

Business Intelligence per i Servizi Finanziari

Indice

1	Concetti base di finanza	5
1.1	Strumenti finanziari	5
1.2	Tipi di security	5
1.3	Esempi di mercati di scambio	5
1.4	Bond.....	5
1.4.1	Bond e calcolo degli interessi.....	5
1.4.2	Considerazioni	6
1.4.3	Payoff e profitto dei bond	7
1.4.4	Composizione continua	7
1.5	Azioni	8
1.5.1	Azioni: scambio, prezzo e indici	8
1.5.2	Azioni	8
1.5.3	Comprare e vendere azioni	9
1.5.4	Dati delle quote delle azioni.....	10
1.5.5	Payoff e profitto delle azioni	12
1.6	Indici di mercato	12
1.7	Opzioni e altri derivati.....	13
1.7.1	Opzioni	13
1.7.2	Leggere le quote delle opzioni	14
1.7.3	Payoff e profitto delle opzioni.....	15
1.7.4	Calcolo del profitto sulle opzioni.....	16
1.7.5	Perché usare le opzioni?	16
1.7.6	Pricing delle opzioni: una panoramica	18
1.7.7	<i>Futures</i> e <i>Forward</i>	19
1.7.8	Payoff e profitto di <i>futures</i> e <i>forward</i>	19
2	Portafoglio e investimenti collettivi	20
2.1	Portafoglio	20
2.1.1	Gestione del portafoglio	20
2.1.2	Fondi comuni e ETF	21
2.1.3	Posizioni di trading.....	21
2.2	Atteggiamenti di trading	22
2.2.1	Hedgers	22
2.2.2	Speculators	23

2.2.3	Arbitrageurs	23
2.3	Bulls & Bears	23
2.3.1	Un primo principio di trading	24
2.3.2	Il mercato è <i>bullish</i> o <i>bearish</i> ?	24
2.4	Market timing o buy-and-hold	24
2.4.1	Strategie di "timing"	25
3	Modello di flusso di cassa attualizzato (<i>Discounted Cash Flow Model</i>) e ipotesi efficiente di mercato.....	25
3.1	DCF.....	25
3.1.1	Prezzo vs valore dell'azione	25
3.1.2	Modello di flusso di cassa attualizzato.....	25
3.1.3	DCF e previsioni.....	27
3.2	Arbitraggio	28
3.2.1	Conseguenze del non arbitraggio.....	28
3.3	Pricing delle opzioni.....	28
3.3.1	<i>Risk-neutral valuation</i>	28
3.3.2	Un esempio	29
3.4	Ipotesi di mercato efficiente – EMH (<i>Efficient Market Hypothesis</i>)	29
3.4.1	Testare l'EMH	30
3.4.2	EMH forte.....	30
3.4.3	EMH e complessità computazionale	31
4	Ingegneria del mercato finanziario	32
4.1	Mercati elettronici e <i>Limit Order Book</i>	32
4.1.1	Trading nei mercati elettronici.....	32
4.1.2	LOB e <i>spread</i>	32
4.1.3	LOB e <i>midprice</i>	32
4.1.4	LOB.....	33
4.1.5	Trading nei mercati elettronici.....	33
4.1.6	Il <i>Limit Order Book</i>	34
4.1.7	LOB e microprezzo	38
4.1.8	Tipi di ordine estesi	38
4.1.9	Alcuni tipi di ordini.....	38
4.1.10	Colocation.....	39
4.1.11	Commissioni di borsa	40
4.2	Tipi di trader	40
4.2.1	Le tre principali classi di trader	40
4.2.2	Classificare i partecipanti al mercato	41
4.2.3	Traders e liquidità	41

5	Ritorni di asset e portafoglio	42
5.1	Ritorno semplice di un periodo	42
5.1.1	Periodo di detenzione e ritorno del periodo di detenzione	42
5.1.2	Ritorni semplici	42
5.1.3	Calcolo del ritorno semplice	43
5.1.4	Ritorno semplice e composto.....	43
5.1.5	Ritorni multi-periodo	44
5.1.6	Ritorni continuamente composti.....	44
5.1.7	Esempio	45
5.2	Ritorno del portafoglio	45
5.2.1	Calcolare i ritorni del portafoglio	46
5.2.2	Adeguamento per i dividendi.....	47
5.2.3	Ritorno totale di Microsoft quando sono pagati i dividendi	47
5.2.4	Adeguamento per l'inflazione	48
5.2.5	Esempio	49
5.3	Annualizzare i ritorni	49
5.3.1	Ritorni medi	50
5.3.2	Calcolo del ritorno annualizzato dal ritorno di un mese	51
5.3.3	Calcolo del ritorno annualizzato dal ritorno di due mesi	52
5.3.4	Calcolo del ritorno annualizzato dal ritorno di due anni.....	52
6	Ottimizzazione del portafoglio.....	52
6.1	Fondazione dell'Ottimizzazione del Portafoglio (Portfolio Optimization)	52
6.2	Il modello Media-Varianza	53
6.2.1	Media e varianza di un portafoglio	53
6.2.2	Due casi opposti	53
6.2.3	Portafoglio media-varianza di rischio minimo	54
6.2.4	Minima varianza come un problema di ottimizzazione	54
6.2.5	Alcune considerazioni	54
6.2.6	La frontiera efficiente e la minima varianza del portafoglio	55
6.2.7	Frontiera efficiente.....	55
6.2.8	Portafoglio con un asset risk-free	56
6.3	La Capital Market Line e il Portafoglio di Mercato	57
6.3.1	Indice di Sharpe	58
6.4	Capital Asset Pricing Model e Beta di un titolo.....	59
6.4.1	CAPM come modello di pricing.....	59
6.4.2	Sul significato di Beta.....	60
6.4.3	Stimare beta da un campione	62
6.5	Ottimizzazione dei portafogli sotto diversi insiemi di vincoli	62

7	Selezione del portafoglio	63
7.1	Selezione del portafoglio (<i>portfolio selection</i>).....	63
7.1.1	Un esempio	65
7.2	Strategia di selezione del portafoglio	65
7.2.1	Valutazione delle performance delle strategie di selezione del portafoglio ..	65
7.2.2	Esempio <i>Buy and Hold</i>	66
7.2.3	Portafogli ribilanciati costantemente	66
7.3	Volatilità	67

1 Concetti base di finanza

1.1 Strumenti finanziari

Gli strumenti analizzati durante il corso appartengono all'ampia categoria chiamata *security*.

Security: uno strumento finanziario fungibile, negoziabile che rappresentano un valore finanziario (una qualsiasi cosa che può essere scambiata cui possiamo associare un valore finanziario è una *security*).

1.2 Tipi di security

Tre tipi principali di *security*:

- **Debito** (*debt*): *security* che sono 'sicure' nel senso di essere 'risk-free' (es. bond, note commerciali e depositi bancari). Sono gli strumenti più finanziari più sicuri. Ad esempio se ho un conto corrente qualsiasi cifra deposito la troverò uguale a fine anno o con alcuni interessi.
I bond sono titoli di stato: lo stato contrae un debito nei confronti di chi acquista un bond, è come prestare soldi allo stato. Lo stato assicura che al termine di un certo periodo restituirà la somma con degli interessi (so già quanto mi darà alla fine con certezza).
- **Equity**: di solito azioni di compagnie o un valore condiviso. Azioni delle compagnie quotate in borsa. Comprare delle azioni significa comprare degli strumenti finanziari che non sono però risk-free. Se compro delle azioni non so quanto varranno domani.
- **Derivati** (*derivatives*): *security* il cui valore dipende dal valore di qualche altro asset, di qualche altra variabile. Viene ancora più difficile prevederne il valore.
Le **opzioni** (*options*) sono strumenti derivati, è un contratto il cui valore dipende dal prezzo di un'azione in un certo momento.

Le *security* sono di solito scambiate e organizzate in mercati conosciuti come **mercati di scambio**.

1.3 Esempi di mercati di scambio

Per azioni e opzioni: NYSE, CBOE, Nasdaq, LSE, FTSE MIB...

La stessa azione potrebbe essere scambiata su diversi mercati. Il valore di una azione dipende dal mercato in cui è scambiata.

I **bond** sono di solito considerati la *security* 'benchmark-free' nell'ingegneria finanziaria.

Se voglio confrontare due strumenti finanziari ho bisogno di un benchmark, pertanto prendo uno strumento risk-free.

Bisogna pesare quanto è alto il rischio rispetto al guadagno promesso. È utile conoscere quindi come calcolare il profitto

1.4 Bond

1.4.1 Bond e calcolo degli interessi

Un **bond** è un contratto di prestito a lungo termine tra due parti:

- Il **debitore** (*issuer, borrower, debtor*): chi riceve una specifica somma di denaro dal creditore (nei titoli di stato è lo Stato).
- Il **creditore** (*lender*): a chi verrà restituita la quantità di soldi prestata più un certo interesse.

In un bond c'è sempre un debitore, un creditore e un tasso di interesse.

Verso lo stato sono creditore se compro un titolo di stato.

L'interesse potrebbe essere pagato a vari punti fissati durante la vita del bond

- Il **'principal'** è la somma data dal creditore, i **'coupon'** sono i successivi pagamenti dei tassi di interesse.
- La **data di scadenza** (*maturity date*) è la data in cui scade il bond.

Per questo, il valore di un bond dipende dalla **data di scadenza** e il **tasso di interesse**, così come la **frequenza del pagamento degli interessi**.

Supponiamo che un investitore acquisti un bond con un 'principal' di 100\$ con un tasso di interesse annuo del 100€. Il valore del bond dopo un anno sarà:

$$100 \text{ €} + (0.1 \times 100 \text{ €}) = 100 \text{ €} \times (1+0.1) = 110 \text{ €}$$

In questo caso il valore del bond dipende solo dal tasso di interesse, ma cosa succederebbe con una scadenza più lunga e pagamenti più frequenti?

Consideriamo il caso precedente, ma con una scadenza di n anni.

Alla fine dell'anno sappiamo già che il valore del bond sarà 110€. Ora l'interesse guadagnato finora è aggiunto al valore corrente dell'investimento e il prossimo interesse è calcolato sulla somma risultante.

Pertanto dopo il secondo anno il valore del bond sarà:

$$110 \text{ €} + (0.1 \times 110 \text{ €}) = 110 \text{ €} \times (1+0.1) = 121 \text{ €}$$

O equivalentemente partendo dal 'principal':

$$100 \text{ €} \times (1+0.1)^2$$

Dunque la **formula generale per i tassi di interesse composti** è:

$$P_n = P_0 (1+r)^n$$

Dove P_0 è il 'principal', r l'interesse annuale e n è la maturità (in anni).

1.4.2 Considerazioni

Aumentare la frequenza del pagamento dell'interesse, diciamo **$m > 1$** volte in un anno, allora la frazione del tasso annuale di interesse, che è composto ad ogni periodo più corto, è **r/m**

$$P_n = P_0 (1+r/m)^{nm}$$

"N volte la frequenza di coupon".

La tabella seguente riassume l'effetto di pagamenti più frequenti degli interessi

Table 1.1 The effects of compounding frequency on €100 over 1 year at the interest rate of 10% per annum

Frequency	Number of payments (m)	Interest rate per period (r/m)	Value at the end of year
Annual	1	0.1	€110.00
Semiannual	2	0.05	€110.25
Quarterly	4	0.025	€110.381
Monthly	12	0.0083	€110.471
Weekly	52	0.1/52	€110.506
Daily	365	0.1/365	€110.516

('Compongo' sempre più interessi. Se io potessi avere degli interessi all'ora, al minuto o al secondo potrei avere ancora più guadagno.

Se nel bond i pagamenti sono ben definiti, nelle azioni è diverso dato che posso vendere in qualunque momento e il prezzo cambia di continuo. I bond non hanno questa percezione del continuo.

Le azioni si pongono sul continuo e i bond no.)

1.4.3 Payoff e profitto dei bond

Il '**payoff**' di ogni security è il valore alla sua scadenza.

Il payoff di un bond è il principal più tutti gli interessi.

Il **profitto** di una security è quanto ho effettivamente guadagnato, è il suo payoff adattato rispetto al rischio sottraendo l'investimento iniziale che include le commissioni di contratto o qualsiasi altro costo di transazione.

Per i bond non ci sono di solito costi di transazione o commissioni (o se ci sono, possiamo assumerle incluse nel principal) e il rischio è nullo; quindi **il profitto del bond è semplicemente calcolato sottraendo il principal al payoff**:

$$P_T - P_0 = P_0 (1+r/m)^{mT} - P_0 = P_0 ((1+r/m)^{mT} - 1)$$

P_T = payoff, P_0 = principal.

1.4.4 Composizione continua

(Le azioni spingono le frequenze di pagamento fino all'infinito. Bisogna ipotizzare che anche per i bond si possa lavorare nel continuo.)

Con il **comportamento del modello di pricing** di azioni e opzioni, o qualsiasi altra security il cui valore è frequentemente in cambiamento, è conveniente considerare che **il trading possa essere fatto continuamente nel tempo**.

Quando consideriamo security risk-free (es. bond) assumiamo che gli interessi possono essere calcolati infinitamente spesso (cioè che m tende all'infinito) su un periodo di tempo generico $t > 0$ che potrebbe essere n anni così come un'istante infinitesimale.

La formula per calcolare l'interesse continuamente composto è:

$$P_T = P_0 e^{rT}$$

Questa formula permette di paragonare il profitto di un investimento in bond con il payoff di un investimento in azioni.

Se considerassimo l'esempio precedente, il valore dopo 1 anno, con la composizione continua è

$$100 e^{0.1} = 110.52 \text{ €}$$

Vediamo che è molto vicino alla composizione giornaliera.

Se voglio confrontare l'investimento tra titolo di stato e un'azione posso usare questa formula.

Più generalmente, se P_t è il valore del bond al tempo t , il valore ad un istante successivo $t + \tau$ con la composizione continua è:

$$P_{t+\tau} = P_t e^{r\tau}$$

E per recuperare il valore ad un istante $t - \tau$ precedente abbiamo:

$$P_{t-\tau} = P_t e^{-r\tau}$$

(Posso sapere qual è l'investimento che avrei potuto fare tot anni prima a quel tasso di interesse: posso recuperare il vero valore dell'investimento che ho fatto.

Posso confrontare qualcosa che ha una maturity date diversa.)

1.5 Azioni

1.5.1 Azioni: scambio, prezzo e indici

Una **quota** (*share*) **di un'azione di una compagnia** è una rivendicazione su una parte degli asset e dei guadagni della compagnia.

(Acquistare un'azione di una compagnia significa acquistare parte del valore e dei guadagni dell'azienda (si è soci dell'azienda, non si prestano dei soldi).)

Esistono due tipi di azioni (*stock*) (moderano il ruolo dei soci nei confronti dell'azienda):

- **Common** – di solito permettono al proprietario dell'azione di votare alle riunioni degli azionisti e di ricevere i dividendi (non accade con i bond).
- **Preferred** – generalmente non danno diritti di voto ma hanno priorità sulle comuni riguardo al pagamento dei dividendi. A chi le acquista non interessa entrare nelle decisioni dell'azienda, ma interessano i guadagni. Le preferred hanno la precedenza dei dividendi sulle comuni.

Le aziende generalmente sono più interessate a emettere comuni.

1.5.2 Azioni

Un'azienda vende quote o partecipazioni per aumentare il capitale. Le quote sono vendute agli investitori attraverso i mercati di scambio azionari (**company's shares outstanding**).

Quello che succede sul mercato azionario è indipendente dai piani di business di un'azienda.

Il **valore di mercato/capitalizzazione** (*market value/capitalization*) di una compagnia è definito dal *numero di quote sul mercato x prezzo di una quota*. Per aumentare la capitalizzazione si può immettere un maggior numero di quote (metto una parte dell'azienda a disposizione dei compratori) o aumentare il prezzo delle quote.

Il valore di mercato di un'azienda varia attraverso il tempo secondo il prezzo.

Ogni azionista (*shareholder*) ha un possesso 'parziale' dell'azienda, definito dal numero di quote possedute relative alle quote sul mercato.

I soci stessi posseggono una parte di quote dell'azienda.

(Durante gli anni le cose sono cambiate moltissimo, un tempo le azioni erano rappresentate da biglietti.)

Oggigiorno le azioni sono **comprate in persona o elettronicamente** attraverso istituzioni finanziarie con **servizi di brokeraggio** (*brokerage services*), facilitando le transazioni di azioni tra compratori e venditori.

I **broker** sono i responsabili di **eseguire l'acquisto o la vendita al mercato di scambio delle azioni**, come stabilito dai propri clienti.

(Il broker è automatizzato (meccanismo di matching degli ordini). I broker sono gli unici che possono accedere al mercato finanziario. Intorno ai broker ci sono le banche, attorno le banche gli investitori, è costituito a cipolla per regolare il tutto.)

1.5.3 Comprare e vendere azioni

Comprare e vendere ordini è regolato dall'autorità di mercato e ha forme differenti per permettere (o proibire) diverse **strategie di trading** (*trading strategies*).

Ogni mercato finanziario ha i propri divieti e permessi.

Tre forme comuni per comprare e vendere ordini sono:

- **Market order**
Viene eseguito subito, quindi dà la priorità al tempo e non al prezzo (qualunque prezzo trova).
- **Limit order**
Viene imposto un limite oltre cui l'ordine viene eseguito (l'ordine viene eseguito se il prezzo arriva ad un certo livello). Si può cancellare e decidere poter quanto tenerlo attivo. Uso il 'Limit Order Book'. Serve per limitare le perdite.
- **Stop order**
Simile al limit ma chiama in causa il broker: se il prezzo cambia posso trasformarlo in limit o stop, ma prima che si trasformi il mercato non lo vede. Serve a limitare le perdite e i guadagni.

Queste tre forme per comprare e vendere ordini coinvolgono ciascuno diversi attori o gli stessi attori in tempi diversi.

Market order

Ordine mandato al mercato per **eseguire lo scambio** della security **immediatamente**. È usato quando **l'esecuzione dello scambio è una priorità sul prezzo**. Il prezzo quando l'ordine è eseguito (*filled*) è il miglior possibile al momento dell'esecuzione: quindi può essere diverso (migliore o peggiore) del prezzo al momento in cui l'ordine è stato inviato.

Limit order

Mandato al mercato per **un prezzo dato o migliore** al quale comprare/vendere la security.

Lo scambio è **eseguito solo quando compare un'offerta corrispondente** per la security.

Questo tipo di ordine dà all'investitore il **controllo del prezzo ma non del tempo di esecuzione**.

Non so nemmeno se l'ordine verrà mai eseguito.

Tendenzialmente c'è sempre un tempo limite (viene notificato che l'ordine viene cancellato). Anche se io metto questo limite temporale non ho comunque un controllo sul tempo.

Scorre l'intera filiera come il market order.

Stop order

Come il limit ma viene temporaneamente **trattenuto dal broker** e mandato al mercato solo quando il prezzo della security raggiunge una somma specificata (**stop price**).

Quando il prezzo prestabilito viene raggiunto lo stop order può essere **trasformato in un market o limit order** (come specificato dall'investitore).

Usato per mettere un limite alle possibili perdite (**stop loss order**) o ottenere una percentuale prefissata di profitti (**stop gains** o **profit taking order**).

(Non voglio ad esempio seguire costantemente il titolo che mi interessa; quindi, questo tipo di ordini permettono di automatizzare delle strategie.

Emettere un limit order o uno stop order convertito in market è diverso. Limit: viene venduto al prezzo fissato, market: dà priorità al tempo (non si è sicuri che venga venduto al prezzo di stop, con il limit siamo sicuri di vendere al prezzo fissato). Il market non dà nessuna garanzia, il limit sì.

Tutti gli ordini limit stazionano nel mercato, potrebbero rimanere invenduti ma non vengono annullati.

Se ho una strategia ben fissata emetto un limit, altrimenti emetto uno stop che mi dà una sorta di alert rispetto a quello che succede sul mercato, mi dà quindi flessibilità nella strategia.

Quando emetto ordini limit arrivano subito sul mercato (mantenuti nel Limit Order Book – LOB), si può vedere a quale prezzo voglio vendere, mentre con lo stop sono invisibile al mercato.

Spesso ci sono ordini talmente forti che erodono porzioni del Book che non si vedono e vengono eseguiti il giorno dopo dato che questi ordini stravolgerebbero troppo i prezzi del mercato.)

Stop vs Limit orders

C'è una differenza sottile ma importante tra uno stop e un limit order. Entrambi richiedono un certo prezzo (es. stop e limit price), ma solo il limit order è mandato immediatamente al mercato (anche se magari non viene eseguito).

Esempio di uno *stop loss order* con un limit. Consideriamo di avere 200 quote con un prezzo di 40\$ ognuna. Decidi di vendere se il prezzo scende sotto 35\$ ma contenere le tue perdite per non più di 7\$ per quota.

“Per vendere le 200 quote al prezzo limite di 33\$ e attivare questo limit order quando il prezzo $\leq 35\$$. Tenere questo ordine attivo fino al mese prossimo.”

Uno dei problemi di decisione più importanti nella finanza è decidere a quale prezzo mette il limit perché quando emetto un limit devo comunque pagare – ‘pricing’.

1.5.4 Dati delle quote delle azioni

Molti fornitori per i dati delle quote delle azioni, liberamente consultabili (vengono aggiornati in modo giornaliero): Google, Yahoo finance...

