Assignment 2

Elisa Piolai Mat. 856591

ESERCIZIO 1: Dato il seguente tableau ottimo, e sapendo che il problema è un problema di massimizzazione, che i profitti delle singole attività sono 3,5,0,0,0 e che x3, x4 e x5 sono le varibili di slack del 1°, 2° e 3° vincolo rispettivamente

		x1	x2	X3	x4	x5
z	36	0	0	0	3/2	1
x_3	2	0	0	1	1/3	-1/3
x_2	6	0	1	0	1/2	0
x_1	2	1	0	0	-1/3	1/3

B^{-1}

a. per quali variazioni del profitto dell'attività 2, la soluzione ottima corrente non è più ammissibile?
b. determinare per quali variazioni del profitto dell'attività 2 la soluzione ottima corrente rimane tale.
c. data la soluzione ottima corrente, se viene introdotta una nuova attività x_6 con profitto 5 e vettore tecnologico A_6 = (5, 1, 1) è opportuno svolgere l'attività 6?
d. se la risposta al punto c) è SI, calcolare la nuova soluzione ottima

a Le variazioni del profitto di un'attività non vanno ad inficiare l'ammissibilità della soluzione ottima corrente. Pertanto possiamo dire che per nessuna variazione del profitto dell'attività 2 la soluzione ottima corrente non e' più ammissibile.
La soluzione corrente in seguito alla variazione dei profitti potrebbe non essere più ottima, ma resta ammissibile.

b Variare il profitto dell'attività 2 significa:

$C_2 \longrightarrow C_2 + \delta$

Per mantenere come soluzione ottima quella corrente devo verificare che tutti i prezzi ridotti siano ≥ 0 e inoltre il prezzo ridotto delle variabili di base debbano essere 0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
36	0	$0 - \delta$	0	3/2	1
2	0	0	1	1/3	-1/3
6	0	1	0	1/2	0
2	1	0	0	-1/3	1/3

L'aggiunta di $-\delta$ rende negativo il profitto dell'attività 2, quindi devo aggiornare il tableau in modo tale da azzerare il coefficiente.
Sommo quindi alla riga 0 la riga 2 moltiplicata per δ

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$36+6\delta$	0	0	0	$3/2+\delta/2$	1
2	0	0	1	$1/3$	$-1/3$
6	0	1	0	$1/2$	0
2	1	0	0	$-1/3$	$1/3$

Dunque verifico che i coefficienti siano tutti positivi:

$\frac{3}{2}+\frac{\delta}{2}\geqslant 0$

$\frac{\delta}{2}\geqslant -\frac{3}{2}$

$\delta \geqslant -3$

Quindi la soluzione rimane ottima se l'attivita' 2 ha una variazione nell'intervallo $(-\infty,-3]$

(c) Attivita' 6: $C_6=5$, $A_6^T=(5,1,1)$

Aggiungendo l'attivita' 6 devo verificare che la soluzione corrente sia ancora quella ottimale. Siccome per essere una soluzione ottimale il tableau corrispondente deve avere profitti ridotti non negativi, deve verificarsi la seguente condizione:

$\hat{c}_6 = -c_6 + c_B B^{-1}A_6 \geqslant 0$

$$-5+\left(0,\frac{3}{2},1\right)\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} = -5+0+\frac{3}{2}+1 = \frac{-10+3+2}{2} = -\frac{5}{2}\leqslant 0$$

Siccome e' negativo la soluzione corrente non e' piu' ottima

E' opportuno far entrare in base la variabile x_6 perché ha profitto ridotto <0, quindi si ha un tasso di crescita positivo.

(d) Ricalcolo la nuova soluzione ottima

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
36	0	0	0	$3/2$	1	$\hat{c}_6$
2	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	
6	0	1	0	$1/2$	0	$B^{-1}A_6$
2	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	

$$B^{-1}A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1/3-1/3 \\ 1/2 \\ -1/3+1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
36	0	0	0	3/2	1	-5/2
2	0	0	1	1/3	-1/3	5
6	0	1	0	1/2	0	1/2
2	1	0	0	-1/3	1/3	0

Per calcolare la nuova soluzione ottimale applico il metodo del simplesso.
La variabile entrante è x_6 dato che ha il tasso di crescita maggiore. Per trovare la variabile uscente applico il test del rapporto minimo:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	36	0	0	0	3/2	1	-5/2	
min	$2 \rightarrow \frac{2}{5}$	0	0	1	1/3	-1/3	5	x_3
	$6 \rightarrow 12$	0	1	0	1/2	0	1/2	x_2
	2	1	0	0	-1/3	1/3	0	x_1

Variabile entrante x_6
Variabile uscente x_3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
37	0	0	1/2	5/3	5/6	0	
2/5	0	0	1/5	1/15	-1/15	1	x_6
29/5	0	1	-1/10	7/15	1/30	0	x_2
2	1	0	0	-1/3	1/3	0	x_1

I prezzi ridotti sono tutti positivi, pertanto abbiamo trovato la nuova soluzione ottimale $(\underline{x}, x_6)$:

$\left(2,\ \frac{29}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{2}{5}\right)$

ESERCIZIO 2: Dato il seguente problema di PL

$$\max z = 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \le 12$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1$$
$$x_1;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \le 0$$

- Costriuire il problema duale
- Risolverlo il problema duale graficamente
- Calcolare la soluzione ottima utilizzando la teoria della dualità.

a) Costruisco il problema duale:

Il problema primale e' di massimizzazione, quindi il corrispondente problema duale sara' di minimizzazione.

