

目次

0.1	常微分方程式の解の存在と一意性	2
0.1.1	Grönwall-Bellman の不等式	2
0.1.2	Picard の逐次近似法	4
0.1.3	具体的な常微分方程式の解の存在と一意性	10

この章では、実領域における常微分方程式の解の存在性と一意性に関する命題を扱う。参考文献は ^{takano}[?] である。

まず、記号や用語の準備をする。以下では t を実数とし、 $x = (x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$ を \mathbb{R}^n の元とする。 E を $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の部分集合とし、

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}^n; (t, x) \mapsto f(t, x) = (f^0(t, x), f^1(t, x), \dots, f^{n-1}(t, x)) \quad (0.0.1)$$

を既知関数とする。以降、

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (0.0.2)$$

で表される微分方程式を扱う。成分毎に書けば、

$$\frac{dx^j}{dt} = f^j(t, x^0, x^1, \dots, x^{n-1}), \quad (0 \leq j \leq n-1) \quad (0.0.3)$$

である。

程式の解

定義 0.0.1. I を \mathbb{R} 上の区間とする。 $x = x(t)$ が区間 I における式 ^{equ:ODE_R-微分方程式 (ベクトル表記)} (0.0.2) の解であるとは、

$$\forall j \in \mathbf{N}_n, \forall t \in I, \frac{dx^j(t)}{dt} = f^j(t, x^0(t), x^1(t), \dots, x^{n-1}(t)) \quad (0.0.4)$$

が成立することである。但し、区間 I に有限の上界や下界が存在する場合、区間の端での微分は片側微分係数で定める。また、 $(a, b) \in E$ としたとき、条件式 $x(a) = b$ のことを初期条件といい、これを満たす解を、点 (a, b) を通る解であるという。

以下では、初期条件も含め、

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(a) = b \quad (0.0.5)$$

を満たす解に関して考察する。

\wtrf@n

\wtrf@n

\wtrf@n

0.1 常微分方程式の解の存在と一意性

0.1.1 Grönwall-Bellman の不等式

の不等式

定理 0.1.1 (Grönwall-Bellman の不等式). $a < a'$ とし, $I := [a, a']$ とする. 関数 $X: I \rightarrow \mathbb{R}$ は I 上で連続とする, また, 関数 $c, L: I \rightarrow \mathbb{R}$ は I 上連続かつ非負であるとする.

$$\forall t \in I, 0 \leq X(t) \leq c(t) + \int_a^t ds L(s)X(s) \quad (0.1.1)$$

が成り立つとき,

$$\forall t \in I, 0 \leq X(t) \leq c(t) + \int_a^t ds c(s)L(s) \exp\left(\int_s^t du L(u)\right) \quad (0.1.2)$$

が成立する。

証明. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ を,

$$y(t) := \int_a^t ds L(s)X(s) \quad (0.1.3)$$

と定めると, 式 [\(0.1.1\) から](#) equ:ODE_R-Grönwall-Bellman の不等式-仮定

$$0 \leq X(t) \leq c(t) + y(t) \quad (0.1.4)$$

となる。微積分学の基本定理により,

$$\frac{dy(t)}{dt} = L(t)X(t) \quad (0.1.5)$$

である。 $L(t)$ は I 上で非負であるから, 式 [\(0.1.1\) に \$L\(t\)\$ を掛けることで](#) equ:ODE_R-Grönwall-Bellman の不等式-仮定

$$\forall t \in I, \frac{dy(t)}{dt} - L(t)y(t) \leq L(t)c(t) \quad (0.1.6)$$

が得られる。ここで, 両辺に $\exp(-\int_a^t du L(u)) (> 0)$ を掛けると, I 上の任意の t に対し,

$$\exp\left(-\int_a^t du L(u)\right) \frac{dy(t)}{dt} - L(t) \exp\left(-\int_a^t du L(u)\right) y(t) \leq L(t)c(t) \exp\left(-\int_a^t du L(u)\right) \quad (0.1.7)$$

が得られる。この式の左辺は,

$$\frac{d}{dt} \left[\exp\left(-\int_a^t du L(u)\right) y(t) \right] = \exp\left(-\int_a^t du L(u)\right) \frac{dy(t)}{dt} - L(t) \exp\left(-\int_a^t du L(u)\right) y(t) \quad (0.1.8)$$