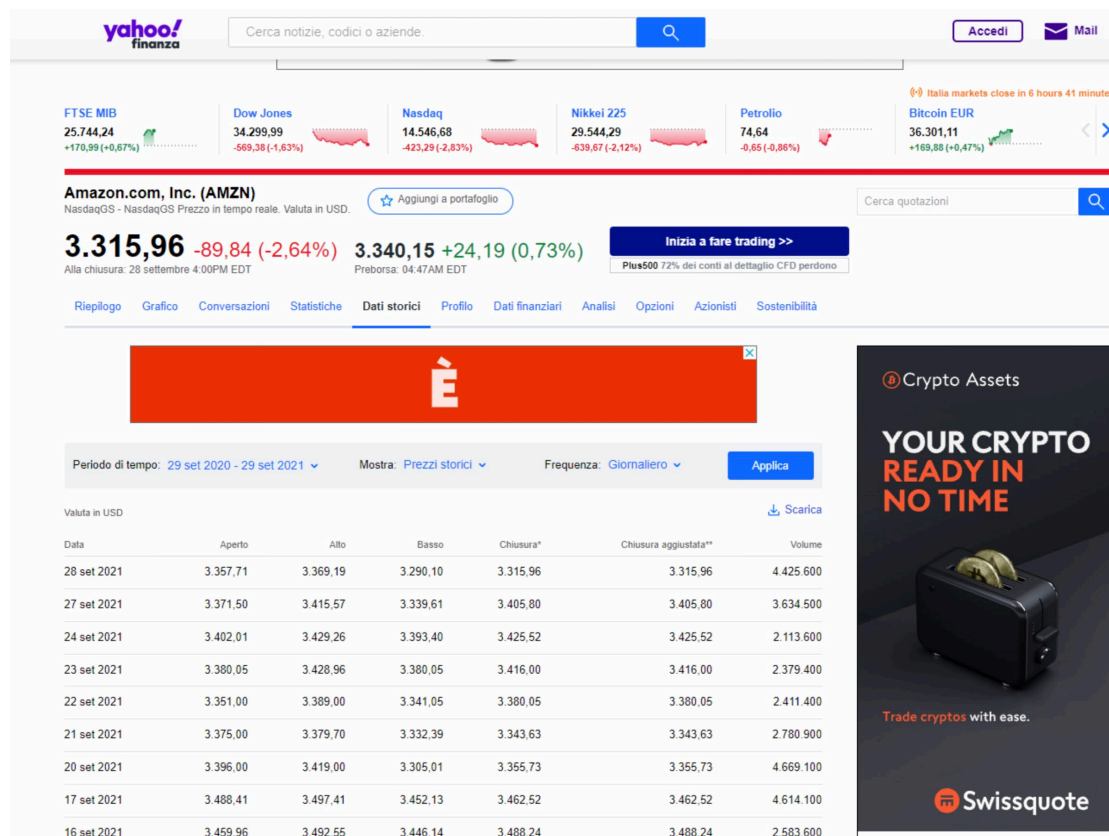
‘Titolo liquido’: titolo che cambia molto velocemente (es. Amazon).

Qualsiasi algoritmo che venga progettato ha una vita media di 10 giorni perché poi viene autoappreso e il mercato in qualche modo si autoregola.

OHLC Data

Dati storici (di solito il minino è su scala giornaliera)

- Open, High, Low, Close
- + Adjusted Close
- Volume



Il mercato ha un orario di apertura e un prezzo di apertura. I dati mi danno un indice di quanto il mio titolo sia variabile. Più il titolo è fluido più mi aspetto una forbice più ampia. Ho un prezzo di chiusura.

- **Ticker** – id della compagnia per il mercato
- **Open** – il prezzo dell'azione al momento di apertura della sessione di mercato.
- **Close** – prezzo corrente dell'azione, se il mercato è in sessione, o l'ultimo prezzo scambiato quando il mercato ha chiuso.
- **Adjusted Close** – Prezzo di chiusura aggiustato per includere i pagamenti dei dividendi più ogni altra azione corporativa che influisce sul prezzo dell'azione (es.: offerte in opzione o frazionamento azionario). Le azioni di stacco dei dividendi vanno ad impattare sul prezzo di mercato: per eliminare questo salto aggiusto il prezzo. Se non ho stacco di dividendi ho prezzo aggiustato e di chiusura uguale.
- **High** – massimo prezzo raggiunto dall'azione tra il prezzo di apertura e quello di chiusura.
- **Low** – minimo prezzo raggiunto dall'azione tra il prezzo di apertura e quello di chiusura.

- **Volume** – numero di quote scambiate tra il tempo di apertura e chiusura, quante azioni sono state scambiate durante il giorno. Maggiore è questo numero più è liquido il titolo. Yahoo Finance non mi dà però la differenza/rapporto tra volume di vendita e volume di acquisto che è molto importante.
- **Dividendi** – un pagamento dato periodicamente da alcune compagnie che riflette i profitti che spettano agli azionisti.

Il prezzo di chiusura di solito non coincide con quello di apertura (il mercato di riserva di compiere una serie di azioni dopo la chiusura). Scambi che potrebbero significativamente alterare il mercato sono tenuti dall'autorità di mercato ed eseguiti dopo che il mercato chiude.

Il **volume** è definito come il numero totale di quote che fluiscono sul mercato, indipendentemente dalla loro direzione (vendita/acquisto).

Informazioni dettagliate sul volume sono solitamente sconosciute su canali gratuiti ma gli investitori hanno accesso a queste informazioni attraverso servizi di brokeraggio privati.

1.5.5 Payoff e profitto delle azioni

Consideriamo una situazione più semplice con nessun dividendo o costi di transazione.

Compro una quota di un'azione ad un tempo $t=t_0$ per un prezzo di S_0 e lo vendo più tardi a un tempo $t=T$ per un prezzo di S_T . Quindi, il payoff è S_T (sarà $m \times S_T$ nel caso di m quote).

Comunque, il profitto ottenuto non può solo essere il risultato di sottrarre l'investimento iniziale al payoff, perché potrebbero esserci state oscillazioni della moneta in diversi punti nel tempo, e c'è qualche rischio coinvolto nell'investimento che deve essere preso in considerazione.

Quindi assumendo la composizione continua ad un tasso di interesse costante r , il profitto di una quota di un'azione comprata ad un tempo t_0 per S_0 e venduto al tempo T per S_T è:

$$S_T + D_T - C(S_0)e^{rT}$$

Il mio vero investimento è quanto ho perso comprando quell'azione al posto di investirla su un bond.

D_T sono i dividendi che ha generato l'azione.

Se i dividendi vengono staccati annualmente e io acquisto l'azione 1 mese prima che vengano staccati i dividendi (io posseggo l'1%), mi viene dato l'1% del dividendo diviso 12 (per il tempo per cui sono stato socio).

1.6 Indici di mercato

Un indice è una funzione matematica **che misura i cambiamenti in un gruppo rappresentativo di punti di dati**.

Nel mercato azionario i punti dei dati sono i prezzi delle azioni e **un indice azionario traccia i cambiamenti nel valore di un gruppo selezionato di azioni che supponiamo rappresenti il mercato o un settore industriale**.

È un **riferimento generale** del trend del valore di mercato e lo stato generale di salute dell'economia.

Per la maggior parte degli investitori, rappresenta un punto di riferimento per la performance degli investimenti.

Non rappresenta una compagnia, ma un ipotetico paniere di compagnie, non può essere acquistato dagli investitori, è solo un riferimento.

Gli indici di mercato sono composti oggi nel mondo da uno dei due seguenti metodi:

- **Price-weighted:** è considerato solo il prezzo di ciascun componente (es. Dow Jones).
Prendo ad esempio i prezzi dei 30 migliori titoli sul mercato.
- **Capitalization-weighted:** considera la capitalizzazione di mercato di ogni azione che compone l'indice; questo è il prezzo delle azioni per il numero delle quote sul mercato.

In un indice price-weighted **un cambiamento significativo nel prezzo di un singolo componente** potrebbe influenzare pesantemente il valore dell'indice, **indipendentemente dalla dimensione della compagnia** (ovvero *shares outstanding*).

In un indice capitalization-weighted **un piccolo cambiamento nel prezzo di una grande compagnia** influenzerà pesantemente il valore dell'indice.

(L'indice varia nel tempo.)

Example 1.2 (A price weighted index) The Dow Jones Industrial Average, conceived by Charles Dow and Edward Jones (1896), is computed by the following formula

$$DJIA_t = \frac{\sum_{i=1}^{30} S_{i,t}}{D} \quad (1.8)$$

where $S_{i,t}$ is the price of stock i at time t and D is the Dow Divisor, a constant included in the equation since 1928 to adjust, or rather stabilized, the average in case of stock splits, spinoffs or similar structural changes; as of July 2 of 2010 the divisor is 0.132129493.⁶ □

Example 1.3 (A capitalization weighted index) The Madrid Stock Exchange principal index, IBEX35, is computed by the following formula⁷

$$IBEX_t = IBEX_{t-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{35} Cap_{i,t}}{\sum_{i=1}^{35} Cap_{i,t-1} \pm J} \quad (1.9)$$

where $IBEX_t$ is the value of the index at time t , $Cap_{i,t}$ is the free float market capitalization of company i at time t , and J a coefficient used to adjust the index, similar in nature as the D in the DJIA equation. □

1.7 Opzioni e altri derivati

1.7.1 Opzioni

Un'opzione è un contratto che gli investitori possono comprare per una tassa per avere l'opportunità, non l'obbligo, di scambiare un asset in una data futura ad un dato prezzo.

Si chiama opzione perché acquisto l'opportunità di acquistare un'azione. Sono quasi come delle scommesse.

- **Exercise date, expiration date e maturity:** data per fare lo scambio
- **Exercise price o strike price:** prezzo scritto nell'opzione
- **Call (put) option:** se lo scambio nell'opzione è di comprare (vendere) l'asset
- **'Esercitare l'opzione'** significa che lo scambio specificato nell'opzione è contenuto nell'exercise date e all'exercise price.

Se il prezzo è aumentato quando scade l'opzione allora ci guadagno perché compro le azioni ad un prezzo minore di quanto valgono davvero. Pago però quando acquisto un'opzione quindi chi le vende ha interesse a farlo.

Ci sono opzioni di acquisto e di vendita delle azioni: un conto è comprare o vendere un'opzione, un conto è che l'opzione sia di acquisto o di vendita per le azioni.

Tipi differenti di opzioni:

- **Europea:** può solo essere esercitata alla data di scadenza
- **Americana:** può essere esercitata su qualsiasi giorno di trading prima della data di scadenza
- **'Bermudan':** solo a date prefissate prima della scadenza (tra europee e americane)
- **Asiatiche:** il payoff è determinato dal prezzo medio dell'asset in questione durante qualche periodo di tempo nella vita dell'opzione.
- **'Barrier':** può essere esercitata solo se il prezzo dell'asset in questione passa un certo livello (la barriera) durante un certo periodo di tempo.

Le opzioni europee e americane sono classificate come **'vanilla'**, che significa che l'opzione è caratterizzata da condizioni di payoff dirette e semplici.

Altre opzioni che coinvolgono condizioni più complicate sono dette **esotiche**. Inoltre, le asiatiche e le 'barrier' sono **path-dependent** perché per calcolare i loro payoff serve conoscere la loro cronologia di prezzo.

Per le opzioni *path-dependent*, il problema del 'pricing' è ancora più complicato.

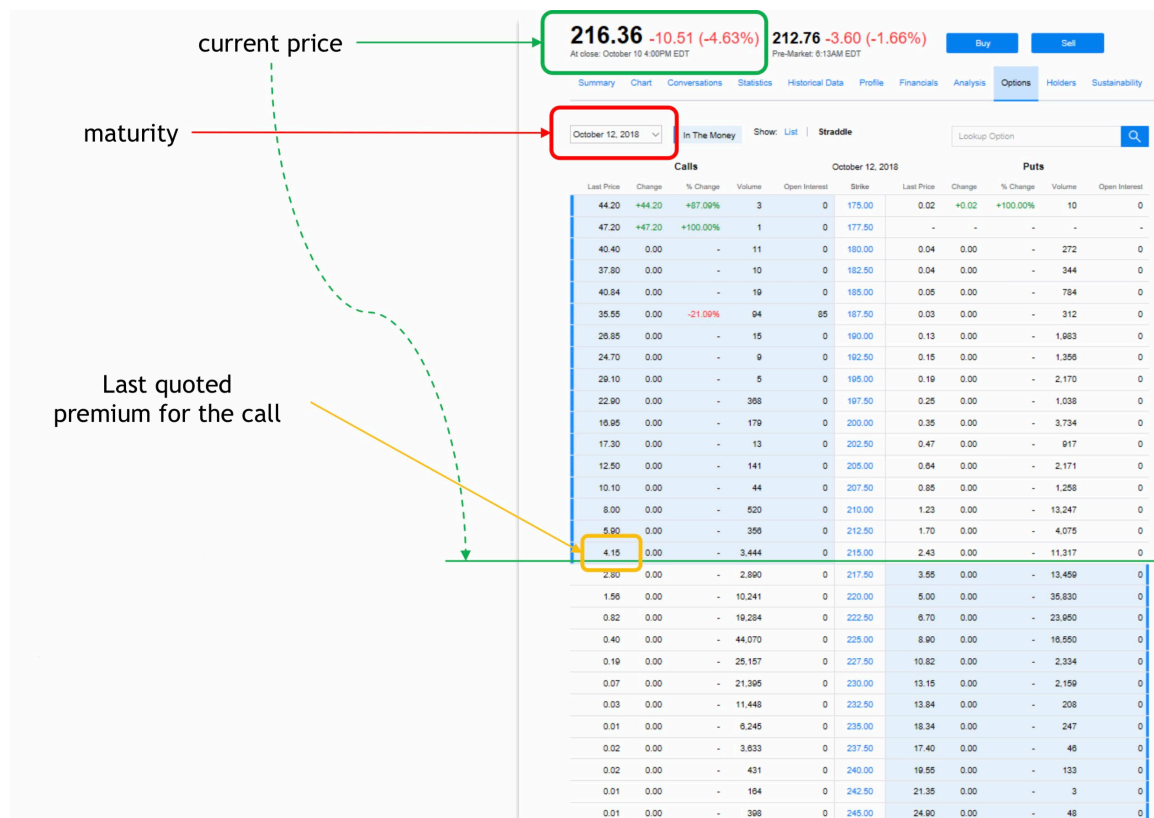
1.7.2 Leggere le quote delle opzioni

Il prezzo di un'opzione è anche chiamato **premio** (*premium*) ed è dato su una base a quota.

Un'opzione su un'azione corrisponde a 100 quote (le opzioni stabiliscono già a priori quante azioni devono essere comprate o vendute alla maturity date). Per esempio, se un'opzione su un'azione di una compagnia (es. AAPL) ha un premio quotato di 2.64\$, l'importo totale da pagare è $2.64\$ \times 100 = 264\$$. Questo permette al titolare di comprare o vendere 100 quote della compagnia alla scadenza.

Le opzioni sono organizzate in una serie di premi differenti, per una data di scadenza fissata e quotate al mercato di scambio usando la nomenclatura standard seguente:

Security Simbol + Expiration Date + Type (call/put) + Strike Price



Osserviamo che:

- Il premio cambia più lontano è lo strike dal prezzo corrente
- Le opzioni call sono generalmente più costose delle opzioni put

(La linea verde si sposta.

Un'opzione è più vantaggiosa se lo strike price è inferiore al prezzo di mercato. Le opzioni put sono tendenzialmente meno appetibili. Con opzioni call io acquisto delle azioni che spero aumenteranno di prezzo sul mercato rispetto a quanto le pago. Il premio delle azioni call cresce più rapidamente rispetto al premio delle opzioni put.)

1.7.3 Payoff e profitto delle opzioni

Il payoff di una opzione dipende sulla possibilità di esercitare o no.

Il payoff è la differenza tra il prezzo di esercizio e il prezzo dell'asset alla scadenza se l'opzione è esercitata, altrimenti 0.

Denotiamo con P_T il prezzo dell'asset alla data T e K lo strike price, così il payoff per un call contract di un'opzione vanilla è:

$$\max(P_T - K, 0)$$

visto che eserciteremmo l'opzione solo se $P_T > K$

Analogamente, il payoff per un dato put contract di un'opzione vanilla è:

$$\max(K - P_T, 0)$$

Il payoff per opzioni *path-dependent* dipende dalle condizioni che legano lo strike price ai prezzi passati dell'asset.

Per un'opzione call asiatica il payoff può essere:

$$\max(A(T_0, T) - K, 0)$$

Dove $A(T_0, T)$ è il prezzo medio dell'asset dalla data T_0 alla data T .

Altre varianti possono essere ottenute usando la media pesata o geometrica.

1.7.4 Calcolo del profitto sulle opzioni

Per calcolare il profitto sulle opzioni dobbiamo considerare la tassa, o la commissione data al momento in cui si stabilisce l'accordo (prezzo dell'opzione).

Questo prezzo, sempre positivo e denotato con $C(P_0, T)$ dipende da:

- P_0 : prezzo dell'asset in questione in un momento iniziale T_0
- T : tempo stabilito per la scadenza

Come con le azioni, dovremmo sottrarre il prezzo dell'opzione dal payoff, ma considerando che queste cifre sono date e ricevute in diversi momenti nel tempo, e che potremmo invece aver fatto un investimento sicuro, dobbiamo includere i possibili guadagni dati da un asset risk-free che ottiene un tasso di interesse costante r per il periodo $\tau = T - t_0$ e continuamente composto.

Dunque, da tutte queste considerazioni, il profitto di un'opzione call è data da:

$$\max(P_T - K, 0) - C(P_0, T) e^{r\tau}$$

1.7.5 Perché usare le opzioni?

Almeno due vantaggi nell'usare le opzioni invece di comprare azioni direttamente:

- Possiamo comprare (o riservarsi il diritto di comprare in una data successiva) più quote a un prezzo minore (siccome paghiamo solo un premio che è sempre minore del prezzo dell'azione in questione). Altrimenti le opzioni non avrebbero senso. Qualcuno è disposto a spendere qualcosa per assicurarsi un diritto di acquisto o di vendita a prezzi agevolati.
- Possiamo stabilire in anticipo, un limite sulle perdite, mentre possiamo ancora fare, teoricamente, profitti illimitati.

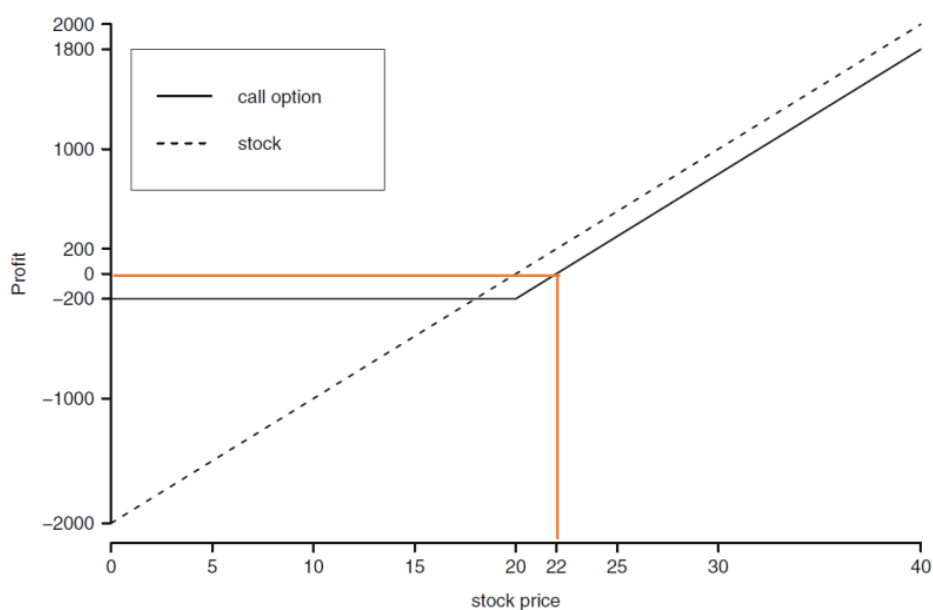
Per capire meglio i benefici delle opzioni è meglio analizzare alcuni **scenari di investimento** (*investment scenarios*) e le **carte di profitto** (*profit charts*) risultanti.

Scenario 1

Example 1.6 Suppose that common stock of company XYZ is trading today at €20, and a call option on XYZ with strike $K = 20$ and a month of maturity is selling for $C_0 = 2$, or €200 ($= 2 \times 100$). Buying one call option would have at expiration a loss on the downside of the price of the stock limited to -200 , since we would not exercise the option. On the contrary, buying the stock could have a future loss of -2000 , in the worst scenario where the stock losses 100 % of its value. Table 1.2 shows a comparison of profits for the call versus holding directly 100 shares of the stock, for different prices of the stock. Figure 1.5 shows the corresponding profit graphs for the call (solid line) and the stock (dashed line) with their evolution of value as described in the table. \square

Table 1.2 Profits for the call option and for holding 100 shares of the stock

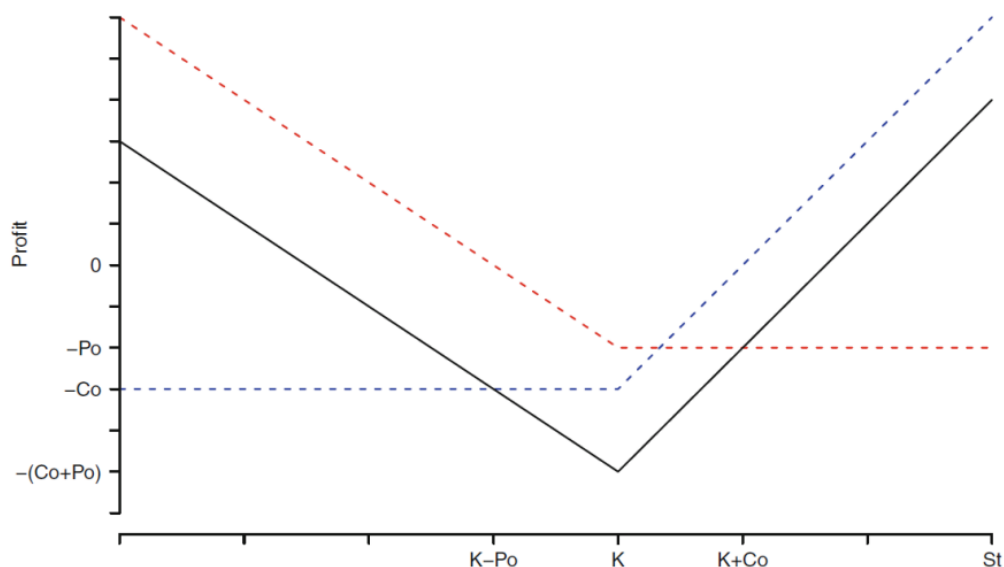
Stock price	Profit for 100 shares	Call	
		Price	Profit
5	-1500	0	-200
10	-1000	0	-200
15	-500	0	-200
20	0	0	-200
22	200	2	0
25	500	5	300
30	1000	10	800
40	2000	20	1800



(Se io compro ora le opzioni a 200\$ e tra un mese l'azione vale ancora 20, allora il mio profitto è 0. Se il prezzo scende rischio di avere una perdita, se il prezzo raddoppia. L'opzione mi assicura che la mia perdita sarà al massimo 200\$: se l'azione avrà un valore sul mercato inferiore a 20 io non esercito l'opzione e ho perso solo 200\$. Quando il prezzo dell'azione varrà 22\$ ma io posso comprarle a 200\$ più 200\$ di premio.)

