Assignment 3

Elisa Pioldi Mat. 856591

Esercizio 1. Una fabbrica deve pianificare l'attività della propria linea di produzione costituita da n possibili prodotti. La produzione di un'unità dell'articolo i richiede o_i ore di manodopera di cui in totale sono disponibili H ore. Per la vendita di una unità dell'articolo i è previsto un guadagno pari a g_i. Si vogliono determinare i livelli di produzione di modo da massimizzare il guadagno totale della fabbrica.

- Costruire un opportuno modello di Programmazione Lineare per tale problema.
- Discutere come cambia la formulazione nel caso in cui:
  - Degli n prodotti, se ne vogliano mettere in produzione al massimo m (con $m < n$).
  - La produzione del primo oggetto comporti la non produzione del secondo oggetto e viceversa.
  - Se si decide di produrre un oggetto, allora il livello di produzione di tale oggetto deve essere almeno $p_i > 0$.

1. Funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^{n} g_i x_i$$

Vincoli funzionali

$$\sum_{i=1}^{n} o_i x_i \leq H$$

Vincoli di non negatività:

$$\forall i \quad x_i \geq 0 \,, \quad 1 \leq i \leq n$$

2. Introduciamo le seguenti variabili binarie

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il prodotto } i \text{ viene prodotto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Queste sono legate alle variabili x_i:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{allora } x_i > 0 \\ 0 & \text{allora } x_i = 0 \end{cases}$$

Introduciamo una costante M "molto" grande

$\forall i \quad x_i \leq M y_i$ se $y_i = 0$ allora $x_i = 0$ ma se $y_i = 1$ allora x_i puo' assumere qualunque valore fino al massimo possibile M a $\sum_{i=1}^{m} y_i \leq m$ Posso scegliere fino a m prodotti

b $y_1 + y_2 \leq 1$ Se scelgo il prodotto 1 $y_1 = 1$ quindi $y_2 = 0$ e viceversa

c $\forall i \quad x_i \geq p_i y_i \quad 1 \leq i \leq m$ Se $y_i = 1$ x_i viene prodotto e deve essere $\geq p_i$

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare Intera.

$$\max z = 2x + y$$

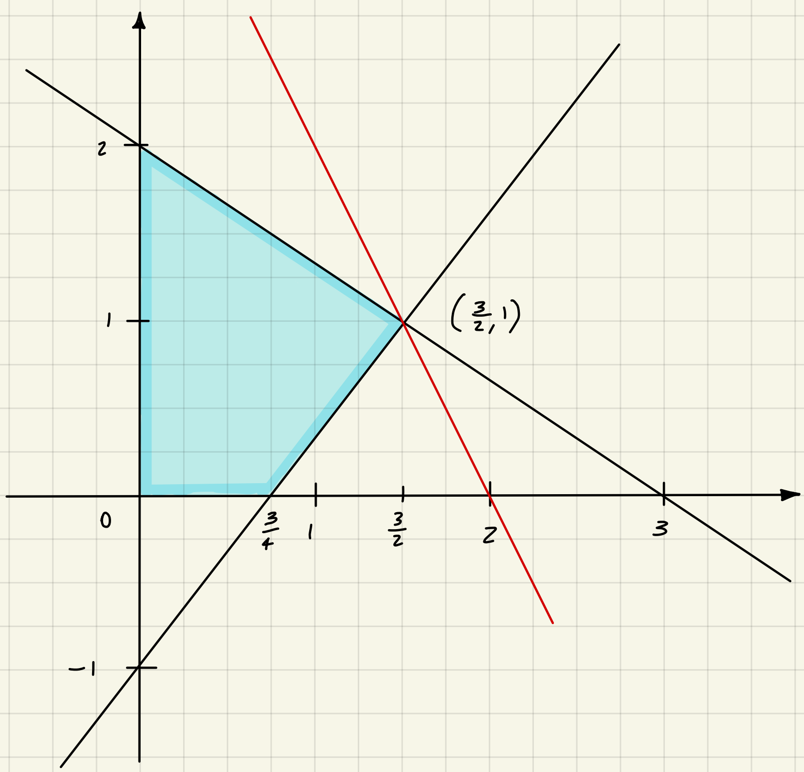
$$4x - 3y \leq 3$$

$$2x + 3y \leq 6$$

$$x, y \in Z^+$$

- Usando la strategia di esplorazione Best Bound, si trovi la soluzione del problema.
- Discutere come potrebbe cambiare l'albero nel caso si scelga la strategia di esplorazione Depth First a sinistra (non è necessario svolgere di nuovo l'albero).
- Discutere come potrebbe cambiare l'albero nel caso si scelga la strategia di esplorazione Depth First a destra (non è necessario svolgere di nuovo l'albero).