と書けるから,

$$\forall t \in I, \frac{d}{dt} \left[\exp \left(- \int_a^t du L(u) \right) y(t) \right] \leq L(t)c(t) \exp \left(- \int_a^t du L(u) \right) \quad (0.1.9)$$

が成立する。この式の両辺を a から t まで定積分することを考える。左辺について, 定義から $y(a) = 0$ であることに注意すると,

$$\int_a^t ds \frac{d}{ds} \left[\exp \left(- \int_a^s du L(u) \right) y(s) \right] \quad (0.1.10)$$

$$= \left[\exp \left(- \int_a^s du L(u) \right) y(s) \right]_a^t = \exp \left(- \int_a^t du L(u) \right) y(t) \quad (0.1.11)$$

となる。右辺は,

$$\int_a^t ds L(s)c(s) \exp \left(- \int_a^s du L(u) \right) \quad (0.1.12)$$

であるから,

$$\exp \left(- \int_a^t du L(u) \right) y(t) \leq \int_a^t ds L(s)c(s) \exp \left(- \int_a^s du L(u) \right) \quad (0.1.13)$$

が得られる。この式の両辺に $\exp \left(\int_a^t du L(u) \right) (> 0)$ を掛ける。左辺は $y(t)$ になり, 右辺は,

$$\exp \left(\int_a^t du L(u) \right) \int_a^t ds L(s)c(s) \exp \left(- \int_a^s du L(u) \right) \quad (0.1.14)$$

$$= \int_a^t ds L(s)c(s) \exp \left(\int_s^t du L(u) \right) \quad (0.1.15)$$

となる。ここで, 指数法則と

$$\int_a^t du L(u) - \int_a^s du L(u) = \int_a^t du L(u) + \int_s^a du L(u) = \int_s^t du L(u) \quad (0.1.16)$$

を用いた。

これらにより,

$$y(t) \leq \int_a^t ds L(s)c(s) \exp \left(\int_s^t du L(u) \right) \quad (0.1.17)$$

が導かれ, 式 $\text{\texttt{equ:ODE_R-Gronwall-Bellman の不等式-y の評価式}}$ (0.1.4) と併せると,

$$0 \leq X(t) \leq c(t) + y(t) \leq c(t) + \int_a^t ds c(s)L(s) \exp \left(\int_s^t du L(u) \right) \quad (0.1.18)$$

が従い, これは式 $\text{\texttt{equ:ODE_R-Gronwall-Bellman の不等式}}$ (0.1.2) の成立を意味する。□

系 0.1.2. 定理 0.1.1 において, c, L を単なる非負定数とすると,

$$\forall t \in I, 0 \leq X(t) \leq c + L \int_a^t ds X(s) \quad (0.1.19)$$

が成立するとき,

$$\forall t \in I, 0 \leq X(t) \leq ce^{(t-a)L} \quad (0.1.20)$$

が成り立つ。

証明. 式 (0.1.2) の右辺の積分は,

$$\int_a^t ds cL \exp\left(\int_s^t du L\right) = cL \int_a^t ds e^{(s-t)L} = cLe^{-tL} \cdot \left[-\frac{e^{-sL}}{L}\right]_a^t \quad (0.1.21)$$

$$= -ce^{tL}(e^{-tL} - e^{-aL}) = -c + ce^{(t-a)L} \quad (0.1.22)$$

となるから, 式 (0.1.2) より,

$$\forall t \in I, 0 \leq X(t) \leq c + (-c + ce^{(t-a)L}) = ce^{(t-a)L} \quad (0.1.23)$$

が従う。□

定理 0.1.1 から得られた系 0.1.2 は, 後述する定理 0.1.3 の証明において, Picard の逐次近似法によって構成した解が唯一の解であることを示す際に有用である。

0.1.2 Picard の逐次近似法

定理 0.1.3 (Picard の定理). r, ρ を正数とする。 $f(t, x)$ が $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上の有界閉領域

$$E := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |t - a| \leq r, \|x - b\| \leq \rho\} \quad (0.1.24)$$

上で x に関して Lipschitz 連続^{*1}, すなわち,

$$\exists L \in \mathbb{R}_{\geq 0}; \forall t \in \mathbb{R}, \forall x, \forall y \in \mathbb{R}^n, [(t, x), (t, y) \in E \Rightarrow (\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|)] \quad (0.1.25)$$