Scenario 2 (Straddle Strategy)

Example 1.7 The *straddle* strategy consists on buying a call and a put options on a stock with same strike price and expiration date. Figure 1.6 presents the profit graph (solid line) of this strategy resulting from the sum of the two profit graphs (dashed lines), one for the call (in blue) with premium C_0 and the other for the put (in red) with premium P_0 , and common strike price K . If the price of the stock at maturity, S_T , is close to the strike price K (i.e. $|S_T - K| < C_0 + P_0$) then the straddle strategy produces a loss, whereas if S_T moves far away from K , in either positive or negative direction, then there could be significant profits. Thus, a straddle strategy should be used if one expects in the future a significant variation of the price of the stock but is uncertain about the direction it will move. \square



(L'opzione di call e di put mi limitano le perdite da entrambi i lati: se il prezzo salirà tanto non esercito la put ma la call, se il prezzo scenderà tanto non esercito la call ma la put. Nell'intervallo da $-(C_0+P_0)$ a $-P_0$ non ho guadagni. Devo trovare put e call che abbiano lo stesso K o comunque molto vicino e devo trovare due opzioni call e put che permettano di ridurre quell'intervallo. Mi interessa che il prezzo vari tanto, non importa in quale direzione. Se ho dei titoli molto rischiosi che hanno grossi sbalzi di prezzo allora la straddle strategy è ottima.)

1.7.6 Pricing delle opzioni: una panoramica

In un contratto di opzione, **entrambe le parti si addossano un rischio finanziario**:

- L'investitore (dell'opzione) si addossa il pagamento del premio che potrebbe essere una perdita finanziaria se l'opzione non sarà esercitata.
- Se l'opzione è esercitata, lo scrittore incorre in una perdita per finanziare l'asset in questione ad un prezzo peggiore del prezzo di mercato al momento della consegna.

Consideriamo ad esempio un'opzione call europea su un'azione, se ad un exercise time T :

- $S_T \leq K$, l'investitore dell'opzione non lo eserciterebbe e perderebbe il premio.

- $S_T > K$, l'opzione sarebbe esercitata, e lo scrittore dovrebbe consegnare una quota dell'azione per K unità di denaro, perdendo la differenza con un prezzo reale S_T .

Per questo il problema del pricing di un'opzione è per determinare un prezzo che è ritenuta ragionevole per lo scrittore e l'investitore; dunque una quantità di denaro che il compratore dovrebbe voler pagare e il venditore dovrebbe mettere in conto e non perdere sistematicamente.

(Devo accettare un certo rischio sperando che il prezzo di mercato non distrugga la mia strategia di investimento. Queste due parti a differenza delle azioni giocano più di strategia, mentre con la vendita di azioni non è così).

Se al momento della scadenza il prezzo è minore di quando ho comprato l'opzione chi ha pagato l'opzione non la vuole esercitare, se accadesse il contrario chi detiene l'opzione sarebbe interessato a esercitarla e la perdita cade su chi ha scritto l'opzione: dovrà vendere le sue azioni ad un prezzo minore di quello di mercato).

1.7.7 Futures e Forward

Sono derivati, differendo dalle opzioni fondamentalmente in termini di **responsabilità** (*liability*) (sono dei veri e propri contratti di obbligo).

Due parti sottoscrivono **un obbligo per commerciare un asset specifico** (una parte per comprare e l'altra parte per vendere), per un prezzo specifico (il '**delivery price**') e ad una **data futura specificata** (per il contratto **forward**) o un periodo di tempo (es. un mese per il contratto **futures**).

L'asset specificato nel contratto è di solito qualsiasi materia prima (es. prodotti agricoli o materiali grezzi), valute, o bonds, ma potrebbero anche essere qualsiasi azione.

I contratti forward non sono commerciati sul mercato di scambio mentre i contratti futures sono commerciati con scambi. Per questo il prezzo di consegna dei forward sono stabiliti dalle due parti coinvolte, mentre nei contratti futures è segnalato al mercato su base regolare.

(Sul mercato non si trova la possibilità di fare un forward: vengono registrati ma non scambiati, devo però comunque comunicare il mio forward che andrà ad impattare sul mercato).

Un contratto di forward può essere usato da un investitore (il compratore) per bloccare l'acquisto futuro di qualche asset da un fornitore (il venditore) al prezzo stabilito oggi, senza pagare effettivamente l'intera somma fino alla data di scadenza sul contratto.

1.7.8 Payoff e profitto di futures e forward

Se K è il prezzo di consegna dell'asset e P_T è il prezzo dell'exercise date T , il payoff per il compratore di una unità dell'asset è $P_T - K$, mentre il payoff per il venditore su una unità dell'asset è $K - P_T$ (uno sempre ci guadagna e l'altro ci perde, a meno che il prezzo non rimanga uguale).

Siccome non ci sono commissioni per scrivere un contratto futures o forward, né un investimento iniziale, la funzione profitto per entrambe le parti è la stessa del payoff, e questo può essere positivo o negativo alla scadenza.

Come con le opzioni, un problema importante è assegnare un valore a questi contratti che dovrebbero essere considerati ragionevoli per entrambe le parti coinvolte.

Al momento in cui viene segnato uno qualsiasi di questi contratti l'ovvio valore ragionevole per entrambe le parti è 0, che significa che il prezzo di consegna è uguale al prezzo dell'asset in questione. Questo perché nessuna parte, con le informazioni correnti alla mano, si sta assumendo alcun rischio.

Ma con il tempo, mentre il prezzo di consegna rimane lo stesso, il prezzo dell'asset può cambiare producendo uno squilibrio nelle possibilità di profitti per entrambi le parti.

2 Portafoglio e investimenti collettivi

2.1 Portafoglio

- **Portafoglio**: una collezione di una o più security posseduta da un investitore o una compagnia di investimento (ci sono compagnie che si occupano di gestire gli investimenti).
- **Posizioni**: elementi di un portfolio.
- **Valore di un portfolio** (in qualsiasi dato momento): la somma dei valori delle sue posizioni in quel momento nel tempo.
- **Profitto di un portfolio** (in un qualsiasi dato momento): è la somma dei profitti data dalle sue posizioni in quel momento.

2.1.1 Gestione del portafoglio

Ogni portafoglio è disegnato e aggiornato per adattarsi agli obiettivi d'investimento e le ricompense attese dall'investitore, in continuo confronto con la sua tolleranza al rischio (se una persona è molto attiva deve avere un portafoglio costituito da strumenti che non siano 'statici', ad esempio non un portafoglio fatto di soli bond con scadenza decennale).

La gestione di un portafoglio coinvolge due operazioni di base:

- **Aprire nuove posizioni** (ovvero aggiungere posizioni) con ricompense attese migliori,
- **Chiudere posizioni**. Chiudere una posizione può significare di venderla nel mercato, o di aggiungere al portafoglio l'inverso di una posizione cosicché la performance del suo futuro valore non vada ad inficiare il valore futuro del portafoglio (si riferisce in particolare ai contratti a scadenza: ad esempio con un contratto forward vado in negativo).
Per esempio, un contratto forward per comprare un asset per un certo prezzo di consegna e una data scadenza, può essere chiuso da un altro contratto forward per vendere lo stesso asset (e la stessa quantità di esso) per la stesso prezzo di consegna e maturità.

Allocazione di asset: le dinamiche di aprire e chiudere posizioni con lo scopo di minimizzare il rischio e massimizzare i profitti.

È importante considerare profitto, incertezza e rischio. Trovo più profitto in azioni volatili, ma è anche vero che c'è più rischio. Bisogna essere capaci di prevedere il profitto ma anche l'incertezza. "L'opportunità si nasconde nel rischio."

2.1.2 Fondi comuni e ETF

Invece di gestire personalmente il tuo portafoglio, puoi mettere il tuo denaro in un **veicolo di investimento collettivo** gestito da una compagnia professionale.

Questa compagnia seleziona le security, monitora la loro performance ed esegue allocazioni per te (e altri 'investitori collettivi'). Divide poi il guadagno per tutti questi investitori.

I **fondi collettivi** sono il tipo più comune di questi strumenti di investimento collettivo. Sono:

- regolati e registrati sul mercato di scambio
- disponibili pubblicamente
- o **closed-end** (il numero di quote nel portafoglio è fissato) o
- **open-end** (nessuna restrizione sulla quantità di quote che possono essere emesse, e quindi possono entrare nel fondo investitori in qualunque momento, o uscire vendendo di nuovo le loro quote)

Un altro tipo di strumenti di investimento collettivo sono gli **Exchange-Traded Fund** (ETF): come un fondo closed-end con la caratteristica aggiunta che sono scambiati nello scambio di azioni (gli investitori possono comprare o vendere quote di un ETF)

Ci sono molti ETF costruiti con lo scopo di **tracciare un indice specifico** (ovvero un portafoglio di azioni che replicano il comportamento del prezzo dell'indice), così questo è un modo per un investitore di commerciare sull'indice.

(Non posso acquistare un certo indice ma posso acquistare l'ETF che lo segue).

2.1.3 Posizioni di trading

Posizioni lunghe e corte:

- Un investitore che possiede una security è '**lungo**' (*long*) in quella security
- Un investitore che deve il valore di una security è '**corto**' (*short*) in quella security
- Un investitore che **compra/vende** una security sta assumendo una posizione **lunga/corta** su di essa

Alcuni esempi:

- Il compratore di un'opzione call è lungo sull'opzione (lo scrittore è corto)
- Il compratore di un'azione apre una posizione lunga sull'azione
- Vendere un'azione che possiedo però non vuol dire diventare corto su quell'azione (significa solo chiudere una posizione lunga)

(Se non possiedo il valore dell'asset allora sono corto, devo essere debitore di quell'azione.)

Per avere una posizione corta su un'azione una persona deve prendere in prestito quote dell'azione da qualche broker e venderle nel mercato di scambio.

Poi successivamente uno ricompra le quote per restituirle al creditore.

Ci sarà profitto se quando uno deve restituire le quote il prezzo è minore di quello che era al tempo che le quote erano state prese in prestito e vendute nel mercato.

Questa operazione è chiamata '**short selling**' ed è altamente regolata e qualche volta proibita dai governi perché si crede contribuisca alla caduta dei prezzi di mercato.

Vendere allo scoperto ha creato diversi problemi a diversi prezzi di mercato, è una pratica rischiosa. Se non trovo chi mi vende l'azione sono costretto a comprarle ad un prezzo maggiorato e quindi ci perdo.

Regola generale:

Essere lungo in una qualsiasi security implica avere un profitto se il prezzo aumenta e una perdita se il prezzo decresce; laddove essere corto porta un profitto se il prezzo della security scende, e una perdita se aumenta.

2.2 Atteggiamenti di trading

Tre tipi di trader:

- **Hedgers** – scambiano in modo da ridurre o eliminare il rischio nel prendere una posizione su una security (hedging strategy)
- **Speculators** – prendono dei rischi di proposito scommettendo sui futuri movimenti del prezzo della security
- **Arbitrageurs** – traggono vantaggio della differenza di prezzo tra due o più mercati

2.2.1 Hedgers

Scambiano in modo da **ridurre o eliminare il rischio nel prendere una posizione** su una security.

Scopo principale: proteggere il portafoglio da perdere valore a discapito di abbassare i possibili profitti.

Una *hedging strategy* di solito implica prendere posizioni contrarie in due o più security.

Per esempio, prendere una posizione lunga su un'azione e una posizione corta su un'altra azione con un comportamento di prezzo inverso. La *hedging strategy* più semplice, e per la maggior parte degli investitori realisticamente possibile, è di comprare un ETF inverso sull'indice di mercato o industria dove i loro portafogli hanno preso la maggior parte delle loro posizioni. Per questo, una caduta (rispettivamente, crescita) del valore del portafoglio è compensato da una crescita (caduta) proporzionale dell'ETF inverso.

2.2.2 Speculators

Prendono dei rischi di proposito **scommettendo sui futuri movimenti del prezzo della security**.

Per esempio, uno speculatore compra un'azione con la convinzione che il suo prezzo crescerà.

2.2.3 Arbitrageurs

Traders che **traggono vantaggio della differenza di prezzo tra due o più mercati**.

Cercano per uno sbilanciamento nel pricing di una security in due mercati diversi, e lo comprano al minor prezzo in un mercato per venderlo immediatamente ad un prezzo più alto nell'altro mercato, ricavando un profitto sulla differenza (ovvero 'arbitrage').

Per esempio, supponiamo che il tasso di cambio di EUR/USD a Francoforte sia \$1.25, mentre a New York sia \$1.3 in qualche momento; allora, l'euro è sottovalutato a Francoforte e sopravvalutato a New York. Un *arbitrageur* sfrutterebbe questo squilibrio scambiando dollari con euro a Francoforte e scambiando immediatamente gli euro con dollari a New York.

Nella vita reale ci sono **costi di transazione** che probabilmente ridurrebbero considerevolmente il profitto, ma inoltre, è naturale credere che questa opportunità di profitto dalle diverse valutazioni sui tassi di cambio EUR/USD attirerebbe l'attenzione di più di un investitore, e una volta che pochi di questi investitori allertati agiscono su questa possibilità di profitto facile il tasso di cambio EUR/USD sarà uguale in entrambi i lati dell'Atlantico, terminando così la possibilità di arbitraggio.

Infatti, per lo stesso motivo che ci saranno sempre investitori pronti ad agire su questo o ogni altra opportunità di arbitraggio, e che facendo così l'occasione di fare profitto da esso sarà immediatamente diluita, **dobbiamo ammettere che la possibilità di arbitraggio è in pratica inesistente, com'è convinzione comune**.

Questo presupposto dell'impossibilità delle opportunità di arbitraggio (o nessun arbitraggio) è la base di molte discussioni sul valutare i derivati.

2.3 Bulls & Bears

Quando il trend di mercato è crescente, come riflesso da un indice della maggioranza delle sue azioni composte, è detto essere '**bullish**', o che attaccano i tori.

Al contrario, se il trend mercato è decrescente allora è '**bearish**' o che attaccano gli orsi.

Quindi, i **tori** (*bulls*) sono quegli investitori che prendono posizioni lunghe sulle azioni i cui prezzi stanno salendo, mentre gli **orsi** (*bears*) sono gli investitori che sono corti sulle azioni i cui prezzi stanno scendendo.



2.3.1 Un primo principio di trading

“Quando il mercato è ‘bullish’ si dovrebbe assumere posizioni lunghe, e quando è ‘bearish’ si dovrebbe assumere posizioni corte”.

O, nel dubbio, essere sia corti che lunghi, che è una forma di *hedging*.

2.3.2 Il mercato è *bullish* o *bearish*?

Determinare se il mercato è in rialzo (*bullish*) o ribassista (*bearish*), che si riduce a determinare la pendenza attesa del trend e la sua sostenibilità nel tempo, comporta molto giudizio soggettivo.

Ecco cosa pensa il gruppo Vanguard di come un segnale di mercato *bearish* dovrebbe essere:

Mentre non c'è nessuna definizione di un mercato ribassista, una misura generalmente accettata è un calo dei prezzi del 20% o più per almeno un periodo di due mesi.

2.4 Market timing o buy-and-hold

La maggior parte degli investitori segue di solito un'**attitudine passiva**, che consiste nel comprare varie security e mantenerle nel portafoglio per molto tempo (cioè **buy-and-hold**).

La motivazione di base è la tendenza osservata di quasi tutte le security di incrementare il loro valore se è dato loro tempo sufficiente per maturare.

Dall'altro lato, mentre aspettare pazientemente per i suoi investimenti per raggiungere il tasso di profitto desiderato, un investitore sicuramente osserverà come il prezzo oscillerà nel tempo, e **può chiedersi se i ritorni sarebbero maggiori (e ottenuti più rapidamente) vendendo ai massimi e riacquistando ai minimi.**

Ci sono molti rapporti empirici che sostengono l'aumento dei profitti derivanti dall'applicare tempestivamente la sequenza di entrate e uscite nell'azionariato (*shareholding*) delle azioni; a patto, ovviamente, che i tempi di negoziazione siano scelti correttamente.

2.4.1 Strategie di “timing”

Esistono vari metodi per escogitare **market timing strategies**, che includono usare **modelli per prevedere i ritorni**, analisi di **proprietà strutturali dei prezzi e dei fondamentali dell'economia di business**, e altri.

Qualunque sia la *market timing strategy*, uno dovrebbe aspettarsi che almeno dovrebbe battere il risultato ottenuto senza fare scambio intermedio tra il primo acquisto e l'ultima vendita. **Il test generalmente accettato è di confrontare i risultati di una timing strategy con una buy-and-hold strategy.**

3 Modello di flusso di cassa attualizzato (*Discounted Cash Flow Model*) e ipotesi efficiente di mercato

3.1 DCF

3.1.1 Prezzo vs valore dell'azione

Oggi è diventato semplice e veloce comprare azioni che il senso di società in un business, intrinseco in essere un azionista (*shareholder*), è quasi perso tra gli investitori e rimpiazzato dal brivido di partecipare in guadagni improvvisi o perdite registrate nella tabella delle quote e nulla di più.

La compagnia dietro l'azione non è considerata così come le figure quotate sul mercato, quando si arriva a comprare, o vendere, da molti investitori.

Per questo, il prezzo di un'azione spesso non riflette il valore del suo business ed è completamente determinato da quanto le persone sono disposte a pagare per questa.

Il prezzo di un'azione è determinato dalle forze di domanda e offerta dagli investitori.

(A prescindere da quanto sia sana l'attività di un'azienda, se molti vogliono comprare quel titolo liquido e il prezzo oscilla. I prodotti non c'entrano nulla)

3.1.2 Modello di flusso di cassa attualizzato

(La qualità di un'azienda viene invece catturata dai dividendi, che sono di fatto gli utili. Se l'azienda ha un business virtuoso, l'azienda avrà alti fatturati e gli utili verranno restituiti in denaro agli investitori. I *preferred* hanno la priorità ma comunque a tutti viene fornito il dividendo. C'è quindi la possibilità di investire tenendo conto della solidità e robustezza di un'azienda: non mi faccio influenzare dall'andamento del prezzo sul mercato ma scommetto sul valore dell'azienda. Questo è un altro modo di pensare all'investimento)

Per un investitore il valore di un'azione dipende dai **possibili guadagni futuri** del capitale che può essere fatta investendo in essa.

I guadagni futuri arrivano dai **dividendi attesi per quota** e **l'apprezzamento per il prezzo atteso per quota**.

Poi per avere una stima del **valore presente** (*present value*) S_0 di una quota di un'azione, diciamo 1 anno dopo, tenendo conto di queste fonti di plusvalenza (*capital gain*), il modello più comune e semplice è quello di stimare il payoff futuro atteso (prezzo futuro più dividendo) e ignorando costi di transazione e considerando un tasso di attualizzazione (*discount rate*) costante r all'anno, attualizzando questo flusso di cassa rispetto al presente per ottenere:

$$S_0 = \frac{D_1 + S_1}{1 + r}$$

Dove D_1 e S_1 sono i dividendi attesi e il prezzo atteso per quota dopo un anno. (Considero che ci sarà una forma di deprezzamento del valore. D_1 è il dividendo, S_1 è il prezzo alla fine dell'anno 1. Altrimenti se compro un'azione al tempo T_0 al prezzo S_0 , dopo 1 anno il payoff sarà semplicemente $D_1 + S_1$, invece non è così.)

L'anno successivo il prezzo può essere previsto anche applicando la stessa formula di attualizzazione (*discount*) a S_1 , ottenendo:

$$S_0 = \frac{D_1}{1 + r} + \frac{D_2}{(1 + r)^2} + \frac{S_2}{(1 + r)^2}$$

che determina il valore presente dell'azione in termini di dividendi attesi annualmente, per i prossimi 2 anni, e il prezzo aspettato alla fine del secondo anno, tutto attualizzato ad un tasso costante.

(Nella formula di S_0 sostituisco a S_1 la formula di S_0 ma calcolandola in S_1 , quindi inserisco $S_1 = \frac{D_2 + S_2}{1 + r}$ al posto di S_1 nella prima formula.)

Ripetendo per un numero arbitrario T di anni si ricava la formula generale:

$$S_0 = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1 + r)^t} + \frac{S_T}{(1 + r)^T}$$

dove D_t è il dividendo atteso per l'anno $t = 1, \dots, T$, e S_T è il prezzo atteso alla fine dell'orizzonte di investimento.

Si dovrebbe pensare che i prezzi non potrebbero crescere per sempre mentre il tasso di attualizzazione continua ad accumulare; quindi è ragionevole assumere che **il prezzo attualizzato futuro atteso tende a 0** quando l'orizzonte di investimento T va ad infinito.

$$S_0 = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1 + r)^t} + \frac{S_T}{(1 + r)^T}$$

(Se un'azienda è veramente solida non importa quale sarà il prezzo futuro, e ci si può accontentare dei dividendi. Più ritengo un'azienda solida e in crescita, più posso fare affidamento sugli utili e sui dividendi. È molto più facile prevedere gli utili e i dividendi rispetto al futuro prezzo sul mercato.)

