V の基底として，$\{\boldsymbol{e}_k\}_{0\leq k\leq n-1}$ を取り固定する。V の元 x を，$x = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \boldsymbol{e}_k$ と表したときの成分 $\{x^k\}_{0\leq k\leq n-1}$ を用いて，

$$\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R};\ x \mapsto \|x\| \coloneqq \max_{0\leq k\leq n-1}\left\{\left|x^k\right|\right\} \tag{0.1.11}$$

\wtrf@n

と定めると $\|\cdot\|$ はノルムになる。以下 $\|\cdot\|$ がノルムであることを確かめる：

(i) （正値性）どの k についても $0 \leq \left|x^k\right|$ であり，$\|x\| = \max_k\left\{\left|x^k\right|\right\} \geq 0$ であるから成立。

(ii) （一意性）$x = 0$ のとき，どの k についても $x^k = 0$ であるから $\|x\| = \max_k\left\{\left|x^k\right|\right\} = 0$ である。また，$\|x\| = 0$ のとき，任意の k に対し，絶対値の非負性から $0 \leq \left|x^k\right|$ であって，$\left|x^k\right| \leq \|x\| = 0$ であるから $\left|x^k\right| = 0$ である。これより $x = 0$ となる。

(iii) （同次性）絶対値の非負性と同次性から，$\|cx\| = \max_k\{|cx|\} = |c| \cdot \max_k\left\{\left|x^k\right|\right\} = |c|\|x\|$ が従う。

(iv)（三角不等式）絶対値の三角不等式から，各 k に対して $\left|x^k+y^k\right| \leq \left|x^k\right|+\left|y^k\right|$ であるから最大値に関してもこの不等号が成り立つので $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ が従う。

以上により式 (0.1.11) で定められた $\|\cdot\|$ はノルムである。

次に，V 上の勝手なノルム $\|\cdot\|_1$ を取ってきたときに，式 (0.1.11) で定義した $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_1$ が同値になってしまうことを示す。

V のコンパクト集合 S を $S \coloneqq \{y \in V\,;\, \|y\|=1\}$ によって定め, 関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ を $f(y) \coloneqq \|y\|_1$ と定める。f の連続性（命題0.1.4）と S がコンパクト集合であることから，f の値域には最小元 m と最大元 M が存在する。S 上で $y \neq 0$ であり，ノルムの正値性から $0 < m \leq M$ である。特に，$\|y\|=1$ ならば $y \in S$ であり，m, M の定義から $m \leq f(y) \leq M$ 及び $f(y)=\|y\|_1$ なので $m \leq \|x\|_1 \leq M$ が従う。ここで，V 上の一般の $x \neq 0$ に対して $y \coloneqq x/\|x\|$ とすると $\|y\| = \|x/\|x\|\| = \|x\|/\|x\| = 1$ より $y \in S$ であるから $f(y) = \|x/\|x\|\|_1 = \|x\|_1/\|x\|$ であって，$m \leq \|x\|_1/\|x\| \leq M$ より $m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|$ である。$x=0$ についても $\|0\| = \|0\|_1 = 0$ であって，$m\|0\|_1 \leq \|0\| \leq M\|0\|_1$ は成立するので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|$ は同値である。

有限次元線型空間 V 上で与えられた任意の 2 つのノルム $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ はそれぞれ式 (0.1.11) で定義された $\|\cdot\|$ と同値であり，ノルムの同値は同値関係（命題0.1.6）なので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ も同値である。 □

0.1.3 実線型空間上のノルム

上ではノルムに関して，一般的な形でやや抽象的に述べた。以降では [?] に基づいて，常微分方程式を実際に扱う際に有用なノルムを具体的に扱う。ここでは有限次元実線型空間 $\mathbb{R}^n$ 上のノルムの例を挙げる。以下では，$x = \left(x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}\right)$ の各成分を実数とし，$|\cdot|$ を実数の絶対値とする。

例 0.1.9 (Euclid ノルム)**.** 原点からの標準的な距離：

$$\|x\|_2 \coloneqq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|x^k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.1.12}$$

はノルムである。

例 0.1.10 (一様ノルム)**.** 定理0.1.8 の証明において式 (0.1.11) で定義された $\|\cdot\|$ はノルムである。後述するように，p ノルムにおいて $p \to \infty$ の極限で再現されることから，これを $\|\cdot\|_\infty$ と書いて ∞ ノルムとも呼ぶ。