であるとする^{*2}。

$$M := \max_{(t, x) \in E} \{\|f(t, x)\|\}, \quad r' := \min\left\{r, \frac{\rho}{M}\right\} \quad (0.1.26)$$

としたとき, 式 (0.0.5) を満たす解が区間 $I' := [a - r', a + r']$ において一意的存在する。

^{*1} 定義??参照

^{*2} $f(t, x)$ と $f(t, y)$ で t は共通のものであることに注意。

方針. 式 (0.0.5) ^{equ:ODE_R-微分方程式} を満たすことと,

$$x(t) = b + \int_a^t ds f(s, x(s)) \quad (0.1.27)$$

は同値である。実際, 式 (0.1.27) ^{equ:ODE_R-積分方程式} を満たす $x = x(t)$ の第 j 成分は, 微積分学の基本定理により,

$$\frac{dx^j(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(b^j + \int_a^t ds f^j(s, x(s)) \right) = f^j(t, x(t)) \quad (0.1.28)$$

を満たし,

$$x^j(a) = b^j + \int_a^a ds f^j(s, x(s)) = b^j \quad (0.1.29)$$

も満たす。ベクトルでまとめて表せば式 (0.0.5) ^{equ:ODE_R-微分方程式} を満たすことに他ならない。

式 (0.1.27) ^{equ:ODE_R-積分方程式} の解の存在性を示すために, Picard の逐次近似法によって区間 I' 上で式 (0.1.27) ^{equ:ODE_R-積分方程式} の解を構成する。Picard の逐次近似法では,

$$\forall t \in I', \|x_0(t) - b\| \leq \rho \quad (0.1.30)$$

を満たすような連続なベクトル値関数 $x_0(t)$ を用いて,

$$x_{m+1}(t) := b + \int_a^t ds f(s, x_m(s)) \quad (0.1.31)$$

によって $x_1(t), x_2(t), \dots$ を定義する。 $x_{m+1}(t)$ の右辺の積分の中に $x_m(t)$ があるため, $x_m(t)$ が f の定義域に収まっていることを確認する必要がある。

そして, このように構成した関数列 $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ の $m \rightarrow \infty$ における各点極限関数 $x(t)$ ^{equ:ODE_R-微分方程式} が式 (0.0.5) の解になっていることを示す。ここで, $y_m := x_{m+1} - x_m$ と定めると, $\sum_{k=0}^{m-1} y_k = x_m - x_0$ である。式 (0.1.25) ^{equ:ODE_R-Lipschitz条件} の Lipschitz 連続の条件を用いると, 数学的帰納法によって

$$\|y_m(t)\| = \|x_{m+1}(t) - x_m(t)\| \leq \rho \frac{(Lr')^m}{m!} + \frac{M}{L} \frac{(Lr')^{m+1}}{(m+1)!} \quad (0.1.32)$$

であることが言えて,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|y_m(t)\| \leq \left(\rho + \frac{M}{L} \right) e^{Lr'} < \infty \quad (0.1.33)$$

が従う。そこで, 定理?? ^{thm:一様収束-WeierstrassのM判定法} を用いると, $x_m(t)$ は一様収束することが判る。

$\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ の一様収束性が確かめられたら, 式 (0.1.31) ^{equ:ODE_R-Picardの逐次近似法定義} の両辺で $m \rightarrow \infty$ の極限を取る。左辺は $x(t)$ になり, 右辺は, f の連続性と命題?? ^{prop:一様収束-積分と極限の順序交換} を用いて積分と極限の順序交換を行って

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[b + \int_a^t ds f(s, x_m(s)) \right] = b + \int_a^t ds \lim_{m \rightarrow \infty} f(s, x_m(s)) = b + \int_a^t ds f(s, x(s)) \quad (0.1.34)$$