Questa è conosciuta come formula del *discounted cash flow* (DCF) per il valore presente di un'azione, che rappresenta il prezzo attuale di un flusso infinito di dividendi di cassa attesi.

$$S_0 = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1+r)^t}$$

3.1.3 DCF e previsioni

Per fare stime con DCF (o con la somma parziale) dovremmo prima rendere precisa la natura del tasso di attualizzazione r .

In principio, potrebbe essere preso il tasso di interesse risk-free di un bond di alto grado, ma sarebbe una sottostima e non riflette l'accettazione del rischio dell'investitore.

Consideriamo invece risolvere r da $S_0 = \frac{D_1 + S_1}{1+r}$, quindi $r = \frac{D_1 + S_1}{S_0} - 1$

Questo dice che r è il ritorno atteso per l'azione, o potrebbe anche essere il ritorno atteso di qualsiasi altro asset con un rischio simile a quello che stiamo analizzando.

Questo modo di calcolare r è conosciuto come **tasso di capitalizzazione di mercato** (*market capitalization rate*) o **costo del capitale proprio** (*cost of equity capital*), ed è un'interpretazione più accurata per il tasso di attualizzazione r .

(r non sarà il valore reale: D_1 lo prevedo, S_1 lo prevedo. È basato su previsioni ma dovrebbe sottostimare di meno il vero r che si materializzerà dopo un anno.

r è quasi come il tasso di interesse dei bond.)

Per questo, con una stima dei futuri guadagni alla mano, conoscendo il costo del capitale proprio, possiamo calcolare il valore presente dell'azione; o conoscendo il valore presente (intrinseco) dell'azione possiamo calcolare il suo ritorno atteso.

La **modellazione dei ritorni attesi** (*modeling of expected returns*) e la **previsione di prezzo** (*forecasting of price*) non sono argomenti semplici, e sono soggetti di un ampio corpora di articoli di ricerca.

(Sono pur sempre previsioni che non tengono conto di eventi imprevedibili.)

3.2 Arbitraggio

Un presupposto economico fondamentale alla base di molti modelli matematici del prezzo è che non è possibile realizzare un profitto senza il rischio di perdere soldi, che non è possibile ottenere qualcosa dal nulla.

Milton Freedman:

"Non esiste una cosa come un pranzo gratis"

(No Free Lunch Theorem)

Questa ipotesi è formalmente riassunta come il principio di non arbitraggio (*principle of no arbitrage*):

Principio di Non Arbitraggio: non ci sono opportunità di arbitraggio.

Il 'principio di non arbitraggio' è solitamente accompagnato da altre ipotesi leggere chiamate semplicemente **extended no arbitrage**.

Definizione 'Extended no arbitrage'

L'*Extended no arbitrage* è il seguente elenco di ipotesi sul mercato dei titoli (security):

- L'arbitraggio non è possibile
- Non ci sono costi di transazione, tasse e restrizioni sulle vendite allo scoperto (*short selling*)
- È possibile prendere in prestito e prestare a tassi di interesse privi di rischio (*risk-free*) uguali
- Tutti i titoli (security) sono perfettamente divisibili

3.2.1 Conseguenze del non arbitraggio

Proposizione 1.1 Supponendo che non ci sia arbitraggio esteso, due portafogli con ugual valore all'istante T devono avere lo stesso valore $t \leq T$ sempre

Proposizione 1.2 Supponendo che non ci sia arbitraggio esteso, se A e B sono due portafogli con $v(A, T) \geq v(B, T)$ allora, per ogni tempo $t \leq T$, $v(A, t) \geq v(B, t)$

La Proposizione 1.1 – in particolare – offre una tecnica chiamata "replicazione del portafoglio" (*replicating portfolio*) utilizzato per il prezzo di un derivato, come opzioni e contratti a termine (*forward contracts*).

3.3 Pricing delle opzioni

3.3.1 Risk-neutral valuation

Un modo molto semplice per valutare un'opzione può essere derivato dal presupposto che gli investitori sono indifferenti al rischio: la **neutralità al rischio** (*risk-neutrality*) è un'ipotesi forte ma funziona per fare una buona valutazione.

In un mondo neutrale al rischio, tutti i titoli dovrebbero comportarsi come un'obbligazione. Perciò, da un lato, il tasso di profitto che gli investitori possono aspettarsi da un'azione dovrebbe essere uguale al tasso privo di rischio, poiché non si preoccupano del rischio.

D'altra parte, il valore attuale di un derivato può essere ottenuto calcolando il suo valore futuro atteso e attualizzandolo al presente al tasso privo di rischio:

$$S_T + D_T - C(S_0)e^{rT}$$

3.3.2 Un esempio

Volevamo scrivere un'opzione call sull'azione XYZ, con scadenza a 6 mesi e prezzo di esercizio $K = 115\text{€}$.

Assumiamo che il prezzo corrente del titolo sia uguale a K . Il tasso di interesse privo di rischio per la vita della call è $r = 0,015$, e si assume che entro la fine del periodo il prezzo del titolo possa salire del 30% o calare del 20%. Con queste informazioni, e supponendo che gli investitori siano neutrali al rischio, possiamo calcolare la probabilità p che il titolo salga, poiché il tasso di profitto atteso può essere stimato come la somma di tutte le probabilità dei risultati ponderate con le loro aspettative, e tutto questo si assume pari a r .

Abbiamo, Tasso di beneficio atteso = $(p \times 0,3) + (1 - p) \times (-0,2) = 0,015 \rightarrow$
Questo dà $p = 0,43$

D'altra parte, il payoff dell'opzione è $C_u = 34,5$ (se l'azione sale), o $C_d = 0$ (se l'azione scende)

Quindi il valore futuro atteso dell'opzione (EC) è la somma di questi possibili valori pesati dalla loro probabilità di verificarsi

$$EC = (p \times C_u) + (1 - p) \times C_d = 0,43 \times 34,5 + 0,57 \times 0 = 14,84$$

Il valore attuale C della chiamata è $C = EC / (1+r) = 14,84 / 1,015 = 14,62\text{€}$

(Prezzo sulla base delle mie stime, l'altro potrebbe avere stime completamente diverse. Se avessimo lo stesso livello di percezione avremmo stime uguali. Esiste un set di informazioni storiche, tutti hanno una percezione del futuro e tutti si assumono più o meno rischi.)

3.4 Ipotesi di mercato efficiente – EMH (Efficient Market Hypothesis)

Un paradigma più generale per l'equilibrio di mercato nasce dall'assunzione che i mercati sono '**informationally efficient**':

L'informazione disponibile al momento di fare un investimento è già riflessa nei prezzi delle security, e di conseguenza i partecipanti del mercato non possono approfittare di questa informazione per trarre profitto sui ritorni medi del mercato.

(A tutti gli investitori è data la stessa quantità di informazione: tutti scommettono nello stesso ambiente, scommettono su futuri diversi ma partono tutti dalle stesse informazioni (nella finanza moderna questo non è però vero).

Molti dei meccanismi di *market abuse detection* vengono fatti sulla base di questa assunzione. Se qualcuno fa dei grandi profitti rispetto agli altri investitori medi si capisce che qualcosa non va. Se qualcuno è a conoscenza di informazioni ancora non diffuse sul mercato (acquisizioni, vendite, fallimenti...) si parla di '*insider trading*' (oggi è reato). Ad esempio, se qualcuno è a conoscenza di una bancarotta inizierà a vendere le azioni prima degli altri.

Il mercato tende però ad un certo equilibrio: se qualcuno vende le azioni allora iniziano a svalutarsi, il mercato diventa *bearish* ('momento' di mercato). Una volta era una strategia di mercato, qualcuno iniziava a vendere molte azioni in modo che molti avessero paura e vendessero anch'essi. Il mercato oggi interrompe il titolo.

Oggi ci sono strumenti di detection per possibili abusi di mercato, bisogna riconoscere queste anomalie.)

3.4.1 Testare l'EMH

C'è un grande numero di articoli di ricerca rivolti a testare l'EMH.

La metodologia generale in questione consiste in un processo in due parti:

1. Primo, il design di una strategia di trading basata su uno specifico insieme di informazioni
2. Secondo, per misurare l'eccessivo ritorno sui ritorni medi ottenuti dalla strategia di trading

(Se dato un set particolare di informazioni la strategia di trading ha un eccesso di ritorni, probabilmente il mercato non è efficiente.)

Per la prima parte dobbiamo specificare l'insieme di informazioni, e a questo proposito le forme generali accettate di efficienza sono:

- **Debole** (*weak*): solo la cronologia del prezzo delle security costituisce l'informazione disponibile
- **Semi-forte** (*semi-strong*): tutta l'informazione pubblica conosciuta fino ad ora è disponibile (ci sono anche informazioni pubbliche a pagamento, come il *Limit Order Book*: *public* non coincide con *free*)
- **Forte** (*strong*): tutta l'informazione pubblica e privata (cioè tutta l'informazione possibile) conosciuta fino ad ora è disponibile

Le strategie di trading basate sull'Analisi Tecnica (*Technical Analysis*, perlopiù per gli speculatori sul mercato che fanno compravendita intraday) sono test per l'EMH debole, poiché il loro paradigma di base è fare affidamento esclusivamente sulla storia passata del prezzo, mentre quelle strategie basate sull'Analisi Fondamentale (*Fundamental Analysis*, per chi fa DCF) sono test per l'EMH semi-forte (LOB, bilanci tutti pubblicamente disponibili, a pagamento a discrezione dell'azienda).

3.4.2 EMH forte

Mentre per la forma forte dell'EMH, ci sono molte discussioni per la sua impossibilità nella pratica.

Per esempio, Grossman e Stiglitz (1980) hanno sviluppato un modello di *noisy rational expectations* che include una variabile che riflette il costo per ottenere informazioni, oltre al prezzo osservabile.

Poi hanno dimostrato che, in un mercato competitivo, i commercianti informati (quelli che pagano il costo per l'informazione) hanno un vantaggio rispetto ai commercianti non informati (quelli che osservano solo i prezzi), poiché i prezzi non possono riflettere tutte le informazioni possibili.

Quindi, mentre il loro modello supporta l'EMH debole, non supporta la forma forte dell'EMH.

(Nonostante ci sia un costo, gli investitori hanno avuto consistenti ritorni rispetto agli altri: l'informazione quindi paga.)

3.4.3 EMH e complessità computazionale

Una concezione recentemente sviluppata dell'efficienza del mercato in termini di complessità computazionale potrebbe spiegare meglio l'inefficienza sperimentata dei mercati da parte di alcuni trader finanziari, che hanno fatto profitti con le proprie strategie e modelli.

Dal punto di vista della complessità computazionale, un mercato è definito efficiente rispetto a R risorse computazionali (ad esempio tempo o memoria), se nessuna strategia che utilizza le risorse R può generare un profitto sostanziale.

Questa definizione consente ai mercati di essere efficienti per alcuni investitori ma non per altri.

Coloro che hanno a disposizione potenti strumenti di calcolo (che siano macchine o programmatori umani esperti) dovrebbero avere un vantaggio su coloro che non li hanno.

Si noti che questa definizione è nello stesso spirito dei modelli di *noise rational expectation* menzionati sopra, ma la relativizzazione dell'efficienza non è ad un costo monetario ma piuttosto ad un costo computazionale.

Michael Lewis, nel suo libro Flash Boys, dice che i trader ad alta frequenza sono disposti ad andare a lunghezze straordinarie per guadagnare questo vantaggio di velocità – compreso porre il più corto, e quindi più dritto, possibile cavo di fibra ottica tra la borsa di Chicago e la borsa di New York con sede nel New Jersey, a distanza di 827 miglia.

(Le risorse computazionali da quando i mercati sono diventati digitalizzati, hanno creato delle inefficienze di mercato: alcuni possono avvantaggiarsi rispetto agli altri.

Oggigiorni i mercati di scambio vendono un servizio particolare chiamato "co-location": dove ci sono i server fisici della Borsa, forniscono delle altre sale dove mettere i server dei broker e degli investitori in modo tale che siano il più vicino possibile ai server di mercato; in questo modo possono piazzare gli ordini il più velocemente possibile. Questo crea un'inefficienza di mercato: tutti coloro che sono fuori dallo spazio di co-location non hanno questo vantaggio, quelli invece che pagano per avere la co-location devono avere tutti lo stesso vantaggio informativo (i cavi devono essere tutti uguali, eventualmente girano intorno al server pur di avere la stessa lunghezza di cavo).

Da "pagare per avere l'informazione" a "pagare per avere la vicinanza al server".)

4 Ingegneria del mercato finanziario

4.1 Mercati elettronici e *Limit Order Book*

4.1.1 Trading nei mercati elettronici

Gli ordini sono gestiti da un **matching engine** e da un **limit order book (LOB)**. Il LOB tiene traccia degli ordini in entrata e in uscita.

Il matching engine utilizza un algoritmo ben definito che stabilisce quando può verificarsi uno scambio possibile e, in caso affermativo, quale criterio verrà utilizzato per selezionare gli ordini che saranno eseguiti.

(LOB è la struttura dati, Matching Engine è l'algoritmo – gira in modo continuo dalle 9 alle 17 e continua a matchare ordini di acquisto e di vendita. Quando trova qualcuno che vuole vendere ciò che qualcuno vuole acquistare, la domanda incontra l'offerta.

Struttura molto complessa. Le differenti regole sui mercati impongono dinamiche diverse.)

4.1.2 LOB e *spread*

Il LOB è definito su una griglia fissa discreta di prezzi (i livelli di prezzo).

La dimensione della tacca (la differenza tra un livello di prezzo e il successivo) è chiamato **tick**, e negli Stati Uniti la dimensione minima del tick è di 1 cent per tutti i titoli con a prezzo superiore a un dollaro.

In altri mercati coesistono diverse dimensioni di tick. Ad esempio, nella Parigi Bourse o Bolsa de Madrid, le dimensioni dei tick possono variare da 0,001 a 0,05 euro a seconda del prezzo a cui viene scambiato il titolo.

La differenza tra il prezzo ask e il prezzo bid, il **quoted spread** è

$$\text{Quoted Spread}_t = P_t^a - P_t^b$$

Dove P_t^a e P_t^b sono rispettivamente i prezzi bid e ask migliori.

(Ask è chi vuole vendere – vendita, bid quanto si è disposti a pagare per acquistare i titoli – acquisto.)

4.1.3 LOB e *midprice*

A volte il bid è uguale all'ask e lo spread è zero.

In questo caso il mercato si blocca (**locked market**), ma se questo accade tende a non durare a lungo - anche se per alcuni asset molto liquidi sta diventando sempre più evento più frequente.

Un altro oggetto comune utilizzato per descrivere il LOB è il prezzo medio (**midprice**): la media aritmetica tra bid e ask.

Il prezzo medio viene spesso utilizzato come **proxy per il vero prezzo sottostante dell'asset** – il prezzo per l'asset se non vi fossero costi di trading espliciti o impliciti (e quindi nessuno spread).

(Spread alto se tutti vogliono vendere a prezzi molto alti e vogliono comprare a prezzi molto bassi.

I titoli che non sono liquidi hanno un quoted spread molto alto. Il prezzo quindi non cambia mai perché domanda e offerta non si incontrano mai.

Quando lo spread è 0 significa che il mercato è locked (non dura per molto tempo). Per i titoli liquidi accade spesso. Non dura molto tempo perché i prezzi sulle frontiere collassano.
Assumiamo sempre non ci siano trading cost (costi di transazione.).

4.1.4 LOB

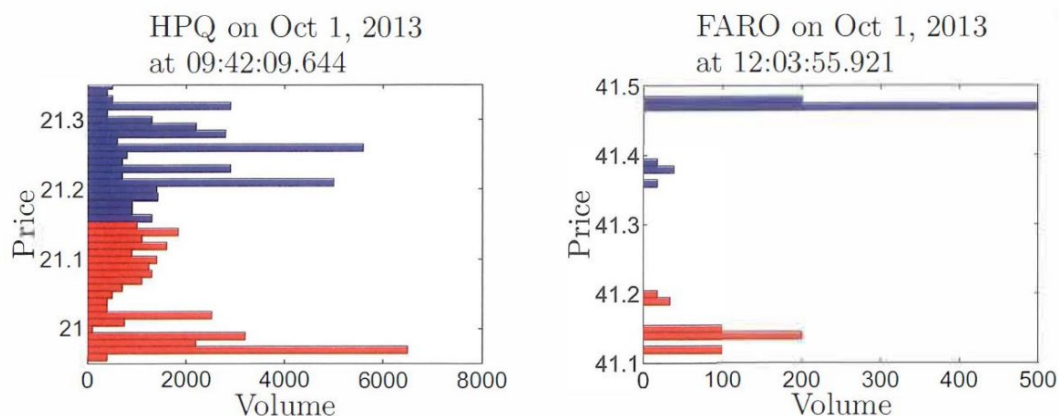


Figure 1.1 Snapshots of the NASDAQ LOB after the 10,000th event of the day. Blue bars represent the available sell LOs, red bars represent the available buy LOs.

A sinistra: LOB di HPQ, un asset spesso scambiato e liquido.

Il LOB di HPQ ha i LO pubblicati ad ogni tick fino a (almeno) 20 tick dal midprice.

A destra: LOB DI FARO.

FARO è un asset illiquido e raramente scambiato. Questo asset ha scarsamente pubblicate bid e offerte e lacune irregolari nel LOB.

4.1.5 Trading nei mercati elettronici

La maggior parte dei mercati dà la priorità agli **MO (market order)** rispetto ai **LO (limit order)** e quindi utilizza una **priorità prezzo-tempo (price-time priority)** per cui, se arriva un MO per acquistare, l'ordine di acquisto verrà abbinato nel seguente modo con gli LO per vendere presenti:

- In primo luogo, l'ordine in entrata sarà abbinato ai LO che offrono il miglior prezzo (per gli ordini di acquisto, i LO di vendita con il prezzo più basso);
- Quindi, se la quantità domandata è inferiore a quella offerta al miglior prezzo, l'algoritmo di matching seleziona il più vecchio LO, quelli che sono stati registrati per primi, e li esegue in ordine fino a quando la quantità del MO non viene eseguita completamente.

Se il MO richiede una quantità maggiore di quella offerta al miglior prezzo, dopo l'esecuzione di tutti i LO presenti al miglior prezzo, l'algoritmo di matching procederà eseguendolo rispetto ai LO al secondo miglior prezzo, poi al terzo e così via fino a quando l'intero ordine viene eseguito.

I LO che hanno prezzi sempre peggiori sono denominati LO che sono più profondi nel LOB, e il processo mediante il quale un ordine di mercato in

entrata viene eseguito rispetto ai LO presenti più in profondità del LOB si chiama **'walking the book'**.

4.1.6 Il Limit Order Book

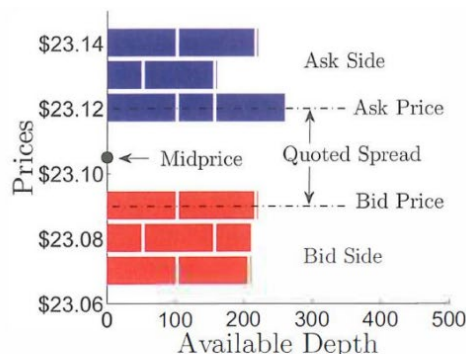
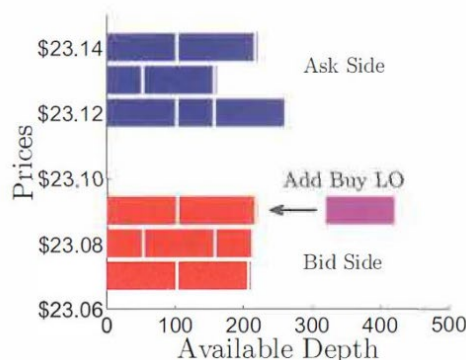
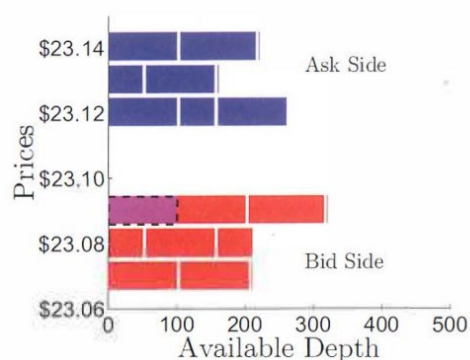


Figure 1.2 LOB illustration of a buy LO added to the queue at the best bid.



⇒



Aggiunta di un LO al LOB. Come menzionato sopra, gli scambi elettronici sono, nella loro forma più elementare, descritto da un LOB e da un algoritmo di matching.

Come funziona la priorità prezzo-tempo: si unisce al LOB un LO in entrata al prezzo dell'ordine e viene piazzato per ultimo nella coda di esecuzione a quel prezzo.

Nella figura, i LO sono visualizzati come blocchi di lunghezza pari alle loro quantità.

I LO sono ordinati in termini di priorità temporale da destra a sinistra, in modo che quando arriva un nuovo LO di acquisto a \$23.09 (il blocco viola) verrà aggiunto alla linea di blocchi già a posizionati a quel prezzo.

Questo nuovo LO si unisce alla coda nel punto più vicino all'asse y, diventando il terzo LO in attesa di essere eseguito a \$ 23,09.

