目次

0.1 実線型空間上のノルム

のノルム

ノルムに関する以下の定義や命題は nomura [?] に拠る。

ルム-定義

定義 0.1 (ノルム)**.** V を $\mathbb{R}$ 上の線型空間とする。$|\cdot|$ を実数の絶対値とする。関数 $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ が以下の条件を満たすとき，$\|x\|$ を x のノルムという：

(i)（正値性）$\forall x \in V,\ \|x\| \geq 0$

(ii)（一意性）$\forall x \in V,\ \Big[\|x\| = 0 \iff x = 0\Big]$

(iii)（同次性）$\forall k \in \mathbb{R},\ \forall x \in V,\ \|kx\| = |k|\|x\|$

(iv)（三角不等式）$\forall x, \forall y \in V,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ノルムの定義された線型空間をノルム空間という。

角不等式

命題 0.2 (三角不等式)**.** ノルムは次の性質も満たす：

$$\forall x, \forall y \in V,\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|. \tag{0.1}$$

Proof. まず，$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ から $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ が従う。同様に

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|(-1)(x - y)\| + \|x\| = |-1|\|x - y\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\| \tag{0.2}$$

なので，$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$ である。また，絶対値の特徴付け $|a| = \max\{a, -a\}$ を用いると，$\max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\} = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ である。これらにより，$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ が成立する。 □

角不等式

系 0.3. 命題 prop: 実ノルム-三角不等式 0.2 において，$y \mapsto -y$ として，元の三角不等式と併せれば，

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{0.3}$$

が従う。

ム-連続性

命題 0.4 (ノルムの連続性)**.** ノルムは連続関数である。

defi:Lipschitz-関数の連続性

Proof. 示すべきことは以下の通り（定義0.20 も参照）：

$$\forall x, \forall y \in V,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0};\ \Big[\|x-y\| < \delta \implies \big|\|x\| - \|y\|\big| < \varepsilon\Big]. \tag{0.4}$$

prop: 実ノルム-三角不等式

実際，$\delta := \varepsilon$ と取れば，命題0.2 により，$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| < \delta = \varepsilon$ であるから，ノルムは連続関数である。 □

の同値性

定義 0.5 (ノルムの同値性)**.** 以下が成立するとき，V 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であるという：

$$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big]. \tag{0.5}$$

同値関係

命題 0.6. ノルムの同値性は同値関係である。

Proof. ノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であることを $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と記すことにする。すなわち，

$$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1\ :\overset{\text{def}}{\iff}\ \exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M\ \wedge (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big]. \tag{0.6}$$

このとき関係 $\sim$ が反射律，対称律，推移律を満たすことを示す。

- （反射律）任意の $\|\cdot\|$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。実際，$m = M = 1$ とすれば，

  $$0 < m = 1 \leq M = 1\ \wedge\ (\forall x \in V,\ 1 \cdot \|x\| \leq \|x\| \leq 1 \cdot \|x\|) \tag{0.7}$$

  であるから成立。
- （対称律）$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$，すなわち

  $$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big] \tag{0.8}$$

  のとき，$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。後半の不等式を書き直すと，$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|$ であり，$0 < m \leq M$ であるから $0 < \frac{1}{M} \leq \frac{1}{m}$ であり，$m' := \frac{1}{M}, M' := \frac{1}{m}$ と取れば確かに $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ の成立が判る。
- （推移律）3 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ のとき，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ が成立することを示す。仮定から，

  $$\exists m_1, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_1 \leq M_2\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M_1\|x\|_1)\Big], \tag{0.9}$$

  $$\exists m_2, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_2 \leq M_2\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M_2\|x\|_2)\Big] \tag{0.10}$$

の両方が成立しているから，$\|x\| \le M_1\|x\|_1 \le M_1M_2\|x\|_2$ 及び，$\|x\| \ge m_1\|x\|_1 \ge m_1m_2\|x\|_2$ より，$m_1m_2\|x\|_2 \le \|x\| \le M_1M_2\|x\|_2$ が従う。これより，$m \coloneqq m_1m_2$, $M \coloneqq M_1M_2$ と取れば $0 < m_1m_2 \le M_1M_2$ も成立するので $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ である。

