微分方程式と特殊函数

Twitter：@FugaciousShade

最終更新日：2021 年 10 月 19 日

目次

記法

- $\mathbb{C}$：複素数全体
- $\mathbb{R}$：実数全体
- $\mathbb{R}_{>0}$：正の実数全体
- $\mathbb{R}_{\geq 0}$：非負の実数全体
- $\mathbb{Z}$：整数全体
- $\mathbb{N}$：非負整数全体
- $\boldsymbol{N}_n$：$n-1$ 以下の非負整数全体
- $\mathrm{Re}(z)$：複素数 z の実部
- $\mathrm{Im}(z)$：複素数 z の虚部
- z^*：複素数 z の複素共役
- $A \coloneqq B$：A を $A=B$ によって定義する
- $\mathcal{O}$, o：Landau 記号
- $\binom{n}{k}$：二項係数
- δ_{ij}：Kronecker の delta 記号
- $\det$：行列式
- $\mathrm{Mat}(m,n,S)$：S 上の (m,n) 行列全体
- ${}^tA$：行列 A の転置行列
- $\forall$：全称記号
- $\exists$：存在記号

第 1 章

実解析

この章では，常微分方程式を扱う上で必要になる実解析の事項を簡単に取り扱う。

1.1　実線型空間上のノルム

1.1.1　ノルムの定義と連続性

ノルムに関する以下の定義や命題は [野村] に拠る。

定義 1.1.1 (ノルム)**.** V を $\mathbb{R}$ 上の線型空間とする。$|\cdot|$ を実数の絶対値とする。関数 $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ が以下の条件を満たすとき，$\|x\|$ を x のノルムという：

(i) （正値性）$\forall x \in V,\ \|x\| \geq 0$
(ii) （一意性）$\forall x \in V,\ \Big[\|x\| = 0 \iff x = 0\Big]$
(iii) （同次性）$\forall k \in \mathbb{R},\ \forall x \in V,\ \|kx\| = |k|\|x\|$
(iv) （三角不等式）$\forall x, \forall y \in V,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ノルムの定義された線型空間をノルム空間という。

命題 1.1.2 (三角不等式)**.** ノルムは次の性質も満たす：

$$\forall x, \forall y \in V,\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|. \tag{1.1.1}$$

証明. まず，$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ から $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ が従う。同様に

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|(-1)(x - y)\| + \|x\| = |-1|\|x - y\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\| \tag{1.1.2}$$

なので，$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$ である。また，絶対値の特徴付け $|a| = \max\{a, -a\}$ を用いると，$\max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\} = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ である。これらにより，$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ が成立する。 □

系 1.1.3 (三角不等式)**.** 命題 1.1.2 において，$y \mapsto -y$ として，元の三角不等式と併せれば，

$$\left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{1.1.3}$$

が従う。

命題 1.1.4 (ノルムの連続性)**.** ノルムは連続関数である。

証明. 示すべきことは以下の通り（定義 1.2.1 も参照）：

$$\forall x, \forall y \in V,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0};\ \Big[\|x-y\| < \delta \implies \left|\|x\| - \|y\|\right| < \varepsilon\Big]. \tag{1.1.4}$$

実際，$\delta := \varepsilon$ と取れば，命題 1.1.2 により，$\left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x-y\| < \delta = \varepsilon$ であるから，ノルムは連続関数である。 □

1.1.2　ノルムの同値性

定義 1.1.5 (ノルムの同値性)**.** 以下が成立するとき，V 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であるという：

$$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big]. \tag{1.1.5}$$

命題 1.1.6. ノルムの同値性は同値関係である。

証明. ノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であることを $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と記すことにする。すなわち，

$$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1 \ :\overset{\text{def}}{\iff} \exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M \wedge (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big]. \tag{1.1.6}$$

このとき関係 $\sim$ が反射律，対称律，推移律を満たすことを示す。

- （反射律）任意の $\|\cdot\|$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。実際，$m = M = 1$ とすれば，

$$0 < m = 1 \leq M = 1\ \wedge\ (\forall x \in V,\ 1 \cdot \|x\| \leq \|x\| \leq 1 \cdot \|x\|) \tag{1.1.7}$$

  であるから成立。
- （対称律）$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$，すなわち

$$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big] \tag{1.1.8}$$

  のとき，$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。後半の不等式を書き直すと，$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|$ であり，$0 < m \leq M$ であるから $0 < \frac{1}{M} \leq \frac{1}{m}$ であり，$m' := \frac{1}{M}, M' := \frac{1}{m}$ と取れば確かに $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ の成立が判る。

- （推移律）3 つのノルム $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ のとき，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ が成立することを示す。仮定から，

$$\exists m_1, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_1 \leq M_2\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M_1\|x\|_1)\Big], \tag{1.1.9}$$

$$\exists m_2, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_2 \leq M_2\ \wedge\ (\forall x \in V,\ m_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M_2\|x\|_2)\Big] \tag{1.1.10}$$

の両方が成立しているから，$\|x\| \leq M_1\|x\|_1 \leq M_1M_2\|x\|_2$ 及び，$\|x\| \geq m_1\|x\|_1 \geq m_1m_2\|x\|_2$ より，$m_1m_2\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M_1M_2\|x\|_2$ が従う。これより，$m := m_1m_2$, $M := M_1M_2$ と取れば $0 < m_1m_2 \leq M_1M_2$ も成立するので $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ である。

以上により，ノルムの同値性は同値関係である。 □

記法 1.1.7 (上添字). $\mathbb{R}^n$ のベクトル x の成分の添字は上に付けて表すことにする。すなわち，$x = (x^0, x^1, \ldots, x^{n-1})$ のように記す。成分の冪を表すわけではないことに注意。ベクトルの添字を $x_0 = (x_0^0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1})$, $x_1 = (x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{n-1}), \ldots$ のように下に付けて記した場合，複数あるベクトルのいずれかの番号を意味する。

定理 1.1.8 (有限次元線型空間上のノルムの同値性). 線型空間 V が有限次元であれば，V 上の任意の 2 つのノルムは同値である。

証明. V を有限次元線型空間とし，$n := \dim V$ とする。V の基底として，$\{\boldsymbol{e}_k\}_{0\leq k\leq n-1}$ を取り固定する。V の元 x を，$x = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \boldsymbol{e}_k$ と表したときの成分 $\left\{x^k\right\}_{0\leq k\leq n-1}$ を用いて，

$$\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R};\ x \mapsto \|x\| := \max_{0\leq k\leq n-1}\left\{\left|x^k\right|\right\} \tag{1.1.11}$$

と定めると $\|\cdot\|$ はノルムになる。以下 $\|\cdot\|$ がノルムであることを確かめる：

(i)（正値性）どの k についても $0 \leq \left|x^k\right|$ であり，$\|x\| = \max_k\left\{\left|x^k\right|\right\} \geq 0$ であるから成立。

(ii)（一意性）$x = 0$ のとき，どの k についても $x^k = 0$ であるから $\|x\| = \max_k\left\{\left|x^k\right|\right\} = 0$ である。また，$\|x\| = 0$ のとき，任意の k に対し，絶対値の非負性から $0 \leq \left|x^k\right|$ であって，$\left|x^k\right| \leq \|x\| = 0$ であるから $\left|x^k\right| = 0$ である。これより $x = 0$ となる。

(iii)（同次性）絶対値の非負性と同次性から，$\|cx\| = \max_k\{|cx|\} = |c| \cdot \max_k\left\{\left|x^k\right|\right\} = |c|\|x\|$ が従う。

(iv)（三角不等式）絶対値の三角不等式から，各 k に対して $\left|x^k + y^k\right| \leq \left|x^k\right| + \left|y^k\right|$ であるから最大値に関してもこの不等号が成り立つので $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が従う。

以上により式 (1.1.11) で定められた $\|\cdot\|$ はノルムである。

次に，V 上の勝手なノルム $\|\cdot\|_1$ を取ってきたときに，式 (1.1.11) で定義した $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_1$ が同値になってしまうことを示す。

V のコンパクト集合 S を $S \coloneqq \{y \in V\,;\, \|y\| = 1\}$ によって定め, 関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ を $f(y) \coloneqq \|y\|_1$ と定める。f の連続性（命題 1.1.4）と S がコンパクト集合であることから，f の値域には最小元 m と最大元 M が存在する。S 上で $y \neq 0$ であり，ノルムの正値性から $0 < m \leq M$ である。特に，$\|y\| = 1$ ならば $y \in S$ であり，m, M の定義から $m \leq f(y) \leq M$ 及び $f(y) = \|y\|_1$ なので $m \leq \|y\|_1 \leq M$ が従う。ここで，V 上の一般の $x \neq 0$ に対して $y \coloneqq x/\|x\|$ とすると $\|y\| = \|x/\|x\|\| = \|x\|/\|x\| = 1$ より $y \in S$ であるから $f(y) = \|x/\|x\|\|_1 = \|x\|_1/\|x\|$ であって，$m \leq \|x\|_1/\|x\| \leq M$ より $m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|$ である。$x = 0$ についても $\|0\| = \|0\|_1 = 0$ であって，$m\|0\|_1 \leq \|0\| \leq M\|0\|_1$ は成立するので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|$ は同値である。

