Algebra Lineare e Geometria Analitica

26 maggio 2020

Indice

Capitolo 1

Spazi Vettoriali

Capitolo 2

Associare Vettori a Punti

Capitolo 3

Somma di Vettori

Capitolo 4

Sottospazi Vettoriali

Capitolo 5

Dipendenza Lineare e Basi

Capitolo 6

Matrici

Capitolo 7

Il Determinante

7.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 1. Come oggetto matematico il determinante è una funzione

$$det_n : \quad \{Matrice \quad n \times n\} \longmapsto \Re$$

Ci sono bijezioni tra:
$\{Matrice \quad n \times n\} \iff \{(\vec{c_1}, \dots, \vec{c_n}), \quad \vec{c_i} = \text{vettori colonna di } \Re^n\}$
$\{Matrice \quad n \times n\} \iff \{(\vec{r_1}, \dots, \vec{r_n}), \quad \vec{r_i} = \text{vettori riga di } \Re^n\}$

L'importanza del det_n è che trova l'invertibilità della matrice: $det(M) \neq 0 \quad sse\ M$ è invertibile. Inoltre, c'è un algoritmo che calcola $det_n(M)$. Si noti che det_n fornisce un modo di mostrare che una matrice è invertibile senza trovare la matrice inversa.

Teorema 7.1.1. *Esiste una sola funzione*

$$f : (\Re^n)^n = \{vettoricolonnain\Re^n\} \longmapsto \Re$$

che soddisfa le proprietà $1, 2, 3, 4$. *Questa funzione è il determinante* det_n.

Proprietà del determinante 1. ($\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ denotano vettori colonna di $\Re^n$ e $\lambda \in \Re$.)

1. $det_n(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i + \underline{w}, \, \underline{v}_{i+1} \dots v_n) \; = \; det_n(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i + \dots, \underline{v}_n) \; + \; det_n(\underline{v}_1, \dots, \underline{w}, \, \underline{v}_n)$
   $\forall i = 1, \dots n$

2. $det_n(\underline{v}_1, \dots, \lambda \, \underline{v}_i, \, \underline{v}_{i+1}, \dots \underline{v}_n) \; = \; \lambda \, det_n(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i + \dots, \underline{v}_n)$
   $\forall i = 1, \dots n$

3. $det_n(\underline{v}_1, \dots, \underline{w}, \, \underline{w}, \, \underline{v}_{i+2}, \dots \underline{v}_n) \; = \; 0$
   $\forall i = 1, \dots n$

4. $det_n(Id_n) \; = \; 1$, dove $\quad Id \; = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Nota 1. Le proprietà **1** e **2** sono la *multilinearità di* n
La proprietà **3** è chiamata *proprietà alternante*; tale proprietà per una funzione multilineare in n è equivalente a:
$det_n(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i +, \, \vec{v}_{i+1} \dots v_n) \; = \; -\, det_n(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i+1} +, \, \vec{v}_i \dots v_n)$

Dimostrazione. (del teorema precedente del caso speciale di $n = 2$). Supponiamo che f soddisfi **1**, **2**, **3**, **4**. Calcoliamo $f\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$

$$
\begin{aligned}
& f\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\ c\end{pmatrix}\right) \overset{(1)}{=} f\left(\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}\right)\\
&= f\left(a\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}\right) + f\left(c\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}\right) \overset{(2)}{=} a\, f\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}\right) + c\, f\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}\right)\\
&\overset{(1)}{=} a\left[f\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\ 0\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ d\end{pmatrix}\right)\right] + c\left[f\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\ 0\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ d\end{pmatrix}\right)\right]\\
&\overset{(2)}{=} a\left[b\,\underbrace{f\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)}_{\overset{(2)}{=}\,0} + d\, f\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)\right] + c\left[b\, f\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right) + d\,\underbrace{f\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)}_{\overset{(2)}{=}\,0}\right]\\
&= a\,d\, f\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right) + c\,b\ \underbrace{f\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)}_{\overset{(3)}{=}-f\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)} \overset{(4)}{=} ad - cb
\end{aligned}
$$

□

7.2 Teorema di Laplace

Teorema 7.2.1 (di Laplace)**.** *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$, e sia $(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ la sua k-esima riga. Allora abbiamo la seguente uguaglianza:*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\ a_{kj}\ det(a_{kj})$$

$$dove\ A_{kj} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & a_{kn}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Osservazioni 1. (1)La formula dipende dalla riga k, ma il $det(a)$ no.

(2)C'è uno sviluppo simile del determinante attraverso una h-esima colonna invece della k-esima riga:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+h}\ a_{ih}\ det(a_{ih})$$

(3)Queste sono definizioni ricorsive, ciò significa che il determinante di una matrice $n \times n$ è espresso in funzione del determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$

Esempio 1. Dato $det(a) = a$, si scriva la formula per il determinante di una generica matrice 2×2 e si controlli che coincida con quello derivato nella dimostrazione 7.1.

Sia $A = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$, con la formula di Laplace abbiamo, sviluppando secondo la prima riga,

$$det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\, a\, det(d) + (-1)^{1+2}\, b\, det(c) = ad - bc$$

Esempio 2. Si calcoli il determinante si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Sviluppiamo di nuovo il determinante secondo una riga. Si noti che è sempre conveniente scegliere una riga con il più alto numero di zeri. Perciò scegliamo o la prima o la seconda riga. Prendiamo la seconda:

$$det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} \, 1 \, det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \, 1 \, det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$= -(-3) + 4 + 1 = 8$

7.3 Altre proprietà e teorema di Binet

Proprietà del determinante 2. La funzione determinante, oltre alle proprietà definite (vedi 7.1):

- Multilinearità in n
- Alternanza
- $det(Id) = 1$

ha le seguenti:

1. $det(A) = det({}^tA)$, dove ${}^tA$ è la matrice trasposta di A.
2. Se A è una matrice *triangolare*, cioè

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

   allora $det(A) = a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$

   Dimostrazione. Per induzione sull'ordine n della matrice:

   Base: $n = 2$, $det \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix} \right) = a_{11}\, a_{22}$ (vedi 7.1 e 7.2)

   Passo induttivo: supponiamo che l'asserzione sia valida per ogni matrice fino all'ordine $n - 1$.

