微分方程式と特殊函数

Twitter：@FugaciousShade

最終更新日：2021 年 9 月 9 日

まえがき

This is Introduction.

目次

記法

- $\mathbb{C}$：複素数全体
- $\mathbb{R}$：実数全体
- $\mathbb{Z}$：整数全体
- $\mathbb{N}$：非負整数全体
- $\mathrm{Re}(z)$：複素数 z の実部
- $\mathrm{Im}(z)$：複素数 z の虚部
- z^*：複素数 z の複素共役
- $A^\dagger$：作用素 A の Hermite 共役（随伴）作用素
- $A \coloneqq B$：A を $A = B$ によって定義する
- $\mathcal{O}$, o：Landau 記号
- $\binom{n}{k}$：二項係数
- δ_{ij}：Kronecker の delta 記号
- $\det$：行列式
- $\mathrm{Mat}(m, n, S)$：S 上の (m, n) 行列全体
- ${}^t A$：行列 A の転置行列
- $\forall$：全称記号
- $\exists$：存在記号

第 I 部

常微分方程式

第 1 章

実領域における線型常微分方程式

この章では主に [高野] を参考にして，実領域における線型常微分方程式の一般論について述べる。

1.1 ノルム

ノルムに関する以下の定義や命題は [野村] に拠る。

定義 1.1 (ノルム)**.** V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする。関数 $\|\cdot\|\colon V\to\mathbb{R}$ が以下の条件を満たすとき，$\|x\|$ を x のノルムという：

(i) （正値性）$\forall x\in V,\ \|x\|\geq 0$
(ii) （一意性）$\forall x\in V,\ \left[\|x\|=0 \iff x=0\right]$
(iii) （同次性）$\forall k\in\mathbb{C},\ \forall x\in V,\ \|kx\|=|k|\|x\|$
(iv) （三角不等式）$\forall x,\forall y\in V,\ \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

ノルムの定義されたベクトル空間をノルム空間という。

命題 1.2 (三角不等式)**.** ノルムは次の性質も満たす：

$$\forall x,\forall y\in V,\ \big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|.$$

Proof. まず，$\|x\|=\|(x-y)+y\|\leq\|x-y\|+\|y\|$ から $\|x\|-\|y\|\leq\|x-y\|$ が従う。同様に

$$\|y\|=\|(y-x)+x\|\leq\|(-1)(x-y)\|+\|x\|=|-1|\|x-y\|+\|x\|=\|x-y\|+\|x\|$$

なので，$\|y\|-\|x\|\leq\|x-y\|$ である。また，絶対値の特徴付け $|a|=\max\{a,-a\}$ を用いると，$\big|\|x\|-\|y\|\big|=\max\{\|x\|-\|y\|,\|y\|-\|x\|\}\leq\|x-y\|$ である。これらにより，$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|$ が成立する。 □

系 1.3. 命題 1.2 において，$y \mapsto -y$ として，元の三角不等式と併せれば，

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

が従う。

系 1.4 (ノルムの連続性)**.** ノルムは連続関数である。

Proof. 示すべきことは以下の通り：

$$\forall x, \forall y \in V,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \Big[\varepsilon > 0 \implies \Big(\exists \delta \in \mathbb{R};\ \Big[\delta > 0 \land (\|x - y\| < \delta \implies |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon)\Big]\Big)\Big].$$

実際，$\delta := \varepsilon$ と取れば，命題 1.2 により，$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon$ であるから，ノルムは連続関数である。 □

定義 1.5 (ノルムの同値性)**.** 以下が成立するとき，V 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であるという：

$$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M\ \land\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big].$$

命題 1.6. ノルムの同値性は同値関係である。

Proof. ノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であることを $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と記すことにする。すなわち，

$$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1 \ :\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ \exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M\ \land\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big].$$

このとき関係 $\sim$ が反射律，対称律，推移律を満たすことを示す。

- （反射律）任意の $\|\cdot\|$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。実際，$m = M = 1$ とすれば，

  $$0 < m = 1 \leq M = 1\ \land (\forall x \in V,\ 1 \cdot \|x\| \leq \|x\| \leq 1 \cdot \|x\|)$$

  であるから成立。
- （対称律）$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$，すなわち

  $$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M\ \land\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big]$$

  のとき，$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。後半の不等式を書き直すと，$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|$ であり，$0 < m \leq M$ であるから $0 < \frac{1}{M} \leq \frac{1}{m}$ であるから，$m' := \frac{1}{M}, M' := \frac{1}{m}$ と取れば確かに $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ の成立が判る。
- （推移律）3 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ のとき，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ が成立することを示す。仮定から，

  $$\exists m_1, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_1 \leq M_2\ \land\ (\forall x \in V,\ m_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M_1\|x\|_1)\Big],$$
  $$\exists m_2, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_2 \leq M_2\ \land\ (\forall x \in V,\ m_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M_2\|x\|_2)\Big]$$

の両方が成立しているから，$\|x\| \leq M_1\|x\|_1 \leq M_1M_2\|x\|_2$ 及び，$\|x\| \geq m_1\|x\|_1 \geq m_1m_2\|x\|_2$ より，$m_1m_2\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M_1M_2\|x\|_2$ が従う。これより，$m := m_1m_2$, $M := M_1M_2$ と取れば $0 < m_1m_2 \leq M_1M_2$ も成立するので $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ である。