有限次元線型空間 V 上で与えられた任意の 2 つのノルム $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ はそれぞれ式 (1.1.11) で定義された $\|\cdot\|$ と同値であり，ノルムの同値は同値関係（命題 1.1.6）なので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ も同値である。 □

1.1.3　実線型空間上のノルム

上ではノルムに関して，一般的な形でやや抽象的に述べた。以降では [高野] に基づいて，常微分方程式を実際に扱う際に有用なノルムを具体的に扱う。ここでは有限次元実線型空間 $\mathbb{R}^n$ 上のノルムの例を挙げる。以下では，$x = \left(x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}\right)$ の各成分を実数とし，$|\cdot|$ を実数の絶対値とする。

例 1.1.9 (Euclid ノルム)**.** 原点からの標準的な距離：

$$\|x\|_2 \coloneqq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|x^k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.12}$$

はノルムである。

例 1.1.10 (一様ノルム)**.** 定理 1.1.8 の証明において式 (1.1.11) で定義された $\|\cdot\|$ はノルムである。後述するように，p ノルムにおいて $p \to \infty$ の極限で再現されることから，これを $\|\cdot\|_\infty$ と書いて ∞ ノルムとも呼ぶ。

定義 1.1.11 (p ノルム)**.** p を 1 以上の実数とする。このとき，x の p ノルム $\|x\|_p$ を，

$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.13}$$

で定める。

問 1.1. p ノルムがノルムの条件（定義 1.1.1）を満たしていることを確かめよ。

1 ノルムのことを絶対値ノルムと呼び，絶対値ノルムによって定まる距離を Manhattan 距離と

呼ぶ。2 ノルムは Euclid ノルムに一致する。

命題 1.1.12 (p ノルムの極限が一様ノルム)**.** $p \to \infty$ の極限で p ノルム $\|\cdot\|_p$ は例 1.1.10 の一様ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に一致する。

証明. x^M は x の成分の $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ のうち絶対値が最大のものであるとする。このとき，$\left|x^M\right| = \|x\|_\infty$ と書ける。定義より，

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{0\le k\le n-1}\left\{\left|x^k\right|\right\} = \left|x^M\right| \tag{1.1.14}$$

であるから，示すべきことは，

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to \left|x^M\right| \quad (p\to\infty) \tag{1.1.15}$$

である。まず，$1 < p < \infty$ のとき，$\|x\|_\infty \le \|x\|_p$ であることを確かめる。これは，

$$0 \le \left|x^M\right|^p \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p \tag{1.1.16}$$

であることと，$0 < p$ のとき，$t \in [0,\infty)$ において $f(t) = t^{\frac{1}{p}}$ が狭義単調増加であること，0 以上 $(n-1)$ 以下の任意の整数 k について $\left|x^k\right| \ge 0$ であることから，

$$\left|x^M\right| = \left(\left|x^M\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.17}$$

より成立。また，0 以上 $(n-1)$ 以下の任意の整数 k について $0 \le \left|x^k\right| \le \left|x^M\right|$ であり，

$$0 \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|x^M\right|^p = n\left|x^M\right|^p \tag{1.1.18}$$

が成立する。更に，n は固定された正整数であるから

$$n^{\frac{1}{p}} \to n^0 = 1 \quad (p\to\infty) \tag{1.1.19}$$

である。

　これらのことから，

$$0 \le \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left|x^M\right| \le \left(n\left|x^M\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left|x^M\right| \le \left(n^{\frac{1}{p}} - 1\right)\left|x^M\right| \to 0 \quad (p\to\infty) \tag{1.1.20}$$

が従い，はさみうちの原理から，

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to \left|x^M\right| \quad (p \to \infty) \tag{1.1.21}$$

であり，これは式 (1.1.15) の成立を意味している。 □

以降，有限次元線型空間のノルムは例 1.1.10 の一様ノルムであるとする。

記法 1.1.13. 以下では簡単のために，$n-1$ 以下の非負整数の集合を，

$$\boldsymbol{N}_n \coloneqq \{\, j\,;\, j \in \mathbb{N} \;\wedge\; 0 \le j \le n-1 \,\} \tag{1.1.22}$$

と書く。

命題 1.1.14 (積分とノルムの不等式)**.** I を $\mathbb{R}$ 上の閉区間であるとする。$f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を連続なベクトル値関数とするとき，

$$\left\|\int_I dt\, f(t)\right\| \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{1.1.23}$$

が成立する。

証明. I 上可積分な $g\colon I \to \mathbb{R}$ と絶対値に関する以下の不等式：

$$\left|\int_I dt\, g(t)\right| \le \int_I dt\, |g(t)| \tag{1.1.24}$$

を用いる。

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n, \forall t \in I,\; f^j(t) \le \left|f^j(t)\right| \le \|f(t)\| \tag{1.1.25}$$

であるから，

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n,\; \int_I dt\, f^j(t) \le \int_I dt\left|f^j(t)\right| \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{1.1.26}$$

である。ここで，式 (1.1.24) の不等式から，

$$\left|\int_I dt\, f^j(t)\right| \le \int_I dt\left|f^j(t)\right| \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{1.1.27}$$

であるから，

$$\left\|\int_I dt\, f(t)\right\| = \max_{0 \le j \le n-1}\left\{\left|\int_I dt\, f^j(t)\right|\right\} \le \int_I dt\, \|f(t)\| \tag{1.1.28}$$

が成立する。 □

1.1.4　作用素ノルム

定義 1.1.15 (作用素ノルム)**.** 線型作用素 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，$\|A\|$ を，

$$\|A\| \coloneqq \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\} \tag{1.1.29}$$

で定める。

以降，A を線型作用素とし，その (j,k) 成分を a^j_k と書く。

命題 1.1.16 (作用素ノルムの明示公式)**.**

$$\|A\| = \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\right\} \tag{1.1.30}$$

証明. $\|x\| = 1$ のとき，x の各成分の絶対値は 1 以下である。このとき，Ax の第 j 成分 $(Ax)_j$ に関して，

$$\left|(Ax)_j\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a^j_k x^k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\left|x^k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right| \tag{1.1.31}$$

となり，1 つ目の等号成立は,

$$\left[\forall k \in \boldsymbol{N}_n,\ a^j_k x^k \ge 0\right] \ \vee\ \left[\forall k \in \boldsymbol{N}_n,\ a^j_k x^k \le 0\right] \tag{1.1.32}$$

のとき，すなわち $a^j_k x^k$ が全て同符号のときである。2 つ目の等号成立は，x の各成分の絶対値が 1 に等しい場合であり，この 2 つの条件は同時に満たすことができる。実際，各 k について，$a^j_k \ge 0$ なら $x^k = 1$ とし，$a^j_k < 0$ なら $x^k = -1$ と定めれば，いずれの等号も成立する。これより，

$$\|A\| = \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\right\} \tag{1.1.33}$$

である。 □

命題 1.1.17 (作用素ノルムの不等式 1)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \tag{1.1.34}$$

証明. 各 k について $\left|x^k\right| \le \|x\|$ であるから，Ax の第 j 成分について,

$$\left|(Ax)_j\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a^j_k x^k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\left|x^k\right| \le \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\right)\cdot\|x\| \tag{1.1.35}$$

が成立して,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \tag{1.1.36}$$

が従う。 □

命題 1.1.18 (作用素ノルムの不等式 2)**.** A, B を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への任意の線型作用素とする。このとき,

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|,\ \|AB\| \le \|A\|\|B\| \tag{1.1.37}$$

が成立する。

証明. A, B の (j,k) 成分をそれぞれ a^j_k, b^j_k とする。まず,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k + b^j_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right| + \sum_{k=0}^{n-1}\left|b^j_k\right| \tag{1.1.38}$$

であるから,

$$\max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k + b^j_k\right|\right\} \le \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a^j_k\right|\right\} + \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|b^j_k\right|\right\} \tag{1.1.39}$$

であり，$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ である。

次に，m は,

$$\forall \ell \in \boldsymbol{N}_n,\ \sum_{k=0}^{n-1}\left|b^\ell_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|b^m_k| \tag{1.1.40}$$

を満たす，すなわち $\|B\|$ を与える行の添字とする。このとき,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{\ell=0}^{n-1} a^j_\ell b^\ell_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\left|a^j_\ell\right|\left|b^\ell_k\right|\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\left|a^j_\ell\right|\sum_{k=0}^{n-1}\left|b^\ell_k\right|\right) \le \left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\left|a^j_\ell\right|\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}|b^m_k|\right) \tag{1.1.41}$$

より,

$$\max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{\ell=0}^{n-1} a^j_\ell b^\ell_k\right|\right\} \le \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{\ell=0}^{n-1}\left|a^j_\ell\right|\right\} \cdot \max_{0\le j\le n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|b^j_k\right|\right\} \tag{1.1.42}$$

が従うので，$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ である。 □

命題 1.1.19. 定義 1.1.15 で定義した $\|A\|$ はノルムである。

証明. 及び，命題 1.1.18 定義 1.1.1 の 4 条件を順に確かめる。

(i)（正値性）命題 1.1.16 から，各項にある絶対値は非負なので，$\|A\| \ge 0$ である。

(ii)（一意性）命題 1.1.16 から，$\|A\| = 0$ だとすれば，絶対値の非負性から，どの j に関しても $\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k^j\right| = 0$ であり，これが成立するためには全ての (j,k) に関して $a_k^j = 0$ でなければならず，このとき $A = O$（零行列）である。