以上により，ノルムの同値性は同値関係である。 □

記法 0.7 (上添字)**.** $\mathbb{R}^n$ のベクトル x の成分の添字は上に付けて表すことにする。すなわち，$x = (x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$ のように記す。成分の冪を表すわけではないことに注意。ベクトルの添字を $x_0 = (x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$, $x_1 = (x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^{n-1}), \dots$ のように下に付けて記した場合，複数あるベクトルのいずれかの番号を意味する。

ム-同値性 **定理 0.8.** 線型空間 V が有限次元であれば，V 上の任意の 2 つのノルムは同値である。

Proof. V を有限次元線型空間とし，$n \coloneqq \dim V$ とする。V の基底として，$\{\boldsymbol{e}_k\}_{0\le k\le n-1}$ を取り固定する。V の元 x を，$x = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \boldsymbol{e}_k$ と表したときの成分 $\left\{x^k\right\}_{0\le k\le n-1}$ を用いて，

$$\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R};\ x \mapsto \|x\| \coloneqq \max_{0\le k\le n-1}\left\{\left|x^k\right|\right\} \tag{0.11}$$ \wtrf@n

と定めると $\|\cdot\|$ はノルムになる。以下 $\|\cdot\|$ がノルムであることを確かめる：

(i) （正値性）どの k についても $0 \le \left|x^k\right|$ であり，$\|x\| = \max_k\left\{\left|x^k\right|\right\} \ge 0$ であるから成立。

(ii) （一意性）$x = 0$ のとき，どの k についても $x^k = 0$ であるから $\|x\| = \max_k\left\{\left|x^k\right|\right\} = 0$ である。また，$\|x\| = 0$ のとき，任意の k に対し，絶対値の非負性から $0 \le \left|x^k\right|$ であって，$\left|x^k\right| \le x = 0$ であるから $\left|x^k\right| = 0$ である。これより $x = 0$ となる。

(iii) （同次性）絶対値の非負性と同次性から，$\|cx\| = \max_k\{|cx|\} = |c| \cdot \max_k\left\{\left|x^k\right|\right\} = |c|\|x\|$ が従う。

(iv) （三角不等式）絶対値の三角不等式から，各 k に対して $\left|x^k + y^k\right| \le \left|x^k\right| + \left|y^k\right|$ であるから最大値に関してもこの不等号が成り立つので $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ が従う。

以上により式 (equ: 実ノルム-max 0.11) で定められた $\|\cdot\|$ はノルムである。

次に，V 上の勝手なノルム $\|\cdot\|_1$ を取ってきたときに，式 (equ: 実ノルム-max 0.11) で定義した $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|$ が同値になってしまうことを示す。V のコンパクト集合 S を $S \coloneqq \{y \in V\,;\, \|y\| = 1\}$ によって定め，関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ を $f(y) \coloneqq \|y\|_1$ と定める。f の連続性（命題 prop: 実ノルム-連続性 0.4）と S がコンパクト集合であることから，f の値域には最小元 m と最大元 M が存在する。S 上で $y \ne 0$ であり，ノルムの正値性から $0 < m \le M$ である。特に，$\|y\| = 1$ ならば $y \in S$ であり，m, M の定義から $m \le f(y) \le M$ 及び $f(y) = \|y\|_1$ なので $m \le \|x\|_1 \le M$ が従う。ここで，V 上の一般の $x \ne 0$ に対して $y \coloneqq x/\|x\|$ とすると $\|y\| = \|x/\|x\|\| = \|x\|/\|x\| = 1$ より $y \in S$ であるから $f(y) = \|x/\|x\|\|_1 = \|x\|_1/\|x\|$ であって，$m \le \|x\|_1/\|x\| \le M$ より $m\|x\| \le \|x\|_1 \le M\|x\|$ である。$x = 0$ についても $\|0\| = \|0\|_1 = 0$ であって，$m\|0\|_1 \le \|0\| \le M\|0\|_1$ は成立するので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|$ は同値である。