$\min\ 12y_1 + y_2$

Applico dunque il metodo SOB:

S $x_1 + x_2 - 2x_3 \le 12$

S $x_1 + x_2 + x_3 \le 1$

S $x_1 \ge 0$

S $x_2 \ge 0$

B $x_3 \le 0$

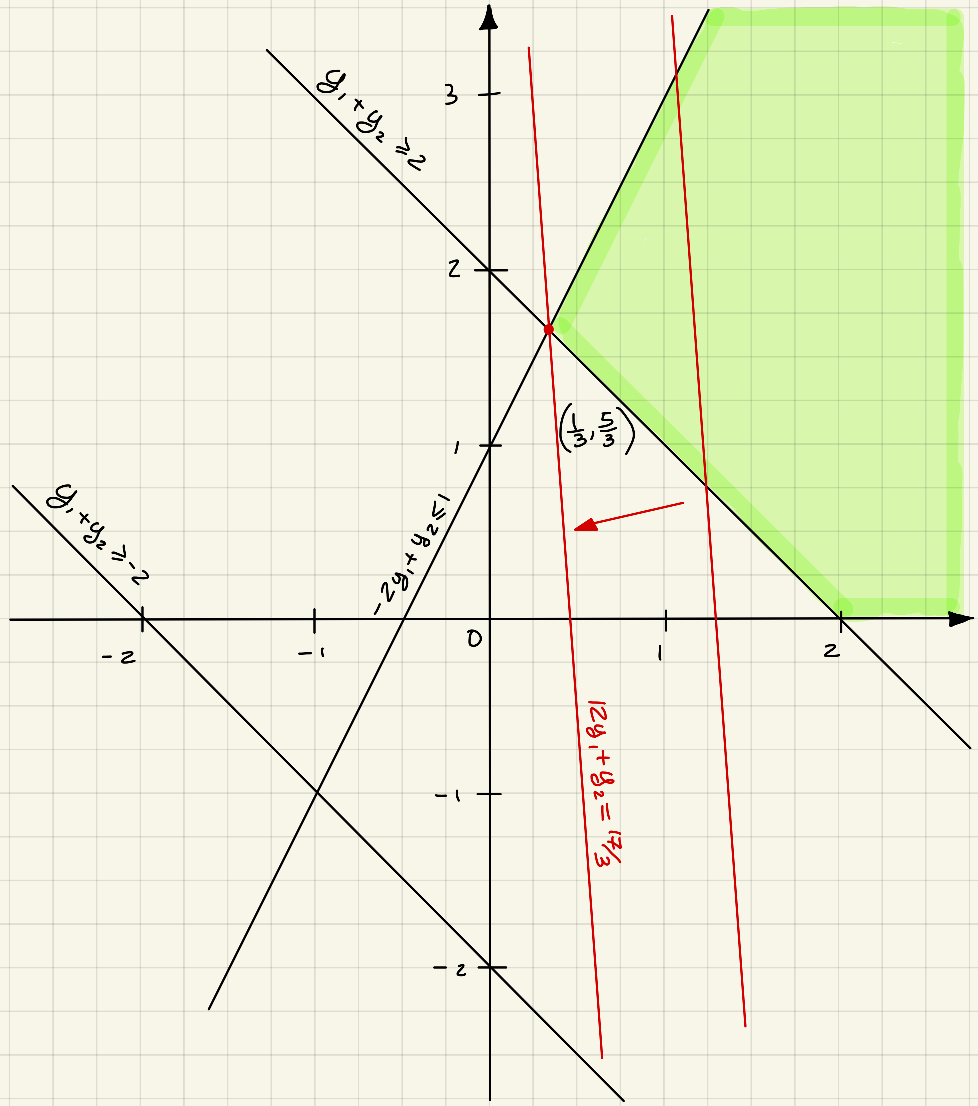
Il problema duale corrispondente sara':

$$\min\ 12y_1 + y_2$$
$$y_1 + y_2 \ge 2$$
$$y_1 + y_2 \ge -2$$
$$-2y_1 + y_2 \le 1$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

b) Data la natura del problema a 2 variabili, e' possibile ricavare la soluzione graficamente

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2 \\ -2y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 2 - y_1 \\ -2y_1 + 2 - y_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ y_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La soluzione ottima e' quindi $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$



c) Per calcolare la soluzione ottima del primale, una volta che si conosce la soluzione del duale, possiamo usare la teoria della dualita': utilizziamo quindi le condizioni di complementarieta'.

$$y_1(x_1+x_2-2x_3-12)=0 \quad (1)$$
$$y_2(x_1+x_2+x_3-1)=0 \quad (2)$$
$$x_1(y_1+y_2-2)=0 \quad (3)$$
$$x_2(y_1+y_2+2)=0 \quad (4)$$
$$x_3(-2y_1+y_2-1)=0 \quad (5)$$

Sappiamo che la soluzione del duale e' $y_1=\frac{1}{3}$, $y_2=\frac{5}{3}$

Siccome $y_1, y_2 > 0$, sappiamo essere vincoli attivi:

$x_1+x_2-2x_3=0 \quad (1)$

$x_1+x_2+x_3=0 \quad (2)$

Inoltre:

$y_1+y_2-2 \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{5}{3}-2 \Rightarrow 0 \quad (3)$

$y_1+y_2+2 \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{5}{3}+2 \Rightarrow 4$, quindi $x_2=0 \quad (4)$

$-2y_1+y_2-1 \Rightarrow -\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-1 \Rightarrow 0 \quad (5)$

Sapendo che $x_2=0$, risolviamo il sistema a 3 incognite:

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=12 \\ x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=12+2x_3 \\ 12+2x_3+x_3=1 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=12-22/3 \\ x_3=-11/3 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=14/3 \\ x_3=-11/3 \\ x_2=0 \end{cases}$$

La soluzione ottima del primale è quindi:

$$\left(\frac{14}{3}, 0, -\frac{11}{3}\right)$$