LINEAARIALGEBRA, osat a ja b

Martti E. Pesonen

Epsilon ry – 21. huhtikuuta 2016

LUKIJALLE

Lineaarialgebran kursseja edeltäviksi opinnoiksi suositellaan jotain lukion matematiikkaa teoreettiselta kannalta täydentävää kurssia, esimerkiksi *Matematiikan johdantokurssia*, jossa matematiikan perusasioita selvitellään huomattavasti abstraktimmalla tasolla kuin mitä asioita on koulussa käsitelty. Osallistujilla odotetaan olevan mm. perustiedot ja -taidot funktioista sekä järjestys- ja ekvivalenssirelaatioista.

Kurssiin liittyy jonkin verran pakollisia tietokonedemonstraatioita, joista osassa keskitytään oppimaan uusia käsitteitä vuorovaikutteisten tehtäväarkkien avulla, ja osassa opetellaan lineaaristen struktuurien käsittelyä matematiikan tietokoneohjelmilla (Maple/Matlab). Nämä eivät kuitenkaan edellytä varsinaisten ohjelmointikielten tuntemusta.

Lineaarialgebran kursseilla on tarkoitus oppia mm.

– ratkaisemaan lineaarisia yhtälöryhmiä (osa a)
– vektori- ja matriisilaskentaa (osa a)
– lineaariavaruuksien rakennetta ja teoriaa (osa a)
– lineaarikuvausten toimintaa ja teoriaa (osa b)
– sisätuloavaruuksien ominaisuuksia (osa b)
– ominaisarvojen ja -vektorien laskeminen (osa b)
– matriisin diagonalisointi ja neliömuototyypit (osa b)
– tietokoneen käyttöä lineaarialgebrassa (osat a ja b)
– edellisten tietojen ja taitojen soveltamista (osat a ja b)

Kurssin pedagogisena tarkoituksena on tutustuttaa opiskelija paitsi konkreettiseen vektori- ja matriisilaskentaan sekä vektoriavaruuksiin, myös abstraktiin lineaariavaruuksien teoriaan. Tämä aksiomaattinen, puhtaasti joukko-oppiin ja logiikkaan perustuva teoria on ideaalinen esimerkki yhtaikaa käyttökelpoisesta mutta silti verrattain yksinkertaisesta struktuurista. Kurssin toivotaankin kehittävän käsitteenmuodostus- ja abstrahointitaitoa sekä harjaannuttaa näkemään jo ennestään tuttuja asioita uudesta näkökulmasta.

Oppikirjana tai oheismateriaalina voi käyttää esimerkiksi teosta

Leon, Steven J.: Linear algebra with applications, third edition. - Macmillan, New York, 1990 tai myöhempi, luvut 1-6 (1-3 osa a, 4-6 osa b).

Joensuussa 21. huhtikuuta 2016
Martti E. Pesonen

MERKINNÄT

Kurssilla käytetään normaaleja logiikan merkintöjä:

negaatio ja konnektiivit: ei $\neg$, tai $\vee$, ja $\wedge$, seuraa $\Rightarrow$, yhtäpitävää $\Leftrightarrow$

kvanttorit: on olemassa $\exists$, kaikilla $\forall$,

joukko-opin merkinnät: tyhjä joukko $\emptyset$, kuuluu joukkoon $\in$, osajoukko $\subseteq$

joukko-operaatiot: joukon A komplementti $\overline{A}$, joukkojen yhdiste $\cup$, leikkaus $\cap$, erotus $\setminus$, tulo(joukko) $\times$

Merkinnällä $\mathbf{X} := lauseke$ asetetaan symbolille $\mathbf{X}$ arvo $lauseke$.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ovat kokonaislukujen, rationaalilukujen, reaalilukujen ja kompleksilukujen joukot. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on tässä *aidosti* positiiviset kokonaisluvut ja $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lisäksi käytetään nk. *lukumääräjoukkoa*

$$[n] := \begin{cases} \emptyset, & \text{kun } n = 0 \\ \{1, 2, 3, \ldots, n\}, & \text{kun } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A_+ tarkoittaa joukon A aidosti positiivista osaa.

Isot kirjaimet A, B, C, ... edustavat tällä kurssilla yleensä matriiseja; U, V, W, ... vektorijoukkoja tai lineaariavaruuksia ja L, M, ... lineaarikuvauksia.

Pienet ja *kreikkalaiset* kirjaimet ovat yleensä alkioita tai lukuja.

Lihavoidut pienet kirjaimet ovat vektoreita; käsin kirjoitettuna ne on syytä alleviivata ($\underline{u}$).

Kalligrafiset kirjaimet $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$, ..., tarkoittavat tavallisesti jotakin funktiojoukkoa; kuitenkin $\mathcal{K}$ tarkoittaa vektoriavaruuden kerroinkuntaa, joka yleensä on $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$.

Jos $n \in \mathbb{N}$, niin *n-ulotteisten vaakavektorien* joukko on

$$\mathcal{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathcal{K}\}.$$

Sisältö

1 JOHDANTOA – KERTAUSTA

1.1 Vektorit ja yhtälöt

Lineaarialgebran perusolioita ovat mm. vektorit ja matriisit sekä niiden lineaarikombinaatiot eli lineaariset yhdistelmät.

Lineaarikombinaatio on äärellinen summa

$$c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \ldots + c_n\mathbf{X}_n$$

missä c_1, c_2, $\ldots$, c_n ovat *skalaareja* (reaali- tai kompleksilukuja) ja $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_n$ ovat *vektoreita* (tai matriiseja); esimerkiksi reaalilukuja, kompleksilukuja, abstrakteja vektoreita, avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita, funktioita, lukujonoja, suppenevia sarjoja, jne ...

Muotoa

$$c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \ldots + c_n\mathbf{X}_n = \mathbf{Y}$$

oleva yhtälö, missä symbolit edustavat c_i ovat tunnettuja skalaareja ja $\mathbf{Y}$ on tunnettu vektori, on *n:n tuntemattoman (lineaarinen) vektoriyhtälö*. Yhtä hyvin vektorit $\mathbf{x}_i$ voivat olla tunnettuja ja skalaarit c_i tuntemattomia, tai tuntemattomista osa voi olla skalaareja, osa vektoreita.

Esimerkki 1.1.1 Ratkaise vektori $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ yhtälöstä

a) $2(x, y) = (3, 4)$

b) $3(x, y) + 4(2y, 3x) = (1, 2)$.

Ratkaisut. a) Tässä tarvitsee tietää mitä tarkoittaa *skalaarilla kertominen* eli *skaalaus* ja vektorien *samuus* (=). Vektoriyhtälö palautuu tavallisten yhtälöiden ryhmäksi:

$$\begin{aligned} 2(x, y) = (3, 4) \quad &\Longleftrightarrow \quad (2x, 2y) = (3, 4) \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x &= 3 \\ 2y &= 4 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x &= \frac{3}{2} \\ y &= 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Siis $(x, y) = (\frac{3}{2}, 2) = \frac{1}{2}(3, 4)$.

b) Tähän sisältyy myös vektorien yhteenlaskua:

$$3(x, y) + 4(2y, 3x) = (3x, 3y) + (8y, 12x) = (3x + 8y, 3y + 12x) = (1, 2)$$

$$\iff \begin{cases} 3x + 8y = 1 \\ 3y + 12x = 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -12x - 32y = -4 \\ 12x + 3y = 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -12x - 32y = -4 \\ - 29y = -2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \frac{2}{29} \\ x = \frac{1}{-12}(32y-4) = \frac{13}{87} \end{cases}$$

Siis $(x, y) = (\frac{13}{87}, \frac{2}{29})$.

Esimerkki 1.1.2 Ratkaise vektorit (x, y) ja $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ vektoriyhtälöryhmästä

$$\begin{cases} (x,y) + 2(u,v) = (-1,3) \\ 2(x,y) + 3(u,v) = (2,1) \end{cases}$$

Ratkaisu. Kirjoitetaan yhtäpitäväksi koordinaateittaiseksi vektoriyhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} (x+2u, y+2v) = (-1,3) \\ (2x+3u, 2y+3v) = (2,1) \end{cases}$$

joka puolestaan on ekvivalentti skalaariyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x + 2u = -1 \\ y + 2v = 3 \\ 2x + 3u = 2 \\ 2y + 3v = 1 \end{cases}$$

kanssa. Tässä kannattaa ryhmitellä yhtälöt kahteen ryhmään, joissa kummassakin on vain kaksi tuntematonta:

$$\begin{cases} x + 2u = -1 \\ 2x + 3u = 2 \\ y + 2v = 3 \\ 2y + 3v = 1 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} x = 7 \\ u = -4 \\ y = -7 \\ v = 5 \end{cases}$$

eli $(x, y) = (7, -7)$ ja $(u, v) = (-4, 5)$.

Lineaariset vektoriyhtälöt johtavat siis luonnollisella tavalla skalaariyhtälöiden muodostamaan yhtälöryhmään.

1.2 Geometrinen näkökulma

Lineaarinen kahden tuntemattoman x ja y yhtälö voidaan aina saattaa muotoon

$$ax + by = c,$$

mikä analyyttisen geometrian mielessä vastaa suoraa tasossa $\mathbb{R}^2$.

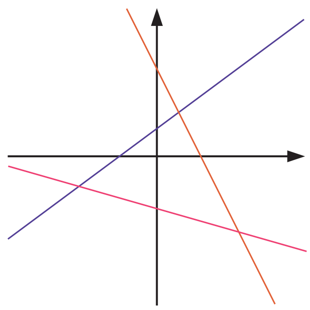
Kahden suoran yhteiset pisteet selviävät näiden suorien yhtälöiden muodostamasta yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} ax & + & by & = & c \\ dx & + & ey & = & f \end{cases}$$

Sen ratkaisuksi on tunnetusti kolme mahdollisuutta:

- ei lainkaan ratkaisua, jolloin suorat ovat yhdensuuntaiset, mutteivät samat,
- yksi piste (x', y'), suorien *leikkauspiste*,
- kokonainen suora, jolloin yhtälöt esittävätkin samaa suoraa.

Mikäli yhtälöitä on enemmän kuin kaksi (Kuva 1), ratkaisuja ei tavallisesti ole, mutta silloinkin voidaan yleensä laskea eräänlainen *kompromissiratkaisu*, nk. *pienimmän neliösumman ratkaisu* (PNS), ks. Luku 21.



Kuva 1: Kaksi tuntematonta, kolme yhtälöä, ei ratkaisua

Tehtävä 1.2.1 Piirrä xy-tasoon seuraavat suorat ja määritä niiden leikkauspisteet (tai yleisemmin niiden yhteiset pisteet):

a) $y = x + 1$ ja $y = -2x + 3$
b) $x + y = 2$ ja $x - 2y = 2$
c) $x - y = 2$ ja $-x + y = 1$
d) $x - y = 2$ ja $y = x - 2$
e) $x - y = -1$, $2x + y - 3 = 0$ ja $y = 2x + \frac{1}{3}$
f) $y = x + 1$, $y = -x + 1$ ja $y = 0$

Ratkaisut sivulla 16.

Koulussa opittu tapa ratkaista yhtälöryhmiä niin, että ratkaistaan joistakin yhtälöistä tietyt tuntemattomat muiden suhteen ja sijoitetaan jäljellä oleviin yhtälöihin, ei ole mielekäs suurten $(n, m > 2)$ lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen.

Sen sijaan keino, jossa yhtälöitä kerrotaan sopivilla nollasta eriävillä luvuilla ja yhtälöitä lasketaan puolittain yhteen tai vähennetään toisistaan tuntemattomien eliminoimiseksi, on läheistä sukua niin kutsutulle *Gaussin eliminointimenetelmälle*, joka on eräs kurssin keskeisimmistä työkaluista. Menetelmässä yhdistetään edelliset kaksi operaatiota muotoon *yhtälöstä vähennetään toisen monikerta*, mikä nopeuttaa prosessia. Menetelmän yleinen muoto esitetään Luvussa 2.3, mutta otetaan tässä valmisteleva esimerkki.

Prosessin ensimmäinen vaihe on esimerkiksi seuraava:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl|l} ax & + & by & = & c & R_1 \\ dx & + & ey & = & f & R_2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl|lcl} a'x & + & b'y & = & c' & R_1' & \leftarrow & A_1R_1 \\ d'x & + & e'y & = & f' & R_2' & \leftarrow & R_2 - A_2R_1 \end{array}\right.$$

missä luvut A_1 ja A_2 valitaan niin, että $a' = 1$ ja $d' = 0$. Sitten edelleen nollataan b':n kohdalla oleva luku ja skaalataan e':n kohdalla oleva luku ykköseksi.

Oheinen vuorovaikutteinen Javasketchpad-animaatio johtaa konkreettisella tavalla Gaussin eliminointiprosessiin (jopa Gauss-Jordanin prosessiin, jossa eliminoidaan ”kaikki mahdollinen”!), katso Luku 2.3.
Suorat tasossa (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/2DSuorat.htm`

Esimerkki 1.2.2 Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 17 \\ 3x & + & 5y & = & -3 \end{array}\right.$$

Merkitään yhtälöryhmän rivejä symboleilla R_i ja kirjoitetaan muunnettujen rivien perään kuinka yhtälö on saatu edellisestä muodosta. Kun tässä jälkimmäisestä vähennetään edellinen puolitoistakertaisena:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr|l} 2x & - & 3y & = & 17 & R_1 \\ 3x & + & 5y & = & -3 & R_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr|lcl} 2x & - & 3y & = & 17 & R_1' & \leftarrow & R_1 \\ (3 - \frac{3}{2}\cdot 2)x & + & (5 - \frac{3}{2}\cdot(-3))y & = & -3 - \frac{3}{2}\cdot 17 & R_2' & \leftarrow & R_2 - \frac{3}{2}R_1 \end{array}\right.$$

on jälkimmäisestä nollattu tuntemattoman x kerroin, eli x on *eliminoitu*. Alkuperäisellä yhtälöryhmällä on edelleen samat ratkaisut kuin yhtälöryhmillä

$$\left\{\begin{array}{rcrcr|l} 2x & - & 3y & = & 17 & R_1' \\ & & \frac{19}{2}y & = & -\frac{57}{2} & R_2' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr|lcl} x & - & \frac{3}{2}y & = & \frac{17}{2} & R_1'' & \leftarrow & \frac{1}{2}R_1' \\ & & y & = & -3 & R_2'' & \leftarrow & \frac{2}{19}R_2' \end{array}\right.$$

Ratkaisuksi saadaan näin $(x, y) = (4, -3)$.

Tehtävä 1.2.3 Piirrä x_1x_2-tasoon seuraavien yhtälöiden ratkaisut. Mitkä ovat vastaavien yhtälöryhmien ratkaisut?

a) $x_1 + x_2 = 2$ ja $x_1 - x_2 = 2$

b) $x_1 + x_2 = 2$ ja $x_1 + x_2 = 1$

c) $x_1 + x_2 = 2$ ja $-x_1 - x_2 = -2$.

Ratkaisu sivulla 17.

Vastaavasti lineaarinen yhtälö $ax + by + cz = d$ esittää xyz-avaruuden tasoa. Useamman tason leikkauspiste (x',y',z') on siten näiden tasojen yhtälöiden muodostaman yhtälöryhmän ratkaisu, mikäli näitä on vain yksi. Jos ratkaisuja on äärettömästi, on ratkaisujoukko suora tai taso (katso Luku 2.2).

Tehtävä 1.2.4 Onko tasoilla

a) $2x + y - z = 0$ ja $x - y + 2z = 1$

b) $2x + y - z = 0$, $x - y + 2z = 1$ ja $3x - y = 2$

yhteisiä pisteitä?
Ratkaisu sivulla 17.

1.3 Vektoreilla laskemisesta n-ulotteisessa avaruudessa

Joukkoa $\mathbb{R}^n$ varustettuna vektorien alkioittaisella yhteenlaskulla ja vakiolla (skalaarilla) kertomisella

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &:= (x_1{+}y_1, x_2{+}y_2 \ldots, x_n{+}y_n) \\
\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) &:= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)
\end{aligned}
$$

sanotaan *n-ulotteiseksi euklidiseksi avaruudeksi*.

Vektoreiden *piste-* eli *skalaaritulo* (*dot product, scalar product*) on koordinaateittain muodostettujen tulojen summa

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ja vektorin *normi* eli *pituus* on

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Normin neliö on täten vektorin pistetulo itsensä kanssa.

Esimerkki 1.3.1 Lasketaan vektorien $(1, 3, 2)$ ja $(-6, 2, 1)$ pistetulo ja normit.

Merkitään $\mathbf{x} := (1, 3, 2)$ ja $\mathbf{y} := (-6, 2, 1)$. Silloin

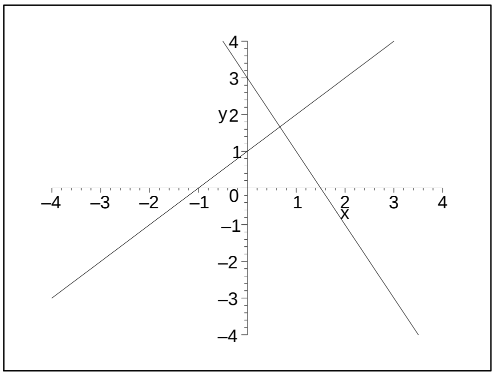
$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= (1, 3, 2) \cdot (-6, 2, 1) = 1{\cdot}(-6) + 3{\cdot}2 + 2{\cdot}1 = 2 \\
\|\mathbf{x}\|^2 &= 1{\cdot}1 + 3{\cdot}3 + 2{\cdot}2 = 14 \\
\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{14} \\
\|\mathbf{y}\|^2 &= (-6){\cdot}(-6) + 2{\cdot}2 + 1{\cdot}1 = 41 \\
\|\mathbf{y}\| &= \sqrt{41}
\end{aligned}
$$

Normin kaava voidaan tulkita Pythagoraan lauseen yleistykseksi, miten?

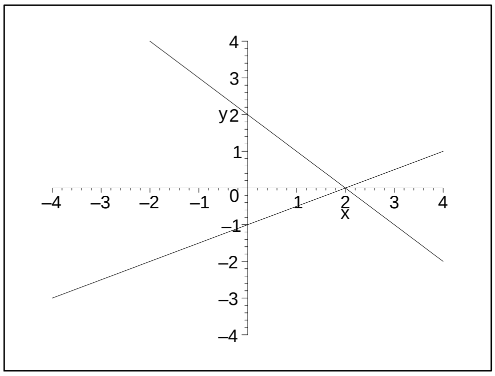
Kurssilla käsitellään myös jonkin verran kompleksilukuja ja -vektoreita, erityisesti kurssin loppupuolella.

1.4 Ratkaisuja tehtäviin

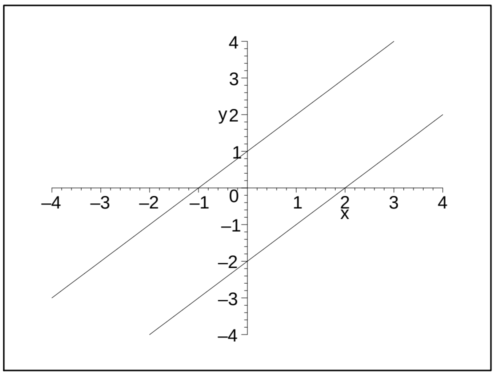
Tehtävä 1.2.1: a) $(2/3, 5/3)$, b) $(2, 0)$, c) eivät leikkaa, d) suora $y = x - 2$, e) $(2/3, 5/3)$, f) leikkaavat vain pareittain, pisteissä $(-1, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$.



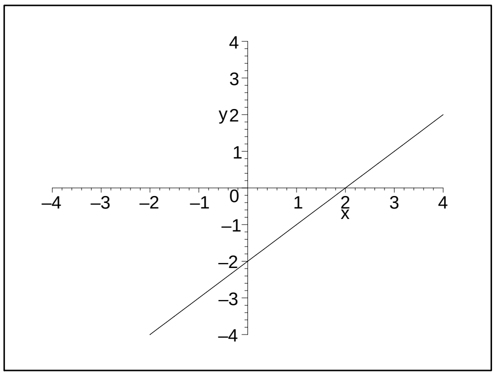
a) suorat $y = x + 1$ ja $y = -2x + 3$



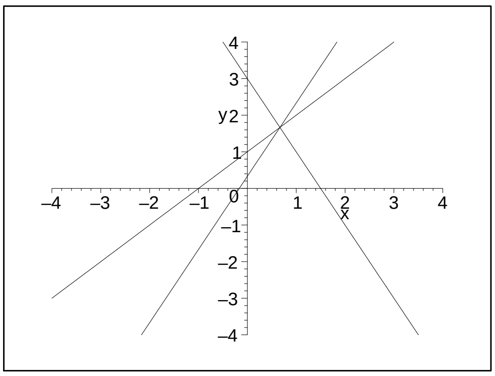
b) suorat $x + y = 2$ ja $x - 2y = 2$



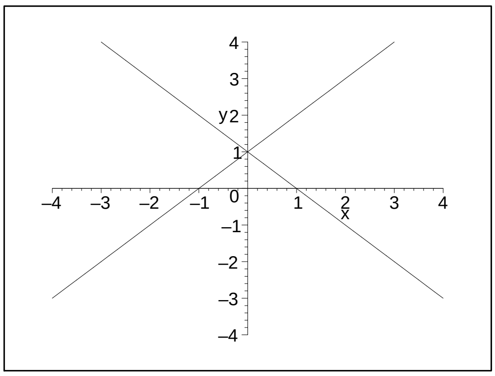
c) suorat $x - y = 2$ ja $-x + y = 1$



d) suorat $x - y = 2$ ja $y = x - 2$



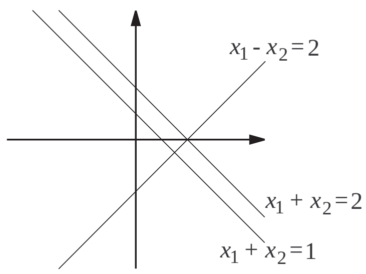
e) suorat $x - y = -1$, $2x + y - 3 = 0$ ja $y = 2x + \frac{1}{3}$



f) suorat $y = x + 1$, $y = -x + 1$ ja $y = 0$

Tehtävä 1.2.3: Yhtälöryhmien ratkaisut ovat (ks. Kuva 2)

a) $(0, 2)$, b) ei ratkaisua, c) suora $x_1 + x_2 = 2$.



Kuva 2: Tehtävän 1.2.3 suorat

Tehtävä 1.2.4: a) Kertomalle ensimmäinen yhtälö kahdella ja vähentämällä alemmasta ylempi puolittain saadaan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 3y & - & 5z & = & -2 \end{array}\right.$$

Tästä näkyy, että esimerkiksi z saa olla mielivaltainen, $z \in \mathbb{R}$, ja siten (ääretön) ratkaisujoukko – tasojen leikkausjoukko – on suora, jonka pisteet ovat muotoa

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{3}\,z \\ y & = & -\frac{2}{3} & + & \frac{5}{3}\,z \\ z & \in & \mathbb{R} & & \end{array}\right.$$

b) On yksi, sillä sopivilla kertomis- ja vähentelyoperaatioilla saadaan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & y & & & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 3y & - & 5z & = & -2 \\ & & 2y & - & 6z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 3y & - & 5z & = & -2 \\ & & & - & \frac{8}{3}\,z & = & \frac{1}{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \frac{3}{8} \\ y & = & -\frac{7}{8} \\ z & = & -\frac{1}{8} \end{array}\right.$$

2 LINEAARISET YHTÄLÖRYHMÄT

2.1 Yhtälö ja yhtälöryhmä

Sovitaan aluksi muutamista yleisistä yhtälöryhmiä koskevista nimityksistä:

Olkoon $J \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $F : J \to \mathbb{R}$ funktio. Muotoa

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

oleva ilmaus on *(reaalinen)* n *tuntemattoman yhtälö* tuntemattomina arvoina x_1, x_2, ..., x_n. Vastaavasti voidaan puhua *kompleksisista* ym. yhtälöistä riippuen siitä, millaisia arvoja tuntemattomille sallitaan. *Yhtälöryhmäksi* sanotaan yhden tai useamman (äärellisen monen) yhtälön sisältävää kokonaisuutta

$$\left\{\begin{array}{rcl} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Jos yhtälöryhmä sisältää yhteensä n tuntematonta $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sen *(yksittäisellä) ratkaisulla* tarkoitetaan sellaista n luvun järjestettyä jonoa $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, jonka jäsenien sijoittaminen tuntemattomien paikalle toteuttaa yhtälöryhmän kaikki yhtälöt. Yhtälöryhmän *ratkaiseminen* tarkoittaa sen *kaikkien* ratkaisujen etsimistä. Yhtälöryhmän kaikkien ratkaisujen joukkoa

$$\{(x_1', x_2', \ldots, x_n') \mid F_i(x_1', x_2', \ldots, x_n') = 0,\ i = 1, 2, 3, \ldots, m\}$$

sanomme sen *ratkaisuksi* tai *ratkaisujoukoksi*. Yhtälöryhmällä voi olla yksi tai useampia ratkaisuja tai ei ollenkaan ratkaisua.

Kaksi yhtälöryhmää ovat keskenään *yhtäpitäviä* eli *ekvivalentteja*, jos niissä esiintyy täsmälleen samat tuntemattomat ja niillä on tarkalleen samat ratkaisut.

Esimerkki 2.1.1 a) Yhtälön $x^2 - x = 3$ määrää funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) := x^2 - x - 3$.
b) Yhtälöryhmän

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & \ln y & = & 2 \\ 2x & + & \ln y & = & 3 \end{array}\right.$$

määräävät funktiot $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} F_1(x, y) & = & x - \ln y - 2 \\ F_2(x, y) & = & 2x + \ln y - 3. \end{array}$$

Tehtävä 2.1.2 Esitä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2 + x + y = z \\ x + y + z = 0 \\ z - y^2 = 1 \end{cases}$$

sopivien funktioiden avulla muodossa (1). Ratkaisu sivulla 36.

2.2 Lineaariset yhtälöryhmät

Kaikilla tieteenaloilla esiintyy ongelmia, joita kuvaamaan sopii jokin lineaarinen yhtälö tai yhtälöryhmä. Ongelma *voi* olla sellainen, että yhtälöryhmän ratkaisu antaa tarkan, yleispätevän tuloksen. Useat konkreettiset ongelmat ovat kuitenkin *epälineaarisia* tai niin monimutkaisia, että mallia muodostettaessa joudutaan tekemään yksinkertaistuksia. Näille muodostettu *lineaarinen* malli on *approksimatiivinen* ja vastaavan lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu on pätevä vain tietyllä tarkkuudella ja rajoitetuilla muuttujien arvoilla. Nykyään yhä suurempia yhtälöryhmiä voidaan ratkaista tarkasti tietokoneilla. Kuitenkin suuret yhtälöryhmät ratkaistaan edelleen erilaisilla *numeerisilla menetelmillä*, joiden käsittely kuuluu *numeerisen lineaarialgebran* piiriin (katso esimerkiksi Leon, Luku 7).

Määritelmä 2.2.1 Olkoot luvut a_{ij} ja b_j tunnettuja ja luvut x_i tuntemattomia. Yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sanotaan m yhtälön ja n tuntemattoman x_i *lineaariseksi yhtälöryhmäksi* (*system of linear equations*), jatkossa lyhyemmin (lineaariseksi) $m \times n$*-yhtälöryhmäksi*.

Luvut a_{ij} ovat yhtälöryhmän *kertoimia* (*coefficient*). Lineaarinen yhtälöryhmä on *homogeeninen*, jos luvut b_j ovat nollia, muutoin *epähomogeeninen*. Jos $m = n$, yhtälöryhmä on *kvadraattinen*.

Luvussa 2.3 opetellaan systemaattinen yleispätevä ratkaisumenetelmä, niin kutsuttu *Gaussin eliminointimenetelmä*, joka on (lähes) sellaisenaan ohjelmoitavissa tietokoneelle. Tätä ennen kuitenkin tutustutaan menetelmässä käytettyihin operaatioihin ja koetetaan havainnollistaa niiden merkitystä.

Tehtävä 2.2.2 Mitkä seuraavista ovat lineaarisia yhtälöitä

a) $2x - 3y = 0$

b) $2x - 3y = 3$

c) $2x - 3y = z$

d) $2x + xy - y = 0$?

Ratkaisu sivulla 36.

Tehtävä 2.2.3 Esitä Tehtävän 2.2.2 kolmen ensimmäisen yhtälön muodostama yhtälöryhmä funktioiden avulla muodossa (1). Ratkaisu sivulla 36.

3×3-yhtälöryhmän geometrinen tulkinta

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

yhtälöt esittävät x_1x_2-tason suoria. Yhtälöryhmän mahdollinen ratkaisu on näiden suorien leikkauspiste tai kokonainen suora, mikäli yhtälöt esittävät samaa suoraa. Tällöin yhtälöt ovat *verrannolliset*, ts. toinen saadaan toisesta kertomalla vakiolla.

Lineaarinen kolmen tuntemattoman x_1, x_2 ja x_3 yhtälö voidaan aina saattaa muotoon

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1,$$

mikä analyyttisen geometrian mielessä vastaa tasoa avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Kaksi tällaista yhtälöä muodostaa yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \end{cases}$$

ja sen ratkaisuksi on tunnetusti kolme mahdollisuutta:

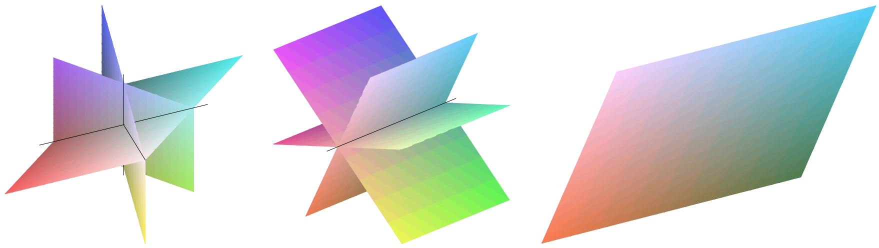
- ei lainkaan ratkaisua, jolloin tasot ovat yhdensuuntaiset, mutteivät samat
- tasojen *leikkaussuora*
- kokonainen taso, jolloin yhtälöt esittävät samaa tasoa.

Kolmen yhtälön tapaus

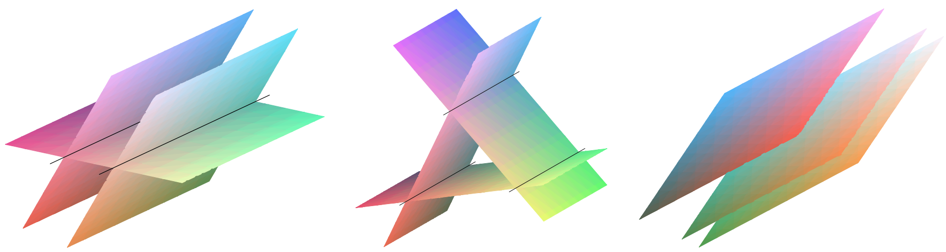
$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

eroaa olennaisesti edellisistä vain siinä, että ratkaisuna voi olla myös tasan yksi avaruuden piste (x_1, x_2, x_3).

Kuvassa 3 esiintyvät erilaiset perustapaukset, joissa ratkaisuja on, ja Kuvassa 4 ne, joissa ratkaisuja ei ole.



Kuva 3: Kolme tuntematonta, kolme yhtälöä, ratkaisuja on



Kuva 4: Kolme tuntematonta, kolme yhtälöä, ei ratkaisuja

Maple-työarkki tasoista (linkki)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/Tasot.mws`

Yhtälöryhmän alkeismuunnokset

Lineaarinen yhtälöryhmä kannattaa opetella ratkaisemaan *järjestelmällisesti* muokkaamalla se sopivien alkeismuunnosten välityksellä sellaiseen *ekvivalenttiin* muotoon, josta ratkaisut – mikäli niitä on – ovat helposti laskettavissa.

Seuraavien alkeisoperaatioiden käyttäminen muuntaa yhtälöryhmän toiseen yhtäpitävään muotoon:

I. Vaihdetaan yhtälöiden järjestystä.

II. Yhtälö kerrotaan nollasta eriävällä luvulla.

III. Yhtälöön lisätään toisen yhtälön monikerta.

Periaatteessa kussakin vaiheessa suoritetaan vain yksi alkeisoperaatio kerrallaan. Kirjoitusvaivan vähentämiseksi operaatioita voi tehdä samanaikaisesti useita, mutta tällöin on muistettava:

Varoitus! Jos operaatiota III käytetään tiettyyn välimuotoon useita kertoja, kutakin *yhtälöparia* saa käyttää vain kerran (miksi?). Kun prosessi suoritetaan jäljempänä esiteltävällä Gaussin eliminointimenetelmällä tai Gauss-Jordanin reduktiolla, ei vaaraa ole.

Tehtävä 2.2.4 (Varoittava esimerkki). Mitä tehdään väärin seuraavassa:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr|l} x & - & y & = & 3 & R_1 \\ x & + & y & = & 7 & R_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr|l} -2y & = & -4 & R_1' \leftarrow R_1 - R_2 \\ 2y & = & 4 & R_2' \leftarrow R_2 - R_1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & \in & \mathbb{R} \\ y & = & 2 \end{array}\right.$$

Mikä on oikea ratkaisu? Ratkaisu sivulla 36.

Tehtävä 2.2.5 Ratkaise alkeisoperaatioita käyttäen yhtälöryhmät

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 2y & = & 3 \\ 5x & - & 3y & = & 4 \end{array}\right. \qquad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 5z & = & -12 \\ 2x & + & 3y & - & 8z & = & 34 \end{array}\right.$$

$$\text{c)}\ \left\{\begin{array}{rcrcr} s & + & t & = & 2 \\ s & - & t & = & 1 \\ 3s & + & t & = & -1 \end{array}\right. \qquad \text{d)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & 8x_3 & = & -15 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ratkaisu sivulla 36.

Tehtävä 2.2.6 Mitä Tehtävän 2.2.5 yhtälöt, yhtälöryhmät ja niiden ratkaisut tarkoittavat geometrisesti tasossa tai kolmiulotteisessa avaruudessa?

Määritelmä 2.2.7 Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \cdots & + & c_{1n}x_n & = & d_1 \\ c_{21}x_1 & + & c_{22}x_2 & + & \cdots & + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ c_{m1}x_1 & + & c_{m2}x_2 & + & \cdots & + & c_{mn}x_n & = & d_m \end{cases}$$

on *porrasmuodossa* (row echelon (or staircase) form), jos sen kertoimille c_{ij} pätee:

(1) jokaisen rivin ensimmäinen nollasta eriävä kerroin on 1,

(2) jos rivillä k kaikki kertoimet eivät ole nollia, niin rivin $k + 1$ alkupäässä on kertoimina aidosti enemmän nollia kuin rivin k alkupäässä,

(3) pelkkiä nollia kertoiminaan sisältävät rivit ovat viimeisinä.

Yhtälöryhmä on *redusoidussa porrasmuodossa*, jos se on porrasmuodossa ja

(4) kunkin rivin ensimmäinen nollasta eriävä kerroin on sarakkeensa ainoa nollasta eriävä kerroin.

Esimerkki 2.2.8 Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 & & & + & 2x_3 & & & + & 6x_5 & & & = & 3 \\ & & x_2 & + & 7x_3 & & & + & 2x_5 & - & x_6 & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & & & + & 5x_6 & = & -3 \\ & & & & & & & & & & 0 & = & a \end{cases}$$

missä a on reaalivakio, on redusoidussa porrasmuodossa. Tällä yhtälöryhmällä on ratkaisuja jos ja vain jos $a = 0$.

Porrasmuodon kunkin rivin ensimmäistä nollasta poikkeavaa kerrointa sanotaan *johtavaksi kertoimeksi* (leading coefficient) tai *johtavaksi alkioksi*. Vastaava tuntematon on *johtava tuntematon* (tai *johtava muuttuja*). Muut tuntemattomat ovat *vapaita tuntemattomia* (tai *vapaita muuttujia*).

Tehtävä 2.2.9 Selvitä Esimerkin 2.2.8 yhtälöryhmän johtavat ja vapaat tuntemattomat. Ratkaisu sivulla 36.

Yhtälöryhmä on *kolmiomuodossa*, jos se on kvadraattinen ($n = m$) ja kullakin rivillä k ovat $k - 1$ ensimmäistä kerrointa nollia, mutta $c_{kk} \neq 0$.

Esimerkki 2.2.10 Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_3 = 2 \end{cases}$$

on kolmiomuodossa, mutta ei porrasmuodossa.

On ilmeistä, että kolmiomuodossa olevalla yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu, koska kaikki tuntemattomat ovat johtavia. Ratkaisu voidaan laskea yksinkertaisesti sijoittamalla alkaen viimeisestä tuntemattomasta.

Tehtävä 2.2.11 Saata Esimerkin 2.2.10 yhtälöryhmä porrasmuotoon ja ratkaise se. Ratkaisu sivulla 37.

Esimerkki 2.2.12 Eräs 4×5-yhtälöryhmä on muunnettu muotoon

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 + 5x_5 = 7 \\ x_2 - x_3 + 7x_4 = 3 \\ x_4 + 6x_5 = 8 \\ x_5 = -1 \end{cases}$$

Selvitä perustellen, onko se

a) kolmiomuodossa,
b) porrasmuodossa,
c) redusoidussa porrasmuodossa?

Ratkaisu. a) Ei ole kolmiomuodossa, sillä se ei ole kvadraattinen (tai: $c_{33} = 0$).

b) On porrasmuodossa (tarkasta ehdot (1)-(3)).

c) Ei ole redusoidussa porrasmuodossa, esimerkiksi johtava x_2 toisella rivillä ei ole sarakkeensa ainoa (vaatimus (4)).

Esimerkki 2.2.13 Muunna porrasmuotoon yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Ratkaisu. Olkoot yhtälöryhmän rivit R_1, R_2 ja R_3. Korvataan R_2 yhtälöllä R_2', joka saadaan vähentämällä toisesta ensimmäinen kerrottuna kahdella eli $R_2' \leftarrow R_2 - 2R_1$ ja R_3 yhtälöllä $R_3' \leftarrow R_3 - R_1$. Nyt R_2' ja R_3' ovat samat, ja operaatio

$R_3'' \leftarrow R_3' - R_2'$ tuottaa yhtälön $0 = 0$. Lopuksi skaalataan R_2' kertoimella $-1/3$, jolloin saadaan porrasmuoto

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Esimerkki 2.2.14 Muunnetaan Esimerkin 2.2.12 yhtälöryhmä redusoituun porrasmuotoon.

Ratkaisu. Yhtälöryhmä oli jo porrasmuodossa:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 + 5x_5 = 7 & \mid R_1 \\ x_2 - x_3 + 7x_4 = 3 & \mid R_2 \\ x_4 + 6x_5 = 8 & \mid R_3 \\ x_5 = -1 & \mid R_4 \end{cases}$$

On nollattava johtavien tuntemattomien yläpuolet. Aloitetaan lopusta:

$$\iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 + \quad = 12 & \mid R_1' \leftarrow R_1 - \frac{5}{1}R_4 \\ x_2 - x_3 + 7x_4 = 3 & \mid R_2' \leftarrow R_2 - \frac{0}{1}R_4 \\ x_4 + \quad = 14 & \mid R_3' \leftarrow R_3 - \frac{6}{1}R_4 \\ x_5 = -1 & \mid R_4' \leftarrow R_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -2 & \mid R_1'' \leftarrow R_1' - R_3' \\ x_2 - x_3 = -95 & \mid R_2'' \leftarrow R_2' - 7R_3' \\ x_4 = 14 & \mid R_3'' \leftarrow R_3' \\ x_5 = -1 & \mid R_4'' \leftarrow R_4' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - 2x_3 = -192 & \mid R_1''' \leftarrow R_1'' + 2R_2'' \\ x_2 - x_3 = -95 \\ x_4 = 14 \\ x_5 = -1 \end{cases}$$

Tämä on redusoitu porrasmuoto.

Ratkaisujen esittäminen vektorimuodossa

Jatkossa ratkaisut pyritään esittämään vektorimuodossa, ja tarvittaessa sopivan apumuuttujan, *skalaariparametrin* avulla niin, että kaikki tuntemattomat vapautuvat vektorin koordinaateiksi. Lisäksi vektorit ovat *pystyvektoreita*, vaikka ne tilan säästämiseksi usein kirjoitetaan *transpoosin* avulla vaakamuodossa $(x_1\, x_2\, \ldots\, x_n)^T$, ks. Luku 3.2. Esimerkki valaissee tässä vaiheessa asiaa helpoimmin.

Esimerkki 2.2.15 Ratkaise Esimerkissä 2.2.14 redusoitu yhtälöryhmä ja esitä ratkaisu vektorimuodossa.

Ratkaisu. Yhtälöryhmässä

$$\begin{cases} x_1 \quad - 2x_3 = -192 \\ x_2 - x_3 = -95 \\ x_4 = 14 \\ x_5 = -1 \end{cases}$$

tuntematon x_3 on vapaasti valittavissa, joten ratkaisuja on äärettömästi. Valitaan parametriksi vapaa $x_3 = s \in \mathbb{R}$ ja ratkaistaan muut siitä riippuvat:

$$\begin{cases} x_1 = -192 + 2s \\ x_2 = -95 + s \\ x_3 = s \in \mathbb{R} \\ x_4 = 14 \\ x_5 = -1 \end{cases}$$

Esitys vektorimuodossa $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$ parametrina s:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -192 \\ -95 \\ 0 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, \text{ tai transpoosin avulla}$$

$$(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5)^T = \begin{pmatrix} -192 & -95 & 0 & 14 & -1 \end{pmatrix}^T + s\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \; s \in \mathbb{R}.$$

Tehtävä 2.2.16 Muunna redusoituun porrasmuotoon Esimerkin 2.2.13 yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

ja esitä ratkaisu vektorimuodossa. Ratkaisu sivulla 37.

Tehtävä 2.2.17 Muunna porrasmuotoon ja redusoituun porrasmuotoon seuraavat yhtälöryhmät ja määritä niiden kaikki ratkaisut:

$$\text{a)}\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & - & 4x_3 & = & 1 \\ & & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\text{b)}\quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 1 \\ -3x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\text{c)}\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Ratkaisu sivulla 37.

2.3 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyskysymys osataan myöhemmin selvittää helposti yhtälöä ratkaisemattakin. Toisaalta asia selviää, kun yhtälöryhmää yritetään ratkaista.

Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan aina muuntaa yhtäpitävään porrasmuotoon nk. *Gaussin eliminointimenetelmällä*, so. käyttäen edellä esiteltyjä alkeisoperaatioita

I. Vaihdetaan yhtälöiden järjestystä.
II. Yhtälö kerrotaan nollasta eriävällä luvulla.
III. Yhtälöön lisätään toisen yhtälön monikerta.

Ratkaisut saadaan porrasmuodosta nk. *takaisinsijoituksella*, kun mahdollisille vapaille muuttujille on ensin annettu parametriarvot (Johann Carl Friedrich Gauss, Saksa, 1777-1855).

Yhtälöryhmän saattamista redusoituun porrasmuotoon em. muunnoksin sanotaan *Gauss-Jordanin reduktioksi*. Tämä pidemmälle viety prosessi on työläämpi, mutta joissakin yhteyksissä välttämätön suorittaa. Toisaalta redusoidun porrasmuodon käyttö on takaisinsijoittamisessa vaivattomampi (Wilhelm Jordan, Saksa, 1842-1899).

Gaussin eliminointimenetelmä

Jo Luvussa 2.2 harjoitellut menettelyt esitetään nyt formaalimmassa algoritmimuodossa, jonka mukaisesti ratkaiseminen voidaan ohjelmoida vaikkapa tietokoneohjelmaksi, ks. Kuva 5.

Lineaarisen $m\times n$-yhtälöryhmän porrasmuotoon muuntamisprosessi koostuu $m-1$ periaatteessa samanlaisesta vaiheesta. Vaiheessa k eliminoidaan (eli kerroin nollataan) tuntematon x_k riveillä $k+1, k+2, \ldots m$ olevista yhtälöistä. Ennen eliminointiprosessin aloittamista täytyy tuntemattomat järjestää niin, että kunkin tuntemattoman x_k kertoimet on kirjoitettu yhtälöihin kohdakkain. Käsin laskettaessa yhtälöt kannattaa järjestää niin, että ryhmä on mahdollisimman lähellä porrasmuotoa ja ensimmäisessä yhtälössä tuntemattoman x_1 kerroin on yksinkertainen, ei kuitenkaan 0.

Eliminointivaiheessa k ennalleen jätetty k. rivi on *tukiyhtälö* eli *tukirivi* (*pivotal row*) ja sen tuntemattoman x_k kerroin *tukialkio* (*pivot element*). Numeerisissa algoritmeissä täytyy aina huolehtia siitä, että tukialkiolla jakaminen ei aiheuta ylivuotoja; tarvittaessa skaalataan, vaihdetaan tukiyhtälöä tai tuntemattomien järjestystä. Tällaista menettelyä sanotaan *tuennaksi* (*pivoting*).

VAIHE I. Oletetaan, että $a_{11} \neq 0$ yhtälöryhmässä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & | & R_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 & | & R_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m & | & R_m \end{cases}$$

Muuttuja x_1 eliminoidaan yhtälöistä R_2, R_3, ..., R_m:

1) $R'_1 \leftarrow R_1$ (ennallaan)

2) $R'_2 \leftarrow R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1$

3) $R'_3 \leftarrow R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} R_1$

$\vdots$

m) $R'_m \leftarrow R_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} R_1$.

VAIHE II. Olkoon $a'_{22} \neq 0$ saadussa ryhmässä

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 & | & R'_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 & | & R'_2 \\ & & a'_{32}x_2 & + & \cdots & + & a'_{3n}x_n & = & b'_3 & | & R'_3 \\ & & \vdots \\ & & a'_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m & | & R'_m \end{cases}$$

Muuttuja x_2 eliminoidaan yhtälöistä R'_3, R'_4, ..., R'_m:

$R''_1 \leftarrow R'_1$ ja $R''_2 \leftarrow R'_2$

$R''_k \leftarrow R'_k - \frac{a'_{k2}}{a'_{22}} R'_2$ arvoilla $k = 3, 4, \ldots, m$

Vaiheita jatketaan – III, IV, ... – niin kauan kuin voidaan. Lopuksi johtavat alkiot skaalataan ykkösiksi. Yhtälöryhmä ratkeaa nyt takaisinsijoituksella.

Kuva 5: Gaussin eliminointialgoritmi

Esimerkki 2.3.1 Ratkaistaan Gaussin menetelmällä yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 & | & R_1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 & | & R_2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 4 & | & R_3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 & | & R_1' \leftarrow R_1 \\ & - & 7x_2 & - & 6x_3 & = & -10 & | & R_2' \leftarrow R_2 - 3R_1 \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 & | & R_3' \leftarrow R_3 - 2R_1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 & | & R_1'' \leftarrow R_1' \\ & - & 7x_2 & - & 6x_3 & = & -10 & | & R_2'' \leftarrow R_2' \\ & & & - & \frac{1}{7}x_3 & = & -\frac{4}{7} & | & R_3'' \leftarrow R_3' - \frac{1}{7}R_2' \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 & | & R_1''' \leftarrow R_1'' \\ & & x_2 & + & \frac{6}{7}x_3 & = & \frac{10}{7} & | & R_2''' \leftarrow -\frac{1}{7}R_2'' \\ & & & & x_3 & = & 4 & | & R_3''' \leftarrow -7R_3'' \end{array}\right.$$

Yhtälöryhmä on porras- ja kolmiomuodossa, josta takaisinsijoitus antaa yksikäsitteisen ratkaisun $x_3 = 4$, $x_2 = -2$ ja $x_1 = 3$ eli $(x_1\ x_2\ x_3)^T = (3\ -2\ 4)^T$.

Esimerkki 2.3.2 Millä $a \in \mathbb{R}$ ei seuraavalla yhtälöryhmällä ole ratkaisuja?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

Samoilla operaatioilla kuin Esimerkissä 2.3.1 (paitsi jättämällä kolmas yhtälö normittamatta) saadaan edeltävän kanssa yhtäpitävä muoto:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 & | & R_1''' \leftarrow R_1'' \\ & & x_2 & + & \frac{6}{7}x_3 & = & \frac{10}{7} & | & R_2''' \leftarrow -\frac{1}{7}R_2'' \\ & & & & (a-\frac{8}{7})x_3 & = & -\frac{4}{7} & | & R_3''' \leftarrow R_3'' \end{array}\right.$$

Yhtälöryhmä on nyt kolmiomuodossa, josta näkyy, että sillä on ratkaisuja jos ja vain jos $a \neq 8/7$. Näillä arvoilla ratkaisuja on tasan yksi. Jos taas $a = 8/7$, on viimeisenä mahdoton yhtälö.

Gauss-Jordanin reduktio

Gauss-Jordan-prosessi alkaa muuntamalla yhtälöryhmä Gaussin eliminointimenetelmällä porrasmuotoon. Tämän jälkeen jatketaan ”peilikuva-prosessilla”; nollataan kunkin johtavan muuttujan sarakkeesta sen yläpuolella olevat kertoimet alkaen viimeisestä johtavasta muuttujasta ja käyttäen tukiyhtälönä vastaavaa riviä. Näin yhtälöryhmä saadaan redusoituun porrasmuotoon.

Esimerkki 2.3.3 Käytetään Gauss-Jordanin reduktiota Esimerkissä 2.3.1 saatuun porrasmuotoon:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 & R_1 \\ & & x_2 & + & \frac{6}{7}x_3 & = & \frac{10}{7} & R_2 \\ & & & & x_3 & = & 4 & R_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} x_1 & + & 2x_2 & & & = & -1 & R_1' \leftarrow R_1 - R_3 \\ & & x_2 & & & = & -2 & R_2' \leftarrow R_2 - \frac{6}{7}R_3 \\ & & & & x_3 & = & 4 & R_3' \leftarrow R_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcr|l} x_1 & & & = & 3 & R_1'' \leftarrow R_1' - 2R_2' \\ & x_2 & & = & -2 & R_2'' \leftarrow R_2' \\ & & x_3 & = & 4 & R_3'' \leftarrow R_3' \end{array}\right.$$

Kussakin eliminointivaiheessa pitää tehty operaatio kirjata näkyviin esimerkiksi kuten yllä, sillä se on paitsi lukemista helpottava muistiinpano, myös *perustelu*.

Tehtävä 2.3.4 Ratkaise Gauss-Jordanin reduktiolla

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -12 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

Ratkaisu sivulla 38.

Maple-animaatio Gaussin prosessista (linkki)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/Gauss/GAUSS1.html`

Lineaaristen yhtälöryhmien luokittelusta

Lineaariset yhtälöryhmät jaetaan ”ulkomuotonsa” perusteella kolmeen ryhmään: $m{\times}n$-yhtälöryhmä on

- *kvadraattinen*, jos $m = n$, eli jos yhtälöitä on yhtä monta kuin tuntemattomia
- *alimäärätty* (*underdetermined*), jos $m < n$, eli jos yhtälöitä on vähemmän kuin tuntemattomia
- *ylimäärätty* (*overdetermined*), jos $m > n$, eli jos yhtälöitä on enemmän kuin tuntemattomia.

Ratkaisujen määrät selvitetään yksityiskohtaisesti Lauseessa 16.6.1. Tässä vaiheessa riittää sanoa karkeasti:

- alimäärätyllä yhtälöryhmällä on aina 0 tai äärettömästi ratkaisuja (ks. Lause 2.3.11)
- ylimäärätyllä yhtälöryhmällä ei *useinkaan* ole ratkaisuja
- jos eliminointiprosessissa tulee vastaan mahdoton yhtälö, ei ratkaisuja ole
- jos menetelmä ei anna muuttujille x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_p} yksikäsitteisiä arvoja, niille annetaan mielivaltaiset arvot, esimerkiksi $x_{k_1} = t_1 \in \mathbb{R}$, ..., $x_{k_p} = t_p \in \mathbb{R}$, ja ratkaistaan muut näiden avulla. Tällöin ratkaisuja on äärettömästi ja sanotaan, että ratkaisu on *p-parametrinen* joukko parametreina luvut t_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, p$.

Esimerkki 2.3.5 Kun tehtävän 2.2.5 kohdassa b) valitaan mielivaltaiseksi parametriksi $z = s \in \mathbb{R}$, saadaan vektorimuotoinen esitys

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 32 \\ 126 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 34 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Jos olisi valittu $x = t \in \mathbb{R}$, jolloin $y = 34t - 74$ ja $z = 13t - 32$, saataisiin toisenlainen esitys

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -74 \\ -32 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 34 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Seuraavista esimerkeistä nähdään, että alimäärätyllä ryhmällä voi olla 0 tai äärettömästi ratkaisuja:

Esimerkki 2.3.6 Helposti nähdään, että seuraavat yhtälöt ovat ristiriitaiset

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Esimerkki 2.3.7 Seuraavalla yhtälöryhmällä on äärettömästi ratkaisuja:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 & | \quad R_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 & | \quad R_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 & | \quad R_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 & | \quad R_1' \leftarrow R_1 \\ x_4 + x_5 = 1 & | \quad R_2' \leftarrow R_2 - R_1 \\ x_4 + 2x_5 = 0 & | \quad R_3' \leftarrow R_3 - R_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 & | \quad R_1'' \leftarrow R_1' \\ x_4 + x_5 = 1 & | \quad R_2'' \leftarrow R_2' \\ x_5 = -1 & | \quad R_3'' \leftarrow R_3' - R_2' \end{cases}$$

Siis ainakin $x_5 = -1$ ja $x_4 = 2$. Arvot x_3 ja x_2 voidaan valita miten vain, asetetaan vaikkapa $x_2 = s \in \mathbb{R}$ ja $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Silloin $x_1 = 1-s-t$ ja

$$\begin{aligned} (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)^T &= (1-s-t\ \ s\ \ t\ \ 2\ \ -1)^T, \quad s,t \in \mathbb{R} \\ &= (1\ 0\ 0\ 2\ -1)^T + s(-1\ 1\ 0\ 0\ 0)^T + t(-1\ 0\ 1\ 0\ 0)^T,\ s,t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ylimäärätyllä yhtälöryhmällä saattaa olla jopa äärettömästi ratkaisuja:

Tehtävä 2.3.8 Ratkaise yhtälöryhmät

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Ratkaisu sivulla 38.

Tehtävä 2.3.9 Ratkaise

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ratkaisu sivulla 38.

Tehtävä 2.3.10 Millä vakioiden a ja b arvoilla yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & b \end{cases}$$

a) ei ole ratkaisuja?

b) on äärettömästi ratkaisuja?

c) on vain yksi ratkaisu?

Vihje: Kriittiset arvot ovat $a = 5$ ja $b = 4$. Ratkaisu sivulla 38.