有限次元線型空間 V 上で与えられた任意の 2 つのノルム $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ はそれぞれ式 (0.11) で定義された $\|\cdot\|$ と同値であり，ノルムの同値は同値関係（命題0.6）なので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ も同値である。 $\square$

0.1.1 実線型空間上のノルム

上ではノルムに関して，一般的な形でやや抽象的に述べた。以降では[?] に基づいて，常微分方程式を実際に扱う際に有用なノルムを具体的に扱う。ここでは有限次元実線型空間 $\mathbb{R}^n$ 上のノルムの例を挙げる。以下では，$x = \left(x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}\right)$ の各成分を実数とし，$|\cdot|$ を実数の絶対値とする。

例 0.9 (Euclid ノルム)**.** 原点からの標準的な距離：

$$\|x\|_2 \coloneqq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|x^k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.12}$$

はノルムである。

例 0.10 (一様ノルム)**.** 定理0.8 の証明において式 (0.11) で定義された $\|\cdot\|$ はノルムである。後述するように，p ノルムにおいて $p \to \infty$ の極限で再現されることから，これを $\|\cdot\|_\infty$ と書いて ∞ ノルムとも呼ぶ。

定義 0.11 (p ノルム)**.** p を 1 以上の実数とする。このとき，x の p ノルム $\|x\|_p$ を，

$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.13}$$

で定める。

問 0.1. p ノルムがノルムの条件（定義0.1）を満たしていることを確かめよ。

1 ノルムのことを絶対値ノルムと呼び，絶対値ノルムによって定まる距離を Manhattan 距離と呼ぶ。2 ノルムは Euclid ノルムに一致する。

命題 0.12. $p \to \infty$ の極限で p ノルム $\|\cdot\|_p$ は例0.10 の一様ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に一致する。

Proof. x^M は x の成分の $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ のうち絶対値が最大のものであるとする。このとき，$\left|x^M\right| = \|x\|_\infty$ と書ける。定義より，

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{0 \le k \le n-1} \left\{\left|x^k\right|\right\} = \left|x^M\right| \tag{0.14}$$

であるから，示すべきことは，

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to \left|x^M\right| \quad (p \to \infty) \tag{0.15}$$

\wtrf@n

である。まず，$1 < p < \infty$ のとき，$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ であることを確かめる。これは，

$$0 \leq \left|x^M\right|^p \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p \tag{0.16}$$

であることと，$0 < p$ のとき，$t \in [0, \infty)$ において $f(t) = t^{\frac{1}{p}}$ が狭義単調増加であること，0 以上 $(n-1)$ 以下の任意の整数 k について $\left|x^k\right| \geq 0$ であることから，

$$\left|x^M\right| = \left(\left|x^M\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.17}$$

より成立。また，0 以上 $(n-1)$ 以下の任意の整数 k について $0 \leq \left|x^k\right| \leq \left|x^M\right|$ であり，

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|x^M\right|^p = n\left|x^M\right|^p \tag{0.18}$$

が成立する。更に，n は固定された正整数であるから

$$n^{\frac{1}{p}} \to n^0 = 1 \quad (p \to \infty) \tag{0.19}$$

である。

これらのことから，

$$0 \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left|x^M\right| \leq \left(n\left|x^M\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left|x^M\right| \leq \left(n^{\frac{1}{p}} - 1\right)\left|x^M\right| \to 0 \quad (p \to \infty) \tag{0.20}$$

が従い，はさみうちの原理から，

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to \left|x^M\right| \quad (p \to \infty) \tag{0.21}$$

equ: 実ノルム-p ノルムの極限

であり，これは式 (0.15) の成立を意味している。 □

eg: 実ノルム-一様

以降，有限次元線型空間のノルムは例 0.10 の一様ノルムであるとする。

下の整数

記法 0.13. 以下では簡単のために，$n-1$ 以下の非負整数の集合を，

$$\boldsymbol{N}_n \coloneqq \{\, j \,;\, j \in \mathbb{N} \ \land \ 0 \leq j \leq n-1 \,\} \tag{0.22}$$