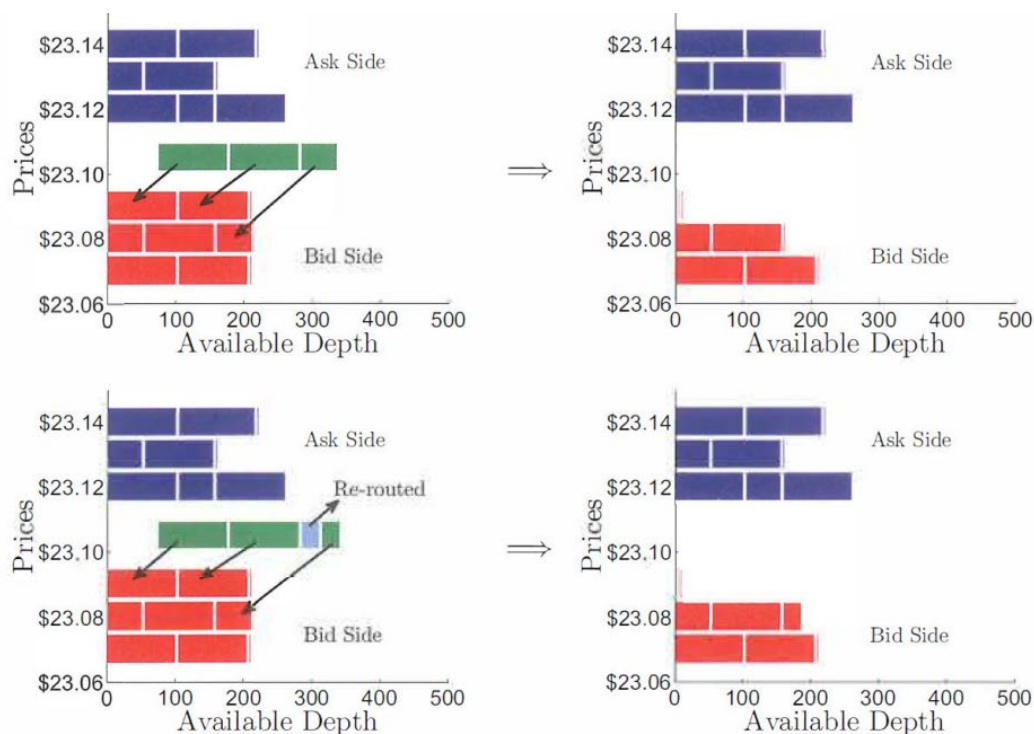


Figure 1.3 LOB illustration of a sell MO walking the LOB with and without

Il MO percorre (walks) il LOB o viene reindirizzato (**re-routed**).

Supponiamo di guardare la sede (venue) con il LOB raffigurato nella parte superiore della prima figura.

Assumiamo che la migliore offerta di questa sede sia la migliore quotazione di acquisto che il mercato, in tutte le sedi, mostra attualmente.

Un nuovo MO (da vendere) 250 azioni entra in questo mercato come rappresentato dalla somma dei blocchi verdi nella parte superiore della seconda figura.

Il *matching engine* passa attraverso il LOB, abbinando i LO esistenti (pubblicati) (per acquistare sul lato bid) con il MO entrante seguendo le regole nell'algoritmo di matching.

Nella LOB sono presenti due LO alla migliore offerta di \$23.09, rappresentati dai due blocchi rossi, entrambi da 100 unità, per un totale di 200 unità. Queste 200 unità vengono eseguite alla migliore offerta.

Quello che succede alle ultime 50 unità dipende dal tipo di ordine e il mercato in cui opera.

In un mercato standard, le restanti 50 unità saranno eseguite rispetto ai LO che ammontano a \$23.08 ordinati in termini di priorità temporale (il MO "camminerà sul libro").

Questo è rappresentato dalla parte superiore della figura: il pannello di sinistra mostra che il MO in entrata è diviso in tre blocchi, i primi due sono abbinati ai LO a 23,09 dollari e l'ultimo con i LO a \$ 23,08.

Dopo che il MO è stato eseguito completamente, il LOB rimanente è mostrato nel pannello in alto a destra della figura.

(A volte accade che io non compra le azioni al prezzo che vedo ad esempio su Yahoo Finance (midprice), il prezzo vero a cui ho venduto è la

moltiplicazione di prezzi e volumi delle azioni che ho comprato (ho finito quelle sulla riga)

Chi vede il LOB ha un vantaggio perché sa che il suo MO non verrà venduto/comprato al prezzo che si vede (spread molto alto).

I LO rappresentano la 'parte statica' di questo sistema. La parte dinamica è rappresentata dai MO. Ogni volta che il prezzo cambia è perché è arrivato un MO e ha consumato un livello dei LO. Può cambiare anche quando arriva un LO che si ferma nel LOB.)

Negli Stati Uniti, esistono **regole di protezione degli ordini** (*order protection rules*) per garantire che i MO ottengano la miglior esecuzione possibile, e che (a seconda del tipo di ordine) possono richiedere alla borsa di reindirizzare le restanti 50 unità a un'altra borsa che mostra allo stesso modo il miglior prezzo di offerta di \$23.09.

Come mostrato in basso a sinistra della figura, parte delle restanti 50 unità (il blocco azzurro) viene reindirizzato a un'altra sede con liquidità registrata a \$23,09. Solo una volta che tutta la liquidità a \$ 23,09 in tutti gli scambi è esaurita, le restanti azioni del MO possono ritornare ed essere eseguito in questa sede rispetto qualsiasi LO che si trova a (il prezzo peggiore di) \$23,08. In questo esempio, 25 unità sono state reindirizzate a scambi alternativi e 25 unità sono tornate in questa sede e "hanno camminato" sul libro.

Il MO potrebbe essere un **Immediate-or-Cancel order (IOC)**, specificando che le restanti 50 le azioni che non possono essere eseguite alla migliore offerta dovrebbero essere annullate completamente.

A causa di queste regole di protezione dell'ordine (regole di scambio - non esiste tale regola in mercati europei), si osserverà molto raramente negli Stati Uniti un MO che "cammina" direttamente sul libro. Piuttosto, si potrebbe vedere un MO grande che viene tagliato ed eseguito sequenzialmente in diversi mercati in un brevissimo lasso di tempo. Ciò implica anche che, non appena la profondità scompare, un MO alla fine di una sequenza di altri ordini può essere eseguito rispetto a prezzi molto bassi e, nelle peggiori circostanze, può essere abbinato a quotazioni 'stub' - LO a prezzi così ridicoli che indicano chiaramente che non dovrebbero essere eseguiti. Pertanto, il LOB serve per tenere traccia dei LO e applicare l'algoritmo che abbina gli ordini in entrata ai LO esistenti.

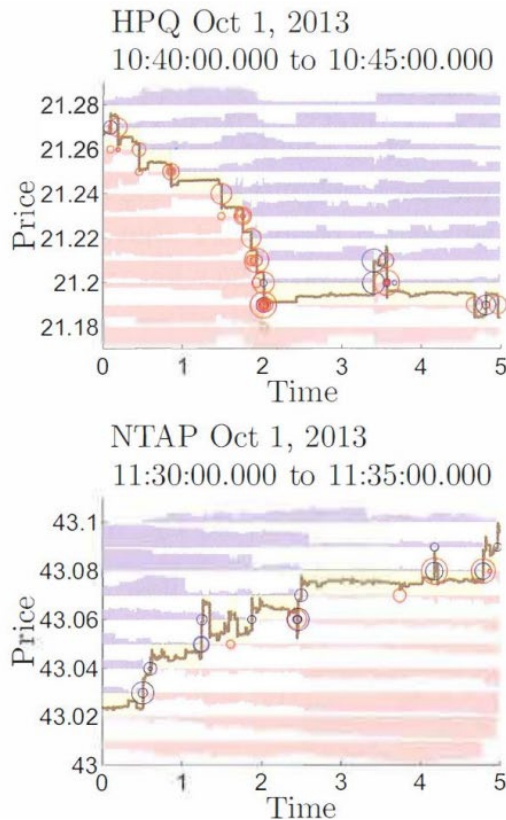


Figure 1.4 Time series of the changes in the LOB for the three assets HPQ, NTAP, and ORCL.

Nella figura si può vedere come si evolve il LOB nel tempo (oltre 5 minuti) per tre differenti azioni (cioè HPQ, NTAP e ORCL).

Sull'asse x c'è il tempo in minuti e sull'asse y ci sono i prezzi in dollari.

Le regioni blu in alto rappresentano il lato della domanda del LOB, il volume di vendita pubblicato, mentre il lato dell'offerta è sotto in rosso, che mostra il volume di acquisto pubblicato.

I migliori prezzi, bid e ask sono identificati dai bordi della regione intermedia ombreggiata beige chiaro, che identifica lo spread bid-ask.

Il volume ad ogni livello di prezzo è illustrato dalla dimensione della regione ombreggiata appena sopra/sotto ogni prezzo livello, anche se l'altezza di queste regioni non è più lineare, ma una trasformazione monotona non lineare visivamente più illustrativa.

Inoltre, la figura identifica quando gli ordini in arrivo sono stati eseguiti.

I cerchi rosso/blu indicano l'ora, il prezzo e la dimensione (indicata dalla dimensione del cerchio) di un MO aggressivo che viene eseguito rispetto ai LO che siedono nella LOB.

Quando un MO di vendita viene eseguito contro un LO di acquisto, si dice che abbatte (*hit*) l'offerta; analogamente, quando un MO di acquisto viene eseguito contro a vendo LO, si dice che alza (*lift*) l'offerta.

La linea continua marrone rappresenta una variazione dell'asset noto come microprezzo definito:

$$\text{Microprice}_t = \frac{V_t^b}{V_t^b + V_t^a} P_t^a + \frac{V_t^a}{V_t^b + V_t^a} P_t^b,$$

dove V_t^a e V_t^b sono i volumi pubblicati alla migliore domanda e offerta, e P_t^a e P_t^b sono i prezzi domanda e offerta.

4.1.7 LOB e microprezzo

Il **microprezzo** (*microprice*) viene utilizzato come proxy più minuziosa per il prezzo a costo zero di transazione dell'asset, poiché misura la tendenza che il prezzo ha di muoversi verso l'offerta o la domanda come rappresentato dal numero di azioni pubblicate, e quindi indica la pressione di acquisto (vendita) nel mercato.

Se ci sono molti acquirenti (venditori), allora il microprezzo viene spinto verso il miglior prezzo ask/bid per riflettere la probabilità che i prezzi aumenteranno (diminuiranno).

4.1.8 Tipi di ordine estesi

Il ruolo del tempo è fondamentale nel consueto scambio elettronico con priorità prezzo-tempo.

I trader devono essere in grado di **modificare rapidamente le loro posizioni di trading in risposta o in previsione dei cambiamenti** nelle circostanze del mercato, non solo nella borsa locale ma anche in altri mercati. La corsa per essere i primi dentro o fuori da una certa posizione è uno dei punti focali del dibattito sui benefici e i costi del 'trading ad alta frequenza' (*high-frequency trading*).

L'importanza della velocità permea l'intero processo di progettazione di algoritmi di trading, dal codice vero e proprio, alla scelta del linguaggio di programmazione, all'hardware in cui è implementato, alle caratteristiche della connessione al *matching engine* e al modo in cui gli ordini sono instradati all'interno di una borsa e tra le borse.

Le borse, consapevoli dell'importanza della velocità, si sono adattati e, tra le altre cose, si sono spostati ben oltre i due tipi fondamentali di ordini (MO e LO).

Qualsiasi trader dovrebbe essere molto ben informato riguardo a **tutti i diversi tipi di ordini disponibili sulle borse** (*exchanges*), cosa sono e come possono essere utilizzati.

4.1.9 Alcuni tipi di ordini

- **Day Orders:** ordini per il trading durante il trading regolare con opzioni da estendere alle sessioni pre- o post-mercato
- **Non-routable:** ci sono una serie di ordini che per scelta o design evitano il reindirizzamento predefinito ad alte borse, come 'book only', 'post only', 'midpoint peg', ... ;
- **Pegged, Hide-not-Slide:** ordini che si muovono con il midpoint o il miglior prezzo nazionale (ordini che non hanno un prezzo fisso, si spostano sul Book a seconda di come cambia il midpoint o il prezzo nazionale: sono ordini per tenere una certa pressione su un lato del Book: sono intenzionati a mantenere la pressione non a fare l'ordine vero e proprio);

- **Hidden:** ordini che non mostrano la loro quantità (impattano sul calcolo del microprice, non so qual è il volume di quel limit);
- **Iceberg:** ordini che mostrano parzialmente la loro quantità (alcuni hanno opzioni in modo che la porzione visibile verrà automaticamente riempita quando sarà esaurita da meno di un lotto pieno);
- **Immediate-or-Cancel:** ordini che vengono eseguiti il più possibile al miglior prezzo e il resto viene annullato (tali ordini non vengono reindirizzati a un'altra borsa né "camminano" sul libro);
- **Fill-or-Kill:** ordini inviati per essere eseguiti al miglior prezzo nella loro interezza o per niente;
- **Good-Till-Time:** ordini con una durata fissa incorporata in modo che vengano annullati in caso contrario eseguiti entro la loro scadenza;
- **Discretionary:** gli ordini mostrano un prezzo (il prezzo limite) ma possono essere eseguiti a prezzi più aggressivi (nascosti);
- e ci sono una miriade di altre varianti...

(Tutte queste opzioni sono a pagamento, il mercato ci guadagna.

Spoofing: inizio a vendere le azioni, il prezzo scende, tutti hanno paura, tutti vendono, io compro le azioni ad un prezzo maggiorato. Oggi giorno piazza una quantità, presso molto sul Book, poi cancello prima quell'ordine. Faccio vedere qualcosa che non c'è. Questi ordini sono nati dopo la scoperta dello spoofing. Per ogni ordine che sembra una truffa, c'è un ordine che può aiutare a contrastarlo.)

Quando si codifica un algoritmo si dovrebbe essere molto consapevoli di **tutti i possibili tipi di ordini consentiti, non solo in una borsa, ma in tutte le borse che competono** in cui viene scambiato il proprio asset di interesse.

Non essere informati sulla varietà dei tipi di ordine può portare a perdite significative. Dal momento che alcuni di questi tipi di ordini consentono modifiche e aggiustamenti a livello di *trading engine*, non possono essere battuti in termini di latenza dal *trader engine*, indipendentemente da quanto efficientemente sono codificati e cablati gli algoritmi.

4.1.10 Colocation

Le borse controllano anche **la quantità e il grado di granularità delle informazioni che si riceve** (ad esempio, si può utilizzare il feed consolidato/pubblico a basso costo o pagare un importo relativamente molto più grande per feed diretti/proprietari dalle borse).

Inoltre **monetizzano il bisogno di velocità affittando lo spazio di computer/server accanto ai loro *matching engine***, un processo chiamato **colocation**. Attraverso la colocation, le borse possono fornire servizio uniforme ai clienti commerciali a prezzi competitivi. Avere i motori di trading dei trader in un luogo comune di proprietà della borsa semplifica la capacità della borsa di fornire servizio uniforme in quanto può controllare l'hardware che collega ogni cliente al *trading engine*, il cavo (quindi tutti hanno lo stesso cavo della stessa lunghezza) e la rete.

Ciò garantisce che tutti i trader in colocation abbiano lo stesso accesso rapido e non siano in svantaggio (almeno in termini di hardware fornito dalla borsa – *exchange provided hardware*). Naturalmente, questo impone una

chiara distinzione tra i commercianti che sono co-locati e quelli che non lo sono. Quelli che non sono co-locati avrà sempre uno svantaggio di velocità. Diventa quindi un problema per i regolatori che devono garantire che le borse mantengano l'accesso alla colocation sufficientemente competitivo.

(La velocità del LOB e ME è elevatissima.

La colocation non è una cosa astratta, è un servizio venduto dai mercati finanziari: un vantaggio rispetto a quelli che non sono in colocation, pago questo servizio. il mercato mi garantisce che sono avvantaggiato in modo uguale a tutti quelli che hanno questo servizio. Se questo non è possibile si arriva a fare giri di cavo intorno al server.)

4.1.11 Commissioni di borsa

Un altro problema importante da tenere presente è che il trading in borsa non è gratuito, ma il costo non è lo stesso per tutti i trader.

Ad esempio, molti scambi eseguono il cosiddetto sistema di commissioni maker-taker (**maker-taker system**) laddove un trader che invia un MO (e quindi sottrae liquidità al mercato) paga una commissione di trading, mentre un trader il cui LO pubblicato è 'riempito' (*filled*) dal MO (cioè il LO con cui il MO è abbinato) pagherà una commissione di trading molto più bassa, o addirittura riceverà un pagamento (un rimborso, *rebate*) dalla borsa per fornire liquidità (fare mercato – *making the market*).

D'altra parte, ci sono mercati con un tariffario invertito, un sistema taker-maker (**taker-maker system**) dove la struttura delle commissioni è inversa: coloro che forniscono liquidità pagano una commissione più elevata di quelli che prendono la liquidità (che possono anche ottenere un rimborso).

La questione delle commissioni di borsa (*exchange fees*) è molto importante in quanto le commissioni distorcono i prezzi di mercato osservati (quando fai una transazione il prezzo rilevante per te è il prezzo netto che paghi/ricevi, che è il prezzo pubblicato al netto delle commissioni).

(Finora non abbiamo considerato costi di transazione, ma il mercato li prevede.

Possiamo ignorarli in quanto sono costanti.

A seconda del mercato cambiano le tipologie di commissioni, a seconda dei comportamenti che i mercati vogliono avvantaggiare o svantaggiare.

Nel maker taker paga di più chi emette market order, incentiva i limit; nel taker maker incentiva il market.)

4.2 Tipi di trader

4.2.1 Le tre principali classi di trader

- **Fundamental** (o *noise* o *liquidity*) **traders**: quelli che sono spinti dai fondamentali economici (*economic fundamentals*) al di fuori della borsa

- **Informed traders:** trader che traggono profitto sfruttando informazioni non riflesse nei prezzi di mercato scambiando asset in previsione del loro apprezzamento o deprezzamento (*appreciation* o *depreciation*)
- **Market makers:** trader professionisti che traggono profitto facilitando lo scambio in un particolare asset e sfruttando le proprie capacità nell'esecuzione di operazioni (fanno solitamente portfolio management)

Sussumiamo gli *arbitrageurs* negli *informed traders* che si muovono in previsione delle variazioni di prezzo.

4.2.2 Classificare i partecipanti al mercato

I **proprietary traders** operano su un vantaggio commerciale (a volte reale, a volte illusorio), vanno dai grandi *hedge fund*, ai piccoli 'day trader' individuali che si spostano dentro e fuori dalle posizioni attive dai loro uffici a casa.

I *proprietary traders* fanno trading sul loro vantaggio competitivo: sia esso identificando fondamentalmente prezzi sbagliati degli asset (***mispriced assets***), identificando il ***price momentum*** o i cambiamenti del prezzo a sentimento (***sentiment-based price changes***), avendo capacità tecniche speciali per elaborare le informazioni di mercato e identificare pattern (***technical traders***), essere in grado di cronometrare i movimenti di prezzo in base alle notizie (sia esso l'annuncio di dati economici del governo o l'elaborazione di feed Twitter), o identificare fugaci discrepanze di prezzo e ingiustificate tra asset equivalenti (*arbitrageurs*).

I **regular investors** e i **fundamental traders** sono investitori che hanno un uso diretto degli asset oggetto di scambio.

Potrebbero essere individui che acquistano azioni nella speranza di poter condividere nella propria crescita man mano che la società aumenta la sua creazione di valore economico (*economic value-creation*) e le sue quote apprezzate in valore.

Oppure, potrebbero voler riequilibrare i propri investimenti a causa di un cambiamento di circostanza (in risposta a un improvviso bisogno di denaro, un cambiamento nel loro gusto per il rischio o le loro prospettive per il futuro). Possono essere società che utilizzano contratti finanziari per coprire rischi quali variazioni dei prezzi degli input e degli output dalla loro attività di produzione.

4.2.3 Traders e liquidità

Possiamo pensare ai tipi di **market maker** come al trading 'passivo' (***passive***) o 'reattivo' (***reactive***) che trae profitto dalla conoscenza dettagliata del processo di trading e si adatta al 'mercato' al variare delle circostanze.

Gli altri due tipi rappresentano un trading più 'attivo' (***active***) o 'aggressivo' (***aggressive***) che avviene solo per sfruttare specifici vantaggi informativi acquisiti al di fuori dell'ambiente di trading.

Un errore comune è equiparare il market making alla fornitura di liquidità e al trading informato con l'assunzione di liquidità.

L'attività di market making generalmente favorisce la fornitura di liquidità ma una particolare strategia *market making* (*market making strategy*) può a volte fornire liquidità mentre altre richiederla.

Allo stesso modo, il trading informato non avviene sempre tramite ordini aggressivi e può a volte essere implementato meglio tramite ordini passivi che aggiungono liquidità.

(Immettere liquidità: aggiungere ordini al book. Ordine passivo: limit order.

Un market maker (quelli che fanno portfolio management) sono considerati passivi o reattivi perché si adattano alle circostanze del mercato, non agiscono per cambiare il mercato, ma reagiscono a segnali. Se non cambia il mercato, non cambiano il loro portafoglio.

Gli altri due tipi sono invece attivi o aggressivi, non reagiscono al mercato, agiscono con degli ordini con informazioni in mano che non riflettono il prezzo di mercato. Agendo con degli ordini che cambiano il prezzo di mercato sono considerati attivi.)

5 Ritorni di asset e portafoglio

5.1 Ritorno semplice di un periodo

La maggior parte degli studi finanziari riguarda i ritorni, anziché i prezzi, delle attività.

I ritorni degli asset sono un riepilogo completo e senza scala dell'opportunità di investimento per un investitore medio. Le serie di ritorni hanno proprietà statistiche più interessanti delle serie di prezzi e ci sono diverse definizioni di ritorni patrimoniali.

Definiamo, P_t = prezzo di un asset nel periodo t (assumere nessun dividendo)

5.1.1 Periodo di detenzione e ritorno del periodo di detenzione

Prendiamo in considerazione l'acquisto di un asset (ad es. azioni, obbligazioni, ETF, fondi comuni di investimento, opzioni, ecc.) al tempo t_0 al prezzo P_0 e poi la vendita dell'asset al tempo t_1 al prezzo P_1 .