Homogeeniset yhtälöryhmät

Lineaarisella homogeenisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

on aina vähintäin yksi ratkaisu, nimittäin *triviaaliratkaisu*

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Lause 2.3.11 Olkoon lineaarisessa yhtälöryhmässä aidosti enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä, ts. olkoon yhtälöryhmä alimäärätty.

a) Jos yhtälöryhmä on homogeeninen, sillä on ei-triviaaleja ratkaisuja, jopa äärettömästi.

b) Jos yhtälöryhmä on epähomogeeninen, sillä on 0 tai ∞ ratkaisua.

Todistus. Olkoon yhtälöryhmä kokoa $m \times n$, $m < n$, ja viety yhtäpitävään porrasmuotoon. Homogeenisella yhtälöryhmällä on ainakin triviaaliratkaisu, joten porrasmuodossa ei ole ristiriitaisia yhtälöitä. Sama pätee epähomogeeniselle ryhmälle, jolla on ratkaisuja.

Porrasmuodossa olkoon $r \leq m$ nollasta eriävää riviä ja siten r johtavaa muuttujaa. Koska tuntemattomia on $n > m \geq r$, voidaan vapaat $n - r$ muuttujaa valita mielivaltaisesti. □

Tehtävä 2.3.12 Ratkaise

$$\begin{cases} -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) valiten vapaaksi tuntemattomaksi x_4 (siis asettamalla vaikkapa parametriksi $t \in \mathbb{R}$).

b) valiten vapaaksi tuntemattomaksi x_3.

Ratkaisut sivulla 38.

Jos yhtälöitä on enemmän kuin tuntemattomia, yhtälöryhmällä ei siis tavallisesti ole ratkaisua. Kuitenkin sille voidaan yleensä laskea käyttökelpoinen ”kompromissiratkaisu”, nk. PNS-ratkaisu, jota käsitellään Luvussa 21.

Parametrimuunnokset

Kun lineaarisella yhtälöryhmällä on äärettömästi ratkaisuja, on yleensä useita tapoja esittää ratkaisu parametrien avulla. Näin voi olla hyvinkin hankalaa verrata ratkaisuja toisiinsa; siis ovatko ratkaisujoukot todella samat. Kun kahdessa eri ratkaisumuodoissa käytetään eri parametrinimiä $(s_1, s_2, \ldots)$ ja $(t_1, t_2, \ldots)$, on ainakin periaatteessa helpohko selvittää esittävätkö ne samaa ratkaisujoukkoa:
Ensinnäkin, molemmissa ratkaisuissa on oltava sama arvo niillä tuntematomilla, joissa ei esiinny parametria (eli kerroin on nolla). Tämän tarkastuksen jälkeen nämä voidaan jättää syrjään. Yhtälöryhmän porrasmuodosta nähdään mikä on vapaasti valittavien tuntemattomien määrä eli parametrien (minimi)määrä. Kun ratkaisut on muodostettu porrasmuodon avulla, tulee parametreja kuhunkin esitykseen sama määrä. Merkitään ratkaisut koordinaateittain samoiksi ja ratkaistaan toisen ratkaisumuodon parametrit toisen avulla. Jos tämä onnistuu, ovat ratkaisujoukot samat. Esitysmuotojen tulee siis olla saatavissa toisistaan parametrimuunnoksella.

Tehtävä 2.3.13 Osoita, että yhtälöryhmän (joka on valmiiksi porrasmuodossa)

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & & & = & 3 \end{cases}$$

ratkaisut ovat todella samat:

$$\begin{aligned} (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)^T &= (-2-t_1-t_2 \quad 3 \quad t_2 \quad t_1)^T,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \\ (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)^T &= (s_1 \quad 3 \quad s_2 \quad -2-s_1-s_2)^T,\ s_1, s_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ratkaisu sivulla 39.

2.4 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 2.1.2: Yhtälöryhmän määräävät seuraavassa näkyvät funktiot $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll} F_1(x,y,z) & = & x^2+x+y-z & = & 0 \\ F_2(x,y,z) & = & x+y+z & = & 0 \\ F_3(x,y,z) & = & z-y^2-1 & = & 0 \end{array}$$

Tehtävä 2.2.2:

a) on lineaarinen (homogeeninenkin, kun muuttujina ovat x ja y)

b) on lineaarinen (epähomogeeninen)

c) on lineaarinen (jopa homogeeninen, jos myös z on muuttuja)

d) ei ole lineaarinen, siinähän esiintyy tulo xy; jos kuitenkin esimerkiksi y olisi vakio, kyseessä olisi lineaarinen yhtälö!

Tehtävä 2.2.3: lienee parasta ottaa muuttujiksi (tuntemattomiksi) kaikki esiintyvät symbolit x, y ja z. Silloin

$$\begin{array}{rcll} F_1(x,y,z) & = & 2x-3y & = & 0 \\ F_2(x,y,z) & = & 2x-3y-3 & = & 0 \\ F_3(x,y,z) & = & 2x-3y-z & = & 0 \end{array}$$

Tehtävä 2.2.4: Vähennetään ristiin samassa vaiheessa. Oikea vastaus $x = 5, y = 2$.

Tehtävä 2.2.5: ratkaisut parametrimuodossa:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 2y & = & 3 \\ 5x & - & 3y & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \frac{17}{22} \\ y & = & -\frac{1}{22} \end{array}\right.$

(suorien leikkauspiste)

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 5z & = & -12 \\ 2x & + & 3y & - & 8z & = & 34 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{32}{13}+\frac{1}{13}\,s \\ y & = & \frac{126}{13}+\frac{34}{13}\,s \\ z & = & s \in \mathbb{R}, \end{array}\right.$

(tasojen leikkaussuora)

c) $\left\{\begin{array}{rcrcr} s & + & t & = & 2 \\ s & - & t & = & 1 \\ 3s & + & t & = & -1 \end{array}\right.$ Ei ratkaisua (suorat eivät leikkaa samassa pisteessä)

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & 8x_3 & = & -15 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 3 \end{array}\right.$

(tasojen leikkauspiste)

Tehtävä 2.2.9: Johtavia tuntemattomia ovat x_1, x_2 ja x_4, vapaita x_3, x_5 ja x_6.

Tehtävä 2.2.11: Porrasmuoto on

$$\begin{cases} x_1 & + & \frac{2}{5}x_2 & + & \frac{1}{5}x_3 & = & \frac{2}{5} \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & \frac{2}{7} \end{cases}$$

ja ratkaisu $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{24}{35}, \frac{18}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

Tehtävä 2.2.16: Esimerkissä 2.2.13 saatuun porrasmuotoon tehdään yksi operaatio $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$, jolloin saadaan redusoitu porrasmuoto

$$\begin{cases} x_1 & & & + & \frac{2}{3}x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & \frac{5}{3}x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

ja ratkaisu vektorimuodossa (huomaa sijoitus $s = 3t$):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s,\ t \in \mathbb{R}$$

Tehtävä 2.2.17: a) Ratkaisu parametrimuodossa:

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{2} + 2s \\ x_2 & = & 1 - \frac{4}{3}s \\ x_3 & = & s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Ei ratkaisua:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 1 & | & R_1 \\ -3x_1 & + & x_2 & = & 3 & | & R_2 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 7 & | & R_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & = & 7 & | & R_1' \leftarrow R_3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & = & 1 & | & R_2' \leftarrow R_1 \\ -3x_1 & + & x_2 & = & 3 & | & R_3' \leftarrow R_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & = & 7 & | & R_1'' \leftarrow R_1' \\ & & x_2 & = & -13 & | & R_2'' \leftarrow R_2' - 2R_1' \\ & - & 5x_2 & = & 24 & | & R_3'' \leftarrow R_3' + 3R_1' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & = & 7 & | & R_1''' \leftarrow R_1'' \\ & & x_2 & = & -13 & | & R_2''' \leftarrow R_2'' \\ & & 0 & = & -41 & | & R_3''' \leftarrow R_3'' + 5R_2'' \end{cases}$$

c) Ratkaisu vektorimuodossa, kun vapaaksi tuntemattomaksi on valittu $x_4 = t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

mutta hiukan toinen muoto ilmestyy valinnalla $x_3 = s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Osoita nämä ratkaisujoukot samoiksi!
Vihje: Merkitään yo. ratkaisujen mukaisesti $x_3 = s = 1 + \frac{1}{2}t$, josta $t = 2s - 2$. Nyt sijoitetaan tämä t ensimmäiseen ratkaisuun, ja sievennellään.

Tehtävä 2.3.4: $(x_1\ x_2\ x_3)^T = (2\ 4\ {-1})^T$

Tehtävä 2.3.8: a) $(x_1\ x_2\ x_3)^T = \frac{1}{10}(1\ {-3}\ 15)^T$
b) Valitaan esimerkiksi $x_3 = s \in \mathbb{R}$, jolloin $(x_1\ x_2\ x_3)^T = (1 - \frac{3}{5}s\ \ -\frac{1}{5}s\ \ s)^T$ tai vaikkapa valitsemalla nyt $t = s/5$: $(x_1\ x_2\ x_3)^T = (1 - 3t\ \ -t\ \ 5t)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 2.3.9: $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T = \frac{1}{2}(3\ {-1}\ 1\ 2)^T$.

Tehtävä 2.3.10: Viedään Gaussilla (lähes) porrasmuotoon. Muodosta

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad (a-5)x_3 = b-4 \end{cases}$$

nähdään

a) ei ratkaisuja $\iff a - 5 = 0$ ja $b \neq 4$ $(0x_3 \neq 0)$

b) ääreettömästi ratkaisuja $\iff a - 5 = 0$ ja $b = 4$ $(x_3 = t \in \mathbb{R})$

c) tasan yksi ratkaisu $\iff a - 5 \neq 0$

Tehtävä 2.3.12: a) Kun valitaan parametriksi $\mathbb{R} \ni t = x_4$, saadaan ratkaisuksi neliulotteisen avaruuden suora

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -1 \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{t}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Kun valitaan parametriksi $\mathbb{R} \ni s = x_3$, saadaan ratkaisusuora muodossa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \frac{s}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Tehtävä 2.3.13: Merkitsemällä ratkaisumuodot koordinaateittain samoiksi saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} s_1 & & = & -2 - t_1 - t_2 \\ & s_2 & = & t_2 \\ s_1 & + \; s_2 & = & -2 - t_1 \end{cases}$$

Tällä (ylimäärätyllä) yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu $s_1 = -2-t_1-t_2$, $s_2 = t_2$. Sijoittamalla nämä arvot toiseen muotoon

$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T = (s_1 \quad 3 \quad s_2 \quad -2-s_1-s_2)^T$$

saadaan juuri ensimmäinen muoto

$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T = (-2-t_1-t_2 \quad 3 \quad t_2 \quad t_1)^T.$$

3 MATRIISILASKENTAA

Tässä luvussa käsitellään matriisialgebraa, opitaan muuntamaan lineaarinen yhtälöryhmä matriisimuotoon sekä ratkaisemaan se.

3.1 Karteesinen tulo ja matriisi

Joukkojen $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ *karteesinen tulo* eli *tulojoukko* (product) on järjestettyjen parien joukko

$$\mathbf{X}\times\mathbf{Y} := \{(a,b) \mid a \in \mathbf{X}, b \in \mathbf{Y}\}.$$

Äärellinen n-*ulotteinen* (n-dimensional) tulojoukko on

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2\times\cdots\times\mathbf{X}_n := \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_i \in \mathbf{X}_i\}$$

ja sen alkioita $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ sanotaan *vektoreiksi*. Erityisesti merkitään

$$\mathbf{X}^n := \underbrace{\mathbf{X}\times\cdots\times\mathbf{X}}_{n\,\mathrm{kpl}}.$$

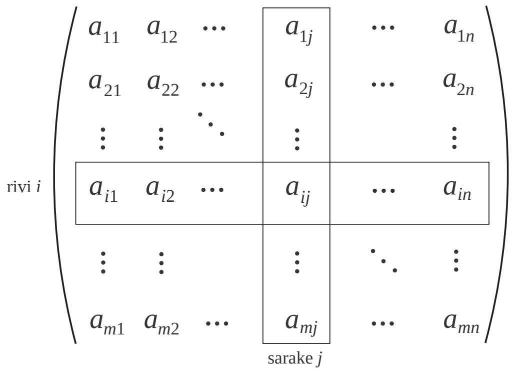
Jos tulojoukon tekijöitä $\mathbf{X}_i$ on mn kappaletta, n, $m \in \mathbb{N}$, ne voidaan indeksoida uudelleen ja kirjoittaa $(m \times n)$-suorakulmioksi muotoon

$$\mathcal{X} = \prod_{i,j}^{m,n} \mathbf{X}_{ij} := \begin{matrix} \mathbf{X}_{11} & \times & \mathbf{X}_{12} & \times & \cdots & \times & \mathbf{X}_{1n} \\ \times & & \times & & & & \times \\ \mathbf{X}_{21} & \times & \mathbf{X}_{22} & \times & \cdots & \times & \mathbf{X}_{2n} \\ \times & & \times & & & & \times \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \times & & \times & & & & \times \\ \mathbf{X}_{m1} & \times & \mathbf{X}_{m2} & \times & \cdots & \times & \mathbf{X}_{mn} \end{matrix}.$$

Joukon $\mathcal{X}$ alkiot A ovat $m\times n$-*matriiseja* ja merkitään

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbf{X}_{ij}.$$

Kaksi matriisia $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{m\times n}$ ovat *samat* (merkitään $A = B$), jos $a_{ij} = b_{ij}$ kaikilla $i \in [m]$, $j \in [n]$, toisin sanoen, kaikki vastinalkiot ovat samoja. Katso kuva 6.



Kuva 6: alkio a_{ij}

Yksirivistä matriisia sanotaan myös *vaaka-* eli *riviivektoriksi* (row) ja yksisarakkeista *pysty-* eli *sarakevektoriksi* (column). Matriisilaskennan yhteydessä sekä vaaka- että pystyvektorien alkioiden väliset pilkut korvataan tavallisesti tyhjeillä. Kuten jo Luvussa 2.2 sovittiin, tässä oppimateriaalissa euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita käsitellään pääsääntöisesti pystyvektoreina.

3.2 Matriisioperaatioita ja nimityksiä

Transponointi ja laskutoimitukset

Matriisin $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *transpoosi* on matriisi

$$A^T = (b_{kl}) \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

missä $b_{kl} := a_{lk}$, ts. rivit on vaihdettu järjestyksessä sarakkeiksi.

Avaruuden $\mathbb{R}^{m\times n}$ matriiseja voidaan laskea yhteen, kertoa vakiolla ja kertoa keskenään *alkioittain* kuten vektoreitakin. Matriisia O, jonka kaikki alkiot ovat nollia, kutsutaan *nollamatriisiksi*. Nollamatriisi on matriisien yhteenlaskun neutraalialkio, so. $A+O = A$ ja $O+A = A$. Matriisin $A = (a_{ij})$ *vastamatriisi* on vastaluvuista koostuva samankokoinen matriisi $-A = (-a_{ij})$; silloin $A + (-A) = O$ ja $-A + A = O$.

Esimerkki 3.2.1 Olkoot

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Transpoosit ovat silloin

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Yhteenlaskun tulos on *summa*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Skalaarilla kertominen:

$$(-2)A = -2A = -\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Alkioittainen tulo (jolla ei lineaarialgebrassa juuri ole käyttöä):

$$A .* B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} .* \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Varsinainen *matriisien kertolasku* määritellään seuraavasti: Matriisien $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ *(matriisi)tulo* on matriisi

$$AB = C = (c_{ik}) \in \mathbb{R}^{m\times r},$$

missä $c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$. Tulomatriisin alkio c_{ik} on siis matriisin A rivin i ja matriisin B sarakkeen k pistetulo.

Pystyvektorien $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$ ja $\mathbf{y} = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ pistetulo voidaan kirjoittaa matriisitulona

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Pystyvektorin $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$ *normille* $\|\mathbf{x}\|$ pätee

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} \\ \|\mathbf{x}\| &= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.2.2 Esimerkin 3.2.1 matriiseille tuloja AB ja BA ei ole määritelty, koska molemmat ovat 2×3-matriiseja; sen sijaan

$$\begin{aligned}
AB^T &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2(-1) + (-2)(-2) & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + (-2)1 \\ 3\cdot 2 + 0(-1) + 1(-2) & 3\cdot 1 + 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \\
A^T B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tehtävä 3.2.3 Laske

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{d)}\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e) seuraavassa tulossa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

rivillä 3 sarakkeessa 1 oleva luku. Ratkaisut sivulla 56.

Tehtävä 3.2.4 Olkoot

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T \quad \text{ja} \quad C := \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Laske normit a) $\|B\|$ ja b) $\left\|C^T\right\|$, c) pistetulo $(AB)\cdot(C^T)$, sekä matriisitulot

d) $2A^T - BC$, e) $A(BC) - (AB)C$, f) $C^T\Big(\big((-C)A\big)B\Big)$.

Ratkaisut sivulla 56.

Tehtävä 3.2.5 Laske

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{b)}\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

Ratkaisu sivulla 57.

Avaruuden $\mathbb{R}^{n\times n}$ alkiot ovat *neliömatriiseja* (square matrix).

Avaruus $\mathbb{R}^{n\times n}$ on *suljettu* matriisien kertolaskun suhteen, sillä tulo on myös $n\times n$-matriisi.

Matriisin (a_{ij}) *diagonaali* eli *päälävistäjä* on pystyvektori $(a_{11}, \ldots, a_{nn})^T$. Matriisia sanotaan *diagonaalimatriisiksi*, jos sen diagonaalin ulkopuolella olevat alkiot ovat nollia.

Edellä on jo määritelty nollamatriisi O ja vastamatriisit. *Yksikkömatriisi* (identity) on diagonaalimatriisi I, jonka diagonaalialkiot ovat ykkösiä. Yksikkömatriisi on matriisitulon neutraalialkio: jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, niin $AI = IA = A$.

Matriisi $A = (a_{ij})_{n\times n}$ on *symmetrinen*, jos $A = A^T$, eli $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla $i, j \in [n]$. Symmetrisyys tarkoittaa diagonaalin suhteen symmetrisyyttä.

Matriisi on *yläkolmiomatriisi* (upper triangular), jos sen diagonaalin alapuolella on vain nollia; vastaavasti määritellään *alakolmiomatriisi*.

Matriisitulo ei ole vaihdannainen; yleensä $AB \neq BA$.

Kahden nollasta eriävän matriisin tulo voi olla nollamatriisi; voi jopa olla A^2 $(= AA) = O$, vaikka A on nollasta eriävä matriisi.

Tulon supistussääntö ei myöskään päde: siitä, että $AC = BC$ ei seuraa $A = B$.

Sen sijaan laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ ovat liitännäisiä ja niille pätevät mm. osittelulait.

Esimerkki 3.2.6 Matriisitulo ei ole vaihdannainen edes neliömatriiseille:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

3.3 Laskusääntöjä

Matriisin osien poimiminen ja osiin viittaaminen

Olkoon
$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Osavektorin ja -matriisin poiminta: jos $1 \le p \le q \le m$ ja $1 \le r \le s \le n$, niin
$$\begin{aligned} A(p:q,j) \quad &:= \begin{pmatrix} a_{pj} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{pmatrix} \quad A(i,r:s) := \begin{pmatrix} a_{ir} & \cdots & a_{is} \end{pmatrix} \\ A(p:q,r:s) \quad &:= \begin{pmatrix} a_{pr} & \cdots & a_{ps} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{qr} & \cdots & a_{qs} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kokonaisen rivin ja sarakkeen poiminta:
$$A(i,:) := \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad A(:,j) := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Edellisiä merkintöjä käytetään mm. Matlab-ohjelmassa. Matriisin *sarakkeita* merkitään myös $\mathbf{a}_j = A(:,j)$. Tällöin
$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

Olkoon myös B $m\times n$ matriisi. Tällöin summassa $A + B$ on

alkio $(A + B)(i,j) = A(i,j) + B(i,j)$

rivi $(A + B)(i,:) = A(i,:) + B(i,:)$

sarake $(A + B)(:,j) = A(:,j) + B(:,j)$.

Tulossa AB on taas

alkio $(AB)(i,j) = A(i,:)B(:,j) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j)$

rivi $(AB)(i,:) = A(i,:)B$

sarake $(AB)(:,j) = A(B(:,j))$.

Tehtävä 3.3.1 Poimi matriisista

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $A(3,:)$, b) $A(4, 2:4)$, c) $A(2:3, 1:3)$, d) $A(:,2)$, e) $A(:, 2:3)$, f) $A(:,:)$.

Transponointi

Lause 3.3.2 Olkoon α skalaari ja matriisit A ja B sellaisia, että seuraavassa esiintyvät laskutoimitukset ovat ”järjellisiä”, so. määriteltyjä. Silloin

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Todistus. Kohdat 1–3 ovat ilmeisiä. Kohta 4: Olkoot

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

$$B = (b_{ij})_{n\times r}$$

$$C := AB = (c_{ij})_{m\times r}$$

$$D := B^T A^T = (d_{ij})_{r\times m}.$$

Silloin $(AB)^T$ ja $B^T A^T$ ovat samaa kokoa $r\times m$, joten riittää näyttää, että niissä on samat vastinalkiot.

Olkoot $A^T = (a^*_{ij})$, $B^T = (b^*_{ij})$ ja $C^T = (c^*_{ij})$. On osoitettava, että $c^*_{ij} = d_{ij}$ kaikilla $i \in [r]$ ja $j \in [m]$. Koska $b^*_{ik} = b_{ki}$ ja $a^*_{kj} = a_{jk}$, on matriisitulon määritelmän mukaan

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b^*_{ik} a^*_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = c_{ji} = c^*_{ij}$$

□

Matriisialgebra

Lause 3.3.3 Kaikille skalaareille α ja β ja kaikille matriiseille A, B ja C, joille seuraavassa esiintyvät operaatiot on määritelty, pätee

(1) $A + B = B + A$ vaihdannaisuus $(+)$

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ liitännäisyys $(+)$

(3) $(AB)C = A(BC)$ liitännäisyys $(\cdot)$

(4) $A(B + C) = AB + AC$ I osittelulaki $(+, \cdot)$

(5) $(A + B)C = AC + BC$ II osittelulaki $(+, \cdot)$

(6) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ skalaariliitännäisyys

(7) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ skalaarin siirto

(8) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$ I skalaariosittelulaki

(9) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ II skalaariosittelulaki

Todistus. Kohdat (1), (2), (6), (7), (8) ja (9) ovat helppoja. Kohta (4): Olkoot $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{n\times r}$, $C = (c_{ij})_{n\times r}$ sekä merkitään $D := A(B + C)$ ja $E := AB + AC$.

Silloin D ja E ovat $m\times r$-matriiseja ja niiden alkiot ovat

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \quad \text{ja} \quad e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}.$$

Koska summille pätee

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj},$$

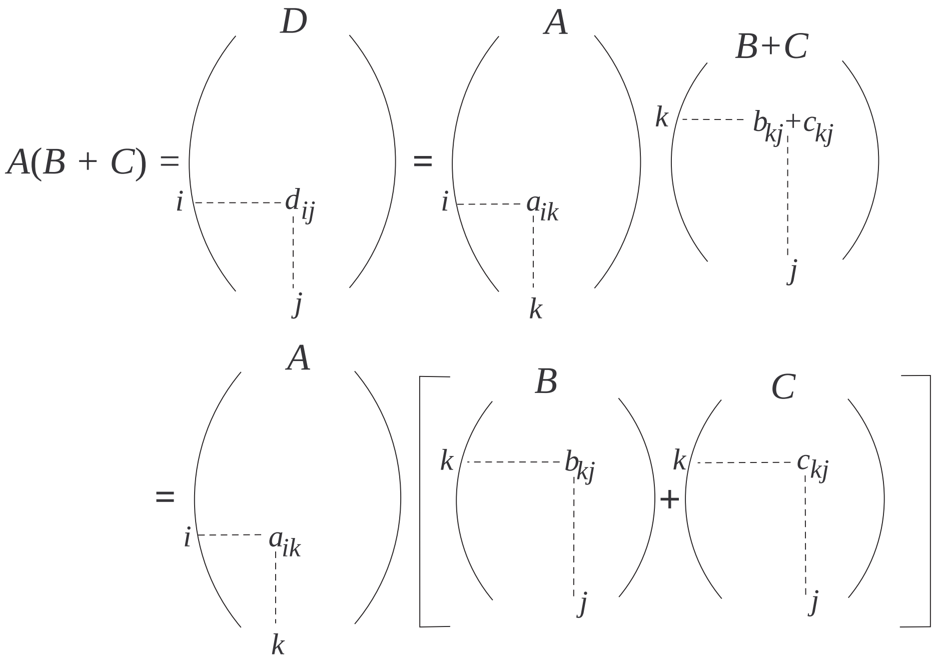
on $d_{ij} = e_{ij}$ ja siten $A(B + C) = D = E = AB + AC$. Katso kuvat 7 ja 8.

Kohta (5) on samankaltainen kuin kohta (4).

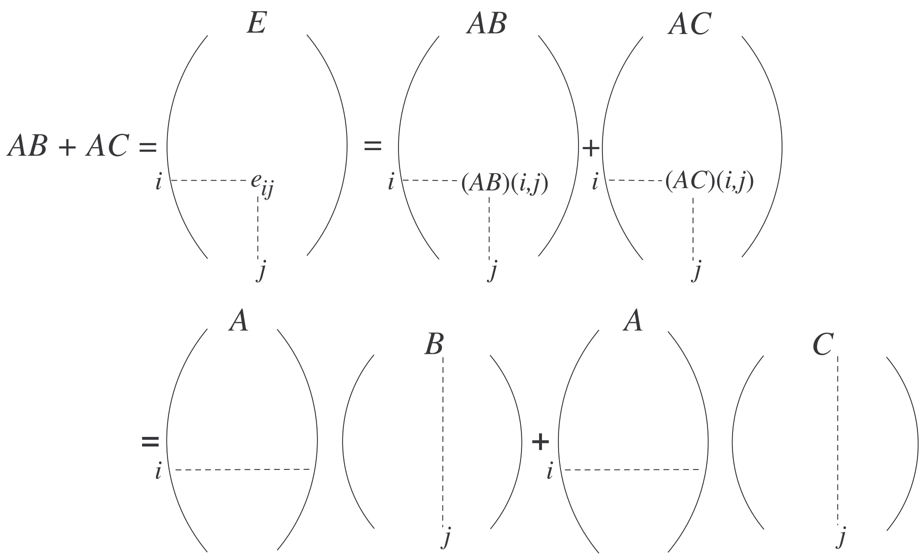
Kohta (3): Olkoot $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times r}$ ja $C = (c_{ij})_{r\times s}$ sekä merkitään $D := AB$ ja $E := BC$.

On osoitettava, että $DC = AE$.

1) Ne ovat samaa kokoa:



Kuva 7: Osittelulain (4) vasen puoli



Kuva 8: Osittelulain (4) oikea puoli

- D on kokoa $m\times r$ ja C $r\times s$, joten DC on kokoa $m\times s$,
- A on kokoa $m\times n$ ja E $n\times s$, joten AE on kokoa $m\times s$.

2) Matriisitulon määritelmän mukaan

$$d_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} \quad \text{ja} \quad e_{kj} = \sum_{l=1}^{r} b_{kl} c_{lj},$$

joten matriiseissa DC ja AE on kohdalla ij alkiot

$$\begin{aligned} p_{ij} &:= \sum_{l=1}^{r} d_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \\ q_{ij} &:= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{r} b_{kl} c_{lj} \right). \end{aligned}$$

Laskujärjestystä saa äärellisissä summissa vaihtaa, joten

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{r} b_{kl} c_{lj} \right) = q_{ij}. \end{aligned}$$

Siis $(AB)C = DC = AE = A(BC)$. □

Matriisin potenssi

Määritelmä 3.3.4 Olkoon A $n\times n$-matriisi. Määritellään sen positiiviset *kokonaislukupotenssit* (power)

$$\begin{aligned} A^1 &:= A, \\ A^k &:= AA^{k-1}, \text{ kun } k \geq 2. \end{aligned}$$

Myös $A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ kpl}}$ on $n\times n$-matriisi kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Esimerkki 3.3.5 Lasketaan määritelmän mukaan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 3.3.6 Mitä ovat O^k ja I^k, kun $k \in \mathbb{N}$? Ratkaisu sivulla 57.

Esimerkki 3.3.7 Olkoon

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lasketaan A^k arvoilla $k \in \mathbb{N}$.

Ratkaisu. Lasketaan aluksi

$$\begin{aligned} A^1 &= A = 1A, \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A, \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4A = 2^2 A \end{aligned}$$

Näyttäisi siltä, että $A^k = 2^{k-1}A$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Induktiotodistus: Väite on tosi arvoilla $k = 1$ ja $k = 2$. Tehdään induktio-oletus: $A^k = 2^{k-1}A$ jollakin $k \geq 2$. Silloin matriisin potenssin määritelmän, induktio-oletuksen ja tapauksen $k = 2$ nojalla

$$A^{k+1} = AA^k = A2^{k-1}A = 2^{k-1}A^2 = 2^{k-1}2A = 2^k A.$$

Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi.

Potenssi-iteraatio

Matriisia voidaan käyttää kuvauksen muodostamisessa; jos A on kiinteä $m \times n$-matriisi ja $\mathbf{x}$ on n-pystyvektori (tai $n \times 1$-matriisi), niin sääntö $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ määrittelee (lineaari)kuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Jos neliömatriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ on annettu, voidaan muodostaa kuvaus $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $n \mapsto A^n\mathbf{z}$ jossa $\mathbf{z}$ kuvautuu vektorille $A\mathbf{z}$, $A^2\mathbf{z}$, $A^3\mathbf{z}$, jne. Tämä voidaan esittää yksinkertaisena *iteraatiokaavana*

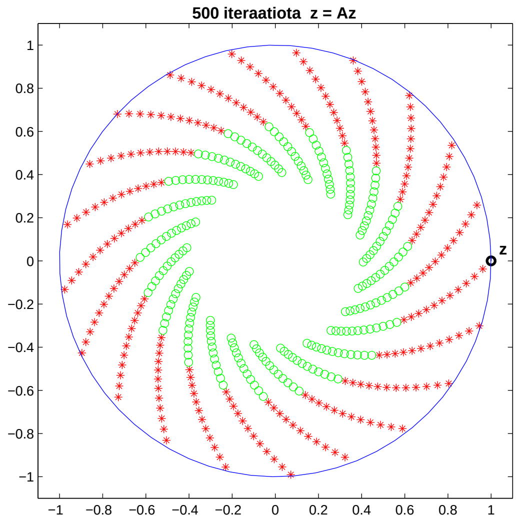
$$\mathbf{z} := A\mathbf{z},$$

jota toistamalla saadaan mielenkiintoisia kuvioita.

Esimerkki 3.3.8 Olkoot

$$A := \begin{pmatrix} 0.3614 & -0.9285 \\ 0.9285 & 0.3714 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{z} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kuvassa 9 funktion $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ iteraatiokuvio.



Kuva 9: Iteraatiokuvio

Tehtävä 3.3.9 Selvitä, mitkä ovat Esimerkin 3.3.8 kolmen ensimmäisen iteraation muodostamat pisteet. Ratkaisu sivulla 57.

Laskutoimitusten määristä

Matriisien yhteenlasku, vakiolla kertominen ja transponointi ovat suhteellisen nopeasti suoritettavia operaatioita. Sen sijaan matriisitulon laskeminen sisältää runsaasti lukujen yhteen- ja kertolaskuja, joten se on suhteellisen hidasta puuhaa – jopa tietokoneella. Tästä syystä paljon matriisituloja sisältävä laskettava lauseke kannattaa ensin sieventää laskulakeja käyttäen.

Lasketaan kuinka monta lukujen yhteen- ja kertolaskua tarvitaan kahden matriisin kertomisessa. Kahden n-vektorin pistetulon

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

laskemiseen tarvitaan n kertolaskua ja $n-1$ yhteenlaskua. Matriisitulossa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

kerrotaan jokainen vaakavektori toisen jokaisella pystyvektorilla, yhteensä mr pistetuloa. Yhteenlaskuja tarvitaan siis $m(n-1)r$ ja kertolaskuja mnr.

Esimerkki 3.3.10 Olkoot A, B ja C $n{\times}n$-matriiseja. Sievennä laskusääntöjen avulla lauseketta

$$(A^2C^TB)^T + (B^2)^TC(A^T)^2$$

niin, että sitä laskettaessa on mahdollisimman vähän matriisien kertolaskuja. Kuinka monta lukujen kertolaskua tarvitaan alkuperäisen, ja kuinka monta sievennetyn lausekkeen laskemiseksi?

Ratkaisu. Koska Lauseen 3.3.2 mukaan $(A^T)^2 = A^TA^T = (AA)^T = (A^2)^T$, saadaan

$$\begin{aligned} (A^2C^TB)^T{+}(B^2)^TC(A^T)^2 &= B^TC(A^2)^T{+}B^TB^TC(A^2)^T \\ &= (I{+}B^T)B^TC(A^2)^T. \end{aligned}$$

Alkuperäisessä on $7n^3$ ja sievennetyssä $4n^3$ kertolaskua.

3.4 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

voidaan ilmaista sen tuntemattomien kertoimista koostuvan *kerroinmatriisin* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja pystyvektorien

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

avulla muodossa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

eli

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Gaussin eliminointi- ja Gauss-Jordanin reduktiomenetelmät voidaan nyt suorittaa käyttäen yhtälöryhmän *laajennettua* (*augmented*) (kerroin)matriisia

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & | & \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Esimerkki 3.4.1 Ratkaistaan yhtälöryhmä, jonka laajennettu matriisi on

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Ratkaisu. Seuraavassa on tarvittavat operaatiot tehty, merkitse ne näkyviin!

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3
\end{array}\right)
$$

Porrasmuodon mukaan olisi $0 = -4$. Yhtälöryhmällä ei siten ole ratkaisua.

Tehtävä 3.4.2 Ratkaise Tehtävän 2.3.8 yhtälöryhmä a)

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\
2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5
\end{cases}
$$

laajennettua kerroinmatriisia käyttäen. Ratkaisu sivulla 58.

3.5 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 3.2.3: Matriisitulot ovat

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 3 \\ 1(-1) + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{11}x_2 & a_{11}x_3 \\ a_{21}x_1 & a_{21}x_2 & a_{21}x_3 \\ a_{31}x_1 & a_{31}x_2 & a_{31}x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)}\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e)}\quad c_{31} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 13$$

Tehtävä 3.2.4: Vektorien normit ovat
a) $\|B\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ ja b) $\left\|C^T\right\| = \sqrt{13}$.
c) Pistetulo on

$$\begin{aligned} (AB)\cdot(C^T) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -40 \end{aligned}$$

$$\text{d)}\quad 2A^T - BC = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 10 \\ -11 & 10 \end{pmatrix}$$

e) 2×2-nollamatriisi; ks. Lause 3.3.3 tai laske läpi.

f) Vaiheittain:

$$
\begin{aligned}
\Big((-C)A\Big)B &= \left(\begin{pmatrix}-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}40\end{pmatrix}\\
C^T\left(\Big((-C)A\Big)B\right) &= \begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}120\\ -80\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Tehtävä 3.2.5: tulokset ovat tarkasti ottaen samoja 1×1-matriiseja:

a)
$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}+c_{11}\\ b_{21}+c_{21}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a_{11}(b_{11}+c_{11})+a_{12}(b_{21}+c_{21})\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}(b_{11}+c_{11})+a_{12}(b_{21}+c_{21})\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Tehtävä 3.3.6: nollamatriisin ja yksikkömatriisin potenssit $O^1 = O$ ja $I^1 = I$, samoin arvoilla $k \geq 2$:

$$
O^k = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{k-1} = O,
$$

$$
I^k = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{k-1} = I.
$$

Tehtävä 3.3.9: kolme ensimmäistä iteraatiopistettä ovat

$$
Az = \begin{pmatrix}0.3614\\ 0.9285\end{pmatrix}, \quad A^2z = \begin{pmatrix}-0.7315\\ 0.6804\end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A^3z = \begin{pmatrix}-0.8961\\ -0.4265\end{pmatrix}.
$$

Tehtävä 3.4.2 : Ratkaisu laajennettua kerroinmatriisia käyttäen:

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1' \leftarrow R_1 \\ R_2' \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3' \leftarrow R_3 - 4R_1 \\ R_4' \leftarrow R_4 - 2R_1 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1'' \leftarrow R_1' \\ R_2'' \leftarrow R_2' \\ R_3'' \leftarrow R_3' - R_2' \\ R_4'' \leftarrow R_4' - R_2' \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1''' \leftarrow R_1'' \\ R_2''' \leftarrow R_2'' \\ R_3''' \leftarrow R_4'' \\ R_4''' \leftarrow R_3'' \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1'''' \leftarrow R_1''' \\ R_2'''' \leftarrow -\frac{1}{5}R_2''' \\ R_3'''' \leftarrow \frac{1}{2}R_3''' \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1''''' \leftarrow R_1'''' - R_3'''' \\ R_2''''' \leftarrow R_2'''' - \frac{1}{5}R_3'''' \\ R_3''''' \leftarrow R_3'''' \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1'''''' \leftarrow R_1''''' - 2R_2''''' \\ R_2'''''' \leftarrow R_2''''' \\ R_3'''''' \leftarrow R_3''''' \end{array}$$

Ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

4 ANALYYTTISTÄ GEOMETRIAA

Euklidisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita (vektoreita) sanotaan usein *pisteiksi*. Vektori $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ voidaan *kuvitella origosta* $\mathbf{0}$ alkavaksi "nuoleksi", jonka kärki on pisteessä $\mathbf{x}$. Vektorin $\mathbf{x}$ *vastavektorin* $-\mathbf{x}$ kärki on yhtä kaukana origon vastakkaisella puolella. Vektori $\mathbf{x}$ voidaan myös ajatella *siirretyksi* suuntansa ja pituutensa säilyttäen alkamaan jostakin pisteestä $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, jolloin sen kärki on pisteessä $\mathbf{y} + \mathbf{x}$. Tällöin vektorit $\mathbf{y}$ ja $\mathbf{x}$ on asetettu *peräkkäin* ja niiden summavektori alkaa origosta ja kärki on pisteessä $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Olkoon annettu vektorit $\mathbf{z}$ ja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Silloin yhtälöllä $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ on tasan yksi ratkaisu, vektorien *erotus* $\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{y} := \mathbf{z} + (-\mathbf{y})$. Kaksi vektoria $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ovat *yhdensuuntaisia* (*parallel*), jos on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a} \text{ tai } \mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}.$$

Jos lisäksi $\alpha \geq 0$, ovat vektorit *samansuuntaisia*, muutoin *vastakkaissuuntaisia*.

4.1 Suorat tasossa

Tuttu tason suora $y = ax + b$ voidaan esittää vektorimuodossa. Merkitään $x = t$, jolloin

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tällainen suoran esitys on yleistettävissä n-ulotteiseen avaruuteen.

Suora vektorimuodossa. Olkoot $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Joukkoa

$$S_{\mathbf{r}_0,\mathbf{v}} := \{\, \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

sanotaan *suoraksi*, joka *kulkee* pisteen $\mathbf{r}_0$ kautta ja on *suuntavektorin* $\mathbf{v}$ suuntainen. Kaikki vektorit $\alpha\mathbf{v}$, $\alpha \neq 0$, määräävät saman suoran $S_{\mathbf{r}_0,\alpha\mathbf{v}} = S_{\mathbf{r}_0,\mathbf{v}}$. Merkintätapa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

tarkoittaa suoraa, siis joukkoa $S_{\mathbf{r}_0,\mathbf{v}}$. Suorat

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{s}(u) &= \mathbf{s}_0 + u\mathbf{w}, \quad u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ovat *yhdensuuntaiset*, jos $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{w}$ jollakin $\alpha \in \mathbb{R}$, muutoin *erisuuntaiset*. Kaksi suoraa ovat siis yhdensuuntaisia, jos ja vain jos niiden suuntavektorit ovat yhdensuuntaisia.

Suorat $\mathbf{r}(t)$ ja $\mathbf{s}(t)$ *leikkaavat toisensa* pisteessä $\mathbf{x}$, jos suorilla on tasan yksi yhteinen piste $\mathbf{x}$, ts. jos on olemassa yksi ja vain yksi lukupari $p, q \in \mathbb{R}$, joille

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(p) = \mathbf{s}(q) = \mathbf{r}_0 + p\mathbf{v} = \mathbf{s}_0 + q\mathbf{w}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ erisuuntaiset suorat leikkaavat toisensa, mutta avaruuksissa $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, on äärettömästi erisuuntaisia leikkaamattomia suoria.

Kahden pisteen $\mathbf{r}_0$ ja $\mathbf{r}_1$ kautta voidaan asettaa tasan yksi suora ja sen yhtälö on ilmaistavissa esimerkiksi muodoissa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \quad \text{tai} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + s(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1).$$

Tehtävä 4.1.1 Määritä suorien

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

leikkauspiste ja muodosta sen ja origon kautta kulkevan suoran vektorimuotoinen yhtälö. Piirrä suorat koordinaatistoon.
Ratkaisu sivulla 66.

Tehtävä 4.1.2 Muodosta suora, joka kulkee pisteen $(3\ 4\ 0)^T$ kautta ja

a) on vektorin $(2\ 4\ -2)^T$ suuntainen.

b) on suoran $\mathbf{r} = (-5\ 4\ 7)^T + (0\ 3t\ t)^T$ suuntainen.

Piirrä suorat $x_1x_2x_3$-koordinaatistoon.
Ratkaisu sivulla 66.

Tehtävä 4.1.3 Muodosta suora, joka kulkee pisteiden $(-3\ 7\ 8)^T$ ja $(2\ 5\ 1)^T$ kautta. Muodosta vielä suora, joka on äskeisen suuntainen, mutta kulkee origon kautta.
Ratkaisu sivulla 67.

Suora parametrimuodossa. Euklidisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ suora $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, voidaan esittää koordinaateittain *parametrimuodossa*

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & = & a_1 & + & tv_1 \\ x_2 & = & a_2 & + & tv_2 \\ & \vdots & & & \\ x_n & = & a_n & + & tv_n \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R},$$

missä luvut v_i ovat suoran *suuntaluvut*.

Suora koordinaattimuodossa. Jos jokainen $v_i \neq 0$, saadaan – ratkaisemalla kustakin yhtälöstä t – suoran yhtälö *koordinaattimuodossa*

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{v_n}.$$

Jos jokin $v_k = 0$, sen osuus korvataan yhtälöllä $x_k = a_k$; esimerkiksi jos $v_2 = 0$, ovat yhtälöt

$$x_2 = a_2, \ \frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_3 - a_3}{v_3} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{v_n}.$$

Tehtävä 4.1.4 Osoita, että jos $v_1^2 + v_2^2 > 0$, suora

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 &+ tv_1 \\ x_2 &= a_2 &+ tv_2 \end{cases}$$

voidaan esittää muodossa $Ax_1+Bx_2 = C$.
Ratkaisu sivulla 68.

Tehtävä 4.1.5 Anna koordinaattimuodossa sen suoran yhtälö, joka on suoran

$$\frac{x_1 - 3}{2} = \frac{x_2 + 1}{3} = 7x_3 + 21$$

suuntainen ja kulkee pisteen $(2\ 1\ \ -2)^T$ kautta.
Ratkaisu sivulla 68.

Tehtävä 4.1.6 Anna Tehtävän 4.1.5 suorat parametrimuodossa.
Ratkaisu sivulla 68.

Tehtävä 4.1.7 Mikä on suoran $2x_1 + 5x_2 = 1$ parametrimuoto, mikä koordinaattimuoto?
Ratkaisu sivulla 68.

4.2 Tasot avaruudessa

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, s, $t \in \mathbb{R}$, on täysin määrätty joukko, jos tiedetään sen kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Jos nämä ovat $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ ja $\mathbf{r}_2$, eräs tason esitys on

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Jos tasolla ja suoralla on täsmälleen yksi yhteinen piste, sanotaan, että ne *leikkaavat* kyseisessä pisteessä; muutoin *suora on tason suuntainen*. Tason suuntainen suora voi olla kokonaan tason ulkopuolella tai kokonaan tasossa.

Kaksi tasoa voivat olla *yhdensuuntaisia* tai *leikata* toisensa *pitkin* jotakin suoraa. Leikkaussuoran yhtälö saadaan selville ratkaisemalla tasojen yhtälöiden muodostama yhtälöryhmä.

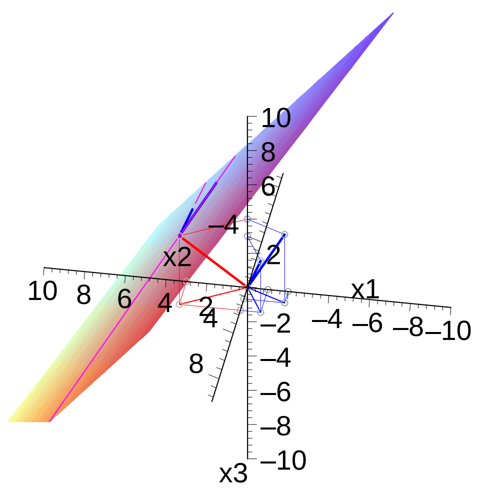
Taso $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ on *parametrimuodossa*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + su_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + su_2 + tv_2 \\ x_3 = a_3 + su_3 + tv_3 \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 4.2.1 Määritä sen tason yhtälö, joka kulkee pisteen $(3\ 2\ 4)^T$ kautta ja joka on vektorien $(-2\ 1\ 4)^T$ ja $(-1\ 2\ 3)^T$ suuntainen.

Ratkaisu. Pisteen ja suuntien avulla saadaan eräs vektoriesitys (ks. Kuva 10)

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$



Kuva 10: Esimerkin 4.2.1 pisteet, suuntavektorit ja suorat

Maple-työarkki avaruuspiirroksesta (linkki)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/Esim421.mws`

Tehtävä 4.2.2 Määritä sen tason yhtälö, joka kulkee
a) pisteiden $(1\ 0\ 0)^T$, $(0\ 1\ 0)^T$, $(0\ 0\ 1)^T$ kautta,
b) pisteiden $(2\ 1\ 3)^T$ ja $(1\ 4\ 2)^T$ kautta ja on suoran $\mathbf{r}(t) := (1\ 2\ 1)^T + t(5\ 2\ 1)^T$ suuntainen.
Ratkaisu sivulla 68.

Tehtävä 4.2.3 Suoran

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

kautta asetetaan taso (ts. kyseisen suoran tulee olla tasossa), joka on vektorin $(2\ 1\ -1)^T$ suuntainen. Määritä tämän tason ja xy-tason leikkaussuora.
Ratkaisu sivulla 69.

4.3 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 4.1.1: Leikkauspiste: millä $t, u \in \mathbb{R}$ on $\mathbf{r} = \mathbf{s}$?

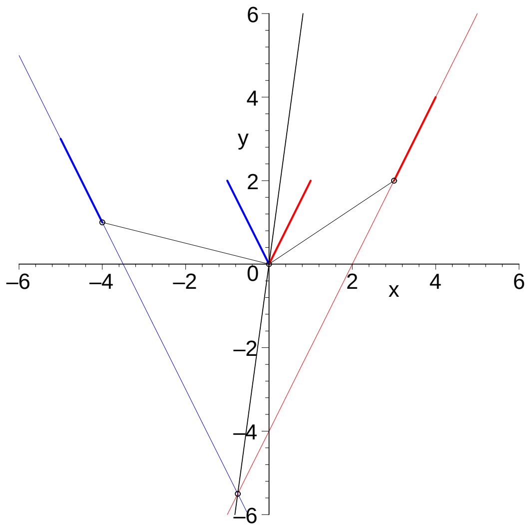
$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(u) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3+t \\ 2+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-u \\ 1+2u \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t + u = -7 \\ 2t - 2u = -1 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t = -\frac{15}{4} \\ u = -\frac{13}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Siis leikkauspiste saadaan (esimerkiksi) arvolla $t = -15/4$:

$$\mathbf{r}\left(-\frac{15}{4}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{15}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Sen ja origon kautta kulkee suora (ks. Kuva 11)

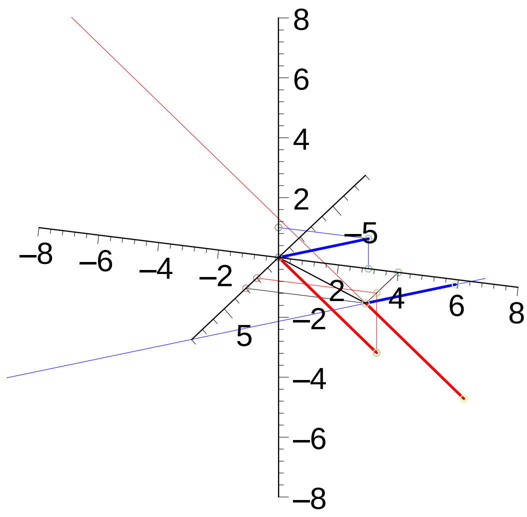
$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 3 \\ 22 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$



Kuva 11: Tehtävän 4.1.1 pisteet, suuntavektorit ja suorat

Tehtävä 4.1.2 : Helposti poimitaan suuntavektorit, ja suorat yhteisen pisteen kautta ovat (ks. Kuva 12)

$$\text{a)} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$\text{b)} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Kuva 12: Tehtävän 4.1.2 pisteet, suuntavektorit ja suorat

Maple-työarkki avaruuspiirroksesta (linkki)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/Teht412.mws`

Tehtävä 4.1.3 : Asetetaan vakiovektoriksi $\mathbf{r}_0 := (-3 \;\; 7 \;\; 8)^T$. Suuntavektoriksi otetaan vaikkapa erotus

$$\mathbf{v} := (2 \;\; 5 \;\; 1)^T - (-3 \;\; 7 \;\; 8)^T = (5 \;\; -2 \;\; -7)^T.$$

Toinen suora saadaan ottamalla vakioksi origo ja suuntavektoriksi äskeinen $\mathbf{v}$. Siis

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{r}' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Maple-työarkki avaruuspiirroksesta (linkki)
http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/Teht413.mws

Tehtävä 4.1.4 : a) Jos esimerkiksi $v_1 \neq 0$, on $t = (x_1 - a_1)/v_1$ ja siten

$$x_2 = a_2 + \frac{x_1 - a_1}{v_1} \cdot v_2.$$

Tästä edelleen $v_1x_2 = a_2v_1 + v_2x_1 - a_1v_2$ eli $v_2x_1 - v_1x_2 = a_1v_2 - a_2v_1$; valitsemme nyt

$$A := v_2, B = v_1 \text{ ja } C = a_1v_2 - a_2v_1.$$

Tehtävä 4.1.5 : Annetun suoran koordinaattimuoto perustilassaan on

$$\frac{x_1 - 3}{2} = \frac{x_2 + 1}{3} = 7x_3 + 21 = \frac{x_3 + 3}{\frac{1}{7}}$$

Siitä voidaan poimia suoraan suuntavektori $(2\ \ 3\ \ 1/7)^T$. Annetun pisteen $(2\ \ 1\ \ -2)^T$ kautta kulkee suora

$$\frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2 - 1}{3} = \frac{x_3 - (-2)}{\frac{1}{7}}.$$

Tehtävä 4.1.6 : Tehtävän 4.1.5 ratkaisusta selviää suoran piste ja suuntavektori, joten parametrimuodot ovat

$$\begin{cases} x_1 &= 3 + 2t \\ x_2 &= -1 + 3t \\ x_3 &= -3 + \frac{1}{7}t \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x_1 &= 2 + 2t \\ x_2 &= 1 + 3t \\ x_3 &= -2 + \frac{1}{7}t \end{cases}$$

Tehtävä 4.1.7 : Eräs parametrimuoto saadaan merkitsemällä $x = t$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 &= t \\ x_2 &= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Tästä saadaan myös eräs koordinaattimuoto:

$$\frac{x_1 - 0}{1} = \frac{x_2 - \frac{1}{5}}{-\frac{2}{5}}$$

Tehtävä 4.2.2 : a) Valitaan vaikkapa

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jolloin tason vektoriyhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad s,t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

b) Valitaan esimerkiksi $\mathbf{s}_0 := (2\ 1\ 3)^T$ ja $\mathbf{s}_1 := (1\ 4\ 2)^T$, jolloin

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \mathbf{s}_0 + \alpha(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) + \beta\mathbf{v}\\ &= \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Tehtävä 4.2.3 : Tason yhtälöksi saadaan

$$\begin{cases} x = 1 - t + 2s\\ y = 2t + s\\ z = 1 + 2t - s\end{cases}$$

Koska tämä leikkaa xy-tason, saadaan $z = 1 + 2t - s = 0$ eli $s = 2t + 1$. Sijoittamalla tämä tason yhtälöön saadaan esille suora

$$\begin{cases} x = 3 + 3t\\ y = 1 + 4t\\ z = 0\end{cases}$$

Siitä taas suoran koordinaattimuoto ratkaisemalla t kahdesta ensimmäisestä:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} \quad \text{ja} \quad z = 0.$$

Maple-työarkki avaruuspiirroksesta (linkki)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/Teht423.mws`

5 KÄÄNTEISMATRIISI

Matriiseilla lasketaan melko pitkälle kuten luvuilla, lukuunottamatta matriisitulon ei-vaihdannaisuutta. Mutta entä matriisiyhtälöt ja niiden ratkaiseminen?

Vertaillaanpa käänteisluvun ja sen mahdollisen vastineen ominaisuuksia ja olemassaoloehtoja:

Luvuille	**Matriiseille**
$a1 = 1a = a$	$AI = IA = A$
$\boxed{a \neq 0} \iff \exists\, a^{-1}$ s.e.	$\boxed{?} \iff \exists\, A^{-1}$ s.e.
$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$	$AA^{-1} = A^{-1}A = I$
Jos $\boxed{a \neq 0}$	Jos $\boxed{?}$
$ax = b \quad \lvert a^{-1}\cdot$	$AX = B \quad \lvert A^{-1}\cdot$
$\iff a^{-1}(ax) = a^{-1}b$	$\iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B$
$\iff (a^{-1}a)x = a^{-1}b$	$\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B$
$\iff 1x = a^{-1}b$	$\iff IX = A^{-1}B$
$\iff x = a^{-1}b$	$\iff X = A^{-1}B$

Millä ehdoilla tuollainen ”käänteismatriisi” on olemassa?

Päästäksemme alkuun otamme olemassaoloehdon määritelmään ja koetamme sitten johtaa erilaisia kriteerejä matriisin kääntyvyydelle.