とすれば, Picard の逐次近似法式 (0.1.31) で定義された関数列の極限が式 (0.1.27) の解であることが分かる。

そして, 構成した解が唯一の解であることを定理 0.1.1 から得られた系 0.1.2 の不等式を用いて示す。

証明. 方針で述べたように, 式 (0.0.5) の微分方程式と等価な, 式 (0.1.27) の積分方程式を考察する。

まずは解の存在性を示すための Picard の逐次近似法について述べる。 $x_0(t)$ は,

$$\forall t \in I', \|x_0(t) - b\| \leq \rho \quad (0.1.35)$$

を満たす任意の連続関数とする。このとき,

$$x_1(t) := b + \int_a^t ds f(s, x_0(s)) \quad (0.1.36)$$

によって $x_1(t)$ を定めると,

$$\forall t \in I', \|x_1(t) - b\| \leq \rho \quad (0.1.37)$$

も満たすことを示す。実際,

$$\|x_1(t) - b\| = \left\| \int_a^t ds f(s, x_0(s)) \right\| \leq \left| \int_a^t ds \|f(s, x_0(s))\| \right| \leq M|t - a| \leq Mr' \leq \rho \quad (0.1.38)$$

である。式 (0.1.38) のそれぞれの不等号の理由を順に述べる。最初の不等号では, 命題 0.0.1 の不等式を用いており, 今回は $t \in I' = [a - r', a + r']$ であるから, $t < a$ の場合もあるので最初の不等号の式には絶対値が付く。二番目の不等号では式 (0.1.26) における M の定義から,

$$\forall (t, x) \in E, \|f(t, x)\| \leq M \quad (0.1.39)$$

が成立することと式 (0.0.1) の不等式を用いている。最後の不等号では, 式 (0.1.26) における r' の定義から, $r' \leq \rho/M$ であり, これを M で払うことで $Mr' \leq \rho$ である。

これにより, $t \in I'$ のとき $\|x_1(t) - b\| \leq \rho$ である。次に, 式 (0.1.35) を満たす $x_0(t)$ を用いて,

$$x_{m+1}(t) := b + \int_a^t ds f(s, x_m(s)), \quad (m \in \mathbb{N}, t \in I') \quad (0.1.40)$$

によって $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots$ を定める。 f の定義域は式 (0.1.24) で定義された E 上であるから, 右辺の積分が定義されるためには,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in I', \|x_m(t) - b\| \leq \rho \quad (0.1.41)$$

である必要があるが, これは次に述べるように満たされている。適当な自然数 m で,

$$\forall t \in I', \|x_m(t) - b\| \leq \rho \quad (0.1.42)$$

が満たされていると仮定すると、式 (0.1.38) の議論と全く同じように任意の $t \in I'$ に対して

$$\|x_{m+1}(t) - b\| = \left\| \int_a^t ds f(s, x_m(s)) \right\| \leq \left| \int_a^t ds \|f(s, x_m(s))\| \right| \leq M|t - a| \leq Mr' \leq \rho \quad (0.1.43)$$

であり、 $x_1(t)$ についての成立は式 (0.1.38) で確かめているので、数学的帰納法によって式 (0.1.41) は成立する。

以上の議論により、式 (0.1.40) によって任意の自然数 m に対して $x_m(t)$ が定まる。次に、式 (0.1.40) で定義された $x_m(t)$ は、 $m \rightarrow \infty$ の極限で式 (0.1.27) の解になることを示す。そのためには、 $x_m(t)$ が一様収束することを示し、 f の連続性から極限と積分を入れ替えられることを用いる。

以下、 $x_m(t)$ の一様収束性の評価を行う。方針でも述べたように、

$$y_m := x_{m+1} - x_m \quad (0.1.44)$$

によって関数列 $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ を定めると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} y_k &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_m - x_{m-1}) \\ &= -x_0 + (x_1 - x_1) + (x_2 - x_2) + \cdots + (x_{m-1} - x_{m-1}) + x_m = x_m - x_0 \end{aligned} \quad (0.1.45)$$

となる。次に、

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in I', \|y_m(t)\| = \|x_{m+1}(t) - x_m(t)\| \leq \rho L^m \frac{|t - a|^m}{m!} + mL^m \frac{|t - a|^{m+1}}{(m+1)!} \quad (0.1.46)$$

