МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №1
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Поиск с возвратом

Студентка гр. 8382 _____ Ефимова М.А

Преподаватель _____ Фирсов М.А.

Санкт-Петербург
2020

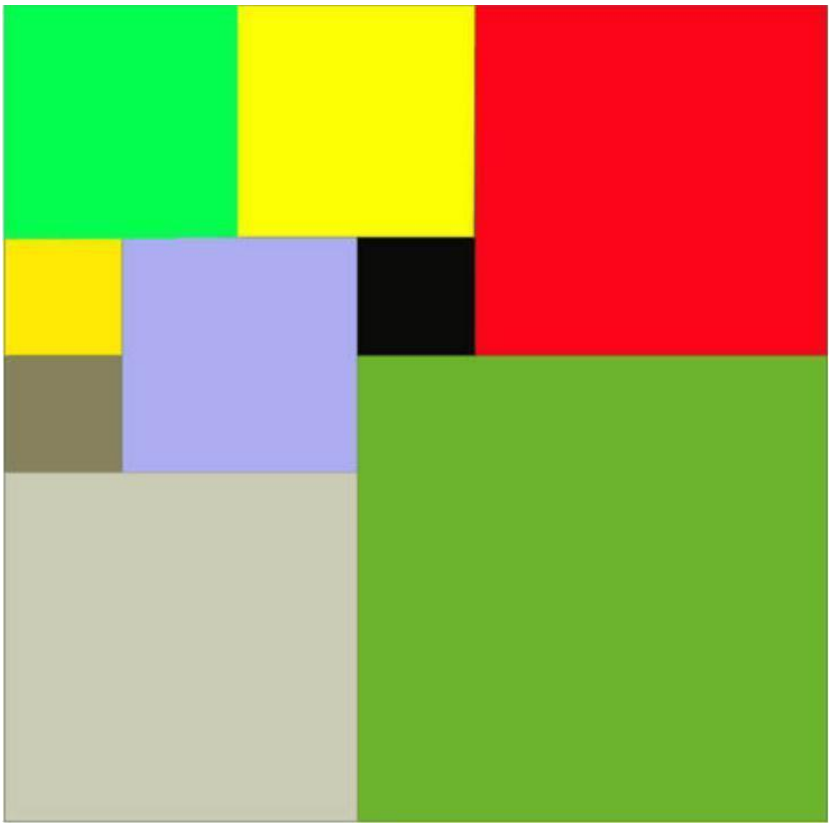
Цель работы.

Ознакомиться с алгоритмом перебора с возвратом и научиться применять его на практике. Написать программу реализовывающую поиск с возвратом.

Постановка задачи.

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 11 до N−1N−1, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу - квадрат размера NN . Он может получить ее, собрав из уже имеющихся обрезков(квадратов).

Например, столешница размера 7×77×7 может быть построена из 9 обрезков.



Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные

Размер столешницы - одно целое число NN(2≤N≤202≤N≤20).

Выходные данные

Одно число KK, задающее минимальное количество обрезков(квадратов), из которых можно построить столешницу (квадрат) заданного размера NN. Далее должны идти KK строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x,yx,y и ww, задающие координаты левого верхнего угла (1≤x,y≤N1≤x,y≤N) и длину стороны соответствующего обрезка (квадрата).

Пример входных данных

7

Соответствующие выходные данные

9

1 1 2

1 3 2

3 1 1

4 1 1

3 2 2

5 1 3

4 4 4

1 5 3

Индивидуальное задание.

Вар. 2р

Рекурсивный бэктрекинг. Исследование времени выполнения от размера квадрата

Анализ сложности алгоритма.

Временная сложность алгоритма определяется количеством входных данных. В данном алгоритме ключевым моментом является перебор делителей вводимого числа n.

Для упрощения предположим, что введено значение n, представив его в виде простого числа и составного:
n = mk.
Рассматриваем алгоритм без

- Если m = 0, мы называем его один раз, но функция никогда не называет себя рекурсивно.
- Если m = 1, функция вызывается один раз, а затем мы назовем ее рекурсивно k раз (из-за цикла int j), но каждый раз, когда мы ее вызываем, она будет вызываться в подсписке размера 0.
- Если m = 2, функция вызывается один раз, а затем функция вызывает себя рекурсивно k раз.
- Если m = 3, он называет себя рекурсивно k раз с подслоем размера 2, опять же с подсписком размера 1, снова с подспиской размера 0. Таким образом, мы можем видеть шаблон.