Se non ci sono flussi di cassa intermedi (es. dividendi) tra t_0 e t_1 il tasso di ritorno nel periodo da t_0 a t_1 è la variazione percentuale del prezzo:

$$R(t_0, t_1) = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

Il tempo tra t_0 e t_1 è chiamato **periodo di detenzione** (*holding period*) e $R(t_0, t_1)$ si chiama **ritorno del periodo di detenzione** (*holding period return*).

Il periodo di detenzione può essere di qualsiasi durata: un secondo; cinque minuti; otto ore; due giorni, sei minuti e due secondi; quindici anni. (È una funzione molto generale).

5.1.2 Ritorni semplici

P_t è il prezzo nominale dell'asset al tempo t , il prezzo alla fine del mese t su un asset che non paga dividendi.

P_{t-1} è il prezzo alla fine del mese $t - 1$.

Il **ritorno netto semplice di un mese** (*one-month simple net return*) su un investimento in un asset tra i mesi $t-1$ e t è:

$$R_{t-1,t} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \% \Delta P_t,$$

Scrivendo

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

possiamo definire il **ritorno lordo semplice** (*simple gross return*) come

$$1 + R_{t-1,t} = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Il ritorno lordo di un mese ha l'interpretazione del valore futuro di \$1 investito nell'asset per un mese.

(Ritorno semplice netto: quanto in percentuale ci ho guadagnato. Detraiamo prima eventuali costi di transazione).

Ritorno lordo (gross return)

Il tasso di ritorno totale su un investimento prima della detrazione di eventuali commissioni o spese. Il tasso lordo di ritorno è quotato in un determinato periodo di tempo, come un mese, un trimestre o un anno. È spesso citato come il tasso di ritorno di un investimento in volantini pubblicitari e spot pubblicitari.

5.1.3 Calcolo del ritorno semplice

Consideriamo un investimento di un mese in azioni Microsoft. Supponiamo di acquistare il titolo nel mese $t-1$ a $P_{t-1} = \$85$ e vendere il titolo il mese successivo per $P_t = \$90$.

Supponiamo inoltre che Microsoft non paghi dividendi tra i mesi $t-1$ e t .

I **ritorni netti e lordi semplici** (*one-month simple net and gross returns*) in un mese sono quindi

$$R_t = \frac{90-85}{85} = \frac{90}{85} - 1 = 1,0588 - 1 = 0,0588$$

$$1 + R_t = 1,0588$$

L'investimento di un mese in Microsoft ha prodotto un ritorno del 5,88% al mese. In alternativa, \$1 investito in azioni Microsoft nel mese $t-1$ è cresciuto fino a \$1,0588 nel mese t .

5.1.4 Ritorno semplice e composto

Dimostreremo che il ritorno lordo semplice di periodo k è solo il prodotto di k ritorni lordi semplici di un periodo.

Ritorno semplice netto di un periodo k (*k-period simple net return*):

$$R_t[k] = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}$$

Il **ritorno semplice di due mesi** (*simple two-month return*) su un investimento in un asset tra i mesi $t-2$ e t è definito come

$$R_t(2) = \frac{P_t - P_{t-2}}{P_{t-2}} = \frac{P_t}{P_{t-2}} - 1$$

5.1.5 Ritorni multi-periodo

Scrivendo

$$\frac{P_t}{P_{t-2}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} * \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}$$

il **ritorno semplice bimestrale** (*simple two-month return*) può essere espresso come:

$$R_t(2) = \frac{P_t}{P_{t-1}} * \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} - 1 = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) - 1$$

Quindi il **ritorno semplice lordo** (*simple two-month gross return*) di due mesi diventa:

$$1 + R_t(2) = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) = 1 + R_{t-1} + R_t + R_{t-1}R_t$$

che è un prodotto dei due ritorni lordi semplici di un mese e non uno più la somma dei due ritorni mensili.

$$R_t(2) = R_{t-1} + R_t + R_{t-1}R_t$$

In generale, il ritorno lordo del mese k è definito come il prodotto di k ritorni lordi di un mese:

$$\begin{aligned} 1 + R_t[k] &= \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \dots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \\ &= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k}) \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \end{aligned}$$

(Il ragionamento è analogo a quello della composizione continua).

5.1.6 Ritorni continuamente composti

Il logaritmo naturale del ritorno lordo semplice di un'attività si chiama ritorno continuamente composto (**continuously compounded return**) o ritorno logaritmico (**log return**):

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1} \quad \text{where} \quad p_t = \ln P_t$$

Vantaggi dei ritorni logaritmici:

- Ritorni multiperiodali facili da calcolare

$$\begin{aligned}
 r_t[k] &= \ln(1 + R_t[k]) = \ln[(1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1})] \\
 &= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k}
 \end{aligned}$$

- Proprietà statistiche più trattabili

5.1.7 Esempio

Supponiamo che il prezzo di Microsoft nel mese $t - 2$ sia \$80 e nessun dividendo sia pagato tra i mesi $t - 2$ e t . Il ritorno di due mesi è

$$R_t(2) = \frac{90 - 80}{80} = \frac{90}{80} - 1 = 1,1250 - 1 = 0,1250$$

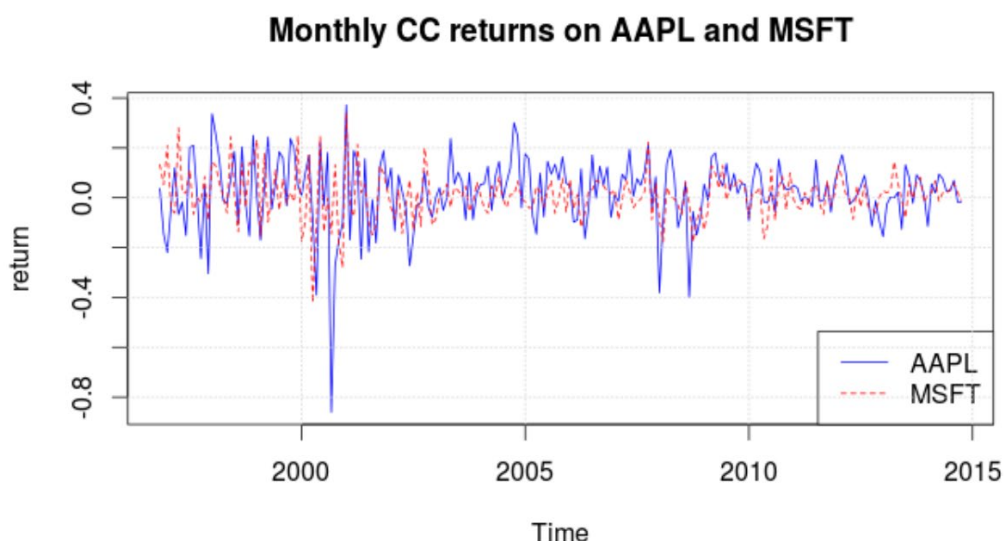
o 12,50% per due mesi. I due ritorni di un mese sono

$$R_{t-1} = \frac{85-80}{80} = \frac{5}{80} = 1,0625 - 1 = 0,0625$$

$$R_t = \frac{90-85}{85} = \frac{5}{85} = 1,0588 - 1 = 0,0588$$

E il ritorno di due mesi è

$$1 + R_t(2) = 1,0625 \cdot 1,0588 = 1,1250$$



(Questa grande oscillazione rappresenta quanto il prezzo viene scosso).

5.2 Ritorno del portafoglio

Consideriamo un investimento di $V\$$ in due asset, denominati asset **A** e asset **B**.

Sia x_A la frazione o quota di ricchezza investita nell'asset **A**, e sia x_B la restante frazione investita nell'asset **B**.

Gli importi in dollari investiti negli asset **A** e **B** sono $V\$ \times x_A$ e $V\$ \times x_B$, rispettivamente.

Assumiamo che la somma delle quote di investimento sia 1, quindi $x_A + x_B = 1$

La raccolta delle quote di investimento (x_A, x_B) definisce un **portafoglio**

I valori negativi per x_A o x_B rappresentano le **vendite allo scoperto** (*short sales*).

Siano $R_{A,t}$ e $R_{B,t}$ i **ritorni semplici di un periodo** (*simple one-period returns*) sulle attività A e B.

Vogliamo determinare il ritorno semplice di un periodo sul portafoglio definito da (x_A, x_B) .

Alla fine del periodo t , gli investimenti negli asset **A** e **B** valgono $V\$ \times x_A(1 + R_{A,t})$ e $V\$ \times x_B(1 + R_{B,t})$, rispettivamente

Quindi alla fine del periodo il portafoglio vale $V\$ \times [x_A(1 + R_{A,t}) + x_B(1 + R_{B,t})]$.

$$\$V(1 + R_{p,t}) = \$V [x_A(1 + R_{A,t}) + x_B(1 + R_{B,t})]$$

$$= \$V [x_A + x_B + x_A R_{A,t} + x_B R_{B,t}]$$

$$= \$V [1 + x_A R_{A,t} + x_B R_{B,t}]$$

$$\Rightarrow R_{p,t} = x_A R_{A,t} + x_B R_{B,t}$$

Il **ritorno semplice del portafoglio** (*simple portfolio return*) è una media ponderata dei ritorni semplici sugli asset **A** e **B**, dove i pesi sono le quote (*shares*) del portafoglio x_A e x_B .

5.2.1 Calcolare i ritorni del portafoglio

Consideriamo un portafoglio di azioni Microsoft e Starbucks in cui inizialmente acquistare dieci quote di ogni azione alla fine del mese $t-1$ ai prezzi

$$P_{msft,t-1} = \$85, \quad P_{sbux,t-1} = \$30,$$

Il valore iniziale del portafoglio è

$$V_{t-1} = 10 \times \$85 + 10 \times \$30 = \$1,150.$$

Le quote nel portafoglio sono

$$x_{msft} = 850/1150 = 0.7391, \quad x_{sbux} = 300/1150 = 0.2609.$$

(Anche se acquisto 10 quote e 10 quote il portafoglio è sbilanciato).

I prezzi alla fine del mese t sono

$$P_{msft,t} = \$90 \text{ and } P_{sbux,t} = \$28.$$

Supponendo che Microsoft e Starbucks non paghino un dividendo tra i periodi $t-1$ e t , i ritorni di un periodo sono

$$R_{msft,t} = \frac{\$90 - \$85}{\$85} = 0.0588$$

$$R_{sbux,t} = \frac{\$28 - \$30}{\$30} = -0.0667$$

Il ritorno del portafoglio è

$$R_{p,t} = (0.7391)(0.0588) + (0.2609)(-0.0667) = 0.02609$$

e il valore alla fine del mese t è

$$V_t = \$1,150 \times (1.02609) = \$1,180$$

In generale, per un portafoglio di n asset con quote di investimento x_i tali che $x_1 + \dots + x_n = 1$

$$1 + R_{p,t} = \sum_{i=1}^n x_i (1 + R_{i,t})$$

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^n x_i R_{i,t}$$

$$= x_1 R_{1t} + \dots + x_n R_{nt}$$

(I pesi, la composizione del portafoglio, sono le variabili decisionali: dove investire di più o di meno).

5.2.2 Adeguamento per i dividendi

Se un asset paga un dividendo, D_t , a volte tra i mesi $t-1$ e t , il totale del calcolo del ritorno netto diventa

$$R_t^{total} = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \underbrace{\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}}_{\text{capital gain}} + \underbrace{\frac{D_t}{P_{t-1}}}_{\text{dividend yield}}$$

Capital Gain – guadagno in conto capitale. Utilizzato in ambito borsistico e finanziario per identificare il guadagno ottenuto dalla compravendita di azioni, di obbligazioni, e di altri strumenti finanziari. È la differenza tra il prezzo di acquisto e quello di vendita di uno strumento finanziario. In Europa attualmente il *capital gain* è soggetto a tassazione con aliquote differenziate da Paese a Paese.

Dividend yield – rapporto dividendo-prezzo corrisponde al rapporto tra l'ultimo dividendo annuo per azione corrisposto agli azionisti o annunciato e il prezzo in chiusura dell'anno di un'azione ordinaria. Esso è utilizzato come indicatore del ritorno immediato indipendentemente dal corso del titolo azionario. (Analisi dell'andamento dell'azienda).

Se un asset paga dividendi periodicamente, la definizione di ritorno dell'attività deve essere modificata:

- D_t = pagamento del dividendo di un'attività tra i periodi $t-1$ e t
- P_t = prezzo dell'asset alla fine del periodo t

Il ritorno lordo totale è:

$$1 + R_t^{total} = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}$$

5.2.3 Ritorno totale di Microsoft quando sono pagati i dividendi

Consideriamo un investimento di un mese in azioni Microsoft.

Supponiamo di acquistare l'azione nel mese $t-1$ a $P_{t-1} = 85\$$ e di vendere l'azione il prossimo mese a $P_t = 90\$$.

Supponiamo che Microsoft paghi un dividendo di $1\$$ tra i mesi $t-1$ e t .

La plusvalenza (*capital gain*), il ritorno del dividendo (*dividend yield*) e il ritorno totale sono quindi

$$\begin{aligned}
 R_t &= \frac{\$90 + \$1 - \$85}{\$85} = \frac{\$90 - \$85}{\$85} + \frac{\$1}{\$85} \\
 &= 0.0588 + 0.0118 \\
 &= 0.0707
 \end{aligned}$$

L'investimento di un mese in Microsoft produce un ritorno totale del 7,07% al mese.

La componente di plusvalenza (**capital gain**) è 5,88% e la componente di ritorno del dividendo (**dividend yield**) è 1,18%.

5.2.4 Adeguamento per l'inflazione

I calcoli di ritorno considerati si basano sui **prezzi nominali o correnti di risorse** (*nominal or current prices of assets*). I ritorni calcolati dai prezzi nominali sono ritorni nominali (**nominal returns**).

Il ritorno reale di un asset in un determinato orizzonte tiene conto del tasso di crescita del livello generale dei prezzi sull'orizzonte.

- Se **il prezzo nominale dell'asset cresce più velocemente del livello generale dei prezzi** allora il ritorno nominale sarà **maggiore del tasso di inflazione** e il **ritorno reale sarà positivo**.
- Viceversa, se **il prezzo nominale dell'asset aumenta meno del livello generale dei prezzi** allora il ritorno nominale sarà **inferiore al tasso di inflazione** e il **ritorno reale sarà negativo**.

Il **calcolo dei ritorni reali** (*computation of real returns*) su un asset è un processo in due fasi:

1. Sgonfiare il prezzo nominale dell'asset in base al livello generale dei prezzi
2. Calcolare i ritorni nel modo consueto utilizzando i prezzi deflazionati

Prendiamo in considerazione il calcolo del ritorno reale semplice di un periodo su un asset. Sia P_t il prezzo nominale dell'asset al tempo t e sia che CPI_t un indice del livello generale dei prezzi (es. indice dei prezzi al consumo) al momento t .

Il prezzo deflazionato o reale al tempo t è

$$P_t^{\text{Real}} = \frac{P_t}{CPI_t},$$

Calcoliamo i ritorni nel modo consueto utilizzando i prezzi deflazionati

$$\begin{aligned}
 R_t^{\text{Real}} &= \frac{P_t^{\text{Real}} - P_{t-1}^{\text{Real}}}{P_{t-1}^{\text{Real}}} = \frac{\frac{P_t}{CPI_t} - \frac{P_{t-1}}{CPI_{t-1}}}{\frac{P_{t-1}}{CPI_{t-1}}} \\
 &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{CPI_{t-1}}{CPI_t} - 1.
 \end{aligned}$$

In alternativa, definiamo l'inflazione come

$$\pi_t = \% \Delta CPI_t = \frac{CPI_t - CPI_{t-1}}{CPI_{t-1}}$$

$$R_t^{\text{Real}} = \frac{1 + R_t}{1 + \pi_t} - 1$$

(In rari casi si è verificata una deflazione, si deve fare quindi il ragionamento opposto. Sul piccolo periodo di tempo l'inflazione conta poco).

5.2.5 Esempio

Calcoliamo il ritorno reale delle azioni Microsoft. Supponiamo che il CPI nei mesi $t-1$ e t sia 1 e 1.01, rispettivamente, che rappresenta un tasso di crescita mensile dell'1% nel livello complessivo dei prezzi. I prezzi reali delle azioni Microsoft sono

$$P_{t-1}^{\text{Real}} = \frac{\$85}{1} = \$85, \quad P_t^{\text{Real}} = \frac{\$90}{1.01} = \$89.1089$$

Il ritorno reale mensile è

$$R_t^{\text{Real}} = \frac{\$89.1089 - \$85}{\$85} = 0.0483$$

Il ritorno nominale e l'inflazione nel mese sono

$$R_t = \frac{\$90 - \$85}{\$85} = 0.0588, \quad \pi_t = \frac{1.01 - 1}{1} = 0.01$$

Allora il ritorno reale è

$$R_t^{\text{Real}} = \frac{1.0588}{1.01} - 1 = 0.0483$$

Si noti che il ritorno reale semplice è quasi, ma non del tutto, uguale al ritorno semplice nominale meno il tasso di inflazione.

5.3 Annualizzare i ritorni

I ritorni vengono spesso convertiti in un ritorno annuale per stabilire uno standard di confronto.

Assumiamo lo stesso ritorno mensile R_m per 12 mesi:

$$\text{Compound annual gross return (CAGR)} = 1 + R_A = 1 + R_t(12) = (1 + R_m)^{12}$$

$$\text{Compound annual net return} = R_A = (1 + R_m)^{12} - 1$$

Note: We don't use $R_A = 12R_m$ because this ignores compounding.

Supponiamo che il ritorno di un mese, R_t , su azioni Microsoft sia del 5,88%. Se assumiamo che possiamo ottenere questo ritorno per 12 mesi, allora il ritorno annualizzato composto è

$$R_A = (1.0588)^{12} - 1 = 1.9850 - 1 = 0.9850$$

o 98,50% all'anno.

(R_m è il ritorno mensile).

5.3.1 Ritorni medi

Per gli investimenti su un dato orizzonte, spesso è interessante calcolare una misura di ritorno medio sull'orizzonte.

Consideriamo una sequenza di investimenti mensili nel corso dell'anno con ritorni mensili

Two possibilities:

- ① Arithmetic average (can be misleading)

$$\bar{R} = \frac{1}{12}(R_1 + \dots + R_{12})$$

- ② Geometric average (better measure of average return)

$$(1 + \bar{R})^{12} = (1 + R_A) = (1 + R_1)(1 + R_2) \dots (1 + R_{12})$$

$$\Rightarrow \bar{R} = (1 + R_A)^{1/12} - 1$$

$$= [(1 + R_1)(1 + R_2) \dots (1 + R_{12})]^{1/12} - 1$$

Consider a two period investment with returns

$$R_1 = 0.5, R_2 = -0.5$$

\$1 invested over two periods grows to

$$FV = \$1 \times (1 + R_1)(1 + R_2) = (1.5)(0.5) = 0.75$$

for a 2-period return of

$$R(2) = 0.75 - 1 = -0.25$$

Hence, the 2-period investment loses 25%

The arithmetic average return is

$$\bar{R} = \frac{1}{2}(0.5 + -0.5) = 0$$

This is misleading because the actual investment lost money over the 2 period horizon. The compound 2-period return based on the arithmetic average is

$$(1 + \bar{R})^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$$

The geometric average is

$$[(1.5)(0.5)]^{1/2} - 1 = (0.75)^{1/2} - 1 = -0.1340$$

This is a better measure because it indicates that the investment eventually lost money. The compound 2-period return is

$$(1 + \bar{R})^2 - 1 = (0.867)^2 - 1 = -0.25$$

Molto spesso i ritorni su orizzonti diversi sono annualizzati, ovvero convertiti in un ritorno annuale, per facilitare i confronti con altri investimenti.

Il processo di annualizzazione dipende dal periodo di detenzione dell'investimento e da un'ipotesi implicita sulla composizione.

Se il nostro orizzonte di investimento è di un anno, i ritorni lordi e netti annuali sono solo

$$1 + R_A = 1 + R_t(12) = \frac{P_t}{P_{t-12}} = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-11}),$$

$$R_A = R_t(12).$$

Consideriamo un investimento di un mese in un asset con ritorno R_t . Qual è il ritorno annualizzato su questo investimento?

Se assumiamo di ricevere lo stesso ritorno $R = R_t$ ogni mese per l'anno, allora il ritorno lordo annuo è

$$1 + R_A = 1 + R_t(12) = (1 + R)^{12}.$$

Il ritorno annuo netto è quindi

$$R_A = (1 + R)^{12} - 1.$$

5.3.2 Calcolo del ritorno annualizzato dal ritorno di un mese

Nel primo esempio, il ritorno di un mese, R_t su azioni Microsoft è stato del 5,88%. Se assumiamo di poter ottenere questo ritorno per 12 mesi, qual è il ritorno annualizzato?

$$R_A = (1.0588)^{12} - 1 = 1.9850 - 1 = 0.9850,$$

98,50% all'anno.

Consideriamo un investimento di due mesi con ritorno $R_t(2)$. Se assumiamo di ricevere lo stesso ritorno bimestrale $R(2) = R_t(2)$ per i successivi sei bimestri, allora i ritorni annui lordi e netti sono

$$1 + R_A = (1 + R(2))^6,$$

$$R_A = (1 + R(2))^6 - 1.$$

Il ritorno annuoale lordo è definito come il ritorno di due mesi composto per 6 mesi.

5.3.3 Calcolo del ritorno annualizzato dal ritorno di due mesi

Supponiamo che il ritorno di due mesi, $R_t(2)$ su azioni Microsoft è del 12,5%. Se assumiamo di poter ottenere questo ritorno di due mesi per i prossimi 6 bimestri allora il ritorno annualizzato è

$$R_A = (1.1250)^6 - 1 = 2.0273 - 1 = 1.0273$$

102.73% all'anno.