5.1 Käänteismatriisin määrittely

Määritelmä 5.1.1 Neliömatriisi A on *säännöllinen* (invertible) eli *ei-singulaarinen*, jos on olemassa sellainen samankokoinen matriisi B, että

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I.$$

Ehdon täyttävä matriisi B on matriisin A *käänteismatriisi* (inverse) ja sitä merkitään jatkossa $A^{-1} := B$. Jos A ei ole säännöllinen, se on *singulaarinen*.

Lause 5.1.2 Neliömatriisilla on korkeintaan yksi käänteismatriisi.

Todistus. Oletetaan, että neliömatriisilla A olisi kaksi käänteismatriisia B ja C. Silloin $AB = I = BA$ ja $AC = I = CA$, jolloin laskusääntöjen ja oletuksen nojalla onkin

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

□

Huomautus 5.1.3 Seurauksena 6.6.3 osoitetaan myöhemmin, että Määritelmässä 5.1.1 riittäisi yksikin ehto $AB = I$ tai $BA = I$, mikäli A ja B ovat samankokoisia neliömatriiseja.

Esimerkki 5.1.4 Matriisit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

ovat toistensa käänteismatriiseja, sillä

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 5.1.5 Matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on singulaarinen eli sillä ei ole käänteismatriisia. Nimittäin:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kaikilla a, b, c ja $d \in \mathbb{R}$, joten mikään 2×2-matriisi ei kelpaa käänteismatriisiksi.

Esimerkki 5.1.6 Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Onko olemassa A^{-1}?

Ratkaisu. Tehdään alkeellisin mahdollinen ratkaisu, ts. käytetään määritelmää. Olkoon

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ehdokas matriisin A käänteismatriisiksi. Silloin on oltava $AB = I$ ja $BA = I$. Ehdosta $AB = I$ eli

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

saamme yhtälöryhmän

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} a & & +\ 3c & & = & 1 \\ & b & & +\ 3d & = & 0 \\ 2a & & +\ 4c & & = & 0 \\ & 2b & & +\ 4d & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} a & = & -2 \\ b & = & \frac{3}{2} \\ c & = & 1 \\ d & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ainoa ehdokas on siis

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Onko myös $BA = I$? Tarkistus osoittaa, että on; siis $A^{-1} = B$.

5.2 Laskusääntöjä

Lause 5.2.1 Olkoot A ja B säännöllisiä $n\times n$-matriiseja. Tällöin myös A^{-1}, A^T ja AB ovat säännöllisiä ja

a) $(A^{-1})^{-1} = A$,

b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Todistus. Määritelmän mukaan matriisi on toisen käänteismatriisi jos ja vain jos niiden tulo molemmin päin on I. Säännöllisyysoletuksen mukaan A^{-1} ja B^{-1} ovat olemassa. Siis:

a) Kohta a) on tosi, sillä $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

b) Transpoosin laskusääntöjen (Lause 3.3.2) mukaan

$$A^T(A^{-1})^T = (\underbrace{A^{-1}A}_{I})^T = I^T = I \text{ ja } (A^{-1})^T A^T = (\underbrace{AA^{-1}}_{I})^T = I^T = I.$$

c) Tulon liitännäisyyden (Lause 3.3.3 kohta 3) avulla saadaan:
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(\underbrace{BB^{-1}}_{I})A^{-1} = AA^{-1} = I$ ja
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(\underbrace{A^{-1}A}_{I})B = B^{-1}B = I$. □

Esimerkki 5.2.2 Olkoot A, B ja C samankokoisia säännöllisiä matriiseja. Sievennä

$$((B^T)^{-1}A)^T BC(A^T B^T)^T A^{-1}B^T.$$

Ratkaisu. Laskusääntöjä (Lauseet 3.3.2, 5.2.1 ja 3.3.3) käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} ((B^T)^{-1}A)^T &= A^T((B^T)^{-1})^T = A^T((B^{-1})^T)^T = A^T B^{-1}, \\ (A^T B^T)^T &= BA, \end{aligned}$$

josta edelleen käänteismatriisin määritelmän mukaan

$$((B^T)^{-1}A)^T BC(A^T B^T)^T A^{-1}B^T = A^T(B^{-1}B)CB(AA^{-1})B^T = A^T CBB^T.$$

5.3 Alkeisoperaatiot ja alkeismatriisit

Matriisin rivien ja sarakkeiden kertominen luvulla sekä rivin tai sarakkeen lisääminen toiseen onnistuu kertolaskulla.

1. Rivi kerrotaan vasemmalta sopivalla vaakavektorilla:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \overset{i}{\alpha} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vdots & A & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} = \alpha\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \alpha A(i,:)$$

Rivioperaatio III samoin vaakavektorilla vasemmalta päin:

$$(0 \ \cdots \ 0 \ \overset{i}{1} \ 0 \ \cdots \ 0 \ \overset{j}{\alpha} \ 0 \ \cdots \ 0) \begin{pmatrix} \vdots & A & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} = A(i,:) + \alpha A(j,:).$$

2. Sarake kerrotaan oikealta pystyvektorilla:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & i & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \vdots & A & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} = \alpha \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha A(:,i)$$

Sarakeoperaatio III niinikään kertomalla pystyvektoria:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & A & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = A(:,i) + \alpha A(:,j).$$

Esimerkki 5.3.1 Matriisissa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

operaation $R_2' \leftarrow R_2 - 4R_1$ tulos on

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 19 \end{pmatrix}$$

ja operaation $S_3' \leftarrow S_3 + 3S_1$ tulos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Alkeismatriisit: alkeisoperaatiot matriisituloina

Osoitetaan, että käänteismatriisi voidaan laskea matriisien alkeisoperaatioihin

I. vaihdetaan kahden rivin paikat

II. kerrotaan rivi nollasta eriävällä luvulla

III. lisätään riviin toisen rivin monikerta

liittyvien alkeismatriisien välityksellä. Menetelmä on oleellisesti sama kuin yhtälöryhmän ratkaiseminen Gauss-Jordanin reduktiolla.

Määritelmä 5.3.2 Neliömatriisi E on *tyypin* K *alkeismatriisi* (*elementary matrix*), jos se on saatu aikaan suorittamalla yksikkömatriisille I alkeisoperaatio K, missä K on I, II tai III.

Esimerkki 5.3.3 Matriiseista

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_1 on tyyppiä I, sillä se on saatu yksikkömatriisista vaihtamalla 1. ja 2. rivi, E_2 on tyyppiä II ja saatu kertomalla 3. rivi luvulla 3, E_3 on tyyppiä III ja saatu lisäämällä 1. riviin 3. rivi kolminkertaisena.

Lause 5.3.4 Olkoon E tyypin K alkeismatriisi ja A samaa kokoa kuin E.

a) Jos matriisille A tehdään alkeisoperaatio K, niin tulokseksi saadaan matriisi EA.

b) Jos matriisille A tehdään *sarakkeiden suhteen* alkeisoperaatio K, niin tulokseksi saadaan matriisi AE.

Todistus. Rivioperaatioita on havainnollistettu jäljempänä.

Todistetaan malliksi a). Jos matriisin E rivillä i ovat muut luvut nollia paitsi mahdollisesti $\alpha := e_{ij}$ ja $\beta := e_{ik}$, niin

$$(EA)(i,:) = \alpha A(j,:) + \beta A(k,:). \tag{2}$$

Alkeismatriisissa on kullakin rivillä vähintäin yksi mutta korkeintaan kaksi nollasta poikkeavaa lukua, joista ainakin toinen on 1.

Olkoon E tyyppiä I, ts. saatu matriisista I vaihtamalla rivit k ja l. Jokaisella rivillä on tasan yksi ykkönen. Muilla paitsi riveillä k ja l ykkönen on diagonaalilla, joten kaavan (2) mukaan

$$(EA)(i,:) = A(i,:) \text{ kaikilla } i \neq k, l.$$

Rivillä k ykkönen on sarakkeessa l ja rivillä l sarakkeessa k, joten edelleen kaavan (2) mukaan

$$(EA)(k,:) = A(l,:) \text{ ja } (EA)(l,:) = A(k,:).$$

EA saadaan siis matriisista A vaihtamalla rivit k ja l.

Olkoon E tyyppiä II, ts. saatu yksikkömatriisista I kertomalla rivi i luvulla $\alpha \neq 0$. Siis E on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalilla on ykkösiä ja $e_{ii} = \alpha$. Tulossa EA muut rivit säilyvät ennallaan, paitsi

$$(EA)(i,:) = \alpha A(i,:).$$

Siis EA saadaan matriisista A kertomalla rivi i luvulla α.

Tyypin III tapaus saadaan samaan tapaan kaavasta (2). □

Rivien i ja j vaihto eli tyypin I operaatio:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & E_{ij} & A & & E_{ij}A & \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & 0 & & \cdots & & 0 & & & 0 \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & 0 & & & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & 1 & & & 0 & & & \\
\vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
 & & & 0 & & & 1 & 0 & & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & & & & 0 & 1 & & \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\
0 & & & 0 & & \cdots & & 0 & & & 1
\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} \\ \\ \\ A(i,:) \\ \\ \\ \\ A(j,:) \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} & = &
\begin{pmatrix} \\ \\ \\ A(j,:) \\ \\ \\ \\ A(i,:) \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} & & & &
\end{array}
$$

Rivin i kertominen luvulla α eli tyypin II operaatio:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & E_{ij} & A & & E_{ij}A & \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & 0 & & & 0 \\
 & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & 1 & 0 & & & \\
0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & 1 & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & \\
0 & & & 0 & & & 1
\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} \\ \\ \\ A(i,:) \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} & = &
\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \alpha A(i,:) \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} & & & i & & & \end{matrix} & & & &
\end{array}
$$

Rivin i korvaaminen $R_i' \leftarrow R_i + \alpha R_j$ eli tyypin III operaatio:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & E_{ij} & A & & E_{ij}A & \\
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\
0 & & 0 & & 0 & & 1
\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} \\ \\ A(i,:) \\ \\ A(j,:) \\ \\ \\ \end{pmatrix} & = &
\begin{pmatrix} \\ \\ A(i,:) + \alpha A(j,:) \\ \\ A(j,:) \\ \\ \\ \end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} & & & &
\end{array}
$$

Esimerkki 5.3.5 Matriisille

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

saadaan operaatio $R_2' \leftarrow R_2 - 4R_1$ alkeismatriisilla kertoen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 19 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Operaatio $S_3' \leftarrow S_3 + 3S_1$ kertoen alkeismatriisille oikealta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 19 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Alkeismatriisien käänteismatriisit

Lause 5.3.6 Alkeismatriisilla E on käänteismatriisi ja se on samaa tyyppiä kuin E. Tarkemmin:

Todistus. Jos E on tyyppiä I, niin $EE = I$, sillä Lauseen 5.3.4 mukaan kertominen vasemmalta vaihtaa alkuperäisen matriisin E rivit takaisin. Siis E on itsensä käänteismatriisi.

Olkoon E tyyppiä II ja olkoon $e_{ii} = \alpha \neq 0$. Silloin E^{-1} saadaan kertomalla yksikkömatriisin I rivi i luvulla $\frac{1}{\alpha}$.

Olkoon E tyyppiä III ja olkoon rivillä i diagonaalin ulkopuolella $e_{ij} = \alpha$. Olkoon F matriisi, joka saadaan vaihtamalla matriisissa E luku α luvuksi $-\alpha$.

Matriisitulossa EF on pistetuloille $E(k,:) \cdot F(:,k) = 1$ kaikilla $k \in [n]$, joten diagonaalilla on ykköset.

Jos $k \neq i$, niin $E(k,:) \cdot F(:,l) = 0$ kaikilla $l \neq k$. Lisäksi

$$\begin{aligned} E(i,:) \cdot F(:,l) &= 0 \quad \text{kaikilla} \quad l \neq j, \\ E(i,:) \cdot F(:,j) &= \alpha \cdot 1 + 1 \cdot (-\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Siis $EF = I$. Vastaavasti osoitetaan, että $FE = I$. Siis $E^{-1} = F$, joka määrittelynsä mukaan on tyyppiä III. □

Määritelmä 5.3.7 Matriisi B on *riviekvivalentti* matriisin A kanssa (merkitään $B \simeq A$), jos B saadaan matriisista A äärellisen monella alkeisoperaatiolla, ts. jos on olemassa alkeismatriisit E_1, E_2, ..., E_k siten, että

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A.$$

On ilmeistä, että $\simeq$ on ekvivalenssirelaatio $n \times n$-matriisien joukossa; siis

1) $A \simeq A$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. (refleksiivisyys)

2) jos $A \simeq B$, niin $B \simeq A$. (symmetrisyys)

3) jos $A \simeq B$ ja $B \simeq C$, niin $A \simeq C$. (transitiivisuus)

Esimerkki 5.3.8 Mitkä seuraavista matriiseista ovat riviekvivalentteja:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu. Matriisit A ja B voidaan osoittaa riviekvivalenteiksi keksimällä sopivat alkeisoperaatiot:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \quad &\simeq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1' \leftarrow R_2 \\ R_2' \leftarrow R_1 \end{matrix} \\
&\simeq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1'' \leftarrow R_1' - R_2' \\ R_2'' \leftarrow R_2' \end{matrix} \\
&\simeq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1''' \leftarrow R_1'' \\ R_2''' \leftarrow 2R_2'' \end{matrix}
\end{aligned}$$

Menettely muistuttaa hakuammuntaa. Parempi tapa on muuntaa matriisit redusoituun porrasmuotoon, josta vastaukset ovat helposti nähtävissä:

$$\begin{aligned}
A &\simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \simeq B, \\
C &\simeq \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: C'.
\end{aligned}$$

Siis $A \simeq B$. Koska $C' \not\simeq I$, myös $C \not\simeq I$ ja siten $A \not\simeq C$. Samasta syystä $B \not\simeq C$.

Tehtävä 5.3.9 Määritä Esimerkissä 5.3.8 tarvittuja alkeisoperaatioita vastaavat alkeismatriisit. Ratkaisu sivulla 90.

Esimerkki 5.3.10 Keksi alkeismatriisit, joilla vasemmalta kertomalla

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

muuttuu yksikkömatriisiksi (jos mahdollista), ts. osoita että $A \simeq I$.

Eräs ratkaisu: Muunnetaan A yksi operaatio kerrallaan redusoituun porrasmuotoon:

$$\begin{array}{rcll} A & = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \\ & \simeq & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1' \leftarrow R_3 \\ R_2' \leftarrow R_2 \\ R_3' \leftarrow R_1 \end{matrix} \\ & \simeq & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1'' \leftarrow R_1' \\ R_2'' \leftarrow R_2' \\ R_3'' \leftarrow R_3' - 2R_1' \end{matrix} \\ & \simeq & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{5} \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1''' \leftarrow R_1'' \\ R_2''' \leftarrow R_2'' \\ R_3''' \leftarrow R_3'' - \frac{1}{5}R_2'' \end{matrix} \\ & \simeq & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1^4 \leftarrow R_1''' \\ R_2^4 \leftarrow R_2''' \\ R_3^4 \leftarrow (-\frac{5}{11})R_3''' \end{matrix} \\ & \simeq & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1^5 \leftarrow R_1^4 - R_3^4 \\ R_2^5 \leftarrow R_2^4 \\ R_3^5 \leftarrow R_3^4 \end{matrix} \\ & \simeq & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1^6 \leftarrow R_1^5 \\ R_2^6 \leftarrow R_2^5 - R_3^5 \\ R_3^6 \leftarrow R_3^5 \end{matrix} \\ & \simeq & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1^7 \leftarrow R_1^6 \\ R_2^7 \leftarrow \frac{1}{5}R_2^6 \\ R_3^7 \leftarrow R_3^6 \end{matrix} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll} I & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \\ E_1 & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ E_2 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ E_3 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} & \\ E_4 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{11} \end{pmatrix} & \\ E_5 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ E_6 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ E_7 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Silloin $I = E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A$.

Tehtävä 5.3.11 Todista tulon kääntämisen yleistys: jos A_1, A_2, A_3, ..., A_n ovat samankokoisia säännöllisiä (neliö)matriiseja, niin niiden tulo on säännöllinen ja

$$(A_1A_2A_3 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Ratkaisu sivulla 91.

5.4 Yhtälöryhmän ratkaisuista

Tarkastellaan lineaarisen yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisujen olemassaoloa ja yksikäsitteisyyttä. Aluksi todistetaan säännöllisen matriisin supistumissääntö sekä esitetään säännöllisyydelle karakterisointeja.

Lause 5.4.1 Olkoot $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times r}$ ja $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Jos $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ on säännöllinen, niin

$$AX = B \quad\Longleftrightarrow\quad MAX = MB.$$

Todistus. Jos $AX = B$, on aina $MAX = MB$. Kääntäen, olkoon $MAX = MB$. Koska M on säännöllinen, on olemassa M^{-1} ja se on säännöllinen. Mutta silloin liitännäisyyden ja oletuksen nojalla

$$AX = IAX = (M^{-1}M)AX = M^{-1}(MAX) = (M^{-1}M)B = IB = B.$$

□

Kvadraattinen yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkeaa nyt periaatteessa helposti, jos A on säännöllinen: valitsemalla Lauseessa 5.4.1 $n = m$, $r = 1$, $B = \mathbf{b}$, $X = \mathbf{x}$ ja kertomalla matriisiyhtälö vasemmalta käänteismatriisilla $M = A^{-1}$ saadaan

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Käytännössä ratkaiseminen tehdään eliminointimenetelmällä niin, että samanaikaisesti muunnetaan A alkeisoperaatioin yksikkömatriisiksi I ja $\mathbf{b}$ vektoriksi $A^{-1}\mathbf{b}$. Tässä voidaan käyttää alkeismatriiseilla kertomista tai suoraan Gauss-Jordanin reduktion matriisimuotoa lähtökohtana yhtälö $A\mathbf{x} = I\mathbf{b}$.

Lause 5.4.2 Neliömatriisille A ovat seuraavat ehdot yhtäpitäviä:

(a) A on säännöllinen (ts. sillä on käänteismatriisi).

(b) Homogeenisella yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaaliratkaisu (nollavektori $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

(c) A ja yksikkömatriisi I ovat riviekvivalentteja.

Todistus. Olkoon A $n\times n$-matriisi ja $\mathbf{x}$ n-vektori.

(a) $\Rightarrow$ (b): Olkoon A säännöllinen. Jos $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, niin koska A^{-1} on olemassa, on

$$\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(b) $\Rightarrow$ (c): Riittää osoittaa, että yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ redusoidun porrasmuodon kerroinmatriisi on I. Redusoitu porrasmuoto nimittäin saadaan aina aikaan alkeismuunnoksia käyttäen.

Olkoon yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ muunnettu alkeisoperaatioita käyttäen yhtäpitävään porrasmuotoon $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Väite. Matriisin $U = (u_{ij})$ diagonaalilla on vain ykkösiä.
Todistus. *Vastaoletus:* Olkoon $u_{ii} \neq 1$ jollekin $i \in [n]$. Porrasmuodon perusteella $u_{ii} = 0$. Kvadraattisuuden nojalla ainakin viimeinen rivi on muotoa $0 = 0$. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on täten ekvivalentti sellaisen yhtälöryhmän kanssa, jossa on vähemmän yhtälöitä kuin tuntemattomia. Lauseen 2.3.11 mukaan olisi yhtälöryhmällä ei-triviaaleja ratkaisuja, mikä on vastoin oletusta (b).

Koska yläkolmiomatriisin U diagonaalilla on ykköset, on selvää, että redusoidussa porrasmuodossa kerroinmatriisi on I.

(c) $\Rightarrow$ (a): Oletuksen (c) mukaan on olemassa alkeismatriisit $E_1, E_2, \ldots, E_k$, joille

$$A = E_k \cdots E_2 E_1 I = E_k \cdots E_2 E_1(I).$$

Koska alkeismatriisit ovat säännöllisiä, on A niiden tulona säännöllinen ja

$$A^{-1} = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

$\square$

Seuraus 5.4.3 Kvadraattisella lineaarisella yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu täsmälleen silloin, kun A on säännöllinen.

Todistus. 1) Jos A on säännöllinen, on $A^{-1}\mathbf{b}$ ainoa ratkaisu (Lause 5.4.1).

2) Olkoon yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ täsmälleen yksi ratkaisu $\hat{\mathbf{x}}$.
Vastaoletus: A on singulaarinen. Silloin yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on Lauseen 5.4.2 mukaan ratkaisu $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Olkoon $\mathbf{y} := \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$. Silloin $\mathbf{y} \neq \hat{\mathbf{x}}$ ja osittelulain mukaan

$$A\mathbf{y} = A(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}) = A\hat{\mathbf{x}} + A\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

Täten myös $\mathbf{y}$ on yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisu, mikä on vastoin oletusta 2). Siis A on säännöllinen. $\square$

Tehtävä 5.4.4 Millainen ratkaisujoukko on lineaarisella yhtälöryhmällä

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. ?$$

Ratkaisu sivulla 90.

5.5 Eliminointimenetelmä

Säännöllinen neliömatriisi A on riviekvivalentti yksikkömatriisin I kanssa, joten on olemassa alkeismatriisit E_1, E_2, ..., E_k, joille

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I.$$

Kertomalla tämä oikealta käänteismatriisilla saadaan

$$E_k \cdots E_2 E_1 I = A^{-1}.$$

Samat alkeisoperaatiot muuntavat siis matriisin A yksikkömatriisiksi ja yksikkömatriisin käänteismatriisiksi A^{-1}. Käänteismatriisi voidaan siis laskea seuraavasti:

> *Kirjoitetaan A ja I vierekkäin ja redusoidaan A alkeisoperaatioilla yksikkömatriisiksi tehden kussakin vaiheessa samat muunnokset myös matriisille I. Silloin $A \mid I$ muuntuu muotoon $I \mid A^{-1}$.*

Esimerkki 5.5.1 Lasketaan alkeisoperaatioilla käänteismatriisi matriisille

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Laajennetaan yksikkömatriisilla:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\Longleftrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\Longleftrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \\
\Longleftrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \\
\Longleftrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \\
\Longleftrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Käänteismatriisi on siis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Tehtävä 5.5.2 Merkitse operaatiot näkyviin Esimerkin 5.5.1 laskuissa.

Esimerkki 5.5.3 Miten saadaan alkeismatriiseilla yksikkömatriisista matriisi A, miten A^{-1}, kun

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu (pääpiirteittäin). Viedään matriisi A alkeisoperaatioilla redusoituun porrasmuotoon. Se osoittautuu olevan I, joten ratkaisu on olemassa. Olkoot E_1, E_2, ..., E_k äskeisessä käytettyjä alkeisoperaatioita vastaavat alkeismatriisit. Tällöin $E_k \cdots E_2 E_1 A = I$, joten

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I, \quad A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 I.$$

Esimerkiksi Gauss-Jordanin reduktiossa neljä ensimmäistä (yksikkömatriisista poikkeavaa) ovat tyypin III alkeismatriisit

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Loput kolme ovat tyypin II alkeismatriiseja, joilla skaalataan diagonaalille ykköset:

$$E_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{11} \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 5.5.4 Suorita matriisin A muunto yksikkömatriisiksi käyttäen Esimerkin 5.5.3 alkeismatriiseja E_i. Muodosta niiden käänteismatriisit E_i^{-1} ja laske A^{-1}. Tarkasta, että $AA^{-1} = I$. Ratkaisusta sivulla 90.

5.6 Alimatriisit ja lohkotulot

Matriisin osittaminen

Joskus on tarpeen jakaa matriisi alimatriiseihin vetämällä rivien ja sarakkeiden väliin rajoja. Näin muodostuu matriisin *ositus* (partition), joka koostuu pienemmistä erillisistä matriiseista, *lohkoista* (block),jotka yhdessä muodostavat koko alkuperäisen matriisin. Tämä mahdollistaa esimerkiksi tietokoneohjelmissa olevien matriisin kokorajoitusten kiertämisen.

Esimerkki 5.6.1 Osita matriisi

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 3 & 22 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 7 & 11 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

niin, että saat mahdollisimman monta 2×2-alimatriisia.

Eräs ratkaisu: Määritellään

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 22 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_{23} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \end{pmatrix} \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \end{pmatrix} \quad A_{33} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Tällöin A voidaan esittää muodossa

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Esimerkki 5.6.2 Miten poimitaan A_{32} edellisestä matriisista A muodossa $A(p : q, r : s)$?

Ratkaisu. $A_{32} = A(5 : 5, 3 : 4) = A(5, 3 : 4)$.

Matriisitulo vektorimuodossa

Usein ositus tehdään jakamalla matriisi riveihin tai sarakkeisiin. Matriisin $A = (a_{ij})_{m\times n}$

– rivejä merkittiin $A(i,:)$,

– sarakkeita merkittiin $\mathbf{a}_j = A(:,j)$.

Lause 5.6.3 Matriisien $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{n\times r}$ matriisitulo voidaan esittää rivi- tai sarakemuodossa:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A(1,:)B \\ A(2,:)B \\ \vdots \\ A(m,:)B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A(B(:,1)) & A(B(:,2)) & \ldots & A(B(:,r)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \ldots & A\mathbf{b}_r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Todistus. 1) Tulon AB i. rivi koostuu skalaarituloista $A(i,:)\cdot B(:,j)$, $j = 1,2,\ldots r$, ts.

$$(AB)(i,:) = A(i,:)B.$$

2) Vastaavasti tulon AB j. sarake muodostuu skalaarituloista $A(i,:)\cdot B(:,j)$, $i = 1,2,\ldots m$, ts.

$$(AB)(:,j) = A(B(:,j)).$$

□

Lohkotulot

Kun matriisitulon tekijöiden lohkojen dimensiot ovat yhteensopivia, voidaan tulo laskea myös lohkoittain.

Lause 5.6.4 Olkoon matriisit $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{n\times r}$ ositettu eli jaettu lohkoihin

$$A = \begin{array}{c} \\ k \\ m-k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s & n-s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ja} \quad B = \begin{array}{c} \\ s \\ n-s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & r-t \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

(missä esim. A_{21} on $(m-k)\times s$-matriisi). Silloin

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Todistus. Merkitään $C := AB = (c_{ij})_{m\times r}$.
1) Osoitetaan ensin, että yo. summat ovat määriteltyjä ja muodostavat yhdessä erään $m\times r$-matriisin $D = (d_{ij})$. Koska A_{11} on $k\times s$- ja B_{11} on $s\times t$-matriisi, on tulo $A_{11}B_{11}$ määritelty ja kokoa $k\times t$. Vastaavasti A_{12} on kokoa $k\times(n-s)$ ja B_{21} kokoa $(n-s)\times t$, joten $A_{12}B_{21}$ on kokoa $k\times t$. Summa

$$D_{11} := A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

on siis kokoa $k\times t$. Vastaavasti osoitetaan, että

$$D_{12} := A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

on määritelty ja kokoa $k\times(r-t)$. Samoin matriiseista

$$D_{21} := A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \text{ ja } D_{22} := A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

D_{21} on kokoa $(m-k)\times t$ ja D_{22} $(m-k)\times(r-t)$. Näin tulee määritellyksi $m\times r$-matriisi

$$D = (d_{ij}) := \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}.$$

2) *Väite.* $c_{ij} = d_{ij}$ kaikilla $i \in [m]$, $j \in [r]$.
Todistus. Kannattaa ensin kirjoittaa

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \textstyle\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} = \sum_{l=1}^{s} a_{il}b_{lj} + \sum_{l=s+1}^{n} a_{il}b_{lj} \\ &= A(i, 1:s)\cdot B(1:s, j) + A(i, (s+1):n)\cdot B((s+1):n, j) \end{aligned}$$

a) Jos $i \le k$ ja $j \le t$, niin edellisen mukaan

$$\begin{aligned} c_{ij} &= A_{11}(i,:)\cdot B_{11}(:,j) + A_{12}(i,:)\cdot B_{21}(:,j) \\ &= D_{11}(i,j) = D(i,j) = d_{ij}. \end{aligned}$$

b) Jos $i \le k$, mutta $j > t$, niin

$$\begin{aligned} c_{ij} &= A_{11}(i,:)\cdot B_{12}(:,j-t) + A_{12}(i,:)\cdot B_{22}(:,j-t) \\ &= D_{12}(i,j-t) = D(i,j) = d_{ij}. \end{aligned}$$

c) Jos taas $i > k$ ja $j \le t$, niin vastaavasti

$$\begin{aligned} c_{ij} &= A_{21}(i-k,:)\cdot B_{11}(:,j) + A_{22}(i-k,:)\cdot B_{21}(:,j) \\ &= D_{21}(i-k,j) = D(i,j) = d_{ij}. \end{aligned}$$

d) Jos lopuksi $i > k$ ja $j > t$, niin

$$\begin{aligned} c_{ij} &= A_{21}(i-k,:)\cdot B_{12}(:,j-t) + A_{22}(i-k,:)\cdot B_{22}(:,j-t) \\ &= D_{22}(i-k,j-t) = D(i,j) = d_{ij}. \end{aligned}$$

□

Lause 5.6.5 Jos matriiseissa

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B := \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

lohkojen dimensiot ovat yhteensopivia, ts. matriisissa A_{ik} on yhtä monta saraketta kuin rivejä matriisissa B_{kj}, niin

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

missä

$$C_{ij} := \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj}.$$

Todistus. Samaan tapaan kuin Lause 5.6.4 □

Esimerkki 5.6.6 Laske lohkoittain tulo

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu. Olkoon ensimmäinen matriisi A ja toinen B. A on jaettu neljään osaan ja B kahteen:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

joten Lauseen 5.6.5 mukaan tulo lohkoittain on

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -9 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} -3 & 7 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 11 & 7 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & 11 \\ -2 & 8 & 11 \\ 2 & 7 & 2 \\ 13 & 9 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Esimerkki 5.6.7 Oletetaan, että laskin pystyy käsittelemään korkeintaan sata-alkioisia matriiseja, mutta näitä voi olla muistissa ja käsiteltävänä useita. Miten voidaan laskea kahden 15×15-matriisin tulo?

Ratkaisu. Olkoon laskettava AB, missä A, $B \in \mathbb{R}^{15\times15}$. Ositetaan matriisit niin, että alimatriisit ovat enintään sata-alkioisia. Kahtia jako ei riitä, sillä matriiseissa on 225 alkiota. Ositus voidaan tehdä esimerkiksi jakamalla matriisit

a) kolmeen osaan, A vaaka- ja B pystysuunnassa. Tuloksena on 9 5×5-matriisia, jotka yhdessä muodostavat tulon AB.

b) neljään osaan, esimerkiksi molemmat muotoa

$$
\begin{pmatrix} 10\times10 & 10\times5 \\ 5\times10 & 5\times5 \end{pmatrix} \text{ tai } \begin{pmatrix} 8\times8 & 8\times7 \\ 7\times8 & 7\times7 \end{pmatrix}.
$$

Eri ositusten laskentanopeuksissa voi olla eroja!

Esimerkki 5.6.8 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ muotoa

$$
A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix},
$$

missä $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $k < n$. Osoita, että A on säännöllinen jos ja vain jos A_{11} ja A_{22} ovat. Mitä on A^{-1}?

Ratkaisu. Merkitään yksikkömatriiseja $I_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

1) Jos A_{11} ja A_{22} ovat säännöllisiä, niin lohkotuloa käyttäen saadaan

$$
\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & O \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix} = I_n,
$$

ja sama tulolle toisinpäin. Täten A on säännöllinen ja

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

2) Kääntäen, olkoon A säännöllinen ja $B := A^{-1}$. Ositetaan B samalla tavoin kuin A:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Koska

$$AB = BA = I_n = \begin{pmatrix} I_k & O \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

on

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = I_n,$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}A_{11} & B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} & B_{22}A_{22} \end{pmatrix} = I_n.$$

Koska kaikkien matriisien vastinosat ovat samaa kokoa, on

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11} &= B_{11}A_{11} = I_k, \\ A_{22}B_{22} &= B_{22}A_{22} = I_{n-k}, \end{aligned}$$

joten A_{11} ja A_{22} ovat säännöllisiä käänteismatriiseinaan B_{11} ja B_{22}.

Lause 5.6.9 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lohkomatriisi muotoa

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathrm{O} & A_{22} \end{pmatrix},$$

missä $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ ja $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, $1 \leq k < n$. Silloin A on säännöllinen jos ja vain jos A_{11} ja A_{22} ovat säännöllisiä.

Yleisemmin: jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *lohkoyläkolmiomatriisi* muotoa

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1k} \\ O & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2k} \\ O & O & A_{33} & \cdots & A_{3k} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix},$$

missä kaikki diagonaalilla olevat alimatriisit A_{ii} ovat neliömatriiseja, niin A on säännöllinen jos ja vain jos kaikki diagonaaliblokit A_{ii} ovat säännöllisiä.

Todistus. Sivuutetaan tällä erää. □

5.7 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 5.3.9 : a) Käytettyjä operaatioita vastaavat alkeismatriisit ovat

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

jolloin $B = E_3 E_2 E_1 A$.

b) Esimerkiksi $I = F_4 F_3 F_2 F_1 A$, missä

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Esimerkiksi $I = G_3 G_2 G_1 B$, missä

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Esimerkiksi $C' = H_2 H_1 C$, missä

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 5.4.4: Selvitetään yhtälöryhmän kerroinmatriisin säännöllisyys viemällä kohti porrasmuotoa:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \quad &\simeq \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1' \leftarrow R_1 \\ R_2' \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3' \leftarrow R_3 - R_1 \end{array} \\
&\simeq \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1'' \leftarrow R_1' \\ R_2'' \leftarrow -\frac{1}{5} R_2' \\ R_3'' \leftarrow R_3' - R_2' \end{array}
\end{aligned}$$

Kerroinmatriisi ei siis ole riviekvivalentti yksikkömatriisin kanssa. Lauseen 5.4.2 mukaan se ei ole säännöllinen, ja Seurauksen 5.4.3 nojalla sillä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua. Koska sillä homogeenisena on ratkaisuja – ainakin triviaaliratkaisu, on ratkaisujoukon oltava ääretön; porrasmuodosta nimittäin nähdään, että vaikkapa x_3 voidaan valita vapaasti.

Tehtävä 5.5.4: Käänteismatriisit tyypin II alkeismatriiseille saatiin korvaamalla diagonaalin ykkösestä poikkeava luku käänteisluvullaan, tyypin III taas korvaamalla diagonaalin ulkopuolella oleva nollasta eroava luku vastaluvulla. Pitäisi tulla

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 5.3.11 : Matemaattisella induktiolla matriisien lukumäärän suhteen.

I1) Tapaus $n = 1$ on selvä. Tapaus $n = 2$ on Lauseessa 5.2.1 kohta c).

I2) $n = k$ (induktio-oletus): Olkoon väite tosi jollakin arvolla $k \geq 2$, eli aina, kun samankokoiset neliömatriisit A_1, A_2, A_3, …, A_k ovat säännöllisiä, niin

$$(A_1 A_2 A_3 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

I3) $n = k + 1$: Olkoot matriisit A_1, A_2, A_3, …, A_k, A_{k+1} samankokoisia säännöllisiä $p{\times}p$-matriiseja. Huomaa, että näiden ei suinkaan tarvitse olla samoja kuin edellä, vaikka niille käytetään samoja nimityksiä!

Koska näistä esimerkiksi matriisit A_1, A_2, A_3, …, A_k toteuttavat induktio-oletuksen vaatimukset, niille pätee myös induktio-oletuksen kaava. Liitännäisyyden nojalla voidaan kirjoittaa

$$A_1 A_2 A_3 \cdots A_k A_{k+1} = (A_1 A_2 A_3 \cdots A_k) A_{k+1}$$

missä sulkulauseke ja A_{k+1} ovat säännöllisiä $p{\times}p$-matriiseja. Näin ollen tulo on säännöllinen ja

$$((A_1 A_2 A_3 \cdots A_k) A_{k+1})^{-1} = A_{k+1}^{-1} (A_1 A_2 A_3 \cdots A_k)^{-1}.$$

Induktio-oletuksen mukaan tästä:

$$A_{k+1}^{-1} (A_1 A_2 A_3 \cdots A_k)^{-1} = A_{k+1}^{-1} (A_k^{-1} \cdots A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1}).$$

Siis vielä kerran liitännäisyyttä käyttäen saamme yhteensä

$$(A_1 A_2 A_3 \cdots A_k A_{k+1})^{-1} = A_{k+1}^{-1} A_k^{-1} \cdots A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Tapaus $n = k + 1$ eli induktioaskel on näin todistettu.

Kohtien I1-3) ja induktioperiaatteen nojalla väite on tosi kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

6 DETERMINANTTI

Jokaiseen reaaliseen neliömatriisiin liittyy eräs reaaliluku, matriisin *determinantti*, jonka arvo kertoo matriisin singulaarisuuden; matriisi on singulaarinen täsmälleen silloin kun sen determinantti häviää (eli $= 0$). Jos determinantti on lähes nolla, on oltava varovainen mm. käänteismatriisin laskemisessa; pieni muutos matriisissa aiheuttaa siinä suuren muutoksen ja likiarvoisessa laskennassa on yli- tai alivuotojen vaara.

6.1 Determinantin määritelmä

Determinantti on kuvaus

$$\det = |\quad| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R},$$

joka tässä esityksessä määritellään induktiivisesti pienempien determinanttien avulla. Aluksi kuitenkin ehkä jo ennestään tutut Sarrusin säännöt (Pierre Sarrus, Ranska, 1798-1861):

Sarrusin sääntö 2×2- ja 3×3-determinanteille

Sarrusin säännöiksi sanomme vinoittaistuloihin perustuvia kaavoja

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.
\end{aligned}$$

Aluksi voi olla helpompi käyttää apusarakkeina 1:n ja 2:n kopioita:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Esimerkki 6.1.1 Lasketaan Sarrusin säännöllä:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 7 \cdot (-2) = 29$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{aligned}[t] & 2\cdot 3\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot 2 + (-3)\cdot 4\cdot 1 \\ & -2\cdot 3\cdot(-3) - 1\cdot 2\cdot 2 - (-1)\cdot 4\cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

Sovitaan muutamia determinantin varsinaisessa määritelmässä käytettäviä nimityksiä. a) Reaalilukumatriisin

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boldsymbol{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & I & & \vdots & II & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{a_{ij}} & \cdots & \boldsymbol{a_{in}} \\ \vdots & III & & \vdots & IV & \\ a_{n1} & & & \boldsymbol{a_{nj}} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alkiota a_{ij} *vastaava matriisi* M_{ij} on se $(n-1)\times(n-1)$-matriisi, joka saadaan matriisista A poistamalla rivi i ja sarake j; siis rivi ja sarake, jolla a_{ij} itse on. Siis

$$M_{ij}^A = \begin{pmatrix} & & & \vdots & & \\ & I & & \vdots & II & \\ & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ & III & & \vdots & IV & \\ & & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

b) Luku $A_{ij} := (-1)^{i+j}\det(M_{ij}^A)$ on alkion a_{ij} *kofaktori* eli *komplementti*. Luvuista A_{ij} muodostettua matriisia sanotaan usein matriisin A *kofaktorimatriisiksi* $\operatorname{cof}(A)$.

Esimerkki 6.1.2 Lasketaan matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

rivillä 1 sarakkeessa 2 olevaa alkiota vastaava matriisi ja kofaktori.

Ratkaisu. Lasketaan siis alkiota a_{12} vastaava matriisi M_{12}^A ja kofaktori A_{12}:

$$M_{12}^A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^3\det(M_{12}^A) = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = 78$$

Määritelmä 6.1.3 Neliömatriisin $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *determinantti* on luku

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

joka määritellään *induktiivisesti kullekin matriisikoolle* $n\times n$ seuraavasti:
1×1-matriisin determinantti (älä sotke itseisarvoon!)

$$|a_{11}| := a_{11}. \tag{3}$$

2×2-matriisin determinantti määritellään rivin 1 ja kofaktorien lineaarikombinaationa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{4}$$

missä kofaktorit sisältävät yksirivisiä determinantteja.
3×3-determinantti määritellään edelleen 2×2-determinanttien avulla

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &:= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{5}$$

Yleisesti, $n\times n$-matriisin A determinantti määritellään induktiivisesti

$$\det(A) := \begin{cases} a_{11}, & \text{jos } n = 1, \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, & \text{jos } n > 1, \end{cases}$$

missä summalauseke on *kofaktorikehitelmä* (*cofactor expansion*).

Tehtävä 6.1.4 Määritä Esimerkissä 6.1.2 olleelle matriisille

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

1. rivin alkioita vastaavat matriisit ja kofaktorit, sekä laske determinantti.
Ratkaisu sivulla 108.

On ilmeistä, että $2{\times}2$- ja $3{\times}3$-determinanttien tapauksessa Sarrusin sääntö on sopusoinnussa määritelmämme kanssa.

Tehtävä 6.1.5 Määritä matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & -5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

determinantti a) määritelmän mukaan, b) Sarrusin säännöllä.
Ratkaisu sivulla 108.

Varoitus! Suuremmille determinanteille ei ole vastaavaa sääntöä! Suuremmat determinantit lasketaan yleensä joko

1) *kehittämällä* determinantti jonkin sarakkeen (tai rivin) suhteen (ks. Määritelmä 6.1.3 ja Lause 6.2.1) tai

2) eliminointimenetelmällä (ks. Esimerkki 6.7.1).

Edellinen merkitsee determinanttilaskun "pilkkomista" yhä pienempien determinanttien laskemiseksi, jälkimmäinen determinantin muuntamista alkeisoperaatioilla yksinkertaisempaan muotoon. Kehittämismenetelmän laskutoimitusten määrä nousee jyrkästi matriisin koon kasvaessa (ks. Luku 6.8), joten se ei sovellu suurten determinanttien numeerisiin laskuihin.

6.2 Determinantin kehittäminen

Määritelmässä determinantti on kehitetty 1. rivin suhteen. Yhtä hyvin voidaan käyttää muuta riviä tai saraketta (todistus sivuutetaan tässä vaiheessa)

Lause 6.2.1 Neliömatriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ determinantti voidaan laskea kehittämällä se minkä tahansa rivin tai sarakkeen suhteen, ts.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(M_{ik}) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+j} a_{lj} \det(M_{lj})$$

kaikilla $i, j \in [n]$. Merkinvaihtokertoimelle $(-1)^{r+s}$ pätee muistisääntö

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Esimerkki 6.2.2 Laske matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinantti: a) määritelmän mukaan, b) edullisimmalla tavalla kehittämällä.

Ratkaisu. a) Määritelmän 6.1.3 mukaan determinantti on

$$\begin{aligned} & 2\det(M_{11}) - (-1)\det(M_{12}) + 0\cdot\det(M_{13}) - (-3)\det(M_{14}) \\ = \; & 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Nämä edelleen määritelmän mukaan:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\cdot(-2) + (-2) = -8 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 - 1 = -3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -2 - 3\cdot(-1) = 1 \end{aligned}$$

Siis $\det(A) = 2\cdot(-8) + (-3) + 3\cdot 1 = -16$.

b) Koska kolmannessa sarakkeessa on kaksi nollaa, kehitetään sen suhteen:

$$\det(A) = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -34 + 18 = -16.$$

Tehtävä 6.2.3 Laske

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

a) määritelmän mukaan,
b) kehittämällä 1. sarakkeen suhteen,
c) kehittämällä 2. sarakkeen suhteen.
Ratkaisu sivulla 108.

6.3 Determinanttien laskusääntöjä

Seuraus 6.3.1 Neliömatriisille A on $\det(A) = 0$, jos

a) sen jokin rivi tai sarake on pelkkiä nollia tai

b) siinä on kaksi identtistä riviä (tai saraketta).

Todistus. a) on ilmeinen, b) harjoitustehtävä. □

Seuraavat säännöt on muotoiltu 1. sarakkeelle, mutta vastaava tulos pätee mille tahansa sarakkeelle ja riville.

Lause 6.3.2 a) Neliömatriisille $A = (a_{ij})$ ja reaaliluvulle c pätee

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

ts. rivistä (tai sarakkeesta) voidaan ottaa yhteinen tekijä determinantin eteen.

b)
$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}+a''_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a''_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Todistus. a) Kehitetään determinantti 1. sarakkeen mukaan:

$$D := \begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ca_{11}A_{11} + ca_{21}A_{21} + \cdots + ca_{n1}A_{n1},$$

missä on otettava huomioon, että determinantissa alkioiden ca_{k1} kofaktorit ovat samat kuin a_{k1}:n. Siis

$$D = c(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}) = c\det(A).$$

b) Kehitetään determinantti 1. sarakkeen mukaan ottaen taas huomioon kofaktorien riippumattomuus itse alkiosta:

$$\sum_{i=1}^{n}(a'_{i1}+a''_{i1})A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a'_{i1}A_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a''_{i1}A_{i1}.$$

□

Seuraus 6.3.3 Jos $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin tyypin III alkeisoperaatio ei muuta determinantin arvoa:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ca_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+ca_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+ca_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Todistus. Esitetään lasku sarakevektorein

$$A = (\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \ldots\, \mathbf{a}_n).$$

Hajotetaan 1. determinantti Lauseen 6.3.2 laskukaavoja a) ja b) käyttäen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 + c\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \det(A) + c\begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Seurauksen 6.3.1 mukaan jälkimmäinen häviää ja tulos on $\det(A)$. □

Lause 6.3.4 Determinantin kahden rivin (tai kahden sarakkeen) paikkojen vaihtaminen muuttaa determinantin vastaluvuksi.

Todistus. Seurauksen 6.3.3 mukaan determinantin arvo säilyy tyypin III muunnoksissa:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Olkoon $A = (\mathbf{a}_j)_{n\times n}$ ja B matriisi, joka on saatu matriisista A vaihtamalla sarakkeet $\mathbf{a}_i$ ja $\mathbf{a}_j$ keskenään.

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_j & \ldots & \mathbf{a}_i & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i & \ldots & \mathbf{a}_i & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i & \ldots & \mathbf{a}_i + (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i) & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i) - \mathbf{a}_j & \ldots & \mathbf{a}_j & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & -\mathbf{a}_i & \ldots & \mathbf{a}_j & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \ldots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

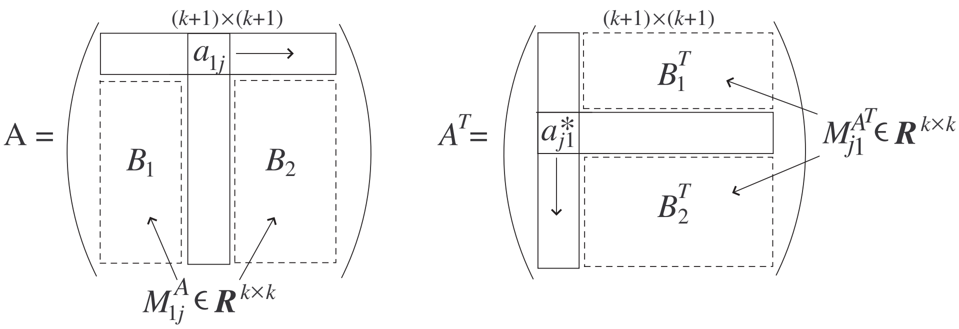
Lauseen 6.3.2 a) mukaan $\det(B) = -\det(A)$. □

Lause 6.3.5 Neliömatriisille pätee $\det(A) = \det(A^T)$.

Todistus. Induktiolla: 1) Väite on tosi 1×1-matriiseille.

2) Oletetaan, että väite pätee k-rivisille neliömatriiseille. Olkoon $A = (a_{ij})$ $(k+1)$-rivinen neliömatriisi. Matriisit A ja $A^T = (a^*_{ij})$ ovat kuvan 13 mukaiset. Alkiota a_{1j} vastaava matriisi M^A_{1j} koostuu alimatriiseista B_1 ja B_2 ja vastaavasti alkiota a^*_{j1} vastaava matriisi $M^{A^T}_{j1}$ niiden transpooseista B_1^T ja B_2^T. Selvästi (ks. Kuva 13)

$$M^{A^T}_{j1} = (M^A_{1j})^T.$$



Kuva 13: Matriisien A ja A^T determinanttien kehittämisestä

Määritelmän mukaan kehitettynä

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(M^A_{1j}).$$

Matriisit M^A_{1j} ovat kokoa $k \times k$, joten induktio-oletuksen ja edellä todetun mukaan

$$\begin{aligned} \det(M^A_{1j}) &= \det((M^A_{1j})^T) = \det(M^{A^T}_{j1}), \\ \det(A) &= \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(M^{A^T}_{j1}). \end{aligned}$$

Koska $a_{1j} = a^*_{j1}$, kehitelmän oikea puoli on $\det(A^T)$ kehitettynä ensimmäisen sarakkeen mukaan, toisin sanoen

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(M^A_{1j}) = \sum_{j=1}^{k+1} a^*_{j1}(-1)^{j+1}\det(M^{A^T}_{j1}) = \det(A^T).$$

Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikenkokoisille neliömatriiseille. □

Lause 6.3.6 Jos $A = (a_{ij})_{n\times n}$ on ylä- tai alakolmiomatriisi, niin determinantti on päälävistäjän alkioiden tulo, eli

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

6.4 Alkeismatriisien determinantit

Yksikkömatriisin determinantin arvo on Lauseen 6.3.6 mukaan 1.

Lause 6.4.1 Olkoon E on alkeismatriisi ja $\alpha \neq 0$ luku, jota on käytetty kertoimena matriisia E muodostettaessa. Silloin

$$\det(E) = \begin{cases} -1, & \text{jos } E \text{ on tyyppiä I,} \\ \alpha, & \text{jos } E \text{ on tyyppiä II,} \\ 1, & \text{jos } E \text{ on tyyppiä III.} \end{cases}$$

Todistus. Tyypin I alkeismatriisille väite seuraa Lauseesta 6.3.4, tyypin II matriisille Lauseesta 6.3.2 ja tyypin III matriisille Seurauksesta 6.3.3. □

Seuraus 6.4.2 Jos A on $n\times n$-matriisi ja E samankokoinen alkeismatriisi, niin

$$\det(EA) = \det(E)\det(A) = \det(AE).$$

Yleisesti, jos $E_1, \ldots, E_k$ ovat alkeismatriiseja, niin

$$\det(E_1\cdots E_k A) = \det(E_1)\cdots\det(E_k)\det(A) = \det(AE_1\cdots E_k).$$

Todistus. EA on matriisi, joka on saatu suorittamalla matriisille A sama rivioperaatio kuin muodostettaessa yksikkömatriisista E. Kyseinen operaatio aiheuttaa determinanttiin saman muutoksen kuin kertominen luvulla $\det(E)$.

Tarkemmin: Olkoon $p := \det(A)$. Jos E on tyyppiä

I, niin $\det(EA) = -p$ ja $\det(E)\det(A) = (-1)p$ (Lause 6.3.4)

II, niin $\det(EA) = \alpha p$ ja $\det(E)\det(A) = \alpha p$ (Lause 6.3.2)

III, niin $\det(EA) = p$ ja $\det(E)\det(A) = p$ (Seuraus 6.3.3).

Vastaavalla tavalla sarakeoperaatioille. Yleinen tapaus todistetaan induktiolla tai käyttäen toistuvasti tulon liitännäisyyttä:

$$\begin{aligned}
\det(E_1\, E_2 \cdots\, E_k\, A) &= \det(E_1\,(E_2\, \cdots\, E_k\, A)) \\
&= \det(E_1)\det(E_2\, E_3 \cdots\, E_k\, A) \\
&= \det(E_1)\det(E_2\,(E_3 \cdots\, E_k\, A)) \\
&= \det(E_1)\det(E_2)\det(E_3\,(E_4 \cdots\, E_k\, A)) \\
&\vdots \\
&= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)\det(A).
\end{aligned}$$

Huomaa, että prosessi väistämättä päättyy, k askeleen jälkeen! □

6.5 Determinantti ja säännöllisyys

Lauseen 6.4.1 mukaan alkeismatriisin determinantti on nollasta poikkeava.

Lause 6.5.1 Neliömatriisi A on säännöllinen jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.

Todistus. On samanarvoista osoittaa, että neliömatriisi A on singulaarinen silloin, ja vain silloin, kun $\det(A) = 0$.

Olkoon A muunnettu alkeismatriiseja E_i käyttäen porrasmuotoon

$$U = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A.$$

Seurauksen 6.4.2 nojalla

$$\det(U) = \det(E_k)\det(E_{k-1})\cdots\det(E_1)\det(A),$$

missä alkeismatriisien determinantit ovat nollasta poikkeavia. Siis $\det(A) = 0$ jos ja vain jos $\det(U) = 0$.

1) Jos A on singulaarinen, on vastaavalla homogeeniyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ei-triviaaleja ratkaisuja. Täten matriisin U viimeinen rivi on pelkkiä nollia ja

$$\det(A) = \det(U) = 0.$$

2) Olkoon $\det(A) = 0$.

Antiteesi: A on säännöllinen. Silloin myös U olisi säännöllinen yläkolmiomatriisi, jonka diagonaalilla on ykköset. Olisi $\det(U) = 1$ ja siten $\det(A) \neq 0$, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Siis A on singulaarinen. □

Tehtävä 6.5.2 Onko yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 10 \\ 11x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 14x_4 = 15 \\ 16x_1 + 17x_2 + 18x_3 + 19x_4 = 20 \end{cases}$$

yksikäsitteinen ratkaisu? Onkohan ratkaisuja ollenkaan? Ratkaisu sivulla 109.

6.6 Tulon determinantti

Alkeismatriisien tulon determinantti voitiin laskea determinanttien tulona. Sama pätee yleisestikin.

Lause 6.6.1 Jos A ja B ovat $n \times n$-matriiseja, niin

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B).$$

Todistus. 1) Jos B on singulaarinen, niin AB on singulaarinen (harjoitustehtävä), joten väite on tosi Lauseen 6.5.1 nojalla (molemmat puolet nollia).

2) Jos B on säännöllinen, niin se on Lauseen 5.4.2 mukaan esitettävässä alkeismatriisien tulona $B = E_1 \cdots E_k$. Seurauksen 6.4.2 nojalla

$$\det(AB) = \det(AE_1 \cdots E_k) = \det(A)(\det(E_1) \cdots \det(E_k)) = \det(A)\det(B).$$

□

Seuraus 6.6.2 Jos A on säännöllinen neliömatriisi, niin

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Todistus. Koska $AA^{-1} = I$ ja $\det(I) = 1$, on

$$1 = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A).$$

□

Seuraus 6.6.3 Jos samankokoisille neliömatriiseille A ja B on

$$AB = I,$$

niin A on säännöllinen ja $A^{-1} = B$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

6.7 Eliminointimenetelmä

Determinantin laskeminen kehittämismenetelmällä vaatii yleensä runsaasti laskutoimituksia. Determinantti voidaan laskea myös muuntamalla se alkeisoperaatioilla yläkolmiomuotoon (vrt. Lause 6.3.6). Tässä tarvitaan huomattavasti vähemmän laskutoimituksia.