   Per la formula di Laplace (7.2):

   $$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \, det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   $$\overset{per\ ipotesi\ induttiva}{=} a_{11}\,(a_{22} \dots a_{nn})$$

   □

3. In generale $det\,(A + B) \neq det(A) + det(B)$. Comunque,

   Teorema 7.3.1 (di Binet)**.** $det(A\,B) = det(A)\,det(B)$

4. È conseguenza immediata del teorema di Binet:

   Teorema 7.3.2 (corollario)**.** *Se A è invertibile, allora* $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$

   Dimostrazione. Applichiamo il teorema di Binet a $Id_n = A^{-1}A$:

   $$1 = det(Id_n) = det(A^{-1}A) \overset{Binet}{=} det(A^{-1}detA)$$

   □

5. La relazione tra operazioni elementari e il determinante richiama le tre operazioni elementari sulle righe e sulla matrice:

   a. scambiare le due righe

   b. moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$

   c. sostituire r_i con $r_i + \alpha r_j$.

   Cosa succede al determinante dopo che applichiamo un'operazione elementare?

   - *Operazione a.* Il determinante è moltiplicato per -1. Per vedere questo, si noti che scambiare r_i e r_j $(j > i)$ è lo stesso che fare $j-i-1$ scambi *consecutivi* su r_i e $j-i-1$ scambi *consecutivi* su r_j. Quindi scambiamo *consecutivamente* un numero dispari di volte. Ora applichiamo l' "equivalente" proprietà alternante del determinante (vedi 7.1).
   - *Operazione b.* Il determinante resta invariato:
     $det(\dots, r_i + \alpha r_j, \dots) \;=\; det(\dots, r_i, \dots) + \alpha\, det(\dots, r_j, \dots, r_j, \dots)$
     Si noti che:
     $det(\dots, r_i + r_j, \dots) \;=\; (-1)^{j-i-1} \underbrace{det(\dots, r_j, r_j, \dots)}_{=0}$ per l'operazione *a.*
     Ma $det(\dots, r_j, r_j, \dots) = 0$ per l'alternanza di *c.* (vedi 7.1).
     Così abbiamo provato che $det(\dots, r_i + \alpha r_j, \dots) \;=\; det(A)$

7.4 Determinante e sistemi di equazioni lineari

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari con A una matrice quadrata (vedi 6.4). Allora:

Teorema 7.4.1. *1. Il sistema ammette una soluzione sse $det(A) \neq 0$*

2. In quel caso la soluzione $(c_1, \dots, c_n)$ è unica e tale che

$$c_i \;=\; \frac{det(A_1 \dots |\underline{b}| \dots A_n)}{det(A)}$$

dove A_j è il j-esimo vettore colonna di A.

Esempio 3. Controlliamo se $\begin{cases} 2x + z - 2 = 0 \\ -y - 3z + 2 = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$ ha un'unica soluzione e in quel caso troviamola.

La matrice A è $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\underline{b} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$det(A) \;=\; 2\,det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; 2(1+3) + (-1) = 7 \Rightarrow \exists!$ soluzione

Per il teorema precedente, possiamo esprimere la soluzione come $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ con:

$$c1 \;=\; \frac{det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{7} \;=\; \frac{1}{7}\Bigg(2\,det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg) = \frac{1}{7}(8-2) = \frac{6}{7}$$

$$c1 \;=\; \frac{det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{7} \;=\; \frac{1}{7}\Bigg(2\,det\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\Bigg) = \frac{1}{7}(4+4) = \frac{8}{7}$$

$$c1 = \frac{det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{7} = \frac{1}{7}\left(2\,det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}(4-2) = \frac{2}{7}$$

7.5 Determinante e rango di una matrice

Il determinante è definito solo per le matrici quadrate. Comunque, è possibile usare il concetto di determinante per ottenere informazioni riguardo qualunque matruce.

Definizione 2. Sia A una matrice. Una sottomatrice di A è una matrice ottenuta togliendo alcune righe e alcune colonne da A.

Definizione 3. Un **minore** di ordine k di una matrice A è il determinante di una sottomatrice quadrata di A di ordine k.

Esempio 4. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Una sottomatrice quadrata di ordine 2 è $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il suo minore associato è $det(B) = -3$.

Teorema 7.5.1. *Sia A una qualunque matrice. Allora il rango di A è uguale al più grande ordine di minori non nulli di A.*

Esempio 5. Consideriamo la matrice A scritta sopra: è una matrice 3×4, perciò $rank(A) \geq 2$ per il teorema.

Ci sono due possibilità:

1. $\exists$ minore non nullo di ordine 3 di A
2. Tutte le matrici di ordine 3 di A hanno $det = 0$

In A ci sono quattro sottomatrici quadrate di ordine 3. Comunque non è necessario controllare il determinante di tutte queste: per il teorema (o anche solo osservandole), abbiamo che le colonne $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, dunque dobbiamo controllare se uno dei vettori colonna rimanenti sia linearmente indipendenti con queste. Questo significa calcolare solo due minori invece di quattro.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, quindi $rank(A) = 3$.