微分方程式と特殊函数

Twitter：@FugaciousShade

最終更新日：2021 年 9 月 12 日

目次

記法

- $\mathbb{C}$：複素数全体
- $\mathbb{R}$：実数全体
- $\mathbb{Z}$：整数全体
- $\mathbb{N}$：非負整数全体
- $\mathrm{Re}(z)$：複素数 z の実部
- $\mathrm{Im}(z)$：複素数 z の虚部
- z^*：複素数 z の複素共役
- $A^\dagger$：作用素 A の Hermite 共役（随伴）作用素
- $A \coloneqq B$：A を $A = B$ によって定義する
- $\mathcal{O}$, o：Landau 記号
- $\binom{n}{k}$：二項係数
- δ_{ij}：Kronecker の delta 記号
- $\det$：行列式
- $\mathrm{Mat}(m, n, S)$：S 上の (m, n) 行列全体
- ${}^tA$：行列 A の転置行列
- $\forall$：全称記号
- $\exists$：存在記号

第I部

常微分方程式

第 1 章

実領域における線型常微分方程式

この章では主に [高野] を参考にして，実領域における線型常微分方程式の一般論について述べる。

1.1 ノルム

ノルムに関する以下の定義や命題は [野村] に拠る。

定義 1.1 (ノルム)**.** V を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上の線型空間とする。$|\cdot|$ を実数または複素数の絶対値とする。関数 $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ が以下の条件を満たすとき，$\|x\|$ を x のノルムという：

(i) （正値性）$\forall x \in V,\ \|x\| \geq 0$
(ii) （一意性）$\forall x \in V,\ \left[\|x\| = 0 \iff x = 0\right]$
(iii) （同次性）$\forall k \in \mathbb{C},\ \forall x \in V,\ \|kx\| = |k|\|x\|$
(iv) （三角不等式）$\forall x, \forall y \in V,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ノルムの定義された線型空間をノルム空間という。

命題 1.2 (三角不等式)**.** ノルムは次の性質も満たす：

$$\forall x, \forall y \in V,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \tag{1.1}$$

Proof. まず，$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ から $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ が従う。同様に

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|(-1)(x - y)\| + \|x\| = |-1|\|x - y\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\| \tag{1.2}$$

なので，$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$ である。また，絶対値の特徴付け $|a| = \max\{a, -a\}$ を用いると，$\max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\} = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ である。これらにより，$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ が成立する。 □

系 1.3. 命題 1.2 において，$y \mapsto -y$ として，元の三角不等式と併せれば，

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{1.3}$$

が従う。

命題 1.4 (ノルムの連続性)**.** ノルムは連続関数である。

Proof. 示すべきことは以下の通り：

$$\forall x, \forall y \in V,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \Big[\varepsilon > 0 \implies \Big(\exists \delta \in \mathbb{R};\ \Big[\delta > 0 \wedge (\|x-y\| < \delta \implies \big|\|x\| - \|y\|\big| < \varepsilon)\Big]\Big)\Big]. \tag{1.4}$$

実際，$\delta := \varepsilon$ と取れば，命題 1.2 により，$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| < \delta = \varepsilon$ であるから，ノルムは連続関数である。 □

定義 1.5 (ノルムの同値性)**.** 以下が成立するとき，V 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であるという：

$$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M \ \wedge\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big]. \tag{1.5}$$

命題 1.6. ノルムの同値性は同値関係である。

Proof. ノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であることを $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と記すことにする。すなわち，

$$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1 \ :\overset{\text{def}}{\iff}\ \exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M \ \wedge\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big]. \tag{1.6}$$

このとき関係 $\sim$ が反射律，対称律，推移律を満たすことを示す。

- （反射律）任意の $\|\cdot\|$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。実際，$m = M = 1$ とすれば，

  $$0 < m = 1 \leq M = 1 \ \wedge\ (\forall x \in V,\ 1 \cdot \|x\| \leq \|x\| \leq 1 \cdot \|x\|) \tag{1.7}$$

  であるから成立。
- （対称律）$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$，すなわち

  $$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M \ \wedge\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big] \tag{1.8}$$

  のとき，$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。後半の不等式を書き直すと，$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|$ であり，$0 < m \leq M$ であるから $0 < \frac{1}{M} \leq \frac{1}{m}$ であり，$m' := \frac{1}{M}$, $M' := \frac{1}{m}$ と取れば確かに $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ の成立が判る。
- （推移律）3 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ のとき，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ が成立することを示す。仮定から，

  $$\exists m_1, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_1 \leq M_2 \ \wedge\ (\forall x \in V,\ m_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M_1\|x\|_1)\Big], \tag{1.9}$$

  $$\exists m_2, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_2 \leq M_2 \ \wedge\ (\forall x \in V,\ m_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M_2\|x\|_2)\Big] \tag{1.10}$$