Jos A on singulaarinen, on sen yläkolmiomuodossa rivi nollia, erikoisesti diagonaalilla on noll(i)a. Tällöin $\det(A) = 0$, mikä paljastuu seuraavassa prosessissa:

> *Muunnetaan A determinantin sisällä yläkolmiomuotoon käyttäen rivioperaatioita (tai sarakeoperaatioita) I ja III. Operaatio III ei muuta determinantin arvoa, mutta operaatiossa I on muistettava determinantin etumerkin vaihtuminen. Saadun yläkolmiomatriisin determinantti on Lauseen 6.3.6 mukaan lävistäjän tulo.*

Esimerkki 6.7.1 Lasketaan determinantti

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

eliminoimalla alkaen rivien ja sarakkeiden vaihdoilla: vaihdetaan 1. ja 3. rivi, 2. ja 4. rivi sekä sitten 1. ja 3. sarake:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Lopuksi viedään yläkolmiomuotoon tyypin III alkeisoperaatioilla:

$$\begin{aligned}
-\left|\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}
&= -\left|\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} R_1' \\ R_2' \\ R_3' \\ R_4' \end{array} \\
&= -\left|\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{array}\right| \begin{array}{l} R_1'' \\ R_2'' \\ R_3'' \\ R_4'' \end{array} \\
&= -\left|\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \end{array}\right| \begin{array}{l} R_1''' \\ R_2''' \\ R_3''' \\ R_4''' \end{array} \\
&= -(-1)(-2) \cdot \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{16}{5} = -16.
\end{aligned}$$

Tehtävä 6.7.2 Merkitse näkyviin esimerkin 6.7.1 operaatiot.
Ratkaisu sivulla 109.

6.8 Laskutoimitusten määristä

Verrataan determinantin laskemiseen tarvittavien laskujen (maksimi)määriä kehittämis- ja eliminointimenetelmissä. Olkoot Y_n^k ja K_n^k kehittämismenetelmän ja Y_n^e ja K_n^e eliminointimenetelmän yhteen/vähennys- ja kerto/jakolaskujen määrät laskettaessa $n\times n$-determinanttia.

Kehittämismenetelmässä tietyn $m\times m$-determinantin laskeminen sisältää m kofaktorin ($(m-1)\times(m-1)$-determinantin) kertomisen luvulla ja näiden tulojen yhteenlaskemisen (merkinvaihtotermi $(-1)^{i+j}$ merkitsee yhteen- tai vähennyslaskua). Näin saadaan palautuskaavat

$$\left\{\begin{array}{lcl} Y_m^k &=& mY_{m-1}^k+(m-1), \quad Y_2^k = 1, \\ K_m^k &=& mK_{m-1}^k+m, \quad\quad\quad K_2^k = 2, \end{array}\right.$$

joista saadaan mitkä tahansa Y_n^k ja K_n^k.

Eliminointimenetelmälle voidaan johtaa palautuskaavat (vrt. Esimerkki 6.8.1).

$$\left\{\begin{array}{lcl} Y_m^e &=& Y_{m-1}^e+(m-1)^2, \quad\quad\quad Y_2^e = 1, \\ K_m^e &=& K_{m-1}^e+(m-1)m+1, \quad K_2^e = 3. \end{array}\right.$$

Induktiolla voidaan todistaa suorat kaavat

$$\begin{array}{lcl|lcl} Y_n^k &=& n!-1 & Y_n^e &=& \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) \\ \hline K_n^k &=& \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}\frac{n!}{p!} & K_n^e &=& \frac{1}{3}(n-1)(n^2+n+3) \end{array}$$

Nähdään, että suurilla n menetelmien erot ovat valtavat:

$$\begin{array}{l|l} Y_n^k \approx n! & K_n^k \approx 1.7n! \\ \hline Y_n^e \approx \frac{1}{3}n^3 & K_n^e \approx \frac{1}{3}n^3 \end{array}$$

Esimerkiksi arvolla $n=20$ määrät ovat

$$\begin{array}{ll} Y_{20}^k = 2.43\cdot 10^{18}, & K_{20}^k = 4.18\cdot 10^{18}, \\ Y_{20}^e = 2470, & K_{20}^e = 2679. \end{array}$$

Esimerkki 6.8.1 Eliminoinnissa olkoon edetty sarakkeeseen i, jolloin tyypin III operaatioita tarvitsee suorittaa vain vektoreille $B_j := A(j, i{+}1 : n)$:

$$
\left|\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & & & & & & & \\
0 & a_{22} & & & & & & \\
\vdots & 0 & \ddots & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & & 0 & a_{i+k,i} & \cdots & a_{i+k,j} & \cdots & a_{i+k,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ B_i \\ \\ B_{i+k} \\ \\ B_n
\end{array}
$$

i:nnen vaiheen yhden alkion $a_{i+k,i}$ nollauksessa

$$B'_{i+k} \leftarrow B_{i+k} - \frac{a_{i+k,i}}{a_{ii}} B_i$$

tarvitaan $n-i+1$ kertolaskua, $n-i$ yhteenlaskua ja yksi jakolasku. Vaiheessa i tarvitaan kaikkiaan $(n-i)(n-i+1)$ kertolaskua ja $(n-i)(n-i)$ yhteenlaskua. Koska vaiheita on $i = 1, 2, \ldots, n{-}1$ ja lopuksi on laskettava tulo $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, yhteenlaskuja on

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)$$

ja kertolaskuja

$$
\begin{aligned}
(n-1)n + (n-2)(n-1) + {} & \cdots + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (n-1) \\
= {} & \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(n-i+1) + (n-1) \\
= {} & \frac{1}{3}(n-1)(n^2+n+3).
\end{aligned}
$$

Viimeisten muotojen todistaminen käy esimerkiksi induktiolla.

Tehtävä 6.8.2 Todista induktiolla Esimerkin 6.8.1 kertolaskujen määrää koskeva tulomuoto.

Ratkaisu sivulla 109.

6.9 *Lohkomatriisien determinanteista

Tarkastellaan lohkomatriisien determinantteja. Muistamme, että yläkolmiomatriisin determinantti saatiin diagonaalialkioiden tulona (Lause 6.3.6). Myös lohkoyläkolmiomatriisin determinantti on saatavissa näin, mikäli lohkodiagonaalilla olevat matriisit ovat neliömatriiseja.

Lause 6.9.1 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lohkomatriisi muotoa

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix},$$

missä A_{11} ja A_{22} ovat neliömatriiseja. Silloin

$$\det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22}.$$

Yleisemmin: jos $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on *lohkoyläkolmiomatriisi* muotoa

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1k} \\ O & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2k} \\ O & O & A_{33} & \cdots & A_{3k} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix},$$

missä diagonaalilla olevat alimatriisit A_{ii} ovat neliömatriiseja, niin

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1k} \\ O & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2k} \\ O & O & A_{33} & \cdots & A_{3k} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A_{kk} \end{vmatrix} = \det A_{11} \cdot \det A_{22} \cdots \det A_{kk}.$$

Todistus. Sivuutetaan tällä erää. □

6.10 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 6.1.4: Vastaavat matriisit ja kofaktorit ovat

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}, & A_{11} &= (-1)^2 \det(M_{11}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -3 \\
M_{12} &= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}, & A_{12} &= (-1)^3 \det(M_{12}) = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = 78 \\
M_{13} &= \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, & A_{13} &= (-1)^4 \det(M_{13}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 67
\end{aligned}$$

$\det(A) = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 78 + (-3) \cdot 67 = -3 - 156 - 201 = -360.$

Tehtävä 6.1.5: a) määritelmän mukaan

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & -5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 6 \\ 8 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & -5-\lambda \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \ldots$$

b) Sarrusin säännöllä taas aloitetaan

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & -5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(-5-\lambda)(2-\lambda) + 2\cdot 6\cdot 7 + 1\cdot 4\cdot 8 \\
&\quad -7\cdot(-5-\lambda)\cdot 1 - 8\cdot 6\cdot(1-\lambda) - (2-\lambda)\cdot 4\cdot 2 = \ldots
\end{aligned}$$

Molemmilla tavoilla saadaan lopputulos

$$\det(A) = -\lambda^3 - 2\,\lambda^2 + 76\,\lambda + 77.$$

Tehtävä 6.2.3: a) määritelmän mukaan:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 18 = 16$$

b) kehittämällä 1. sarakkeen suhteen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 0 + 22 = 16$$

c) kehittämällä 2. sarakkeen suhteen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3(-2+6) = 16$$

Tehtävä 6.5.2: Kvadraattisella yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu jos ja vain jos kerroinmatriisi on säännöllinen (Seuraus 5.4.3), mikä puolestaan tapahtuu täsmälleen silloin kun sen determinantti on $\neq 0$ (Lause 6.5.1). Determinantissa voidaan tehdä yhtaikaa tyypin III operaatiot

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1' \leftarrow R_1 \\ R_2' \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3' \leftarrow R_3 \\ R_4' \leftarrow R_4 - R_3 \end{matrix}$$

Determinantissa on kaksi identtistä riviä, joten Seurauksen 6.3.1 nojalla determinantti $= 0$. Siis ei ole yksikäsitteistä ratkaisua, ts. ratkaisuja voi olla 0 tai enemmän kuin yksi. Viemällä yhtälöryhmä porrasmuotoon nähdään, että ratkaisuja on äärettömästi.

Tehtävä 6.7.2: Loppupuolen operaatiot

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}
&= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1' \leftarrow R_1 \\ R_2' \leftarrow R_2 + R_1 \\ R_3' \leftarrow R_3 \\ R_4' \leftarrow R_4 \end{matrix} \\
&= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1'' \leftarrow R_1' \\ R_2'' \leftarrow R_2' \\ R_3'' \leftarrow R_3' - \frac{1}{2}R_2' \\ R_4'' \leftarrow R_4' + \frac{3}{2}R_2' \end{matrix} \\
&= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1''' \leftarrow R_1'' \\ R_2''' \leftarrow R_2'' \\ R_3''' \leftarrow R_3'' \\ R_4''' \leftarrow R_4'' + \frac{1}{5}R_3'' \end{matrix} = -16.
\end{aligned}$$

Tehtävä 6.8.2: Induktiolla $\boxed{n=1}$ $0 \cdot 1 = 0$, kunnossa.

$\boxed{n=k}$ Induktio-oletus: väite pitää paikkansa arvolla k jollakin $k \in \mathbb{N}$, ts.

$$(k-1)k + (k-2)(k-1) + \cdots + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (k-1) = \tfrac{1}{3}(k-1)(k^2+k+3)$$

$\boxed{n=k+1}$ Arvolla $k+1$ väitteen oikea puoli on

$$\tfrac{1}{3}\, k((k+1)^2 + (k+1) + 3) = \tfrac{1}{3}\, k^3 + k^2 + \tfrac{5}{3}\, k.$$

Vasen puoli taas on $k(k+1)+(k-1)k+(k-2)(k-1)+\cdots+2\cdot3+1\cdot2+(k+1-1)$, jossa sopivasti ryhmitellen päästään käyttämään induktio-oletusta:

$$\begin{aligned} k(k+1) &+ [(k-1)k + (k-2)(k-1) + \cdots + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (k-1)] + 1 \\ &= \tfrac{1}{3}(k-1)(k^2+k+3) + k(k+1) + 1 = \tfrac{1}{3}\, k^3 + k^2 + \tfrac{5}{3}\, k. \end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla.

7 LIITTOMATRIISI JA CRAMERIN SÄÄNTÖ

Säännöllisen matriisin käänteismatriisi voidaan laskea sen kofaktorien matriisin ja determinantin avulla. Jos kvadraattisella yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, se voidaan laskea determinantteja käyttävän *Cramerin säännön* avulla (ks. Luku 7.3).

7.1 Kofaktori- ja liittomatriisi

Olkoon $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ja merkitään edelleen alkion a_{ij} kofaktoria

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}),$$

missä M_{ij} on saatu matriisista A poistamalla rivi i ja sarake j.

Tehtävä 7.1.1 Laske matriisin A *kofaktorimatriisi* $\operatorname{cof}(A)$, siis matriisi, joka saadaan korvaamalla matriisin A alkiot niiden kofaktoreilla, kun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu sivulla 116.

Apulause 7.1.2 Kofaktoreille pätee kaikilla $i, j \in [n]$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det(A), & \text{kun } i = j, \\ 0, & \text{kun } i \neq j. \end{cases}$$

Todistus. Jos $i = j$, kyseessä on determinantin kehittäminen rivin i suhteen. Olkoon toiseksi $i \neq j$. Olkoon $A^* = (a^*_{ij})$ matriisi, jossa matriisin A rivi j on korvattu rivillä i, siis

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jk} & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \qquad A^* = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \boldsymbol{a_{ik}} & \boldsymbol{a_{in}} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ A(i,:) \\ \| \\ A(i,:) \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Lauseen 6.3.1 a) mukaan $\det(A^*) = 0$. Toisaalta, kun lasketaan $\det(A^*)$ kehittämällä rivin j suhteen ja otetaan huomioon, että $A_{jk} = A^*_{jk}$ (rivin j sisältö ei vaikuta kofaktoreihin!), saadaan

$$0 = \det(A^*) = \sum_{k=1}^{n} a^*_{jk} A^*_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A^*_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}.$$

Siis väite pätee myös arvoilla $i \neq j$. □

Määritelmä 7.1.3 Neliömatriisin $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *adjungoitu matriisi* eli *liittomatriisi* on samankokoinen neliömatriisi

$$\operatorname{adj}(A) := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{cof}(A)^T.$$

jossa matriisin A alkiot on korvattu kofaktoreillaan ja suoritettu transponointi.

7.2 Käänteismatriisin laskeminen liittomatriisin avulla

Lause 7.2.1 Säännölliselle neliömatriisille A on

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Todistus. Apulauseesta 7.1.2 seuraa, että tulomatriisin $A\,(\operatorname{adj}(A))$ diagonaalilla on luvut $\det(A)$ ja muualla nollat, nimittäin

$$\begin{aligned} A(\operatorname{adj}(A)) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \det(A) & & & & \\ & \det(A) & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \det(A) & \\ & & & & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)\, I. \end{aligned}$$

Siis $A\,(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))\,I$. Koska A on säännöllinen, on olemassa A^{-1} ja $\det(A) \neq 0$. Kertomalla yhtälö vasemmalta käänteismatriisilla ja jakamalla luvulla $\det(A)$ saadaan

$$\frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) = A^{-1}.$$

□

Tämä teoreettisesti sievä tulos ei ole käytännön laskuissa kovin miellyttävä; siinä joudutaan laskemaan n^2 kpl $(n-1)\times(n-1)$-determinantteja sekä tietysti yksi kokoa $n\times n$.

Tehtävä 7.2.2 Laske Tehtävän 7.1.1 matriisin A käänteismatriisi. Ratkaisu sivulla 116.

Esimerkki 7.2.3 Laske liitto- ja käänteismatriisi matriisille

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu. Esimerkissä 6.7.1 on laskettu $\det(A) = -16$. Liittomatriisia varten on laskettava 16 kappletta 3×3-determinantteja:

$$\begin{aligned} A_{11} &= +\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6+2-4 = -8, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3, \\ &\vdots \\ A_{44} &= +\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6-1 = -7. \end{aligned}$$

Adjungoitu matriisi saadaan asettamalla luvut A_{ij} sen sarakkeiksi; käänteismatriisi puolestaan edelleen jakamalla determinantilla:

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\,\mathrm{adj}(A) = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 & -8 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \\ 14 & 6 & 34 & 18 \\ -1 & -5 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

7.3 Yhtälöryhmän ratkaisu Cramerin säännöllä

Olkoon $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kvadraattinen $n \times n$-yhtälöryhmä. Seuraavassa ratkaisumenetelmässä joudutaan pahimmillaan laskemaan $n + 1$ kappaletta n-rivisiä determinantteja. Mutta jos Cramerin sääntöä (Gabriel Cramer, Sveitsi, 1704-1752) käytetään esimerkiksi lineaarisen differentiaaliyhtälön vakioiden variointimenetelmässä, jossa $\mathbf{b}$ sisältää vain yhden nollasta poikkeavan luvun, joudutaan laskemaan vain yksi n-rivinen ja n kappaletta $(n-1)$-rivisiä determinantteja.

Lause 7.3.1 (*Cramerin sääntö*). Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ säännöllinen matriisi ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Olkoon A_i matriisi, joka on saatu matriisista A korvaamalla sen sarake i pystyvektorilla $\mathbf{b}$. Yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisun $\mathbf{x} = (x_1 \cdots x_n)^T$ alkiot ovat silloin

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Todistus. Olkoon $\alpha := \det(A)$. Silloin $\alpha \neq 0$, ja

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{adj}(A)\,\mathbf{b} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Siis $x_i = \frac{1}{\alpha}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^n b_k A_{ki}\right)$.

Toisaalta, kun matriisin A sarake i on korvattu vektorilla $\mathbf{b}$:

$$A_i := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boldsymbol{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \boldsymbol{b_2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boldsymbol{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

niin kehittämällä sarakkeen i suhteen

$$\det(A_i) = b_1(A_i)_{1i} + b_2(A_i)_{2i} + \cdots + b_n(A_i)_{ni} = \sum_{k=1}^n b_k(A_i)_{ki}.$$

Mutta tässä $(A_i)_{ki} = A_{ki}$ kaikilla k ja siten

$$x_i = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^n b_k A_{ki}\right) = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}.$$

□

Esimerkki 7.3.2 Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ratkaisu. Käytetään Cramerin sääntöä. Yhtälöryhmän determinantti on (tarkasta!)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12.$$

Siis esimerkiksi

$$x_3 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \cdots = \frac{1}{2}.$$

Muut arvot ovat $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ ja $x_4 = 1$.

Tehtävä 7.3.3 Ratkaise Cramerin säännöllä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 - 4\,x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 2 \end{cases}$$

Ratkaisu sivulla 116.

Pohdiskeltavaa. Miten voisi yrittää ratkaista alimäärättyä yhtälöryhmää Cramerin sääntöä käyttäen? Onnistuuko aina, jos ratkaisuja on? Kokeile aikaisemmin esiintyneiden Esimerkkien ja Tehtävien avulla. Entä ylimäärättyä yhtälöryhmää?

Cramerin sääntö vakioiden varioinnissa

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa vakioiden varioinnilla tulee vastaan mm. seuraavanlaisia yhtälöryhmiä:

Esimerkki 7.3.4 Ratkaise funktiot f_1, f_2 ja f_3 ryhmästä

$$\begin{cases} \frac{f_1(x)}{x} & + & xf_2(x) & + & x^2 f_3(x) & = & 0 \\ -\frac{f_1(x)}{x^2} & + & f_2(x) & + & 2xf_3(x) & = & 0 \\ \frac{2f_1(x)}{x^3} & & & + & 2f_3(x) & = & \frac{\ln x}{x^2} \end{cases}$$

Ratkaisu. Tämän lineaarisen yhtälöryhmän determinantti

$$D(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x & x^2 \\ -\frac{1}{x^2} & 1 & 2x \\ \frac{2}{x^3} & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{6}{x} \neq 0$$

kaikilla $x \neq 0$, joten $f_1(x)$, $f_2(x)$ ja $f_3(x)$ voidaan ratkaista arvoilla $x \neq 0$. Koska oikea puoli sisältää nollia, kannattaa käyttää Cramerin sääntöä, esimerkiksi

$$f_1(x) = \frac{1}{D(x)} \begin{vmatrix} 0 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ \frac{\ln x}{x^2} & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{x \ln x}{6}.$$

Vastaavasti saadaan (käy itse läpi sivuutetut laskut!)

$$f_2(x) = -\frac{\ln x}{2x}, \quad f_3(x) = \frac{\ln x}{3x^2}.$$

7.4 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 7.1.1: Kofaktorit ovat

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -19,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 15.$$

Kofaktorimatriisi on siis

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} -14 & 2 & -19 \\ 2 & -9 & -6 \\ -5 & -8 & 15 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 7.2.2: Voitaisiin tietysti laskea esimerkiksi Luvun 6.7 eliminointimenetelmällä. Mutta kun nyt liittomatriisi on kofaktorimatriisin transpoosi:

$$\operatorname{adj}(A) = \operatorname{cof}(A)^T = \begin{pmatrix} -14 & 2 & -5 \\ 2 & -9 & -8 \\ -19 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

ja helposti saadaan lasketuksi $\det(A) = \ldots = -61$, kannattaa käyttää Lausetta 7.2.1:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-61}\begin{pmatrix} -14 & 2 & -5 \\ 2 & -9 & -8 \\ -19 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 7.3.3: Yhtälöryhmän kerroinmatriisin

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinantti $\det(A) = -15$. Ratkaisut saadaan siis osamäärinä

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-15}{-15} = 1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{15}{-15} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{0}{-15} = 0.$$

8 SOVELLUTUKSIA

8.1 Lineaarisista malleista

Suoraan verrannollisuus

Oletetaan, että suure z riippuu suureista x ja y affiinisti, ts. $z = ax + by + c$. Olkoot $z_1 = ax_1 + by_1 + c$ ja $z_2 = ax_2 + by_2 + c$ ja merkitään suureiden vastaavia *muutoksia*

$$\Delta x := x_2 - x_1, \quad \Delta y := y_2 - y_1, \quad \Delta z := z_2 - z_1.$$

Silloin *muutosriippuvuus*

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$$

on lineaarinen. Merkittävää tässä on, että Δz *ei riipu siitä, mistä arvosta* x (tai y) muutos tapahtuu, vaan vain *muutoksen arvosta*. Yleisemmin:

Määritelmä 8.1.1 Olkoon $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Jos suureen $Y = f(\mathbf{x})$ muutosriippuvuus on lineaarinen, ts.

$$\Delta Y = a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \cdots + a_n\Delta x_n,$$

on Y *suoraan verrannollinen muuttujiin* x_i.

Huomautus 8.1.2 a) Jos yllä $\Delta x_i \neq 0$ ja muut muuttujat pidetään vakioina, on muutossuhde vakio: $\frac{\Delta Y}{\Delta x_i} = a_i$.

b) Käytännön esimerkeissä riippuvuus $Y = f(\mathbf{x})$ on usein suoraan verrannollinen vain joidenkin muuttujien suhteen tai ei yhdenkään.

c) Voidaan osoittaa, että suoraan verrannollisuus on voimassa jos ja vain jos riippuvuus $Y = f(\mathbf{x})$ on affiini.

Esimerkki 8.1.3 Oletetaan, että juna liikkuu tasaisesti kiihtyvällä nopeudella ja on hetkellä $t = 0$ paikassa s_0, jossa sen vauhti on v_0. Jos kiihtyvyys on a, junan vauhti ja paikka hetkellä t ovat

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at, \\ s &= s_0 + v_0 t + 12at^2. \end{aligned}$$

Riippuvuus $v = v(t)$ on affiini ja vastaava muutos $\Delta v = v - v_0$ lineaarinen. Vauhti on siis suoraan verrannollinen aikaan. Jos aikaväli $[0, t]$ pidetään vakiona, paikka $s = s(v_0)$ on suoraan verrannollinen alkuvauhtiin v_0. Sen sijaan riippuvuus $s = s(t)$ ei ole affiini, vaan *polynomiaalinen*, tässä tapauksessa neliöllinen.

8.2 Lineaarinen yhtälöryhmä mallina

Esimerkki 8.2.1 Asiakas tilaa 4 senttilitraa liuosta, jossa pitää olla 25 prosenttia ainetta A, ja joka tulee sekoittaa kahdesta 34- ja 10-prosenttisesta liuoksesta. Kuinka paljon näitä tarvitaan?

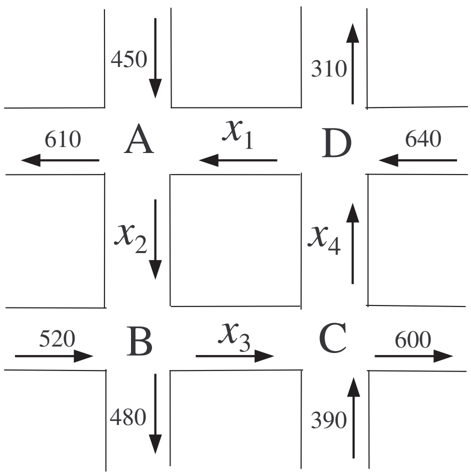
Ratkaisu. Olkoot liuosmäärät l_{25}, l_{34} ja l_{10}. Liuosten kokonaismäärä täsmää, kun $l_{34} + l_{10} = l_{25}$. Toinen sitova yhtälö saadaan vaatimuksesta, että ainetta A pitää olla $0.25l_{25}$. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} l_{34} & + & l_{10} & = & l_{25} \\ 0.34l_{34} & + & 0.10l_{10} & = & 0.25l_{25} \end{cases}$$

Ratkaisuksi saadaan helposti $l_{34} = 2.5$ ja $l_{10} = 1.5$ senttilitraa.

Tehtävä 8.2.2 96-prosenttista ainetta 1 on puoli litraa ja laimennusainetta 2 riittävästi. Kuinka paljon 40-prosenttista sekoitusta näistä saadaan? Ratkaisu sivulla 128.

Esimerkki 8.2.3 Eräässä kaupungissa on mitattu yhden korttelin ympäristössä kuvan 14 mukaisia keskimääräisiä liikennemääriä/tunti. Kyseiset kadut ovat yksisuuntaisia. Mitä voidaan sanoa liikennemääristä x_i?



Kuva 14: Esimerkin 8.2.3 liikennemäärät

Ratkaisu. On järkevää olettaa, että kuhunkin risteykseen tulee yhtä paljon ajoneuvoja kuin siitä lähteekin. Muodostetaan siis risteysten liikennemääristä yhtälöt

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \text{tulee} & & \text{lähtee} \\
\text{A:} & x_1 + 450 & = & x_2 + 610 \\
\text{B:} & x_2 + 520 & = & x_3 + 480 \\
\text{C:} & x_3 + 390 & = & x_4 + 600 \\
\text{D:} & x_4 + 640 & = & x_1 + 310
\end{array}
$$

eli yhtälöryhmä

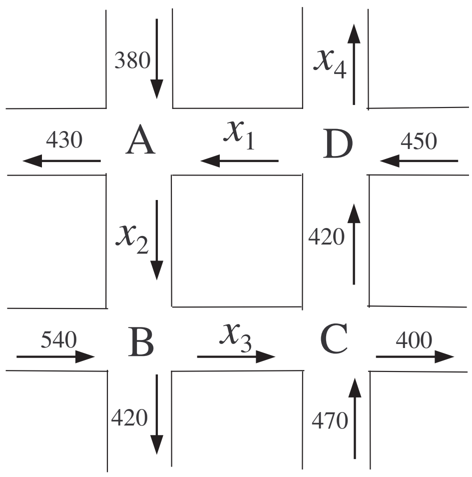
$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & & & & & = & 160 \\
x_1 & & & & & - & x_4 & = & 330 \\
 & & x_2 & - & x_3 & & & = & -40 \\
 & & & & x_3 & - & x_4 & = & 210
\end{array}
\right.
\iff
\left\{
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & t + 330 \\
x_2 & = & t + 170 \\
x_3 & = & t + 210 \\
x_4 & = & t,\ t \in \mathbb{R}
\end{array}
\right.
$$

Systeemillä on siis paljon yhdestä parametristä riippuvia ratkaisuja; jos esimerkiksi $x_4 = 200$, niin $x_1 = 530$, $x_2 = 370$ ja $x_3 = 410$.

Tehtävä 8.2.4 Käy läpi Esimerkin 8.2.3 yhtälöryhmän ratkaisuprosessi.

Ratkaisu sivulla 128.

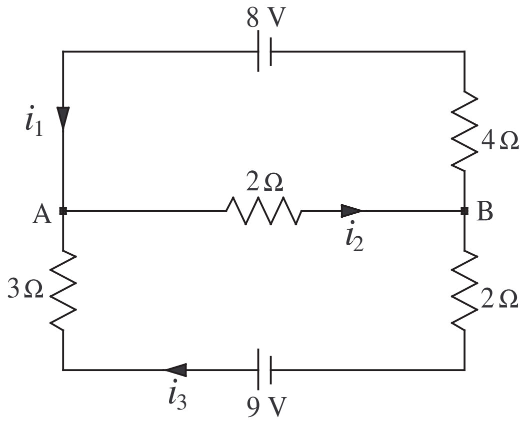
Tehtävä 8.2.5 Eräässä kaupungissa on mitattu yhden korttelin ympäristössä kuvan 15 mukaisia keskimääräisiä liikennemääriä/tunti. Kyseiset kadut ovat yksisuuntaisia. Mitä voidaan sanoa liikennemääristä x_i?



Kuva 15: Tehtävän 8.2.5 liikennemäärät

Ratkaisu sivulla 128.

Esimerkki 8.2.6 Lasketaan sähkövirrat i_k kuvan 16 tasavirtapiirissä.



Kuva 16: Esimerkin 8.2.6 tasavirtapiiri

Tasavirtapiirin vastuksissa jännitehäviötä U, sähkövirtaa i ja resistanssia R sitoo *Ohmin laki*

$$U = iR.$$

Kirchhoffin lait taas ovat:

K1. Kuhunkin johdon haarautumaan tulevien virtojen summa on sama kuin lähtevien summa.

K2. Kussakin suljetussa virtasilmukassa jännitelähteiden summa on sama kuin jännitehäviöiden summa.

Lain K1 mukaan solmussa A on $i_1 - i_2 + i_3 = 0$ ja solmussa B $-i_1 + i_2 - i_3 = 0$ (nämä yhtälöt ovat samoja).

Toisen lain K2 ja Ohmin lain mukaan saadaan ylemmmästä silmukasta $4i_1 + 2i_2 = 8$, ja alemmasta $2i_2 + 5i_3 = 9$.

Kaikenkaikkiaan saadaan siis virtoja koskeva yhtälöryhmä

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcll} i_1 & - & i_2 & + & i_3 & = & 0 & \text{solmut A ja B} \\ 4i_1 & + & 2i_2 & & & = & 8 & \text{yläsilmukka} \\ & & 2i_2 & + & 5i_3 & = & 9 & \text{alasilmukka} \end{array} \right. \iff \cdots \iff \left\{ \begin{array}{rcl} i_1 & = & 1 \\ i_2 & = & 2 \\ i_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

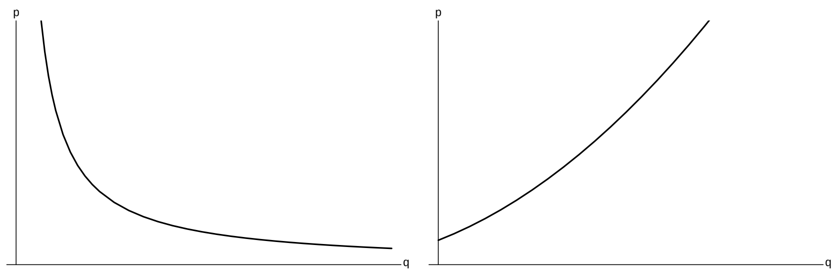
8.3 Kysyntä–tarjonta -malleja

Taloustieteissä puhutaan *kysynnän* ja *tarjonnan yhtälöistä* (*demand, supply equation*), jotka sitovat tuotteen myyntihintaa p ja lukumäärää q:

kysyntäyhtälö: $p = d(q)$, missä q on ostomäärä,

tarjontayhtälö: $p = s(q)$, missä q on valmistusmäärä.

qp-koordinaatistossa esitettyinä näiden kuvaajat sijaitsevat positiivisessa neljänneksessä ja edellinen on yleensä laskeva, jälkimmäinen nouseva käyrä, katso Kuvaa 17.



Kuva 17: $p = d(q)$ ja $p = s(q)$

Jos kuvaajat piirretään samaan koordinaatistoon ja käyrät leikkaavat toisensa, leikkauspistettä sanotaan *tasapainopisteeksi* (*equilibrium point*).

Jos riippuvuus *oletetaan affiiniksi*, yhtälöt ovat muotoa

$$p = a_1 q + b_1, \quad p = a_2 q + b_2,$$

ja niiden kuvaajat ovat suoria.

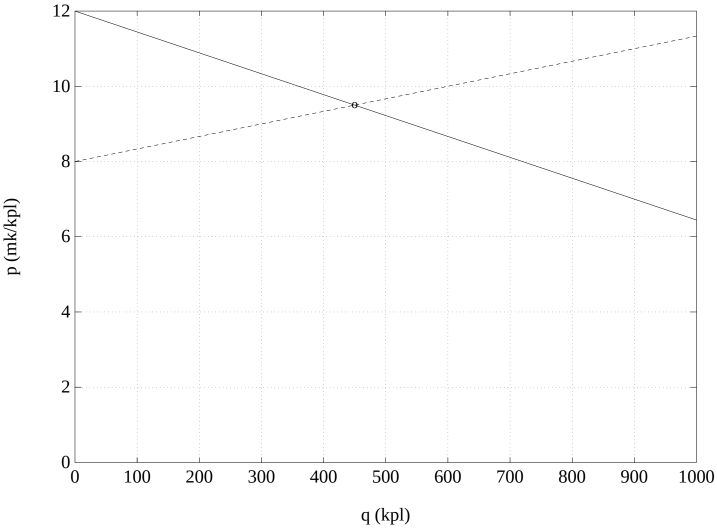
Esimerkki 8.3.1 Erään tuotteen yhtälöt ovat

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{kysyntä:} & p & = & -\frac{1}{180}q & + & 12, \\ \text{tarjonta:} & p & = & \frac{1}{300}q & + & 8, \end{array}$$

missä q on viikossa ostettu/valmistettu kappalemäärä ja p tuotteen yksikköhinta. Millä hinnalla kysyntä ja tarjonta ovat tasapainossa ja paljonko tuotetta tällöin menee viikossa kaupaksi?

Ratkaisu. Piirretään käyrät samaan koordinaatistoon (Kuva 18).

Merkitään $-\frac{1}{180}q + 12 = \frac{1}{300}q + 8$, mistä saadaan $q = 450$ ja edelleen $p = 9.50$. Tavaroita tuotetaan ja ostetaan saman verran, 450 kappaletta, hinnalla 9.50/kpl.



Kuva 18: Kysyntä ja tarjonta

Epälineaarisista malleista

Monet konkreettiset ongelmat ovat luonteeltaan *epälineaarisia*. Koska epälineaaristen yhtälöryhmien ratkaiseminen on yleensä hankalaa ja lineaaristen helppoa, on epälineaarisiakin ilmiöitä perinteisesti käsitelty lineaarisilla malleilla. Tällöin joudutaan tekemään yksinkertaistuksia, esimerkiksi jotakin käyrää arvioidaan sille piirretyllä tangentilla. Malli on silloin vain *approksimatiivinen* ja vastaavan lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu on pätevä vain tietyllä tarkkuudella ja rajoitetuilla muuttujien arvoilla.

Tehtävä 8.3.2 Tuotteen kysyntä- ja tarjontayhtälöt ovat

$$\begin{array}{lrcl} \text{kysyntä:} & p & = & \frac{8000}{q}, \\ \text{tarjonta:} & p & = & \frac{q}{40} + 10. \end{array}$$

Piirrä kuvaajat samaan koordinaatistoon ja määritä tasapainohinta ja -määrä

a) graafisesti,

b) algebrallisesti.

Ratkaisu sivulla 129.

Tehtävä 8.3.3 Kahden tuotteen A ja B kysyntä- ja tarjontayhtälöt ovat sekoitettua muotoa

$$\text{kysyntä} : \begin{cases} q_A = 8 - p_A + p_B \\ q_B = 26 + p_A - p_B, \end{cases}$$
$$\text{tarjonta} : \begin{cases} q_A = -2 + 5p_A - p_B \\ q_B = -4 - p_A + 3p_B. \end{cases}$$

Ratkaise tasapainohinnat p_A ja p_B. Ratkaisu sivulla 129.

Tehtävä 8.3.4 Muunna Tehtävän 8.3.3 yhtälöryhmä muotoon, josta tuntemattomat q_A ja q_B ratkeavat Gaussin menetelmällä nopeimmin. *Vihje: Viimeinen tuntematon ratkeaa ensin.*

8.4 Matriiseilla mallintamisesta

Esimerkki 8.4.1 Tehdas valmistaa kolmea tuotetta A, B ja C. Tuotannon seurannassa vuosi jakaantuu neljänneksiin I–IV. Viime vuoden tuotantokustannukset olivat

KULUT (mk/kpl)	A	B	C
raaka-aine	0.10	0.30	0.15
työ	0.30	0.40	0.25
muut	0.10	0.20	0.15

Tuotantomäärät olivat neljännesvuosittain

MÄÄRÄT (kpl)	A	B	C
I	4000	2000	5800
II	4500	2600	6200
III	4500	2400	6000
IV	4000	2200	6000

Muodosta taulukko, josta ilmenevät kunkin kustannustyypin aiheuttamat kulut neljännesvuosittain.

Ratkaisu. Poimitaan taulukoista matriisit

$$K = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.30 & 0.15 \\ 0.30 & 0.40 & 0.25 \\ 0.10 & 0.20 & 0.15 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad M = \begin{pmatrix} 4000 & 2000 & 5800 \\ 4500 & 2600 & 6200 \\ 4500 & 2400 & 6000 \\ 4000 & 2200 & 6000 \end{pmatrix}$$

Silloin matriisitulo KM^T antaa halutun taulukon

KULUT (mk/jakso)	I	II	III	IV
raaka-aine	1870	2160	2070	1960
työ	3450	3940	3810	3580
muut	1670	1900	1830	1740

Panos–tuotos -malli

Tarkastellaan yksinkertaista teollisuuden kahden toimialan TA1 ja TA2 systeemiä, jossa kumpikin valmistaa tuotteitaan omaan ja toisen alan käyttöön sekä ulkopuolisille kuluttajille (*lopputuotekysyntä* LTK, *final demand*). Lisäksi otetaan huomioon *muut tuotannontekijät* MTT (*other production factors, primary inputs*), joita ovat mm. raaka-aine-, työvoima- ja pääomakulut. Seuraavassa erään systeemin nykytilanne taulukkona, jossa luvut ovat miljoona markkaa vuodessa:

Kuluttaja:	TA1(p)	TA2(p)		LTK	
Tuottaja:					KT
TA1(t)	240	500	$\vdots$	460	1200
TA2(t)	360	200	$\vdots$	940	1500
	$\dots$	$\dots$			
MTT	600	800		–	
KP	1200	1500			

Sarakkeet TA1(p) ja TA2(p) ovat panoksia ja rivit TA1(t) ja TA2(t) saatuja tuotoksia. Systeemin *panos-tuotos -mallilla* (*input-output*) voidaan tutkia ja ennustaa sen tilan muutoksia. Panos-tuotos -analyysin perusolettamukset ovat:
1) Kullakin toimialalla kokonaispanos KP = kokonaistuotos KT.
2) Kullakin toimialalla eri osapanosten *suhteellinen osuus* säilyy muutoksessa ennallaan, ts. *talouden perusrakenne säilyy*.
Jälkimmäinen tarkoittaa, että nk. *panoskertoimet* (*input-output coefficients*), jotka saadaan jakamalla panossarakkeen luvut kokonaispanoksilla, pysyvät samoina. Neliömatriisi A, joka saadaan toimialojen välisistä panoskertoimista, on *panosmatriisi* (*input-output matrix*); yllä siis

$$A = \begin{pmatrix} \frac{240}{1200} & \frac{500}{1500} \\ \frac{360}{1200} & \frac{200}{1500} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

8.5 Käänteismatriisin käyttöä

Panos–tuotos -malli (jatkoa)

Esimerkki 8.5.1 Oletetaan, että yllä olevassa tilanteessa lopputuotekysyntä kasvaa toimialalla TA1 500:ksi ja toimialalla TA2 1200:ksi. Kuinka paljon kokonaistuotosta KT on muutettava?

Ratkaisu. Olkoon $X = (x_1\ x_2)^T$ tuntematon *tuotosmatriisi*, $D = (500\ \ 1200)^T$ uusi *kysyntämatriisi* ja A yllä oleva panosmatriisi. Silloin on oltava

$$X = AX + D \iff (I - A)X = D \iff X = (I - A)^{-1}D,$$

mikäli matriisi $I - A$, nk. *Leontiefin matriisi*, on säännöllinen. Tässä esimerkissä

$$\begin{aligned}
I - A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} \end{pmatrix} \\
(I - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{pmatrix} \quad \text{laske itse!} \\
X = (I - A)^{-1}D &= \begin{pmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1404.49 \\ 1870.79 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Eräs salakieli

Kaksi henkilöä ovat tavatessaan sopineet aakkosille kokonaislukuarvot ja koodausmatriisin A, jolla lähetettävä viesti X muutetaan salakieliseksi viestiksi B. Viestin saaja taas muuntaa matriisin B takaisin viestiksi X käyttäen dekoodaukseen käänteismatriisia A^{-1}.

Koodausmatriisiksi A otetaan säännöllinen kokonaislukumatriisi, jolle A^{-1} on kokonaislukumatriisi. Tällainen A saadaan aikaan muokkaamalla yksikkömatriisia I alkeisoperaatioilla I ja III käyttäen kokonaislukukertoimia. Silloin nimittäin $\det(A) = \pm\det(I) = \pm 1$, jolloin

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$$

on kokonaislukumatriisi.

Lähetettävä selväkielinen teksti muunnetaan vastaavuustaulukon mukaan lukujonoksi, joka asetetaan lähetettävän matriisin X sarakkeiksi niin, että rivejä tulee yhtä monta kuin on koodausmatriisissa A sarakkeita. Tarvittaessa loppuun lisätään lukuja, joilla ei ole merkitystä. Henkilö lähettää viestin X koodattuna matriisina $B = AX$. Koska säännölliselle matriisille A on

$$AX = B \iff X = A^{-1}B,$$

viestin saaja osaa purkaa sen selväkieliseksi dekoodausmatriisin ja vastaavuustaulukon avulla.

Esimerkki 8.5.2 Sovitaan yksinkertaisuuden vuoksi vastaavuus

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	å	ä	ö	
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

ja olkoon koodausmatriisi

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Olkoon lähetettävä viesti "tulen sunnuntaina". Yllä olevan taulukon mukaan muunnettuna se kuuluu

$$X := \begin{pmatrix} 20 & 5 & 19 & 14 & 20 & 14 \\ 21 & 14 & 21 & 21 & 1 & 1 \\ 12 & 30 & 14 & 14 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Lähetettävä viesti on tällöin

$$B := AX = \begin{pmatrix} 74 & 63 & 75 & 70 & 31 & 16 \\ 181 & 170 & 185 & 175 & 72 & 33 \\ 127 & 112 & 129 & 119 & 61 & 31 \end{pmatrix}$$

ja se saadaan takaisin kaavalla $X = A^{-1}B$.

Tehtävä 8.5.3 Mitä tarkoittaa viesti

$$\begin{pmatrix} 44 & 53 & 77 & 100 & 66 & 31 & 54 \\ 105 & 123 & 182 & 258 & 157 & 72 & 143 \\ 76 & 90 & 135 & 172 & 112 & 53 & 108 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu sivulla 130.

8.6 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 8.2.2 : Olkoot liuosmäärät $l_{96} = 0.50$, l_5 ja l_{40}. Yhteensä näitä on $l_{96}+l_5 = l_{40}$ ja kyseista ainemäärää sitoo yhtälö $0.96l_{96} + 0.05l_5 = 0.40l_{40}$. Näin saadaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} l_5 - l_{40} = -0.50 \\ 0.05l_5 - 0.40l_{40} = -0.48 \end{cases}$$

Eliminoimalla l_5 operaatiolla $R_2 \leftarrow R_2 - 0.05R_1$ saadaan $-0.35l_{40} = -0.455$ eli $l_{40} = 1.3$ litraa. Usein tietysti tarpeen tietää myös laimentavan aineen määrä, tässä se olisi $l_5 = 0.8$ litraa.

Tehtävä 8.2.4 : Gaussin eliminointiprosessilla jatkaen

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 160 & | \; R_1 \\ x_1 - x_4 = 330 & | \; R_2 \\ x_2 - x_3 = -40 & | \; R_3 \\ x_3 - x_4 = 210 & | \; R_4 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 160 & | \; R_1' \leftarrow R_1 \\ x_2 - x_4 = 170 & | \; R_2' \leftarrow R_2 - R_1 \\ x_2 - x_3 = -40 & | \; R_3' \leftarrow R_3 \\ x_3 - x_4 = 210 & | \; R_4' \leftarrow R_4 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 160 & | \; R_1'' \leftarrow R_1' \\ x_2 - x_4 = 170 & | \; R_2'' \leftarrow R_2' \\ - x_3 + x_4 = -210 & | \; R_3'' \leftarrow R_3' - R_2' \\ x_3 - x_4 = 210 & | \; R_4'' \leftarrow R_4' \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 160 \\ x_2 - x_4 = 170 \\ x_3 - x_4 = 210 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = t + 330 \\ x_2 = t + 170 \\ x_3 = t + 210 \\ x_4 = t, \; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tehtävä 8.2.5 : Risteyksestä lähtevien määrä on (keskimääräisesti) sama kuin tulevien määrä, joten

	tulee		lähtee
A:	$x_1 + 380$	$=$	$x_2 + 430$
B:	$x_2 + 540$	$=$	$x_3 + 420$
C:	$x_3 + 470$	$=$	$400 + 420$
D:	$x_1 + x_4$	$=$	$420 + 450$

mikä muuntuu lineaariseksi yhtälöryhmäksi

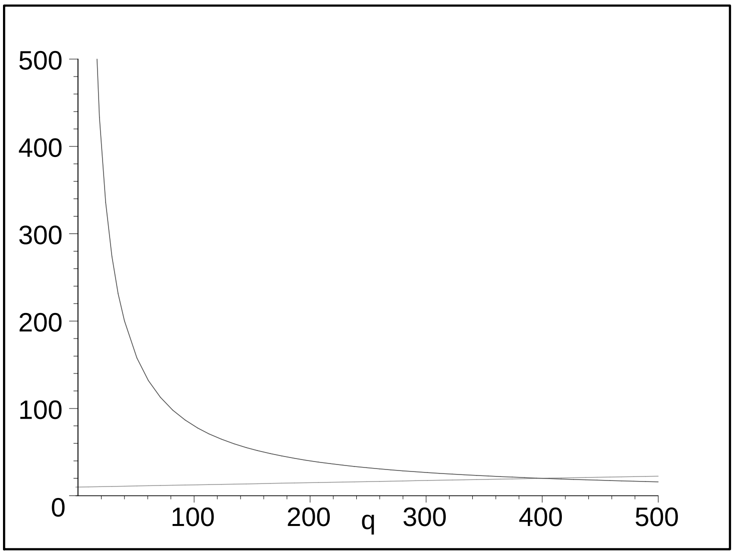
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 50 \\ x_2 - x_3 = -120 \\ x_3 = 350 \\ x_1 + x_4 = 870 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 280 \\ x_2 = 230 \\ x_3 = 350 \\ x_4 = 590 \end{cases}$$

Tehtävä 8.3.2 : Kuvasta 19 nähdään, että tasapainopisteessä myyntihinta p on n. 20 ja lukumäärä q n. 400. Tarkka lukumäärä saadaan selville ratkaisemalla yhtälö

$$\frac{8000}{q} = \frac{g}{40} + 10 \iff q = -800 \text{ tai } q = 400.$$

Koska lukumäärän on oltava positiivinen, voidaan tulos -800 hylätä. Myyntihinta selviää nyt helposti laskulla

$$\frac{8000}{400} = 20 \quad \text{tai} \quad \frac{400}{40} + 10 = 20.$$



Kuva 19:

Tehtävä 8.3.3 : Tasapainohinnat ratkeavat yhtälöryhmän avulla

$$\begin{cases} 8 - p_A + p_B = -2 + 5p_A - p_B \\ 26 + p_A - p_B = -4 - p_A + 3p_B \end{cases} \iff \begin{cases} -6p_A + 2p_B = -10 \\ 2p_A - 4p_B = -30 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p_A = 5 \\ p_B = 10. \end{cases}$$

Tehtävä 8.5.3 : Lähetettävä viesti on siis

$$B := AX = \begin{pmatrix} 44 & 53 & 77 & 100 & 66 & 31 & 54 \\ 105 & 123 & 182 & 258 & 157 & 72 & 143 \\ 76 & 90 & 135 & 172 & 112 & 53 & 108 \end{pmatrix}$$

Mistä X sadaan kaavalla $X = A^{-1}B$. Koodausmatriisi

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ja

$$A^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

joten

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44 & 53 & 77 & 100 & 66 & 31 & 54 \\ 105 & 123 & 182 & 258 & 157 & 72 & 143 \\ 76 & 90 & 135 & 172 & 112 & 53 & 108 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 20 & 30 & 14 & 21 & 12 & 19 \\ 12 & 16 & 19 & 28 & 20 & 9 & 0 \\ 5 & 1 & 9 & 30 & 5 & 1 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Viesti on siis: ”Oletpa sinä utelias.”

9 LINEAARIAVARUUS

Reaalisten $m\times n$-matriisien joukko $\mathbb{R}^{m\times n}$ on konkreettinen esimerkki matemaattisesta struktuurista, jossa esiintyy alkioiden yhteenlasku ja reaaliluvulla (skalaarilla) kertominen, ”skaalaus”, jotka yhdessä toteuttavat tietyn kokoelman laskusääntöjä. Erikoistapauksena tämä sisältää vektoreista koostuvan n-ulotteisen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ (ks. Luku 3).

On paljon muitakin samanlaiset laskusäännöt toteuttavia oliojoukkoja, mm. erilaisia funktio- ja polynomijoukkoja. Myös skalaarijoukko voi olla abstrakti algebrallinen struktuuri, *kunta* (ks. Liite A.2).

Tällaisten matemaattisten kokonaisuuksien yhteisiä ominaisuuksia tutkitaan *lineaariavaruuksien* teoriassa. Tarkastellaan aluksi abstrakteja laskutoimituksia (katso tarvittaessa Liite A).

9.1 Joukon sisäinen laskutoimitus

Määritelmä 9.1.1 Olkoon A epätyhjä joukko. Jokaista kahden muuttujan funktiota (operaattoria) $\circ : A\times A \to A$ sanotaan joukon A *sisäiseksi laskutoimitukseksi*. Kuva-alkioita $\circ(a, b)$ sanotaan laskutoimituksen *tuloksiksi*, ja usein – erityisesti algebrassa – laskutoimitusta ja sen tulosta merkitään muodossa $a \circ b := \circ(a, b)$.

Laskutoimitus siis liittää kuhunkin järjestettyyn alkiopariin $(a, b) \in A \times A$ täsmälleen yhden alkion joukosta A.

Esimerkki 9.1.2 Laskutoimituksia on jokaisessa epätyhjässä joukossa:
a) *Vakiolaskutoimitus* liittää jokaiseen pariin yhden ja saman alkion $v \in A$, ts. $a \circ b := v$ kaikilla $a, b \in A$.
b) *Projektiot* $a \hookleftarrow b := a$ ja $a \hookrightarrow b := b$.

Esimerkki 9.1.3 Olkoon $A := \{1, 2, 3, 4\}$.
a) Määritellään joukossa A aluksi laskutoimitus *minimi* $\min$

$$\min(a, b) := \text{ pienempi luvuista } a \text{ ja } b.$$

Esimerkiksi $\min(4, 4) = 4$, $\min(4, 3) = 3$ ja $\min(2, 4) = 2$.
b) Edellisen avulla määritellään edelleen joukossa A:

$$a \downarrow b := \begin{cases} \min(a, b) - 1, & \text{jos } a \geq 2 \text{ ja } b \geq 2, \\ 1, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Silloin esimerkiksi $4 \downarrow 4 = 3$, $4 \downarrow 3 = 2$, $2 \downarrow 4 = 1$ ja $3 \downarrow 1 = 1$.

Esimerkki 9.1.4 Lukujen yhteenlasku ja kertolasku ovat laskutoimituksia kussakin joukoista $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$. Vähennyslaskua voidaan pitää laskutoimituksena muissa paitsi joukossa $\mathbb{N}$; miksi? Jakolasku ei tarkasti ottaen ole laskutoimitus missään näistä joukoista; joukoissa $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{Z}$ ei mitenkään, mutta kylläkin muissa, kun nolla on niistä poistettu; miksi?

Esimerkki 9.1.5 Mitkä seuraavista säännöistä ovat kahden muuttujan funktioita $A{\times}A \to A$, eli joukon A sisäisiä laskutoimituksia:

a) $A := \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2 + y^2$

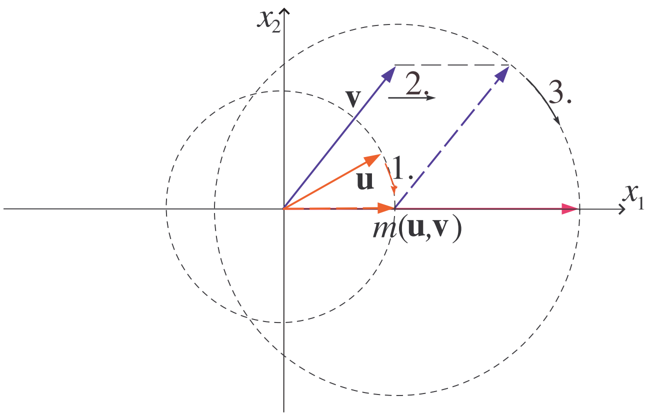
b) $A := \mathbb{R}^2$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} - 2\mathbf{y}$

c) $A := \mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}_+{\times}\mathbb{R}_+$, $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} + 2\mathbf{y}$

d) $A := \mathbb{R}^3_+$, $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} - 2\mathbf{y}$

e) $A := \mathbb{R}^2$, $l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ (pistetulo)

f) $A := \mathbb{R}^2$ ja $m(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ kuten Kuvassa 20.



Kuva 20: Esimerkin 9.1.5 f) operaatio graafisesti

Ratkaisu. a) on, b) on, c) on, d) ei ole, esimerkiksi

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}7\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\-2\\-9\end{pmatrix} \notin A$$

e) ei ole, koska tulokset ovat lukuja, eivät tason vektoreita; esimerkiksi

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2$$

f) on, kun ymmärretään sopivasti, mitenkä esimerkiksi?

Tehtävä 9.1.6 Esitä Esimerkin 9.1.5 f)-kohdan funktio m
a) sanallisessa muodossa,
b) symbolisessa muodossa.
Ratkaisu sivulla 144.

Laskutoimituksia joukossa $\mathbb{R}$? (linkki JavaSketchpad-animaatioihin)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/LaskutoimituksiaRssa.htm`

9.2 Skaalaus eli ulkoinen laskutoimitus

Lineaarisen struktuurin pohjana on (*vektoreiksi* sanottujen alkioiden muodostama) Abelin ryhmä $(V, \oplus)$ (ks. Algebra tai Liite A.1), jonka alkioita voidaan "skaalata" jonkin ulkoisen joukon alkioilla, *skalaareilla*.