と書く。

の不等式

命題 0.14. I を $\mathbb{R}$ 上の閉区間であるとする。$f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を連続なベクトル値関数とするとき，

$$\left\| \int_I dt\, f(t) \right\| \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{0.23}$$

が成立する。

Proof. I 上可積分な $g\colon I \to \mathbb{R}$ と絶対値に関する以下の不等式：

$$\left| \int_I dt\, g(t) \right| \le \int_I dt\, |g(t)| \tag{0.24}$$

\wtrf@n

を用いる。

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n, \forall t \in I,\ f^j(t) \le \left| f^j(t) \right| \le \|f(t)\| \tag{0.25}$$

であるから，

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n,\ \int_I dt\, f^j(t) \le \int_I dt \left| f^j(t) \right| \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{0.26}$$

equ: 実ノルム-積分絶対値不等式

である。ここで，式 (0.24) の不等式から，

$$\left| \int_I dt\, f^j(t) \right| \le \int_I dt \left| f^j(t) \right| \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{0.27}$$

であるから，

$$\left\| \int_I dt\, f(t) \right\| = \max_{0 \le j \le n-1} \left\{ \left| \int_I dt\, f^j(t) \right| \right\} \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{0.28}$$

が成立する。 □

素ノルム

定義 0.15 (作用素ノルム)**.** 線型作用素 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，$\|A\|$ を，

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\} \tag{0.29}$$

で定める。

以降，A を線型作用素とし，その (j, k) 成分を a^j_k と書く。

ム具体形

命題 0.16.

$$\|A\| = \max_{0 \le j \le n-1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left| a^j_k \right| \right\} \tag{0.30}$$

Proof. $\|x\| = 1$ のとき，x の各成分の絶対値は 1 以下である。このとき，Ax の第 j 成分 $(Ax)_j$ に関して，

$$\left| (Ax)_j \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a^j_k x^k \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \left| a^j_k \right| \left| x^k \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \left| a^j_k \right| \tag{0.31}$$

となり，1 つ目の等号成立は,

$$\left[\forall k \in \boldsymbol{N}_n,\ a^j_k x^k \geq 0\right] \ \vee\ \left[\forall k \in \boldsymbol{N}_n,\ a^j_k x^k \leq 0\right] \tag{0.32}$$

のとき，すなわち $a^j_k x^k$ が全て同符号のときである。2 つ目の等号成立は，x の各成分の絶対値が 1 に等しい場合であり，この 2 つの条件は同時に満たすことができる。実際，各 k について，$a^j_k \geq 0$ なら $x^k = 1$ とし，$a^j_k < 0$ なら $x^k = -1$ と定めれば，いずれの等号も成立する。これより,

$$\|A\| = \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left| a^j_k \right| \right\} \tag{0.33}$$

である。 □

不等式 1

命題 0.17.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \tag{0.34}$$

Proof. 各 k について $\left|x^k\right| \leq \|x\|$ であるから，Ax の第 j 成分について,

$$\left|(Ax)_j\right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a^j_k x^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|a^j_k\right| \left|x^k\right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left| a^j_k \right| \right) \cdot \|x\| \tag{0.35}$$

が成立して,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \tag{0.36}$$

が従う。 □

角不等式

命題 0.18. A, B を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への任意の線型作用素とする。このとき,

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \tag{0.37}$$

が成立する。

Proof. A, B の (j,k) 成分をそれぞれ a^j_k, b^j_k とする。まず,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| a^j_k + b^j_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| a^j_k \right| + \sum_{k=0}^{n-1} \left| b^j_k \right| \tag{0.38}$$

であるから,

$$\max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left| a^j_k + b^j_k \right| \right\} \leq \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left| a^j_k \right| \right\} + \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left| b^j_k \right| \right\} \tag{0.39}$$

であり，$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ である。

次に，m は，

$$\forall \ell \in \boldsymbol{N}_n,\ \sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k^\ell\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k^m\right| \tag{0.40}$$

を満たす，すなわち $\|B\|$ を与える行の添字とする。このとき，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell^j b_k^\ell\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\left|a_\ell^j\right|\left|b_k^\ell\right|\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\left|a_\ell^j\right|\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k^\ell\right|\right) \le \left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\left|a_\ell^j\right|\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k^m\right|\right) \tag{0.41}$$