1 Disegniamo prima di tutto la regione ammissibile e individuiamo la soluzione del problema



La soluzione trovata è $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ con $z = 4$

ITERAZIONE 1

- Scelta delle variabili di branching

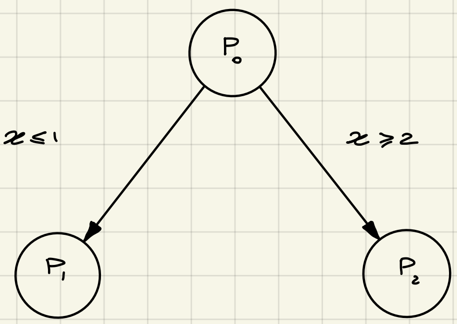
  $\left(\frac{3}{2}, 1\right) \longrightarrow$ scelgo x dato che non e' intera

  Scelta dei nuovi sottoproblemi da analizzare

  P_1 : problema P_0 con $x \leq 1$

  P_2 : problema P_0 con $x \geq 2$

albero di branching



$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

$UB = 4$

$z^* = -\infty$

- Soluzione dei RL, bounding e fathoming

SOLUZIONE DEL RILASSAMENTO LINEARE PER IL PROBLEMA P_1

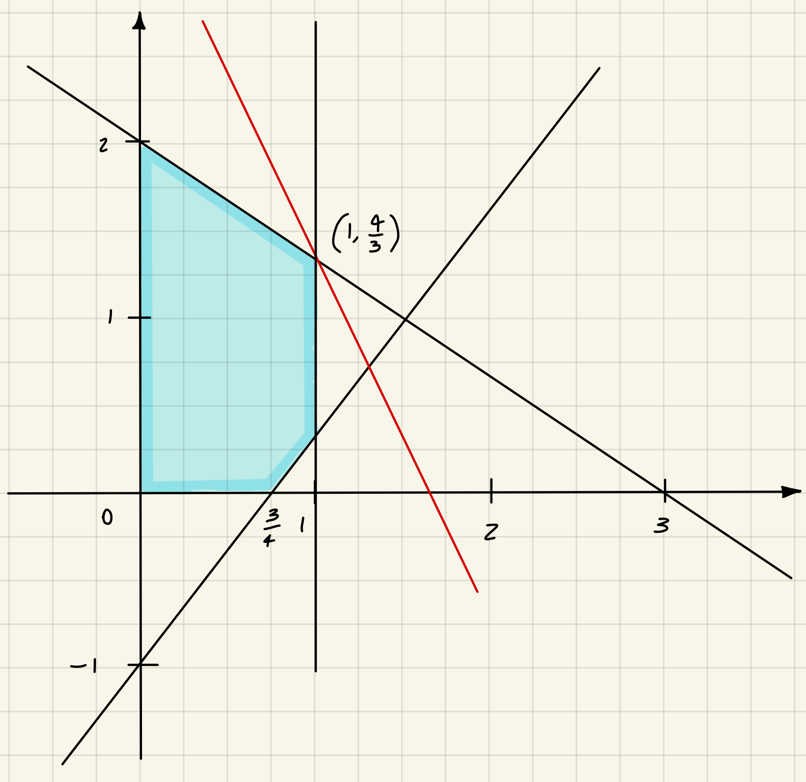