が成立することを m に関する数学的帰納法によって示す。以下、 $t \in I'$ は任意とする。まず、 $m = 0$ については、三角不等式と命題 ?? によって、

$$\|y_0(t)\| = \|x_1(t) - x_0(t)\| = \left\| \left(b + \int_a^t ds f(s, x_0(s)) \right) - x_0(t) \right\| \quad (0.1.47)$$

$$\leq \|-(x_0(t) - b)\| + \left\| \int_a^t ds f(s, x_0(s)) \right\| \quad (0.1.48)$$

$$\leq |-1| \|x_0(t) - b\| + \left| \int_a^t ds \|f(s, x_0(s))\| \right| \leq \rho + M \cdot |t - a| \quad (0.1.49)$$

となるから成立。但し、最後の ρ と M に関する不等号では、式 (0.1.35), (0.1.26) を用いた。ある自然数 m について式 (0.1.46) が成立することを仮定すると、Lipschitz 条件式 (0.1.25) から、

$$\|y_{m+1}(t)\| = \|x_{m+2}(t) - x_{m+1}(t)\| = \left\| \int_a^t ds (f(s, x_{m+1}(s)) - f(s, x_m(s))) \right\| \quad (0.1.50)$$

$$\leq \left| \int_a^t ds \|f(s, x_{m+1}(s)) - f(s, x_m(s))\| \right| \leq \left| \int_a^t ds L \|x_{m+1}(s) - x_m(s)\| \right| \quad (0.1.51)$$

$$\leq \left| \int_a^t ds L \left(\rho L^m \frac{|s - a|^m}{m!} + mL^m \frac{|s - a|^{m+1}}{(m+1)!} \right) \right| \quad (0.1.52)$$

$$= \rho L^{m+1} \frac{|t - a|^{m+1}}{(m+1)!} + ML^{m+1} \frac{|t - a|^{m+2}}{(m+2)!} \quad (0.1.53)$$

となるから $(m+1)$ でも成立する。ここで, m の偶奇や t と a の大小に依らず,

$$\int_a^t ds |s-a|^m = \frac{|t-a|^{m+1}}{(m+1)!} \quad (0.1.54)$$

が成立することに注意。これにより式 (0.1.46) ^{lequ:ODE_R-一様収束性の準備} の成立が確かめられた。

式 (0.1.46) ^{lequ:ODE_R-一様収束性の準備} と $|t-a| \leq r$ から,

$$\|y_m(t)\| = \|x_{m+1}(t) - x_m(t)\| \leq \rho L^m \frac{|t-a|^m}{m!} + mL^m \frac{|t-a|^{m+1}}{(m+1)!} \leq \rho \frac{(Lr)^m}{m!} + \frac{M}{L} \frac{(Lr)^{m+1}}{(m+1)!} \quad (0.1.55)$$

が言える。特に,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in I', \|y_m(t)\| \leq \rho \frac{(Lr)^m}{m!} + \frac{M}{L} \frac{(Lr)^{m+1}}{(m+1)!} \quad (0.1.56)$$

から,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \|y_m\| \leq \frac{(Lr)^m}{m!} + \frac{M}{L} \frac{(Lr)^{m+1}}{(m+1)!} \quad (0.1.57)$$

である。

更に,

$$a_m := \rho \frac{(Lr)^m}{m!} + \frac{M}{L} \frac{(Lr)^{m+1}}{(m+1)!} \quad (0.1.58)$$

と置くと,

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\rho \frac{(Lr)^m}{m!} + \frac{M}{L} \frac{(Lr)^{m+1}}{(m+1)!} \right) \leq \left(\rho + \frac{M}{L} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(Lr)^m}{m!} = \left(\rho + \frac{M}{L} \right) e^{Lr} < \infty \quad (0.1.59)$$

である。これより,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \|y_m\| \leq a_m, \quad (0.1.60)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m < \infty \quad (0.1.61)$$

であり, 定理 ^{thm:一様収束-Weierstrass の M 判定法} に拠れば, $\sum_{m=0}^{\infty} y_m$ は I' 上一様収束する。特に, 式 (0.1.45) ^{lequ:ODE_R-yk の和} で確かめたように

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k = x_m - x_0 \quad (0.1.62)$$