定義 0.1.11 (p ノルム)**.** p を 1 以上の実数とする。このとき，x の p ノルム $\|x\|_p$ を，

$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.1.13}$$

で定める。

問 0.1. p ノルムがノルムの条件（定義 0.1.1）を満たしていることを確かめよ。

1 ノルムのことを絶対値ノルムと呼び，絶対値ノルムによって定まる距離を Manhattan 距離と呼ぶ。2 ノルムは Euclid ノルムに一致する。

命題 0.1.12 (p ノルムの極限が一様ノルム)**.** $p \to \infty$ の極限で p ノルム $\|\cdot\|_p$ は例 0.1.10 の一様ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に一致する。

証明. x^M は x の成分の $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ のうち絶対値が最大のものであるとする。このとき，$\left|x^M\right| = \|x\|_\infty$ と書ける。定義より，

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{0\le k\le n-1}\left\{\left|x^k\right|\right\} = \left|x^M\right| \tag{0.1.14}$$

であるから，示すべきことは，

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to \left|x^M\right| \quad (p \to \infty) \tag{0.1.15}$$

である。まず，$1 < p < \infty$ のとき，$\|x\|_\infty \le \|x\|_p$ であることを確かめる。これは，

$$0 \le \left|x^M\right|^p \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p \tag{0.1.16}$$

であることと，$0 < p$ のとき，$t \in [0, \infty)$ において $f(t) = t^{\frac{1}{p}}$ が狭義単調増加であること，0 以上 $(n-1)$ 以下の任意の整数 k について $\left|x^k\right| \ge 0$ であることから，

$$\left|x^M\right| = \left(\left|x^M\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.1.17}$$

より成立。また，0 以上 $(n-1)$ 以下の任意の整数 k について $0 \le \left|x^k\right| \le \left|x^M\right|$ であり，

$$0 \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|x^M\right|^p = n\left|x^M\right|^p \tag{0.1.18}$$

が成立する。更に，n は固定された正整数であるから

$$n^{\frac{1}{p}} \to n^0 = 1 \quad (p \to \infty) \tag{0.1.19}$$

である。

これらのことから，

$$0 \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left|x^M\right| \leq \left(n\left|x^M\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left|x^M\right| \leq \left(n^{\frac{1}{p}} - 1\right)\left|x^M\right| \to 0 \quad (p \to \infty) \tag{0.1.20}$$

が従い，はさみうちの原理から，

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to \left|x^M\right| \quad (p \to \infty) \tag{0.1.21}$$

equ: 実ノルム-p ノルムの極限

であり，これは式 (0.1.15) の成立を意味している。 □

eg: 実ノルム-一様

以降，有限次元線型空間のノルムは例 0.1.10 の一様ノルムであるとする。

下の整数

記法 0.1.13. 以下では簡単のために，$n-1$ 以下の非負整数の集合を，

$$\boldsymbol{N}_n \coloneqq \{\, j\,;\, j \in \mathbb{N} \ \wedge\ 0 \leq j \leq n-1 \,\} \tag{0.1.22}$$

と書く。

の不等式

命題 0.1.14 (積分とノルムの不等式)**.** I を $\mathbb{R}$ 上の閉区間であるとする。$f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を連続なベクトル値関数とするとき，

$$\left\|\int_I dt\, f(t)\right\| \leq \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{0.1.23}$$

が成立する。

証明. I 上可積分な $g\colon I \to \mathbb{R}$ と絶対値に関する以下の不等式：

$$\left|\int_I dt\, g(t)\right| \leq \int_I dt\, |g(t)| \tag{0.1.24}$$

\wtrf@n

を用いる。

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n, \forall t \in I,\ f^j(t) \leq \left|f^j(t)\right| \leq \|f(t)\| \tag{0.1.25}$$

であるから，

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n,\ \int_I dt\, f^j(t) \leq \int_I dt\, \left|f^j(t)\right| \leq \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{0.1.26}$$

equ: 実ノルム-積分絶対値不等式

である。ここで，式 (0.1.24) の不等式から，

$$\left|\int_I dt\, f^j(t)\right| \leq \int_I dt\, \left|f^j(t)\right| \leq \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{0.1.27}$$

であるから，

$$\left\|\int_I dt\, f(t)\right\| = \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{\left|\int_I dt\, f^j(t)\right|\right\} \leq \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{0.1.28}$$

が成立する。 □

0.1.4　作用素ノルム

素ノルム
素ノルム

定義 0.1.15 (作用素ノルム). 線型作用素 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，$\|A\|$ を，

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\} \tag{0.1.29}$$

で定める。

以降，A を線型作用素とし，その (j,k) 成分を a^j_k と書く。

ム具体形

命題 0.1.16 (作用素ノルムの明示公式).

$$\|A\| = \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\right\} \tag{0.1.30}$$