Supponiamo ora che il nostro **orizzonte di investimento sia di due anni**. Ovvero, iniziamo il nostro investimento al tempo $t - 24$ e incassiamo al tempo t . Il ritorno lordo a due anni è

$$1 + R_t(24) = \frac{P_t}{P_{t-24}}$$

Qual è il ritorno annuo di questo investimento biennale?

Per determinare il ritorno annuo risolviamo la seguente relazione per R_A : il ritorno annuale è composto due volte per ottenere il ritorno di due anni e la relazione è quindi risolta per il ritorno annuo.

$$(1 + R_A)^2 = 1 + R_t(24) \implies$$

$$R_A = (1 + R_t(24))^{1/2} - 1.$$

5.3.4 Calcolo del ritorno annualizzato dal ritorno di due anni

Supponiamo che il prezzo delle azioni Microsoft 24 mesi fa fosse $P_{t-24} = \$50$ e il prezzo di oggi è $P_t = \$90$.

Il ritorno lordo a due anni è $1 + R_t(24) = \$90 / \$50 = 1.8000$ che produce un ritorno netto di due anni di $R_t(24) = 0,80 = 80\%$

Il ritorno annuo di questo investimento è definito come

$$R_A = (1.800)^{1/2} - 1 = 1.3416 - 1 = 0.3416,$$

6 Ottimizzazione del portafoglio

6.1 Fondazione dell'Ottimizzazione del Portafoglio (Portfolio Optimization)

Harry Markowitz ha presentato nel 1952 le basi della selezione del portfolio:
Trovare una combinazione di asset che in un dato periodo di tempo produce il massimo ritorno possibile al minor rischio possibile

Due passaggi principali:

1. individuare le combinazioni di asset, o portafogli, che risultano ottimali rispetto al loro **ritorno** atteso e **rischio**
2. scegliere quel portafoglio che meglio si adatta alla **funzione di utilità dell'investitore** (*investor's utility function*)

La funzione di utilità riguarda i vincoli personali dell'investitore, come la tolleranza a rischio, tipo e numero di asset desiderati e capitale totale per l'investimento.

6.2 Il modello Media-Varianza

L'ipotesi di partenza di Markowitz per il suo modello di selezione del portafoglio è che gli investitori dovrebbero considerare il ritorno atteso una cosa desiderabile e aborrire la varianza del ritorno.

(Per Markowitz devo ridurre al massimo il rischio. Massimizzare il ritorno e minimizzare il rischio).

Una chiara spiegazione matematica alla credenza ampiamente accettata tra gli investitori sull'importanza della **diversificazione nella selezione del portafoglio** (*diversification in portfolio selection*).

6.2.1 Media e varianza di un portafoglio

Valore medio (o ritorno atteso – *mean value*) al tempo t del portafoglio w :

$$\mu_w = E(R_t^w) = \sum_{i=1}^N w_i E(R_{i,t})$$

Varianza (*variance*) del portafoglio w :

$$\sigma_w^2 = \text{Var}(R_t^w) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}$$

(Per Markowitz devo prendere asset più incorrelati possibile, in questo modo si abbassa la varianza. Covarianza: quanto variano in modo simile due asset correlati. Meno covariano, minore sarà il rischio. Devo guardare i dati storici per calcolare la covarianza).

6.2.2 Due casi opposti

Caso 1: i ritorni degli N asset in portafoglio sono non correlati a coppie.

Maggiore è il numero di asset non correlati a coppie, minore è il rischio del portafoglio.

Caso 2: I ritorni degli asset in portafoglio sono analogamente correlati.

Maggiore è la presenza di asset analogamente correlati, più vicino è il rischio di portafoglio a un rischio comune a tutti gli asset (ad esempio, una media ponderata dei rischi dei singoli asset).

(Se ad esempio una crisi colpisce un intero settore, maggiore è la probabilità di perdere significativamente se ho tanti asset correlati).

Pertanto, la **diversificazione** in un mondo media-varianza si ottiene considerando **asset altamente non correlati** (*highly uncorrelated assets*) in un numero ragionevole.

Tracciando la varianza del portafoglio in funzione di N , data da uno dei casi sopra, si vede che da 15 a 20 sono numeri ragionevoli per la dimensione di un portafoglio.

6.2.3 Portafoglio media-varianza di rischio minimo

Secondo la media dei ritorni di Markowitz rispetto alla regola della varianza dei ritorni, la principale preoccupazione degli investitori è ottenere un certo livello di benefici sotto la quantità di rischio minima possibile.

Quindi il problema di Markowitz sulla selezione del portafoglio è pari a:
Trova i pesi $w = (w_1, \dots, w_N)$ tali che, per un dato tasso di ritorno atteso r^ , il ritorno atteso del portafoglio determinato da w è r^* mentre la sua varianza è minima.*

6.2.4 Minima varianza come un problema di ottimizzazione

Questa varianza minima per un dato problema di ottimizzazione del portafoglio di ritorno può essere matematicamente così formulato:

$$\begin{aligned} & \min_w w' C w \\ \text{subject to: } & w' \mu = r^*, \\ & \text{and } \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{aligned}$$

Questo è un **problema di programmazione quadratica** (QP - *Quadratic Programming problem*), poiché l'obiettivo è quadratico e i vincoli sono lineari, che può essere ridotto a un sistema lineare di equazioni e risolvere (tramite rilassamento lagrangiano – *Lagrangian relaxation*).

Vincolo significa che l'investitore utilizza tutto il suo budget per gli N asset. (Ogni volta che aumento il ritorno aumento il rischio e viceversa).

6.2.5 Alcune considerazioni

Si osservi che il modello non impone restrizioni sui valori dei pesi (es. potrebbero esserci **sia posizioni lunghe sia corte**).

(Se lavoro su un mercato che non permette lo short selling devo porre dei vincoli sui pesi, ovvero porli maggiori o uguali a 0).

In queste condizioni rilassate sui pesi (e supponendo che non ci sia arbitraggio esteso) questo problema di ottimizzazione del portafoglio può essere risolto analiticamente utilizzando **moltiplicatori di Lagrange** (*Lagrange multipliers*).

Risolvendo un sistema lineare si ottengono i pesi per un portafoglio con media r^* e la minima varianza possibile.

Questa soluzione è definita **efficiente** (*efficient*) nel senso di essere il portafoglio con quel ritorno atteso r^* e varianza minima, e tale che qualsiasi altro portafoglio sullo stesso insieme di titoli (*security*) con lo stesso ritorno atteso r^* deve avere una varianza maggiore.

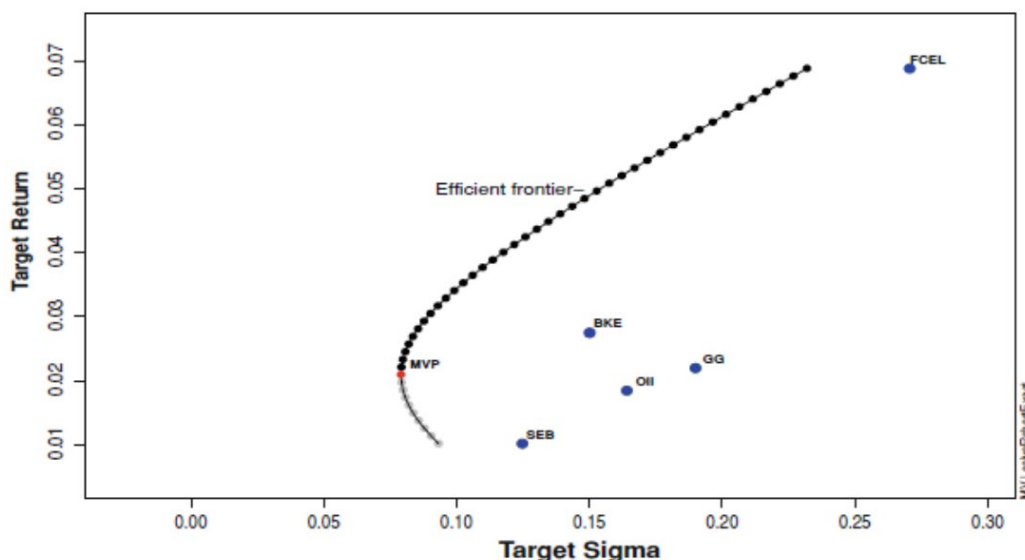
6.2.6 La frontiera efficiente e la minima varianza del portafoglio

Per un insieme di N asset per la costituzione di un portafoglio, si considerino diversi valori di r^* per il ritorno atteso del portafoglio, e per ciascuno di questi valori risolviamo il QP per ottenere la soluzione efficiente dei pesi w .

Da questi pesi ricaviamo la corrispondente deviazione standard del portafoglio w :

$$\sigma^* = std(R^{w^*}) = \sqrt{(w^*)' C w^*}.$$

6.2.7 Frontiera efficiente



I punti (σ^*, r^*) nel **piano σ - μ** , o il piano di **rischio medio** (*risk-mean plane*), è il ramo destro di un'iperbole.

Le coordinate del vertice di questa iperbole (σ_{MVP}, r_{MVP}) sono la deviazione standard e la media del **portafoglio a varianza minima** (*minimum variance portfolio* – **MVP**).

La parte della curva sopra il punto di MVP ($r > r_{MVP}$) è detta **frontiera efficiente** (*efficient frontier*).

La curva di riflessione simmetrica al di sotto del punto MVP è chiamata **luogo della minima varianza** (*minimum variance locus*).

(Se modificassi i pesi mi troverei al di sotto della frontiera, non esiste modo di trovarmi sopra la frontiera. Utilizzo la deviazione standard perché è più conveniente per i grafici – es. con l'unità di misura e l'espressione di percentuali. I puntini blu rappresentano i 5 portafogli 'degeneri' dove si è investito tutto negli asset riportati. Nessuno di questi può essere sulla frontiera).

6.2.8 Portafoglio con un asset risk-free

Finora abbiamo ipotizzato che gli asset disponibili per costituire un portafoglio siano tutti rischiosi.

Ora ci occupiamo del caso dell'aggiunta di un asset privo di rischio e del modello di pricing ottenuto come conseguenza.

L'aggiunta di un asset privo di rischio a un portafoglio corrisponde a prestare o prendere in prestito liquidità a tasso di interesse noto r_0 e con rischio zero:

- Il prestito corrisponde all'asset privo di rischio che ha un peso positivo
- L'indebitamento corrisponde al suo avere un peso negativo

Sia $r_f = r_0$ il tasso privo di rischio, o ritorno, nel periodo di tempo τ dell'asset privo di rischio.

Un portafoglio costituito esclusivamente da questo asset privo di rischio ha valore medio r_f e varianza 0.

Questo portafoglio privo di rischio è rappresentato nel piano di rischio medio dal punto $(0, r_f)$.

Consideriamo ora un portafoglio costituito dall'asset privo di rischio, con valore medio r_f più N asset rischiosi con media e varianza aggregate date da

$$\mu_w = E(R_t^w) = \sum_{i=1}^N w_i E(R_{i,t}) \quad \sigma_w^2 = \text{Var}(R_t^w) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}$$

Sia w_f il peso dell'attività priva di rischio in portafoglio; perciò:

$$1 - w_f = w_1 + \dots + w_N$$

il che implica che la ricchezza totale è stata distribuita in due parti: una per investire nell'asset privo di rischio e il resto per investire tra N asset rischiosi.

Possiamo quindi visualizzare il portfolio $(w, w_f) = (w_1, \dots, w_N, w_f)$ come composto da un asset privo di rischio, con peso w_f , media r_f e deviazione standard nulla, insieme ad un asset rischioso, che è l'aggregazione delle N asset rischiosi, con peso $1 - w_f$, media μ_w e deviazione standard σ_w .

Si noti che questa coppia di asset rischiosi e privi di rischio ha covarianza uguale a zero.

(La covarianza tra risk-free e un altro strumento è sempre uguale a 0, quindi abbasso il rischio nel calcolo del rischio totale del portafoglio).

Quindi il ritorno atteso e la deviazione standard di questo portafoglio combinato $\omega = (w, w_f)$ sono

$$\mu_\omega = w_f r_f + (1 - w_f) \mu_w$$

$$\sigma_\omega = (1 - w_f) \sigma_w$$

Vediamo in queste equazioni che la media e la deviazione standard del portafoglio ω dipendono linearmente da w_f . Pertanto, variando w_f otteniamo che i diversi portafogli rappresentati dalle due equazioni precedenti tracciano una retta dal punto $(0, r_f)$ e passante per il punto (σ_w, μ_w) nel piano di rischio medio.

(w_f è la percentuale investita in obbligazioni, w quella in azioni).

Inoltre, variando i pesi degli N asset rischiosi, ovvero costruendo un altro portafoglio rischioso w' , e combinandolo con l'asset privo di rischio, otteniamo un'altra linea retta che descrive tutti i possibili portafogli che sono una combinazione di questi due.

Concludiamo che la regione ammissibile dei portafogli media-varianza ottenuti da N asset rischiosi e un asset privo di rischio è un triangolo con un vertice nel punto che rappresenta l'asset privo di rischio e che avvolge l'iperbole contenente tutti i portafogli possibili sulle N attività rischiose.

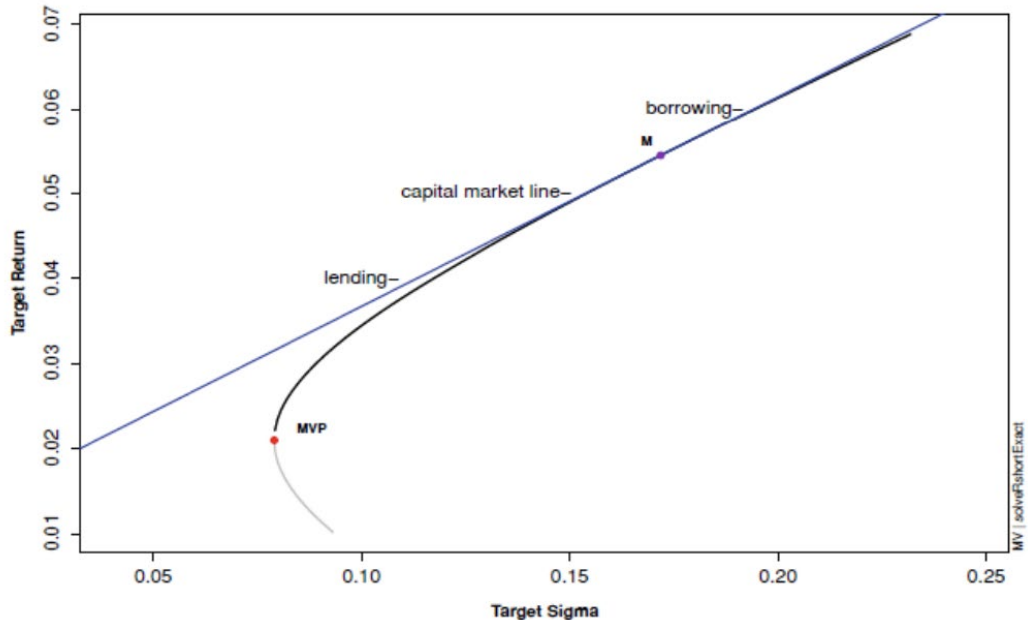


Fig. 8.3 Feasible region and efficient frontier of portfolios with a risk free asset with $r_f = 2\%$. Capital Market Line (blue); Market Portfolio (M). Efficient portfolios above (resp. below) M need borrowing (resp. lending) at the risk free rate

(Il punto di contatto è un particolare portafoglio).

6.3 La Capital Market Line e il Portafoglio di Mercato

La frontiera efficiente per un portafoglio di attività rischiose e un asset privo di rischio è ora una retta con punto di intercettazione $(0, r_f)$ e tangente alla frontiera efficiente dei portafogli rischiosi (denotata d'ora in poi EF_r) nel piano di rischio medio.

Questa linea tangente che descrive tutti i portafogli efficienti è denominata **Capital Market Line** (CML), e il punto in cui la CML entra in contatto con la curva EF_r ha come coordinate la deviazione standard e il ritorno atteso di un particolare portafoglio denominato **Portafoglio di Mercato** (Market Portfolio).

Il Portafoglio di Mercato è il portafoglio migliore rispetto al rapporto (ritorno in eccesso)/(rischio), ed è il miglior rappresentante del mercato per esso. Contiene azioni di ogni titolo in proporzione al peso del titolo nel mercato.

Sia θ l'angolo tra l'asse orizzontale e una retta passante per $(0, r_f)$ e un punto $(std(R^w), E(R^w))$ corrispondente a un portafoglio possibile di soli asset rischiosi. Quindi

$$\tan \theta = \frac{E(R^w) - r_f}{std(R^w)}$$

Il Portafoglio di Mercato è il punto che massimizza $\tan \theta$, per questo dà la pendenza della CML calcolata nel punto tangente alla frontiera efficiente

rischiosa (e questo è il motivo per cui il portafoglio di mercato è noto anche come portafoglio di tangenza - *the tangency portfolio*).

Dall'equazione sopra è chiaro che il Portafoglio di Mercato dà il massimo rapporto (eccesso di ritorno)/(rischio); e i pesi \mathbf{w} che sono soluzione del problema di massimizzazione di $\tan \theta$ sono in proporzione ai pesi di mercato delle azioni.

6.3.1 Indice di Sharpe

Sia $(std(R^w), E(R^w))$ il punto che descrive il Portafoglio di Mercato, ovvero il portafoglio di tangenza o punto di contatto tra la LMC e l'EF_r.

Come prima, $(0, r_f)$ rappresenta l'asset privo di rischio. Allora qualsiasi punto $(std(R^w), E(R^w))$ sulla CML, cioè qualsiasi portafoglio efficiente, è tale che

$$\begin{aligned} E(R^w) &= w_f r_f + (1 - w_f) E(R_M) \\ std(R^w) &= (1 - w_f) std(R_M) \end{aligned}$$

dove w_f è la frazione della ricchezza investita nell'asset privo di rischio:

Se $w_f \geq 0$ stiamo prestando al tasso privo di rischio; mentre se $w_f < 0$ stiamo prendendo in prestito al tasso privo di rischio, al fine di aumentare il nostro investimento in attività rischiose.

Possiamo riscrivere la CML come

$$\begin{aligned} E(R^w) &= r_f + (1 - w_f)(E(R_M) - r_f) \\ &= r_f + \frac{(E(R_M) - r_f)}{std(R_M)} std(R^w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(R^w) &= w_f r_f + (1 - w_f) E(R_M) \\ &= \cancel{r_f} - \cancel{r_f} + w_f r_f + (1 - w_f) E(R_M) \\ &= r_f - r_f (1 - w_f) + (1 - w_f) E(R_M) \\ &= r_f - (1 - w_f) (E(R_M) - r_f) \end{aligned}$$

da $std(R^w) = (1 - w_f) std(R_M)$, sostituiamo $(1 - w_f)$ insieme a $std(R^w) / std(R_M)$

La quantità $SRM = (E(R_M) - r_f) / std(R_M)$ è nota come **indice di Sharpe** (*Sharpe ratio*) del Portafoglio di Mercato.

In generale, l'indice di Sharpe di qualsiasi portafoglio è il numero:

$$SR^w = (E(R^w) - r_f) / std(R^w)$$

che fornisce una misura del rapporto tra remunerazione e variabilità del portafoglio e è diventato uno standard per la valutazione del portafoglio.

Maggiore è l'indice di Sharpe migliori sono gli investimenti, con il limite superiore che è l'indice di Sharpe del Portafoglio di Mercato.

Pertanto, tutti i portafogli efficienti, con asset rischiosi e un asset privo di rischio, dovrebbero avere lo stesso indice di Sharpe e uguale all'indice di Sharpe del mercato:

$$SR^w = SR_M$$

Quindi, riassumendo, il meglio che un investitore può fare in un mondo media-varianza è quello di destinare una parte del denaro investito in un asset priva di rischio e il resto nel portafoglio di mercato. Ciò garantisce il miglior rapporto possibile di eccesso di ritorno alla variabilità.

(Questo è il comportamento migliore nel modello media-varianza, non in tutti i modelli dove il rischio potrebbe persino essere considerato come positivo. Si potrebbe anche investire in più strumenti risk free ma si possono considerare uniti in un unico strumento risk free).

6.4 Capital Asset Pricing Model e Beta di un titolo

La Capital Market Line mostra un equilibrio tra il ritorno atteso e la deviazione standard di un portafoglio efficiente costituito da un asset risk free e un paniere di asset rischiosi.

Sarebbe auspicabile avere una relazione di equilibrio simile tra rischio e ritorno di un singolo asset rischioso rispetto a un portafoglio rischioso efficiente, dove potrebbe essere incluso.

Questo equilibrio rischio-ritorno per i singoli asset e un generico portafoglio efficiente (ovvero il Portafoglio di Mercato), è dato dal **Capital Asset Pricing Model** (CAPM).

Teorema (CAPM). Sia $E(R_M)$ il ritorno atteso del Portafoglio di Mercato, $\sigma_M = \text{std}(R_M)$ la sua deviazione standard, e r_f il ritorno privo di rischio in un certo periodo di tempo τ .

Sia $E(R_i)$ il ritorno atteso di un singolo asset i , σ_i la sua deviazione standard, e sia $\sigma_{iM} = \text{Cov}(R_i, R_M)$ la covarianza dei ritorni R_i e R_M .

Allora:

$$E(R_i) = r_f + \beta_i(E(R_M) - r_f)$$

Dove

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\text{Var}(R_M)}.$$

Il CAPM afferma che il tasso di ritorno in eccesso atteso dell'asset i , $E(R_i) - r_f$, noto anche come premio per il rischio dell'asset, è proporzionale di un fattore β_i al tasso di ritorno in eccesso atteso del Portafoglio di Mercato, $E(R_M) - r_f$, o il **premio di mercato** (*market premium*).

Il coefficiente β_i , noto come **beta** dell'asset i , è quindi il grado di premio per il rischio dell'asset rispetto al premio di mercato.