であるから, x_m も I' 上一様収束するので, その極限関数を x とする。

x_m の定義式：

$$x_{m+1}(t) = b + \int_a^t ds f(s, x_m(s)) \quad (0.1.63)$$

の両辺で $m \rightarrow \infty$ の極限を取ることを考える。cor:Lipschitz-Lipschitz 連続なら連続系(0.1.27)から f は連続であり, $\{x_m(s)\}_{m \in \mathbb{N}}$ は $s \in [a, t]$ 上一様収束するから,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[b + \int_a^t ds f(s, x_m(s)) \right] = b + \int_a^t ds \lim_{m \rightarrow \infty} f(s, x_m(s)) = b + \int_a^t ds f(s, x(s)) \quad (0.1.64)$$

となる。左辺は $x_m(t) \rightarrow x(t)$ であるから、関数列 $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ の極限関数 x は,

$$x(t) = b + \int_a^t ds f(s, x(s)) \quad (0.1.65)$$

を満たすが、これは元の積分方程式の式equ:ODE_R-積分方程式 (0.1.27) すなわち式equ:ODE_R-微分方程式 (0.0.5) を満たすことに他ならない。これにより、解の存在性は確かめられた。

最後に、定理thm:ODE_R-Gronwall-Bellmanの不等式 0.1.1 から得られた系thm:ODE_R-Gronwall-Bellmanの不等式 0.1.2 を用いて解の一意性を示す。共通定義区間が $J := [c, c']$ であるような二つの関数 x, y が共に式equ:ODE_R-積分方程式 (0.1.27) の積分方程式を満たすとする。すなわち,

$$x(t) = b + \int_a^t ds f(s, x(s)), \quad y(t) = b + \int_a^t ds f(s, y(s)) \quad (0.1.66)$$

が成立しているとする。示すべきことは,

$$\forall t \in I' \cap J, \quad x(t) = y(t) \quad (0.1.67)$$

である。

共通定義区間 $J = [c, c']$ について考察する。式equ:ODE_R-一意性-仮定 (0.1.66) において、右辺の積分区間は t と a の大小によって $[a, t]$ か $[t, a]$ のいずれかであるが、いずれの場合も区間の端の一方は a に等しい。そのため、 $c = a$ の場合（積分区間は $[a, t]$ ）と、 $c' = a$ の場合（積分区間は $[t, a]$ ）だけ考えれば十分である。今回はまず、 $c = a$ の場合について考えるが、 $c' = a$ のときも積分区間を反転させて符号を付け替えれば同じ議論が適用できる。

共通区間が $J = [a, c']$ であり、共に式equ:ODE_R-積分方程式 (0.1.27) の積分方程式を満たす二つの関数 x, y について、equ:ODE_R-Lipschitz 条件Lipschitz 条件式 (0.1.25) から,

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| \int_a^t ds (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) \right\| \quad (0.1.68)$$

$$\leq \int_a^t ds L \|x(s) - y(s)\| \leq L \int_a^t ds \|x(s) - y(s)\| \quad (0.1.69)$$

が成立するから、 $X(t) := \|x(t) - y(t)\|$ と置けばノルムの非負性と併せて,

$$\forall t \in I' \cap J, \quad 0 \leq X(t) \leq 0 + L \int_a^t ds X(s) \quad (0.1.70)$$

が成立する。Lipschitz 定数 L は非負定数であるから、系 cor:ODE_R-Gronwall-Bellman の不等式の系 0.1.2 が使えて、

$$\forall t \in I' \cap J, 0 \leq X(t) \leq 0 \cdot e^{(t-a)L} = 0 \quad (0.1.71)$$

すなわち、

$$\forall t \in I' \cap J, X(t) = \|x(t) - y(t)\| = 0 \quad (0.1.72)$$

である。これとノルムの定義 defi: ノルム-定義 の一意性から、

$$\forall t \in I' \cap J, x(t) = y(t) \quad (0.1.73)$$

であり、これは解の一意性を意味する。

Picard の逐次近似法によって解が構成され、Grönwall-Bellman の不等式の系 cor:ODE_R-Gronwall-Bellman の不等式の系 0.1.2 によって解の一意性が示された。これにより、 f が Lipschitz 条件式 equ:ODE_R-Lipschitz 条件 (0.1.25) を満たすとき、式 equ:ODE_R-微分方程式 (0.0.5) の解は区間 I' 上で一意的に存在する。□

補足 0.1.4. 一意性の証明の部分は、定理 thm:ODE_R-Gronwall-Bellman の不等式 0.1.1 の不等式を用いずに、takano 数字的帰納法によって直接示すこともできる [7]。