証明. $\|x\|=1$ のとき，x の各成分の絶対値は 1 以下である。このとき，Ax の第 j 成分 $(Ax)_j$ に関して，

$$\left|(Ax)_j\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a^j_k x^k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\left|x^k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right| \tag{0.1.31}$$

となり，1 つ目の等号成立は，

$$\left[\forall k\in \boldsymbol{N}_n,\ a^j_k x^k \ge 0\right] \ \vee\ \left[\forall k\in \boldsymbol{N}_n,\ a^j_k x^k \le 0\right] \tag{0.1.32}$$

のとき，すなわち $a^j_k x^k$ が全て同符号のときである。2 つ目の等号成立は，x の各成分の絶対値が 1 に等しい場合であり，この 2 つの条件は同時に満たすことができる。実際，各 k について，$a^j_k \ge 0$ なら $x^k = 1$ とし，$a^j_k < 0$ なら $x^k = -1$ と定めれば，いずれの等号も成立する。これより，

$$\|A\| = \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\right\} \tag{0.1.33}$$

である。 □

不等式 1

命題 0.1.17 (作用素ノルムの不等式 1).

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \tag{0.1.34}$$

証明. 各 k について $\left|x^k\right| \le \|x\|$ であるから，Ax の第 j 成分について，

$$\left|(Ax)_j\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a^j_k x^k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\left|x^k\right| \le \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\right)\cdot\|x\| \tag{0.1.35}$$

が成立して，

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \tag{0.1.36}$$

が従う。 □

角不等式

命題 0.1.18 (作用素ノルムの不等式 2)**.** A, B を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への任意の線型作用素とする。このとき，

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\| \tag{0.1.37}$$

が成立する。

証明. A, B の (j,k) 成分をそれぞれ a_k^j, b_k^j とする。まず，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k^j + b_k^j\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k^j\right| + \sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k^j\right| \tag{0.1.38}$$

であるから，

$$\max_{0\leq j\leq n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k^j + b_k^j\right|\right\} \leq \max_{0\leq j\leq n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k^j\right|\right\} + \max_{0\leq j\leq n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k^j\right|\right\} \tag{0.1.39}$$

であり，$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ である。

次に，m は，

$$\forall \ell \in \boldsymbol{N}_n,\ \sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k^\ell\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}|b_k^m| \tag{0.1.40}$$

を満たす，すなわち $\|B\|$ を与える行の添字とする。このとき，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell^j b_k^\ell\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\left|a_\ell^j\right|\left|b_k^\ell\right|\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\left|a_\ell^j\right|\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k^\ell\right|\right) \leq \left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\left|a_\ell^j\right|\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}|b_k^m|\right) \tag{0.1.41}$$

より，

$$\max_{0\leq j\leq n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell^j b_k^\ell\right|\right\} \leq \max_{0\leq j\leq n-1}\left\{\sum_{\ell=0}^{n-1}\left|a_\ell^j\right|\right\} \cdot \max_{0\leq j\leq n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k^j\right|\right\} \tag{0.1.42}$$

が従うので，$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ である。 □

はノルム

defi: 実ノルム-作用素ノルム

命題 0.1.19. 定義0.1.15 で定義した $\|A\|$ はノルムである。

証明. 及び，命題0.1.18 定義0.1.1 の 4 条件を順に確かめる。

prop: 実ノルム-作用素ノルム具体形

(i)（正値性）命題0.1.16 から，各項にある絶対値は非負なので，$\|A\| \geq 0$ である。

prop: 実ノルム-作用素ノルム具体形

(ii)（一意性）命題0.1.16 から，$\|A\| = 0$ だとすれば，絶対値の非負性から，どの j に関しても $\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k^j\right| = 0$ であり，これが成立するためには全ての (j,k) に関して $a_k^j = 0$ でなければならず，このとき $A = O$（零行列）である。

prop: 実ノルム-作用素ノルム具体形

(iii)（同次性）命題0.1.16 から，

$$\|cA\| = \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|c|\left|a_k^j\right|\right\} = |c|\cdot\max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k^j\right|\right\} = |c|\|A\|. \tag{0.1.43}$$

prop: 実ノルム-作用素ノルム三角不等式

(iv)（三角不等式）命題0.1.18 から直ちに従う。

□

prop: 実ノルム-作用素ノルム具体形

注意 0.1.20. 上で述べたことは複素線型空間上のノルムでもほとんど同様に成り立つ。証明も，$|\cdot|$ を複素数の絶対値に読み替えれば成立するが，命題0.1.16 の証明中の等号成立条件だけ注意が必要である。