Если рассматривать алгоритм с оптимизацией, то при m::2 , m::3, то сложность отдельно данных случаев будет O(1), так как в программе вызывается константа и выводится на экран. При
больших m получаем:
Если обозначить f (m) как общее число раз, когда начальный размер равен m, то:
f (0) = 1
f (m) = 1 + k * f (m-1) + k * f (m-2) +... + k * f (0)
который
f (0) = 1
f (1) = 1 + k
$f (2) = 1 + 2k + k^2 = const$
$f (3) = 1 + 3k + 3k^2 + k^3 = const$
или
$f (m) = (k + 1)^m$
Получаем формулу : $O ((k + 1)^m$. Если будем рассматривать один элемент, так что k = 1 и n = m, то число рекурсивных вызовов равно $O (2^n)$.

Сложность алгоритма.

Сложность алгоритма $O(2^N)$. Объяснить это можно тем, что для каждого маленького квадрата существует 2 варианта размещениям : либо он ставиться в большой квадрат, либо нет.

Если рассмотреть разбиение всех квадратов длины от 2 до 40, то можно вывести следующее утверждение: минимальному разбиению (Напр.: 6, 21, 33) будет соответствовать разбиение квадрата с длиной стороны равной наименьшему целочисленному делителю числа N не равному единице.

Описание алгоритма.

Сам квадрат представлен в виде двумерного массива square.

С помощью функции Intialization мы инициализируем значениями простых чисел. Если N - простое число, то берем значения N/2, N/2 + 1.Далее мы инициализируем память и с помощью функции void search_first_elem(int** square,int &x_new,int &y_new,int N) находим свободное место для квадрата с координатами x и y. Заполняем квадрат и находим новое ближайшее место.

Далее мы рассматриваем отдельные случаи, представляя наше число ввода, как простое число или непростое число. Если остаток от деления нашего числа на два равно нулю, то результатом будет являться число 4. Если же остаток от деления нашего числа на три равно нулю, то результатом будет являться число 6.

Поиск свободного места для квадрата (по координатам) мы находим с помощью функции void search_first_elem(int** square,int &x_new,int &y_new,int N). Мы проходим по всему нашему двумерному массиву и находим первое свободное места, начиная от левого верхнего угла.

Вывод результатов на основе заполнения матрицы мы производим с помощью функции void setPosition.

В самой рекурсии происходит следующее:

Проверка на достижение предельной глубины рекурсии. Если это предел, то возвращается -1. Осуществляется поиск пустой клетки в массиве arr. Если таковой не оказалось, то возвращается 0.

Далее происходит нахождение максимальной длины квадрата, который можно поместить, начиная с данной точки левого верхнего угла.
Пробуются разные длины квадрата.

Возращенное значение количества квадратов
проверяется на минимальное и, если это так, запоминаем длину текущего квадрата. Далее очищаем квадрат. И переходим к следующей длине квадрата.

Оптимизация.

Оптимизация алгоритма заключается в использовании двух функций:

1) Когда вводимое число кратно двум
2) Когда вводимое число кратно трем

В первом случае решением нашей задачи будет число 4. Во
втором случае решением нашей задачи будет число 6.

Оптимизация заключается в том, что при делении на наше вводимое
число мы можем каждый раз делить на 2*n квадратов.

Описание функций.

void Intialization(int square,int N)** – инициализация значениями простых чисел. Если N - простое число, то берем значения N/2, N/2 + 1

void Initialize(int square,int N,int number1,int number2)** – проход по квадратам

void copy(intsquare,int** best_square,int N)** – сохранение наилучшего расположения квадрата

void printBoard(int best_square,int N)** – вывод текущего положения квадрата на экран

void clear(int square,int** best_square,int N)** – освобождение памяти после вывода квадратов на экран

void remove_numbers(int square,int N,int curr_square,int x_start,int y_start)** – когда мы получили разделение, то мы возвращаемся к тому моменту, когда квадрат был меньше. Рекурсивно возвращаемся к изначальному номеру квадрата, обнуляю его и все последующие квадраты.

void search_first_elem(int square,int &x_new,int &y_new,int N)** – поиск свободного места для квадрата с координатами x и y.Заполнили квадрат и надо найти новое ближайшее место.

voidmemoryInitialization(intsquare,int**best_square,intN)**– инициализация памяти

void printMultipleTwo (int N) – когда кратно двум, то ответ всегда будет 4

void printMultipleThree(int N) - когда кратно трем, то ответ всегда будет 6 Далее высчитываем координаты по формуле

void printResult(int best_sq,int N,int min)** – получаем массив чисел, по массиву чисел находим координаты. Из левого верхнего угла находим первый квадрат и тд.

void setPosition(int square,int** best_square_version,int N,int x,int y,int number_of_squares,int &min,deque<pair<int,int>> &components_of_square, bool &forward)** - вывод результатов на основе заполнения матрицы.