Skalaarijoukkona on – syistä, jotka selviävät myöhemmin – rakenteeltaan riittävän rikas kunta (ks. Liite A.2), esimerkiksi $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathcal{K} = \mathbb{C}$.

Määritelmä 9.2.1 *Skaalausfunktioksi* (lyhyesti *skaalaukseksi*) tai *ulkoiseksi laskutoimitukseksi* sanotaan jokaista kuvausta $\odot : \mathcal{K} \times V \to V$. Jos $\alpha \in \mathcal{K}$ ja $\mathbf{v} \in V$, skaalausta ja sen tulosta merkitään jatkossa $\alpha \odot \mathbf{v} := \odot(\alpha, \mathbf{v})$.

Esimerkki 9.2.2 Pari $(\mathbb{R}, +)$ on Abelin ryhmä (vektorit) ja $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ on kunta (skalaarit). Silloin operaatioista

$$\text{a)}\quad \alpha \odot x := \alpha x \qquad\qquad \text{b)}\quad \alpha \odot x := -\alpha + x - 3$$
$$\text{c)}\quad \alpha \odot x := \frac{\alpha}{x-1} \qquad\qquad \text{d)}\quad \alpha \odot x := \begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix}$$

vain kohdat a) ja b) kelpaavat yllä olevan määritelmän mukaisiksi skaalausfunktioiksi.

Tehtävä 9.2.3 Miksi Esimerkin 9.2.2 kohdat c) ja d) eivät kelpaa skaalauksiksi?
Ratkaisu sivulla 144.

Tehtävä 9.2.4 Pari $(\mathbb{R}^2, +)$ on Abelin ryhmä (vektorit) ja $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ on kunta (skalaarit). Mitkä seuraavista operaatioista kelpaavat skaalausfunktioiksi:

$$\text{a)}\quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{b)}\quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \frac{\alpha x_1}{\alpha x_2}$$
$$\text{c)}\quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{d)}\quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \ln x_1 \\ \ln x_2 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu sivulla 144.

Skaalauksia joukossa $\mathbb{R}$? (linkki JavaSketchpad-animaatioihin)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/SkaalauksiaRssa.htm`

Kun kolmikolle $(V, \oplus, \odot)$ asetetaan eräitä lisävaatimuksia (aksioomat A5 – A8 Luvussa 9.3) saadaan esille *lineaarinen* struktuuri, *lineaariavaruus*.

Esimerkki 9.2.5 Jäljempänä nähdään, että Esimerkkien 9.2.2 ja 9.2.4 a)-kohtien skaalauksilla $\odot$ varustetut kolmikot $(\mathbb{R}, +, \odot)$ ja $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ ovat lineaariavaruuksia.

9.3 Lineaariavaruuden määritelmä

Määritelmä 9.3.1 Kolmikko $(V, \oplus, \odot)$ on *$\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus* eli *vektoriavaruus*, jos seuraavat neljä ehtoa (0) – (iii) ovat voimassa

(0) V on epätyhjä joukko ja $\mathcal{K}$ on kunta (jatkossa useimmissa tapauksissa $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathcal{K} = \mathbb{C}$).

(i) Joukossa V on määritelty *sisäinen laskutoimitus* ("yhteenlasku"), ts. kuvaus $\oplus : V \times V \to V$, joka liittää jokaiseen pariin $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V \times V$ tarkalleen yhden alkion $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} := \oplus(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V$.

(ii) Joukkoihin $\mathcal{K}$ ja V liittyy *skaalausfunktio* ("skalaarilla kertominen") ts. kuvaus $\odot : \mathcal{K} \times V \to V$, joka liittää jokaiseen pariin $(\alpha, \mathbf{u}) \in \mathcal{K} \times V$ täsmälleen yhden alkion $\alpha \odot \mathbf{u} := \odot(\alpha, \mathbf{u}) \in V$.

(iii) Sisäisellä laskutoimituksella ja skaalausfunktiolla (eli skaalauksella) on seuraavat ominaisuudet:

A1. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$ kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ (vaihdannaisuus).

A2. $(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w})$ kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ (liitännäisyys).

A3. On olemassa alkio $\mathbf{e} \in V$, jolle $\mathbf{u} \oplus \mathbf{e} = \mathbf{u}$ ja $\mathbf{e} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ kaikilla $\mathbf{u} \in V$ (yhteenlaskun neutraali- eli nolla-alkio).

A4. Jokaista $\mathbf{u} \in V$ vastaa $\ominus\mathbf{u} \in V$, jolle $\mathbf{u} \oplus (\ominus\mathbf{u}) = \mathbf{e}$ ja $(\ominus\mathbf{u}) \oplus \mathbf{u} = \mathbf{e}$ (vasta-alkio).

A5. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{v})$ kaikilla $\alpha \in \mathcal{K}$, kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

A6. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\beta \odot \mathbf{u})$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$, kaikilla $\mathbf{u} \in V$.

A7. $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha\beta) \odot \mathbf{u}$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$, kaikilla $\mathbf{u} \in V$.

A8. $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ kaikilla $\mathbf{u} \in V$.

Jos $(V, \oplus, \odot)$ on $\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus, joukkoa $\mathcal{K}$ sanotaan *skalaariavaruudeksi* tai *kerroinkunnaksi*. Jos $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, on $(V, \oplus, \odot)$ *reaali(kertoimi)nen lineaariavaruus*; jos $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, on $(V, \oplus, \odot)$ *kompleksi(kertoimi)nen lineaariavaruus*. Jatkossa puhutaan kolmikon sijasta usein lyhyesti lineaariavaruudesta V.

Nähdään helposti, että aksioomat eivät ole ristiriitaisia, sillä $V := \mathbb{R}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla ja kunnan $\mathcal{K} := \mathbb{R}$ skalaareilla kertomisella (kuten tavallinen kertolasku) toteuttaa Määritelmän 9.3.1 ehdot.

Tehtävä 9.3.2 Todista yksityiskohtaisesti, että $\mathbb{R}^2$ varustettuna tavanomaisilla laskutoimituksilla

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

on $\mathbb{R}$-kertoiminen lineaariavaruus. Ratkaisu sivulla 144.
Lineaarirakenne tasossa (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/LineaarirakenneTasossa.htm`

Tehtävä 9.3.3 Todista $\mathbb{R}^{m \times n}$ reaalikertoimiseksi lineaariavaruudeksi käyttäen Luvun 3 tuloksia.
Ratkaisu sivulla 145.

Tehtävä 9.3.4 Mitkä ehdoista A1 – A4 ovat voimassa seuraaville yhteenlaskuehdokkaille tasossa?

a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 - 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_1 + 2y_1 \\ 2x_2 + 2y_2 \end{pmatrix}$

Ratkaisu sivulla 145.

Tehtävä 9.3.5 Mitkä ehdoista A7 – A8 ovat voimassa seuraaville tason skaalausehdokkaille?

a) $\alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

c) $\alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (2-\alpha)x_1 \\ (2-\alpha)x_2 \end{pmatrix}$ d) $\alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2\alpha x_1 \\ 2\alpha x_2 \end{pmatrix}$

Ratkaisu sivulla 145.

Esimerkki 9.3.6 Olkoon X epätyhjä joukko ja

$$\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) := \{f \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ funktio }\}.$$

Määritellään funktioiden yhteenlasku $\oplus$ ja reaaliluvulla kertominen $\odot$ *pisteittäin* seuraavasti: jos $\alpha \in \mathbb{R}$ ja f, $g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, niin

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(x) &:= f(x) + g(x) \text{ kaikilla } x \in X \\ (\alpha{\odot}f)(x) &:= \alpha f(x) \text{ kaikilla } \alpha \in \mathcal{K}, x \in X.\end{aligned}$$

Osoitetaan, että $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ on reaalikertoiminen lineaariavaruus käymällä läpi Määritelmän 9.3.1 vaatimukset. Kohdat (0), (i) ja (ii) ovat selvästi kunnossa: $\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \neq \emptyset$ ja $\mathbb{R}$ on kunta. Jos $\alpha \in \mathbb{R}$ ja f, $g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, niin $f \oplus g$ ja $\alpha{\odot}f$ ovat täysin määrättyjä kuvauksia $X \to \mathbb{R}$.

(iii) Olkoot α, $\beta \in \mathbb{R}$ ja f, g ja $h \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ sekä $x \in X$.

A1 ja A2: Reaalilukujen yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen, joten

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(x) &= f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g \oplus f)(x) \\ ((f \oplus g) \oplus h)(x) &= f(x) + g(x) + h(x) = (f \oplus (g \oplus h))(x)\end{aligned}$$

eli

$$f \oplus g = g \oplus f \quad \text{ja} \quad (f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h).$$

A3: Nolla-alkioksi kelpaa nollafunktio $\hat{0}$, $\hat{0}(x) := 0$, sillä

$$(f \oplus \hat{0})(x) = f(x) + \hat{0}(x) = f(x).$$

A4: Alkion f vasta-alkioksi käy vastafunktio $\ominus f$, jolle $(\ominus f)(x) := -f(x)$; tällöin $f \oplus (\ominus f) = \hat{0}$, sillä

$$(f \oplus (\ominus f))(x) = f(x) + (-f(x)) = 0.$$

A5 ja A6.: Osittelulait ovat voimassa reaalilukujen yhteen– ja kertolaskulle, joten (vähän lyhentäen)

$$\begin{aligned}(\alpha{\odot}(f \oplus g))(x) &= \alpha f(x) + \alpha g(x) = ((\alpha{\odot}f) \oplus (\alpha{\odot}g))(x) \\ ((\alpha{+}\beta){\odot}f)(x) &= \alpha f(x) + \beta f(x) = ((\alpha{\odot}f) \oplus (\beta{\odot}f))(x)\end{aligned}$$

eli

$$\alpha{\odot}(f \oplus g) = (\alpha{\odot}f) \oplus (\alpha{\odot}g) \quad \text{ja} \quad (\alpha{+}\beta){\odot}f = (\alpha{\odot}f) \oplus (\beta{\odot}f).$$

A7: Reaalilukujen kertolasku on liitännäinen, joten

$$((\alpha\beta){\odot}f)(x) = \alpha\beta f(x) = (\alpha{\odot}(\beta{\odot}f))(x),$$

eli $(\alpha\beta){\odot}f = \alpha{\odot}(\beta{\odot}f)$.

A8: $1{\odot}f = f$, sillä $(1{\odot}f)(x) = 1f(x) = f(x)$.

Esimerkki 9.3.7 Seuraavat struktuurit on helpointa todistaa lineaariavaruuksiksi osoittamalla ne eräiden lineaariavaruuksien aliavaruuksiksi (Luku 10).

a) Korkeintaan astetta n olevien reaalisten polynomien joukko $\mathcal{P}_n$ varustettuna pisteittäisillä laskutoimituksilla on reaalikertoiminen lineaariavaruus.

b) Välillä $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ k *kertaa jatkuvasti derivoituvien reaalifunktioiden* joukko $\mathcal{C}^k(\Delta, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}_0$, varustettuna pisteittäisillä laskutoimituksilla on reaalikertoiminen lineaariavaruus ($\mathcal{C}^0(\Delta, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(\Delta, \mathbb{R}) :=$ jatkuvat funktiot).

Esimerkki 9.3.8 Välillä $[0, 2]$ jatkuvien, pisteen $(1, 1)$ kautta kulkevien funktioiden joukko varustettuna pisteittäisillä laskutoimituksilla *ei ole* lineaariavaruus. Nimittäin, kahden sellaisen funktion summa ei kulje pisteen $(1, 1)$ vaan pisteen $(1, 2)$ kautta.

Jatkossa käytämme symboleja $\oplus$ ja $\odot$ vain poikkeustapauksissa

9.4 Määritelmän seurauksia

Todistetaan tärkeimmät Määritelmän 9.3.1 seuraukset:

Lause 9.4.1 a) Lineaariavaruudessa on täsmälleen yksi nolla-alkio.

b) Kullakin lineaariavaruuden alkiolla yksi ja vain yksi vasta-alkio.

Todistus. Olkoon V lineaariavaruus.
a) Olkoot $\mathbf{0}$ ja $\mathbf{0}' \in V$ nolla-alkion vaatimukset täyttäviä alkioita. Silloin kaikilla $\mathbf{u} \in V$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \quad \text{ja} \quad \mathbf{u} + \mathbf{0}' = \mathbf{u}.$$

Valitsemalla alkioksi $\mathbf{u}$ vuorollaan $\mathbf{0}'$ ja $\mathbf{0}$ saadaan vaihdannaisuuden nojalla

$$\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}.$$

b) Oletetaan, että alkiot $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w} \in V$ kelpaavat alkion $\mathbf{u} \in V$ vasta-alkioiksi. Siis

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Liitännäisyyttä ja vaihdannaisuutta käyttäen saadaan

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Keksitkö miten todistuksesta selvittäisiin ilman vaihdannaisuuttakin? □

Koska vasta-alkio on yksikäsitteinen, voidaan määritellä vektorien *erotus*

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} := \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

Tämä mahdollistaa vektoriyhtälöiden ratkaisemisen:

Lause 9.4.2 Lineaariavaruuden V yhtälöllä $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ (samoin myös yhtälöllä $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$) on täsmälleen yksi ratkaisu, ja se on $\mathbf{v} - \mathbf{u}$.

Todistus. Alkio $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ toteuttaa yhtälön, sillä liitännäisyyden ja vaihdannaisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{u})) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{v} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Olkoon toisaalta $\mathbf{w} \in V$ yhtälön ratkaisu, siis $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v}$. Liitännäisyyden ja vaihdannaisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{w} &= ((-\mathbf{u}) + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = -\mathbf{u} + (\mathbf{u} + \mathbf{w}) \\ &= -\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{v} - \mathbf{u}. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 9.4.3 Jos yritetään ratkaista yhtälöä $2\mathbf{u} - 3\mathbf{x} = \mathbf{v}$ huomataan että se ei ratkea tähän mennessä esitetyillä laskusäännöillä.

Lause 9.4.4 Lineaariavaruudessa V on voimassa:

a) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ja $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ kaikilla $\alpha \in \mathcal{K}$, $\mathbf{u} \in V$.

b) Jos $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$, niin $\alpha = 0$ tai $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

c) $-\alpha\mathbf{u} = (-\alpha)\mathbf{u} = \alpha(-\mathbf{u})$ kaikilla $\alpha \in \mathcal{K}$, $\mathbf{u} \in V$.

d) $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ jos ja vain jos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{w} \in V$.

e) $\alpha\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ jos ja vain jos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ kaikilla $\alpha \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$.

Todistus. a) $0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$, joten Lauseen 9.4.2 mukaan

$$0\mathbf{u} = 0\mathbf{u} - 0\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + (\,-(0\mathbf{u})) = \mathbf{0}.$$

Vastaavalla tavalla $\alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}$, joten

$$\alpha\mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} - \alpha\mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} + (\,-(\alpha\mathbf{0})) = \mathbf{0}.$$

b) Oletetaan, että $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$, mutta $\alpha \neq 0$. Silloin

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = \left(\tfrac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right)\mathbf{u} = \tfrac{1}{\alpha}(\alpha\mathbf{u}) = \tfrac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

c), d) ja e) todistetaan harjoitustehtävinä. □

Tehtävä 9.4.5 Ratkaise nyt Esimerkissä 9.4.3 esitetty yhtälö, $2\mathbf{u} - 3\mathbf{x} = \mathbf{v}$.
Ratkaisu sivulla 145.

Tehtävä 9.4.6 Todista

a) $-(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = -\mathbf{u} - \mathbf{v}$

b) $\alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}$.

Ratkaisu sivulla 146.

Tehtävä 9.4.7 Ratkaise $\mathbf{x}$ lineaariavaruuden yhtälöstä

$$\mathbf{u} + 2(\mathbf{v} - \mathbf{u}) - (\mathbf{u} + 2\mathbf{x}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Ratkaisu sivulla 146.

Vihje: Ratkaise aluksi esimerkiksi $-(\mathbf{u} + 2\mathbf{x})$, ja poista sulut. Sievennä oikeaa puolta, ratkaise $-2\mathbf{x}$ ja sitten $\mathbf{x}$.

Pähkinä 9.4.8 Mitähän tason vektorialgebran geometrisiä tms. ominaisuuksia aksioomien taustalla on, kuinkahan aksioomat lienee keksitty?
Aksioomien merkitys tasossa (linkki JavaSketchpad-animaatioihin)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/Aksiomat.htm`

9.5 Omituisempia esimerkkejä

Tarkastellaan tasovektorien joukossa erilaisten operaattorien soveltuvuutta lineaariavaruuden laskutoimituksiksi.

Esimerkki 9.5.1 Kaava

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ x_2 + 2y_2 \end{pmatrix}$$

määrittelee laskutoimituksen joukossa $\mathbb{R}^2$. Se ei ole vaihdannainen eikä liitännäinen. Löytyykö neutraalialkio, vasta-alkiot? *(Ei-vaihdannaisuus aiheuttaa omituisen tilanteen;* $(0\ 0)^T$ *kelpaisi "oikeanpuoleiseksi" nollaksi!)*

Esimerkki 9.5.2 Olkoon

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

ja $+$ tavallinen tason vektorien yhteenlasku sekä $\cdot$ tavallinen vektorin kertominen skalaarilla. Silloin $+$ ei ole yhteenlasku joukossa V, sillä esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin V.$$

Myöskään skalaarilla kertominen ei pysy joukossa V (todenna itse!).

Tehtävä 9.5.3 Osoita, että Esimerkin 9.5.2 joukosta saadaan kuitenkin lineaariavaruus $(V, \oplus, \odot)$, kun määritellään operaatiot

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \odot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu sivulla 147.

Tehtävä 9.5.4 Selvitä, miksi $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ *ei ole* lineaariavaruus, kun

a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha x_1 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)^2 \\ (x_2 + y_2)^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix},$

d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}.$

Ratkaisu sivulla 147.

Tehtävä 9.5.5 Selvitä tarkasti, mitkä laskusäännöistä (iii) A1 – A8 eivät ole voimassa Tehtävän 9.5.4 operaatioille?
Ratkaisu sivulla 147.

Esimerkki 9.5.6 Osoita, että $(U, \oplus, \odot)$ on reaalikertoiminen lineaariavaruus, kun

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + x_2 = 2 \right\},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 - 1 \\ x_2 + y_2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 + 1 - \alpha \\ \alpha x_2 + 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Ennen varsinaisia perusteluja voi katsoa visualisointia
Operaatiot suoralla U (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/OperSuoralla.htm`

Ratkaisu (lyhyesti). Kohta (0): $U \neq \emptyset$, sillä $(1\ 1)^T \in U$, ja $\mathbb{R}$ on kunta.
Kohdat (i), (ii): Summa ja tulo ovat selvästi tasovektoreita. Se, että ne kuuluvat joukkoon U, todetaan laskemalla; esimerkiksi $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \in U$, sillä

$$(x_1 + y_1 - 1) + (x_2 + y_2 - 1) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - 2 = 2,$$

missä tietenkin on huomioitu, että $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 2$. Todista itse vastaavaan tapaan, että $\alpha \odot \mathbf{x} \in U$.

(iii) Ehdot A1 ja A2 todistetaan suoralla laskulla.

A3. Nolla-alkioehdokas saadaan yhtälön $\mathbf{a} \oplus \mathbf{0}_U = \mathbf{a}$ ratkaisuna $\mathbf{0}_U = (1\ 1)^T$, joka selvästi on joukossa U. Koska se *ei riipu vektorista* $\mathbf{a}$ ja koska $\mathbf{x} \oplus \mathbf{0}_U = \mathbf{x}$, samoin kuin $\mathbf{0}_U \oplus \mathbf{x} = \mathbf{x}$, kaikilla $\mathbf{x} \in U$, se kelpaa nollavektoriksi.

A4. Alkion $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T \in U$ vastavektoriehdokas $\ominus \mathbf{x} = (u_1\ u_2)^T$ saadaan yhtälöstä $\mathbf{x} \oplus (\ominus \mathbf{x}) = \mathbf{0}_U$:

$$\ominus \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 - x_1 \\ 2 - x_2 \end{pmatrix} \in U.$$

Se toteuttaa vastavektorin molemmat ehdot (todenna).

A5-8. Suoria laskuja, esimerkiksi A5 (lyhentäen) ja A8:

$$\alpha \odot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 + 1 - 2\alpha \\ \alpha x_2 + \alpha y_2 + 1 - 2\alpha \end{pmatrix} = \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \alpha \odot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$1 \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 - 1 \\ x_2 + 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 9.5.7 Piirrä x_1x_2-tasoon Esimerkin 9.5.6 joukko U, sen origo sekä pisteet $\mathbf{x} := (-1\ 3)^T$ ja $\ominus\mathbf{x}$.
Ratkaisu sivulla 147.

Tehtävä 9.5.8 Onko myös $\mathbb{R}^2$ varustettuna Esimerkin 9.5.6 laskutoimituksilla lineaariavaruus?
Ratkaisu sivulla 147.
Operaatiot tasossa (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/OperTasossa.htm`

Tehtävä 9.5.9 Ratkaise Esimerkin 9.5.6 tilanteessa yhtälöt

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\quad 2 \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus 3 \odot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu sivulla 147.

Esimerkki 9.5.10 Osoitteessa
Operaatiot reaalilukuvälillä (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/OperValilla.htm`
on esitetty dynaamisena kuviona erästä rajoitetulla reaalilukuvälillä määriteltyä operaatiota. Tutki näyttäisikö kyseessä todella olevan välin sisäinen laskutoimitus.

9.6 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 9.1.6 : a) Sanallisesti: tulos on x_1-akselin suuntainen vektori, jonka pituus on $\mathbf{u}$:n ja $\mathbf{v}$:n pituuksien summa. b) Symbolimuodossa esimerkiksi näin:

$$m(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 9.2.3 : c) Tulos ei ole määritelty vektorilla $x = 1$.
d) Tulos ei ole reaaliluku vaan tason vektori.

Tehtävä 9.2.4 : Vain kohdat a) ja c) ovat kelvollisia.
b) Tulos ei ole määritelty esimerkiksi kun $x_2 = 0$ (ei myöskään, kun $\alpha = 0$).
d) Tulos ei ole määritelty esimerkiksi arvolla $x_1 = 0$.

Tehtävä 9.3.2 : Käydään läpi lineaariavaruuden aksioomat.

(0) $\mathbb{R}^2 \neq \emptyset$ ja $\mathbb{R}$ on kunta.
(i) Kullakin parilla $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} = (y_1\ y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ summa on yksikäsitteinen tason vektori

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Kullakin parilla $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ tulo on yksikäsitteinen tason vektori

$$\alpha\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(iii) Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sekä $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T$, $\mathbf{y} = (y_1\ y_2)^T$ ja $\mathbf{z} = (z_1\ z_2)^T \in \mathbb{R}^2$.

A1. Vaihdannaisuus: $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$.

A2. Todetaan liitännäisyysehdon eri puoliskot samoiksi:
$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 \\ x_2+y_2+z_2 \end{pmatrix}$
$\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ y_2+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 \\ x_2+y_2+z_2 \end{pmatrix}$

A3. Nollavektoriksi kelpaa $\mathbf{0} = (0\ 0)^T$, sillä
$\mathbf{x}+\mathbf{0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}$,
vaihdannaisuuden mukaan myös $\mathbf{0}+\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

A4. Alkion $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T$ vasta-alkioksi käy $-\mathbf{x} = (-x_1\ \ -x_2)^T$, sillä
$\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$,
vaihdannaisuuden mukaan myös $-\mathbf{x}+\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A5. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1+y_1) \\ \alpha(x_2+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1 \\ \alpha x_2+\alpha y_2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$

A6. $(\alpha+\beta)\mathbf{x} = (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)x_1 \\ (\alpha+\beta)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta x_1 \\ \alpha x_1+\beta x_2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$

A7. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = (\alpha\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x_1 \\ (\alpha\beta)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta x_1) \\ \alpha(\beta x_2) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix}$
$= \alpha\left(\beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha(\beta\mathbf{x})$

A8. $1\mathbf{x} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 \\ 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}.$

Tehtävä 9.3.3 : (0), (i) ja (ii) selvästi kunnossa, tulokset ovat yksikäsitteisesti määrättyjä $\mathbb{R}^{m\times n}$:n matriiseja. Kohtaan (iii) käytä Lausetta 3.3.3.

Tehtävä 9.3.4 : Operaatiot tuottavat täysin määrätyn tasovektorin, joten kohta (i) on kaikille kunnossa.
a) Ehdot A1 ja A2 ovat voimassa, A3 ja A4 eivät.
b) Ehdot A1 – A4 voimassa (laskettava läpi).
c) ja d) A1 voimassa, mutta A2, A3 ja A4 eivät.
d) A1 voimassa, mutta A2, A3 ja A4 eivät.

Tehtävä 9.3.5 : Operaatiot täyttävät perusehdon (ii).
a) Ehto A7 on voimassa, A8 ei.
b) Molemmat ovat voimassa.
c) A8 on voimassa, A7 ei ole voimassa: vastaesimerkki valitsemalla vaikkapa $\alpha = \beta = x_2 = 0$ ja $x_1 = 1$.
d) Kumpikaan ei ole voimassa: valitse esimerkiksi $\alpha = \beta = x_1 = x_2 = 1$.

Tehtävä 9.4.5 : Tehdään ratkaisu vaiheittain, yksityiskohtaisin perusteluin:

	$2\mathbf{u}-3\mathbf{x}$	$=$	$\mathbf{v}$	
$\Leftrightarrow$	$2\mathbf{u}+(-3\mathbf{x})$	$=$	$\mathbf{v}$	$\mid$ erotus $\mid -2\mathbf{u}+$
$\Leftrightarrow$	$(-2\mathbf{u})+(2\mathbf{u}+(-3\mathbf{x}))$	$=$	$(-2\mathbf{u})+\mathbf{v}$	$\mid$ Lause 9.4.4 d)
$\Leftrightarrow$	$((-2\mathbf{u})+2\mathbf{u})+(-3\mathbf{x})$	$=$	$(-2\mathbf{u})+\mathbf{v}$	$\mid$ A2
$\Leftrightarrow$	$\mathbf{0}+(-3)\mathbf{x}$	$=$	$(-2)\mathbf{u}+\mathbf{v}$	$\mid$ A4, Lause 9.4.4 c)
$\Leftrightarrow$	$(-\frac{1}{3})((-3)\mathbf{x})$	$=$	$(-\frac{1}{3})((-2)\mathbf{u}+\mathbf{v})$	$\mid$ A3, Lause 9.4.4 e)
$\Leftrightarrow$	$((-\frac{1}{3})\cdot(-3))\mathbf{x}$	$=$	$(-\frac{1}{3})((-2)\mathbf{u})+(-\frac{1}{3})\mathbf{v}$	$\mid$ A7, A5
$\Leftrightarrow$	$1\cdot\mathbf{x}$	$=$	$((-\frac{1}{3})(-2))\mathbf{u}+(-\frac{1}{3}\mathbf{v})$	$\mid$ $\mathbb{R}$, Lause 9.4.4 c), A7
$\Leftrightarrow$	$\mathbf{x}$	$=$	$\frac{2}{3}\mathbf{u}-\frac{1}{3}\mathbf{v}$	$\mid$ A8, $\mathbb{R}$, erotus

Tehtävä 9.4.6 : a) Vasta-alkion määritelmän avulla:

$$\begin{array}{rcll}(\mathbf{u}+\mathbf{v})+(-\mathbf{u}-\mathbf{v}) &=& (\mathbf{v}+\mathbf{u})+(-\mathbf{u})+(-\mathbf{v}) & \mid \text{A1, erotus}\\ &=& ((\mathbf{v}+\mathbf{u})+(-\mathbf{u}))+(-\mathbf{v}) & \mid \text{A2}\\ &=& (\mathbf{v}+(\mathbf{u}+(-\mathbf{u})))+(-\mathbf{v}) & \mid \text{A2}\\ &=& (\mathbf{v}+\mathbf{0})+(-\mathbf{v}) & \mid \text{A4}\\ &=& \mathbf{v}+(-\mathbf{v}) & \mid \text{A3}\\ &=& \mathbf{0} & \mid \text{A4}\end{array}$$

Toinen tapa olisi Lauseen 9.4.4 kohdan c) avulla (tarvitaan myös A5 ja A8 sekä erotuksen määritelmä):

$$\begin{array}{rcl}-(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &=& (-1)(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(-1)\mathbf{u}+(-1)\mathbf{v}=1(-\mathbf{u})+1(-\mathbf{v})\\ &=& -\mathbf{u}+(-\mathbf{v})=-\mathbf{u}-\mathbf{v}.\end{array}$$

b) Käyttäen erotuksen määritelmää, ehtoa A5 ja Lauseen 9.4.4 kohtaa c):

$$\alpha(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\alpha(\mathbf{u}+(-\mathbf{v}))=\alpha\mathbf{u}+\alpha(-\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}-\alpha\mathbf{v}.$$

Tehtävä 9.4.7 : Vihjeen mukaan (pistä perustelut oikealle):

$$\begin{array}{lrcll} & \mathbf{u}+2(\mathbf{v}-\mathbf{u})-(\mathbf{u}+2\mathbf{x}) &=& \mathbf{u}-\mathbf{v} & \mid\\ \Leftrightarrow & \mathbf{u}+2\mathbf{v}-2\mathbf{u}+(-(\mathbf{u}+2\mathbf{x})) &=& \mathbf{u}-\mathbf{v} & \mid\\ \Leftrightarrow & -(\mathbf{u}+2\mathbf{x}) &=& \mathbf{u}-\mathbf{v}-(\mathbf{u}+2\mathbf{v}-2\mathbf{u}) & \mid\\ \Leftrightarrow & (-1)(\mathbf{u}+2\mathbf{x}) &=& \mathbf{u}-\mathbf{v}-((1-2)\mathbf{u}+2\mathbf{v}) & \mid\\ \Leftrightarrow & (-1)(\mathbf{u}+2\mathbf{x}) &=& \mathbf{u}-(-\mathbf{u})-\mathbf{v}-2\mathbf{v} & \mid\\ \Leftrightarrow & (-1)(\mathbf{u}+2\mathbf{x}) &=& 2\mathbf{u}-3\mathbf{v} & \mid\\ \Leftrightarrow & 1\cdot(\mathbf{u}+2\mathbf{x}) &=& (-1)(2\mathbf{u}-3\mathbf{v}) & \mid\\ \Leftrightarrow & \mathbf{u}+2\mathbf{x} &=& -2\mathbf{u}+3\mathbf{v} & \mid\\ \Leftrightarrow & 2\mathbf{x} &=& -3\mathbf{u}+3\mathbf{v} & \mid\\ \Leftrightarrow & 1\mathbf{x} &=& \frac{1}{2}(-3\mathbf{u}+3\mathbf{v}) & \mid\\ \Leftrightarrow & \mathbf{x} &=& -\frac{3}{2}\mathbf{u}+\frac{3}{2}\mathbf{v} & \mid\end{array}$$

Toinen tapa, jossa käytetään yhteenlaskun liitännäisyyttä ja vaihdannaisuutta melko vapaasti. Sievennetään aluksi vasen puoli käyttäen Tehtävän 9.4.6 tuloksia (kirjoita perustelut taas näkyviin) ja ratkaistaan:

$$\begin{array}{lrcll} & \mathbf{u}+2(\mathbf{v}-\mathbf{u})-(\mathbf{u}+2\mathbf{x}) &=& \mathbf{u}+2\mathbf{v}-2\mathbf{u}-\mathbf{u}-2\mathbf{x} & \mid\\ \Leftrightarrow & &=& \mathbf{u}-\mathbf{u}+2\mathbf{v}-2\mathbf{u}-2\mathbf{x} & \mid\\ \Leftrightarrow & &=& 2\mathbf{v}-2\mathbf{u}-2\mathbf{x} & \mid\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} & 2\mathbf{v}-2\mathbf{u}-2\mathbf{x} &=& \mathbf{u}-\mathbf{v} & \mid\\ \Leftrightarrow & -2\mathbf{x} &=& -(2\mathbf{v}-2\mathbf{u})+\mathbf{u}-\mathbf{v} & \mid\\ \Leftrightarrow & -2\mathbf{x} &=& -2\mathbf{v}+2\mathbf{u}+\mathbf{u}-\mathbf{v} & \mid\\ \Leftrightarrow & (-2)\mathbf{x} &=& 3\mathbf{u}-3\mathbf{v} & \mid\\ \Leftrightarrow & 1\mathbf{x} &=& (-\frac{1}{2})(3\mathbf{u}-3\mathbf{v}) & \mid\\ \Leftrightarrow & \mathbf{x} &=& -\frac{3}{2}\mathbf{u}+\frac{3}{2}\mathbf{v} & \mid\end{array}$$

Tehtävä 9.5.3 : Kuten Tehtävä 9.3.2, paitsi toinen koordinaatti on aina 1. Nolla-alkio on $(0\ 1)^T$, vasta-alkio $\ominus(x\ 1)^T = (-x\ 1)^T$.

Tehtävä 9.5.4 : a) A1 ei ole voimassa, esimerkiksi

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

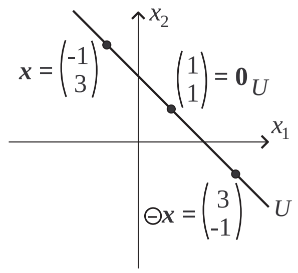
b) A8 ei ole voimassa, esimerkiksi

$$1 \odot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

c) A6 ei voimassa, valitse esimerkiksi $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $x_1 = 1$ ja $x_2 = 0$.
d) Kohta (i) ei ole voimassa, koska tulokset eivät ole tason vektoreita.

Tehtävä 9.5.5 : a) Voimassa eivät ole A1, A2, A3, A4 eikä A6.
b) Voimassa eivät ole A7 eikä A8.
c) Voimassa eivät ole A2, A3, A4, A5 eikä A6.
d) Kohdat (i) ja (ii) eivät ole voimassa, joten operaatiot eivät ole kelvollisia, ja monet kohdat A1-A8 eivät ole edes mielekkäitä testata.

Tehtävä 9.5.7 : Kuva



Tehtävä 9.5.8 : Kyllä on, todistus samalla tavoin kun Esimerkissä 9.5.6.

Tehtävä 9.5.9 : Kohdassa a) eliminoidaan aluksi vaikkapa $(2\ 0)^T$ vasta-alkiollaan:

$$\begin{aligned}
& & \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbf{x} &= \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} & &\mid\ \left(\ominus\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)\oplus \\
&\Leftrightarrow & \left(\ominus\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) \oplus \mathbf{x} &= \ominus\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} & &\mid\ \text{A2} \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \oplus \mathbf{x} &= \begin{pmatrix}2-2\\2-0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} & &\mid\ \text{A4} \\
&\Leftrightarrow & \mathbf{x} &= \begin{pmatrix}0+4-1\\2-2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} & &\mid\ \text{A3}
\end{aligned}$$

Kohdassa b) ratkaistaan aluksi vaikkapa $3\odot\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{rrcll}
 & \left(2\odot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right)\oplus(3\odot\mathbf{x}) & = & \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} & \mid\ \ominus\left(2\odot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right)\oplus \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\oplus(3\odot\mathbf{x}) & = & \ominus\left(2\odot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right)\oplus\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} & \mid\ \text{A2, A4} \\
\Leftrightarrow & 3\odot\mathbf{x} & = & \left((-2)\odot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right)\oplus\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} & \mid\ \text{Lause 9.4.4 c)}
\end{array}$$

Siten operaatioiden määrittelyjen mukaan

$$3\odot\mathbf{x}=\begin{pmatrix}(-2)\cdot 3+1-(-2)\\(-2)(-1)+1-(-2)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+0-1\\5+2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$$

Jatketaan:

$$\begin{array}{rrcll}
 & 3\odot\mathbf{x} & = & \left((-2)\odot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right)\oplus\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} & \\
\Leftrightarrow & 3\odot\mathbf{x} & = & \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix} & \mid\ \tfrac{1}{3}\odot \\
\Leftrightarrow & \tfrac{1}{3}\odot(3\odot\mathbf{x}) & = & \tfrac{1}{3}\odot\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix} & \mid\ \text{Lause 9.4.4 e)} \\
\Leftrightarrow & \left(\tfrac{1}{3}\cdot 3\right)\odot\mathbf{x} & = & \begin{pmatrix}-\frac{4}{3}+1-\frac{1}{3}\\2+1-\frac{1}{3}\end{pmatrix} & \mid\ \text{A7, }\odot\text{:n määrittely} \\
\Leftrightarrow & \mathbf{x}=1\odot\mathbf{x} & = & \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{8}{3}\end{pmatrix} & \mid\ \text{A8}
\end{array}$$

10 ALIAVARUUDET

10.1 Aliavaruuden määrittely

Usein tarkastellaan jonkin lineaariavaruuden V osajoukkoa, jossa käytetään samoja laskutoimituksia kuin avaruudessa V. Jos $W \subseteq V$ on tällainen joukko, niin se on itsekin lineaariavaruus, mikäli laskutoimituksien tulokset pysyvät joukossa W, ts. mikäli se on *suljettu* sisäisen ja ulkoisen laskutoimituksen suhteen.

Määritelmä 10.1.1 Joukko W on lineaariavaruuden V *(lineaari)aliavaruus* (*subspace*), jos

(0) W on epätyhjä ja $W \subseteq V$,

(i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ aina, kun $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$,

(ii) $\alpha\mathbf{u} \in W$ aina, kun $\alpha \in \mathcal{K}$, $\mathbf{u} \in W$.

Lause 10.1.2 Olkoon W lineaariavaruuden V aliavaruus. Silloin W (varustettuna samoilla operaatioilla) on lineaariavaruus.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lineaariavaruudella on aina nk. *triviaalit* aliavaruudet $\{\mathbf{0}\}$ ja se itse. Muita aliavaruuksia sanotaan *aidoiksi aliavaruuksiksi* (*proper subspace*). Mikä tahansa lineaariavaruuden osajoukko ei ole aliavaruus.

Tason aliavaruudet (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/TasonAliavaruudet.htm`

Esimerkki 10.1.3 Osoitetaan, että joukko

$$W := \left\{ (x_1\ x_2\ x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \right\}.$$

muodostaa reaalisen lineaariavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuden.

(0) Määrittelynsä mukaan $W \subseteq \mathbb{R}^3$ eikä ole tyhjä, ja
(i), (ii) Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in W$ mielivaltaiset. Ottaen huomioon joukon W määrittelevä ehto saadaan näille suorat esitykset $\mathbf{x} = (a\ a\ b)^T$ ja $\mathbf{y} = (c\ c\ d)^T$, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{x}+\mathbf{y} &= (a+c\ \ a+c\ \ b+d)^T \in W, \\ \alpha\mathbf{x} &= (\alpha a\ \ \alpha a\ \ \alpha b)^T \in W. \end{aligned}$$

Esimerkki 10.1.4 Olkoon
$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$
Silloin W on epätyhjä, $W \subseteq \mathbb{R}^2$, mutta W ei ole avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus. Kumpikaan aliavaruuden Määritelmän 10.1.1 ehdoista (i) ja (ii) ei ole voimassa (vrt. Esimerkki 9.5.2), esimerkiksi $(2\ 1)^T \in W$, mutta
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W, \qquad 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \notin W.$$

Esimerkki 10.1.5 Tehtävässä 9.5.8 on osoitettu, että $\mathbb{R}^2$ varustettuna Esimerkin 9.5.6 laskutoimituksilla on lineaariavaruus. Osoita sen perusteella, että Esimerkin 9.5.6 suora
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + x_2 = 2 \right\}.$$
on lineaariavaruus.

Opastus. Osoita U Tehtävässä 9.5.8 käsitellyn lineaariavaruuden aliavaruudeksi.

Suora U aliavaruutena (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/AliavaruusSuoraU.htm`

Esimerkki 10.1.6 Onko tyyppiä
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
olevien matriisien joukko avaruuden $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$ aliavaruus?

Ratkaisu. (0) Tarkasteltava joukko
$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
on selvästi epätyhjä ja sisältyy joukkoon $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
(i) Kahden tällaisen alkion summa
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ -e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ -b-e & c+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ -(b+e) & c+f \end{pmatrix} \in \mathcal{A}.$$
(ii) Samoin jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$ tulo
$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ -(\alpha b) & \alpha c \end{pmatrix} \in \mathcal{A}.$$
Siispä $\mathcal{A}$ on aliavaruus.

Esimerkki 10.1.7 Lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

ratkaisujoukko

$$U := \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

on lineaariavaruuden $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ aliavaruus, sillä:
(0): Selvästi U on epätyhjä ja $U \subseteq \mathbb{R}^3$
(i), (ii): kahden ratkaisun summa on ratkaisu, samoin ratkaisu kerrottuna skalaarilla (todenna!).

Tehtävä 10.1.8 Onko yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{cases}$$

ratkaisujoukko lineaariavaruuden $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ aliavaruus?
Ratkaisu sivulla 159.

10.2 Polynomi- ja funktioavaruuksia

Esimerkkinä 9.3.6 osoitettiin reaaliarvoisia funktioita koskeva perustulos: funktiojoukko

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ funktio } \}$$

varustettuna pisteittäisillä summa- ja skaalausoperaatioilla on reaalikertoiminen lineaariavaruus.

Esimerkki 10.2.1 Korkeintaan astetta n olevien reaalisten polynomien joukko

$$\mathcal{P}_n = \{ a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ vakioita} \}$$

(vrt. Esimerkki 9.3.7) on lineaariavaruuden

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funktio } \}$$

aliavaruus, sillä

(0) $\mathcal{P}_n \neq \emptyset$, $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(i) Kahden astetta $\leq n$ olevan polynomin summa on polynomi astetta $\leq n$.

(ii) Astetta $\leq n$ oleva polynomi kerrottuna vakiolla on astetta $\leq n$.

Tehtävä 10.2.2 Mitkä seuraavista ovat lineaariavaruuden $(\mathcal{P}_2, +, \cdot)$ aliavaruuksia?

a) $\mathcal{A} := \{a_0 + a_2x^2 \mid a_0, a_2 \in \mathbb{R}\}$

b) $\mathcal{B} := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 > 0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

c) $\mathcal{C} := \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p\text{:llä on tasan 2 eri nollakohtaa}\}$

d) $\mathcal{D} := \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p(0) = 0\}$

e) $\mathcal{E} := \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p(0) = 3\}$

f) $\mathcal{F} := \{p \in \mathcal{P} \mid p(0) = 0\}$.

Ratkaisu sivulla 159.

Esimerkki 10.2.3 Välillä $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ k kertaa jatkuvasti derivoituvien reaalifunktioiden joukko $\mathcal{C}^k(\Delta, \mathbb{R})$ on reaalisen lineaariavaruuden $\mathcal{F}(\Delta, \mathbb{R})$ aliavaruus jokaisella $k \in \mathbb{N}_0$. Nimittäin, k kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden summa ja tulo vakion kanssa ovat k kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita.

Esimerkki 10.2.4 Differentiaaliyhtälöiden kurssilla osoitettaneen mm. että joukko

$$\{\, f \in \mathcal{C}^2(\Delta, \mathbb{R}) \mid f'' + f = 0 \,\}$$

on lineaariavaruuden $\mathcal{C}^2(\Delta, \mathbb{R})$ aliavaruus.

Huomautus 10.2.5 Olkoon V lineaariavaruus ja $W_1, W_2 \subseteq V$ sen aliavaruuksia. Joukko-opillinen yhdiste $W_1 \cup W_2$ ei välttämättä ole aliavaruus (eikä lainkaan lineaariavaruus), sillä eri aliavaruuksista otettujen vektorien summan ei tarvitse pysyä yhdisteessä. Aliavaruuksien leikkaus $W_1 \cap W_2$ sen sijaan on aina aliavaruus. Ominaisuudet perusteltaneen harjoitustehtävissä.

10.3 Aliavaruuksien summa

Eräs tärkeä yleispätevä tapa muodostaa uusia aliavaruuksia on yhdistää aliavaruuksia algebrallisesti.

Määritelmä 10.3.1 Olkoot W_1 ja W_2 lineaariavaruuden V aliavaruuksia. Joukkoa

$$W_1 + W_2 := \{\, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2 \,\}$$

sanotaan aliavaruuksien *summaksi* (*sum of subspaces*).

Lause 10.3.2 Lineaariavaruuden aliavaruuksien summa on sen aliavaruus, ja se sisältää molemmat summan osapuolet.

Todistus. Olkoon V lineaariavaruus ja W_1 ja W_2 sen aliavaruuksia.
(0) $\emptyset \neq W_1 + W_2 \subseteq V$, sillä $\mathbf{0} \in W_1 + W_2$ ja V on lineaariavaruus.
(i) ja (ii): Olkoot $\alpha \in \mathcal{K}$ ja $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}' \in W_1 + W_2$. Summan määrittelyn mukaan on olemassa $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_1' \in W_1$ ja $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_2' \in W_2$, joille

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad \text{ja} \quad \mathbf{w}' = \mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_2'.$$

Koska W_1 ja W_2 ovat lineaariavaruuksia, on

$$\begin{aligned} \mathbf{w} + \mathbf{w}' &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_2') \\ &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1') + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2') \in W_1 + W_2, \\ \alpha\mathbf{w} &= \alpha\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2 \in W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Yllä tarvittiin myös lineaariavaruuden aksioomia, mitä?
Toinen väite seuraa valitsemalla toisesta joukosta yhteenlaskettavaksi nolla; siis esimerkiksi $W_1 = W_1 + \{\mathbf{0}\} \subseteq W_1 + W_2$. □

Esimerkki 10.3.3 Olkoon V $\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus. Jos $\mathbf{u} \in V$ pidetään kiinteänä, niin joukko

$$W_{\mathbf{u}} := \{s\mathbf{u} \mid s \in \mathcal{K}\}$$

on avaruuden V aliavaruus. Jos yleisemmin $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$, joukko

$$W_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k} = \{s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \cdots + s_k\mathbf{u}_k \mid s_i \in \mathcal{K}\}$$

on myös avaruuden V aliavaruus (todista!). Tällaisten aliavaruuksien summille pätee:

1) Kun $\alpha \in \mathcal{K}$ on kiinteä

$$W_{\mathbf{u}}+W_{\alpha\mathbf{u}} = \{s\mathbf{u}+t\alpha\mathbf{u} \mid s,t \in \mathcal{K}\} = \{(s+t\alpha)\mathbf{u} \mid s,t \in \mathcal{K}\} = \{s'\mathbf{u} \mid s' \in \mathcal{K}\} = W_{\mathbf{u}}.$$

2) Jos $\mathbf{u}_1 \not\parallel \mathbf{u}_2$ niin summa

$$W_{\mathbf{u}_1} + W_{\mathbf{u}_2} = \{s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 \mid s_1, s_2 \in \mathcal{K}\} \subseteq V$$

on luonteeltaan kaksiulotteinen ”taso” (tarkemmin Luvussa 12.4).

Esimerkki 10.3.4 Polynomiavaruuksille

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 &= \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} + \{a' + b'x + c'x^2 \mid a', b', c' \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a + a' + (b + b')x + c'x^2 \mid a, a', b, b', c' \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a'' + b''x + c''x^2 \mid a'', b'', c'' \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{P}_2 \end{aligned}$$

Yleisesti: $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \ldots$ on nouseva joukkojono, $\mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{P}$ kaikille k ja $\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{\max(m,n)}$.

10.4 Vektorijoukon virittämä aliavaruus

Minkä tahansa lineaariavaruuden V vektoreista voidaan muodostaa skaalauksen ja yhteenlaskun avulla äärellisiä summia

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k, \quad \alpha_i \in \mathcal{K},\ \mathbf{u}_i \in V,\ k \in \mathbb{N},$$

joita sanomme *lineaarikombinaatioiksi*.

Lineaariavaruudelle saadaan helposti aliavaruuksia vektorijoukkojen lineaarikombinaatioiden avulla (vrt. aliavaruuksien summa edellä, Luku 10.3).

Lause 10.4.1 Olkoon V lineaariavaruus ja $U \subseteq V$ sen epätyhjä osajoukko. Määritellään joukolle U:

$$[U] := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\mathbf{u}_k \;\middle|\; \alpha_k \in \mathcal{K}, \mathbf{u}_k \in U,\ n = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

a) Silloin $[U]$ on avaruuden V aliavaruus.
b) Jos $U \subseteq W \subseteq V$ ja W on aliavaruus, niin $[U] \subseteq W$.

Todistus. a) (0) Selvästi $\emptyset \neq U \subseteq [U] \subseteq V$. Olkoot $\gamma \in \mathcal{K}$ ja $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [U]$, jolloin niillä on esitykset joukon U alkioiden lineaarikombinaatioina:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{v} &= \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_l\mathbf{v}_l. \end{aligned}$$

(i) Silloin $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k + \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_l\mathbf{v}_l \in [U]$,

sillä $\alpha_i, \beta_j \in \mathcal{K}$ ja $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in U$ ja siten $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ on U:n alkioiden lineaarikombinaatio (aksioomat?).
(ii) Samoin (huomaa A5 ja A7!) $\gamma\mathbf{u} = (\gamma\alpha_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\gamma\alpha_k)\mathbf{u}_k \in [U]$.

Määritelmän mukaan $[U]$ on aliavaruus.

b) Toinen väite, joka sanoo, että $[U]$ on *suppein* joukon U sisältävistä aliavaruuksista, on Tehtävänä 10.4.3. □

Määritelmä 10.4.2 Lauseessa 10.4.1 esiintyvää aliavaruutta $[U]$ sanotaan vektorijoukon U *virittämäksi aliavaruudeksi* (*span*).

Tehtävä 10.4.3 Todista Lauseen 10.4.1 kohta b), eli että jos myös $W \subseteq V$ on joukon U sisältävä aliavaruus, niin $[U] \subseteq W$.
Ratkaisu sivulla 159.

Kun U on esitetty luettelona, viritysjoukosta jätetään joukon sulut usein pois, esimerkiksi $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ tarkoittaa joukkoa $[\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}]$.

Esimerkki 10.4.4 Olkoon V $\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus. Silloin viritettyä joukkoa (vrt. Esimerkki 10.3.3)

a) $[\mathbf{u}] = \{\alpha\mathbf{u} \mid \alpha \in \mathcal{K}\} = W_{\mathbf{u}}$ sanotaan *suoraksi*, jos $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

b) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \{\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = W_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ sanotaan *tasoksi*, jos $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$.

Äärellisille joukoille U on $[U]$ esitettävissä kiinteänpituisina lineaarikombinaatioina (toki osa kertoimista voi olla nollia), esimerkiksi

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \{\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = W_{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}}.$$

Numeroituville joukoille U taas

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots] = \{\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots \mid \alpha_i \in \mathcal{K},\ \text{vain äärellisen moni } \alpha_i \neq 0\}.$$

Tehtävä 10.4.5 Millaisen aliavaruuden polynomien joukolle $\mathcal{P}$ virittävät

a) $\{x, x^3 - 2x\}$?

b) $\{1, x, x^3 - x^2\}$?

Onko $[x, x^3 - 2x] = \mathcal{P}_3$, onko $[1, x, x^3 - x^2] = \mathcal{P}_3$? Ratkaisu sivulla 159.

Esimerkki 10.4.6 Lineaarisen homogeenisen yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisujoukko on aina äärellisen monen vektorin virittämä aliavaruus, mm. Tehtävässä 2.3.12 yhden vektorin virittämä. Toisaalta tällainen aliavaruus on kerroinmatriisin A nolla-avaruus (ks. Luku 13.1), Esimerkissä 13.1.3 kahden vektorin virittämä.

Määritelmä 10.4.7 Vektorijoukko $U \subseteq V$ on lineaariavaruuden V *virittävä joukko*, jos $V = [U]$, ts. jos avaruuden V jokainen alkio voidaan esittää joukon U vektoreiden lineaarikombinaationa. Sanotaan myös, että V on joukon U (tai sen vektorien) *virittämä*. Lineaariavaruus V on *äärellisesti viritetty*, jos sillä on äärellinen virittävä joukko, ts. jos on olemassa äärellinen joukko $U \subseteq V$, jolle $V = [U]$.

Esimerkki 10.4.8 Osoitetaan, että lineaariavaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorit

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

muodostavat sen virittävän joukon. Mielivaltaiselle $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ on

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

Avaruus $\mathbb{R}^3$ on siis joukon $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ virittämä. Joukko $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ virittää avaruudelle $\mathbb{R}^3$ aidon aliavaruuden, nimittäin x_1x_2-tason $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}$.

Esimerkki 10.4.9 Osoita, että korkeintaan astetta 3 olevien polynomien joukon $\mathcal{P}_3$ virittäviä joukkoja ovat esimerkiksi

$$U_1 := \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{ja} \quad U_2 := \{1+x, x, x^2-1, x^3+x\}.$$

Perustelut. Koska $\mathcal{P}_3 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ja

$$[U_1] = [1, x, x^2, x^3] = \{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{P}_3,$$

joukko $U_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ virittää avaruuden $\mathcal{P}_3$.
Sopivasti muotoilemalla nähdään, että

$$\begin{aligned} [U_2] &= [1 + x, x, x^2 - 1, x^3 + x] \\ &= \{\alpha(1 + x) + \beta x + \gamma(x^2 - 1) + \delta(x^3 + x) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha - \gamma) \cdot 1 + (\alpha + \beta + \delta)x + \gamma x^2 + \delta x^3 \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \\ &\subseteq \mathcal{P}_3. \end{aligned}$$

Osoitetaan vielä, että $\mathcal{P}_3 \subseteq [U_2]$. Olkoon $p \in \mathcal{P}_3$, $p(x) := a + bx + cx^2 + dx^3$ mielivaltainen. Katsotaan, onko p esitettävissä joukon $[U_2]$ alkioiden lineaarikombinaationa:

$$\alpha - \gamma + (\alpha + \beta + \delta)x + \gamma x^2 + \delta x^3 \equiv a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha & & & - & \gamma & & & = & a \\ \alpha & + & \beta & & & + & \delta & = & b \\ & & & & \gamma & & & = & c \\ & & & & & & \delta & = & d \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & a + c \\ \beta & = & b - a - c - d \\ \gamma & = & c \\ \delta & = & d \end{array} \right.$$

Koska yhtälöryhmä ratkeaa, on esitys olemassa ja $\mathcal{P}_3 \subseteq [U_2]$. Siis myös U_2 virittää avaruuden $\mathcal{P}_3$.

Esimerkki 10.4.10 Kaikkien polynomien joukko $\mathcal{P}$ ei ole äärellisesti viritetty (perustelu Esimerkissä 12.4.8).

Tehtävä 10.4.11 Osoita, että $\mathcal{P}_2$ voidaan esittää summana (ks. Luku 10.3)

$$[x, x^2-1] + [1, x^2] = \mathcal{P}_2.$$

Ratkaisu sivulla 160.

