0.1　ノルム

ノルムに関する以下の定義や命題は [**?**] に拠る。

定義 0.1 (ノルム)**.** V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする。関数 $\|\cdot\|\colon V\to\mathbb{R}$ が以下の条件を満たすとき，$\|x\|$ を x のノルムという：

(i)（正値性）$\forall x\in V,\ \|x\|\geq 0$
(ii)（一意性）$\forall x\in V,\ \Big[\|x\|=0 \iff x=0\Big]$
(iii)（同次性）$\forall k\in\mathbb{C},\ \forall x\in V,\ \|kx\|=|k|\|x\|$
(iv)（三角不等式）$\forall x,\forall y\in V,\ \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

ノルムの定義されたベクトル空間をノルム空間という。

命題 0.2 (三角不等式)**.** ノルムは次の性質も満たす：

$$\forall x,\forall y\in V,\ \big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|.$$

Proof. まず，$\|x\|=\|(x-y)+y\|\leq\|x-y\|+\|y\|$ から $\|x\|-\|y\|\leq\|x-y\|$ が従う。同様に

$$\|y\|=\|(y-x)+x\|\leq\|(-1)(x-y)\|+\|x\|=|-1|\|x-y\|+\|x\|=\|x-y\|+\|x\|$$

なので，$\|y\|-\|x\|\leq\|x-y\|$ である。また，絶対値の特徴付け $|a|=\max\{a,-a\}$ を用いると，$\big|\|x\|-\|y\|\big|=\max\{\|x\|-\|y\|,\|y\|-\|x\|\}\leq\|x-y\|$ である。これらにより，$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|$ が成立する。 □

系 0.3. 命題 0.2 において，$y\mapsto -y$ として，元の三角不等式と併せれば，

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

が従う。

系 0.4 (ノルムの連続性)**.** ノルムは連続関数である。

Proof. 示すべきことは以下の通り：

$$\forall x,\forall y\in V,\ \forall\varepsilon\in\mathbb{R},\ \Big[\varepsilon>0\implies\Big(\exists\delta\in\mathbb{R};\ \Big[\delta>0\wedge(\|x-y\|<\delta\implies\big|\|x\|-\|y\|\big|<\varepsilon)\Big]\Big)\Big].$$

実際，$\delta\coloneqq\varepsilon$ と取れば，命題 0.2 により，$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|<\delta=\varepsilon$ であるから，ノルムは連続関数である。 □

定義 0.5 (ノルムの同値性)**.** 以下が成立するとき，V 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|,\|\cdot\|_1$ が同値であるという：

$$\exists m,\exists M\in\mathbb{R};\ \Big[0<m\leq M\ \wedge\ (\forall x\in V,\ m\|x\|_1\leq\|x\|\leq M\|x\|_1)\Big].$$

命題 0.6. ノルムの同値性は同値関係である。

Proof. ノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ が同値であることを $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と記すことにする。すなわち，

$$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1 \ :\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M \ \wedge \ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big].$$

このとき関係 $\sim$ が反射律，対称律，推移律を満たすことを示す。

- （反射律）任意の $\|\cdot\|$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。実際，$m = M = 1$ とすれば，

  $$0 < m = 1 \leq M = 1 \ \wedge (\forall x \in V,\ 1 \cdot \|x\| \leq \|x\| \leq 1 \cdot \|x\|)$$

  であるから成立。
- （対称律）$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$，すなわち

  $$\exists m, \exists M \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m \leq M \ \wedge \ (\forall x \in V,\ m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1)\Big]$$

  のとき，$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ が成立することを示す。後半の不等式を書き直すと，$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|$ であり，$0 < m \leq M$ であるから $0 < \frac{1}{M} \leq \frac{1}{m}$ であるから，$m' \coloneqq \frac{1}{M}, M' \coloneqq \frac{1}{m}$ と取れば確かに $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ の成立が判る。
- （推移律）3 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ に対し，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ のとき，$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ が成立することを示す。仮定から，

  $$\begin{aligned}&\exists m_1, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_1 \leq M_2 \ \wedge \ (\forall x \in V,\ m_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M_1\|x\|_1)\Big],\\ &\exists m_2, \exists M_2 \in \mathbb{R};\ \Big[0 < m_2 \leq M_2 \ \wedge \ (\forall x \in V,\ m_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M_2\|x\|_2)\Big]\end{aligned}$$

  の両方が成立しているから，$\|x\| \leq M_1\|x\|_1 \leq M_1M_2\|x\|_2$ 及び，$\|x\| \geq m_1\|x\|_1 \geq m_1m_2\|x\|_2$ より，$m_1m_2\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M_1M_2\|x\|_2$ が従う。これより，$m \coloneqq m_1m_2$, $M \coloneqq M_1M_2$ と取れば $0 < m_1m_2 \leq M_1M_2$ も成立するので $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$ である。

以上により，ノルムの同値性は同値関係である。 □

定理 0.7. ベクトル空間 V が有限次元であれば，V 上の任意の 2 つのノルムは同値である。

Proof. V を有限次元ベクトル空間とし，$n \coloneqq \dim V$ とする。V の基底として，$\{\boldsymbol{e}_k\}_{0 \leq k \leq n-1}$ を取り固定する。V の元 x を，$x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \boldsymbol{e}_k$ と表したときの成分 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n-1}$ を用いて，

$$\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R};\ x \mapsto \|x\| \coloneqq \max_{0 \leq k \leq n-1}\{|x_k|\} \tag{0.1}$$

と定めると $\|\cdot\|$ はノルムになる。以下 $\|\cdot\|$ がノルムであることを確かめる：

- （正値性）どの k についても $0 \leq |x_k|$ であり，$\|x\| = \max_k\{|x_k|\} \geq 0$ であるから成立。

- （一意性）$x=0$ のとき，どの k についても $x_k=0$ であるから $\|x\| = \max_k\{|x_k|\} = 0$ である。また，$\|x\|=0$ のとき，任意の k に対し，絶対値の非負性から $0 \leq |x_k|$ であって，$|x_k| \leq x = 0$ であるから $|x_k| = 0$ である。これより $x=0$ となる。
- （同次性）絶対値の非負性と同次性から，$\|cx\| = \max_k\{|cx|\} = |c| \cdot \max_k\{|x_k|\} = |c|\|x\|$ が従う。
- （三角不等式）絶対値の三角不等式から，各 k に対して $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ であるから最大値に関してもこの不等号が成り立つので $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が従う。

以上により式 (0.1) で定められた $\|\cdot\|$ はノルムである。

次に，V 上の勝手なノルム $\|\cdot\|_1$ を取ってきたときに，式 (0.1) で定義した $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|$ が同値になってしまうことを示す。V のコンパクト集合 S を $S \coloneqq \{y \in V\,;\, \|y\| = 1\}$ によって定め，関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ を $f(y) \coloneqq \|y\|_1$ と定める。f の連続性（系 0.4）と S がコンパクト集合であることから，f の値域には最小元 m と最大元 M が存在する。S 上で $y \neq 0$ であり，ノルムの正値性から $0 < m \leq M$ である。特に，$\|y\| = 1$ ならば $y \in S$ であり，m, M の定義から $m \leq f(y) \leq M$ 及び $f(y) = \|y\|_1$ なので $m \leq \|x\|_1 \leq M$ が従う。ここで，V 上の一般の $x \neq 0$ に対して $y \coloneqq x/\|x\|$ とすると $\|y\| = \|x/\|x\|\| = \|x\|/\|x\| = 1$ より $y \in S$ であるから $f(y) = \|x/\|x\|\|_1 = \|x\|_1/\|x\|$ であって，$m \leq \|x\|_1/\|x\| \leq M$ より $m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|$ である。$x=0$ についても $\|0\| = \|0\|_1 = 0$ であって，$m\|0\|_1 \leq \|0\| \leq M\|0\|_1$ は成立するので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|$ は同値である。

有限次元ベクトル空間 V 上で与えられた任意の 2 つのノルム $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ はそれぞれ式 (0.1) で定義された $\|\cdot\|$ と同値であり，ノルムの同値は同値関係（命題 0.6）なので，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ も同値である。 □

0.2　Picard の逐次近似法