の両方が成立しているから，$\|x\| \leq M_1\|x\|_1 \leq M_1M_2\|x\|_2$ 及び，$\|x\| \geq m_1\|x\|_1 \geq m_1m_2\|x\|_2$ より，$m_1m_2\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M_1M_2\|x\|_2$ が従う。これより，$m := m_1m_2$, $M := M_1M_2$ と取れば $0 < m_1m_2 \leq M_1M_2$ も成立するので $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ である。

以上により，ノルムの同値性は同値関係である。 □

定理 1.7. 線型空間 V が有限次元であれば，V 上の任意の 2 つのノルムは同値である。

Proof. V を有限次元線型空間とし，$n := \dim V$ とする。V の基底として，$\{\boldsymbol{e}_k\}_{0\leq k\leq n-1}$ を取り固定する。V の元 x を，$x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\boldsymbol{e}_k$ と表したときの成分 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n-1}$ を用いて，

$$\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R};\ x \mapsto \|x\| := \max_{0\leq k\leq n-1}\{|x_k|\} \tag{1.11}$$

と定めると $\|\cdot\|$ はノルムになる。以下 $\|\cdot\|$ がノルムであることを確かめる：

(i)（正値性）どの k についても $0 \leq |x_k|$ であり，$\|x\| = \max_k\{|x_k|\} \geq 0$ であるから成立。

(ii)（一意性）$x = 0$ のとき，どの k についても $x_k = 0$ であるから $\|x\| = \max_k\{|x_k|\} = 0$ である。また，$\|x\| = 0$ のとき，任意の k に対し，絶対値の非負性から $0 \leq |x_k|$ であって，$|x_k| \leq x = 0$ であるから $|x_k| = 0$ である。これより $x = 0$ となる。

(iii)（同次性）絶対値の非負性と同次性から，$\|cx\| = \max_k\{|cx|\} = |c|\cdot\max_k\{|x_k|\} = |c|\|x\|$ が従う。

(iv)（三角不等式）絶対値の三角不等式から，各 k に対して $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ であるから最大値に関してもこの不等号が成り立つので $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が従う。

以上により式 (1.11) で定められた $\|\cdot\|$ はノルムである。

次に，V 上の勝手なノルム $\|\cdot\|_1$ を取ってきたときに，式 (1.11) で定義した $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|$ が同値になってしまうことを示す。V のコンパクト集合 S を $S := \{y \in V\,;\, \|y\| = 1\}$ によって定め，関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ を $f(y) := \|y\|_1$ と定める。f の連続性（命題 1.4）と S がコンパクト集合であることから，f の値域には最小元 m と最大元 M が存在する。S 上で $y \neq 0$ であり，ノルムの正値性から $0 < m \leq M$ である。特に，$\|y\| = 1$ ならば $y \in S$ であり，m, M の定義から $m \leq f(y) \leq M$ 及び $f(y) = \|y\|_1$ なので $m \leq \|x\|_1 \leq M$ が従う。ここで，V 上の一般の $x \neq 0$ に対して $y := x/\|x\|$ とすると $\|y\| = \|x/\|x\|\| = \|x\|/\|x\| = 1$ より $y \in S$ であるから $f(y) = \|x/\|x\|\|_1 = \|x\|_1/\|x\|$ であって，$m \leq \|x\|_1/\|x\| \leq M$ より $m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|$ である。$x = 0$ についても $\|0\| = \|0\|_1 = 0$ であって，$m\|0\|_1 \leq \|0\| \leq M\|0\|_1$ は成立するので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|$ は同値である。

有限次元線型空間 V 上で与えられた任意の 2 つのノルム $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ はそれぞれ式 (1.11) で定義された $\|\cdot\|$ と同値であり，ノルムの同値は同値関係（命題 1.6）なので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ も同値である。 □

1.1.1　実線型空間上のノルム

上ではノルムに関して，一般的な形でやや抽象的に述べた。以降では [高野] に基づいて，常微分方程式を実際に扱う際に有用なノルムを具体的に扱う。ここでは有限次元実線型空間 $\mathbb{R}^n$ 上のノルムの例を挙げる。以下では，$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ の各成分を実数とし，$|\cdot|$ を実数の絶対値とする。

例 1.8 (Euclid ノルム)**.** 原点からの標準的な距離：

$$\|x\|_2 \coloneqq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.12}$$

はノルムである。

例 1.9 (一様ノルム)**.** 定理 1.7 の証明において式 (1.11) で定義された $\|\cdot\|$ はノルムである。後述するように，p ノルムにおいて $p \to \infty$ の極限で再現されることから，これを $\|\cdot\|_\infty$ と書いて ∞ ノルムとも呼ぶ。