10.5 Virittävän joukon sieventämisestä

Virittävä joukko voi olla turhankin laaja, ja sitä on monesti hyödyllistä sieventää tai pelkistää jättämällä epäolennaisia vektoreita pois.

Esimerkki 10.5.1 Tason $\mathbb{R}^2$ vektorit $(1\ 0)^T$ ja $(0\ 1)^T$ riittävät virittämään sen, vrt. Esimerkki 10.4.8. Myös joukko $\{(1\ 0)^T, (0\ 1)^T, (2\ -3)^T\}$ on tason virittäjä, mutta siinä on enemmän alkioita. Nytpä esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eli $(2\ -3)^T$ on kahden muun lineaarikombinaatio (tässä myös esimerkiksi $(1\ 0)^T$ olisi kahden muun lineaarikombinaatio, miten?).

Viritysmielessä joukot $\{(1\ 0)^T, (0\ 1)^T\}$ ja $\{(1\ 0)^T, (0\ 1)^T, (2\ -3)^T\}$ ovat molemmat kelpoisia, mutta edellinen on kätevämpi monessakin suhteessa (vilkaise Lukua 11).

Lause 10.5.2 Jos lineaariavaruuden vektorijoukon U yksi vektori $\mathbf{u}$ voidaan esittää sen muiden vektorien lineaarikombinaationa, niin $[U] = [U \setminus \{\mathbf{u}\}]$. Sanommekin silloin, että "poistettu alkio $\mathbf{u}$ on viritysmielessä turha".

Todistus. Ensinnäkin, triviaalisti $[U \setminus \{\mathbf{u}\}] \subseteq [U]$. Olkoon toiseksi $\mathbf{v} \in [U]$ mielivaltainen, jolloin sillä on (eräs) esitys $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k$ joukon U alkioiden avulla. Asia on selvä, jos tässä ei ole $\mathbf{u}$ mukana: $\mathbf{v} \in [U \setminus \{\mathbf{u}\}]$. Jos taas eräs $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}$, otetaan käyttöön vektorille $\mathbf{u}$ tiedetty esitys $\mathbf{u} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \beta_p\mathbf{u}_p$, ja sijoitetaan se alkion $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}$ tilalle. Silloin saadaan (käyttäen taas lineaariavaruuden laskusääntöjä) vektorille $\mathbf{v}$ esitys käyttäen vain joukon $U \setminus \{\mathbf{u}\}$ alkioita. $\square$

Tehtävä 10.5.3 Osoita tarkasti, että Lauseen 10.5.2 todistuksen lopussa kuvattu tapa todella tuottaa vektorille $\mathbf{v}$ esityksen lineaarikombinaationa, jossa on vain joukon $U \setminus \{\mathbf{u}\}$ alkioita.
Ratkaisu sivulla 160.

Esimerkki 10.5.4 Olkoon $\mathcal{P}_2' := [1, x^2]$, joka on korkeintaan astetta 2 olevien polynomien joukon $\mathcal{P}_2$ aliavaruus. Osoita, että joukko $\{2, x^2, 1-x^2\}$ myös virittää avaruuden $\mathcal{P}_2'$, ja että sitä voidaan sieventää poistamalla jotain.

Ratkaisu. Koska $1 - x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + (-1)x^2$, se voidaan Lauseen 10.5.2 mukaan jättää pois. Jäljelle jäävää joukkoa $\{2, x^2\}$ ei voi enää supistaa, sillä kumpikaan alkioista ei enää yksinään viritä avaruutta $\mathcal{P}_2'$.

Tehtävä 10.5.5 Sievennä avaruuden $\mathbb{R}^3$ virittäjäjoukkoa $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$, kun

$$\mathbf{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu sivulla 161.

10.6 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 10.1.8 : Ei, esimerkiksi nollavektori ei ole ratkaisu (ehkä helpoin tapa). Myös voi ratkaista ja etsiä kohtdalle (i) (tai (ii)) vastaesimerkin.

Tehtävä 10.2.2 : a) $\mathcal{A}$ on aliavaruus, sillä
(0) Se on selvästi epätyhjä ja määrittelynsä nojalla $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_2$.
(i) Alkioiden $a + bx^2$, $c + dx^2 \in \mathcal{A}$ summa $(a + c) + (b + d)x^2 \in \mathcal{A}$.
(ii) Alkioiden $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $a + bx^2 \in \mathcal{A}$ tulo $(\alpha a) + (\alpha b)x^2 \in \mathcal{A}$.

b) $\mathcal{B}$ ei ole aliavaruus; esimerkiksi vakiopolynomi $1 \in \mathcal{B}$ kerrottuna luvulla -5 ei kuulu joukkoon $\mathcal{B}$ (siis (ii) ei ole voimassa).

c) $\mathcal{C}$ ei ole aliavaruus; esimerkiksi kun $p(x) = x^2-1$ ja $q(x) = 1-x^2$, on $p+q = \hat{0}$, jolla ei ole tasan 2 nollakohtaa (vaan äärettömästi).

d) $\mathcal{D}$ on aliavaruus, sillä se on epätyhjä $\mathcal{P}_2$:n osajoukko, ja arvon nolla origossa (tai missä tahansa kiinteäksi valitussa pisteessä) saavien polynomien summalla ja reaaliluvulla skaalauksen tuloksella on tuossa pisteessä myös arvo 0.

e) $\mathcal{E}$ ei ole aliavaruus; esimerkiksi polynomeilla $p(x) = x^2 + 3$ ja $q(x) = 3 - x$ on origossa arvo 3, mutta niiden summalla on arvo 6. Siis (i) ei ole voimassa.

f) $\mathcal{F}$ ei ole aliavaruus, sillä $\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{P}_2$. Kylläkin se olisi kaikkien reaalipolynomien joukon $\mathcal{P}$, ja myös funktiojoukon $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aliavaruus.

Tehtävä 10.4.3 : Olkoon $U \subseteq V$ epätyhjä joukko ja $W \subseteq V$ aliavaruus, joka sisältää sen, siis $U \subseteq W$. Väite oli, että myös $[U] \subseteq W$.
Olkoon $\mathbf{u} \in [U]$ mikä tahansa vektori. Virityksen määritelmän mukaan sillä on esitys $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k$, missä kukin $\mathbf{u}_i \in U$. Mutta $U \subseteq W$ ja W on aliavaruus, joten lineaarikombinaationa $\mathbf{u} \in W$. Siis $[U] \subseteq W$, ja on siksi suppein.

Tehtävä 10.4.5 : a) Muotoillaan:

$$\begin{aligned}
[x, x^3-2x] &= \{ax + b(x^3-2x) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(a - 2b)x + bx^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a'x + b'x^3 \mid a', b' \in \mathbb{R}\} \\
&\subseteq \mathcal{P}_3.
\end{aligned}$$

Nyt nähdään, että $[x, x^3-2x] \neq \mathcal{P}_3$, sillä esimerkiksi polynomi $x^2 \notin [x, x^3 - 2x]$.

b) Lasketaan taas:

$$\begin{aligned}
[1, x, x^3 - x^2] &= \{a + bx + c(x^3 - x^2) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a + bx - cx^2 + cx^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Nähdään, että $[1, x, x^3 - x^2] \neq \mathcal{P}_3$, sillä esimerkiksi $x^2 + x^3 \notin [1, x, x^3 - x^2]$. Tilanne johtuu neliön ja kuution kertoimien keskinäisestä riippuvuudesta.

Tehtävä 10.4.11 : Joukot

$$\begin{array}{rcl} A := [x, x^2{-}1] & = & \{\, \alpha x + \beta(x^2{-}1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\} \\ B := [1, x^2] & = & \{\, \gamma + \delta x^2 \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R} \,\} \end{array}$$

ovat Lauseen 10.4.1 mukaan lineaariavaruuden $\mathcal{P}_2$ aliavaruuksia. Lauseen 10.3.2 mukaan summa on myös aliavaruus, joten

$$A + B = [x, x^2{-}1] + [1, x^2] \subseteq \mathcal{P}_2.$$

Onko inkluusio voimassa myös toisinpäin, $\mathcal{P}_2 \subseteq A + B$? Muokataan viritettyjä avaruuksia ja summaa:

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & [x, x^2{-}1] + [1, x^2] \\ & = & \{\, \alpha x + \beta(x^2{-}1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\} + \{\, \gamma + \delta x^2 \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R} \,\} \\ & = & \{\, (\alpha x + \beta(x^2{-}1)) + (\gamma + \delta x^2) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \,\} \\ & = & \{\, (\gamma - \beta) + \alpha x + (\beta + \delta)x^2 \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \,\} \end{array}$$

Siis: voidaanko jokainen $a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$ esittää muodossa

$$a + bx + cx^2 \equiv (\gamma - \beta) + \alpha x + (\beta + \delta)x^2$$

sopivilla skalaareilla α, β, γ, δ?

Polynomien samuus tarkoittaa vastinkerrointen samuutta, joten esitys on mahdollinen, jos (ja vain jos)

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcl} \alpha & & & & = & b \\ & -\ \beta & +\ \gamma & & = & a \\ & \beta & & +\ \delta & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & b \\ \beta & = & c - t \\ \gamma & = & a + c - t \\ \delta & = & t \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Esimerkiksi valitsemalla $t = 0$ saamme summan alkioksi

$$(\gamma - \beta) + \alpha x + (\beta + \delta)x^2 = a + bx + cx^2,$$

joten $a{+}bx{+}cx^2 \in A{+}B$. On siis todistettu, että $\mathcal{P}_2 \subseteq A{+}B$ ja kaiken kaikkiaan

$$[x, x^2{-}1] + [1, x^2] = \mathcal{P}_2.$$

Tehtävä 10.5.3 : Lauseen 10.5.2 todistusta jatkaen: Voidaan olettaa (miksi?), että vektorin $\mathbf{v} \in [U]$ esityksessä kaikki vektorit $\mathbf{v}_j$ ovat eri vektoreita ja siis vain yksi $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}$. Nyt saadaan

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v} & = & \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_i\mathbf{u} + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k \\ & = & \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_i(\beta_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \beta_p\mathbf{u}_p) + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k \\ & = & \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + (\alpha_i\beta_1)\mathbf{u}_1 + \ldots + (\alpha_i\beta_p)\mathbf{u}_p + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k \end{array}$$

missä $\mathbf{u}$ ei enää esiinny. Siis $\mathbf{v} \in [U] \setminus \{\mathbf{u}\}$.

Tehtävä 10.5.5 : Ensinnäkin, nollavektori $\mathbf{u}_5\}$ voidaan viritykselle turhana jättää pois. Toiseksi, vektori $\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$, joten sekin on viritysmielessä turha. Lopulta jää joukko $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, missä ei ole tinkimisen varaa.

Mutta kysymys: Voitaisko vektorin $\mathbf{u}_4\}$ sijasta jättää joku muu vektori jättää pois?

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} \alpha & & & & & & & = & b \\ & - & \beta & + & \gamma & & & = & a \\ & & \beta & & & + & \delta & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & b \\ \beta & = & c-t \\ \gamma & = & a+c-t \\ \delta & = & t \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

11 LINEAARINEN RIIPPUMATTOMUUS

Tutkittaessa lineaariavaruuden rakennetta nousee erääksi merkittäväksi piirteeksi sen virittävien joukkojen alkioiden keskinäiset riippuvuussuhteet ja lukumäärä. Oleellisen vedenjakajan muodostaa äärellinen vs. ääretön virittäjäjoukko.

Jos jokin osajoukko virittää lineaariavaruuden V, myös jokainen laajempi osajoukko virittää sen. Tällaisessa laajemmassa joukossa on kuitenkin mukana tarpeettomia vektoreita. Jos jokin äärellinen vektorijoukko virittää avaruuden V, on olemassa *suppein*, *minimaalinen* eli lukumäärältään pienin virittäjäjoukko, *kanta*. Näitä voi olla useita, mutta osoittautuu, että niissä kaikissa on sama määrä alkioita (katso Luku 12).

11.1 Riippumattomuuden määritelmä

Määritelmä 11.1.1 a) Lineaariavaruuden äärellinen osajoukko $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ on *lineaarisesti riippuva* (eli vektorit $\mathbf{u}_1$, ..., $\mathbf{u}_k$ ovat *lineaarisesti riippuvia*), jos on olemassa skalaarit α_1, ..., $\alpha_k \in \mathcal{K}$, joista ainakin yksi on nollasta poikkeava, ja joille

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

b) Lineaariavaruuden ääretön osajoukko on lineaarisesti riippuva, jos sillä on äärellinen lineaarisesti riippuva osajoukko.
c) Jos joukko ei ole lineaarisesti riippuva, se on *lineaarisesti riippumaton* (*linearly independent*).

Huomautus 11.1.2 a) Lineaarisesti riippuvaa joukkoa kutsutaan myös *sidotuksi* ja riippumatonta *vapaaksi*.
b) Äärellisen joukon lineaarinen riippumattomuus tarkoittaa sitä, että yo. vektoriyhtälö toteutuu vain arvoilla $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Ääretön joukko on lineaarisesti riippumaton, jos ja vain jos sen jokainen äärellinen osajoukko on lineaarisesti riippumaton.

Esimerkki 11.1.3 Onko avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijoukko

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

lineaarisesti riippuva?

Ratkaisu. Ratkaistaan skalaarit vektoriyhtälöstä $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, eli

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha_1 & = & -t, \\ \alpha_2 & = & t, \\ \alpha_3 & = & t, \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

Yhtälöryhmällä on siis muitakin kuin triviaaliratkaisu. Kun valitaan esimerkiksi $t := 1$, saadaan skalaarit $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ ja $\alpha_3 = 1$, joille

$$(-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Joukko U on siis lineaarisesti riippuva.

Tehtävä 11.1.4 Näytä, että pystyvektorit

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

muodostavat avaruudessa $\mathbb{R}^3$ lineaarisesti riippumattoman joukon.

Ratkaisu sivulla 173.

Esimerkki 11.1.5 Olkoon $V := \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ja $f_1(x) := \sin x$, $f_2(x) := \cos x$, $f_3(x) := \sin 2x$, $f_4(x) := \cos 2x$. Onko joukko $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ lineaarisesti riippuva?

Ratkaisu. Osoitetaan funktiot lineaarisesti riippumattomiksi. Olkoon

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = \hat{0}$$

(siis nollafunktio) eli

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin 2x + \alpha_4 \cos 2x = 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Muodostetaan funktioyhtälöstä (vähintäin) 4 yhtälöä valitsemalla ”sopivat” reaaliarvot x, esimerkiksi vuorollaan $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$. Saadaan

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 0 \\ x & = & \frac{\pi}{4} \\ x & = & \frac{\pi}{2} \\ x & = & -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} & & \alpha_2 & & & + & \alpha_4 & = & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 & + & \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2 & + & \alpha_3 & & & = & 0 \\ \alpha_1 & & & & & - & \alpha_4 & = & 0 \\ -\alpha_1 & & & & & - & \alpha_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

mikä toteutuu vain arvoilla $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Esimerkki 11.1.6 Joukko $\{3, \cos 2x, \sin^2 x\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on lineaarisesti riippuva, sillä $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ja siten

$$\left(-\tfrac{1}{3}\right) \cdot 3 + 1 \cos 2x + 2 \sin^2 x = 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 11.1.7 Olkoon V lineaariavaruus. Voidaan sopia, että tyhjä joukko on lineaarisesti riippumaton. Joukko $\{\mathbf{0}\}$ on aina lineaarisesti riippuva. Jos $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V$, niin $\{\mathbf{u}\}$ on lineaarisesti riippumaton (Lause 9.4.4 kohta b).

11.2 Ominaisuuksia

Lause 11.2.1 Lineaariavaruuden epätyhjä osajoukko on lineaarisesti riippuva jos ja vain jos ainakin yksi sen alkioista voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa.

Todistus. Olkoon V lineaariavaruus ja $U \subseteq V$ epätyhjä joukko.

1) Jos U on lineaarisesti riippuva, löytyy äärellinen lineaarisesti riippuva joukko $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subseteq U$. Tällöin on olemassa $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, joista ainakin yksi $\alpha_i \neq 0$, ja

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_i\mathbf{u}_i + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Mutta silloin $\mathbf{u}_i$ voidaan yhtälöstä ratkaista (mitenkä, mitä siihen tarvitaan?) ja siten tulee esitetyksi muiden lineaarikombinaationa.

2) Oletetaan, että esimerkiksi $\mathbf{u} \in U$ voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa $\mathbf{u} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \beta_k\mathbf{u}_k$, missä $\mathbf{u}$ ei ole mukana. Tällöin

$$(-1)\mathbf{u} + \beta_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \beta_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0},$$

joten joukko U on lineaarisesti riippuva. □

Lause 11.2.2 Olkoon V lineaariavaruus ja $U \subseteq V$ epätyhjä joukko.

a) Jos U on lineaarisesti riippumaton ja $U' \subseteq U$, niin joukko U' on lineaarisesti riippumaton.

b) Jos U on lineaarisesti riippuva ja $U \subseteq W \subseteq V$, niin joukko W on lineaarisesti riippuva.

Todistus. a) Koska joukon U jokainen äärellinen osajoukko on lineaarisesti riippumaton, ovat sitä myös joukon $U' \subseteq U$ osajoukot; ovathan ne myös joukon U osajoukkoja.

b) Joukolla U on äärellinen lineaarisesti riippuva osajoukko, joka on myös joukon W lineaarisesti riippuva osajoukko. □

Esimerkki 11.2.3 Ovatko avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisit

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

lineaarisesti riippuvia?

Eräs ratkaisu. Hetken tarkastelun jälkeen huomataan, että

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

joten matriisit ovat lineaarisesti riippuvat (Lause 11.2.1).

Lause 11.2.4 Olkoon V lineaariavaruus ja $U \subseteq V$ sen lineaarisesti riippumaton osajoukko. Jos $\mathbf{v} \in V \setminus [U]$, niin laajennettukin joukko $U' := U \cup \{\mathbf{v}\}$ on lineaarisesti riippumaton. Lisäksi $[U]$ on viritetyn aliavaruuden $[U']$ aito aliavaruus.

Todistus. Käytetään lauseen merkintöjä. Määritelmän mukaan riittää osoittaa, että joukon U' mielivaltainen *äärellinen* osajoukko U'' on lineaarisesti riippumaton. Jos kyseinen joukko ei sisällä lisättyä alkiota $\mathbf{v}$, se on joukon U osajoukko, ja siten Lauseen 11.2.2 mukaan lineaarisesti riippumaton. Muutoin joukko on muotoa

$$U'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\},$$

missä kukin $\mathbf{u}_i \in U$. Mielivaltaisessa joukon U'' lineaarikombinaatioyhtälössä $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}_k + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ on kaksi mahdollisuutta: skalaari $c = 0$ tai $c \neq 0$.

1) Jos $c = 0$, on $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ja kyseessä on todellisuudessa lineaarisesti riippumattoman joukon U alkioiden lineaarikombinaatioyhtälö. Kaikki skalaarit ovat siis nollia ja U'' täten lineaarisesti riippumaton.

2) Tapaus $c \neq 0$ on puolestaan mahdoton: silloin nimittäin vektori $\mathbf{v}$ voitaisiin esittää pelkästään joukon U alkioiden lineaarikombinaationa

$$\mathbf{v} = (-\frac{\alpha_1}{c})\mathbf{u}_1 + (-\frac{\alpha_2}{c})\mathbf{u}_2 + \ldots + (-\frac{\alpha_k}{c})\mathbf{u}_k,$$

ja olisikin $\mathbf{v} \in [U]$, mikä sotii alkion $\mathbf{v}$ valintaa vastaan.

Lauseen jälkimmäinen väite: Joukon U' virittämä aliavaruus on itsekin lineaariavaruus (miksi?), ja sen osajoukon U virittämä aliavaruus on sen aliavaruus (avaruudesta V perittyjen laskutoimitusten suhteen tietysti). Aitouden takaa se, että $\mathbf{v} \in [U'] \setminus [U]$. $\square$

Lineaarisen riippumattomuuden geometrinen merkitys

1) Tason $\mathbb{R}^2$ kaksi vektoria $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ovat lineaarisesti riippuvia, jos ja vain jos ne ovat saman suoran suuntaisia, so. origosta lähteviksi piirrettyinä ne ovat samalla suoralla. Tällöin on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}$, jolle $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}$.

2) Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ovat lineaarisesti riippuvia jos ja vain jos niiden virittämä aliavaruus on avaruuden suora, ts. jos $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$.

3) Avaruuden $\mathbb{R}^3$ kolme vektoria $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos ne eivät ole samassa tasossa, ts. origosta lähteviksi piirrettyinä niiden päätepisteet eivät ole origon kanssa samassa tasossa.

11.3 Lineaarinen riippumattomuus ja singulaarisuus

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ n-*alkioisten* vektorijoukkojen lineaarinen riippumattomuus voidaan testata niiden muodostaman matriisin avulla.

Lause 11.3.1 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton, jos ja vain jos niistä muodostettu matriisi

$$A = (a_{ij}) := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

on säännöllinen. Erityisesti: neliömatriisin A sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia jos ja vain jos $\det A \neq 0$.

Todistus. 1) Olkoon $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Kun merkitään $\mathbf{x} := (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$, on yhtälö kirjoitettavissa kvadraattiseksi homogeeniseksi yhtälöryhmäksi

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{12}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
&= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Käytetään nyt lausetta 5.4.2: Jos A on säännöllinen, yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaaliratkaisu

$$\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T = (0\ 0\ \dots\ 0)^T.$$

Siis $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton.

2) Kääntäen, jos $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton, on oltava $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ ja siten yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaaliratkaisu. Siis A on säännöllinen.
Jälkimmäinen väite seuraa nyt siitä, että neliömatriisi A on säännöllinen jos ja vain jos $\det A \neq 0$ (Lause 6.5.1). $\square$

Esimerkki 11.3.2 Ovatko avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorit

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\end{pmatrix}^T, \quad \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\end{pmatrix}^T \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix}2 & -5 & 3\end{pmatrix}^T$$

lineaarisesti riippumattomia?

Ratkaisu. Vektoreita on kolme ja avaruus on $\mathbb{R}^3$, joten vektoreista sarakkeittain muodostettu matriisi on neliömatriisi. Koska

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ei matriisi ole säännöllinen (Lause 6.5.1). Lauseen 11.3.1 nojalla vektorit ovat lineaarisesti riippuvat. Myös voi perustella suorempaan Lauseen 11.3.1 jälkimmäisen väitteen avulla.

Tehtävä 11.3.3 a) Osoita säännöllisyysehdon avulla, että

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\1\\6\end{pmatrix} \right\}$$

on lineaarisesti riippuva.

b) Onko joukko

$$U_2 := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\1\\6\end{pmatrix} \right\}$$

lineaarisesti riippumaton? Ratkaisu sivulla 173.

11.4 Funktioiden lineaarinen riippuvuus

Differentiaaliyhtälöiden kurssilla osoitetaan, että n kertaluvun lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisu on n lineaarisesti riippumattoman yksittäisratkaisun lineaarikombinaatio.

Yksinkertainen keino tarkastaa joukon $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{C}^n(\Delta, \mathbb{R})$ lineaarinen riippumattomuus on käyttää nk. *Wronskin determinanttia* (Jozef Hoene-Wronski, Puola, 1778-1853)

$$W_{f_1,\dots,f_n} := \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Jos funktiojoukko $\{f_1, \dots, f_n\}$ on lineaarisesti riippuva, niin $W_{f_1,\dots,f_n}(x) = 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Jos $W_{f_1,\dots,f_n}(x) \neq 0$ yhdellekin $x \in \Delta$, on joukko lineaarisesti riippumaton. Kuitenkin funktiojoukko voi olla lineaarisesti riippumaton ja sen Wronskin determinantti hävitä identtisesti.

Huomautus 11.4.1 Wronskin determinantti -menetelmää ei tällä kurssilla perustella, joten sitä *saa käyttää vain pyydettäessä.*

Esimerkki 11.4.2 Esimerkin 10.4.9 polynomijoukko

$$U := \{1 + x,\, x,\, x^2 - 1,\, x^3 + x\}$$

on lineaarisesti riippumaton. Nimittäin, polynomit ovat jopa äärettömästi derivoituvia ja näiden Wronskin determinantin arvo pisteessä $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & x^2-1 & x^3+x \\ 1 & 1 & 2x & 3x^2+1 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2-1 & x^3+x \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2+1 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \dots = 12.$$

Esitetään varsinainen todistus määritelmän avulla: Yhtälöstä

$$\alpha(1 + x) + \beta x + \gamma(x^2 - 1) + \delta(x^3 + x) = 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

saadaan ulos mm. seuraavaa:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 0 \\ x &=& 1 \\ x &=& -1 \\ x &=& -2 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \alpha & & & - & \gamma & & & = & 0 \\ 2\alpha & + & \beta & & & + & 2\delta & = & 0 \\ & - & \beta & & & - & 2\delta & = & 0 \\ -\alpha & - & 2\beta & + & 3\gamma & - & 10\delta & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{rcrcr} & & \alpha & = & 0 \\ & & \gamma & = & 0 \\ \beta & + & 2\delta & = & 0 \\ -2\beta & - & 10\delta & = & 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rcr} \alpha &=& 0 \\ \beta &=& 0 \\ \gamma &=& 0 \\ \delta &=& 0 \end{array}\right.$$

Siis joukko U on lineaarisesti riippumaton.

11.5 Yksikäsitteisyydestä

Lause 11.5.1 Olkoon V lineaariavaruus ja $U \subseteq V$, $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Alkio $\mathbf{v} \in [U]$ voidaan esittää *yksikäsitteisellä* tavalla joukon U alkioiden lineaarikombinaationa, jos ja vain jos U on on lineaarisesti riippumaton.

Todistus. 1) Oletetaan, että U on lineaarisesti riippumaton. Olkoon vektorilla $\mathbf{v} \in [U]$ esitykset

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k \\ \mathbf{v} &= \beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{u}_k. \end{aligned}$$

Vähentämällä yhtälöt puolittain saadaan

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)\mathbf{u}_k$$

Koska U on lineaarisesti riippumaton, on $\beta_i = \alpha_i$ kaikilla $i \in [k]$. Esitys on siis yksikäsitteinen (yhteenlaskujärjestystä lukuunottamatta tietenkin).

2) Oletetaan, että vektori $\mathbf{v} \in [U]$ voidaan esittää joukon U lineaarikombinaationa vain yhdellä tavalla

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k.$$

Vastaoletus: Joukko U on lineaarisesti riippuva.
Johdetaan toinen esitys vektorille $\mathbf{v}$. Koska U on lineaarisesti riippuva, on olemassa c_1, ..., $c_k \in \mathcal{K}$, joista ainakin yksi $c_j \neq 0$, ja

$$\mathbf{0} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_j\mathbf{u}_j + \cdots + c_k\mathbf{u}_k.$$

Asetetaan $\beta_i := \alpha_i + c_i$ kaikilla $i \in [k]$. Laskemalla edelliset kaksi yhtälöä puolittain yhteen saadaan

$$\mathbf{v} = (\alpha_1 + c_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\alpha_j + c_j)\mathbf{u}_j + \cdots + (\alpha_k + c_k)\mathbf{u}_k = \beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_j\mathbf{u}_j + \cdots + \beta_k\mathbf{u}_k.$$

Koska $c_j \neq 0$, on $\beta_j \neq \alpha_j$, ja tämä olisi erilainen esitys vektorille $\mathbf{v}$. Siis vastaoletus on väärä ja U lineaarisesti riippumaton. □

11.6 Suora summa

Luvussa 10.3 määriteltiin aliavaruuksien summa. Jos W_1 ja W_2 ovat avaruuden V aliavaruuksia ja $W_1 + W_2 = V$, niin alkiolla $\mathbf{v} \in V$ saattaa olla monia erilaisia esityksiä näiden aliavaruuksien alkioiden summina.

Määritelmä 11.6.1 Olkoot W_1 ja W_2 lineaariavaruuden V aliavaruuksia. Jos jokainen $\mathbf{v} \in V$ voidaan esittää tasan yhdellä tavalla summana $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, missä $\mathbf{w}_1 \in W_1$ ja $\mathbf{w}_2 \in W_2$, niin V on aliavaruuksien W_1 ja W_2 *suora summa*, ja tätä merkitään $V = W_1 \oplus W_2$.

Lause 11.6.2 Olkoot W_1 ja W_2 lineaariavaruuden V aliavaruuksia. Silloin

$$V = W_1 \oplus W_2$$

jos ja vain jos

$$V = W_1 + W_2 \quad \text{ja} \quad W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

Todistus. 1) ($\Rightarrow$) Harjoitustehtävä.

2) ($\Leftarrow$) Oletetaan, että $V = W_1 + W_2$ ja $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Olkoon $\mathbf{v} \in V$ mielivaltainen. Osoitetaan, että sillä on vain yksi esitys $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, kun $\mathbf{w}_1 \in W_1$ ja $\mathbf{w}_2 \in W_2$. Oletetaan siis, että joillakin $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1' \in W_1$ ja $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2' \in W_2$

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2'.$$

Silloin

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1' = \mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2,$$

ja koska W_1 ja W_2 olivat aliavaruuksia, on $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1' \in W_1$ ja $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_2' \in W_2$. Siis myös $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1' \in W_1 \cap W_2$ ja $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_2' \in W_1 \cap W_2$, mistä seuraa oletuksen $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ mukaan, että $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1'$ ja $\mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_2$. Siis esityksiä $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ on vain yksi. Mutta silloin

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

□

Tehtävä 11.6.3 Todista Lauseen 11.6.2 toinen puoli.
Ratkaisu sivulla 173.

Tehtävä 11.6.4 Esitä avaruudet $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ aitojen aliavaruuksiensa suorina summina.
Ratkaisu sivulla 174.

11.7 Analyyttistä geometriaa – tason yhtälö

Olkoot $1 \leq k < n$ ja $\mathbf{a}$ sekä $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ lineaarisesti riippumattomia vektoreita. Joukkoa T:

$$\mathbf{x} := \mathbf{a} + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \ldots + t_k\mathbf{v}_k, \quad t_i \in \mathbb{R},$$

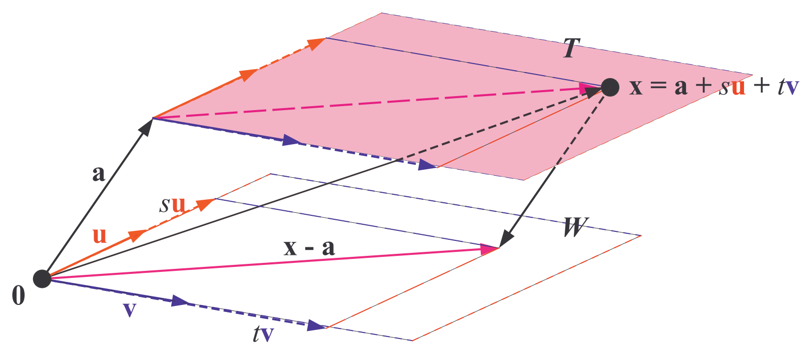
sanotaan *k-ulotteiseksi (hyper)tasoksi*. Taso T *sisältää* pisteen $\mathbf{a}$ ja on vektorijoukon $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *virittämän aliavaruuden suuntainen*. Kyseiset vektorit ovat tason *suuntavektoreita*.

Joukko T on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus ainakin, jos $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, mutta vektoriesityksen ei-yksikäsitteisyydestä johtuen origo voi kuulua tasoon T vaikka olisikin $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Tarkemmin: Taso T on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus, jos ja vain jos tasolla T on esitys äärellisen monen vektorin lineaarikombinaatioina.

Kolmiulotteisen avaruuden taso

Jos avaruuden $\mathbb{R}^3$ kaksi vektoria $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat yhdensuuntaisia, ts. $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ tai $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$, niin ne ovat lineaarisesti riippuvat. Jos lisäksi ainakin toinen vektoreista on nollasta poikkeava, on viritetty aliavaruus $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ suora.

Oletetaan nyt, että $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ eivät ole yhdensuuntaisia. Silloin vektorimuoto $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, $s, t \in \mathbb{R}$, määrittelee avaruuteen $\mathbb{R}^3$ erään tason T (Kuva 21), joka sisältää pisteen $\mathbf{a}$ ja on aliavaruuden $W := [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ suuntainen, koska niillä on samat suuntavektorit (ks. Luku 4.2).



Kuva 21: Kahden vektorin suuntainen pisteen $\mathbf{a}$ sisältävä taso

Nyt $\mathbf{x} \in T$ jos ja vain jos $\mathbf{x}-\mathbf{a} = s\mathbf{u}+t\mathbf{v}$ eli $\mathbf{x}-\mathbf{a} \in W$. Tämä tarkoittaa mm. sitä, että vektorijoukko $\{\mathbf{x}-\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ on lineaarisesti riippuva. Lauseen 11.3.1 mukaan niistä sarakkeittain muodostetulle matriisille on Lauseen 11.3.1 mukaan

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Kehittämällä determinantti ensimmäisen sarakkeensa suhteen saadaan yhtälö muotoon

$$(x_1 - a_1)\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - (x_2 - a_2)\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + (x_3 - a_3)\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Laskemalla nämä pelkästään suuntavektoreista $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ riippuvat determinantit (huomaa yksi rivienvaihto!)

$$D_1 := \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 := \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 := \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

saadaan yhtälö (7) muotoon

$$D_1(x_1 - a_1) + D_2(x_2 - a_2) + D_3(x_3 - a_3) = 0. \tag{9}$$

Tasolle T: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, $s, t \in \mathbb{R}$, saadaan parametritön *koordinaattiyhtälö*

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + C = 0, \quad A_i,\ C \text{ vakioita.}$$

Voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että kun vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ eivät ole yhdensuuntaisia, kaikki determinantit D_i eivät voi olla nollia, joten yhtälö ei surkastu muotoon $0 = 0$, vaan ainakin yksi koordinaateista esiintyy siinä. Determinanttiyhtälö (6) esittää siis tasoa, joka sisältää pisteen $\mathbf{a}$ ja on (lineaarisesti riippumattomien) vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän tason suuntainen.

Koordinaattimuodossa oleva tason yhtälö saadaan parametrimuotoon valitsemalla kaksi muuttujaa parametreiksi ja ratkaisemalla kolmas näiden avulla.

Tehtävä 11.7.1 Osoita, että jos vektorit $\mathbf{u} = (u_1\ u_2\ u_3)^T$ ja $\mathbf{v} = (v_1\ v_2\ v_3)^T$ eivät ole yhdensuuntaisia, niin kaikki determinantit (8) eivät voi yhtaikaa olla nollia.
Ratkaisu sivulla 174.

Tehtävä 11.7.2 Määritä sen tason koordinaattiyhtälö, joka kulkee

a) pisteiden $(2\ 1\ 4)^T$, $(1\ 2\ 2)^T$ ja $(2\ 3\ 1)^T$ kautta.

b) pisteiden $(2\ 2\ 3)^T$ ja $(-1\ 4\ 2)^T$ kautta ja on suoran

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

suuntainen.
Ratkaisu sivulla 174.

Tehtävä 11.7.3 Esitä taso $3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ vektorimuodossa.
Ratkaisu sivulla 175.

11.8 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 11.1.4 : Lineaarisen riippuvuuden määritelmän vektoriyhtälö menee tässä tapauksessa muotoon

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mistä lineaarinen riippumattomuus jo näkyykin!

Tehtävä 11.3.3 : a) Koska avaruus on $\mathbb{R}^4$ ja vektoreita 4, muodostetaan vektoreista Lauseessa 11.3.1 kuvattu matriisi A ja näytetään, että

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \ldots = 0.$$

b) Determinanttiehto ei nyt käy, koska vektoreita on vain kolme. Siis on ratkaistava

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Syntyvällä lineaarisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} \alpha_1 & + & 3\alpha_3 & + & 4\alpha_4 & = & 0 \\ & & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_1 & & & & \alpha_4 & = & 0 \\ 4\alpha_1 & + & 2\alpha_3 & + & 6\alpha_4 & = & 0 \end{cases}$$

on ratkaisuna esimerkiksi $\alpha_1 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -1$. Siis myös U_2 on lineaarisesti riippuva.

Tehtävä 11.6.3 : Jos $V = W_1 \oplus W_2$, niin tietysti $V = W_1 + W_2$. Olkoon $\mathbf{w} \in W_1 \cap W_2$ mielivaltainen. Silloin $\mathbf{w} \in V$ ja sillä on tasan yksi esitys $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, kun $\mathbf{w}_1 \in W_1$ ja $\mathbf{w}_2 \in W_2$. Mutta toisaalta

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w} + \mathbf{0}, \text{ missä } \mathbf{w} \in W_1, \mathbf{0} \in W_2 \\ \mathbf{w} &= \mathbf{0} + \mathbf{w}, \text{ missä } \mathbf{0} \in W_1, \mathbf{w} \in W_2. \end{aligned}$$

Tämä on mahdollista vain kun $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Siis myös $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Tehtävä 11.6.4 : R^2 on minkä tahansa kahden erisuuntaisen origon kautta kulkevan suoran suora summa, esimerkiksi koordinaattiakselien $S_x := \{\, t(1\ 0)^T \mid t \in \mathbb{R}\,\}$ ja $S_y := \{\, t(0\ 1)^T \mid t \in \mathbb{R}\,\}$, $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y$.

R^3 voidaan esittää suorana summana $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$, missä aliavaruudet ovat suora S ja taso T, joilla on vain origo yhteisenä pisteenä.

Tehtävä 11.7.1 : Koska vektorit eivät ole yhdensuuntaisia, ei kumpikaan ole nollavektori, joten molemmilla on ainakin yksi nollasta poikkeava koordinaatti.
Antiteesi: Kaikki determinantit D_i ovat nollia, ts. $u_2v_3 = u_3v_2$, $u_3v_1 = u_1v_3$ ja $u_1v_2 = u_2v_1$.
Olkoon esimerkiksi $u_1 \neq 0$. Silloin $\alpha := v_1/u_2 \in \mathbb{R}$ ja $v_1 = \alpha u_1$.

Koska $u_1v_2 = u_2v_1$, on $v_2 = u_2v_1/u_1 = u_2\alpha u_1/u_1 = \alpha u_2$.
Koska $u_3v_1 = u_1v_3$, on $u_3\alpha u_1 = u_1v_3$ ja siten $v_3 = \alpha u_3$.

Siis olisi $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$, mikä on vastoin oletusta.

Jos olikin $u_1 = 0$, niin tehdään vastaava päättely tilanteessa $u_2 \neq 0$ tai $u_3 \neq 0$.

Tehtävä 11.7.2 : a) Valitaan vakiovektoriksi vaikkapa $\mathbf{a} = (2\ 1\ 4)^T$, jolloin tason vektoriyhtälö on

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + s\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right) + t\left(\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Koordinaattimuoto on

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}x_1-2 & -1 & 0\\ x_2-1 & 1 & 2\\ x_3-4 & -2 & -3\end{vmatrix} &= (x_1-2)(-3+4) - (x_2-1)\cdot 3 + (x_3-4)(-2) = 0\\ &\Leftrightarrow\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -9.\end{aligned}$$

b) Samaan tapaan kuin a), mutta nyt toinen suuntavektori "lainataan" annetulta suoralta:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + s\left(\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right) + t\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R},$$

ja koordinaattimuoto

$$\begin{vmatrix}x_1-2 & -3 & 5\\ x_2-2 & 2 & 2\\ x_3-3 & -1 & 3\end{vmatrix} = (x_1-2)(6+2) - (x_2-2)(-9+5) + (x_3-3)(-6-10) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 8x_1 + 4x_2 - 16x_3 + 24 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -6.
\end{aligned}$$

Tehtävä 11.7.3 : Valitaan parametreiksi vaikkapa x_1 ja x_2:

$$\begin{cases} x_1 &= s,\ s \in \mathbb{R} \\ x_2 &= t,\ t \in \mathbb{R} \\ x_3 &= -1 + 3s + 2t \end{cases}$$

jolloin (eräs) vektorimuoto on

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

12 KANTA, KOORDINAATIT JA DIMENSIO

Lineaariavaruuden rakenne tulee lähes täysin määrätyksi, kun tunnetaan jokin sen virittäjäjoukko. Kuitenkin avaruuden mielivaltaisella alkiolla voi olla useita esityksiä virittäjäjoukon alkioiden lineaarikombinaationa. Edellä todistettiin, että yksikäsitteisiin *koordinaatteihin* päästään, jos ja vain jos (äärellinen) virittäjäjoukko on lineaarisesti riippumaton.

12.1 Kanta ja koordinaatit

Määritelmä 12.1.1 Joukko $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subseteq V$ on lineaariavaruuden V *kanta* (*basis*) ja vektorit $\mathbf{e}_i$ *kantavektoreita*, jos

(i) joukko E virittää avaruuden V, ts. $[E] = V$,

(ii) joukko E on lineaarisesti riippumaton.

Jos E on avaruuden V kanta, niin alkion $\mathbf{u} \in V$ yksikäsitteisesti määrätyssä esityksessä (Lause 11.5.1)

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

ovat skalaarit $x_i \in \mathcal{K}$ *koordinaatteja*.

Huomautus 12.1.2 Yksikäsitteisyys tarkoittaa tässä "yhteenlaskujärjestystä vaille yksikäsitteisyyttä". Kun sovimme, että pidämme kantavektorien järjestyksen koko ajan samana, niin voimme käyttää *samaistusta*

$$\mathbf{u} \cong (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T.$$

Esimerkki 12.1.3 a) Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *luonnollinen* tai *standardi* kanta on

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ luonnollinen kanta on joukko

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Triviaalilla avaruudella $\{\mathbf{0}\}$ ei ole kantaa, sillä ainoa virittäjäjoukko $\{\mathbf{0}\}$ on lineaarisesti riippuva.

Tehtävä 12.1.4 Etsi kannat seuraaville avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruuksille:
a) Diagonaaliset 2×2 matriisit.
b) 2×2-yläkolmiomatriisit.
c) Symmetriset 2×2 matriisit.
Ratkaisu sivulla 184.

Esimerkki 12.1.5 Polynomijoukko $\{1+x,\ x,\ x^2-1,\ x^3+x\}$ on määritelmän ja Esimerkkien 10.4.9 ja 11.4.2 mukaan avaruuden $\mathcal{P}_3$ kanta.

Tehtävä 12.1.6 Etsi kannat seuraaville polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruuksille:
a) Enintään astetta kaksi olevat polynomit $\mathcal{P}_2$.
b) Viritetty aliavaruus $[3x, 1-x^2, 5x]$.
Ratkaisu sivulla 184.

12.2 Kantavektorien lukumäärä

Esimerkki 12.2.1 Havainnollistetaan seuraavaa lausetta tilanteessa $n = 2$ ja $m = 3$, ts. näytetään, että jos lineaariavaruudella on kaksialkioinen kanta, niin sen kolmialkioiset vektorijoukot ovat lineaarisesti riippuvia.

Olkoon $E := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ lineaariavaruuden V kanta ja $U := \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subseteq V$ sen kolmialkioinen vektorijoukko.

Olkoon $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ joillekin $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{K}$. Koska E kantana virittää avaruuden V, on olemassa sellaiset skalaarit a_{ij}, että

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Kertomalla yhtälöt skalaareilla c_i ja laskemalla puolittain yhteen (tässä käytetään lineaariavaruuden aksioomia, mitä kaikkia?) saadaan

$$\mathbf{0} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3)\mathbf{e}_1 + (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3)\mathbf{e}_2.$$

Koska E kantana on lineaarisesti riippumaton, on oltava

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 = 0 \end{cases}$$

Lauseen 2.3.11 mukaan löytyy epätriviaali ratkaisu $c_1 = \hat{c}_1$, $c_2 = \hat{c}_2$, $c_3 = \hat{c}_3$, joista esim. $\hat{c}_2 \neq 0$. Siis

$$\hat{c}_1\mathbf{u}_1 + \hat{c}_2\mathbf{u}_2 + \hat{c}_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0},$$

ja täten U on lineaarisesti riippuva.

Lause 12.2.2 Jos lineaariavaruudella on n-alkioinen kanta, niin jokainen vektorijoukko, jossa on alkioita aidosti enemmän kuin n, on lineaarisesti riippuva.

Todistus. Olkoon $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ lineaariavaruuden V kanta ja

$$U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} \subseteq V$$

joukko, jossa on $m > n$ alkiota. Jokaisella vektorilla $\mathbf{u}_j$ on kannassa E yksikäsitteinen esitys

$$\mathbf{u}_j = a_{1j}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{nj}\mathbf{e}_n, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Oletetaan, että $c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$. Sijoitetaan tähän kukin $\mathbf{u}_j$, jolloin vaihtamalla summausjärjestys

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{m} c_j\mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{m} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j \right) \mathbf{e}_i.$$

Koska E on kanta, on $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j = 0$ kaikilla $i = 1$, 2, …, n. Näin syntyy lineaarinen homogeeninen yhtälöryhmä, jossa on n yhtälöä ja $m > n$ tuntematonta c_j (vrt. Esimerkki 12.2.1). Lauseen 2.3.11 mukaan yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu $(\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_m)$, jossa siten ainakin yksi $\hat{c}_j \neq 0$. Siis

$$\hat{c}_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \hat{c}_m\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\hat{c}_j \right) \mathbf{e}_i = \mathbf{0},$$

joten U on lineaarisesti riippuva. □

Seuraus 12.2.3 Lineaariavaruuden jokaisessa äärellisessä kannassa on sama määrä alkioita.

Todistus. Olkoot E ja F kaksi kantaa ja olkoot niiden alkioiden lukumäärät m ja n. Koska joukko E on lineaarisesti riippumaton ja F on kanta, on Lauseen 12.2.2 mukaan $m \leq n$. Vaihtamalla joukkojen E ja F roolit seuraa $n \leq m$. Siis $m = n$. □

Tehtävä 12.2.4 Voiko joukko

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

olla avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta?

Ratkaisu sivulla 184.

12.3 Kannan olemassaolo

Apulause 12.3.1 Jos V on äärellisesti viritetty lineaariavaruus, niin avaruuden V virittää eräs sellainen joukko F, joka on alkiomäärältään suppein; toisin sanoen, jokaisessa muussa avaruuden V virittäjäjoukossa on vähintään yhtä monta alkiota kuin joukossa F.

Todistus. Koska V oli äärellisesti viritetty, sillä on eräs äärellinen virittäjäjoukko

$$E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Merkitään $\#(A) :=$ joukon A alkiomäärä. Silloin $\#(E) = n$. Olkoon edelleen

$$S := \{\#(W) \mid W \subseteq V \text{ äärellinen virittäjäjoukko}\},$$

siis äärellisten virittäjäjoukkojen alkiomäärien joukko. Nyt $S \subseteq \mathbb{N}$ ja $n \in S$, joten S on epätyhjä luonnollisten lukujen joukon osajoukko. Tunnetusti joukossa S on pienin luku, olkoon se $k \in \mathbb{N}$. Joukon S määrittelyn perusteella on olemassa k-alkioinen virittäjäjoukko, joka myös on mahdollisimman suppea. $\square$

Lause 12.3.2 Äärellisesti viritetyllä ei-triviaalilla lineaariavaruudella on ainakin yksi kanta.

Todistus. Olkoon $V \neq \{\mathbf{0}\}$ äärellisesti viritetty lineaariavaruus. Apulauseen 12.3.1 mukaan avaruuden V virittäjäjoukkojen keskuudessa on suppein, olkoon eräs näistä

$$F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}.$$

Jos $n = 1$, on V yhden vektorin $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{0}$ virittämä ja lineaarisesti riippumattomana $\{\mathbf{f}_1\}$ on kanta. Olkoon siis $n \geq 2$. Riittää osoittaa, että F on lineaarisesti riippumaton.

Vastaoletus: F on lineaarisesti riippuva. Silloin ainakin yksi $\mathbf{f} \in F$ on esitettävissä muiden lineaarikombinaationa (miksi?). Joukko $F' := F \setminus \{\mathbf{f}\}$ olisi tällöin avaruuden V virittäjä (Lause 10.5.2), jossa on vain $n-1$ alkiota. Tämä on vastoin joukon F valintaa, joten vastaoletus on väärä ja väite tosi. $\square$

12.4 Dimensio

Määritelmä 12.4.1 Lineaariavaruuden V *dimensio* on

$$\dim V := \begin{cases} 0, & \text{jos } V = \{\mathbf{0}\}, \\ n, & \text{jos } V\text{:llä on } n\text{-alkioinen kanta}, \\ \infty, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Jos $\dim V < \infty$, on V *äärellisulotteinen*, muutoin *ääretönulotteinen* (*infinite dimensional*).

Tehtävä 12.4.2 Mitkä ovat dimensiot avaruuksille a) $\mathbb{R}^3$, b) $\mathbb{R}^n$, c) $\mathbb{R}^{2\times 2}$, d) $\mathbb{R}^{m\times n}$, e) $\mathcal{P}_2$, f) $\mathcal{P}_n$.

Ratkaisut sivulla 184.

Esimerkki 12.4.3 Mikä on lineaariavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuden

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 = 0, 2x_2 = x_3 \right\}$$

dimensio? Entä kanta?

Ratkaisu. Selvästi

$$\mathbf{u} \in U \iff \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

joten joukko U voidaan esittää muodossa

$$U = \left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

Se on siis yhden nollasta poikkeavan vektorin $(0\ 1\ 2)^T$ virittämä. Koska yhden nollasta poikkeavan vektorin muodostama joukko on lineaarisesti riippumaton, on $\dim U = 1$ ja (eräs) kanta on joukko $\{(0\ 1\ 2)^T\}$.

Tehtävä 12.4.4 Mikä on lineaariavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuden

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

dimensio? Entä kanta?

Ratkaisu sivulla 184.

Huomautus 12.4.5 a) Jokaisella ei-triviaalilla äärellisulotteisella lineaariavaruudella on siis äärellisiä kantoja. Yleensä näitä on äärettömän paljon.

b) Kantoja saadaan esille mm. niin, että jostakin äärellisestä virittäjäjoukosta poistetaan alkioita niin, että jäljellä oleva joukko yhä virittää kyseisen avaruuden. Toinen tapa on lähteä lisäämään vektoreita lineaarisesti riippumattomaan joukkoon.

Seuraus 12.4.6 Olkoon lineaariavaruuden V dimensio $n \in \mathbb{N}$. Silloin sen

(i) jokainen n-alkioinen lineaarisesti riippumaton osajoukko on kanta,

(ii) jokainen n-alkioinen virittäjäjoukko on kanta.

Todistus. Harjoitustehtävä. Voit käyttää edellisissäkin luvuissa olevia tuloksia, kuten ”viritysmielessä turhan” vektorin poisjättäminen . . . □

Esimerkki 12.4.7 Onko vektorijoukko

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ \pi \end{pmatrix} \right\}$$

lineaariavaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta?

Ratkaisu. Koska vektoreita on 3 ja $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, riittää Seurauksen 12.4.6 mukaan näyttää lineaarinen riippumattomuus. Koska vektoreista muodostetulle matriisille on

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 11 \\ 2 & 0 & \pi \end{vmatrix} = 96 - 6\pi \neq 0,$$

matriisi on säännöllinen (Lause 6.5.1). Lauseen 11.3.1 nojalla joukko on lineaarisesti riippumaton.

Esimerkki 12.4.8 a) Kaikkien reaalisten polynomien joukko $\mathcal{P}$ on ääretönulotteinen lineaariavaruus. Jos nimittäin olisi esimerkiksi $\dim \mathcal{P} = n$, jokainen $n+1$ polynomin joukko olisi lineaarisesti riippuva. Kuitenkin esimerkiksi $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ voidaan osoittaa lineaarisesti riippumattomaksi. Avaruudella $\mathcal{P}$ on kuitenkin numeroituvasti ääretön kanta, jonka alkiot ovat x^k, $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Avaruudet $\mathcal{C}^k(\Delta, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}_0$, ovat myös ääretönulotteisia, ja niillä ei ole edes numeroituvaa kantaa.

12.5 Aliavaruuksien dimensioista

Jos V on äärellisulotteinen lineaariavaruus ja $\dim V = n$, niin sen jokaisen aliavaruuden dimensio on enintään n.

Tehtävä 12.5.1 Perustele yllä oleva väite. Ratkaisu sivulla 185.

Lause 12.5.2 Olkoon W äärellisulotteisen lineaariavaruuden V aliavaruus. Silloin $W = V$ jos ja vain jos $\dim W = \dim V$.

Todistus. a) Jos $W = V$, on tietenkin $\dim W = \dim V$.

b) Oletetaan, että $\dim W = \dim V =: n$. Koska $W \subseteq V$, riittää näyttää, että $V \subseteq W$. Olkoon siis $\mathbf{v} \in V$ mielivaltainen. Lineaariavaruudella W on oletuksen mukaan n-alkioinen kanta $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subseteq W$. Mutta $E \subseteq W \subseteq V$ on lineaarisesti riippumaton ja siten E on Seurauksen 12.4.6 mukaan myös avaruuden V kanta. Näin ollen joillakin $\alpha_i \in \mathcal{K}$

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n.$$

Mutta jokainen $\mathbf{e}_i \in W$ joten myös $\mathbf{v} \in W$. Siis myös $V \subseteq W$, ja $W = V$. $\square$

Esimerkki 12.5.3 Olkoon $n \geq 2$. Joukko $V \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$V := \{\, (\, x_1 \ \cdots \ x_n \,)^T \mid x_1 + \cdots + x_n = 0 \,\},$$

on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus (todenna itse). Mikä on sen dimensio?

Ratkaisu. Koska alkiolle $\mathbf{x} = (\, x_1 \ \cdots \ x_n \,)^T \in V$, on $x_1 = -x_2 - x_3 - \cdots - x_n$, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \left(-\textstyle\sum_{k=2}^n x_k \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\right)^T \\
&= x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Olkoot yllä olevat pystyvektorit $F := \{\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$. Joukko F selvästi virittää avaruuden V. Toisaalta, yhtälöllä

$$\alpha_2\mathbf{f}_2 + \cdots \alpha_n\mathbf{f}_n = \mathbf{0}$$

on vain triviaaliratkaisu $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, joten F on lineaarisesti riippumaton. Siis $\dim V = n - 1$.

12.6 Kannaksi täydentäminen

Lause 12.6.1 Olkoon V ei-triviaali äärellisulotteinen lineaariavaruus. Jos $F \subseteq V$ on epätyhjä lineaarisesti riippumaton joukko, niin F voidaan *täydentää* kannaksi, ts. on olemassa kanta $E \subseteq V$, jolle $F \subseteq E$.

Todistus. Olkoon $F \subseteq V$ k-alkioinen lineaarisesti riippumaton joukko ja $n := \dim V$. Lauseen 12.2.2 mukaan $k \leq n$.

1) Jos F on kanta, on asia selvä. Jos F ei ole kanta, niin F ei viritä avaruutta V ja on olemassa $\mathbf{v}_1 \in V \setminus [F]$. Silloin joukko $F_1 := F \cup \{\mathbf{v}_1\}$ on lineaarisesti riippumaton (Lause 11.2.4).

2) Jos myöskään F_1 ei ole kanta, on olemassa $\mathbf{v}_2 \in V \setminus [F_1]$ ja $F_2 := F_1 \cup \{\mathbf{v}_2\}$ on edelleen lineaarisesti riippumaton.

Näin jatkaen, mikäli F_{m-1} ei ole kanta, on olemassa $\mathbf{v}_m \in V \setminus [F_{m-1}]$ siten, että

$$F_m := F_{m-1} \cup \{\mathbf{v}_m\} = F \cup \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$$

on lineaarisesti riippumaton. Seurauksen 12.2.3 mukaan prosessi päättyy, kun $m = n - k$. Silloin $[F_{n-k}] = V$ ja $E := F_{n-k}$ on eräs joukon F sisältävä avaruuden V kanta. □

Esimerkki 12.6.2 Täydennä $\mathbb{R}^3$:n kannaksi vektorijoukko

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ratkaisu. Melkein mikä tahansa vektori käy. Otetaan

$$E' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Silloin

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

joten kyseessä on Lauseen 11.3.1 mukaan lineaarisesti riippumaton vektorijoukko. Seurauksen 12.4.6 mukaan E' on kanta.

Tehtävä 12.6.3 Tehtävässä 10.4.5 nähtiin, että joukko $\{x, x^3 - 2x\}$ ei viritä avaruutta $\mathcal{P}_3$, eikä näin ollen ole sen kanta. Täydennä se $\mathcal{P}_3$:n kannaksi. Ratkaisu sivulla 185.

12.7 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 12.1.4 : Merkitään joukkoja

a) $\mathcal{D} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

b) $\mathcal{Y} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

c) $\mathcal{S} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Esityksistä käynee selväksi, että

a) Eräs kanta on $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) Eräs kanta on $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) Eräs kanta on $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Tehtävä 12.1.6 : a) Ilmeinen kanta on $\{1, x, x^2\}$.
b) Jompikumpi $3x$ tai $5x$ on viritysmielessä turha, eräs kanta on $\{3x, 1 - x^2\}$.

Tehtävä 12.2.4 : Ei, sillä siinä on neljä vektoria. Seurauksen 12.2.3 ja Esimerkin 12.1.3 a) mukaan kannoissa on 3 vektoria.

Tehtävä 12.4.2 : a) 3, b) n, c) 4, d) mn, e) 3, f) $n + 1$.

Tehtävä 12.4.4 : Selvästikin

$$\mathbf{u} \in U \iff \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a + 2b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

U on siis kahden lineaarisesti riippumattoman vektorin virittämä, joten $\dim U = 2$, ja eräs kanta on

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tehtävä 12.5.1 : Aliavaruus on osajoukko, joten sen virittämiseen ei tarvita ainakaan enempää vektoreita kuin itse avaruuden virittämiseen, ts. aliavaruuden kannoissa ei voi olla enempää vektoreita. Siis aliavaruuden dimensio ei voi olla ainakaan isompi.

Tehtävä 12.6.3 : Kokeile joukkoa

$$E := \{x, x^3 - 2x, 1, x^2\}.$$

13 MATRIISIIN LIITTYVÄT ALIAVARUUDET

13.1 Matriisin nolla-avaruus

Määritelmä 13.1.1 Matriisin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *nolla-avaruus* (*nullspace*) on joukko

$$N(A) := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\}.$$

Joukko $N(A)$ on siis lineaarisen homogeenisen yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisujoukko (vrt. Esimerkki 10.1.7).

Lause 13.1.2 Matriisin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nolla-avaruus on lineaariavaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Todistus. (0) Määrittelynsä mukaan $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $N(A) \neq \emptyset$, sillä $\mathbf{0} \in N(A)$.
(i) ja (ii): Jos $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N(A)$, niin

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

joten $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in N(A)$ ja $\alpha\mathbf{x} \in N(A)$. Kyseessä on siis todellakin aliavaruus. □

Esimerkki 13.1.3 Määritä nolla-avaruus matriisille

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu. Riittää ratkaista vastaava homogeeniyhtälö:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1' \\ R_2' \leftarrow R_2 - 2R_1 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1'' \leftarrow R_1' + R_2' \\ R_2'' \leftarrow -R_2' \end{array} \end{aligned}$$

Saadun yhtälöryhmän

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrl} x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

ratkaisussa voidaan x_3 ja x_4 voidaan valita vapaasti. Jos valitaan $x_3 = s \in \mathbb{R}$ ja $x_4 = t \in \mathbb{R}$, yleinen ratkaisuvektori on

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s-t \\ -2s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

ja matriisin A nolla-avaruus on avaruuden $\mathbb{R}^4$ kaksiulotteinen aliavaruus (kanta?)

$$N(A) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

13.2 Rivi- ja sarakeavaruudet

Matriisin $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rivit $\mathbf{r}_i$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^{1 \times n}$ matriiseja, joita kutsutaan *rivivektoreiksi* (*row vector*). Vastaavasti sarakkeet $\mathbf{s}_i$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{m \times 1}$ *sarakevektoreita* (*column vector*):

$$A \quad = \quad \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_n \end{matrix} \end{array}$$

Määritelmä 13.2.1 Reaalisen matriisin $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rivivektorien virittämä avaruuden $\mathbb{R}^{1 \times n}$ aliavaruus $[A]_r$ on matriisin A *riviavaruus* (*row space*). Sarakevektorien virittämä avaruuden $\mathbb{R}^m$ aliavaruus $[A]_s$ on matriisin *sarakeavaruus* (*column space*). Riviavaruuden dimensiota kutsutaan matriisin *asteeksi* (*rank*) ja merkitään $r(A) := \dim[A]_r$. Edellä olevin merkinnöin siis

$$\begin{aligned} [A]_r &= \{\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{r}_m \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\} \\ &= [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m] \subseteq \mathbb{R}^{1 \times n}, \\ [A]_s &= \{\beta_1 \mathbf{s}_1 + \beta_2 \mathbf{s}_2 + \cdots + \beta_n \mathbf{s}_n \mid \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}\} \\ &= [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n] \subseteq \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Lause 13.2.2 Riviekvivalenteilla matriiseilla on sama riviavaruus.

Todistus. Olkoot A ja $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ riviekvivalentteja, ts. muunnettavissa alkeisoperaatioilla toisikseen. Jos E on $m\times m$-alkeismatriisi, niin matriisin EA rivit ovat matriisin A rivien lineaarikombinaatioita. Täten $[EA]_r \subseteq [A]_r$ on aliavaruus. Jos siis

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A,$$

missä matriisit E_i ovat alkeismatriiseja, seuraa edellistä toistuvasti soveltamalla, että $[B]_r \subseteq [A]_r$ on aliavaruus. Vaihtamalla yllä matriisien A ja B roolit saadaan myös $[A]_r \subseteq [B]_r$. □

Seuraus 13.2.3 Matriisin riviavaruus määritetään helposti muuntamalla matriisi porrasmuotoon. Riviavaruuden eräs kanta on nollavektorista eriävien rivien joukko ja matriisin aste niiden lukumäärä.

Esimerkki 13.2.4 Määritetään matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

riviavaruus. Matriisi muuntuu alkeisoperaatioilla porrasmuotoon

$$U := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Koska $[U]_r = [A]_r$, on riviavaruuden dimensio eli matriisin aste 2 ja

$$[A]_r = \left\{\alpha\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\},$$

kantana esimerkiksi $\left\{\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 5\end{pmatrix}\right\}$.

Huomautus 13.2.5 Matriisin riviavaruus ja sen transpoosin sarakeavaruus ovat olennaisesti sama asia: $m\times n$-matriisin A riviavaruus saadaan muodostamalla transpoosin A^T sarakeavaruus ja transponoimalla sen kaikki alkiot. Voidaan siis kirjoittaa

$$[A]_r = \left([A^T]_s\right)^{\mathcal{T}},$$

missä $\mathcal{T}$ tarkoittaa koko vektorijoukon transponoimista. Vastaavasti matriisin A sarakeavaruus saadaan muodostamalla transpoosin A^T riviavaruus ja transponoimalla sen vektorit.

Matriisin rivi- ja sarakeavaruudet ovat yleensä aivan eri avaruuksia. Kuitenkin:

Lause 13.2.6 Matriisin rivi- ja sarakeavaruudella on sama dimensio

$$r(A) = \dim[A]_r = \dim[A]_s.$$

Todistus. Jos $A = O$, on asia selvä: dimensiot ovat $= 0$. Oletetaan sitten, että A ei ole nollamatriisi. Olkoon matriisin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ aste $k := \dim[A]_r$ ja U sen porrasmuoto. Matriisin U riveistä k on nollasta poikkeavia. Olkoon U_L matriisi, johon on otettu matriisista U ne sarakkeet, joissa esiintyy jonkin rivin johtava ykkönen, ja A_L matriisi, jossa on matriisista A vastaavat sarakkeet. Molemmissa on k saraketta. Siis,

$$\begin{array}{ccc}
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \rightarrow & U = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2k} & \text{jotain} & a'_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & a'_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\downarrow & \swarrow \text{ johtavien} & \text{sarakkeet} \downarrow \\
A_L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1k} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{2k} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{3k} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{4k} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mk} & \cdots \end{pmatrix} & \leftarrow & U_L = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{1k} & \cdots \\ 0 & 1 & a'_{2k} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
m \times k & & m \times k
\end{array}$$

Koska myös matriisit U_L ja A_L ovat riviekvivalentteja, on yhtälöillä $A_L\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ja $U_L\mathbf{x} = \mathbf{0}$ samat ratkaisut. Matriisin U_L sarakkeet ovat selvästi lineaarisesti riippumattomia, joten ainoa ratkaisu on $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Koska myös yhtälöllä $A_L\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on ainoastaan triviaaliratkaisu, ovat matriisin A_L sarakkeet lineaarisesti riippumattomia. Siten matriisin A sarakeavaruuden dimensio on vähintäin k eli $\dim[A]_s \geq k = \dim[A]_r$.

Soveltamalla samaa päättelyä matriisiin A^T saadaan

$$\dim[A]_r = \dim[A^T]_s \geq \dim[A^T]_r = \dim[A]_s.$$

Siis $\dim[A]_r = \dim[A]_s$. $\square$

Huomautus 13.2.7 Jokaiselle nollamatriisista poikkeavalle $m\times n$-matriisille siis pätee $1 \leq r(A) = \dim[A]_r = \dim[A]_s \leq \min(m, n)$.

Seuraus 13.2.8 Sarakeavaruuden eräs kanta voidaan poimia matriisista A *käyttäen hyväksi* sen *porrasmuotoa* U: poimitaan *matriisista* A ne sarakkeet, joissa matriisin U jollakin rivillä on johtava ykkönen.

Esimerkki 13.2.9 Määritetään matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

aste ja rivi- ja sarakeavaruudet. Porrasmuoto on (laske!)

$$U := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riviavaruuden erään kannan muodostavat porrasmuodon kolme ensimmäistä rivivektoria ja riviavaruus on siten

$$[A]_r = \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Matriisin aste on siis 3. Porrasmatriisin johtavat ykköset ovat 1., 2. ja 5. sarakkeessa. Sarakeavaruuden eräs kanta saadaan poimimalla matriisista A kyseiset sarakkeet, joten

$$[A]_s = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$$

Tehtävä 13.2.10 Olkoon

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Määritä kannat rivi-, sarake- ja nolla-avaruuksille.
Ratkaisu sivulla 193.

13.3 Lineaarisista yhtälöryhmistä – dimensiolause

Lineaarinen yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ voidaan kirjoittaa vektorimuodossa

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

jossa vasen puoli on kerroinmatriisin sarakkeiden lineaarikombinaatio. Käymällä kertoimilla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ läpi kaikki mahdolliset reaaliarvot saadaan aikaan kaikki sarakeavaruuden $[A]_s$ vektorit $\mathbf{b}$.

Yhtälöryhmällä on siis ratkaisu täsmälleen silloin, kun $\mathbf{b}$ voidaan esittää matriisin A sarakevektoreiden lineaarikombinaationa, ts. jos ja vain jos $\mathbf{b} \in [A]_s$.

Valitsemalla $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ nähdään, että homogeeniyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaaliratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tarkalleen silloin, kun matriisin A sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia (Lause 11.3.1).

Lause 13.3.1 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

a) Lineaarinen yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ratkeava *millä tahansa* $\mathbf{b}$ jos ja vain jos $[A]_s = \mathbb{R}^m$.

b) Lineaarisella yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on korkeintaan yksi ratkaisu *millä tahansa* $\mathbf{b}$ jos ja vain jos matriisin A sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todistus. a) Yllä jo todettiin, että yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ratkaisuja jos ja vain jos $\mathbf{b} \in [A]_s$. Toisaalta $[A]_s = \mathbb{R}^m$ täsmälleen silloin, kun matriisin A sarakkeet virittävät avaruuden $\mathbb{R}^m$.

b) Oletetaan ensin, että yhtälöllä on enintään yksi ratkaisu kullakin $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Erikoisesti homogeeniyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaaliratkaisu. Mutta yllä on jo todettu, että silloin matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia.

Oletetaan toiseksi, että matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia ja että yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ratkaisuja. Silloin $\mathbf{b} \in [A]_s$. Lauseen 11.5.1 mukaan vektorin $\mathbf{b}$ esitys matriisin A sarakkeiden lineaarikombinaationa on yksikäsitteinen, joten ratkaisuja on tasan yksi. $\square$

Seuraus 13.3.2 Neliömatriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on säännöllinen jos ja vain jos sen sarakkeet muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kannan.

Todistus. Lauseen 11.3.1 mukaan neliömatriisi A on säännöllinen jos ja vain jos sen sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia. Koska sarakkeet ovat n-vektoreita ja niitä on n kappaletta, ne muodostavat kannan jos ja vain jos ne ovat lineaarisesti riippumattomia. □

Dimensiolause 13.3.3 Matriisin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ riviavaruuden ja nolla-avaruuden dimensioiden summa on n, eli

$$r(A) + \dim N(A) = n.$$

Todistus. Olkoon matriisin A aste $k := r(A)$. Matriisin A redusoidun porrasmuodon matriisissa U on silloin k nollasta poikkeavaa riviä. Yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on silloin k johtavaa ja $n-k$ vapaasti valittavaa tuntematonta. Siis $\dim N(A) = n - k$. □

Esimerkki 13.3.4 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ja oletetaan, että on olemassa $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$, joille

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{ja} \quad A\mathbf{z} = \mathbf{b}.$$

a) Mitä voidaan sanoa matriisin A asteesta ja nolla-avaruuden dimensiosta?

b) Entä jos erikoisesti $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{y} \not\parallel \mathbf{z}$?

Ratkaisu. a) Lauseen 13.3.1 b)-kohdan nojalla matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippuvia ja siten aste

$$r(A) = \dim[A]_s \leq n - 1.$$

Dimensiolauseen 13.3.3 mukaan nolla-avaruudelle pätee

$$\dim N(A) = n - r(A) \geq 1.$$

b) Koska $\mathbf{y}$ ja $\mathbf{z}$ ovat erisuuntaisia (ja siten kumpikaan ei voi olla nollavektori), on $\dim[\mathbf{y}, \mathbf{z}] = 2$. Koska

$$A(\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha A\mathbf{y} + \beta A\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

on $[\mathbf{y}, \mathbf{z}] \subseteq N(A)$. Täten $\dim N(A) \geq 2$ ja Dimensiolauseen 13.3.3 mukaan

$$r(A) = n - \dim N(A) \leq n - 2.$$

13.4 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 13.2.10: Matriisin A redusoitu porrasmuoto on

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eräs riviavaruuden kanta on

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$$

ja sarakeavaruuden kanta

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Yhtälöt $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ja $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ovat yhtäpitäviä, joten $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T \in N(A)$ jos ja vain jos

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Kun valitaan $x_2 = s \in \mathbb{R}$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$, ovat johtavat tuntemattomat $x_1 = -2s - 3t$ ja $x_3 = -2t$. Nolla-avaruus koostuu vektoreista

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - 3t \\ s \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

joten sen eräs kanta on

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

14 LINEAARIKUVAUS

Kun halutaan siirtää ”tietoa” samantyyppisten matemaattisten struktuureiden kesken, sopiva siirtoväline on sellainen kuvaus (yleisemmin myös relaatio tai operaattori), joka *säilyttää* struktuurien olennaiset ominaisuudet, ts. on yhteensopiva lähtö- ja maaliavaruuden rakenteiden kanssa. Lineaariavaruuksien kesken tiedonsiirto tapahtuu luonnollisimmin *laskutoimitukset* säilyttävien *lineaarikuvausten* avulla.

Äärellisulotteisten avaruuksien välisten lineaarikuvausten esittämisessä on matriiseilla keskeinen osuus. Myös lineaariavaruuden *kannanvaihto* eli siirtyminen koordinaatistosta toiseen käy matriisin avulla.

14.1 Lineaarikuvauksen määrittely

Määritelmä 14.1.1 Olkoot $(V,+,\cdot)$ ja $(W,\oplus,\odot)$ $\mathcal{K}$-kertoimisia lineaariavaruuksia. Funktio $L : V \to W$ on *lineaarikuvaus* eli *lineaarinen funktio* (*linear function, transformation, operator*), jos

(i) $L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) \oplus L(\mathbf{v})$ kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

(ii) $L(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \odot L(\mathbf{u})$ kaikilla $\alpha \in \mathcal{K}$, $\mathbf{u} \in V$.

Kaikkien lineaarikuvausten $V \to W$ joukkoa merkitään $\mathcal{L}(V,W)$.

Huomautus 14.1.2 a) Määritelmässä on haluttu korostaa laskutoimitusten merkitystä. Jatkossa kertomerkit jätetään yleensä pois ja eri avaruuksien yhteenlaskuja *merkitään* samalla tavalla. On lisäksi muistettava, että skalaarilla kertominen suoritetaan ennen yhteenlaskua.

b) Vaatimukset (i) ja (ii) voidaan yhdistää ehdoksi:

(iii) $L(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{u}) + \beta L(\mathbf{v})$ kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$.

Esimerkki 14.1.3 Lineaarikuvauksia ovat ainakin:

a) *nollakuvaus* $\bar{0} : V \to W$, $\bar{0}(\mathbf{u}) := \mathbf{0}$ kaikilla $\mathbf{u} \in V$,

b) *identtinen kuvaus* $\mathrm{Id} : V \to V$, $\mathrm{Id}(\mathbf{u}) := \mathbf{u}$,

c) edellisen yleistys *skaalaus* tai *venytys* (*dilation*): vakioarvolla $\lambda \in \mathcal{K}$ määritellään $S_\lambda : V \to V$, $S_\lambda(\mathbf{u}) := \lambda\mathbf{u}$.

Esimerkki 14.1.4 Muodostaako seuraava sääntö f lineaarikuvauksen,

$$f(x) := \begin{pmatrix} 2x \\ -x \end{pmatrix}?$$

Ratkaisu. Muodostaa, kun lähtö- ja maalijoukot valitaan sopiviksi samakertoimisiksi lineaariavaruuksiksi, esimerkiksi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, koska

$$\text{(i)} \quad f(x+y) = \begin{pmatrix} 2(x+y) \\ -(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y \\ -y \end{pmatrix} = f(x) + f(y)$$

$$\text{(ii)} \quad f(\alpha x) = \begin{pmatrix} 2\alpha x \\ -(\alpha x) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2x \\ -x \end{pmatrix} = \alpha f(x)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 14.1.5 Onko seuraava funktio lineaarinen?

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + x$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$

Ratkaisu sivulla 202.

Lause 14.1.6 Jos $L : V \to W$ on lineaarikuvaus, niin

a) $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$,

b) $L(-\mathbf{u}) = -L(\mathbf{u})$ kaikilla $\mathbf{u} \in V$,

c) $L\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i L(\mathbf{u}_i)$ kaikilla skalaareilla α_i ja $\mathbf{u}_i \in V$.

Todistus. a) Lineaariavaruuden laskusääntöjen ja ehdon (ii) nojalla

$$L(\mathbf{0}_V) = L(0\mathbf{0}_V) = 0L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

b) Pitää osoittaa $L(-\mathbf{u})$ vektorin $L(\mathbf{u})$ vastavektoriksi. Mutta:

$$L(\mathbf{u}) + L(-\mathbf{u}) = L(\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

c) Induktiolla (harjoitustehtävä). □

Tehtävä 14.1.7 Osoita Huomautuksen 14.1.2 ehto (iii) yhtäpitäväksi ehtojen (i) ja (ii) kanssa.
Ratkaisu sivulla 202.

Tehtävä 14.1.8 Olkoot $(V, +, \cdot)$ ja $(W, \oplus, \odot)$ $\mathcal{K}$-kertoimisia lineaariavaruuksia. Osoita, että kaikkien lineaarikuvausten $V \to W$ joukko $\mathcal{L}(V, W)$ varustettuna funktioiden pisteittäisellä yhteenlaskulla ja skaalausfunktioilla on $\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus.
Ratkaisu sivulla 202.

14.2 Tason lineaarikuvauksia

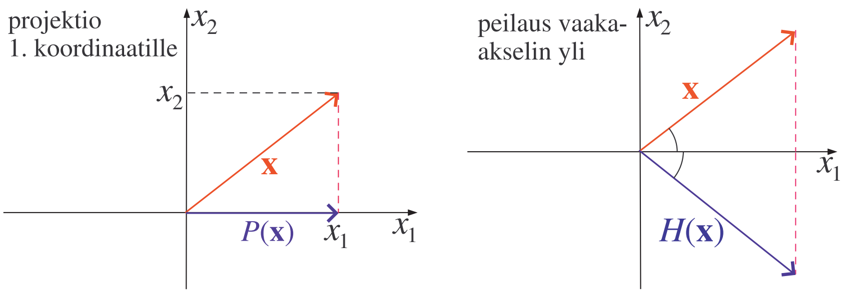
Merkintäsopimus: Kun muuttujana on vektori tai matriisi, jossa itsessään on sulut, jätetään muut sulut pois; esimerkiksi

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$

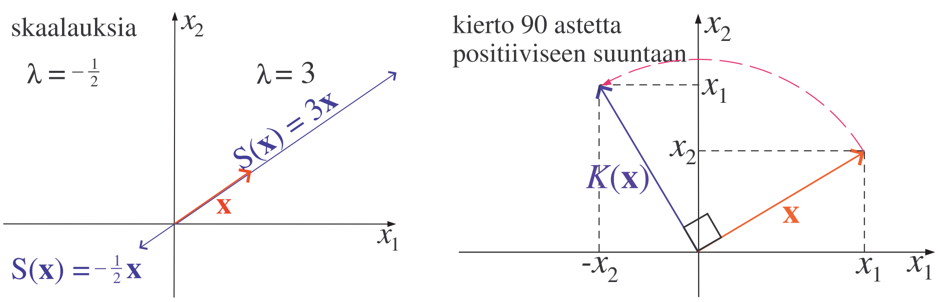
Olkoot $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Määritellään kuvaukset P, H, S, $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &:= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, & H(\mathbf{x}) &:= \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \\ S(\mathbf{x}) &:= \lambda\mathbf{x}, & K(\mathbf{x}) &:= \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Näitä lineaarisia perusfunktioita on esitelty Kuvissa 22 ja 23.



Kuva 22: Projektio ja peilaus



Kuva 23: Venytyksiä ja kierto

Kuvaus P on *projektio* ja se projisoi tasojoukon x_1-akselille. Kuvaus H on *peilaus* x_1-akselin suhteen. Kuvaus S on *venytys* (*dilation*) ja se kuvaa tasokuvion koolltaan $|\lambda|$-kertaiseksi (*suurennus/pienennys*). Kuvaus K on *kierto* origon suhteen kulman $\frac{\pi}{2}$ verran *positiiviseen suuntaan*, so. vastapäivään.

Lisäksi voi katsoa dynaamiset kuviot
Lineaariset perusfunktiot tasossa (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/LineaarisetPerusfunktiot.htm`

Lause 14.2.1 Kuvaukset P, H, S, $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ovat lineaarisia.

Todistus. Edellä P, H, S ja K on jo todettu funktioiksi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ja nämä ovat $\mathbb{R}$-kertoimisia lineaariavaruuksia. Käytetään nyt joko määritelmän ehtoja (i) ja (ii) tai niiden yhdistelmää (iii):

P ja H) Kaikilla α, $\beta \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T$, $\mathbf{y} = (y_1\ y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ on tason normaalein laskutoimituksin:

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Näin ollen soveltaen funktioiden määrittelyä

$$\begin{aligned} P(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= P\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha P(\mathbf{x}) + \beta P(\mathbf{y}), \\ H(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= H\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ -\alpha x_2 - \beta y_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha H(\mathbf{x}) + \beta H(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

S) (i) ja (ii): jos $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, niin skalaari-vektori-laskusääntöjen mukaan

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = S(\mathbf{x}) + S(\mathbf{y}), \\ S(\alpha\mathbf{x}) &= \lambda(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \alpha S(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Tapaus K jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Tehtävä 14.2.2 Todista lineaariseksi bijektioksi tason kierto $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu sivulla 203.

Esimerkki 14.2.3 Voiko kuvaus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ F\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

olla lineaarinen?

Ratkaisu. Oletetaanpa, että F olisi kyseisenlainen lineaarikuvaus. Koska

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

olisi lineaarikuvauksen ominaisuuksien (i) ja (ii) mukaan

$$F\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Tämä on ristiriidassa alkuperäisen vaatimuksen

$$F\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

kanssa. Siis F ei voikaan olla lineaarikuvaus.

14.3 Lineaarikuvauksia $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Seuraavassa joitakin eriulotteisten avaruuksien välisiä kuvauksia, joista osa on lineaarisia, osa ei. Luvussa 16 osoitetaan, että jokainen lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ voidaan esittää matriisin avulla.

Esimerkki 14.3.1 Kuvaus $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$L(\mathbf{x}) = L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} := x_1 + x_2,$$

nähdään helposti lineaariseksi.

Esimerkki 14.3.2 Kuvaus $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$L(\mathbf{x}) = L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x_2\\x_1\\x_1 + x_2\end{pmatrix},$$

on lineaarinen, sillä jos $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T$, $\mathbf{y} = (y_1\ y_2)^T \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= L\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2+y_2\\x_1+y_1\\x_1+y_1 + x_2+y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\x_1\\x_1+x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_2\\y_1\\y_1+y_2\end{pmatrix} \\ &= L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$L(\alpha\mathbf{x}) = L\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x_2\\\alpha x_1\\\alpha x_1 + \alpha x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x_2\\\alpha x_1\\\alpha(x_1 + x_2)\end{pmatrix} = \alpha L(\mathbf{x}).$$

Esimerkki 14.3.3 Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus, jolle

$$L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Laske $L(\mathbf{x})$.

Ratkaisu. Koska

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

on lineaarisuuden nojalla

$$L(\mathbf{x}) = x_1 L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2 L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 + x_2\\x_1\\-x_1 + x_2\end{pmatrix}$$

Esimerkki 14.3.4 Onko kuvaus $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$N(\mathbf{x}) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

lineaarinen?

Ratkaisu. Ei ole lineaarinen, sillä esimerkiksi (ii) ei toteudu:

$$\begin{aligned} N\left(-2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) &= N\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \\ -2N\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &= -2\sqrt{1+1} = -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Esimerkki 14.3.5 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Silloin kuvaus $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$L_A(\mathbf{x}) := A\mathbf{x},$$

on lineaarinen. Nimittäin, matriisien laskukaavojen mukaan (iii) tosi:

$$L_A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = A(\alpha\mathbf{x})+A(\beta\mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x}+\beta A\mathbf{y} = \alpha L_A(\mathbf{x})+\beta L_A(\mathbf{y}).$$

Tehtävä 14.3.6 Onko funktio L,

$$L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 3x_1^2 - 4x_2$$

tulkittavissa lineaarikuvaukseksi?
Ratkaisu sivulla 203.

14.4 Muita esimerkkejä

Määrätty integraali on integroitavan funktion suhteen lineaarinen. Funktion derivoiminen ja integroiminen ovat lineaarisia funktiojoukkojen välisiä operaatioita (integroinnissa pitää kuitenkin jotenkin kiinnittää primitiivijoukosta aina yksi funktio jollakin ehdolla, tai sitten vaihtaa maalijoukoksi primitiivien ekvivalenssiluokat, ks. Analyysit).

Esimerkki 14.4.1 Olkoon $I : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Silloin

$$I(\alpha f + \beta g) = \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

Esimerkki 14.4.2 Kuvaus D, joka kuvaa derivoituvan funktion sen derivaattafunktioksi, $D(f) = f'$, on lineaarinen. Lineaarisia ovat myös (differentiaaliyhtälöistä tutut) Laplace-muunnos $f \mapsto \mathcal{L}(f)$, missä

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx,$$

sekä sen käänteismuunnos $\mathcal{L}^{-1}$.

14.5 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 14.1.5 : a) Ei ole lineaarinen, sillä esimerkiksi

(i) $f(0+0) = f(0) = 3$, mutta $f(0) + f(0) = 3 + 3 = 6$.

b) On lineaarinen. Jos x, y, α, $\beta \in \mathbb{R}$, niin

(ii) $f(\alpha x + \beta y) = 3(\alpha x + \beta y) = 3\alpha x + 3\beta y = \alpha \cdot 3x + \beta \cdot 3y = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Tehtävä 14.1.7 : a) Oletetaan, että (i) ja (ii) ovat voimassa ja $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$. Käyttämällä ensin ehtoa (i) ja sitten (ii) saadaan

$$L(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = L(\alpha\mathbf{u}) \oplus L(\beta\mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{u}) \oplus \beta L(\mathbf{v}).$$

Kääntäen, jos (iii) on totta, ehto (i) saadaan erikoistapauksena valitsemalla $\alpha = \beta = 1$. Samoin ehto (ii) seuraa valinnoilla $\beta = 0$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Tehtävä 14.1.8 : Helposti nähdään, että kaikkien funktioiden joukko

$$\mathcal{F}(V, W) = \{\, f : V \to W \mid f \text{ funktio} \,\}$$

varustettuna Esimerkistä 9.3.6 tutuilla pisteittäisillä operaatioilla

$$\begin{aligned} (f+g)(\mathbf{v}) &:= f(\mathbf{v}) \oplus g(\mathbf{v}) \text{ kaikilla } \mathbf{v} \in V \\ (\alpha f)(\mathbf{v}) &:= \alpha \odot f(\mathbf{v}) \text{ kaikilla } \alpha \in \mathcal{K}, \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

on lineaariavaruus. Lineaarisista funktioista koostuva osajoukko $\mathcal{L}(V, W)$ on epätyhjä, sillä ainakin nollafunktio on lineaarinen. $\mathcal{L}(V, W)$ osoitetaan lineaariavaruudeksi osoittamalla se aliavaruudeksi:

(i) Olkoot L, $M \in \mathcal{L}(V, W)$. Silloin (summan määritelmän, lineaarisuuden, vaihdannaisuuden ja liitännäisyyden sekä uudelleen summan määritelmän mukaan)

$$\begin{aligned} (L{+}M)(\mathbf{u}{+}\mathbf{v}) &= L(\mathbf{u}{+}\mathbf{v}) \oplus M(\mathbf{u}{+}\mathbf{v}) = (L(\mathbf{u}) {\oplus} L(\mathbf{v})) \oplus (M(\mathbf{u}) {\oplus} M(\mathbf{v})) \\ &= (L(\mathbf{u}) {\oplus} M(\mathbf{u})) \oplus (L(\mathbf{v}) {\oplus} M(\mathbf{v})) = (L{+}M)(\mathbf{u}) \oplus (L{+}M)(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

$L{+}M$ on siis lineaarinen ja siten $L{+}M \in \mathcal{L}(V, W)$.

(ii) Olkoot $L \in \mathcal{L}(V, W)$ ja $\mathbf{u} \in V$, α, $\beta \in \mathcal{K}$. Silloin

$$(\alpha L)(\beta\mathbf{u}) = \alpha{\odot}L(\beta\mathbf{u}) = \alpha{\odot}\,(\beta{\odot}L(\mathbf{u})) = \beta{\odot}\,(\alpha \odot L(\mathbf{u})) = \beta \odot ((\alpha L)(\mathbf{u}))\,.$$

Siis myös $\alpha L \in \mathcal{L}(V, W)$.

Aliavaruutena $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$ on $\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus.

Tehtävä 14.2.2 : K on selvästi funktio $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ja nämä ovat $\mathbb{R}$-kertoimisia lineaariavaruuksia. Käytetään määritelmän yhdistelmäehtoa
(iii): Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T$, $\mathbf{y} = (y_1\ y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mielivaltaisia. Silloin:

$$\begin{aligned} K(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= K\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ \alpha x_1 + \beta y_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha K(\mathbf{x}) + \beta P(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Bijektioksi osoittaminen käy tässä vikkelimmin näin:
Osoitetaan, että *kullekin* maalijoukon alkiolle $\mathbf{z} = (z_1\ z_2)^T \in \mathbb{R}^2$ kuvautuu *tasan yksi* vektori lähtöjoukosta; tämän *kullekin*-osa takaa surjektiivisuuden ja *tasan yksi*-osa injektiivisyyden!

Mutta sellainen vektorihan on täsmälleen $\mathbf{u} := (z_2\ {-z_1})^T \in \mathbb{R}^2$, sillä

$$K(\mathbf{u}) = K\begin{pmatrix} z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-z_1) \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathbf{z}.$$

Tehtävä 14.3.6 : Tarkasteltuna esimerkiksi funktiona $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ei L luonnollisesti ole lineaarinen. Mutta:

1) kun otetaan

$$V := \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ ja } W := \{0\},$$

niin

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Silloinpa $L : V \to W$ on lineaarikuvaus, nimittäin nollakuvaus.

2) kun otetaan

$$V := \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\} \text{ ja } W := \mathbb{R},$$

niin

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = -4x_2,$$

joka on selvästikin lineaarinen!

15 LINEAARIKUVAUS JA ALIAVARUUDET

Lineaarikuvaukseen liittyy useita aliavaruuksia, lähtöpuolella ainakin ydin ja maalipuolella kuvajoukon muodostama kuva-avaruus.

15.1 Aliavaruuksien säilyminen

Määritelmä 15.1.1 Lineaarikuvauksen $L : V \to W$ *ydin* (*kernel*) on joukko

$$\ker(L) := L^{-1}(\{\mathbf{0}_W\}) = \{\, \mathbf{u} \in V \mid L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_W \,\},$$

ja *kuva-avaruus* (*range*) on koko avaruuden kuvajoukko

$$L(V) = \{\, L(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in V \,\}.$$

Lause 15.1.2 Lineaarikuvauksen ydin on lähtöavaruuden alivaruus, ja kuva-avaruus on maaliavaruuden aliavaruus.

Todistus. Olkoon $L : V \to W$ lineaarikuvaus.

1) (0) $\ker(L) \subseteq V$ ja $\ker(L) \neq \emptyset$, sillä Lauseen 14.1.6 a) mukaan $\mathbf{0}_V \in \ker(L)$.

(iii) Olkoot α, $\beta \in \mathcal{K}$ ja $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \ker(L)$. Silloin

$$L(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{u}) + \beta L(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{0}_W + \beta\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W,$$

joten $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in \ker(L)$ (Tehtävä 14.1.7).

2) (0) Määrittelynsä mukaan $L(V) \subseteq W$, ja koska $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, on $L(V) \neq \emptyset$.

(i), (ii) Olkoot $\alpha \in \mathcal{K}$ ja $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}' \in L(V)$. Silloin on olemassa vektorit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$, joille $L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$ ja $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$. Koska $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ ja $\alpha\mathbf{u} \in V$, on

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' + \mathbf{v}' &= L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in L(V), \\ \alpha\mathbf{u}' &= \alpha L(\mathbf{u}) = L(\alpha\mathbf{u}) \in L(V). \end{aligned}$$

Siis ydin ja kuva-avaruus ovat lineaarisia aliavaruuksia. □

Edelleen, lineaarikuvaus säilyttää aliavaruusominaisuudet:

Seuraus 15.1.3 Olkoon $L : V \to W$ lineaarikuvaus. Silloin:

a) Aliavaruuden kuvajoukko on maaliavaruuden aliavaruus.

b) Aliavaruuden alkukuva on lähtöavaruuden aliavaruus.

Todistus. a) Olkoon $S \subseteq V$ aliavaruus. Silloin se on lineaariavaruus ja rajoittumakuvaus $L|S : S \to W$,

$$(L|S)(\mathbf{u}) := L(\mathbf{u}) \text{ kaikilla } \mathbf{u} \in S,$$

on lineaarinen, joten $L(S) = (L|S)(S) \subseteq W$ on aliavaruus (Lause 15.1.2).

b) Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 15.1.4 Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

ja olkoon $S \subseteq \mathbb{R}^3$ vektoreiden $\mathbf{e}_1 = (1\ 0\ 0)^T$ ja $\mathbf{e}_3 = (0\ 0\ 1)^T$ virittämä aliavaruus. Määritä kuvauksen L ydin, kuva-avaruus ja $L(S)$.

Ratkaisu. Kuvaus L on lineaarinen (totea itse!). Koska $\mathbf{x} \in \ker(L) \Leftrightarrow L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, on

$$\mathbf{x} \in \ker(L) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} x_1 & = & t \\ x_2 & = & -t \\ x_3 & = & t,\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

ja

$$\ker(L) = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Koska $S = \left\{ a(1\ 0\ b)^T + b(0\ 0\ 1)^T \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (a\ 0\ b)^T \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ja siten

$$L\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

on $L(S) = \mathbb{R}^2$. Koska $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ja $L(S) = \mathbb{R}^2$, on myös $L(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.

Tehtävä 15.1.5 Määritä lineaarikuvauksen $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix},$$

ydin ja kuva-avaruus.
Ratkaisu sivulla 216.

15.2 Bijektiiviset lineaarikuvaukset

Tarkastellaan seuraavaksi, kuinka lineaariset bijektiot säilyttävät vektoriavaruuksien ominaisuuksia. Todetaan kuitenkin aluksi lineaarikuvausten yhdistämistä koskeva tulos:

Lause 15.2.1 Jos $L : U \to V$ ja $M : V \to W$ ovat lineaarikuvauksia, niin yhdistetty kuvaus $M \circ L : U \to W$ on lineaarinen.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Tehtävä 15.2.2 Muodosta yhdistetty kuvaus $M \circ L$, kun

$$L(x) := \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Onko yhdistetty kuvaus lineaarinen?
Ratkaisu sivulla 216.

Lause 15.2.3 Jos lineaarikuvaus $L : V \to W$ on bijektio, niin käänteiskuvaus $L^{-1} : W \to V$ on lineaarinen bijektio.

Todistus. Olkoon $L : V \to W$ lineaarinen bijektio. Silloin on olemassa käänteiskuvaus $L^{-1} : W \to V$, joka tunnetusti myös on bijektio.
(iii) Olkoot $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ ja $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$. Silloin on olemassa $L^{-1}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \in V$ ja

$$L(L^{-1}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}.$$

Toisaalta on myös olemassa $L^{-1}(\mathbf{u})$, $L^{-1}(\mathbf{v}) \in V$ ja

$$L(\alpha L^{-1}(\mathbf{u}) + \beta L^{-1}(\mathbf{v})) = \alpha L(L^{-1}(\mathbf{u})) + \beta L(L^{-1}(\mathbf{v})) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}.$$

Koska L on injektio, on edellisten nojalla

$$L^{-1}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha L^{-1}(\mathbf{u}) + \beta L^{-1}(\mathbf{v}).$$

Täten L^{-1} on lineaarinen. □

Lause 15.2.4 Lineaarikuvaus $L : V \to W$ on injektio jos ja vain jos sen ydin on pelkkä yksiö $\ker(L) = \{\mathbf{0}_V\}$.

Todistus. Joka tapauksessa $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ (Lause 14.1.6 kohta a).

$\boxed{\Rightarrow}$ Jos L on injektio, ei muita kuvaudu nollalle, joten $\ker(L) = \{\mathbf{0}_V\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Olkoon $\ker(L) = \{\mathbf{0}_V\}$. Jos $L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{v})$, on

$$L(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$$

ja siten $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker(L)$. Oletuksen mukaan $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ ja siten $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Siis L on injektio. $\square$

Tehtävä 15.2.5 Ovatko Tehtävän 15.2.2 kuvaukset L, M ja $M \circ L$ injektioita, ovatko surjektioita? Ratkaisu sivulla 216.

Tehtävä 15.2.6 Onko Tehtävän 15.1.5 kuvaus $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix},$$

injektio? Ratkaisu sivulla 216.

Esimerkki 15.2.7 Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}$,

$$L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := b + 2cx.$$

1) Osoita L lineaariseksi.
2) Määritä ydin ja kuva-avaruus.
3) Onko L injektio?

Ratkaisu. 1) Ensinnäkin, sääntö L todella määrittelee funktion $\mathbb{R}$-kertoimisten lineaariavaruuksien välille. Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $(a\ b\ c)^T$, $(d\ e\ f)^T \in \mathbb{R}^3$ mielivaltaisia. (i) ja (ii):

$$\begin{aligned}
L\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right) &= L\begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix} = b + e + 2(c+f)x \\
&= b + 2cx + e + 2fx = L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \\
L\left(\alpha\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) &= L\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix} = \alpha b + 2\alpha cx = \alpha(b + 2cx) = \alpha L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Määritelmän mukaan L on lineaarinen.

2) Mitä kuvautuu nollapolynomille, mille kaikille kuvautuu jotain?

$$L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hat{0} \iff \left\{ \begin{array}{l} b + 2cx \equiv 0 \\ a \in \mathbb{R} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & \in & \mathbb{R} \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right.$$

Siis ydin

$$\ker(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$$

on suora avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Kuva-avaruus on selvästi

$$L(\mathbb{R}^3) = \{\alpha + \beta x \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{P}_1.$$

3) Lauseen 15.2.4 mukaan L ei ole injektio, sillä $\ker(L) \neq \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

Lause 15.2.8 Olkoon $L : V \to W$ lineaarikuvaus ja $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subseteq V$, jolloin $L(U) = \{L(\mathbf{u}_1), \ldots, L(\mathbf{u}_k)\}$.

a) Jos $L(U)$ on lineaarisesti riippumaton ja siinä on k alkiota, on myös U lineaarisesti riippumaton.

b) Jos L on injektio ja U on lineaarisesti riippumaton, on $L(U)$ lineaarisesti riippumaton.

Todistus. a) Olkoon $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}_V$. Silloin Lauseen 14.1.6 kohtien c) ja a) mukaan

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i L(\mathbf{u}_i) = L\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

Oletusten mukaan kuvat $L(\mathbf{u}_i)$ ovat eri alkioita ja $L(U)$ on lineaarisesti riippumaton. Edellisen laskun mukaan

$$\alpha_1 L(\mathbf{u}_1) + \cdots + \alpha_k L(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}_W,$$

joten on oltava $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Siis U on lineaarisesti riippumaton.

Kohta b) jätetään harjoitustehtäväksi. □

Seuraus 15.2.9 Jos $L : V \to W$ on lineaarikuvaus ja $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subseteq V$, on $\dim[U] \geq \dim[L(U)]$. Jos lisäksi L on injektio, on $\dim[U] = \dim[L(U)]$.

Tehtävä 15.2.10 Onko Lauseen 15.2.8 kohdan a) oletus, että kuvat ovat eri alkioita, välttämätön? Tarkemmin sanottuna: onko olemassa tilanne, jossa (ainakin) kahdella vektoreista $\mathbf{u}_i$ on sama kuva ja $L(U)$ on lineaarisesti riippumaton, mutta U on lineaarisesti riippuva?
Ratkaisu sivulla 216.

15.3 Dimensiolause

Matriisiin liittyviä aliavaruuksia koskeva Dimensiolause 13.3.3 yleistyy koskemaan äärellisulotteisessa lineaariavaruudessa määriteltyjä lineaarikuvauksia.

Dimensiolause 15.3.1 Olkoon V äärellisulotteinen lineaariavaruus ja $L : V \to W$ lineaarikuvaus. Silloin

$$\dim V = \dim L(V) + \dim \ker(L).$$

Todistus. **A.** Jos $\dim V = 0$, niin $V = \{\mathbf{0}_V\}$. Koska $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, on $\ker(L) = \{0_V\}$, $L(V) = \{\mathbf{0}_W\}$ ja

$$\dim L(V) + \dim \ker(L) = 0 + 0 = 0 = \dim V.$$

B. Olkoot $n := \dim V \in \mathbb{N}$ ja $k := \dim \ker(L)$, jolloin $0 \leq k \leq n$.

Tapaus $k = n$. Olkoon $U := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ jokin avaruuden $\ker(L)$ kanta. Seurauksen 12.4.6 nojalla U on myös avaruuden V kanta, joten $V = \ker(L)$. L on siis nollakuvaus ja $L(V) = \{\mathbf{0}_W\}$. Täten

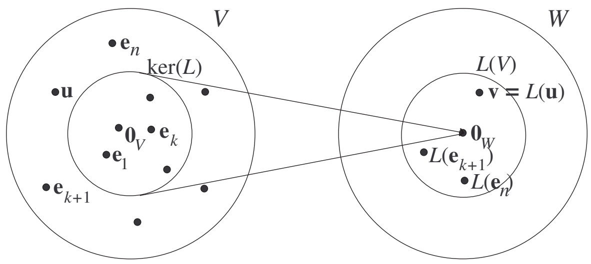
$$\dim L(V) + \dim \ker(L) = 0 + n = \dim V.$$

Tapaus $k < n$. Jos $k = 0$, on L Lauseen 15.2.4 mukaan injektio ja siten kuvauksena $V \to L(V)$ bijektio. Soveltaen Seurausta 15.2.9 avaruuden V kantaan (miten?) saadaan $\dim L(V) = \dim V$, joten väite on tosi.

Olkoon lopuksi $0 < k < n$. Valitaan jokin avaruuden $\ker(L)$ kanta $U_k := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ ja täydennetään se Lauseen 12.6.1 nojalla avaruuden V kannaksi

$$U_n := U_k \cup \{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}.$$

Väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan joukko $U' := \{L(\mathbf{e}_{k+1}), \ldots, L(\mathbf{e}_n)\}$ ava-



Kuva 24: Dimensiolauseen todistuksen havainnollistus

ruuden $L(V)$ kannaksi. Silloin nimittäin $\dim L(V) = n - k$ (ks. Kuva 24).

Viritys. Olkoon $\mathbf{v} \in L(V)$. Valitaan jokin $\mathbf{u} \in V$, jolle $L(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. Alkio $\mathbf{u}$ voidaan esittää kannan U_n avulla

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_k\mathbf{e}_k + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Koska $L(\mathbf{e}_1) = \cdots = L(\mathbf{e}_k) = \mathbf{0}_W$, on

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= L(\mathbf{u}) = x_1 L(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_k L(\mathbf{e}_k) + \cdots + x_n L(\mathbf{e}_n) \\ &= x_{k+1} L(\mathbf{e}_{k+1}) + \cdots + x_n L(\mathbf{e}_n), \end{aligned}$$

joten U' virittää avaruuden $L(V)$.

Lineaarinen riippumattomuus. Olkoon

$$\alpha_{k+1} L(\mathbf{e}_{k+1}) + \cdots + \alpha_n L(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_W.$$

Lineaarisuuden nojalla $L(\alpha_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_W$, joten vektori

$$\mathbf{w} := \alpha_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n \in \ker(L).$$

Silloin myös $-\mathbf{w} \in \ker(L)$. Koska U_k on avaruuden $\ker(L)$ kanta, on olemassa skalaarit α_i siten, että

$$-\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{e}_k.$$

Siis yhteensä

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{e}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\mathbf{e}_i = -\mathbf{w} + \mathbf{w} = \mathbf{0}_V.$$

Koska U_n on avaruuden V kanta, seuraa $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Siis erityisesti kaikki luvut $\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$ ovat nollia ja siten U' on lineaarisesti riippumaton. $\square$

Esimerkki 15.3.2 Kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

on lineaarinen (totea itse!). Määritä sen ydin ja kuva-avaruus sekä näiden dimensiot.

Ratkaisu. Ydin selviää yhtälöryhmän $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ratkaisuista:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = t,\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Siis ydin $\ker(L) = \left\{\, t(0\ 1\ 1)^T \mid t \in \mathbb{R} \,\right\}$ ja $\dim \ker(L) = 1$.

Dimensiolauseen 15.3.1 nojalla $\dim L(\mathbb{R}^3) = 2$. Vektori $\mathbf{y} \in L(\mathbb{R}^3)$ jos ja vain jos on olemassa $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, jolle

$$\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{y} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nähdään helposti, että

$$\mathbf{y} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_2 - x_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

joten kuva-avaruus on

$$L(\mathbb{R}^3) = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

15.4 Dimension säilyminen

Lause 15.4.1 Olkoon V äärellisulotteinen lineaariavaruus ja $L : V \to W$ lineaarikuvaus. Kuvaus L on injektio jos ja vain jos $\dim V = \dim L(V)$.

Todistus. Lauseisiin 15.2.4 ja 15.3.1 nojautuen:

$$L \text{ injektio} \iff \ker(L) = \{\mathbf{0}\} \iff \dim\ker(L) = 0 \iff \dim V = \dim L(V).$$

□

Lause 15.4.2 Olkoot V ja W $\mathcal{K}$-kertoimisia äärellisulotteisia lineaariavaruuksia, joille $\dim V = \dim W$. Lineaarikuvaukselle $L : V \to W$ ovat seuraavat ominaisuudet yhtäpitäviä:

a) L on bijektio.

b) L on injektio.

c) L on surjektio.

Todistus. Olkoon $n := \dim V = \dim W$. Todistetaan: a) ⇒ b) ⇒ c) ⇒ a).

a) ⇒ b) on triviaali.

b) ⇒ c): Koska L on injektio, on Lauseen 15.2.4 nojalla $\dim\ker(L) = 0$, ja siten Lauseen 15.4.1 mukaan $\dim V = \dim L(V) = n = \dim W$. Jos $n = 0$, on $L(V) = W = \{\mathbf{0}\}$, ja L on surjektio. Jos $n > 0$, niin avaruudella $L(V)$ on n-alkioinen kanta $U \subseteq L(V)$. Koska $\dim W = n$ ja $U \subseteq W$ on lineaarisesti riippumaton, on U Lauseen 12.4.6 mukaan myös avaruuden W kanta. Mutta silloin $L(V) = [U] = W$, ja L on surjektio.

c) ⇒ a): Koska L on surjektio, on $L(V) = W$. Koska $\dim\ker(L) = \dim V - \dim L(V) = n - n = 0$, on ydin pelkkä nollavektori. Lauseen 15.2.4 nojalla L myös injektio. □

Esimerkki 15.4.3 Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ($V \to W$),

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Osoita L lineaariseksi bijektioksi.

Ratkaisu. Havaitaan helposti, että L on matriisin määräämä:

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Täten se on lineaarinen.

Lähtöavaruuden V $\dim V = 3$ ja maaliavaruuden W $\dim W = 3$, joten Lauseen 15.4.2 mukaan riittää todistaa L vaikkapa surjektioksi.

Olkoon $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Näytetään, että eräälle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ on $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Lineaarikuvauksen L matriisille A on

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 6 - 27 - 1 - 0 = -16 \neq 0,$$

joten on olemassa A^{-1}. Siis

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Siis L on surjektio ja lauseen 15.4.2 mukaan bijektio.

Seuraus 15.4.4 Avaruuksien $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^m$ välillä on *lineaarisia* injektioita jos ja vain jos $m \geq n$, ja lineaarisia bijektioita aina ja vain kun $m = n$.

Tehtävä 15.4.5 Osoita, että funktio $L : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$,

$$L\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := 2a - bx,$$

on bijektio.
Ratkaisu sivulla 217.

15.5 Isomorfisuus

Äärellisulotteisten lineaariavaruuksien eräs luokitteluperuste on niiden dimensio. Osoitetaan, että samaa äärellistä dimensiota olevat $\mathcal{K}$-kertoimiset lineaariavaruudet ovat olennaisesti samoja.

Määritelmä 15.5.1 Kahden $\mathcal{K}$-kertoimisen lineaariavaruuden välinen lineaarinen bijektio on *(lineaari-)isomorfismi*. Lineaariavaruudet V ja W ovat *isomorfiset*, jos on olemassa isomorfismi $V \to W$. Isomorfisuutta merkitään $V \simeq W$.

Lause 15.5.2 Isomorfisuus on ekvivalenssirelaatio samakertoimisten lineaariavaruuksien joukossa.

Todistus. Merkitään

$$\mathcal{W} := \{V \mid V \text{ on } \mathcal{K}\text{-kertoiminen lineaariavaruus}\}.$$

Ekvivalenssin vaatimukset: kaikilla U, V, $W \in \mathcal{W}$ on oltava voimassa

1. Refleksiivisyys. $V \simeq V$: identtinen kuvaus $\mathrm{Id} : V \to V$ on lineaarinen bijektio.

2. Symmetrisyys. Jos $V \simeq W$, niin $W \simeq V$: Olkoon $L : V \to W$ lineaarinen bijektio. Silloin $L^{-1} : W \to V$ on lineaarinen bijektio.

3. Transitiivisuus. Olkoot $U \simeq V$ ja $V \simeq W$, sekä $L : U \to V$ ja $M : V \to W$ lineaarisia bijektioita. Silloin $M \circ L : U \to W$ on lineaarinen bijektio, joten $U \simeq W$.

Siis $(\mathcal{W}, \simeq)$ on ekvivalensirelaatio. □

Esimerkki 15.5.3 Osoita, että $\mathbb{R}$ ja tason $\mathbb{R}^2$ suora

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 = 5x_1 \right\}$$

ovat isomorfiset.

Ratkaisu. Origon kautta kulkeva suora S on selvästi tason $\mathbb{R}^2$ aliavaruus, joten se on $\mathbb{R}$-kertoiminen lineaariavaruus. Kuvaus $L : \mathbb{R} \to S$,

$$L(t) := \begin{pmatrix} t \\ 5t \end{pmatrix},$$

on lineaarinen bijektio (totea itse!), siis eräs sopiva isomorfismi.

Lause 15.5.4 Olkoot V ja W $\mathcal{K}$-kertoimisia äärellisulotteisia lineaariavaruuksia. Avaruudet V ja W ovat isomorfisia jos ja vain jos $\dim V = \dim W$.