$x \geq 0$

$y \geq 0$

$4x - 3y \leq 3$

$2x + 3y \leq 6$

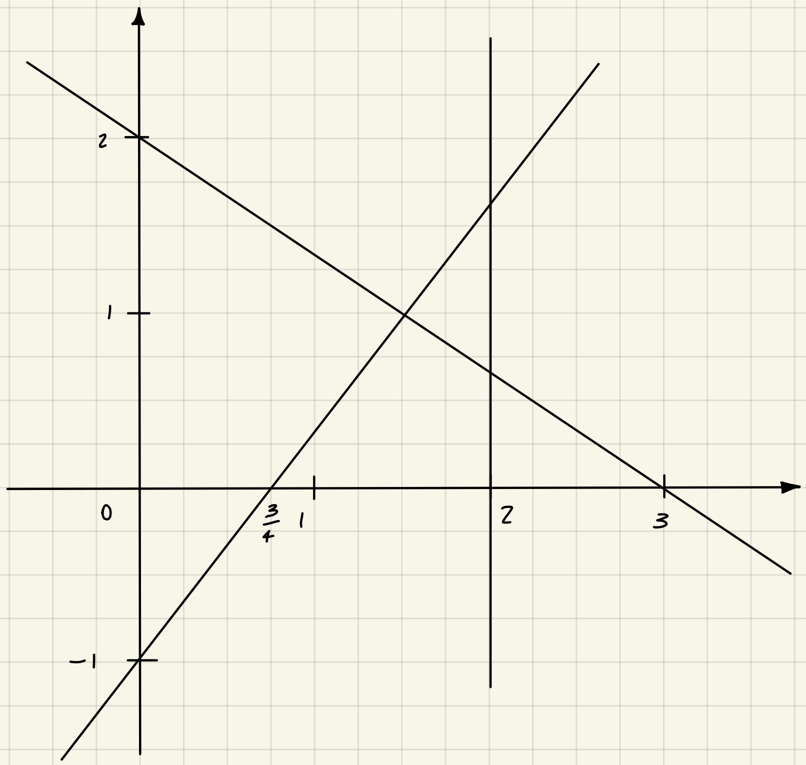
$x \leq 1$



La soluzione del problema rilassato e' data da $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ con $z = \frac{10}{3}$

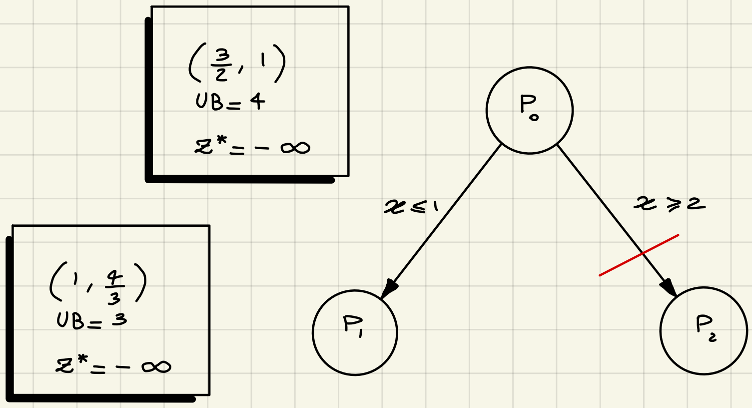
SOLUZIONE DEL RILASSAMENTO LINEARE PER IL PROBLEMA P_1

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x - 3y \leq 3 \\ 2x + 3y \leq 6 \\ x \geq 2 \end{cases}$$



E' inammissibile $\longrightarrow$ posso applicare il criterio di Fathoming

albero di branching



ITERAZIONE 2

- Scelta delle variabili di branching

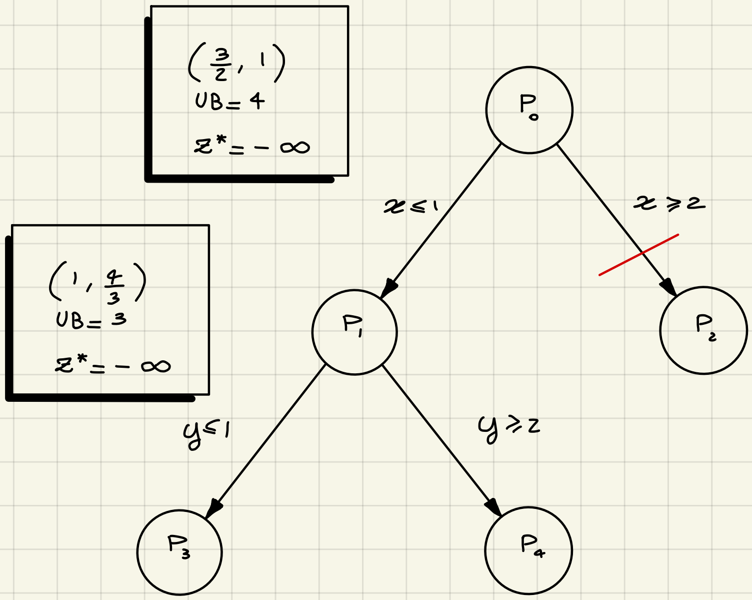
  $\left(1, \frac{4}{3}\right) \longrightarrow$ scelgo y dato che non e' intera