(iii)（同次性）命題 1.1.16 から，

$$\|cA\| = \max_{0\leq j\leq n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|c|\left|a_k^j\right|\right\} = |c|\cdot\max_{0\leq j\leq n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k^j\right|\right\} = |c|\|A\|. \tag{1.1.43}$$

(iv)（三角不等式）命題 1.1.18 から直ちに従う。

□

注意 1.1.20. 上で述べたことは複素線型空間上のノルムでもほとんど同様に成り立つ。証明も，$|\cdot|$ を複素数の絶対値に読み替えれば成立するが，命題 1.1.16 の証明中の等号成立条件だけ注意が必要である。

1.1.5　関数のノルム

定義 1.1.21 (L^p ノルム)**.** A を $\mathbb{R}^m$ の部分集合とし，$f\colon A \to \mathbb{R}^n$ は A 上可積分とし，$1 \leq p < \infty$ する。このとき，f のノルム $\|f\|_p$ を，

$$\|f\|_p := \left(\int_A dx\,\|f(x)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.44}$$

と定める[*1]。

定義 1.1.22 (L^∞ ノルム)**.** A を $\mathbb{R}^m$ の部分集合とし，$f\colon A \to \mathbb{R}^n$ とする。f のノルム $\|f\|_\infty$ を，

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in A}\{\|f(x)\|\} \tag{1.1.45}$$

と定める。

注意 1.1.23. 定義 1.1.11, 1.1.21 及び例 1.1.10, 定義 1.1.22 について，一般には $\|f\|_p \neq \|f(x)\|$ 及び $\|f\|_\infty \neq \|f(x)\|_\infty$ であることに注意。$\|f\|$ は関数のノルムであるが，$\|f(x)\|$ は f に x を入れた $f(x)$ というベクトルに対するノルムである。

以降では，特に断らない限りベクトルのノルムは例 1.1.10 とし，関数のノルムは定義 1.1.22 とする。

補題 1.1.24. A を $\mathbb{R}^m$ の部分集合とし，$f\colon A \to \mathbb{R}^n$ を考える。このとき，

$$\forall x \in A,\ \|f(x)\| \leq \|f\| \tag{1.1.46}$$

[*1] 右辺の積分は n 重積分である。

が成立する。

証明. それぞれの定義からほぼ明らかである。定義 1.1.22 より，

$$\|f\| = \sup_{x\in A}\{\|f(x)\|\} \tag{1.1.47}$$

であり，sup の定義から，

$$\forall x \in A,\ \|f(x)\| \leq \sup_{x\in A}\{\|f(x)\|\} = \|f\| \tag{1.1.48}$$

である。 □

問 1.2. $\mathbb{R}^n$ のベクトル x のノルムは例 1.1.10 で述べた一様ノルムとし，$\mathbb{R}^n$ 上の線型作用素 A のノルムは定義 1.1.15 で与えられた作用素ノルムであるとする。$n = 3$ のとき，

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.49}$$

とする。このとき，$\|x\|$ と $\|A\|$ を計算せよ。

問 1.3. $\mathbb{R}^n$ のベクトルに対して一様ノルムではなく，例 1.1.9 で導入した Euclid ノルムを用いた場合，定義 1.1.15 で定義される $\|A\|$ はどのような性質を持つだろうか。例えば，$\mathbb{R}^2$ 上の一般的な線型作用素の作用素ノルムを，その成分を用いて具体的に表わせ。（関連：スペクトルノルム）

1.2　Lipschitz 連続

1.2.1　連続性・一様連続性・Lipschitz 連続性

ここでは関数の連続性，一様連続性，Lipschitz 連続性について述べる。参考文献は [杉浦] である。m, n を正整数とする。$A \subseteq \mathbb{R}^m$ とし，$f\colon A \to \mathbb{R}^n$ について考える。

以降，特に断らない限り，ベクトル x のノルム $\|x\|$ は例 1.1.10 の一様ノルムとし，関数 f のノルム $\|f\|$ は定義 1.1.22 の L^∞ ノルムとする[*2]。

定義 1.2.1 (連続性)**.** f が A 上連続であるとは，

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in A, \exists\delta \in \mathbb{R}_{>0}; \forall y \in A,\ \Big[\|x-y\| < \delta \implies \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon\Big] \tag{1.2.1}$$

が成立することである。

[*2] 注意 1.1.23 に注意。$\|f\|$ と $\|f(x)\|$ は一般には異なる。

定義 1.2.2 (一様連続性)**.** f が A 上一様連続であるとは,

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists\delta \in \mathbb{R}_{>0};\ \forall x, \forall y \in A,\ \Big[\|x-y\| < \delta \implies \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon\Big] \tag{1.2.2}$$

が成立することである。

定義 1.2.3 (Lipschitz 連続性)**.** f が A 上 Lipschitz 連続であるとは,

$$\exists L \in \mathbb{R}_{\geq 0};\ \forall x, \forall y \in A,\ \Big[\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\|\Big] \tag{1.2.3}$$

が成立することである。このとき，L を Lipschitz 定数という。

注意 1.2.4. Lipschitz 定数は一意的ではない。実際，L が Lipschitz 定数のとき，$c > 1$ を用いると $\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\| \leq cL\|x-y\|$ も成立するので，$(L \neq)cL$ も Lipschitz 定数である。上の条件を満たす Lipschitz 定数全体の下限を改めて Lipschitz 定数と呼ぶことにすれば，これは一意である。

例 1.2.5. M を n 次正方行列とし，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f(x) \coloneqq Mx$ によって定めると，f は $\mathbb{R}^n$ 上 Lipschitz 連続である。

証明. 命題 1.1.17 の不等式を用いると,

$$\|f(x)-f(y)\| = \|Mx-My\| = \|M(x-y)\| \leq \|M\| \cdot \|x-y\| \tag{1.2.4}$$

により，$\|M\|$ を Lipschitz 定数として f は $\mathbb{R}^n$ 上 Lipschitz 連続である。 □

命題 1.2.6. A 上 Lipschitz 連続な関数は A 上一様連続である。

証明. f を A 上 Lipschitz 連続であると仮定し，Lipschitz 定数の一つを L と記す。任意の正数 ε に対して，$\delta \coloneqq \varepsilon/(L+1)$ と置けば，$\delta > 0$ であり，$\|x-y\| < \delta = \varepsilon/(L+1)$ のとき，$L\|x-y\| < (L+1)\|x-y\| < \varepsilon$ であり,

$$\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\| < (L+1)\|x-y\| < \varepsilon \tag{1.2.5}$$

が成立するので一様連続である。 □

補題 1.2.7. 一般に，$P(a,b)$ を a, b に関する任意の命題としたとき,

$$[\exists a;\ \forall b,\ P(a,b)] \implies [\forall b,\ \exists a;\ P(a,b)] \tag{1.2.6}$$

は $P(a,b)$ の内容に依らず真である。

証明. 証明木を描いてみると，図 1.2.1 に示すように，式 (1.2.6) が真であることが判る。

$$[\exists a;\ \forall b,\ P(a,b)] \vdash [\forall b,\ \exists a;\ P(a,b)]$$

1.	$\exists a;\ \forall b,\ P(a,b)$	Assumption
2.	$\neg[\forall b,\ \exists a;\ P(a,b)]$	$\neg$ Conclusion
3.	$\exists b;\ \neg[\exists a,\ P(a,b)]$	$2\ \neg\forall b$
4.	$\exists b;\ \forall a,\ \neg P(a,b)$	$3\ \neg\exists a$
5.	$\forall b,\ P(a',b)$	$1\ \exists a$
6.	$\forall a,\ \neg P(a,b')$	$4\ \exists b$
7.	$P(a',b')$	$5\ \forall b$
8.	$\neg P(a',b')$	$6\ \forall a$
	$\times$	
	$7,8$	

図 1.2.1　式 (1.2.6) の証明木

□

命題 1.2.8. A 上一様連続な関数は A 上連続である。

証明. 補題 1.2.7 を用いる。一様連続性では $\exists\delta;\ \forall x$ の順であるのに対し，連続性では $\forall x,\ \exists\delta;$ の順であるから，一様連続なら連続である。 □

系 1.2.9. A 上 Lipschitz 連続な関数は A 上連続である。

証明. 命題 1.2.6 と命題 1.2.8 から直ちに従う。 □

1.2.2　Lipschitz 連続性の十分条件

命題 1.2.10 (原始関数の Lipschitz 連続性)**.** $-\infty < a < b < \infty$ とし，$I \coloneqq [a,b]$ と定め，$f\colon I \to \mathbb{R}^n$ は I 上で有界かつ可積分とする。$F\colon I \to \mathbb{R}^n$ を，

$$F(x) \coloneqq \int_a^x dt\, f(t) \tag{1.2.7}$$

によって定めると，F は I 上 Lipschitz 連続である。

証明. $x, y \in I$ に対し，

$$F^j(x) - F^j(y) = \int_a^x dt\, f^j(t) - \int_a^y dt\, f^j(t) = \int_y^x dt\, f^j(t) \tag{1.2.8}$$