(In questo caso l'eccesso di ritorno dipende da quanto l'asset è legato all'andamento di mercato).

6.4.1 CAPM come modello di pricing

Supponiamo di voler conoscere il prezzo P di un asset il cui payoff dopo un periodo di tempo τ è impostato come un valore casuale P_τ .

Allora il tasso di ritorno dell'asset nel periodo τ è $R_\tau = (P_\tau/P) - 1$, e dal CAPM il valore atteso di R_τ si riferisce al tasso atteso di ritorno del mercato, nello stesso periodo di tempo, come segue:

$$E(R_\tau) = \frac{E(P_\tau)}{P} - 1 = r_f + \beta(E(R_M) - r_f)$$

Dove β è il beta dell'asset.

Risolvendo per P otteniamo la formula del pricing:

$$P = \frac{E(P_\tau)}{1 + r_f + \beta(E(R_M) - r_f)}$$

Questa equazione è una generalizzazione naturale della formula del flusso di cassa attualizzato per asset privi di rischio per includere il caso di asset rischiosi, in cui il valore attuale di un asset rischioso è il suo valore futuro atteso attualizzato da un tasso di interesse aggiustato per il rischio dato da $r_f + \beta(E(R_M) - r_f)$.

Si osservi infatti che se l'attività è priva di rischio, ad es. un bond, allora $E(P_\tau) = P_\tau$ e $\beta=0$, poiché la covarianza con qualsiasi ritorno costante è nulla; quindi, $P = P_\tau / (1 + r_f)$.

6.4.2 Sul significato di Beta

Formalmente, il beta di un asset misura la dipendenza lineare del ritorno dell'asset e del ritorno del mercato in proporzione al rapporto dell'asset con la volatilità del mercato.

Per vedere meglio questa riscrittura β_i in termini di correlazioni:

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\text{Var}(R_M)} = \rho(R_i, R_M) \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

Utilizzando l'equazione precedente possiamo fornire interpretazioni dei valori del beta di un asset come misura del suo co-movimento con il mercato.

Sia $\beta = \beta_i$ e $\rho = \rho(R_i, R_M)$ il coefficiente di correlazione dell'asset e il mercato.

Value of beta	Effect on correlation and volatility ratio	Interpretation
$\beta < 0$	$\rho < 0$, $\frac{\sigma_i}{\sigma_M} > 0$	Asset moves in the opposite direction of the movement of the market
$\beta = 0$	$\rho = 0$	Movements of the asset and the market are uncorrelated
$0 < \beta \leq 1$	$\rho > 0$, $0 < \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \leq 1/\rho$	Asset moves in the same direction as the market, volatility of asset can be < or > volatility of market
$\beta > 1$	$\rho > 0$, $\frac{\sigma_i}{\sigma_M} > 1/\rho > 1$	Asset moves in the same direction as the market but with greater volatility

Ad esempio, un $\beta = 0$ significa che l'asset e il mercato non sono correlati, poiché il rapporto di deviazione standard σ_i/σ_M è sempre positivo.

In questo caso, il CAPM afferma che $E(R_i) = r_f$, o che il premio per il rischio è zero.

La spiegazione di questa sorprendente conclusione è che il rischio di un asset che non è correlato con un portafoglio efficiente viene neutralizzato dal

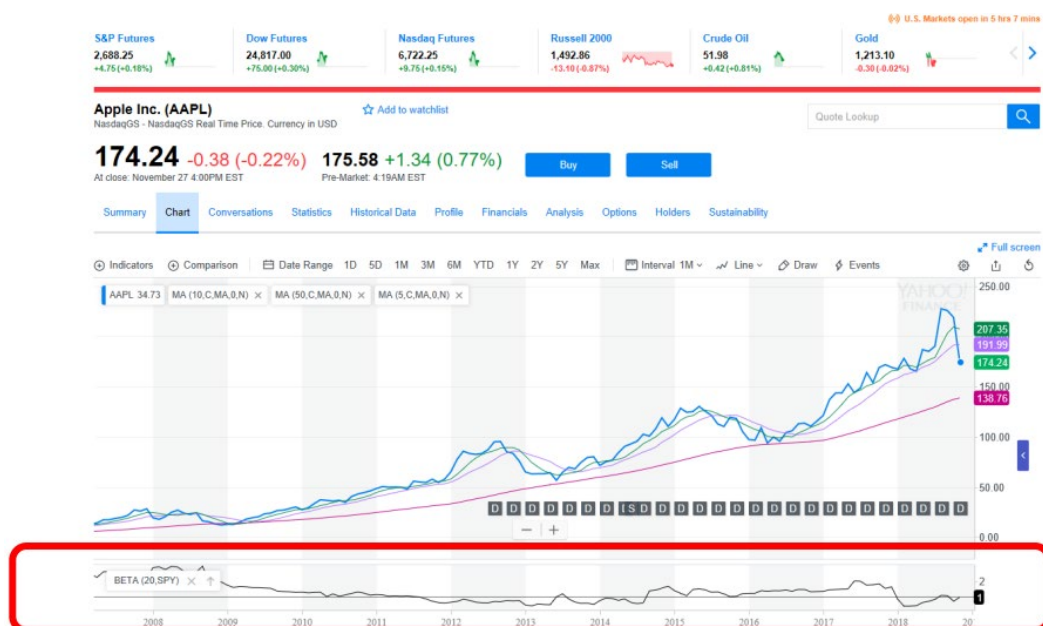
rischio composto dalle diverse posizioni del portafoglio, e quindi, non ci si dovrebbe aspettarsi benefici maggiori di quelli che potrebbero essere ottenuti al tasso privo di rischio.

Una situazione diversa è presentata da $\beta > 1$.

Ciò implica che l'asset e il mercato sono correlati positivamente; ma poiché $1/\rho \geq 1$ sempre, il rischio dell'asset è maggiore del rischio del mercato.

Questo rischio in più potrebbe avere il suo compenso poiché dal CAPM ne consegue che $E(R_i) > E(R_M)$, ovvero l'asset potrebbe battere il mercato.

Beta è un indicatore standard fornito dai fornitori di dati finanziari (Financial Data Providers).



Tuttavia la nostra interpretazione di beta differisce dall'interpretazione tradizionale di questa statistica, e poiché è frequentemente utilizzata dalla maggior parte delle istituzioni finanziarie e investitori, e come spiegato in vari rapporti finanziari, libri di testo e molti altri fonti di conoscenza popolare (es. Wikipedia).

L'uso più comune di beta è come una misura del rischio relativo al mercato. Ma questo è solo un fattore nell'equazione, il rapporto di volatilità, che viene quindi confuso con il fattore di correlazione.

Poi molto spesso sembra che l'interpretazione principale consideri erroneamente il prodotto di queste due statistiche come se fosse una congiunzione, come è il caso quando $0 < \beta \leq 1$ il che significa che congiuntamente $0 < \rho \leq 1$ e $0 < \sigma_i / \sigma_M \leq 1$.

Questo porta a interpretazioni come "il movimento dell'asset è nella stessa direzione, ma inferiore, del movimento del benchmark", o equivalentemente "l'asset e il mercato sono correlati ma l'asset è meno volatile".

Questo non è solo sbagliato ma pericoloso, perché potrebbe portare a decisioni di investimento sbagliate (e sicuramente lo si è fatto in passato).

(È meglio non investire se β è compreso tra 0 e 1).

La conclusione che si può trarre per un beta positivo ma inferiore a uno è che esiste una certa correlazione tra il ritorno dell'asset e il ritorno del mercato, ma la volatilità relativa può essere qualsiasi valore nell'intervallo $(0, 1/\rho)$, che lascia aperta la possibilità che la volatilità dell'asset sia maggiore della volatilità del mercato.

L'uso errato diffuso e l'abuso di beta sono stati segnalati decenni fa, ma beta è ancora oggi interpretata in maniera incoerente con la sua formula matematica.

Ci sono diverse proposte accademiche per adeguare il beta al desiderio di utilizzarla come misura del rischio di mercato.

Uno di questi stimatori alternativi è proprio considerare un beta come la volatilità relativa con il segno di correlazione; cioè, $\beta = (\text{segno } \rho) \sigma_i / \sigma_M$. Questo ha il vantaggio computazionale di essere più facile da calcolare, in quanto è il quoziente di due deviazioni standard e misura il rischio di un titolo rispetto a un portafoglio, o il mercato.

(Se le oscillazioni sono più forti ho più possibilità di battere il mercato. Dovrei inserire nel portafoglio asset con beta maggiori di 1).

6.4.3 Stimare beta da un campione

Date n coppie di ritorni campionari del titolo i , R_i , e il mercato, R_M , dello stesso periodo di tempo, la beta dell'azione i rispetto al mercato può essere stimato da utilizzando gli stimatori imparziali per la covarianza e le statistiche della varianza:

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{t=1}^n (R_{i,t} - \hat{\mu}(R_i))(R_{M,t} - \hat{\mu}(R_M))}{\sum_{t=1}^n (R_{M,t} - \hat{\mu}(R_M))^2}$$

Per questo stimatore abbiamo assunto che il tasso privo di rischio r_f rimane costante attraverso il periodo considerato. Se abbiamo un tasso variabile privo di rischio, allora invece dei ritorni $R_{i,t}$ e $R_{M,t}$, dovremmo considerare i ritorni in eccesso $R_{i,t} - r_f$ e $R_{M,t} - r_f$.

(Calcolato rispetto all'indice di mercato. Anche i titoli di stato sono valutati, ma qui viene considerato che il tasso di ritorno sia costante; se il titolo di stato è variabile bisogna considerare il ritorno in eccesso).

6.5 Ottimizzazione dei portafogli sotto diversi insiemi di vincoli

Tornando al modello generale di portafoglio media-varianza, abbiamo N asset con vettore di ritorno atteso $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$, dove $\mu_i = E(R_i)$ è il ritorno atteso dell'asset i e la matrice di covarianza $C = [\sigma_{ij}]_{1 \leq i, j \leq N}$, dove $\sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j)$.

Scegliamo un livello di rischio $\gamma \in [0, 1]$, e il problema è trovare un vettore di pesi $w = (w_1, \dots, w_N)$ che massimizza

$$\gamma w' \mu - (1 - \gamma) w' C w$$

$$\text{subject to: } \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

Il vincolo è legato al budget ed è un vincolo necessario a normalizzare la soluzione del problema media-varianza.

Ci sono molti altri vincoli che possono essere aggiunti al modello per adattarlo a scenari più realistici.

In ogni caso, l'aggiunta di questi vincoli trasforma il problema di ottimizzazione computazionalmente più difficile da risolvere, e per questo dovremmo ricorrere ad euristiche di ottimizzazione.

(Massimizzazione del rischio e massimizzazione del ritorno vanno di pari passo).

Limiti superiore e inferiore nelle partecipazioni (*Upper and lower bounds in holdings*). Questi vincoli limitano le quote (*proportion*) di ciascun asset che possono essere tenute nel portafoglio e modellano situazioni in cui gli investitori richiedono di avere solo posizioni lunghe ($w_i \geq 0$), o specifiche quote di determinati asset.

Limiti di fatturato in acquisto o vendita (*Turnover limits in purchase or sale*). Questi vincoli impongono limiti superiori alla variazione delle partecipazioni da un periodo all'altro (ad esempio per limitare le quote aggiunte o sottratte in caso di riequilibrio, o per modellare commissioni amministrative e tasse periodiche).

Limiti di trading (*Trading limits*). Questi vincoli impongono limiti inferiori alla variazione dei possedimenti da un periodo al successivo (ad esempio, se le modifiche al portafoglio devono essere applicate per scambiare un volume minimo per ogni posizione).

Dimensione del portafoglio (*Size of portfolio*). Si tratta di imporre un limite al numero di asset che possono essere inclusi nel portafoglio.

7 Selezione del portafoglio

7.1 Selezione del portafoglio (*portfolio selection*)

Quando un portafoglio si discosta dal ritorno atteso dell'investitore, le sue posizioni devono essere riviste aumentando o diminuendo (eventualmente fino a zero) i loro pesi nel portafoglio, al fine di allineare il portafoglio agli obiettivi finanziari dell'investitore.

Il problema che ci si pone è come fare questa riallocazione della ricchezza efficacemente, aumentando i guadagni futuri, attraverso una sequenza finita di periodi di trading, conforme al programma di un investitore per la revisione delle posizioni di portafoglio.

Per modellare le soluzioni a questo problema, ci concentriamo su una semplice situazione di un investitore che è lungo in un numero m di titoli e con un determinato orizzonte di investimento.

Partiamo dal presupposto che non ci sono costi di transazione e che l'unica limitazione per un investitore di negoziare qualsiasi importo di ciascun titolo in qualsiasi momento è la somma di denaro che possiede in quel momento.

Il tempo tra la data attuale e il termine della vita del portafoglio è suddiviso in n periodi di trading, delimitati da istanti temporali $t = 0, \dots, n$, con $t = 0$ che rappresenta il tempo iniziale e $t = n$ il tempo finale.

Alla fine di ogni periodo $[t-1, t]$, $t = 1, \dots, n$, la quota di ricchezza investita in ogni posizione viene rivista, essendo massimizzare la ricchezza totale alla data finale l'obiettivo complessivo.

La variazione del prezzo di mercato per un dato periodo è rappresentata dal vettore di mercato $\mathbf{x}_t = (x_{t1}, \dots, x_{tm})$, una sequenza di prezzi relativi (ovvero ritorni lordi semplici) per il periodo di trading degli m titoli: ogni $x_{ti} = P_i(t)/P_i(t-1)$ è il rapporto tra prezzo di chiusura e prezzo di apertura (prezzo relativo) dell' i -esimo titolo per il periodo $[t-1, t]$.

La distribuzione della ricchezza tra gli m titoli per il periodo dato è rappresentata dal vettore di portafoglio $\mathbf{w}_t = (w_{t1}, \dots, w_{tm})$ con entrate non negative sommando a uno; cioè $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, dove $\mathcal{W} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^m, \sum_{j=1}^m w_j = 1\}$

Quindi, un investimento secondo il portafoglio \mathbf{w}_t produce un aumento della ricchezza, rispetto al vettore di mercato \mathbf{x}_t per il periodo $[t-1, t]$, di un fattore di

$$\mathbf{w}_t' \cdot \mathbf{x}_t = \sum_{j=1}^m w_{tj} x_{tj}.$$

Una sequenza di n investimenti secondo una selezione di n vettori di portafoglio $\mathbf{w}^n = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ si traduce in un aumento della ricchezza di

$$S_n(\mathbf{w}^n, \mathbf{x}^n) = \prod_{t=1}^n \mathbf{w}_t' \cdot \mathbf{x}_t = \prod_{t=1}^n \sum_{j=1}^m w_{tj} x_{tj}$$

dove $\mathbf{x}^n = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ è la sequenza dei vettori relativi ai prezzi corrispondenti agli n periodi di trading considerati.

La quantità $S_n(\mathbf{w}^n, \mathbf{x}^n)$ è il **fattore di ricchezza** (*wealth factor*) raggiunto da \mathbf{w}^n rispetto alla sequenza dei vettori di mercato \mathbf{x}^n .

(Se l'orizzonte di investimento è lungo non voglio mantenere fisso il mio portafoglio, voglio ragionare in modo dinamico sui miei pesi, mi adatto ai cambiamenti del mercato ad esempio.

Stime di rendimento e rischio che non sappiamo se si materializzeranno, se cambia qualcosa devo ribilanciare il mio portafoglio. Può ad esempio

succedere che i prezzi delle azioni devino di più di ciò che si aspetta. Tutti i pesi devono essere quindi divisi di nuovo.

Si possono controllare solo i pesi, nel momento in cui i ritorni iniziano a cambiare bisogna rimodellare i pesi. Lo riporto in una condizione di ritorni attesi iniziale.

A seconda della granularità del dato considerato cambia anche la frequenza di ribilanciamento.

Assunzione: per aprire una nuova posizione bisogna avere il denaro per farlo. Consideriamo di conoscere l'andamento dei prezzi di mercato nel periodo in questione).

7.1.1 Un esempio

In ogni momento dell'investimento, un j -esimo titolo ($1 \leq j \leq m$) è rappresentato dal

vettore di portafoglio $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathcal{W}$ (dove 1 è nella j -esima coordinata)

Ha un fattore di ricchezza per n periodi di trading pari al ritorno semplice lordo del periodo n :

$$S_n(e_j, x^n) = \prod_{t=1}^n x_{tj} = \prod_{t=1}^n \frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} = R_j(n) + 1.$$

(Vettore per ogni t , ritorni attivi degli m asset. L'intero capitale l'ho investito sul j -esimo. Sparisce il w la sommatoria (pesi tutti = 0)).

7.2 Strategia di selezione del portafoglio

Definizione. Una strategia di selezione del portafoglio per n periodi di trading è una sequenza di n scelte di vettori di portafoglio $\mathbf{w}^n = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$, dove ogni $w_t \in \mathcal{W}$. Un algoritmo di selezione del portafoglio è un algoritmo che produce una strategia di selezione del portafoglio.

Se ALG è un algoritmo di selezione del portafoglio, identificandolo con il suo output (una strategia di selezione \mathbf{w}^n), possiamo anche usare $S_n(\text{ALG}, \mathbf{x}^n)$ per indicare il fattore ricchezza di ALG rispetto a una sequenza di vettori di mercato \mathbf{x}^n .

7.2.1 Valutazione delle performance delle strategie di selezione del portafoglio

Per valutare le prestazioni di una strategia di selezione del portafoglio (o algoritmo), indipendentemente da qualsiasi proprietà statistica dei ritorni, la procedura comune è quella di confrontare il suo fattore di ricchezza con il fattore di ricchezza raggiunto dalla migliore strategia in una classe di strategie di investimento di riferimento (una strategia di riferimento).

Un'alternativa è confrontare il loro tasso di crescita esponenziale, che per un algoritmo di selezione ALG è definito come

$$W_n(ALG, x^n) = \frac{1}{n} \ln S_n(ALG, x^n)$$

Possiamo riscrivere il fattore di ricchezza $S_n(ALG, x^n)$ in termini di tasso di crescita esponenziale come

$$S_n(ALG, x^n) = \exp(nW_n(ALG, x^n)).$$

7.2.2 Esempio Buy and Hold

Questa è la strategia più semplice in cui un investitore inizialmente alloca tutta la sua ricchezza tra m titoli in base al vettore di portafoglio $w_1 \in \mathcal{W}$, e non fa più trading.

Il fattore ricchezza di questa strategia dopo n periodi di trading è

$$S_n(w_1, x^n) = \sum_{j=1}^m w_{1j} \prod_{t=1}^n x_{tj}$$

(W non è dipendente da t e quindi posso tirarla fuori dalla sommatoria).

7.2.3 Portafogli ribilanciati costantemente

Un portafoglio ribilanciato costantemente (CRP) è una strategia di *market timing* che utilizza la stessa distribuzione dei pesi in tutti i periodi di trading.

Sia CRP_w la strategia CRP con pesi fissi $w = (w_1, \dots, w_m)$.

Il fattore ricchezza ottenuto applicando questa strategia per n periodi di trading è

$$S_n(CRP_w, x^n) = \prod_{t=1}^n \sum_{j=1}^m w_j x_{tj}.$$

Per una sequenza di vettori di mercato x^n , il miglior portafoglio ribilanciato costantemente è dato dalla soluzione w^* del problema di ottimizzazione:

$$\max_{w \in \mathcal{W}} S_n(CRP_w, x^n)$$

cioè w^* massimizza la ricchezza $S_n(CRP_w, x^n)$ su tutti i portafogli w di m valori reali positivi fissati applicati alla sequenza di n vettori di mercato x^n .

La strategia ottimale CRP_{w^*} supera le seguenti strategie comuni di portafoglio:

- Buy and hold
- Media aritmetica delle azioni
- Media geometrica delle azioni

La miglior strategia del portafoglio costantemente ribilanciato CRP_{w^*} è una straordinaria strategia redditizia per le proprietà soprantanti; tuttavia, non è realistica nella pratica perché può essere calcolata solo con una conoscenza completa del futuro andamento del mercato.

(Problema di ottimizzazione. Trovo i pesi considerando la composizione sull'intero periodo.

2 scenari: investimento di 10 anni, con Markovitz e buy and hold.

Qui invece non si richiede solo il ritorno atteso ma il ritorno di ogni periodo.

La CRP è un ottimo strumento a posteriori ma vorrebbe dire di avere conoscenza totale sul periodo, che non ho. Previsione e incertezza. Ottimo benchmark a posteriori per calcolare l'ottimo wealth factor).

7.3 Volatilità

Una delle caratteristiche più importanti delle attività finanziarie, e forse la più rilevante per gli investitori professionali, è la volatilità degli asset.

La volatilità si riferisce a un grado di fluttuazione dei ritorni delle attività. Tuttavia è qualcosa che non può essere osservato direttamente.

Si può osservare il ritorno di un titolo ogni giorno, confrontando il cambio di prezzo dal giorno precedente a quello attuale, ma non si può osservare come il ritorno oscilla in un giorno specifico.

Occorre fare ulteriori osservazioni sui ritorni (e sul prezzo) a orari diversi nello stesso giorno per fare una stima del modo in cui variano i ritorni giornalieri (in modo da poter parlare di volatilità giornaliera – *daily volatility*), ma questi potrebbero non essere sufficienti per sapere con precisione come oscilleranno i ritorni.

Pertanto la volatilità non può essere osservata ma stimata da qualche modello di ritorni degli asset.

Una prospettiva generale, utile come cornice per i modelli di volatilità, è quella di considerare la volatilità come la deviazione standard condizionata dei ritorni degli asset.

(Molti si spostano sulle informazioni pubbliche a pagamento tipo microprice, hanno indicazione di massima ma maggiori della volatilità intradaily. Meglio di stimare la volatilità in modo giornaliero.

2 aspetti cui si deve prestare attenzione: informazioni cui si accede e velocità).

Ultima modifica: 29-11-2021