より，

$$\max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell^j b_k^\ell\right|\right\} \le \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{\ell=0}^{n-1}\left|a_\ell^j\right|\right\} \cdot \max_{0\le m\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k^m\right|\right\} \tag{0.42}$$

が従うので，$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ である。 □

命題 0.19. 定義0.15 で定義した $\|A\|$ はノルムである。

Proof. 及び，命題0.18 定義0.1 の 4 条件を順に確かめる。

(i)（正値性）命題0.16 から，各項にある絶対値は非負なので，$\|A\| \ge 0$ である。

(ii)（一意性）命題0.16 から，$\|A\| = 0$ だとすれば，絶対値の非負性から，どの j に関しても $\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k^j\right| = 0$ であり，これが成立するためには全ての (j,k) に関して $A_{jk} = 0$ でなければならず，このとき $A = O$（零行列）である。

(iii)（同次性）命題0.16 から，

$$\|cA\| = \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|c|\left|a_k^j\right|\right\} = |c| \cdot \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k^j\right|\right\} = |c|\|A\|. \tag{0.43}$$

(iv)（三角不等式）命題0.18 から直ちに従う。

□

問 0.2. $\mathbb{R}^n$ のベクトル x のノルムは例0.10 で述べた一様ノルムとし，$\mathbb{R}^n$ 上の線型作用素 A のノルムは定義0.15 で与えられた作用素ノルムであるとする。$n = 3$ のとき，

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.44}$$

とする。このとき，$\|x\|$ と $\|A\|$ を計算せよ。

問 0.3. $\mathbb{R}^n$ のベクトルに対して一様ノルムではなく，例0.9 で導入した Euclid ノルムを用いた場合，定義0.15 で定義される $\|A\|$ はどのような性質を持つだろうか。例えば，$\mathbb{R}^2$ 上の一般的な線型作用素の作用素ノルムを，その成分を用いて具体的に表わせ。（関連：スペクトルノルム）

0.2 Lipschitz 連続

m, n を正整数とする。$A \subseteq \mathbb{R}^m$ とし，$f\colon A \to \mathbb{R}^n$ について考える。

定義 0.20 (連続性)**.** f が A 上連続であるとは，

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in A, \exists\delta \in \mathbb{R}_{>0}; \forall y \in A, \left[\|x-y\| < \delta \implies \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon\right] \tag{0.45}$$

が成立することである。

定義 0.21 (一様連続性)**.** f が A 上一様連続であるとは，

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists\delta \in \mathbb{R}_{>0}; \forall x, \forall y \in A, \left[\|x-y\| < \delta \implies \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon\right] \tag{0.46}$$

が成立することである。

定義 0.22 (Lipschitz 連続)**.** f が A 上 Lipschitz 連続であるとは，

$$\exists L \in \mathbb{R}_{\geq 0}; \forall x, \forall y \in A, \left[\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\|\right] \tag{0.47}$$

が成立することである。このとき，L を Lipschitz 定数という。

注意 0.23. Lipschitz 定数は一意的ではない。実際，L が Lipschitz 定数のとき，$c > 1$ を用いると $\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\| \leq cL\|x-y\|$ も成立するので，$(L \neq)cL$ も Lipschitz 定数である。上の条件を満たす Lipschitz 定数全体の下限を改めて Lipschitz 定数と呼ぶことにすれば，これは一意である。

命題 0.24. A 上 Lipschitz 連続な関数は A 上一様連続である。

Proof. f を A 上 Lipschitz 連続であると仮定し，Lipschitz 定数の一つを L と記す。任意の正数 ε に対して，$\delta := \varepsilon/(L+1)$ と置けば，$\delta > 0$ であり，$\|x-y\| < \delta = \varepsilon/(L+1)$ のとき，$L\|x-y\| < (L+1)\|x-y\| < \varepsilon$ であり，

$$\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\| < (L+1)\|x-y\| < \varepsilon \tag{0.48}$$