Scelta dei nuovi sottoproblemi da analizzare

P_3: problema P_1 con $y \leq 1$

P_4: problema P_1 con $y \geq 2$

albero di branching



- Soluzione dei RL, bounding e fathoming

SOLUZIONE DEL RILASSAMENTO LINEARE PER IL PROBLEMA P_1

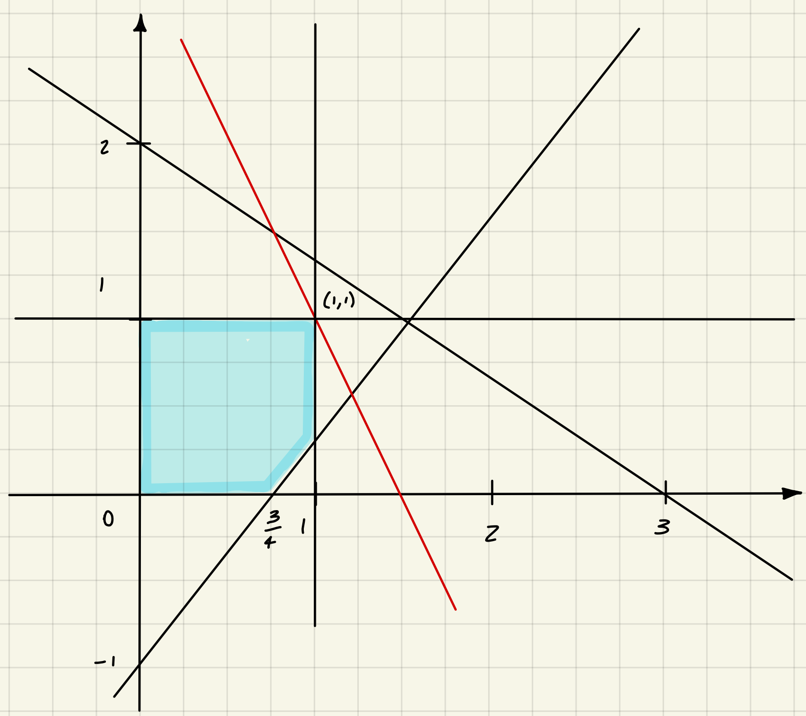
$x \geq 0$

$y \geq 0$

$4x - 3y \leq 3$

$2x + 3y \leq 6$

$y \leq 1$

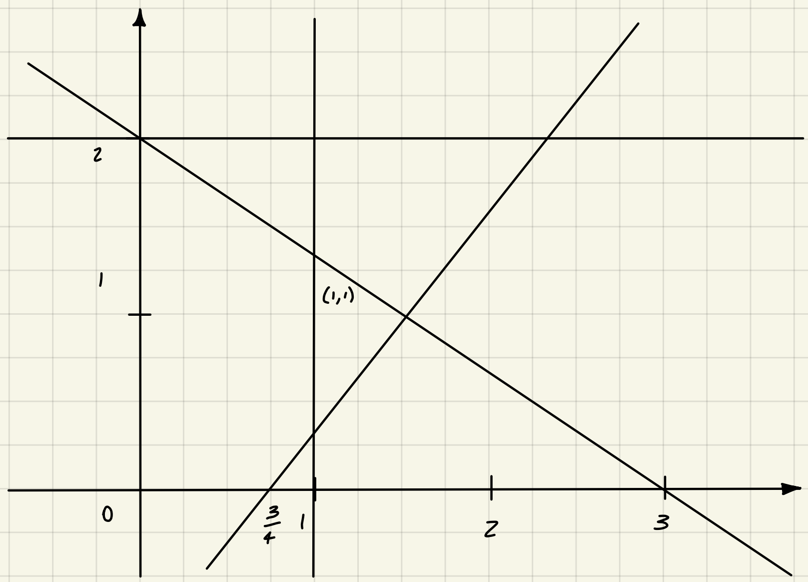


La soluzione del problema rilassato è data da $(1,1)$ con $z=3$

Posso chiudere questo sotto-problema in quanto la soluzione è intera

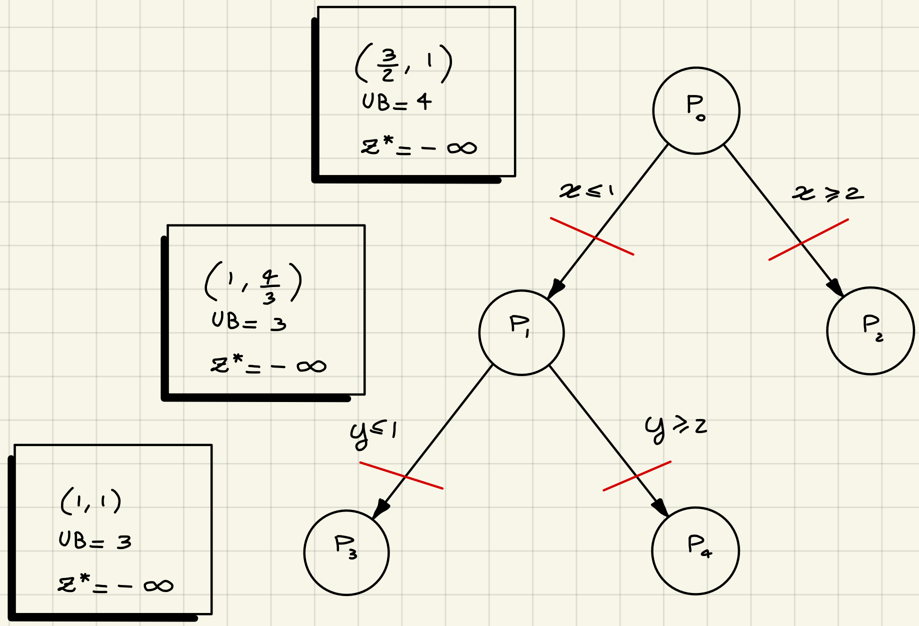
SOLUZIONE DEL RILASSAMENTO LINEARE PER IL PROBLEMA P_1

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$4x-3y \leq 3$