である。f は I 上で有界であるから，

$$L \coloneqq \sup_{t\in I}\{\|f(t)\|\} \geq 0 \tag{1.2.9}$$

と定めておくと，I 上で常に $\left|f^j(t)\right| \leq L$ であり，式 (1.1.24) により，

$$\left|F^j(x) - F^j(y)\right| = \left|\int_y^x dt\, f^j(t)\right| \leq \left|\int_y^x dt\, \left|f^j(t)\right|\right| \leq \left|\int_y^x dt\, L\right| = L|x-y| \tag{1.2.10}$$

である。これより，I 上の任意の x, y に関して

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L|x-y| \tag{1.2.11}$$

が成立するから，F は I 上 Lipschitz 連続である。 □

命題 1.2.11 (微分が有界なら Lipschitz 連続)**.** $a < b$ とする。$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ は $[a,b]$ 上で連続，(a,b) 上で微分可能とし，(a,b) 上で $\|f'(t)\|$ は有限であるとする。このとき，f は $[a,b]$ 上で Lipschitz 連続である。

証明. f の j 成分 f^j の導関数を $(f^j)'$ と記すことにする。(a,b) 上での $\|f'(t)\|$ の有界性から，

$$L \coloneqq \sup_{t\in(a,b)} \max_j \left\{\left|(f^j)'(t)\right|\right\} < \infty \tag{1.2.12}$$

が定まり，$L \geq 0$ である。f の各成分について，平均値の定理より，

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n, \forall x, \forall y \in [a,b], \left[x < y \ \Rightarrow\ \exists c_j \in (a,b); \left((x < c_j < y) \wedge \frac{f^j(x) - f^j(y)}{x-y} = (f^j)'(c_j)\right)\right] \tag{1.2.13}$$

が成立する。このような c_j を取ったとき，$(f^j)'(c_j) \leq L$ であるから，

$$\|f(x) - f(y)\| = \max_j\left\{\left|f^j(x) - f^j(y)\right|\right\} = \max_j\left\{\left|(f^j)'(c_j)\right||x-y|\right\} \leq L|x-y| \tag{1.2.14}$$

である。$x > y$ のときにも平均値の定理により適当な定数 $\tilde{c}_j$ の存在が言えるので，式 (1.2.14) は同様に成立する。$x = y$ のとき，$\|0\| \leq L|0|$ は成立するので式 (1.2.14) も成立する。これより，$[a,b]$ 上の任意の x, y に関して $\|f(x) - f(y)\| \leq L|x-y|$ の成立が言えた。従って，f は Lipschitz 連続である。 □

1.3　一様収束

無限和，微積分，極限の順序変更において特に重要な役割を果たす一様収束の概念について述べる。一様収束する関数列には連続性が受け継がれたり，項別微分，有限領域での項別積分が可能など，様々な直観的な操作が保証される。参考文献は [杉浦] である。

1.3.1　各点収束・一様収束

定義 1.3.1 (各点収束・一様収束)**.** m_1, m_2 を正整数，$A \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$ とし，$f\colon A \to \mathbb{R}^{m_2}$ とする。また，各自然数 n に対し，$f_n\colon A \to \mathbb{R}^{m_2}$ による関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考える。関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で f に各点収束するとは,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in A, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, \left[N \leq n \implies \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\right] \tag{1.3.1}$$

が成立することである。また，関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で f に一様収束するとは,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}; \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \left[N \leq n \implies \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\right] \tag{1.3.2}$$

が成立することである。

補題 1.3.2 (全称記号の順序交換)**.** $P(y)$ を y に関する命題，$Q(x, y)$ を x, y に関する命題とする。このとき,

$$[\forall x, \forall y, (P(y) \implies Q(x, y))] \iff [\forall y, (P(y) \implies \forall x, Q(x, y))] \tag{1.3.3}$$

は $P(y)$, $Q(x, y)$ の内容に依らず真である。

方針. 背理法によって示す。同値の否定：

$$\begin{aligned}
& \neg(A \Leftrightarrow B) && (1.3.4)\\
\iff\ & \neg[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] && (1.3.5)\\
\iff\ & \neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A) && (1.3.6)\\
\iff\ & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) && (1.3.7)
\end{aligned}$$

を用いる。

証明. 証明木を描いてみると，図 1.3.1 に示すように，式 (1.3.3) が真であることが判る。

$[\forall x, \forall y, (P(y) \Rightarrow Q(x,y))] \Leftrightarrow [\forall y, (P(y) \Rightarrow \forall x, Q(x,y))]$

1.	$\neg([\forall x, \forall y, (P(y) \Rightarrow Q(x,y))] \Leftrightarrow [\forall y, (P(y) \Rightarrow \forall x, Q(x,y))])$		$\neg$ Conclusion
2.	$\forall x, \forall y, (P(y) \Rightarrow Q(x,y))$	$\neg[\forall x, \forall y, (P(y) \Rightarrow Q(x,y))]$	$1 \neg \Leftrightarrow$
3.	$\neg[\forall y, (P(y) \Rightarrow \forall x, Q(x,y))]$	$\forall y, (P(y) \Rightarrow \forall x, Q(x,y))$	$1 \neg \Leftrightarrow$
4.	$\exists y; \neg(P(y) \Rightarrow \forall x, Q(x,y))$	$\exists x; \neg[\forall y, (P(y) \Rightarrow Q(x,y))]$	$3 \neg\forall$; $2 \neg\forall$
5.	$\neg(P(y') \Rightarrow \forall x, Q(x,y'))$	$\exists x; \exists y; \neg(P(y) \Rightarrow Q(x,y))$	$4 \exists y$; $4 \neg\forall$
6.	$P(y')$	$\exists y; \neg(P(y) \Rightarrow Q(x',y))$	$5 \neg \Rightarrow$; $5 \exists x$
7.	$\neg(\forall x, Q(x,y'))$	$\neg(P(y') \Rightarrow Q(x',y'))$	$5 \neg \Rightarrow$; $6 \exists y$
8.	$\exists x; \neg Q(x,y')$	$P(y')$	$7 \neg\forall$; $7 \neg \Rightarrow$
9.	$\neg Q(x',y')$	$\neg Q(x',y')$	$8 \exists x$; $7 \neg \Rightarrow$
10.	$\forall y, (P(y) \Rightarrow Q(x',y))$	$P(y') \Rightarrow \forall x, Q(x,y')$	$2 \forall x$; $3 \forall y$
11.	$P(y') \Rightarrow Q(x',y')$	$\neg P(y')$ ／ $\forall x, Q(x,y')$	$10 \forall y$; $10 \Rightarrow$
12.		／ $Q(x',y')$	$11 \forall x$
13.	$\neg P(y')$ ／ $Q(x',y')$	$\times$ (8, 11) ／ $\times$ (9, 12)	$11 \Rightarrow$
	$\times$ (6, 13) ／ $\times$ (9, 13)		

図 1.3.1　式 (1.3.3) の証明木

$\square$

命題 1.3.3. 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で f に一様収束することと，定義 1.1.22 のノルム $\|\cdot\|$ を用いた以下は同値：

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, \Big[N \leq n \implies \|f_n - f\| < \varepsilon\Big]. \tag{1.3.8}$$

方針. $\|f\|$ の定義には max ではなく sup が使われているため，一般には,

$$\Big[\forall x \in A, \|f(x)\| < \varepsilon\Big] \implies \|f\| \leq \varepsilon \tag{1.3.9}$$

であり,

$$\Big[\forall x \in A, \|f(x)\| < \varepsilon\Big] \iff \|f\| < \varepsilon \tag{1.3.10}$$

は成立しないことに注意する。

証明. 定義 1.1.22 により,

$$\|f_n - f\| < \varepsilon \implies \sup_{x\in A}\{\|f_n(x) - f(x)\|\} < \varepsilon \implies \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \tag{1.3.11}$$

である。このことと，補題 1.3.2 で示した式 (1.3.3) を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n-f\|<\varepsilon\Big] && (1.3.12)\\
\implies&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \forall x\in A,\ \|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon\Big] && (1.3.13)\\
\implies&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall x\in A,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon\Big] && (1.3.14)
\end{aligned}
$$

である。

逆も示す。方針で述べたように，一般には

$$
\forall x\in A,\ \|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon \implies \|f_n-f\|<\varepsilon \tag{1.3.15}
$$

は成立しないことに注意して ε の取り方を少し変える。

$$
\begin{aligned}
&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall x\in A,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon\Big] && (1.3.16)\\
\implies&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall x\in A,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n(x)-f(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}\Big] && (1.3.17)\\
\implies&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \forall x\in A,\ \|f_n(x)-f(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}\Big] && (1.3.18)\\
\implies&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n-f\|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\Big] && (1.3.19)\\
\implies&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n \implies \|f_n-f\|<\varepsilon\Big] && (1.3.20)
\end{aligned}
$$

である。

上と併せれば，定義 1.3.1 の式 (1.3.2) と同値であることが示された。 □

命題 1.3.4. 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上で f に一様収束するとする。このとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上で f に各点収束する。

証明. 定義 1.3.1 において，補題 1.2.7 から明らか。 □

注意 1.3.5. 一様収束することが判っている場合，一様収束する極限関数は，x を固定しておいて $f_n(x)$ を考え，$n\to\infty$ の極限を取ったもの，すなわち各点収束極限として求めればよい。すなわち，f を一様収束極限関数としたとき，