が成立するので一様連続である。 □

命題 0.25. A 上一様連続な関数は A 上連続である。

Proof. 一般に，$P(a,b)$ を a, b に関する任意の命題としたとき，

$$[\exists a; \forall b, P(a,b)] \implies [\forall b, \exists a; P(a,b)] \tag{0.49}$$

は恒真である。証明木を描いてみると，図**??**に示すように，式 (0.49) が恒真であることが判る。一様連続性では $\exists\delta; \forall x$ の順であるのに対し，連続性では $\forall x, \exists\delta;$ の順であるから，一様連続なら連続である。 □

なら連続 **系 0.26.** A 上 Lipschitz 連続な関数は A 上連続である。

prop:Lipschitz連続様連続 prop:Lipschitz連続様連続

Proof. 命題0.24 と命題0.25 から直ちに従う。 □

itz 連続 **命題 0.27.** $-\infty < a < b < \infty$ とし，$I \coloneqq [a,b]$ と定め，$f\colon I \to \mathbb{R}^n$ は I 上で有界かつ可積分とする。$F\colon I \to \mathbb{R}^n$ を，

$$F(x) \coloneqq \int_a^x dt\, f(t) \tag{0.50}$$

によって定めると，F は I 上 Lipschitz 連続である。

Proof. $x, y \in I$ に対し，

$$F_j(x) - F_j(y) = \int_a^x dt\, f^j(t) - \int_a^y dt\, f^j(t) = \int_y^x dt\, f^j(t) \tag{0.51}$$

である。f は I 上で有界であるから，

$$L \coloneqq \sup_{t\in I}\{\|f(t)\|\} \geq 0 \tag{0.52}$$

equ: 実ノルム-積分絶対値不等式

と定めておくと，I 上で常に $\left|f^j(t)\right| \leq L$ であり，式 (0.24) により，

$$|F_j(x) - F_j(y)| = \left|\int_y^x dt\, f^j(t)\right| \leq \left|\int_x^y dt \left|f^j(t)\right|\right| \leq \left|\int_x^y dt\, L\right| = L|x-y| \tag{0.53}$$

である。これより，I 上の任意の x, y に関して

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L|x-y| \tag{0.54}$$

が成立するから，F は I 上 Lipschitz 連続である。 □

itz 連続 **命題 0.28.** $a < b$ とする。$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ は $[a,b]$ 上で連続，(a,b) 上で微分可能とし，(a,b) 上で $\|f'(t)\|$ は有限であるとする。このとき，f は $[a,b]$ 上で Lipschitz 連続である。

Proof. (a,b) 上での $\|f'(t)\|$ の有界性から，

$$L \coloneqq \sup_{t\in(a,b)} \max_j \left\{\left|(f^j)'(t)\right|\right\} < \infty \tag{0.55}$$

が定まり，$L \geq 0$ である。f の各成分について，平均値の定理より，

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n, \forall x, \forall y \in [a,b], \left[x < y \Rightarrow \exists c_j \in (a,b); \left((x < c_j < y) \wedge \frac{f^j(x) - f^j(y)}{x-y} = (f^j)'(c_j)\right)\right] \tag{0.56}$$

が成立する。このような c_j を取ったとき，$(f^j)'(c_j) \leq L$ であるから，

$$\|f(x) - f(y)\| = \max_j\left\{\left|f^j(x) - f^j(y)\right|\right\} = \max_j\left\{\left|(f^j)'(c_j)\right||x-y|\right\} \leq L|x-y| \tag{0.57}$$

\wtrf@n

equ:Lipschitz-f’ が有界な

である。$x > y$ のときにも平均値の定理により適当な定数 $\tilde{c}_j$ の存在が言えるので，式 (0.57) は同様に成立する。$x = y$ のとき，$\|0\| \le L|0|$ は成立するので式 (0.57) も成立する。これより，$[a, b]$ 上の任意の x, y に関して $\|f(x) - f(y)\| \le L|x - y|$ の成立が言えた。従って，f は Lipschitz 連続である。 □

equ:Lipschitz-f’ が有界なら Lipschitz 連続-不等式