定義 1.10 (p ノルム)**.** p を 1 以上の実数とする。このとき，x の p ノルム $\|x\|_p$ を，

$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.13}$$

で定める。

問 1.1. p ノルムがノルムの条件（定義 1.1）を満たしていることを確かめよ。

1 ノルムのことを絶対値ノルムと呼び，絶対値ノルムによって定まる距離を Manhattan 距離と呼ぶ。2 ノルムは Euclid ノルムに一致する。

命題 1.11. $p \to \infty$ の極限で p ノルム $\|\cdot\|_p$ は例 1.9 の一様ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に一致する。

Proof. x_M は x の成分の $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ のうち絶対値が最大のものであるとする。このとき，$|x_M| = \|x\|_\infty$ と書ける。定義より，

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{0 \le k \le n-1} \{|x_k|\} = |x_M| \tag{1.14}$$

であるから，示すべきことは，

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow |x_M| \quad (p \to \infty) \tag{1.15}$$

である。まず，$1 < p < \infty$ のとき，$\|x\|_\infty \le \|x\|_p$ であることを確かめる。これは，

$$0 \le |x_M|^p \le \sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^p \tag{1.16}$$

であることと，$0 < p$ のとき，$t \in [0, \infty)$ において $f(t) = t^{\frac{1}{p}}$ が狭義単調増加であること，0 以上 $(n-1)$ 以下の任意の整数 k について $|x_k| \ge 0$ であることから，

$$(|x_M|^p)^{\frac{1}{p}} = |x_M| \le \left(\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.17}$$

より成立。また，0 以上 $(n-1)$ 以下の任意の整数 k について $0 \le |x_k| \le |x_M|$ であり，

$$0 \le \sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^p \le \sum_{k=0}^{n-1} |x_M|^p = n|x_M|^p \tag{1.18}$$

が成立する。更に，n は固定された正整数であるから

$$n^{\frac{1}{p}} \longrightarrow n^0 = 1 \quad (p \to \infty) \tag{1.19}$$

である。

これらのことから，

$$0 \le \left(\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} - |x_M| \le (n|x_M|^p)^{\frac{1}{p}} - |x_M| \le \left(n^{\frac{1}{p}} - 1 \right) |x_M| \longrightarrow 0 \quad (p \to \infty) \tag{1.20}$$

が従い，はさみうちの原理から，

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow |x_M| \quad (p \to \infty) \tag{1.21}$$

であり，これは式 (1.15) の成立を意味している。 □

以降，有限次元線型空間のノルムは例 1.9 の一様ノルムであるとする。

命題 1.12. *I を $\mathbb{R}$ 上の閉区間であるとする。$f \colon I \to \mathbb{R}^n$ を連続なベクトル値関数とするとき，*

$$\left\| \int_I dt\, f(t) \right\| \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{1.22}$$

が成立する。

Proof. I 上可積分な g と絶対値に関する以下の不等式：

$$\left| \int_I dt\, g(t) \right| \le \int_I dt\, |g(t)| \tag{1.23}$$

を用いる。

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \left[0 \le j \le n-1 \implies f_j(t) \le |f_j(t)| \le \|f(t)\|\right] \tag{1.24}$$

であるから,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \left[0 \le j \le n-1 \implies \int_I dt\, f_j(t) \le \int_I dt\, |f_j(t)| \le \int_I dt\, \|f(t)\|\right] \tag{1.25}$$

である。ここで，式 (1.23) の不等式から,

$$\left|\int_I dt\, f_j(t)\right| \le \int_I dt\, |f_j(t)| \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{1.26}$$

であるから,

$$\left\|\int_I dt\, f(t)\right\| = \max_{0 \le j \le n-1}\left\{\left|\int_I dt\, f_j(t)\right|\right\} \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{1.27}$$

が成立する。 □

定義 1.13 (作用素ノルム)**.** 線型作用素 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，$\|A\|$ を,

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1}\{\|Ax\|\} \tag{1.28}$$

で定める。

以降，A を線型作用素とし，その (j,k) 成分を a_{jk} と書く。

命題 1.14.

$$\|A\| = \max_{0 \le j \le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}|\right\} \tag{1.29}$$

Proof. $\|x\| = 1$ のとき，x の各成分の絶対値は 1 以下である。このとき，Ax の第 j 成分 $(Ax)_j$ に関して,

$$\left|(Ax)_j\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}x_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}||x_k| \le \sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}| \tag{1.30}$$

となり，1 つ目の等号成立は,

$$\left[\forall k \in \mathbb{N}, \ (0 \le k \le n-1 \ \Rightarrow \ a_{jk}x_k \ge 0)\right] \vee \left[\forall k \in \mathbb{N}, \ (0 \le k \le n-1 \ \Rightarrow \ a_{jk}x_k \le 0)\right] \tag{1.31}$$