のノルム

0.1.5　関数のノルム

p ノルム

定義 0.1.21 (L^p ノルム)**.** A を $\mathbb{R}^m$ の部分集合とし，$f\colon A\to\mathbb{R}^n$ は A 上可積分とし，$1\le p<\infty$ する。このとき，f のノルム $\|f\|_p$ を，

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_A dx\,\|f(x)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.1.44}$$

と定める[*1]。

ty ノルム

定義 0.1.22 (L^∞ ノルム)**.** A を $\mathbb{R}^m$ の部分集合とし，$f\colon A\to\mathbb{R}^n$ とする。f のノルム $\|f\|_\infty$ を，

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in A}\{\|f(x)\|\} \tag{0.1.45}$$

と定める。

のノルム

defi: 実ノルム-実ノルム　defi: 実ノルム-Lp ノルム　eg: 実ノルム-一様　defi: 実ノルム-Linfty ノルム

注意 0.1.23. 定義0.1.11, 0.1.21 及び例0.1.10, 定義0.1.22 について，一般には $\|f\|_p \ne \|f(x)\|$ 及び $\|f\|_\infty \ne \|f(x)\|_\infty$ であることに注意。$\|f\|$ は関数のノルムであるが，$\|f(x)\|$ は f に x を入れた $f(x)$ というベクトルに対するノルムである。

eg: 実ノルム-一様　defi: 実ノルム-Linfty ノ

以降では，特に断らない限りベクトルのノルムは例0.1.10 とし，関数のノルムは定義0.1.22 とする。

の不等式

補題 0.1.24. A を $\mathbb{R}^m$ の部分集合とし，$f\colon A\to\mathbb{R}^n$ を考える。このとき，

$$\forall x\in A,\ \|f(x)\|\le\|f\| \tag{0.1.46}$$

[*1] 右辺の積分は n 重積分である。

が成立する。

証明. それぞれの定義からほぼ明らかである。定義0.1.22 より，

$$\|f\| = \sup_{x\in A}\{\|f(x)\|\} \tag{0.1.47}$$

であり，sup の定義から，

$$\forall x \in A,\ \|f(x)\| \le \sup_{x\in A}\{\|f(x)\|\} = \|f\| \tag{0.1.48}$$

である。 □

問 0.2. $\mathbb{R}^n$ のベクトル x のノルムは例0.1.10 で述べた一様ノルムとし，$\mathbb{R}^n$ 上の線型作用素 A のノルムは定義0.1.15 で与えられた作用素ノルムであるとする。$n=3$ のとき，

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.1.49}$$

とする。このとき，$\|x\|$ と $\|A\|$ を計算せよ。

問 0.3. $\mathbb{R}^n$ のベクトルに対して一様ノルムではなく，例0.1.9 で導入した Euclid ノルムを用いた場合，定義0.1.15 で定義される $\|A\|$ はどのような性質を持つだろうか。例えば，$\mathbb{R}^2$ 上の一般的な線型作用素の作用素ノルムを，その成分を用いて具体的に表わせ。（関連：スペクトルノルム）

0.2 Lipschitz 連続

0.2.1 連続性・一様連続性・Lipschitz 連続性

ここでは関数の連続性，一様連続性，Lipschitz 連続性について述べる。参考文献は[?] である。m, n を正整数とする。$A \subseteq \mathbb{R}^m$ とし，$f\colon A \to \mathbb{R}^n$ について考える。

以降，特に断らない限り，ベクトル x のノルム $\|x\|$ は例0.1.10 の一様ノルムとし，関数 f のノルム $\|f\|$ は定義0.1.22 の L^∞ ノルムとする[*2]。

定義 0.2.1 (連続性)**.** f が A 上連続であるとは，

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in A, \exists\delta \in \mathbb{R}_{>0}; \forall y \in A,\ \left[\|x-y\| < \delta \implies \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon\right] \tag{0.2.1}$$

が成立することである。

[*2] 注意0.1.23 に注意。$\|f\|$ と $\|f(x)\|$ は一般には異なる。

定義 0.2.2 (一様連続性)**.** f が A 上一様連続であるとは,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0};\ \forall x, \forall y \in A,\ \Big[\|x-y\| < \delta \implies \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon\Big] \tag{0.2.2}$$

が成立することである。

定義 0.2.3 (Lipschitz 連続性)**.** f が A 上 Lipschitz 連続であるとは,

$$\exists L \in \mathbb{R}_{\geq 0};\ \forall x, \forall y \in A,\ \Big[\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\|\Big] \tag{0.2.3}$$

が成立することである。このとき，L を Lipschitz 定数という。

注意 0.2.4. Lipschitz 定数は一意的ではない。実際，L が Lipschitz 定数のとき，$c > 1$ を用いると $\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\| \leq cL\|x-y\|$ も成立するので，$(L \neq)cL$ も Lipschitz 定数である。上の条件を満たす Lipschitz 定数全体の下限を改めて Lipschitz 定数と呼ぶことにすれば，これは一意である。