Строим максимальный квадрат, далее уменьшаем каждый раз квадрат на единицу и меняем остальные. Координаты хранят x и y.

Тестирование.

Таблица 3 – Тестирование

№ теста	Тест	Результат
1	2	4 1 1 1 1 2 1 2 1 1 2 2 1
2	6	4

		1 1 3 1 4 3 4 1 3 4 4 3
3	13	11 1 1 7 1 8 6 8 1 6 7 8 1 7 9 3 7122 8 7 2 9122 1074 10111 11113
5	37	37 15 1119 12018 20118 19 20 11 9213 19247 19317 20192 22195 26242 26 26 12

6	25	8 1 1 5 1 6 5 1115 11610 6110 6115 11 11 15 16110
7	33	6 1111 11211 12311 12111 12 12 22 23111

Исследование времени.

Если сторона квадрата чётна, результат получается моментально, так как поиск с возвратом запускаться не будет, а минимальное количество автоматически равно 4. Наихудший результат показывают простые числа. Внизу приведена таблица измерений:

Размер квадрата	Время выполнения(в секундах)
2	0
3	0
4	0
5	0
13	1
15	0
16	0
17	0.02
18	0
19	0.19
20	0
21	0
22	0

Пример вывода программы по времени и памяти:

Исследование сложности по памяти и числу операций.

Если не рассматривать алгоритм с оптимизацией, то пространственная сложность алгоритма была бы – O(n ^ n), где n – сторона квадрата. Это происходило бы по причине того, что использовался бы полный перебор наших вариантов.
Оптимизация приводит к тому, что в отдельных случаях алгоритм прерывается до прохождения всех возможных значений.

Рассмотрим случаи:

1) Если квадрат имеет чётную длину, поиск с возвратом не запускается, а квадрат просто разбивается на четыре равных части, так как меньше в любом случае получить нельзя.

2) Если в какой-то момент работы алгоритма количество квадратов, участвующих в текущей конфигурации, больше или равно минимального разбиения, текущая конфигурация прекращается, а алгоритм переходит к следующему разбиению.

3) Изначально минимальное число квадратов инициализируется равным не N^2(разбиение на единичные квадраты), а N^2 - (N -1)^2 + 1, так как такое число соответствует разбиению на 1 квадрат размера N-1, и N^2 — (N-1)^2 квадратов размера 1.

С учётом проведённых экспериментов можно сделать вывод, что сложность алгоритма по числу операций примерно O(e^N * N^2), по объёму памяти O(N^2 * N^2 * (N — 1)^2).

Частичные решения.

Решения храним в стеке и сравниваем с минимальным разбиением квадратов. В рекурсивную функцию подаем массив квадрата, массив наилучшего квадрата, координаты, сторону квадрата, и переменную, которая отвечает за направление прогона по нашему квадрату.

Вывод.