$2x+3y \leq 6$
$y \geq 2$



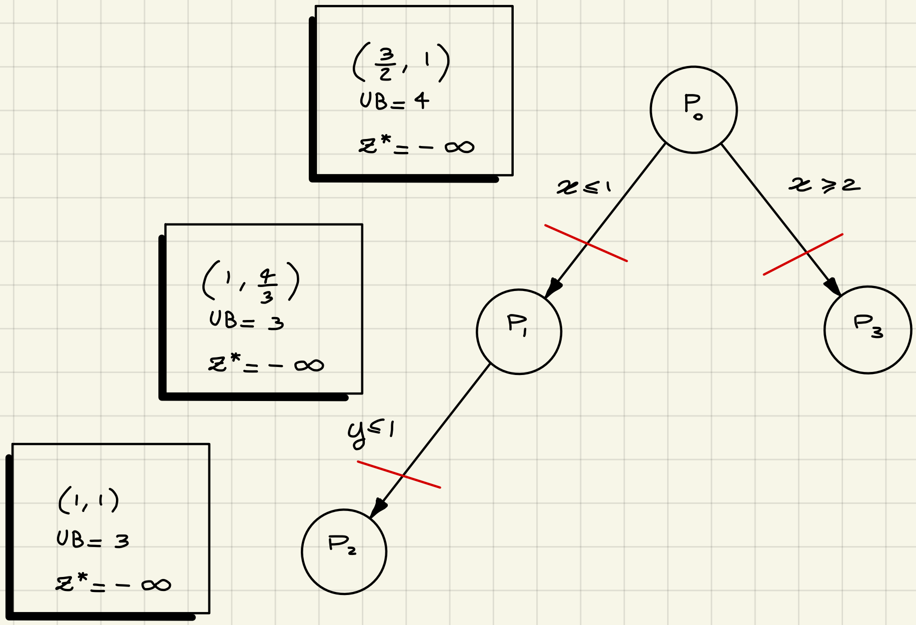
È inammissibile → posso applicare il criterio di fathoming

albero di branching



La soluzione ottima del problema è $\tilde{x} = (1,1)$ con $\tilde{z} = 3$

(2) Nella strategia di esplorazione depth first a sinistra l'albero risultante cambierà nel seguente modo



Possiamo infatti evitare di esplorare il nodo P_4 in quanto abbiamo trovato una soluzione intera con UB = 3

(3) Nella strategia di esplorazione depth first a destra l'albero risultante non cambia (non ci sono particolari condizioni che permettono di fermare prima l'esplorazione).

A cambiare è invece l'ordine in cui vengono esplorati i nodi. Si avrà infatti: