Assignment 1

Elisa Pioldi   Mat. 856591

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare sia tramite il metodo grafico che tramite il metodo del simplesso

$$\max 3x_1 + 5x_2$$

$$7x_1 - 3x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Nello specifico:

- nella soluzione grafica: evidenziare i vertici e gli spigoli
- per ogni vertice della regione ammissibile indicare: la soluzione di base corrispondente (specificando le variabili in base e fuori base) e i vertici adiacenti
- identificare almeno una soluzione di base non ammissibile specificando quale/i vincoli sono violati
- illustrare per esteso ogni passo dell'algoritmo del simplesso (inizializzazione, test di ottimalità, selezione variabile entrante in base, selezione della variabile uscente dalla base, ...)

Risoluzione grafica

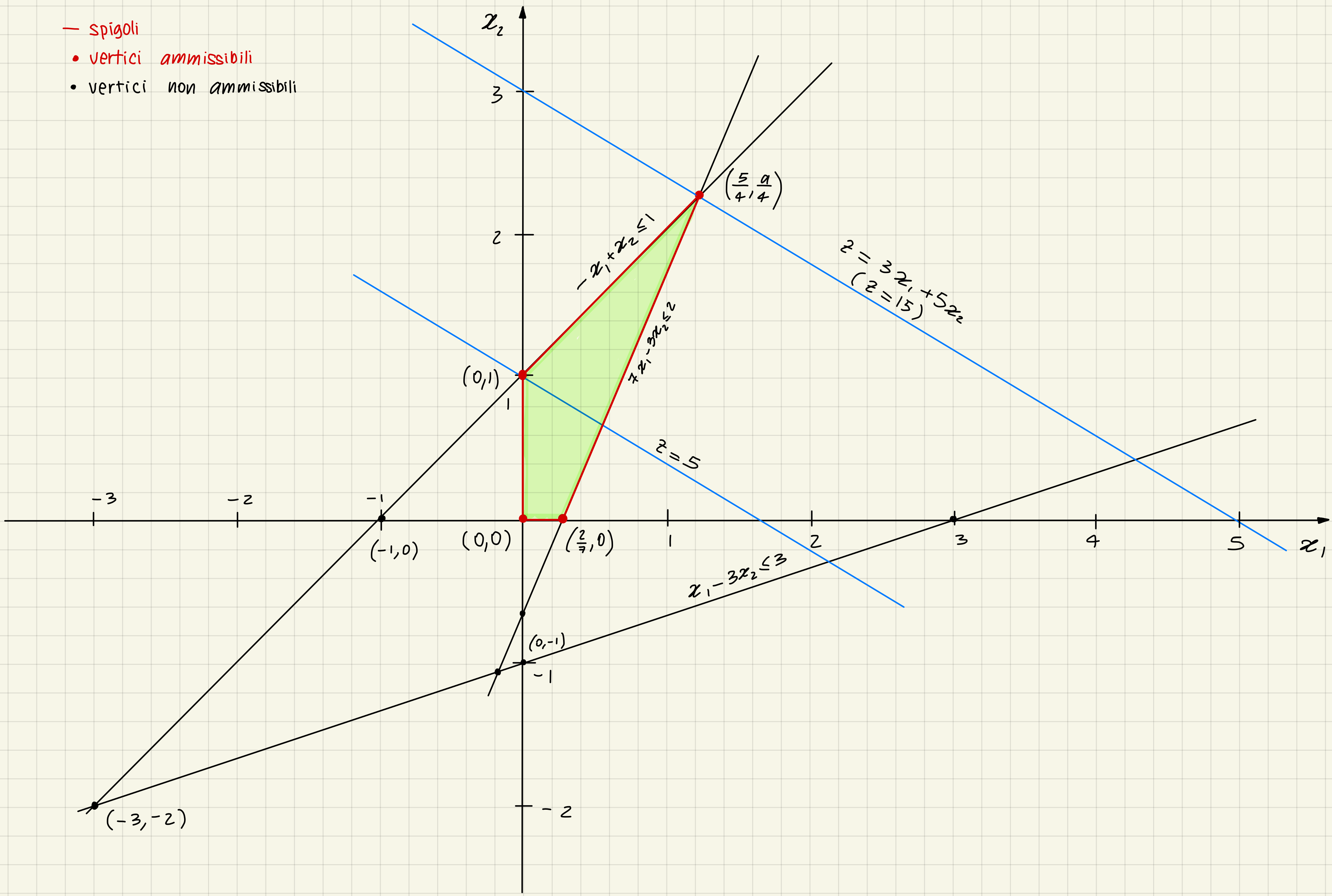
Intersezioni con gli assi:

$7x_1 - 3x_2 = 2$
$x_1 = \frac{2}{7} \approx 0.28$
$x_2 = -\frac{2}{3} \approx -0.66$

$-x_1 + x_2 = 1$
$x_1 = -1$
$x_2 = 1$

$x_1 - 3x_2 = 3$
$x_1 = 3$
$x_2 = -1$

$z = 3x_1 + 5x_2 = 5$ → coefficienti entrambi positivi → cresce
$x_1 = \frac{5}{3} = 1.6$
$x_2 = 1$


— spigoli
• vertici ammissibili
• vertici non ammissibili
x_2
x_1
$\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$
$-x_1 + x_2 \le 1$
$7x_1 - 3x_2 \le 2$
$z = 3x_1 + 5x_2$
$(z = 15)$
$z = 5$
$x_1 - 3x_2 \le 3$
$(0,1)$
$(0,0)$
$\left(\frac{2}{7}, 0\right)$
$(-1,0)$
$(0,-1)$
$(-3,-2)$

Vertici:

① $(0,0)$
② $(2/7, 0)$
③ $(0,1)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ 7x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ 7x_1 - 3(x_1+1) = 2 \rightarrow 7x_1 - 3x_1 - 3 = 2 \rightarrow 4x_1 = 5 \rightarrow x_1 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4} \\ x_1 = \frac{5}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} = 1.25 \\ x_2 = \frac{9}{4} = 2.25 \end{cases}$$

④ $(5/4, 9/4)$

Vertici adiacenti

	vertici ammissibili	vertici ammissibili adiacenti
(1)	$(0,0)$	$\left(\frac{2}{7}, 0\right)$; $(0,1)$
(2)	$\left(\frac{2}{7}, 0\right)$	$(0,0)$; $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$
(3)	$(0,1)$	$(0,0)$; $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$
(4)	$\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$	$(0,1)$; $\left(\frac{2}{7}, 0\right)$

Soluzioni di base

Per trovare le rispettive soluzioni di base scriviamo innanzitutto la forma aumentata:

$$\begin{aligned} z - 3x_1 - 5x_2 \quad &= 0 \\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

① $(0,0) \Rightarrow (0,0,2,1,3)$

$x_3 = 2$

$x_4 = 1$

$x_5 = 3$

variabili in base: x_3, x_4, x_5

variabili fuori base: x_1, x_2

---

② $\left(\frac{2}{7}, 0\right) \Rightarrow (2/7, 0, 0, 9/7, 19/7)$

$7 \cdot \frac{2}{7} + x_3 = 2 \rightarrow x_3 = 0$

$-\frac{2}{7} + x_4 = 1 \rightarrow x_4 = \frac{9}{7}$

$\frac{2}{7} + x_5 = 3 \rightarrow x_5 = \frac{19}{7}$

variabili in base: x_1, x_4, x_5

variabili fuori base: x_2, x_3

---

③ $(0,1) \Rightarrow (0,1,5,0,6)$

$-3 + x_3 = 2 \rightarrow x_3 = 5$

$1 + x_4 = 1 \rightarrow x_4 = 0$

$-3 + x_5 = 3 \rightarrow x_5 = 6$

variabili in base: x_2, x_3, x_5

variabili fuori base: x_1, x_4

---

④ $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right) \Rightarrow (5/4, 9/4, 0, 0, 17/2)$

$7 \cdot \frac{5}{4} - 3 \cdot \frac{9}{4} + x_3 = 2 \rightarrow \frac{35}{4} - \frac{27}{4} + x_3 = 2 \rightarrow x_3 = 0$