В ходе выполнения лабораторной работы был изучен и применен на практике алгоритм перебора с возвратом. Была реализована программа, находящая разбиение прямоугольного поля минимально возможным количеством квадратов и подсчитывающая количество вариантов минимального разбиения. Полученный алгоритм обладает экспоненциальной сложностью по операциям.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Исходный код программы

```
#include <iostream>
#include <deque>
#include <vector>
#include <ctime>

using namespace std;

void Intialization(int** square,int N){//инициализация нулями изначальных
квадратов
for(int i = 0;i < N /2 + 1;i++)
for(int j = 0;j < N / 2 + 1;j++)
square[i][j] = 1;
for(int i = 0;i < N / 2;i++)
for(int j = N / 2 + 1;j < N;j++)
square[i][j] = 2;
for(int i = N / 2 + 1;i < N;i++)
for(int j = 0;j < N / 2;j++)
square[i][j] = 3;
square[N / 2 + 1][N / 2] = 4;
}
void Initialize(int** square,int N,int number1,int
number2){ for(int i = 0;i < number1;i++)
for(int j = 0;j < number1;j++)
square[i][j] = 1;
for(int i = 0;i < number2;i++)
for(int j = number1;j < N;j++)
square[i][j] = 2;
for(int i = number2;i < number2 * 2;i++)
for(int j = number1;j < N;j++)
square[i][j] = 3;
for(int i = number1;i < N;i++)
for(int j = 0;j < number2;j++)
square[i][j] = 4;
square[number1][number2] = 5;
//printBoard(square,N);
}
void copy(int**square,int** best_square,int N){//сохранение наилучшего
расположения квадратов
for (int i = 0; i < N ; i++) {
for(int j = 0;j < N;j++){
best_square[i][j] = square[i][j];
}
}
}

void printBoard(int** best_square,int N){//вывод текущего положения квадратов на
экран
cout << "---------- " << "\n";
```

```
for(int i = 0;i < N;i++){
for(int j = 0;j < N;j++)
cout << best_square[i][j] << " ";
printf("\n");
}
}

void clear(int** square,int** best_square,int N){//освобождение памяти по
завершению работы алгоритма
for(int i = 9;i < N;i++){
delete square[i];
delete best_square[i];
}
}

void remove_numbers(int** square,int N,int curr_square,int x_start,int y_start){
for(int i = 0;i < N;i++){
for(int j = 0;j < N;j++){
if(square[i][j] > curr_square || (square[i][j] == curr_square && (i > x_start || j >
y_start)))
square[i][j] = 0;
}
}
}

void search_first_elem(int** square,int &x_new,int &y_new,int N){//функция
поиска свободного места для квадртата
x_new = -1;
y_new = -1;
for (int i = 0; i < N; i++) {
for (int j = 0; j < N; j++) {
if (!square[i][j]) {
x_new = i;
y_new = j;
break;
}
}
if (x_new != -1)
break;
}
}
84.
void memoryInitialization(int** square,int** best_square,int
N){ for(int i = 0;i < N;i++) {
square[i] = new int[N];
best_square[i] = new int[N];
}
}
void printMultipleTwo(int N){
cout << 4 << "\n";
cout << 1 << " " << 1 << " " << N / 2 << "\n";
```

```
cout << 1 << " " << N / 2 + 1 << " " << N / 2 << "\n";
cout << N / 2 + 1 << " " << 1 << " " << N / 2 << "\n";
cout << N / 2 + 1 << " " << N / 2 + 1 << " " << N / 2 <<
"\n"; }
void printMultipleThree(int N){
cout << 6 << "\n";
cout << 1 << " " << 1 << " " << N - N/3 << "\n";
cout << 1 << " " << N - N/3 + 1 << " " << N / 3 << "\n";
cout << N / 3 + 1 << " " << N - N/3 + 1 << " " << N / 3 << "\n";
cout << N - N/3 + 1 << " " << 1 << " " << N / 3 << "\n";
cout << N - N/3 + 1 << " " << N/3 + 1 << " " << N / 3 << "\n";
cout << N - N/3 + 1 << " " << N - N/3 + 1 << " " << N / 3 << "\n";
}
void printResult(int** best_sq,int N,int min){//вывод оезультатов на основе
заполнения матрицы
int x,y,len;
bool find;
for(int k= 1;k <= min;k++){
x = 0;
len = 0;
y = 0;
find = false;
for(int i = 0;i < N;i++){
for(int j = 0;j < N;j++){
if(find){
if(i + 1 >= N || j + 1 >= N || best_sq[i + 1][j + 1] != k)
{ len = i - x + 2;
break;
} else
i++;
}
if(!find && best_sq[i][j] ==
k){ find = true;
x = i + 1;
y = j + 1;
if(i + 1 >= N || j + 1 >= N || best_sq[i + 1][j + 1] !=
k){ len = 1;
break;
}
i++;
}
}
if(len)
break;
}
cout << x << " " << y << " " << len << "\n";
}
}
```

```
void setPosition(int** square,int** best_square_version,int N,int x,int y,int number_of_squares,int &min,deque<pair<int,int>> &components_of_square, bool &forward) {
int x_new = -1;
int y_new = -1;
unsigned long size_of_queue =
components_of_square.size(); bool check = true;
pair<int, int> coordinates;
vector<pair<int, int>> curr_components;