命題 0.2.5. A 上 Lipschitz 連続な関数は A 上一様連続である。

証明. f を A 上 Lipschitz 連続であると仮定し，Lipschitz 定数の一つを L と記す。任意の正数 ε に対して，$\delta := \varepsilon/(L+1)$ と置けば，$\delta > 0$ であり，$\|x-y\| < \delta = \varepsilon/(L+1)$ のとき，$L\|x-y\| < (L+1)\|x-y\| < \varepsilon$ であり,

$$\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\| < (L+1)\|x-y\| < \varepsilon \tag{0.2.4}$$

が成立するので一様連続である。 □

補題 0.2.6. 一般に，$P(a,b)$ を a, b に関する任意の命題としたとき,

$$[\exists a;\ \forall b,\ P(a,b)] \implies [\forall b,\ \exists a;\ P(a,b)] \tag{0.2.5}$$

は $P(a,b)$ の内容に依らず真である。

証明. 証明木を描いてみると，図??に示すように，式 (0.2.5) が真であることが判る。 □

命題 0.2.7. A 上一様連続な関数は A 上連続である。

証明. 補題0.2.6 を用いる。一様連続性では $\exists\delta;\ \forall x$ の順であるのに対し，連続性では $\forall x,\ \exists\delta;$ の順であるから，一様連続なら連続である。 □

系 0.2.8. A 上 Lipschitz 連続な関数は A 上連続である。

証明. 命題0.2.5 と命題0.2.7 から直ちに従う。 □

0.2.2 Lipschitz 連続性の十分条件

十分条件

itz 連続

命題 0.2.9 (原始関数の Lipschitz 連続性)**.** $-\infty < a < b < \infty$ とし, $I \coloneqq [a,b]$ と定め, $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ は I 上で有界かつ可積分とする。$F\colon I \to \mathbb{R}^n$ を,

$$F(x) \coloneqq \int_a^x dt\, f(t) \tag{0.2.6}$$

によって定めると，F は I 上 Lipschitz 連続である。

証明. $x, y \in I$ に対し,

$$F^j(x) - F^j(y) = \int_a^x dt\, f^j(t) - \int_a^y dt\, f^j(t) = \int_y^x dt\, f^j(t) \tag{0.2.7}$$

である。f は I 上で有界であるから,

$$L \coloneqq \sup_{t\in I}\{\|f(t)\|\} \geq 0 \tag{0.2.8}$$

equ: 実ノルム-積分絶対値不等式

と定めておくと，I 上で常に $\left|f^j(t)\right| \leq L$ であり，式 (0.1.24) により,

$$\left|F^j(x) - F^j(y)\right| = \left|\int_y^x dt\, f^j(t)\right| \leq \left|\int_x^y dt\, \left|f^j(t)\right|\right| \leq \left|\int_x^y dt\, L\right| = L|x-y| \tag{0.2.9}$$

である。これより，I 上の任意の x, y に関して

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L|x-y| \tag{0.2.10}$$

が成立するから，F は I 上 Lipschitz 連続である。 □

itz 連続

命題 0.2.10 (微分が有界なら Lipschitz 連続)**.** $a < b$ とする。$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ は $[a,b]$ 上で連続, (a,b) 上で微分可能とし，(a,b) 上で $\|f'(t)\|$ は有限であるとする。このとき，f は $[a,b]$ 上で Lipschitz 連続である。

証明. (a,b) 上での $\|f'(t)\|$ の有界性から,

$$L \coloneqq \sup_{t\in(a,b)} \max_j \left\{\left|(f^j)'(t)\right|\right\} < \infty \tag{0.2.11}$$

が定まり，$L \geq 0$ である。f の各成分について，平均値の定理より,

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n, \forall x, \forall y \in [a,b], \left[x < y \;\Rightarrow\; \exists c_j \in (a,b); \left((x < c_j < y) \;\land\; \frac{f^j(x) - f^j(y)}{x-y} = (f^j)'(c_j)\right)\right] \tag{0.2.12}$$

が成立する。このような c_j を取ったとき，$(f^j)'(c_j) \leq L$ であるから,

$$\|f(x) - f(y)\| = \max_j\left\{\left|f^j(x) - f^j(y)\right|\right\} = \max_j\left\{\left|(f^j)'(c_j)\right||x-y|\right\} \leq L|x-y| \tag{0.2.13}$$ \wtrf@n

である。$x > y$ のときにも平均値の定理により適当な定数 $\tilde{c}_j$ の存在が言えるので，式 (0.2.13) は同様に成立する。$x = y$ のとき，$\|0\| \leq L|0|$ は成立するので式 (0.2.13) も成立する。これより，$[a, b]$ 上の任意の x, y に関して $\|f(x) - f(y)\| \leq L|x - y|$ の成立が言えた。従って，f は Lipschitz 連続である。 □

0.3　一様収束

無限和，微積分，極限の順序変更において特に重要な役割を果たす一様収束の概念について述べる。一様収束する関数列には連続性が受け継がれたり，項別微分，有限領域での項別積分が可能など，様々な直観的な操作が保証される。参考文献は [?] である。

0.3.1　各点収束・一様収束

定義 0.3.1 (各点収束・一様収束)**.** m_1, m_2 を正整数，$A \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$ とし，$f\colon A \to \mathbb{R}^{m_2}$ とする。また，各自然数 n に対し，$f_n\colon A \to \mathbb{R}^{m_2}$ による関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で f に各点収束するとは，

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in A, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, \left[N \leq n \implies \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\right] \tag{0.3.1}$$

が成立することである。また，関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で f に一様収束するとは，

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}; \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \left[N \leq n \implies \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\right] \tag{0.3.2}$$

が成立することである。

補題 0.3.2 (全称記号の順序交換)**.** $P(y)$ を y に関する命題，$Q(x, y)$ を x, y に関する命題とする。このとき，

$$[\forall x, \forall y, (P(y) \implies Q(x, y))] \iff [\forall y, (P(y) \implies \forall x, Q(x, y))] \tag{0.3.3}$$

は $P(y)$, $Q(x, y)$ の内容に依らず真である。

方針. 背理法によって示す。同値の否定：

$$\begin{aligned} & \neg(A \Leftrightarrow B) & (0.3.4)\\ \iff\ & \neg[(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)] & (0.3.5)\\ \iff\ & \neg(A \Rightarrow B) \lor \neg(B \Rightarrow A) & (0.3.6)\\ \iff\ & (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) & (0.3.7) \end{aligned}$$

を用いる。

証明. 証明木を描いてみると，図??に示すように，式 (0.3.3) が真であることが判る。 □

いた表現

命題 0.3.3. 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で f に一様収束することと，定義0.1.22 のノルム $\|\cdot\|$ を用いた以下は同値：

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n-f\|<\varepsilon\Big]. \tag{0.3.8}$$

方針. $\|f\|$ の定義には max ではなく sup が使われているため，一般には，

$$\Big[\forall x\in A,\ \|f(x)\|<\varepsilon\Big] \implies \|f\|\le\varepsilon \tag{0.3.9}$$

であり，

$$\Big[\forall x\in A,\ \|f(x)\|<\varepsilon\Big] \iff \|f\|<\varepsilon \tag{0.3.10}$$

は成立しないことに注意する。

証明. 定義0.1.22 により，

$$\|f_n-f\|<\varepsilon \implies \sup_{x\in A}\{\|f_n(x)-f(x)\|\}<\varepsilon \implies \forall x\in A,\ \|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon \tag{0.3.11}$$

である。このことと，補題0.3.2 で示した式 (0.3.3) を用いれば，

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n-f\|<\varepsilon\Big] && (0.3.12)\\
\implies &\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \forall x\in A,\ \|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon\Big] && (0.3.13)\\
\implies &\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall x\in A,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon\Big] && (0.3.14)
\end{aligned}$$

である。

逆も示す。方針で述べたように，一般には

$$\forall x\in A,\ \|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon \implies \|f_n-f\|<\varepsilon \tag{0.3.15}$$

は成立しないことに注意して ε の取り方を少し変える。

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall x\in A,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon\Big] && (0.3.16)\\
\implies &\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall x\in A,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n(x)-f(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}\Big] && (0.3.17)\\
\implies &\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \forall x\in A,\ \|f_n(x)-f(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}\Big] && (0.3.18)\\
\implies &\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n-f\|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\Big] && (0.3.19)\\
\implies &\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n-f\|<\varepsilon\Big] && (0.3.20)
\end{aligned}$$

である。

上と併せれば，定義0.3.1 の式 (0.3.2) と同値であることが示された。 □

収束極限

命題 0.3.4. 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上で f に一様収束するとする。このとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上で f に各点収束する。

defi: 一様収束-各点収束と一様収束の定義 forall と exists の順序交換

証明. 定義0.3.1 において，補題0.2.6 から明らか。 □

収束極限

注意 0.3.5. 一様収束することが判っている場合，一様収束する極限関数は，x を固定しておいて $f_n(x)$ を考え，$n \to \infty$ の極限を取ったもの，すなわち各点収束極限として求めればよい。すなわち，f を一様収束極限関数としたとき，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{0.3.21}$$