0.1.3 具体的な常微分方程式の解の存在と一意性

命題 0.1.5 (定数係数斉次連立 1 階常微分方程式の解の存在と一意性). A を x に依らない n 次正定行列とする。

$$\frac{dx}{dt} = Ax, x(t_0) = b \quad (0.1.74)$$

について考えると、この常微分方程式は a を含む任意の \mathbb{R} 上の閉区間で唯一の解 $x = x(t)$ を持つ。

証明. 例 eg:Lipschitz-Ax は Lipschitz 連続 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f(t, x) := Ax$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の任意の有界閉領域上で Lipschitz 連続である。定理 thm:ODE_R-Picard の定理 0.1.3 において r, ρ はいくらでも大きく取れるので、 $I' = [a - r', a + r']$ はいくらでも広く取れる。これによって式 equ:ODE_R-定数行列係数常微分方程式 (0.1.74) は a を含む任意の \mathbb{R} 上の閉区間で解を持ち、かつそれは一意的である。□

補足 0.1.6. 実際には、式 equ:ODE_R-定数行列係数常微分方程式 (0.1.74) は行列の指数関数を用いることで解を具体的に構成することができる。

命題 0.1.7 (定数係数線型斉次常微分方程式の解の存在と一意性). $\{a_k\}_{0 \leq k \leq n}$ (但し、 $a_0 = 1$)、 $\{b^k\}_{0 \leq k \leq n-1}$ をそれぞれ勝手な実定数として、 $x \in \mathbb{R}$ に関する以下の n 階線型斉次常微分方程式：

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^k x}{dt^k} = 0, \quad (0.1.75)$$

$$\frac{d^k x}{dt^k}(a) = b^k \quad (0 \leq k \leq n-1) \quad (0.1.76)$$

と一意性
の一意性

分方程式

について考えると、この常微分方程式は a を含む任意の \mathbb{R} 上の閉区間で唯一の解 $x = x(t)$ を持つ。

方針. 高階の常微分方程式は、変数を増やすことで 1 階の連立常微分方程式に帰着させられることを確かめる。

証明. 新たな変数 $\{q^k\}_{0 \leq k \leq n-1}$ を、

$$q^0 := x, \quad q^k := \frac{dq^{k-1}}{dt} \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (0.1.77)$$

で定めると、

$$q^k = \frac{d^k x}{dt^k} \quad (0 \leq k \leq n-1) \quad (0.1.78)$$

であり、式 (0.1.75) は、
equ:ODE_R-定数係数線型常微分方程式

$$0 = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^k x}{dt^k} = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} \frac{d^k x}{dt^k} = \frac{dq^{n-1}}{dt} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} q^k \quad (0.1.79)$$

と書けるので、

$$\frac{dq^k}{dt} = q^{k+1} \quad (0 \leq k \leq n-2), \quad (0.1.80)$$

$$\frac{dq^{n-1}}{dt} = - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} q^k \quad (0.1.81)$$

という n 元連立 1 階線型常微分方程式になる。これをベクトルと行列を用いて書き直すと、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ \vdots \\ q^{n-2} \\ q^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ \vdots \\ q^{n-2} \\ q^{n-1} \end{pmatrix} \quad (0.1.82)$$

となり、

$$q := \begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ \vdots \\ q^{n-2} \\ q^{n-1} \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \quad (0.1.83)$$

とすることで、

$$\frac{dq}{dt} = Aq \quad (0.1.84)$$

と書き直せる。また、式 $\text{equ:ODE_R-定数係数線型常微分方程式-IC}$ (0.1.76) は $q^k(a) = b^k$ となるから、これをまとめて書けば $q(a) = b$ となる。これにより、式 $\text{equ:ODE_R-定数係数線型常微分方程式-IC}$ (0.1.75), (0.1.76) は、

$$\frac{dq}{dt} = Aq, \quad q(a) = b \quad (0.1.85)$$

となるが、これは式 $\text{equ:ODE_R-定数行列係数常微分方程式}$ (0.1.74) と全く同じ形をしているので命題 $\text{prop:ODE_R-定数行列の解の一意性}$ 0.1.5 の議論に帰着される。特に、 $q^0 = x$ であるから、 q の第 0 成分を取り出せば $x = x(t)$ が得られる。 \square