$-\frac{5}{4} + \frac{9}{4} + x_4 = 1 \rightarrow x_4 = 0$

$\frac{5}{4} - 3 \cdot \frac{9}{4} + x_5 = 3 \rightarrow \frac{5}{4} - \frac{27}{4} + x_5 = 3 \rightarrow x_5 = \frac{11}{2} + 3 = \frac{17}{2}$

variabili in base: x_1, x_2, x_5

variabili fuori base: x_3, x_4

Esempio soluzione di base non ammissibile

Vertice intersezione $-x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 - 3x_2 = 3$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ x_1 - 3(x_1 + 1) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ x_1 - 3x_1 - 3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ -2x_1 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$(-3, -2)$

- $7 \cdot (-3) - 3 \cdot (-2) + x_3 = 2$

  $-21 + 6 + x_3 = 2$

  $x_3 = 17$
- $3 - 2 + x_4 = 1$

  $x_4 = 0$
- $-3 + 6 + x_5 = 3$

  $x_5 = 0$

$(-3, -2, 2, 0, 0)$

La soluzione di base non e' ammissibile perché il vertice viola il vincolo di non negatività $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

Metodo del simplesso (forma tabellare)

Inizializzazione

$$z - 3x_1 - 5x_2 = 0 \quad (0)$$
$$7x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \quad (1)$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 1 \quad (2)$$
$$x_1 - 3x_2 + x_5 = 3 \quad (3)$$

variabile di base	eq.	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t.n.
z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
x_3	(1)	0	7	-3	1	0	0	2
x_4	(2)	0	-1	1	0	1	0	1
x_5	(3)	0	1	-3	0	0	1	3

Test di ottimalità

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
soluzione di base ammissibile
$(0, 0, 2, 1, 3)$
→ la soluzione non e' ottimale (non tutti i coefficienti di (0) sono non negativi)

1 Iterazione 1

- Selezione della variabile entrante in base: x_2 (minimo coefficiente negativo in (0))
- Selezione della variabile uscente tramite test del rapporto minimo (ignoro se coefficienti negativi)

variabile di base	eq.	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t.n.	rapporto
z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0	
x_3	(1)	0	7	-3	1	0	0	2	
x_4	(2)	0	-1	1	0	1	0	1	1
x_5	(3)	0	1	-3	0	0	1	3	

→ variabile uscente: x_4 (rapporto minimo)

- Determino nuova soluzione di base:

variabile di base	eq.	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t.n.
z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
x_3	(1)	0	7	-3	1	0	0	2
x_4	(2)	0	-1	1	0	1	0	1
x_5	(3)	0	1	-3	0	0	1	3
z	(0)	1	-8	0	0	5	0	5
x_3	(1)	0	4	0	1	3	0	5
x_2	(2)	0	-1	1	0	1	0	1
x_5	(3)	0	-2	0	0	3	1	6

- Test di ottimalità

$x_1 = 0$
$x_4 = 0$
$(0, 1, 5, 0, 6)$
$\longrightarrow$ la soluzione non è ottimale (non tutti i coefficienti di (0) sono non negativi)

② Iterazione 2

- Selezione della variabile entrante in base: x_1 (minimo coefficiente negativo in (0))

- Selezione della variabile uscente tramite test del rapporto minimo:

variabile di base	eq.	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t.n.	rapporto
z	(0)	1	-8	0	0	5	0	5	
x_3	(1)	0	4	0	1	3	0	5	$\frac{4}{5} \rightarrow 0.8$
x_4	(2)	0	-1	1	0	1	0	1	
x_5	(3)	0	-2	0	0	3	1	6	

$\longrightarrow$ variabile uscente: x_3 (rapporto minimo)

- Determino nuova soluzione di base:

	variabile di base	eq.	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t.n.
(0)	z	(0)	1	−8	0	0	5	0	5
(1)	x_3	(1)	0	4	0	1	3	0	5
(2)	x_4	(2)	0	−1	1	0	1	0	1
(3)	x_5	(3)	0	−2	0	0	3	1	6
	z	(0)	1	0	0	2	11	0	15
	x_1	(1)	0	1	0	1/4	3/4	0	5/4
	x_2	(2)	0	0	1	1/4	7/4	0	9/4
	x_5	(3)	0	0	0	1/2	9/2	1	17/2

- Test di ottimalità

$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}, 0, 0, \frac{17}{2}\right)$
$\longrightarrow$ la soluzione è ottimale (entrambi i coefficienti sono positivi)