である。左辺の本来の意味は各点収束極限である。

auchy 列

定義 0.3.6 (関数の Cauchy 列)**.** 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上の Cauchy 列であるとは，

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall m, \forall n \in \mathbb{N},\ \Big[N \leq n \leq m \implies \|f_m - f_n\| < \varepsilon \Big] \tag{0.3.22}$$

が成立することである。

の同値性

定理 0.3.7 (一様収束性と Cauchy 列の同値性)**.** 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上の Cauchy 列であることと，関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で一様収束することは同値である。

方針. 一様収束するなら Cauchy 列は，数列が収束するなら Cauchy 列であることの証明とほぼ同様。Cauchy 列なら一様収束することは，各点収束極限 f の存在を示し，Cauchy 列であるという仮定を用いて f に一様収束することを示すことで証明される。

証明. 順に示す。

- 一様収束するなら Cauchy 列

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の一様収束性から，

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left[N \leq n \implies \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \right] \tag{0.3.23}$$

が成立する。また，ノルムの三角不等式から，

$$\|f_m - f_n\| = \|(f_m - f) + (f - f_n)\| \leq \|f_m - f\| + \|f - f_n\| = \|f_m - f\| + \|f_n - f\| \tag{0.3.24}$$

であるから，m と n が共に N 以上の自然数のとき，

$$\|f_m - f_n\| \leq \|f_m - f\| + \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{0.3.25}$$

であり，確かに

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall m, \forall n \in \mathbb{N},\ \Big[N \leq n \leq m \implies \|f_m - f_n\| < \varepsilon \Big] \tag{0.3.26}$$

が成立するから，f が A 上一様収束するとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上の Cauchy 列である。

- Cauchy 列なら一様収束する

まず，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が各点収束極限を持つことを示す。$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上の Cauchy 列であるから，

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall m,\forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n\le m\implies \|f_m-f_n\|<\varepsilon\Big] \tag{0.3.27}$$

が成立している。また，補題0.1.24 から，

$$\forall x\in A,\ \|f_m(x)-f_n(x)\|\le\|f_m-f_n\| \tag{0.3.28}$$

である。これより，

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall m,\forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n\le m\implies \forall x\in A,\ \|f_m(x)-f_n(x)\|<\varepsilon\Big] \tag{0.3.29}$$

を満たす。更に，補題0.3.2 から，

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall x\in A,\ \forall m,\forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n\le m\implies \|f_m(x)-f_n(x)\|<\varepsilon\Big] \tag{0.3.30}$$

である。これより，x を固定したときの数列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるから収束する。すなわち，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各点収束極限 f を持ち，

$$\forall x\in A,\ \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x) \tag{0.3.31}$$

を満たす。

次に，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各点収束極限 f に一様収束することを示す。式 (0.3.30) より，

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall x\in A,\ \forall m,\forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n\le m\implies \|f_m(x)-f_n(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}\Big] \tag{0.3.32}$$

であり，式 (0.3.31) を用いて $m\to\infty$ の極限[*3]を取ると，

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall x\in A,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n\implies \|f(x)-f_n(x)\|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\Big] \tag{0.3.33}$$

である。定義0.3.1 の式 (0.3.2) と比較すると，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で f に一様収束することが従っていることが判る。 □

補足 0.3.8. 定理0.3.7 の証明中，Cauchy 列なら一様収束することを示す際に $m\to\infty$ の極限を取る操作を行った。ここではその詳細を述べる。

まず，式 (0.3.32) で ε ではなく $\varepsilon/2$ と取った理由を簡単に述べておく。一般に，収束列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が，

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n<b_n \tag{0.3.34}$$

[*3] 後述の補足0.3.8 も参照

を満たしており，$n \to \infty$ におけるそれぞれの極限を a, b としたとき，成り立つのは $a \leq b$ であり，$a < b$ は一般には成立しない実際，式 (0.3.32) で $m \to \infty$ とした式 (0.3.33) で成り立つのは $\|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon/2$ であり，$\|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon/2$ ではない[*4]。

次に，式 (0.3.32) で $m \to \infty$ とする操作が正当化される理由を述べる。x を固定したとき，$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であり，特に，収束列である。これより，

$$\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{N}; \forall m \in \mathbb{N}, \left[M \leq m \implies \|f_m(x) - f(x)\| < \varepsilon\right] \tag{0.3.35}$$

が成立する。また，$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるから式 (0.3.30) も成立する。m, n が共に式 (0.3.30) の N 以上であり，m が式 (0.3.35) の M 以上であれば，

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f(x)\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \tag{0.3.36}$$

であるから，

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in A}\{\|f_n(x) - f(x)\|\} \leq 2\varepsilon \tag{0.3.37}$$

となる。適当に ε を取り直せば

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, \left[N \leq n \implies \|f_n - f\| < \varepsilon\right]. \tag{0.3.38}$$

も言えるから，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に A 上で一様収束する。

0.3.2　積分と極限の順序交換

命題 0.3.9. A を $\mathbb{R}^m$ の体積確定の有界閉領域とする。n を自然数とし，f_n は A 上可積分とする。また，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上 f に一様収束するとする。このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_A dx\, f_n(x) = \int_A dx \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_A dx\, f(x) \tag{0.3.39}$$

が成立する。

方針. 注意 0.3.5 によって $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ は成立することが判っているので，

$$\lim_{n\to\infty}\int_A dx\, f_n(x) = \int_A dx\, f(x) \tag{0.3.40}$$

が示せれば十分である。

[*4] 命題 0.3.3 でわざわざ同値性を示しておいたので，実際にはこの辺りの不等号にイコールが入るかどうかはあまり細かく気にする必要もない。

証明. A は体積確定であるから，

$$v(A) \coloneqq \int_A dx < \infty \tag{0.3.41}$$

である。また，補題0.1.24 により，

$$\forall x \in A,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\| \tag{0.3.42}$$

であり，$\|f_n - f\|$ は x に依らないことに注意する。更に，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上 f に一様収束することと，命題0.3.3 により，

$$\|f_n - f\| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{0.3.43}$$

である。

これらを用いると，

$$\left\|\int_A dx\, f_n(x) - \int_A dx\, f(x)\right\| = \left\|\int_A dx\, (f_n(x) - f(x))\right\| \tag{0.3.44}$$

$$\leq \int_A dx\, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \int_A dx\, \|f_n - f\| \tag{0.3.45}$$

$$= \|f_n - f\| \int_A dx = \|f_n - f\| v(A) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{0.3.46}$$

である。よって，

$$\lim_{n\to\infty} \int_A dx\, f_n(x) = \int_A dx\, f(x) \tag{0.3.47}$$

であり，方針で述べたように，これは式 (0.3.40) の成立を意味する。 □

0.3.3 無限和と一様収束性

定義 0.3.10 (関数列の無限和)**.** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を A 上の関数列とする。$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が A 上で一様収束するとは，

$$s_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f_k \tag{0.3.48}$$

としたとき，関数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で一様収束することである。

定理 0.3.11 (Weierstrass の M 判定法)**.** A 上の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，実数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が以下の条件式 (0.3.49), (0.3.50) を共に満たせば $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は A 上で一様収束する：

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\| \leq M_n \tag{0.3.49}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty. \tag{0.3.50}$$

thm: 一様収束-一様収束性と Cauchy 列の同値

方針. 部分和 $s_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f_k$ が Cauchy 列になっていることを示し，定理0.3.7 を用いる。

証明. f_n と M_n の部分和をそれぞれ，

$$s_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f_k,\ t_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} M_k \tag{0.3.51}$$

とする。$n < m$ のとき，ノルムの三角不等式より，

$$\|s_m - s_n\| = \left\|\sum_{k=0}^{m} f_k - \sum_{k=0}^{n} f_k\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\| \tag{0.3.52}$$

equ: 一様収束-Weierstrass の M 判定法条件 1

であり，条件式 (0.3.49) より，

$$\sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k = \sum_{k=0}^{m} M_k - \sum_{k=0}^{n} M_k = t_m - t_n \tag{0.3.53}$$

equ: 一様収束-Weierstrass の M 判定法条件 1

である。また，条件式 (0.3.49) とノルムの非負性 $(0 \leq \|f_n\|)$ から

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq M_n \tag{0.3.54}$$

も言えるので，$0 \leq t_m - t_n = |t_m - t_n|$ と書ける。これにより，

$$\|s_m - s_n\| \leq |t_m - t_n| \tag{0.3.55}$$

equ: 一様収束-Weierstrass の M 判定法条件 2

である。条件式 (0.3.50) より，$\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列であるから Cauchy 列である。従って，

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall m, \forall n \in \mathbb{N},\ \Big[N \leq n \leq m \implies \|s_m - s_n\| \leq |t_m - t_n| < \varepsilon\Big] \tag{0.3.56}$$

thm: 一様収束-一様収束性と Cauchy 列の同値性

が言えて，$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である。定理0.3.7 により，Cauchy 列は一様収束するので定義

defi: 一様収束-関数列の無限和

0.3.10 と併せて $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は A 上で一様収束する。 □