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \tag{1.3.21}
$$

である。左辺の本来の意味は各点収束極限である。

定義 1.3.6 (関数の Cauchy 列)**.** 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上の Cauchy 列であるとは，

$$
\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall m,\forall n\in\mathbb{N},\ \Big[N\le n\le m \implies \|f_m-f_n\|<\varepsilon\Big] \tag{1.3.22}
$$

が成立することである。

定理 1.3.7 (一様収束性と Cauchy 列の同値性). 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上の Cauchy 列であることと，関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で一様収束することは同値である。

方針. 一様収束するなら Cauchy 列は，数列が収束するなら Cauchy 列であることの証明とほぼ同様。Cauchy 列なら一様収束することは，各点収束極限 f の存在を示し，Cauchy 列であるという仮定を用いて f に一様収束することを示すことで証明される。

証明. 順に示す。

- 一様収束するなら Cauchy 列

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の一様収束性から，

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left[N\leq n\implies \|f_n-f\|<\frac{\varepsilon}{2}\right] \tag{1.3.23}$$

が成立する。また，ノルムの三角不等式から，

$$\|f_m-f_n\|=\|(f_m-f)+(f-f_n)\|\leq\|f_m-f\|+\|f-f_n\|=\|f_m-f\|+\|f_n-f\| \tag{1.3.24}$$

であるから，m と n が共に N 以上の自然数のとき，

$$\|f_m-f_n\|\leq\|f_m-f\|+\|f_n-f\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \tag{1.3.25}$$

であり，確かに

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall m,\forall n\in\mathbb{N},\ \left[N\leq n\leq m\implies \|f_m-f_n\|<\varepsilon\right] \tag{1.3.26}$$

が成立するから，f が A 上一様収束するとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上の Cauchy 列である。

- Cauchy 列なら一様収束する

まず，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が各点収束極限を持つことを示す。$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上の Cauchy 列であるから，

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall m,\forall n\in\mathbb{N},\ \left[N\leq n\leq m\implies \|f_m-f_n\|<\varepsilon\right] \tag{1.3.27}$$

が成立している。また，補題 1.1.24 から，

$$\forall x\in A,\ \|f_m(x)-f_n(x)\|\leq\|f_m-f_n\| \tag{1.3.28}$$

である。これより，

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall m,\forall n\in\mathbb{N},\ \left[N\leq n\leq m\implies \forall x\in A,\ \|f_m(x)-f_n(x)\|<\varepsilon\right] \tag{1.3.29}$$

を満たす。更に，補題 1.3.2 から，

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0},\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall x\in A,\ \forall m,\forall n\in\mathbb{N},\ \left[N\leq n\leq m\implies \|f_m(x)-f_n(x)\|<\varepsilon\right] \tag{1.3.30}$$

である。これより，x を固定したときの数列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるから収束する。すなわち，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各点収束極限 f を持ち，

$$\forall x \in A,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{1.3.31}$$

を満たす。

次に，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各点収束極限 f に一様収束することを示す。式 (1.3.30) より，

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}; \forall x \in A, \forall m, \forall n \in \mathbb{N}, \left[N \le n \le m \implies \|f_m(x) - f_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \tag{1.3.32}$$

であり，式 (1.3.31) を用いて $m \to \infty$ の極限[*3]を取ると，

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}; \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \left[N \le n \implies \|f(x) - f_n(x)\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\right] \tag{1.3.33}$$

である。定義 1.3.1 の式 (1.3.2) と比較すると，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で f に一様収束することが従っていることが判る。 □

補足 1.3.8. 定理 1.3.7 の証明中，Cauchy 列なら一様収束することを示す際に $m \to \infty$ の極限を取る操作を行った。ここではその詳細を述べる。

まず，式 (1.3.32) で ε ではなく $\varepsilon/2$ と取った理由を簡単に述べておく。一般に，収束列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が，

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n \tag{1.3.34}$$

を満たしており，$n \to \infty$ におけるそれぞれの極限を a, b としたとき，成り立つのは $a \le b$ であり，$a < b$ は一般には成立しない実際，式 (1.3.32) で $m \to \infty$ とした式 (1.3.33) で成り立つのは $\|f(x) - f_n(x)\| \le \varepsilon/2$ であり，$\|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon/2$ ではない[*4]。

次に，式 (1.3.32) で $m \to \infty$ とする操作が正当化される理由を述べる。x を固定したとき，$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であり，特に，収束列である。これより，

$$\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{N}; \forall m \in \mathbb{N}, \left[M \le m \implies \|f_m(x) - f(x)\| < \varepsilon\right] \tag{1.3.35}$$

が成立する。また，$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるから式 (1.3.30) も成立する。m, n が共に式 (1.3.30) の N 以上であり，m が式 (1.3.35) の M 以上であれば，

$$\|f_n(x) - f(x)\| \le \|f_n(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f(x)\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \tag{1.3.36}$$

であるから，

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in A}\{\|f_n(x) - f(x)\|\} \le 2\varepsilon \tag{1.3.37}$$

---

*3 後述の補足 1.3.8 も参照

*4 命題 1.3.3 でわざわざ同値性を示しておいたので，実際にはこの辺りの不等号にイコールが入るかどうかはあまり細かく気にする必要もない。

となる。適当に ε を取り直せば

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, \Big[N \leq n \implies \|f_n - f\| < \varepsilon\Big]. \tag{1.3.38}$$

も言えるから，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に A 上で一様収束する。

1.3.2　積分と極限の順序交換

命題 1.3.9. A を $\mathbb{R}^m$ の体積確定の有界閉領域とする。n を自然数とし，f_n は A 上可積分とする。また，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上 f に一様収束するとする。このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_A dx\, f_n(x) = \int_A dx\, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_A dx\, f(x) \tag{1.3.39}$$

が成立する。

方針. 注意 1.3.5 によって $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ は成立することが判っているので，

$$\lim_{n\to\infty}\int_A dx\, f_n(x) = \int_A dx\, f(x) \tag{1.3.40}$$

が示せれば十分である。

証明. A は体積確定であるから，

$$v(A) \coloneqq \int_A dx < \infty \tag{1.3.41}$$

である。また，補題 1.1.24 により，

$$\forall x \in A,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\| \tag{1.3.42}$$

であり，$\|f_n - f\|$ は x に依らないことに注意する。更に，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上 f に一様収束することと，命題 1.3.3 により，

$$\|f_n - f\| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1.3.43}$$

である。

これらを用いると，

$$\left\|\int_A dx\, f_n(x) - \int_A dx\, f(x)\right\| = \left\|\int_A dx\, (f_n(x) - f(x))\right\| \tag{1.3.44}$$

$$\leq \int_A dx\, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \int_A dx\, \|f_n - f\| \tag{1.3.45}$$

$$= \|f_n - f\|\int_A dx = \|f_n - f\| v(A) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1.3.46}$$

である。よって，

$$\lim_{n\to\infty}\int_A dx\, f_n(x) = \int_A dx\, f(x) \tag{1.3.47}$$

であり，方針で述べたように，これは式 (1.3.40) の成立を意味する。 □

1.3.3　無限和と一様収束性

定義 1.3.10 (関数列の無限和)**.** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を A 上の関数列とする。$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が A 上で一様収束するとは，

$$s_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f_k \tag{1.3.48}$$

としたとき，関数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上で一様収束することである。

定理 1.3.11 (Weierstrass の M 判定法)**.** A 上の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，実数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が以下の条件式 (1.3.49), (1.3.50) を共に満たせば $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は A 上で一様収束する：

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|f_n\| \le M_n \tag{1.3.49}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty. \tag{1.3.50}$$

方針. 部分和 $s_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f_k$ が Cauchy 列になっていることを示し，定理 1.3.7 を用いる。

証明. f_n と M_n の部分和をそれぞれ，

$$s_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f_k,\ t_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} M_k \tag{1.3.51}$$

とする。$n < m$ のとき，ノルムの三角不等式より，

$$\|s_m - s_n\| = \left\|\sum_{k=0}^{m} f_k - \sum_{k=0}^{n} f_k\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k\right\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\| \tag{1.3.52}$$

であり，条件式 (1.3.49) より，

$$\sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k = \sum_{k=0}^{m} M_k - \sum_{k=0}^{n} M_k = t_m - t_n \tag{1.3.53}$$

である。また，条件式 (1.3.49) とノルムの非負性 $(0 \le \|f_n\|)$ から

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \le M_n \tag{1.3.54}$$

も言えるので，$0 \leq t_m - t_n = |t_m - t_n|$ と書ける。これにより，

$$\|s_m - s_n\| \leq |t_m - t_n| \tag{1.3.55}$$

である。条件式 (1.3.50) より，$\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列であるから Cauchy 列である。従って，

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall m, \forall n \in \mathbb{N},\ \Big[N \leq n \leq m \implies \|s_m - s_n\| \leq |t_m - t_n| < \varepsilon\Big] \tag{1.3.56}$$

が言えて，$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である。定理 1.3.7 により，Cauchy 列は一様収束するので定義 1.3.10 と併せて $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は A 上で一様収束する。 □

第 I 部

常微分方程式

第 2 章

実領域における常微分方程式

この章では，実領域における常微分方程式の解の存在性と一意性に関する命題を扱う。参考文献は [高野] である。

まず，記号や用語の準備をする。以下では t を実数とし，$x = (x^0, x^1, \ldots, x^{n-1})$ を $\mathbb{R}^n$ の元とする。E を $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の部分集合とし，

$$f \colon E \to \mathbb{R}^n ; (t, x) \mapsto f(t, x) = (f^0(t, x), f^1(t, x), \ldots, f^{n-1}(t, x)) \tag{2.0.1}$$

を既知関数とする。以降，

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2.0.2}$$

で表される微分方程式を扱う。成分毎に書けば，

$$\frac{dx^j}{dt} = f^j\big(t, x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}\big), \quad (0 \leq j \leq n-1) \tag{2.0.3}$$

である。

定義 2.0.1. I を $\mathbb{R}$ 上の区間とする。$x = x(t)$ が区間 I における式 (2.0.2) の解であるとは，

$$\forall j \in \boldsymbol{N}_n,\ \forall t \in I,\ \frac{dx^j(t)}{dt} = f^j\big(t, x^0(t), x^1(t), \ldots, x^{n-1}(t)\big) \tag{2.0.4}$$

が成立することである。但し，区間 I に有限の上界や下界が存在する場合，区間の端での微分は片側微分係数で定める。また，$(a, b) \in E$ としたとき，条件式 $x(a) = b$ のことを初期条件といい，これを満たす解を，点 (a, b) を通る解であるという。

以下では，初期条件も含め，

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(a) = b \tag{2.0.5}$$

を満たす解に関して考察する。

2.1 常微分方程式の解の存在と一意性

2.1.1 Grönwall-Bellman の不等式

定理 2.1.1 (Grönwall-Bellman の不等式)**.** $a < a'$ とし，$I := [a, a']$ とする。関数 $X\colon I \to \mathbb{R}$ は I 上で連続とする，また，関数 $c, L\colon I \to \mathbb{R}$ は I 上連続かつ非負であるとする。

$$\forall t \in I,\ 0 \le X(t) \le c(t) + \int_a^t ds\, L(s)X(s) \tag{2.1.1}$$

が成り立つとき，

$$\forall t \in I,\ 0 \le X(t) \le c(t) + \int_a^t ds\, c(s)L(s)\exp\biggl(\int_s^t du\, L(u)\biggr) \tag{2.1.2}$$

が成立する。

証明. $y\colon I \to \mathbb{R}$ を，

$$y(t) := \int_a^t ds\, L(s)X(s) \tag{2.1.3}$$

と定めると，式 (2.1.1) から

$$0 \le X(t) \le c(t) + y(t) \tag{2.1.4}$$

となる。微積分学の基本定理により，

$$\frac{dy(t)}{dt} = L(t)X(t) \tag{2.1.5}$$

である。$L(t)$ は I 上で非負であるから，式 (2.1.1) に $L(t)$ を掛けることで

$$\forall t \in I,\ \frac{dy(t)}{dt} - L(t)y(t) \le L(t)c(t) \tag{2.1.6}$$

が得られる。ここで，両辺に $\exp(-\int_a^t du\, L(u))(> 0)$ を掛けると，I 上の任意の t に対し，

$$\exp\biggl(-\int_a^t du\, L(u)\biggr)\frac{dy(t)}{dt} - L(t)\exp\biggl(-\int_a^t du\, L(u)\biggr)y(t) \le L(t)c(t)\exp\biggl(-\int_a^t du\, L(u)\biggr) \tag{2.1.7}$$

が得られる。この式の左辺は，

$$\frac{d}{dt}\biggl[\exp\biggl(-\int_a^t du\, L(u)\biggr)y(t)\biggr] = \exp\biggl(-\int_a^t du\, L(u)\biggr)\frac{dy(t)}{dt} - L(t)\exp\biggl(-\int_a^t du\, L(u)\biggr)y(t) \tag{2.1.8}$$

と書けるから，

$$\forall t \in I,\ \frac{d}{dt}\left[\exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right)y(t)\right] \leq L(t)c(t)\exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right) \tag{2.1.9}$$

が成立する。この式の両辺を a から t まで定積分することを考える。左辺について，定義から $y(a) = 0$ であることに注意すると，

$$\int_a^t ds\, \frac{d}{ds}\left[\exp\left(-\int_a^s du\, L(u)\right)y(s)\right] \tag{2.1.10}$$

$$= \left[\exp\left(-\int_a^s du\, L(u)\right)y(s)\right]_a^t = \exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right)y(t) \tag{2.1.11}$$

となる。右辺は，

$$\int_a^t ds\, L(s)c(s)\exp\left(-\int_a^s du\, L(u)\right) \tag{2.1.12}$$

であるから，

$$\exp\left(-\int_a^t du\, L(u)\right)y(t) \leq \int_a^t ds\, L(s)c(s)\exp\left(-\int_a^s du\, L(u)\right) \tag{2.1.13}$$

が得られる。この式の両辺に $\exp\left(\int_a^t du\, L(u)\right)(> 0)$ を掛ける。左辺は $y(t)$ になり，右辺は，

$$\exp\left(\int_a^t du\, L(u)\right)\int_a^t ds\, L(s)c(s)\exp\left(-\int_a^s du\, L(u)\right) \tag{2.1.14}$$

$$= \int_a^t ds\, L(s)c(s)\exp\left(\int_s^t du\, L(u)\right) \tag{2.1.15}$$

となる。ここで，指数法則と

$$\int_a^t du\, L(u) - \int_a^s du\, L(u) = \int_a^t du\, L(u) + \int_s^a du\, L(u) = \int_s^t du\, L(u) \tag{2.1.16}$$

を用いた。

これらにより，

$$y(t) \leq \int_a^t ds\, L(s)c(s)\exp\left(\int_s^t du\, L(u)\right) \tag{2.1.17}$$

が導かれ，式 (2.1.4) と併せると，

$$0 \leq X(t) \leq c(t) + y(t) \leq c(t) + \int_a^t ds\, c(s)L(s)\exp\left(\int_s^t du\, L(u)\right) \tag{2.1.18}$$

が従い，これは式 (2.1.2) の成立を意味する。 □

系 2.1.2. 定理 2.1.1 において，c, L を単なる非負定数とすると，

$$\forall t \in I,\ 0 \le X(t) \le c + L \int_a^t ds\, X(s) \tag{2.1.19}$$

が成立するとき，

$$\forall t \in I,\ 0 \le X(t) \le ce^{(t-a)L} \tag{2.1.20}$$

が成り立つ。

証明. 式 (2.1.2) の右辺の積分は，

$$\int_a^t ds\, cL \exp\left(\int_s^t du\, L\right) = cL \int_a^t ds\, e^{(s-t)L} = cLe^{-tL} \cdot \left[-\frac{e^{-sL}}{L}\right]_a^t \tag{2.1.21}$$

$$= -ce^{tL}\left(e^{-tL} - e^{-aL}\right) = -c + ce^{(t-a)L} \tag{2.1.22}$$

となるから，式 (2.1.2) より，

$$\forall t \in I,\ 0 \le X(t) \le c + \left(-c + ce^{(t-a)L}\right) = ce^{(t-a)L} \tag{2.1.23}$$

が従う。 □

定理 2.1.1 から得られた系 2.1.2 は，後述する定理 2.1.3 の証明において，Picard の逐次近似法によって構成した解が唯一の解であることを示す際に有用である。

2.1.2　Picard の逐次近似法

定理 2.1.3 (Picard の定理)**.** r, ρ を正数とする。$f(t,x)$ が $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上の有界閉領域

$$E := \{\, (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\, ;\, |t-a| \le r,\ \|x-b\| \le \rho \,\} \tag{2.1.24}$$

上で x に関して Lipschitz 連続[*1]，すなわち，

$$\exists L \in \mathbb{R}_{\ge 0};\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x, \forall y \in \mathbb{R}^n,\ [(t,x),(t,y) \in E \ \Rightarrow\ (\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L\|x-y\|)] \tag{2.1.25}$$

であるとする[*2]。

$$M := \max_{(t,x)\in E}\{\|f(t,x)\|\},\ r' := \min\left\{r, \frac{\rho}{M}\right\} \tag{2.1.26}$$

としたとき，式 (2.0.5) を満たす解が区間 $I' := [a-r', a+r']$ において一意的に存在する。

[*1] 定義 1.2.3 参照

[*2] $f(t,x)$ と $f(t,y)$ で t は共通のものであることに注意。

方針． 式 (2.0.5) を満たすことと，

$$x(t) = b + \int_a^t ds\, f(s, x(s)) \tag{2.1.27}$$

は同値である。実際，式 (2.1.27) を満たす $x = x(t)$ の第 j 成分は，微積分学の基本定理により，

$$\frac{dx^j(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(b^j + \int_a^t ds\, f^j(s, x(s))\right) = f^j(t, x(t)) \tag{2.1.28}$$

を満たし，

$$x^j(a) = b^j + \int_a^a ds\, f^j(s, x(s)) = b^j \tag{2.1.29}$$

も満たす。ベクトルでまとめて表せば式 (2.0.5) を満たすことに他ならない。

式 (2.1.27) の解の存在性を示すために，Picard の逐次近似法によって区間 I' 上で式 (2.1.27) の解を構成する。Picard の逐次近似法では，

$$\forall t \in I',\ \|x_0(t) - b\| \leq \rho \tag{2.1.30}$$

を満たすような連続なベクトル値関数 $x_0(t)$ を用いて，

$$x_{m+1}(t) := b + \int_a^t ds\, f(s, x_m(s)) \tag{2.1.31}$$

によって $x_1(t), x_2(t), \ldots$ を定義する。$x_{m+1}(t)$ の右辺の積分の中に $x_m(t)$ があるため，$x_m(t)$ が f の定義域に収まっていることを確認する必要がある。

そして，このように構成した関数列 $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ の $m \to \infty$ における各点極限関数 $x(t)$ が式 (2.0.5) の解になっていることを示す。ここで，$y_m := x_{m+1} - x_m$ と定めると，$\sum_{k=0}^{m-1} y_k = x_m - x_0$ である。式 (2.1.25) の Lipschitz 連続の条件を用いると，数学的帰納法によって

$$\|y_m(t)\| = \|x_{m+1}(t) - x_m(t)\| \leq \rho\frac{(Lr')^m}{m!} + \frac{M}{L}\frac{(Lr')^{m+1}}{(m+1)!} \tag{2.1.32}$$

であることが言えて，

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|y_m(t)\| \leq \left(\rho + \frac{M}{L}\right)e^{Lr'} < \infty \tag{2.1.33}$$

が従う。そこで，定理 1.3.11 を用いると，$x_m(t)$ は一様収束することが判る。

$\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ の一様収束性が確かめられたら，式 (2.1.31) の両辺で $m \to \infty$ の極限を取る。左辺は $x(t)$ になり，右辺は，f の連続性と命題 1.3.9 を用いて積分と極限の順序交換を行って

$$\lim_{m\to\infty}\left[b + \int_a^t ds\, f(s, x_m(s))\right] = b + \int_a^t ds \lim_{m\to\infty} f(s, x_m(s)) = b + \int_a^t ds\, f(s, x(s)) \tag{2.1.34}$$

とすれば，Picard の逐次近似法式 (2.1.31) で定義された関数列の極限が式 (2.1.27) の解であることが分かる。

そして，構成した解が唯一の解であることを定理 2.1.1 から得られた系 2.1.2 の不等式を用いて示す。

証明. 方針で述べたように，式 (2.0.5) の微分方程式と等価な，式 (2.1.27) の積分方程式を考察する。

まずは解の存在性を示すための Picard の逐次近似法について述べる。$x_0(t)$ は，

$$\forall t \in I',\ \|x_0(t) - b\| \le \rho \tag{2.1.35}$$

を満たす任意の連続関数とする。このとき，

$$x_1(t) := b + \int_a^t ds\, f(s, x_0(s)) \tag{2.1.36}$$

によって $x_1(t)$ を定めると，

$$\forall t \in I',\ \|x_1(t) - b\| \le \rho \tag{2.1.37}$$

も満たすことを示す。実際，

$$\|x_1(t) - b\| = \left\| \int_a^t ds\, f(s, x_0(s)) \right\| \le \left| \int_a^t ds\, \|f(s, x_0(s))\| \right| \le M|t-a| \le Mr' \le \rho \tag{2.1.38}$$

である。式 (2.1.38) のそれぞれの不等号の理由を順に述べる。最初の不等号では，命題 1.1.14 の不等式を用いており，今回は $t \in I' = [a - r', a + r']$ であるから，$t < a$ の場合もあるので最初の不等号の式には絶対値が付く。二番目の不等号では式 (2.1.26) における M の定義から，

$$\forall (t, x) \in E,\ \|f(t, x)\| \le M \tag{2.1.39}$$

が成立することと式 (1.1.24) の不等式を用いている。最後の不等号では，式 (2.1.26) における r' の定義から，$r' \le \rho/M$ であり，これを M で払うことで $Mr' \le \rho$ である。

これにより，$t \in I'$ のとき $\|x_1(t) - b\| \le \rho$ である。次に，式 (2.1.35) を満たす $x_0(t)$ を用いて，

$$x_{m+1}(t) := b + \int_a^t ds\, f(s, x_m(s)),\ (m \in \mathbb{N},\ t \in I') \tag{2.1.40}$$

によって $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots$ を定める。f の定義域は式 (2.1.24) で定義された E 上であるから，右辺の積分が定義されるためには，

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall t \in I',\ \|x_m(t) - b\| \le \rho \tag{2.1.41}$$

である必要があるが，これは次に述べるように満たされている。適当な自然数 m で，

$$\forall t \in I',\ \|x_m(t) - b\| \le \rho \tag{2.1.42}$$

が満たされていると仮定すると，式 (2.1.38) の議論と全く同じように任意の $t \in I'$ に対して

$$\|x_{m+1}(t) - b\| = \left\| \int_a^t ds\, f(s, x_m(s)) \right\| \leq \left| \int_a^t ds\, \|f(s, x_m(s))\| \right| \leq M|t-a| \leq Mr' \leq \rho \tag{2.1.43}$$

であり，$x_1(t)$ についての成立は式 (2.1.38) で確かめているので，数学的帰納法によって式 (2.1.41) は成立する。

以上の議論により，式 (2.1.40) によって任意の自然数 m に対して $x_m(t)$ が定まる。次に，式 (2.1.40) で定義された $x_m(t)$ は，$m \to \infty$ の極限で式 (2.1.27) の解になることを示す。そのためには，$x_m(t)$ が一様収束することを示し，f の連続性から極限と積分を入れ替えられることを用いる。

以下，$x_m(t)$ の一様収束性の評価を行う。方針でも述べたように，

$$y_m := x_{m+1} - x_m \tag{2.1.44}$$

によって関数列 $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を定めると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1} y_k &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_m - x_{m-1}) \\ &= -x_0 + (x_1 - x_1) + (x_2 - x_2) + \cdots + (x_{m-1} - x_{m-1}) + x_m = x_m - x_0\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

となる。次に，

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall t \in I',\ \|y_m(t)\| = \|x_{m+1}(t) - x_m(t)\| \leq \rho L^m \frac{|t-a|^m}{m!} + mL^m \frac{|t-a|^{m+1}}{(m+1)!} \tag{2.1.46}$$

が成立することを m に関する数学的帰納法によって示す。以下，$t \in I'$ は任意とする。まず，$m = 0$ については，三角不等式と命題 1.1.14 によって，

$$\|y_0(t)\| = \|x_1(t) - x_0(t)\| = \left\| \left(b + \int_a^t ds\, f(s, x_0(s)) \right) - x_0(t) \right\| \tag{2.1.47}$$

$$\leq \|x_0(t) - b\| + \left\| \int_a^t ds\, f(s, x_0(s)) \right\| \tag{2.1.48}$$

$$\leq |-1|\|x_0(t) - b\| + \left| \int_a^t ds\, \|f(s, x_0(s))\| \right| \leq \rho + M \cdot |t-a| \tag{2.1.49}$$

となるから成立。但し，最後の ρ と M に関する不等号では，式 (2.1.35), (2.1.26) を用いた。ある自然数 m について式 (2.1.46) が成立することを仮定すると，Lipschitz 条件式 (2.1.25) から，

$$\|y_{m+1}(t)\| = \|x_{m+2}(t) - x_{m+1}(t)\| = \left\| \int_a^t ds\, (f(s, x_{m+1}(s)) - f(s, x_m(s))) \right\| \tag{2.1.50}$$

$$\leq \left| \int_a^t ds\, \|f(s, x_{m+1}(s)) - f(s, x_m(s))\| \right| \leq \left| \int_a^t ds\, L\|x_{m+1}(s) - x_m(s)\| \right| \tag{2.1.51}$$

$$\leq \left| \int_a^t ds\, L \left(\rho L^m \frac{|s-a|^m}{m!} + mL^m \frac{|s-a|^{m+1}}{(m+1)!} \right) \right| \tag{2.1.52}$$

$$= \rho L^{m+1} \frac{|t-a|^{m+1}}{(m+1)!} + ML^{m+1} \frac{|t-a|^{m+2}}{(m+2)!} \tag{2.1.53}$$

となるから $(m+1)$ でも成立する。ここで，m の偶奇や t と a の大小に依らず，

$$\int_a^t ds\,|s-a|^m = \frac{|t-a|^{m+1}}{(m+1)!} \tag{2.1.54}$$

が成立することに注意。これにより式 (2.1.46) の成立が確かめられた。

式 (2.1.46) と $|t-a| \le r$ から，

$$\|y_m(t)\| = \|x_{m+1}(t) - x_m(t)\| \le \rho L^m \frac{|t-a|^m}{m!} + m L^m \frac{|t-a|^{m+1}}{(m+1)!} \le \rho \frac{(Lr)^m}{m!} + \frac{M}{L}\frac{(Lr)^{m+1}}{(m+1)!} \tag{2.1.55}$$

が言える。特に，

$$\forall m \in \mathbb{N},\, \forall t \in I',\ \|y_m(t)\| \le \rho \frac{(Lr)^m}{m!} + \frac{M}{L}\frac{(Lr)^{m+1}}{(m+1)!} \tag{2.1.56}$$

から，

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \|y_m\| \le \frac{(Lr)^m}{m!} + \frac{M}{L}\frac{(Lr)^{m+1}}{(m+1)!} \tag{2.1.57}$$

である。

更に，

$$a_m := \rho \frac{(Lr)^m}{m!} + \frac{M}{L}\frac{(Lr)^{m+1}}{(m+1)!} \tag{2.1.58}$$

と置くと，

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\rho \frac{(Lr)^m}{m!} + \frac{M}{L}\frac{(Lr)^{m+1}}{(m+1)!} \right) \le \left(\rho + \frac{M}{L} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(Lr)^m}{m!} = \left(\rho + \frac{M}{L} \right) e^{Lr} < \infty \tag{2.1.59}$$

である。これより，

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \|y_m\| \le a_m \tag{2.1.60}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m < \infty \tag{2.1.61}$$

であり，定理 1.3.11 に拠れば，$\sum_{m=0}^{\infty} y_m$ は I' 上一様収束する。特に，式 (2.1.45) で確かめたように

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k = x_m - x_0 \tag{2.1.62}$$

であるから，x_m も I' 上で一様収束するので，その極限関数を x とする。

x_m の定義式：

$$x_{m+1}(t) = b + \int_a^t ds\, f(s, x_m(s)) \tag{2.1.63}$$

の両辺で $m \to \infty$ の極限を取ることを考える。系 1.2.9 から f は連続であり，$\{x_m(s)\}_{m\in\mathbb{N}}$ は $s \in [a,t]$ 上一様収束するから，

$$\lim_{m\to\infty}\left[b + \int_a^t ds\, f(s, x_m(s))\right] = b + \int_a^t ds \lim_{m\to\infty} f(s, x_m(s)) = b + \int_a^t ds\, f(s, x(s)) \tag{2.1.64}$$

となる。左辺は $x_m(t) \to x(t)$ であるから，関数列 $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ の極限関数 x は，

$$x(t) = b + \int_a^t ds\, f(s, x(s)) \tag{2.1.65}$$

を満たすが，これは元の積分方程式の式 (2.1.27) すなわち式 (2.0.5) を満たすことに他ならない。これにより，解の存在性は確かめられた。

最後に，定理 2.1.1 から得られた系 2.1.2 を用いて解の一意性を示す。共通定義区間が $J := [c, c']$ であるような二つの関数 x, y が共に式 (2.1.27) の積分方程式を満たすとする。すなわち，

$$x(t) = b + \int_a^t ds\, f(s, x(s)),\ \ y(t) = b + \int_a^t ds\, f(s, y(s)) \tag{2.1.66}$$

が成立しているとする。示すべきことは，

$$\forall t \in I' \cap J,\ \ x(t) = y(t) \tag{2.1.67}$$

である。

共通定義区間 $J = [c, c']$ について考察する。式 (2.1.66) において，右辺の積分区間は t と a の大小によって $[a,t]$ か $[t,a]$ のいずれかであるが，いずれの場合も区間の端の一方は a に等しい。そのため，$c = a$ の場合（積分区間は $[a,t]$）と，$c' = a$ の場合（積分区間は $[t,a]$）だけ考えれば十分である。今回はまず，$c = a$ の場合について考えるが，$c' = a$ のときも積分区間を反転させて符号を付け替えれば同じ議論が適用できる。

共通区間が $J = [a, c']$ であり，共に式 (2.1.27) の積分方程式を満たす二つの関数 x, y について，Lipschitz 条件式 (2.1.25) から，

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\|\int_a^t ds\,(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))\right\| \tag{2.1.68}$$

$$\leq \int_a^t ds\, L\|x(s) - y(s)\| \leq L \int_a^t ds\, \|x(s) - y(s)\| \tag{2.1.69}$$

が成立するから，$X(t) := \|x(t) - y(t)\|$ と置けばノルムの非負性と併せて，

$$\forall t \in I' \cap J,\ 0 \leq X(t) \leq 0 + L\int_a^t ds\, X(s) \tag{2.1.70}$$

が成立する。Lipschitz 定数 L は非負定数であるから，系 2.1.2 が使えて，

$$\forall t \in I' \cap J,\ 0 \leq X(t) \leq 0 \cdot e^{(t-a)L} = 0 \tag{2.1.71}$$

すなわち，

$$\forall t \in I' \cap J,\ X(t) = \|x(t) - y(t)\| = 0 \tag{2.1.72}$$

である。これとノルムの定義 1.1.1 の一意性から，

$$\forall t \in I' \cap J,\ x(t) = y(t) \tag{2.1.73}$$

であり，これは解の一意性を意味する。

Picard の逐次近似法によって解が構成され，Grönwall-Bellman の不等式の系 2.1.2 によって解の一意性が示された。これにより，f が Lipschitz 条件式 (2.1.25) を満たすとき，式 (2.0.5) の解は区間 I' 上で一意的に存在する。 □

2.1.3　具体的な常微分方程式の解の存在と一意性

命題 2.1.4 (定数係数斉次連立 1 階常微分方程式の解の存在と一意性)**.** A を x に依らない n 次正方行列とする。

$$\frac{dx}{dt} = Ax,\ x(t_0) = b \tag{2.1.74}$$

について考えると，この常微分方程式は a を含む任意の $\mathbb{R}$ 上の閉区間で唯一の解 $x = x(t)$ を持つ。

証明. 例 1.2.5 で確かめたように，$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(t, x) \coloneqq Ax$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の任意の有界閉領域上で Lipschitz 連続である。定理 2.1.3 において r, ρ はいくらでも大きく取れるので，$I' = [a - r', a + r']$ はいくらでも広く取れる。これによって式 (2.1.74) は a を含む任意の $\mathbb{R}$ 上の閉区間上で解を持ち，かつそれは一意的である。 □

補足 2.1.5. 実際には，式 (2.1.74) は行列の指数関数を用いることで解を具体的に構成することができる。

命題 2.1.6 (定数係数線型斉次常微分方程式の解の存在と一意性)**.** $\{a_k\}_{0 \leq k \leq n}$（但し，$a_0 = 1$），$\left\{b^k\right\}_{0 \leq k \leq n-1}$ をそれぞれ勝手な実定数として，$x \in \mathbb{R}$ に関する以下の n 階線型斉次常微分方程式：

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \frac{d^k x}{dt^k} = 0, \tag{2.1.75}$$

$$\frac{d^k x}{dt^k}(a) = b^k \quad (1 \leq k \leq n-1) \tag{2.1.76}$$

について考えると，この常微分方程式は a を含む任意の $\mathbb{R}$ 上の閉区間で唯一の解 $x = x(t)$ を持つ。

方針. 高階の常微分方程式は，変数を増やすことで 1 階の連立常微分方程式に帰着させられることを確かめる。

証明. 新たな変数 $\{q^k\}_{0\leq k\leq n-1}$ を，

$$q^0 \coloneqq x,\ q^k \coloneqq \frac{dq^{k-1}}{dt} \quad (1\leq k\leq n-1) \tag{2.1.77}$$

で定めると，

$$q^k = \frac{d^k x}{dt^k} \quad (0\leq k\leq n-1) \tag{2.1.78}$$

であり，式 (2.1.75) は，

$$0=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{d^k x}{dt^k} = a_0\frac{d^n x}{dt^n}+\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}\frac{d^k x}{dt^k} = \frac{dq^{n-1}}{dt}+\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}q^k \tag{2.1.79}$$

と書けるので，

$$\frac{dq^k}{dt} = q^{k+1} \quad (0\leq k\leq n-2), \tag{2.1.80}$$

$$\frac{dq^{n-1}}{dt} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}q^k \tag{2.1.81}$$

という n 元連立 1 階線型常微分方程式になる。これをベクトルと行列を用いて書き直すと，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ \vdots \\ q^{n-2} \\ q^{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ \vdots \\ q^{n-2} \\ q^{n-1}\end{pmatrix} \tag{2.1.82}$$

となり，

$$q \coloneqq \begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ \vdots \\ q^{n-2} \\ q^{n-1}\end{pmatrix},\quad A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \tag{2.1.83}$$

とすることで，

$$\frac{dq}{dt} = Aq \tag{2.1.84}$$

と書き直せる。また，式 (2.1.76) は $q^k(a)=b^k$ となるから，これをまとめて書けば $q(a)=b$ となる。これにより，式 (2.1.75), (2.1.76) は，

$$\frac{dq}{dt} = Aq,\ q(a)=b \tag{2.1.85}$$

となるが，これは式 (2.1.74) と全く同じ形をしているので命題 2.1.4 の議論に帰着される。特に，$q^0 = x$ であるから，q の第 0 成分を取り出せば $x = x(t)$ が得られる。 □

参考文献

[小松] 復刊 近代数学講座 5『特殊函数』小松 勇作，朝倉書店 (2004 年)
[杉浦] 基礎数学 2『解析入門 I』杉浦 光夫，東京大学出版会 (1980 年)
[高野] 朝倉 復刊セレクション 新数学講座『常微分方程式』高野 恭一，朝倉書店 (1994 年)
[野村]『球面調和函数と群の表現』野村 隆昭，日本評論社 (2018 年)
[原岡] すうがくの風景 7『超幾何関数』原岡 喜重，朝倉書店 (2002 年)