for (int i = 0; i < size_of_queue; i++) {//проверка на то, можно ли
на свободных позициях увеличить квадрат
coordinates = components_of_square.front();
components_of_square.pop_front();
x_new = coordinates.first;
y_new = coordinates.second;
if (((x_new + 1 < N && y_new + 1 < N && number_of_squares != 1)
|| (x_new + 1 < N - 1 && y_new + 1 < N - 1)) &&
(!square[x_new + 1][y_new + 1] || square[x_new + 1][y_new + 1] ==
number_of_squares) &&
(!square[x_new + 1][y_new] || square[x_new + 1][y_new]
        == number_of_squares)
&& (!square[x_new][y_new + 1] || square[x_new][y_new + 1]
== number_of_squares)) {
if (!square[x_new + 1][y_new]) {
components_of_square.emplace_back(make_pair(x_new + 1, y_new));
curr_components.emplace_back(make_pair(x_new + 1, y_new));
}
if (!square[x_new][y_new + 1]) {
components_of_square.emplace_back(make_pair(x_new, y_new +
1)); curr_components.emplace_back(make_pair(x_new, y_new + 1));
}
if (!square[x_new + 1][y_new + 1]) {
components_of_square.emplace_back(make_pair(x_new + 1, y_new +
1)); curr_components.emplace_back(make_pair(x_new + 1, y_new + 1));
}
} else
check = false;
}
if (check) {//если можно. рекурсивно запускаем процесс для следующей
вершины for (int i = 0; i < curr_components.size(); i++) {
coordinates = curr_components[i];
x_new = coordinates.first; y_new =
coordinates.second;
square[x_new][y_new] = number_of_squares;
}
//printBoard(square,N);
setPosition(square, best_square_version, N, x + 1, y + 1, number_of_squares,
min, components_of_square,
forward);
} else {
```

```
search_first_elem(square, x_new, y_new, N);//если нельзя, ищем свободную позицию
для построения следующего квадрата
}
if (x_new != -1) {
if (!forward) {//вернувшись до ближайшего не единичного квадрата,
изменяем его размер и продолжаем построение
if(number_of_squares + 1 >= min)
return;
remove_numbers(square, N, number_of_squares, x,
y); search_first_elem(square, x_new, y_new, N);
forward = true;
}
forward = true;
components_of_square.resize(0);
components_of_square.emplace_back(make_pair(x_new, y_new));
square[x_new][y_new] = number_of_squares + 1;
if(number_of_squares + 1 < min) {
setPosition(square, best_square_version, N, x_new, y_new, number_of_squares
        1, min, components_of_square,
forward);
}
else {
forward = false;
}
} else {
if (number_of_squares < min) {//если все клетки заняты, возвращаемся до
ближайшего не единичного квадрата
min = number_of_squares;
copy(square, best_square_version, N);//если к-ство квадратов при
данной конфигурации минимально, сохраняем текущее расположение
// cout << "Печать наилучшего на данное время решения" <<
"\n"; //printBoard(best_square_version,N);
}
forward = false;
}
}
void menu(int N,int** square,int**
best_square_version){ bool forward = true;
deque<pair<int,int>> components_of_square; int min = (N * N) -
(N - 1) * (N - 1) + 1;
memoryInitialization(square,best_square_version,N); if((N % 2
&& N % 5 && N % 3) || (N == 3) || (N == 5)) {
components_of_square.emplace_back(make_pair(N / 2 + 1,N / 2));
Intialization(square,N);
setPosition(square, best_square_version, N, N / 2 + 1, N / 2, 4,
min, components_of_square, forward);
}
else
if(!(N % 2))
printMultipleTwo(N);
```

```
else
if(!(N % 3))
printMultipleThree(N);
else
if(!(N % 5)){
int coord1 = N - N / 5 - N /5;
int coord2 = N - coord1;
Initialize(square, N, coord1, coord2);
components_of_square.emplace_back(make_pair(coord1, coord2));
setPosition(square, best_square_version, N, coord1, coord2, 5, min,
components_of_square, forward);
cout << min << "\n";
printResult(best_square_version, N, min);
}if((N % 2 && N % 5 && N % 3) || (N == 3) || (N == 5)) {
cout << min << "\n";
printResult(best_square_version, N, min);
}
}

int main() {
srand(time(0));
time_t start;
time(&start);
start = clock();
deque<pair<int,int>> components_of_square;
int N;
cin >> N;
int** square = new int*[N];//массив для текущей конфигурации
int** best_square_version = new int*[N];//массив для
наилучшей конфигурации.
menu(N,square,best_square_version);
clear(square,best_square_version,N);
time_t end;
end = clock();
cout << "Time : "
std::cout << (end - start)/1000 << "sec\n";
return 0;
}
```

Ссылки на тестирование

1. https://ideone.com/jJJC9E
2. https://ideone.com/XfsLDM
3. https://ideone.com/SN0fOV