のとき，すなわち $a_{jk}x_k$ が全て同符号のときである。2 つ目の等号成立は，x の各成分の絶対値が 1 に等しい場合であり，この 2 つの条件は同時に満たすことができる。実際，各 k について，$a_{jk} \ge 0$ なら $x_k = 1$, $a_{jk} < 0$ なら $x_k = -1$ と定めれば，いずれの等号も成立する。これより,

$$\|A\| = \max_{0 \le j \le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}|\right\} \tag{1.32}$$

である。 □

命題 1.15.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \tag{1.33}$$

Proof. 各 k について $|x_k| \le \|x\|$ であるから，Ax の第 j 成分について，

$$\left|(Ax)_j\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}x_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}||x_k| \le \left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}|\right)\cdot\|x\| \tag{1.34}$$

が成立して，

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \tag{1.35}$$

が従う。 □

命題 1.16. A, B を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への任意の線型作用素とする。このとき，

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|,\ \|AB\| \le \|A\|\|B\| \tag{1.36}$$

が成立する。

Proof. A, B の (j,k) 成分をそれぞれ a_{jk}, b_{jk} とする。まず，

$$\sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}+b_{jk}| \le \sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}| + \sum_{k=0}^{n-1}|b_{jk}| \tag{1.37}$$

であるから，

$$\max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}+b_{jk}|\right\} \le \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}|\right\} + \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|b_{jk}|\right\} \tag{1.38}$$

であり，$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ である。

次に，m は，

$$\forall \ell,\ \left[0 \le \ell \le n-1 \implies \sum_{k=0}^{n-1}|b_{\ell k}| \le \sum_{k=0}^{n-1}|b_{mk}|\right] \tag{1.39}$$

を満たす，すなわち $\|B\|$ を与える行の添字とする。このとき，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{\ell=0}^{n-1} a_{j\ell}b_{\ell k}\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}|a_{j\ell}||b_{\ell k}|\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(|a_{j\ell}|\sum_{k=0}^{n-1}|b_{\ell k}|\right) \le \left(\sum_{\ell=0}^{n-1}|a_{j\ell}|\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}|b_{mk}|\right) \tag{1.40}$$

より，

$$\max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{\ell=0}^{n-1} a_{j\ell}b_{\ell k}\right|\right\} \le \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{\ell=0}^{n-1}|a_{j\ell}|\right\}\cdot\max_{0\le m\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|b_{mk}|\right\} \tag{1.41}$$

が従うので，$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ である。 □

命題 1.17. 定義 1.13 で定義した $\|A\|$ はノルムである。

Proof. 及び，命題 1.16 定義 1.1 の 4 条件を順に確かめる。

(i)（正値性）命題 1.14 から，各項にある絶対値は非負なので，$\|A\| \geq 0$ である。

(ii)（一意性）命題 1.14 から，$\|A\| = 0$ だとすれば，絶対値の非負性から，どの j に関しても $\sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}| = 0$ であり，これが成立するためには全ての (j,k) に関して $A_{jk} = 0$ でなければならず，このとき $A = O$（零行列）である。

(iii)（同次性）命題 1.14 から，

$$\|cA\| = \max_{0\leq j\leq n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|c||a_{jk}|\right\} = |c| \cdot \max_{0\leq j\leq n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|a_{jk}|\right\} = |c|\|A\|. \tag{1.42}$$

(iv)（三角不等式）命題 1.16 から直ちに従う。

□

問 1.2. $\mathbb{R}^n$ のベクトル x のノルムは例 1.9 で述べた一様ノルムとし，$\mathbb{R}^n$ 上の線型作用素 A のノルムは定義 1.13 で与えられた作用素ノルムであるとする。$n = 3$ のとき，

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

とする。このとき，$\|x\|$ と $\|A\|$ を計算せよ。

問 1.3. $\mathbb{R}^n$ のベクトルに対して一様ノルムではなく，例 1.8 で導入した Euclid ノルムを用いた場合，定義 1.13 で定義される $\|A\|$ はどのような性質を持つだろうか。例えば，$\mathbb{R}^2$ 上の一般的な線型作用素の作用素ノルムを，その成分を用いて具体的に表わせ。（関連：スペクトルノルム）

1.2　Lipschitz 条件

1.3　Picard の逐次近似法

参考文献

[高野] 朝倉 復刊セレクション 新数学講座『常微分方程式』高野 恭一，朝倉書店 (1994 年)
[原岡] すうがくの風景 7『超幾何関数』原岡 喜重，朝倉書店 (2002 年)
[小松] 復刊 近代数学講座 5『特殊函数』小松 勇作，朝倉書店 (2004 年)
[野村]『球面調和函数と群の表現』野村 隆昭，日本評論社 (2018 年)