以上により，ノルムの同値性は同値関係である。 □

定理 1.7. ベクトル空間 V が有限次元であれば，V 上の任意の 2 つのノルムは同値である。

Proof. V を有限次元ベクトル空間とし，$n := \dim V$ とする。V の基底として，$\{\boldsymbol{e}_k\}_{0\leq k\leq n-1}$ を取り固定する。V の元 x を，$x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\boldsymbol{e}_k$ と表したときの成分 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n-1}$ を用いて，

$$\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R};\ x \mapsto \|x\| := \max_{0\leq k\leq n-1}\{|x_k|\} \tag{1.1}$$

と定めると $\|\cdot\|$ はノルムになる。以下 $\|\cdot\|$ がノルムであることを確かめる：

- （正値性）どの k についても $0 \leq |x_k|$ であり，$\|x\| = \max_k\{|x_k|\} \geq 0$ であるから成立。
- （一意性）$x = 0$ のとき，どの k についても $x_k = 0$ であるから $\|x\| = \max_k\{|x_k|\} = 0$ である。また，$\|x\| = 0$ のとき，任意の k に対し，絶対値の非負性から $0 \leq |x_k|$ であって，$|x_k| \leq x = 0$ であるから $|x_k| = 0$ である。これより $x = 0$ となる。
- （同次性）絶対値の非負性と同次性から，$\|cx\| = \max_k\{|cx|\} = |c| \cdot \max_k\{|x_k|\} = |c|\|x\|$ が従う。
- （三角不等式）絶対値の三角不等式から，各 k に対して $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ であるから最大値に関してもこの不等号が成り立つので $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が従う。

以上により式 (1.1) で定められた $\|\cdot\|$ はノルムである。

次に，V 上の勝手なノルム $\|\cdot\|_1$ を取ってきたときに，式 (1.1) で定義した $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|$ が同値になってしまうことを示す。V のコンパクト集合 S を $S := \{y \in V\,;\, \|y\| = 1\}$ によって定め，関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ を $f(y) := \|y\|_1$ と定める。f の連続性（系 1.4）と S がコンパクト集合であることから，f の値域には最小元 m と最大元 M が存在する。S 上で $y \neq 0$ であり，ノルムの正値性から $0 < m \leq M$ である。特に，$\|y\| = 1$ ならば $y \in S$ であり，m, M の定義から $m \leq f(y) \leq M$ 及び $f(y) = \|y\|_1$ なので $m \leq \|x\|_1 \leq M$ が従う。ここで，V 上の一般の $x \neq 0$ に対して $y := x/\|x\|$ とすると $\|y\| = \|x/\|x\|\| = \|x\|/\|x\| = 1$ より $y \in S$ であるから $f(y) = \|x/\|x\|\|_1 = \|x\|_1/\|x\|$ であって，$m \leq \|x\|_1/\|x\| \leq M$ より $m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|$ である。$x = 0$ についても $\|0\| = \|0\|_1 = 0$ であって，$m\|0\|_1 \leq \|0\| \leq M\|0\|_1$ は成立するので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|$ は同値である。

有限次元ベクトル空間 V 上で与えられた任意の 2 つのノルム $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ はそれぞれ式 (1.1) で定義された $\|\cdot\|$ と同値であり，ノルムの同値は同値関係（命題 1.6）なので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ も同値である。 □

有限次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 上のノルムの例を挙げる。以下では，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の各成

分を複素数とし，$|\cdot|$ を複素数の絶対値とする。

例 1.8 (Euclid ノルム)**.** 標準的な距離：

$$\|x\|_2 \coloneqq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

はノルムである。

例 1.9 (一様ノルム)**.** 定理 1.7 の証明において式 (1.1)：

$$\|x\|_\infty \coloneqq \max_{0 \le k \le n-1} \{|x_k|\}$$

はノルムである。後述するように，p ノルムにおいて $p \to \infty$ の極限で再現されることから，∞ ノルムとも呼ぶ。

例 1.10 (p ノルム)**.** p を 1 以上の実数とする。このとき，

$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

はノルムである。1 ノルムのことを Manhattan 距離と呼ぶ。2 ノルムは Euclid ノルムに一致する。特に，$p \to \infty$ の極限で p ノルムは例 1.9 の一様ノルムに一致する。

1.2　Lipschitz 条件

1.3　Picard の逐次近似法

第 2 章

複素領域における線型常微分方程式

この章では主に [高野] を参考にして複素領域における線型常微分方程式の一般論について述べる。

第 3 章

Frobenius の方法

This is abstract.

aaa

参考文献

[高野] 朝倉 復刊セレクション 新数学講座『常微分方程式』高野 恭一，朝倉書店 (1994 年)
[原岡] すうがくの風景 7『超幾何関数』原岡 喜重，朝倉書店 (2002 年)
[小松] 復刊 近代数学講座 5『特殊函数』小松 勇作，朝倉書店 (2004 年)
[野村]『球面調和函数と群の表現』野村 隆昭，日本評論社 (2018 年)