Todistus. 1) Olkoon $L : V \to W$ isomorfismi. Koska L on injektio, on $\dim \ker(L) = 0$. Koska L on surjektio, on $L(V) = W$. Dimensiolauseen 15.3.1 mukaan

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim L(V) = \dim W.$$

2) Olkoon $n := \dim V = \dim W$. Jos $n = 0$, on asia selvä. Jos taas $n > 0$, joukko $\mathcal{K}^n$ on n-ulotteinen $\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus (todista!).

Asia on selvä, kun osoitetaan, että $V \simeq \mathcal{K}^n$. Vastaavasti nimittäin voidaan osoittaa, että $W \simeq \mathcal{K}^n$, ja siten Lauseen 15.5.2 nojalla $V \simeq W$.

Valitaan avaruudelle V jokin kanta $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Kullakin avaruuden V vektorilla on kannassa yksikäsitteiset koordinaatit $x_i \in \mathcal{K}$. Määritellään siis $L : \mathcal{K}^n \to V$,

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Kuvaus L osoitetaan helposti lineaariseksi. Koordinaattiesityksen olemassaolon nojalla L on surjektio ja koordinaattien yksikäsitteisyyden nojalla L on injektio. Siis L on lineaarinen bijektio, ja $V \simeq \mathcal{K}^n$. □

Lauseen todistuksesta saatiin sivutuotteena:

Seuraus 15.5.5 Jos V on reaalikertoiminen (vast. kompleksikertoiminen) lineaariavaruus ja $\dim V = n$, niin $V \simeq \mathbb{R}^n$ (vast. $V \simeq \mathbb{C}^n$).

Tehtävä 15.5.6 Osoita, että $\mathbb{R}^3$ ja $\mathcal{P}_3$:n aliavaruus

$$\left\{a + (a+b)x + cx^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

ovat isomorfiset.

Ratkaisu sivulla 217.

Esimerkki 15.5.7 Korkeintaan astetta $n-1$ olevien reaalisten polynomien lineaariavaruus on n-ulotteinen. Siis $\mathcal{P}_{n-1} \simeq \mathbb{R}^n$. Isomorfismiksi käy kuvaus

$$L\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}.$$

15.6 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 15.1.5 : Ytimeksi saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmä $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$:

$$\ker L = \left\{ t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Edelleen $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ jos ja vain jos

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -2(x_1 - 2x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}$$

jollakin $t \in \mathbb{R}$. Siis kuva-avaruus on

$$L(\mathbb{R}^2) = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\},$$

eli koko taso kuvautuu suoralle.

Tehtävä 15.2.2 : Lienee ilmeistä valita lähtö- ja maalijoukot niin, että kyseessä ovat funktiot $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ja $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Silloin $M \circ L$ on määritelty ja funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Edelleen:

$$(M \circ L)(x) = M\left(L(x)\right) = M\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2x \\ x - 4x \\ 2x + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -3x \\ 4x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Kyseessä on siis reaaliakselin kuvaaminen avaruuden $\mathbb{R}^3$ suoralle. Funktiot L ja M todetaan helposti lineaarisiksi. Myös $M \circ L$ on lineaarinen; todistus joko suoraan tai Lauseen 15.2.1 perusteella.

Tehtävä 15.2.5 : Ovat injektioita, sillä ne ovat lineaarisia ja ytimet ovat lähtöavaruuksien triviaaleja aliavaruuksia. Surjektiivisuus riippuu siitä miten maalijoukot on valittu (myös lähtöjoukot voivat vaikuttaa asiaan). Tehtävän 15.2.2 ratkaisun (s. 216) tilanteessa funktiot eivät ole surjektioita.

Mutta jos funktion L maalijoukoksi valitaan sen kuva-avaruus (tason suora), samoinkuin funktiolle lähtöjoukoksi tämän kuvajoukko ja maalijoukoksi kuva-avaruus, saadaan jopa bijektio!

Tehtävä 15.2.6 : Funktio ei ole injektio, sillä $\ker L \neq \{\mathbf{0}\}$ (ks. Tehtävän 15.1.5 ratkaisu s. 216).

Tehtävä 15.2.10 : Otetaan esimerkiksi projektiokuvaus $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Luvusta 14.2. Tason kolmen vektorin joukko U alkioinaan $\mathbf{x} = (1\ 1)^T$, $\mathbf{y} = (1\ 2)^T$ ja $\mathbf{z} = (1\ 3)^T$ on lineaarisesti riippuva. Niiden kaikkien kuva on yksiö $(1\ 0)^T$, joten

$L(U) = \{(1\ 0)^T\}$, joka nollavektorista poikkeavana on lineaarisesti riippumaton. Tämä vastaesimerkki osoittaa, että Lauseessa 15.2.8 a) vaatimus kuvajoukon alkioiden määrästä k on välttämätön.

Tehtävä 15.4.5 : Kyseessä on lineaarinen funktio $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, jotka ovat reaalikertoimisia kaksiulotteisia lineaariavaruuksia. Lauseen 15.4.2 mukaan riittää näyttää esimerkiksi injektiivisyys.

Mutta

$$L\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2a - bx = \widehat{0} \iff 2a = 0 \text{ ja } -b = 0 \iff a = 0 \text{ ja } b = 0.$$

Siis

$$\ker L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

joten L on injektio Lauseen 15.2.4 nojalla. Edellä todetun mukaan L on bijektio.

Tehtävä 15.5.6 : Helposti nähdään, että joukon polynomeissa kertoimet ovat toisistaan riippumattomia – ts. niiden arvoiksi voidaan saada mitkä tahansa luvut – voidaan kirjoittaa

$$\mathcal{Q} := \left\{ a + (a+b)x + cx^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a' + b'x + c'x^3 \mid a', b', c' \in \mathbb{R} \right\},$$

joka on aliavaruus polynomiavaruudelle $\mathcal{P}_3$. Selvästikin avaruudet ovat $\mathbb{R}$-kertoimisia ja $\dim \mathcal{Q} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Lauseen 15.5.4 nojalla ne ovat isomorfiset.

16 LINEAARIKUVAUKSEN MATRIISIESITYS

Esimerkissä 14.3.5 osoitettiin, että reaalinen $m \times n$-matriisi määrittelee lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Osoitetaan nyt, että jokainen kahden äärellisulotteisen reaalikertoimisen lineaariavaruuden välinen lineaarikuvaus voidaan esittää (sovittujen järjestettyjen kantojen suhteen) yksikäsitteisesti määrätyn matriisin avulla (Lause 16.2.4). Lopuksi tarkastellaan ytimiä ja kuva-avaruuksia, kuvausten yhdistämistä sekä täydennetään matriisiyhtälön ratkaisumäärätuloksia.

16.1 Kuvaukset $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (luonnolliset kannat)

Aloitetaan lineaarikuvauksista $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Haetaan ideaa konkreettisella laskulla.

Esimerkki 16.1.1 Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus. Silloin

$$\begin{aligned}
L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= L\left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= x_1 \underbrace{L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} + x_2 \underbrace{L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}} + x_3 \underbrace{L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}} \\
&= x_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Näyttäisi siis hyödylliseltä tarkastella kantavektorien kuvautumista.

Lause 16.1.2 Olkoot $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^m$ varustettu luonnollisilla järjestetyillä kannoillaan. Jos $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus, on olemassa yksikäsitteisesti määrätty matriisi $A_L \in \mathbb{R}^{m\times n}$, jolle

$$L(\mathbf{x}) = A_L\mathbf{x} \ \text{ kaikilla } \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Matriisin A_L sarakkeina ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardien kantavektorien $\mathbf{e}_k$ kuvat kuvauksessa L, ts.

$$A_L = \big(L(\mathbf{e}_1) \quad L(\mathbf{e}_2) \quad \cdots \quad L(\mathbf{e}_n)\big).$$

Todistus. Olemassaolo. Määritellään Esimerkin 16.1.1 innoittamina matriisi A_L lähtöavaruuden kantavektorien kuvina:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j &= (a_{1j}\, a_{2j} \ \cdots \ a_{mj})^T := L(\mathbf{e}_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n, \\ A_L &= (a_{ij}) := (\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= x_1L(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nL(\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \\ &= (\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_L\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Yksikäsitteisyys. Oletetaan, että $m\times n$-matriiseille A ja B pätee

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = B\mathbf{x} \quad \textit{kaikilla} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Erikoisesti kullekin luonnollisen kannan vektorille $\mathbf{e}_j$ on $A\mathbf{e}_j = B\mathbf{e}_j$. Mutta silloin matriiseilla A ja B on samat sarakkeet

$$A(:, j) = A\mathbf{e}_j = B\mathbf{e}_j = B(:, j)$$

kaikilla $j = 1, 2, \dots, n$, ja siten $A = B$. □

Esimerkki 16.1.3 Kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \end{pmatrix},$$

osoitetaan helposti lineaariseksi (tee se!). Määritä kuvauksen L matriisiesitys.

Ratkaisu. Lauseen 16.1.2 mukaan matriisi löytyy laskemalla avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollisen kannan kuva. Koska

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix},$$

on kysytty matriisi näiden muodostama

$$A:=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&-1&-4\end{pmatrix}.$$

16.2 Yleinen tapaus

Merkintä ja sopimus. Olkoon V reaalikertoiminen lineaariavaruus ja $n := \dim V \in \mathbb{N}$. Olkoon $E = \{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ avaruuden V kanta. Sovitaan, että jatkossa *kantavektorien järjestys on kiinnitetty*. Merkitään vektorin $\mathbf{u}\in V$,

$$\mathbf{u}=x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\mathbf{v}_n,$$

(yksikäsitteisesti määrättyjen) koordinaattien $x_i\in\mathbb{R}$ muodostamaa *koordinaattivektoria*

$$\mathbf{u}_E := (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T.$$

Koska $\mathbf{u}_E\in\mathbb{R}^n$ ja vastaavuus $\mathbf{u}\leftrightarrow\mathbf{u}_E$ on yksikäsitteinen (kylläkin erilainen eri kannoissa), vektori ja sen koordinaattivektori voidaan *samaistaa*. Näin saadaan samaistus koko avaruuksien V ja $\mathbb{R}^n$ välille (vrt. Lause 15.5.4).

Esimerkki 16.2.1 Määritä vektorin $(5\ 1)^T$ koordinaattivektori avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannassa $E:=\big\{(1\ 1)^T,(1\ {-1})^T\big\}$.

Ratkaisu. Joukko E on selvästi kanta. Koska

$$\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x_1+x_2=5\\x_1-x_2=1\end{cases}\iff\begin{cases}x_1=3\\x_2=2\end{cases}$$

on $(5\ 1)^T=3(1\ 1)^T+2(1\ {-1})^T$ eli

$$\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Esimerkki 16.2.2 Selvitetään johdannoksi konkreettinen tapaus. Olkoon $E = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineaariavaruuden V kanta ja $F = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ avaruuden W kanta. Silloin vektorin

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$$

kuvalla lineaarikuvauksessa L on esitys

$$L(\mathbf{u}) = x_1L(\mathbf{v}_1) + x_2L(\mathbf{v}_2) + x_3L(\mathbf{v}_3) = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 \tag{10}$$

joillekin $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Ongelma: Miten koordinaateista $\mathbf{u}_E = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ päästään koordinaatteihin

$$\Big(L(\mathbf{u})\Big)_F = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}?$$

Ratkaisu. Lasketaan kannan E kuvien esitykset kannassa F:

$$\begin{array}{rcrcl} L(\mathbf{v}_1) & = & a_{11}\mathbf{w}_1 & + & a_{21}\mathbf{w}_2 \\ L(\mathbf{v}_2) & = & a_{12}\mathbf{w}_1 & + & a_{22}\mathbf{w}_2 \\ L(\mathbf{v}_3) & = & a_{13}\mathbf{w}_1 & + & a_{23}\mathbf{w}_2 \end{array}$$

Kertomalla kukin yhtälö skalaarilla x_i ja laskemalla yhtälöt sarakkeittain puolittain yhteen (laskusäännöt?) saadaan esitykselle (10) muoto

$$\begin{array}{rcl} L(\mathbf{u}) & = & x_1L(\mathbf{v}_1) + x_2L(\mathbf{v}_2) + x_3L(\mathbf{v}_3) \\ & = & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\mathbf{w}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\mathbf{w}_2 \\ & = & y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 \\ \iff & & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & y_2 \end{array} \right. \\ \iff & & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Siis ainakin tässä tapauksessa on, kun merkitään $A = (a_{ij})$, voimassa

$$A\mathbf{u}_E = \Big(L(\mathbf{u})\Big)_F.$$

Tehtävä 16.2.3 Missä kohden Esimerkissä 16.2.2 käytettiin joukon F lineaarista riippumattomuutta?
Ratkaisu sivulla 232.

Matriisiesityslause 16.2.4 Olkoot V ja W äärellisulotteisia reaalikertoimisia lineaariavaruuksia, joiden dimensiot olkoot $n := \dim V$ ja $m := \dim W$. Vastaavasti olkoot $E = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ja $F = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ niiden järjestykseltään kiinnitetyt kannat. Jos $L : V \to W$ on lineaarikuvaus, on olemassa sellainen reaalinen $m \times n$-matriisi A, joka kuvaa kunkin alkion $\mathbf{u} \in V$ koordinaattivektorin sen kuva-alkion $L(\mathbf{u})$ koordinaattivektorille, ts.

$$(L(\mathbf{u}))_F = A\mathbf{u}_E \quad \text{kaikilla} \quad \mathbf{u} \in V.$$

Kun avaruuksissa $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^m$ käytetään luonnollisia kantoja, matriisi A on yksikäsitteisesti määrätty ja sen sarakkeina ovat $\mathbf{a}_j = (L(\mathbf{v}_j))_F$, ts. kantavektorien $\mathbf{v}_j$ kuvien koordinaattivektorit kannan F suhteen.

Todistus. Olemassaolo. Muodostetaan lineaarikuvauksen L välittävä matriisi A. Kannan E kuvilla olkoot kannassa F esitykset

$$\begin{cases} L(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\ L(\mathbf{v}_2) &= a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\ &\vdots \\ L(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m \end{cases}$$

Poimitaan skalaarikertoimet matriisiksi $A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ja olkoot $\mathbf{a}_j$ sen sarakevektorit (huomaa transponointi). Olkoon $\mathbf{u} \in V$ ja $\mathbf{x} := \mathbf{u}_E \in \mathbb{R}^n$ sen koordinaattivektori, ts.

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Merkitään $\mathbf{y} := A\mathbf{x}$, jolloin $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. On osoitettava, että

$$L(\mathbf{u}) = y_1\mathbf{w}_1 + \cdots + y_m\mathbf{w}_m.$$

Käyttäen lineaariavaruuden laskusääntöjä saadaan (vrt. Esimerkki 16.2.2)

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n x_j L(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\mathbf{w}_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{w}_i.$$

Siis esitys on olemassa.

Yksikäsitteisyys. Lauseen 15.5.4 mukaan $V \simeq \mathbb{R}^n$ ja $W \simeq \mathbb{R}^m$ ja niiden välinen yksikäsitteinen lineaarinen bijektio on vektorin kuvaaminen sen koordinaattivektorille. Avaruuksien $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^m$ välille muodostuu lineaarikuvausta $L : V \to W$ vastaava lineaarikuvaus L', jossa vektorin $\mathbf{u} \in V$ koordinaattivektori kuvautuu alkion $L(\mathbf{u}) \in W$ koordinaattivektorille. Kyseinen lineaarikuvaus voidaan Lauseen 16.1.2 mukaan esittää yksikäsitteisesti määrätyn $m \times n$-matriisin avulla. $\square$

Seuraus 16.2.5 Kantavektorien kuvautuminen määrää lineaarikuvauksen yksikäsitteisesti: kun tiedetään kantavektorien $\mathbf{v}_j$ kuvat, voidaan mielivaltaisen alkion $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$ kuva laskea kaavalla

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(\mathbf{v}_j).$$

Huomautus 16.2.6 Vastaavanlaiset tulokset pätevät kompleksikertoimisille lineaariavaruuksille. Tällöin koordinaatit ja välittävä matriisi ovat tietenkin kompleksisia.

Esimerkki 16.2.7 Olkoon $L : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$,

$$L(a + bx + cx^2) := \begin{pmatrix} c - a \\ b + c \end{pmatrix}.$$

Määritä kuvauksen L matriisi

a) luonnollisten kantojen suhteen.

b) kantojen $E' := \{1 + x, 1 - x, x^2 + x\}$ ja $F' := \big\{(2\ 1)^T, (0\ 1)^T\big\}$ suhteen, ja laske sen avulla

$$L\Big(0.2(1 + x) - 1.5(1 - x) + 2.4(x^2 + x)\Big).$$

c) Laske molemmilla tavoilla $L(5 - 2x + 3x^2)$.

Ratkaisu. Todista itse, että kyseessä on todella lineaarikuvaus.

a) Kannat ovat $E := \{1, x, x^2\}$ ja $F := \big\{(1\ 0)^T, (0\ 1)^T\big\}$. Lasketaan lähtöpuolen kannan kuvat maalipuolen kannassa:

$$\begin{aligned}
L(1) &= \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
L(x) &= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
L(x^2) &= \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tästä saadaan kuvauksen matriisi luonnollisten kantojen E ja F suhteen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vastaavalla tavalla kannoille

$$E' = \{1+x, 1-x, x+x^2\} \text{ ja } F' = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}:$$

$$\begin{aligned}
L(1+x) &= \begin{pmatrix}0-1\\1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = (-\tfrac{1}{2})\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
L(1-x) &= \begin{pmatrix}0-1\\-1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = (-\tfrac{1}{2})\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + (-\tfrac{1}{2})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
L(x+x^2) &= \begin{pmatrix}1-0\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

joten nyt matriisi on

$$A' = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Olkoon $q(x) := 0.2(1+x) - 1.5(1-x) + 2.4(x^2+x)$, jolloin

$$q_{E'} = \begin{pmatrix}0.2\\-1.5\\2.4\end{pmatrix}$$

Edellisen nojalla

$$L(q)_{F'} = A'q_{E'} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.2\\-1.5\\2.4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.85\\4.65\end{pmatrix}$$

ja siten

$$L(q) = 1.85\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 4.65\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.7\\6.5\end{pmatrix}$$

c) Olkoon $p(x) := 5 - 2x + 3x^2$. Silloin

$$p_E = \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
L(p)_F &= Ap_E = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\
L(p) &= -2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

koska F oli luonnollinen kanta.

Lasketaan toiseksi polynomin p koordinaatit kannassa E':

$$5 - 2x + 3x^2 \equiv \alpha(1+x) + \beta(1-x) + \gamma(x^2+x)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 5 \\ \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & -2 \\ & & & & \gamma & = & 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 5 \\ \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

Siis $p_{E'} = (0\ 5\ 3)^T$ ja siten ja

$$\begin{aligned} L\Big(p(x)\Big)_{F'} &= A' p_{E'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ L\Big(p(x)\Big) &= (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esimerkki 16.2.8 Olkoon D, $D(f) := f'$, funktion derivointia tarkoittava lineaarikuvaus. Koska $x^0 \equiv 1$, on monomille x^n

$$D(x^n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ nx^{n-1}, & n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Olkoon avaruus $\mathcal{P}_n$ varustettu luonnollisella kannalla $E_n := \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Määritä lineaarikuvauksen $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ matriisi.

Ratkaisu. Rajoitettuna korkeintaan astetta 3 oleviin polynomeihin D on selvästi kuvaus $\mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$. Operaattori D kuvaa avaruuden $\mathcal{P}_3$ kannan seuraavasti:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} D(1) & = & 0 & = & 0 \cdot 1 & + & 0 \cdot x & + & 0 \cdot x^2 \\ D(x) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 & + & 0 \cdot x & + & 0 \cdot x^2 \\ D(x^2) & = & 2x & = & 0 \cdot 1 & + & 2 \cdot x & + & 0 \cdot x^2 \\ D(x^3) & = & 3x^2 & = & 0 \cdot 1 & + & 0 \cdot x & + & 3 \cdot x^2 \end{array}$$

Kannan kuvien koordinaattivektorit muodostavat kysytyn matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Polynomille $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ on $p_{E_3} = (a\ b\ c\ d)^T$, joten nyt voidaan derivoida mekaanisesti koordinaattien avulla:

$$(D(p))_{E_2} = Ap_{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \end{pmatrix},$$

ja siten $(D(p))(x) = b + 2cx + 3dx^2$.

16.3 Erikoistapaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Tarkastellaan Lauseen 16.2.4 erikoistapauksena avaruuksien $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^m$ välisten lineaarikuvausten esittämistä mielivaltaisten kantojen suhteen (vrt. Lause 16.1.2).

Lause 16.3.1 Olkoot $E = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ ja $F = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ avaruuden $\mathbb{R}^m$ järjestykseltään kiinnitetyt kannat. Olkoon $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineaarikuvaus ja A sen matriisiesitys kantojen E ja F suhteen. Merkitään sarakkeittain

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B := \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_m \end{pmatrix}.$$

a) Silloin $\mathbf{a}_j = B^{-1}L(\mathbf{u}_j)$ kaikilla $j \in [n]$.

b) Kun lisäksi merkitään

$$C := \begin{pmatrix} L(\mathbf{u}_1) & \cdots & L(\mathbf{u}_n) \end{pmatrix},$$

laajennetun matriisin $(B \mid C)$ redusoitu porrasmuoto on $(I \mid A)$.

Todistus. Matriisi B on säännöllinen, koska sen sarakkeet muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^m$ kannan.

a) Koska A on kuvauksen L matriisi, on Lauseen 16.2.4 mukaan kaikilla $j = 1, 2, 3, \dots$

$$L(\mathbf{u}_j) = a_{1j}\mathbf{b}_1 + \cdots + a_{mj}\mathbf{b}_m = B\mathbf{a}_j,$$

joten $\mathbf{a}_j = B^{-1}L(\mathbf{u}_j)$.

b) Koska B on säännöllinen, on matriisi $(B \mid C)$ riviekvivalentti matriisin $(B^{-1}B \mid B^{-1}C)$ eli $(I \mid B^{-1}C)$ kanssa. Ottamalla matriisitulo pystyvektoreittain saadaan kohdan a) nojalla

$$B^{-1}C = \begin{pmatrix} B^{-1}L(\mathbf{u}_1) & \cdots & B^{-1}L(\mathbf{u}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = A.$$

□

Esimerkki 16.3.2 Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Olkoon valittu avaruuksille kannat (järjestys kiinnitetty!)

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad F := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Määritä kuvauksen L matriisi kantojen E ja F suhteen.

Ratkaisu. Käytetään Lausetta 16.3.1. Lasketaan kantavektorien kuvat:

$$L\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad L\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$$

Muodostetaan laajennettu matriisi asettamalla vasemmaksi matriisiksi sarakkeittain maaliavaruuden kanta ja oikeaksi matriisiksi niinikään sarakkeittain lähtöavaruuden kannan kuvat sekä muunnetaan riviekvivalenttiin redusoituun porrasmuotoon:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & | & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & -1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Tästä saadaan kysytty matriisi

$$A = \begin{pmatrix}-1 & -3\\ 4 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Tehtävä 16.3.3 Laske Esimerkin 16.3.2 tilanteessa vektorin $(-11\ 3)^T$ kuva

a) suoraan.

b) ”mutkan kautta” matriisin A avulla.

Ratkaisu sivulla 232.

Tehtävä 16.3.4 (Jatkoa tehtävään 16.3.3.) Laske vektorin $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ kuva kuvauksessa L, kun sen koordinaatit kannassa E ovat $\mathbf{u}_E = (2\ 3)^T$,

a) funktion L lausekkeen avulla.

b) matriisin A avulla.

Ratkaisuvihjeitä: a) Laske ensin $\mathbf{u}$ luonnollisessa kannassa, kuvaa sitten.

b) Kuvaa koordinaatit ensin matriisin A avulla, muunna tulos luonnolliseen kantaan.

Ratkaisu sivulla 234.

16.4 Ytimet ja kuva-avaruudet

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_A(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$, vastaava lineaarikuvaus. On selvää, että

$$\ker(L_A) = N(A) \quad \text{ja} \quad L_A(\mathbb{R}^n) = [A]_s.$$

Tarkastellaan hiukan yleistä tilannetta.

Oletetaan, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esittää lineaarikuvausta $L : V \to W$ niiden kantojen E ja F suhteen. Olkoot $P_E : V \to \mathbb{R}^n$ ja $P_F : W \to \mathbb{R}^m$ ne lineaariset bijektiot, jotka kuvaavat vektorit niiden koordinaateille, ts.

$$P_E(\mathbf{u}) := \mathbf{u}_E \quad \text{ja} \quad P_F(\mathbf{w}) := \mathbf{w}_F.$$

Lauseen 16.2.4 mukaan $P_F(L(\mathbf{u})) = AP_E(\mathbf{u})$ kaikilla $\mathbf{u} \in V$.

Lause 16.4.1 Lineaarikuvauksen matriisin A nolla-avaruutta ja sarakeavaruutta sekä kuvauksen L ydintä ja kuva-avaruutta sitovat seuraavat yhtälöt:

$$\begin{aligned} P_E(\ker(L)) &= N(A), \\ P_F(L(V)) &= [A]_s, \end{aligned}$$

ja $\ker(L)$ ja $N(A)$ ovat isomorfisia, samoin $L(V) \simeq [A]_s$.

Todistus. Koska P_E ja P_F ovat lineaarisia bijektioita, riittää todistaa väitetyt joukot samoiksi. Todistetaan tässä ensimmäinen samuus, toinen jätetään harjoitustehtäväksi.

Olkoon $\mathbf{x} = \mathbf{u}_E \in \mathbb{R}^n$. Silloin

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in N(A) &\iff A\mathbf{x} = A\mathbf{u}_E = \mathbf{0} \\ &\iff AP_E(\mathbf{u}) = P_F(L(\mathbf{u})) = \mathbf{0} \\ &\iff L(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \\ &\iff \mathbf{u} \in \ker(L) \\ &\iff \mathbf{x} = \mathbf{u}_E \in P_E(\ker(L)). \end{aligned}$$

□

Tehtävä 16.4.2 Todista Lauseen 16.4.1 toinen samuus.
Ratkaisu sivulla 234

Tehtävä 16.4.3 Piirra kaavio Lauseessa 16.4.1 olevasta tilanteesta.
Ratkaisu sivulla 234

16.5 Lineaarikuvausten yhdistäminen

Lineaarikuvausten yhdistäminen tapahtuu matriisien kertolaskulla:

Lause 16.5.1 Olkoot $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ lineaarikuvauksia vastaavina matriiseina A ja B luonnollisten kantojen suhteen. Silloin tulo BA on yhdistetyn kuvauksen $M \circ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ matriisi.

Todistus. Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Tulon liitännäisyyden mukaan

$$(M \circ L)(\mathbf{x}) = M(L(\mathbf{x})) = M(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}.$$

□

Lause 16.5.2 Olkoot V, W ja Z äärellisulotteisia reaalikertoimisia lineaariavaruuksia, joilla on kannat E, F ja G. Oletetaan, että $L : V \to W$ ja $M : W \to Z$ ovat lineaarikuvauksia, joita esittävät kantojen E, F ja G suhteen matriisit $A = A_L$ ja $B = B_M$. Silloin yhdistetyn kuvauksen $M \circ L$ matriisi kantojen E ja G suhteen on BA.

Esimerkki 16.5.3 Laske kuvauksen $M \circ L$ matriisi, kun

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu. Voitaisiin laskea tietenkin suoraan sijoittelemalla. Lauseen 16.5.1 mukaan matriisi saadaan kuitenkin lyhemmin tulona

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

16.6 Yhtälöryhmän $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ ratkaisujen määristä

Lause 16.6.1 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Lineaarisella yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on seuraavan taulukon mukaiset määrät ratkaisuja:

	sarakkeet	$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$	$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$	tyyppi
$m > n$	riippumattomat	1	0 tai 1	ylimäärätty
$m > n$	riippuvat	∞	0 tai ∞	ylimäärätty
$m = n$	riippumattomat	1	1	kvadraattinen
$m = n$	riippuvat	∞	0 tai ∞	kvadraattinen
$m < n$	riippuvat	∞	0 tai ∞	alimäärätty

Todistus. Tulokset voidaan perustella tarkastelemalla yhtälöryhmää lineaarikombinaatiomuodossa

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

käyttäen aikaisempia lauseita (mm. 2.3.11 ja 13.3.1). □

Lause 16.6.2 Neliömatriisille $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ovat seuraavat ominaisuudet yhtäpitäviä (ks. myös Lause 5.4.2 ja Seuraus 13.3.2):

a) Matriisi A on säännöllinen.

b) Matriisin A determinantti $\det(A) \neq 0$.

c) Matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia.

d) Matriisin A rivit ovat lineaarisesti riippumattomia.

e) Matriisin A aste $r(A) = n$.

f) Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on jokaisella $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ yksi ja vain yksi ratkaisu.

g) Lineaarikuvaus $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ on bijektio $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Todistus. Ks. aikaisemmat lauseet (harjoitustehtävä). □

Esimerkki 16.6.3 Osoita, että kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

on bijektio ja muodosta sen käänteiskuvaus.

Ratkaisu. Kuvaus L voidaan selvästi esittää matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

avulla: $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. L on siis lineaarikuvaus. Koska $\det(A) = 1 \neq 0$, on L bijektio. Silloin L^{-1} on olemassa, se on lineaarinen ja

$$L^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 16.6.4 Todista Lause 16.6.2.

Ratkaisu sivulla 234.

16.7 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 16.2.3 : Vektoriyhtälön

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\mathbf{w}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\mathbf{w}_2 = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2$$

muuntamisessa tavalliseksi yhtälöryhmäksi

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & y_2 \end{array}\right.$$

tarvitaan joukon $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ lineaarinen riippumattomuus.

Tehtävä 16.3.3 : a) Suoraan funktion määrittelystä:

$$L\begin{pmatrix} -11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11+3 \\ -11-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -14 \end{pmatrix}$$

tai kertomalla kuvauksen matriisilla M.

b) Aluksi ilmaistaan $(-11\ 3)^T$ kannassa E,

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' + 3x_2' \\ 2x_1' + x_2' \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x_1' & + & 3x_2' & = & -11 \\ 2x_1' & + & x_2' & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x_1' & = & 4 \\ x_2' & = & -5 \end{array}\right.$$

eli

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

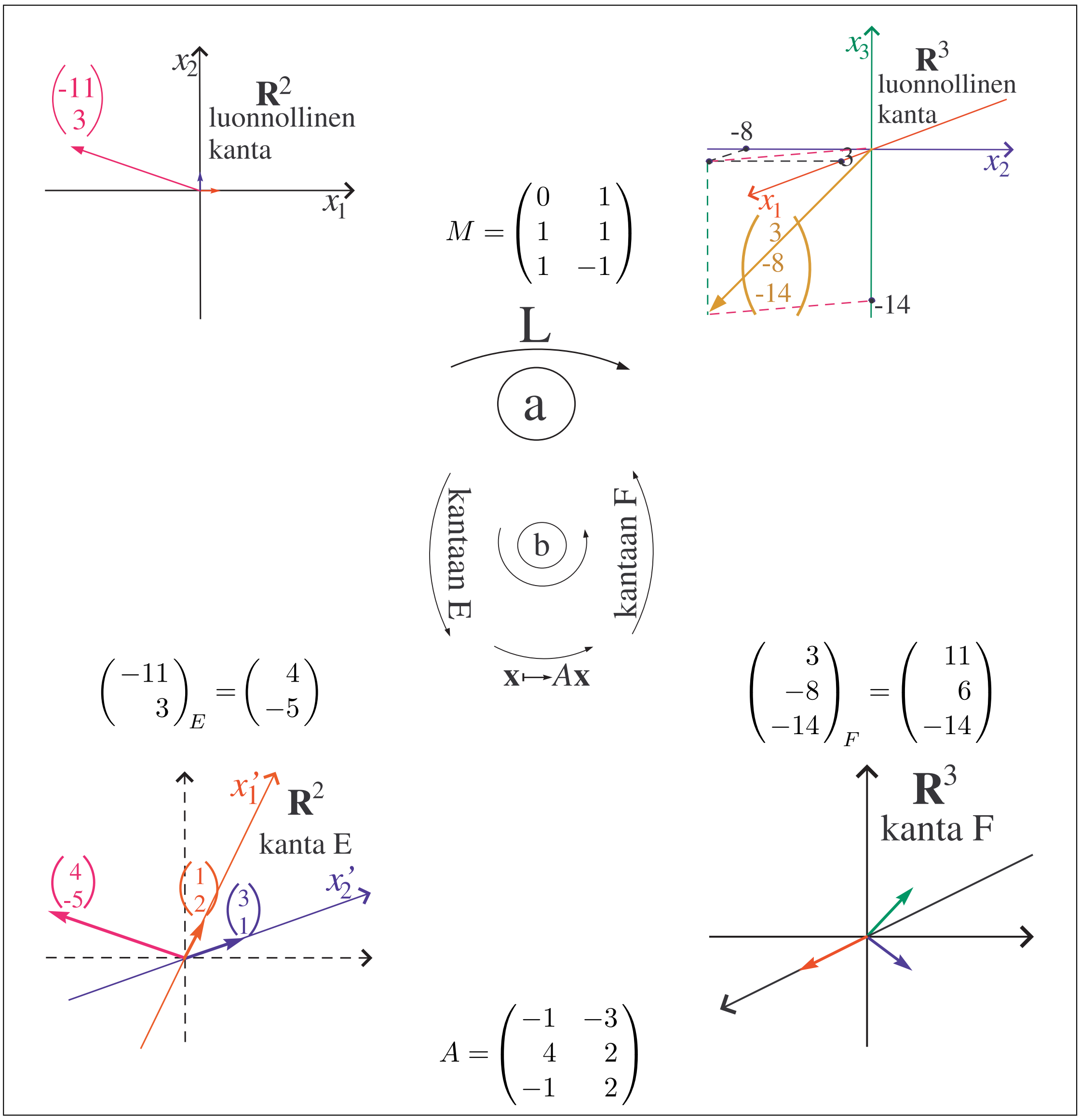
Sitten lasketaan tämän kuva kertomalla matriisilla A (ks. Esimerkki 16.3.2):

$$\left(L\begin{pmatrix} -11 \\ 3 \end{pmatrix}\right)_F = A\begin{pmatrix} -11 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Lopuksi muutetaan kuva luonnolliseen kantaan

$$11\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 14\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Katso kuva 25.



Kuva 25: Kaavio Tehtävän 16.3.3 menettelystä

Tehtävä 16.3.4 : a) Ensin koordinaatit luonnolliseen kantaan

$$\mathbf{u} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\7\end{pmatrix}$$

joten

$$L(\mathbf{u}) = L\begin{pmatrix}11\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\11+7\\11-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\18\\4\end{pmatrix}$$

b) Kuvataan annetut koordinaatit ensin suoraan matriisilla A:

$$(L(\mathbf{u}))_F = A\mathbf{u}_E = \begin{pmatrix}-1 & -3\\4 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\14\\4\end{pmatrix}$$

Tämä vielä luonnolliseen kantaan:

$$L(\mathbf{u}) = -11\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 14\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\18\\4\end{pmatrix}$$

Tehtävä 16.4.2 : $P_F(L(V)) = [A]_s$, sillä

$$\begin{aligned}\mathbf{y} \in [A]_s \quad &\Longleftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ jollekin } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\\ &\Longleftrightarrow \quad AP_E(\mathbf{u}) = \mathbf{y} \text{ jollekin } \mathbf{u} \in V\\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{y} \in P_F\left(L(V)\right)\end{aligned}$$

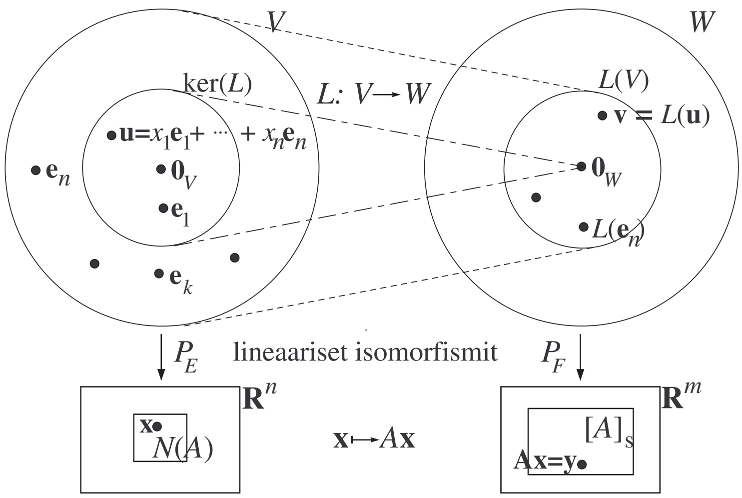
Tehtävä 16.4.3 : Katso kuvio 26.

Tehtävä 16.6.4 : Todistetaan vanhojen tulosten avulla seuraavasti:

a $\Leftrightarrow$ b: Lause 6.5.1

a $\Leftrightarrow$ c $\Leftrightarrow$ d $\Leftrightarrow$ e: Lause 11.3.1, Lause 6.3.5 ja asteen määritelmä

a $\Leftrightarrow$ f $\Leftrightarrow$ g: Lause 5.4.1 ja bijektion ominaisuus.



Kuva 26: Tehtävän 16.4.3 kaavio

17 LINEAARIAVARUUDEN KANNANVAIHTO

17.1 Yleinen tapaus

Monet matemaattiset mallit yksinkertaistuvat huomattavasti, kun ilmiötä tarkastellaan sopivasti valitussa kannassa. Kannan valinta riippuu tietenkin tarkasteltavan ilmiön luonteesta. Usein puhutaan myös *koordinaatiston vaihdosta*, sillä kannan vaihdon yhteydessä vektorien koordinaatitkin muuttuvat.

Lineaarinen kannanvaihto tapahtuu lineaarikuvauksen välityksellä. Kaikki koordinaatiston vaihdot – mm. vaihto tason suorakulmaisista napakoordinaatteihin – eivät ole lineaarisia.

Lause 17.1.1 Olkoon V äärellisulotteinen lineaariavaruus ja olkoot

$$U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \quad \text{ja} \quad U' = \{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$$

sen järjestykseltään kiinnitettyjä kantoja. On olemassa sellainen säännöllinen matriisi $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, että jos vektorin $\mathbf{v} \in V$ koordinaattivektori kannassa U on $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, niin sen koordinaattivektori kannassa U' on $\mathbf{x}' = S\mathbf{x}$, toisin sanoen, $\mathbf{v}_{U'} = S\mathbf{v}_U$.

Matriisia S sanotaan *siirtomatriisiksi* ja se saadaan selville kantojen avulla: jos kannan U vektoreilla on kannassa U' esitykset

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{u}_1 & = & s_{11}\mathbf{u}'_1 & + & s_{21}\mathbf{u}'_2 & + & \cdots & + & s_{n1}\mathbf{u}'_n \\
\mathbf{u}_2 & = & s_{12}\mathbf{u}'_1 & + & s_{22}\mathbf{u}'_2 & + & \cdots & + & s_{n2}\mathbf{u}'_n \\
\vdots & & & & & & & & \\
\mathbf{u}_n & = & s_{1n}\mathbf{u}'_1 & + & s_{2n}\mathbf{u}'_2 & + & \cdots & + & s_{nn}\mathbf{u}'_n
\end{array} \tag{11}$$

niin siirtomatriisi $S = (s_{ij})$ on yllä olevan vektoriyhtälöryhmän kerroinmatriisin *transpoosi*.

Käänteinen muunnos saadaan aikaan matriisilla S^{-1}.

Todistus. Olkoon vektorilla $\mathbf{v} \in V$ koordinaatit $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{x}'$ eli esitykset

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{v} & = & x_1\mathbf{u}_1 & + & \cdots & + & x_n\mathbf{u}_n \\
\mathbf{v} & = & x'_1\mathbf{u}'_1 & + & \cdots & + & x'_n\mathbf{u}'_n
\end{array}$$

kannoissa U ja U'. Kun sijoitetaan vektorin $\mathbf{v}$ esitykseen yhtälöt (11), saadaan yhdistetty esitys

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} s_{ij}\mathbf{u}'_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j\right)\mathbf{u}'_i.$$

Koordinaattien yksikäsitteisyyden nojalla on

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j \ \text{ kaikilla } \ i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Mutta silloinhan $\mathbf{x}' = S\mathbf{x}$.

Osoitetaan S säännölliseksi näyttämällä, että yhtälöllä $S\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaaliratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Koska

$$S\mathbf{x} = \mathbf{x}' \iff x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = x'_1\mathbf{u}'_1 + \cdots + x'_n\mathbf{u}'_n,$$

saadaan valitsemalla $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ yhtälö $x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. Koska U on kantana lineaarisesti riippumaton, seuraa $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Siis S on säännöllinen.

Täten käänteinen muunnos on $\mathbf{x} = S^{-1}\mathbf{x}'$. □

Esimerkki 17.1.2 Joukot $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ja $U' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$,

$$\mathbf{u}_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 := \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{ja } \mathbf{u}'_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}'_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ovat selvästi avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja.

a) Määritä siirtomatriisi kannasta U kantaan U'.

b) Mitkä ovat vektorin $(1\ 2)^T$ koordinaatit näissä kannoissa?

Ratkaisu. a) Lasketaan kannalle U esitys kannassa U':

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = s_{11}\mathbf{u}'_1 + s_{21}\mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 = s_{12}\mathbf{u}'_1 + s_{22}\mathbf{u}'_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = s_{11}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = s_{12}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s_{22}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\iff s_{11} = 3,\ s_{21} = -4,\ s_{12} = 4,\ s_{22} = -5.$$

Kysytty siirtomatriisi on

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Vektorin $(1\ 2)^T$ koordinaatit $(x_1\ x_2)^T$ kannassa U vanhaan tapaan:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Kannassa U' koordinaatit ovat

$$\mathbf{x}' = S\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nämä olisi voitu laskea myös kuten kannassa U.

Esimerkki 17.1.3 Lineaariavaruuden $\mathcal{P}_3$ standardi kanta on

$$U = \{1, x, x^2, x^3\}.$$

Etsi siirtomatriisi, joka välittää vaihdon kantaan (ks. Esimerkki 12.1.5)

$$U' := \{1 + x,\ x,\ x^2 - 1,\ x^3 + x\}.$$

Ratkaisu. I tapa. Lauseen 17.1.1 mukaan esitetään lähtökannan U vektorit kannassa U':

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
1 & = & 1 \cdot (1+x) & + & (-1) \cdot x & + & 0 \cdot (x^2-1) & + & 0 \cdot (x^3+x) \\
x & = & 0 \cdot (1+x) & + & 1 \cdot x & + & 0 \cdot (x^2-1) & + & 0 \cdot (x^3+x) \\
x^2 & = & 1 \cdot (1+x) & + & (-1) \cdot x & + & 1 \cdot (x^2-1) & + & 0 \cdot (x^3+x) \\
x^3 & = & 0 \cdot (1+x) & + & (-1) \cdot x & + & 0 \cdot (x^2-1) & + & 1 \cdot (x^3+x)
\end{array}$$

Tästä poimitaan siirtomatriisiksi skalaarimatriisi (muista: rivit sarakkeiksi!)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II tapa: Joskus on helpompi ilmaista U' kannassa U ja kääntää saatu siirtomatriisi. Koska on helpompi esittää:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
1+x & = & 1 \cdot 1 & + & 1 \cdot x & + & 0 \cdot x^2 & + & 0 \cdot x^3 \\
x & = & 0 \cdot 1 & + & 1 \cdot x & + & 0 \cdot x^2 & + & 0 \cdot x^3 \\
-1+x^2 & = & -1 \cdot 1 & + & 0 \cdot x & + & 1 \cdot x^2 & + & 0 \cdot x^3 \\
x+x^3 & = & 0 \cdot 1 & + & 1 \cdot x & + & 0 \cdot x^2 & + & 1 \cdot x^3
\end{array}$$

tapahtuu siirto kannasta U' kantaan U matriisilla

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Täten kysytty siirtomatriisi kannasta U kantaan U' on

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esimerkiksi polynomin $p(x) := a + bx + cx^2 + dx^3$ koordinaatit kannassa U' ovat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ -a+b-c-d \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

ja itse polynomi

$$p(x) = (a+c)(1+x) + (-a+b-c-d)x + c(x^2-1) + d(x^3+x).$$

Tehtävä 17.1.4 Muodosta siirtomatriisi kannasta

$$U = \{1{+}x,\ 1{-}x,\ x^2{+}x\}$$

kantaan

$$U' = \{1, x^2, x\}$$

avaruudessa $\mathcal{P}_2$. Pidä kantojen järjestys!
Ratkaisu sivulla 242.

Tehtävä 17.1.5 Olkoon p polynomi, jonka koordinaatit Tehtävän 17.1.4 kannassa $U = \{1{+}x, 1{-}x, x^2{+}x\}$ ovat $(2\ {-1}\ 1)^T$. Mikä polynomi on kyseessä (luonnollisessa kannassa) ja mitkä ovat sen koordinaatit kannassa U'?
Ratkaisu sivulla 242.

Tehtävä 17.1.6 Kannanvaihtolause 17.1.1 on itse asiassa erikoistapaus lineaarikuvauksen Matriisiesityslauseesta 16.2.4. Miten kannanvaihtolause tulee perustelluksi olettaen, että matriisiesityslause on todistettu?
Ratkaisu sivulla 242.

17.2 Kannanvaihto avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Seuraus 17.2.1 Olkoot joukot $U = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ja $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ kantoja. Muodostetaan niistä matriisit

$$A_U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix}, \quad A_V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}.$$

Silloin siirto kannasta U kantaan V tapahtuu matriisilla $S := A_V^{-1} A_U$. Laajennetun matriisin $(A_V \mid A_U)$ redusoitu porrasmuoto on $(I \mid S)$.

Todistus. Olkoon $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta. Matriisi A_U on siirto kannasta U kantaan E, sillä kun merkitään

$$A_U = (u_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

on kantavektoreilla $\mathbf{u}_i$ kannassa E esitykset

$$\begin{array}{rcccccccc} \mathbf{u}_1 & = & u_{11}\mathbf{e}_1 & + & u_{21}\mathbf{e}_2 & + & \cdots & + & u_{n1}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{u}_2 & = & u_{12}\mathbf{e}_1 & + & u_{22}\mathbf{e}_2 & + & \cdots & + & u_{n2}\mathbf{e}_n \\ & \vdots & & & & & & & \\ \mathbf{u}_n & = & u_{1n}\mathbf{e}_1 & + & u_{2n}\mathbf{e}_2 & + & \cdots & + & u_{nn}\mathbf{e}_n \end{array}$$

Vastaavasti A_V on siirto kannasta V kantaan E ja A_V^{-1} siirto kannasta E kantaan V. Yhdistetty kuvaus matriisinaan $S := A_V^{-1} A_U$ on silloin siirto kannasta U kantaan V luonnollisen kannan kautta. □

Esimerkki 17.2.2 Olkoot avaruuden $\mathbb{R}^3$ joukkojen U ja V alkioista sarakkeittain muodostetut matriisit

$$A_U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Olkoot erään vektorin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ koordinaatit kannassa U $(a\ b\ c)^T$. Laske vektorin $\mathbf{x}$ koordinaatit kannassa V ja tarkasta, että molemmissa tapauksissa on kyse samasta avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorista.

Ratkaisu. Koska $\det(A_U) = 1 \neq 0$ ja $\det(A_V) = 1 \neq 0$, ovat joukot U ja V kantoja. Vektorin koordinaatit kannassa U muuntuvat kannan V koordinaateiksi kertomalla siirtomatriisilla $S := A_V^{-1} A_U$, joka lasketaan esimerkiksi Gauss-Jordanin reduktiolla:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Koordinaatit kannassa V ovat silloin

$$\mathbf{x}_V = S\mathbf{x}_U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + c \\ -2a + b - c \\ 3a - b + 2c \end{pmatrix}$$

Lasketaan vielä koordinaatit luonnollisessa kannassa:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A_U\mathbf{x}_U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ a + b \\ b \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} &= A_V\mathbf{x}_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a + c \\ -2a + b - c \\ 3a - b + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ a + b \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

17.3 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 17.1.4: Esityksistä

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1+x &=& 1\cdot 1 &+& 0\cdot x &+& 1\cdot x^2 \\ 1-x &=& 1\cdot 1 &+& 0\cdot x &+& (-1)\cdot x^2 \\ x+x^2 &=& 0\cdot 1 &+& 1\cdot x &+& 1\cdot x^2 \end{array}$$

saadaan Lauseen 17.1.1 mukaan (transponoimalla oikean puolen kerroinmatriisi)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 17.1.5 : Koska $p_U = (2\ -1\ 3)^T$, polynomi on luonnollisessa kannassa $\{1, x, x^2\}$

$$p(x) = 2(1+x) - (1-x) + 3(x^2+x) = 1 + 6x + 3x^2.$$

Tehtävässä 17.1.4 lasketun siirtomatriisin avulla saadaan koordinaatit kannassa $U' = \{1, x^2, x\}$:

$$p_{U'} = Sp_U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tarkastus: Saadaanko sama kuin luonnollisessa kannassa? Kyllä,

$$p(x) = 1\cdot 1 + 3\cdot x^2 + 6\cdot x = 1 + 6x + 3x^2.$$

Tehtävä 17.1.6 : Valitaan yleisessä Matriisiesityslauseessa 16.2.4 lineaarikuvaukseksi identtinen kuvaus $L : V \to V$, $L(\mathbf{u}) := \mathbf{u}$, jolloin lähtöpuolen kannan kuvat ovat itse lähtöpuolen kantavektorit, ja kun ne esitetään maalipuolen kannassa, saatava identtisen kuvauksen matriisi onkin haluttu siirtomatriisi!

18 SISÄTULOAVARUUS

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ on monessa suhteessa ihanteellinen: mm.

1) vektorit ovat yksikön pituisia,

2) vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Molemmat ominaisuudet voidaan karakterisoida vektorien pistetulon avulla: $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ kaikilla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ja $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ kaikilla $i \neq j$.

Monissa muissakin lineaariavaruuksissa voidaan määritellä sen lineaarisen rakenteen kanssa sopusoinnussa oleva vektorien välinen laskutoimitus, jolla on samoja piirteitä kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulolla. Kun tällainen *sisätulo* on löydetty, voidaan avaruuden vektoreille määritellä pituus (*normi*) ja tarkastella vektorien välisiä relaatioita, esimerkiksi kohtisuoruutta (*ortogonaalisuutta*).

Lopulta jokaiseen äärellisulotteiseen sisätuloavaruuteen voidaan konstruoida kanta, jonka alkiot ovat yksikön pituisia ja kohtisuorassa toisiaan vastaan.

18.1 Sisätulon määritelmä

Määritelmä 18.1.1 Olkoon V reaalikertoiminen lineaariavaruus. Skalaariarvoinen kuvaus $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ on *sisätulo* (*inner product*), jos kaikilla α, $\beta \in \mathbb{R}$ sekä $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w} \in V$ on voimassa ehdot

(i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ ja lisäksi: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ jos ja vain jos $\mathbf{u} = \mathbf{0}$,

(ii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$,

(iii) $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Sisätulolla varustettu lineaariavaruus, siis nelikko $(V, +, \cdot, \langle , \rangle)$, on *sisätuloavaruus*.

Lause 18.1.2 Olkoon V sisätuloavaruus. Määritelmän 18.1.1 ehto (iii) on yhtäpitävä kahden ehdon (iii') kanssa:

(iii') $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$,

$\langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Todistus. Olkoon (iii) voimassa. Ensimmäinen ehto saadaan valitsemalla $\alpha = \beta = 1$, toinen ehto tempulla

$$\langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \alpha\mathbf{u} + 0\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \alpha\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + 0\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \alpha\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\,.$$

Kääntäen, jos ehdot (iii') ovat voimassa, on

$$\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \alpha\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \beta\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle\,.$$

□

Lause 18.1.3 Reaalikertoimisessa sisätuloavaruudessa $(V, +, \cdot, \langle, \rangle)$ on voimassa kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$:

a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$,

b) $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}\rangle = \alpha\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$,

c) $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\rangle = \alpha\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \beta\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$,

d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{u}\rangle = 0$.

Todistus. Kohdat a) – c) seuraavat sisätulon vaihdannaisuutta käyttäen Lauseesta 18.1.2. Kohta d): $\langle \mathbf{u}, \mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{u}, 0\mathbf{u}\rangle = 0\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 0$. □

Esimerkki 18.1.4 Reaalilukujen kertolasku on sisätulo (todista!). Lineaariavaruudessa $\mathbb{R}^n$ vektorien skalaari- eli pistetulo

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

toteuttaa sisätulon vaatimukset (todista!).

Itse asiassa jokaiseen reaaliseen äärellisulotteiseen lineaariavaruuteen saadaan tietyn kiinnitetyn kannan avulla sisätulo.

Lause 18.1.5 Olkoon V reaalikertoiminen lineaariavaruus ja olkoon vektorijoukko $U := \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ sen jokin kanta. Merkitään edelleenkin vektorin $\mathbf{v}$ koordinaattivektoria kannassa U symbolilla $\mathbf{v}_U \in \mathbb{R}^n$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulon avulla määritelty vektorien laskutoimitus

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle := \mathbf{u}_U \cdot \mathbf{v}_U$$

on sisätulo.

Todistus. Olkoot

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n, \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n.$$

(i) Reaalisuuden perusteella

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0.$$

Selvästikin $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 0$. Jos $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, on $x_k = 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$, ja siten $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(ii) Vaihdannaisuus seuraa pistetulon vaihdannaisuudesta.

(iii) Helposti nähdään, että $(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})_U = \alpha\mathbf{u}_U + \beta\mathbf{v}_U$, joten

$$\begin{aligned}
\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})_U \cdot \mathbf{w}_U = (\alpha\mathbf{u}_U + \beta\mathbf{v}_U) \cdot \mathbf{w}_U \\
&= \alpha(\mathbf{u}_U \cdot \mathbf{w}_U) + \beta(\mathbf{v}_U \cdot \mathbf{w}_U) \\
&= \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle .
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 18.1.6 Välillä $[a, b]$ jatkuvien funktioiden reaalikertoiminen lineaariavaruus $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ on sisätuloavaruus, kun määritellään nk. *integraalisisätulo*

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

(harjoitustehtävä). Avaruuteen $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ syntyy eräs sisätulo myös käyttäen *painofunktiona* jotakin jatkuvaa aidosti positiivista kuvausta $w : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$\langle f, g \rangle_w := \int_a^b f(x)g(x)w(x)\, dx.$$

Esimerkki 18.1.7 Lasketaan "auki" sisätulot

a) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle$,

b) $\langle 2\mathbf{u} - \mathbf{v}, 3\mathbf{v} + 4\mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle$.

Ratkaisut. Määritelmän ja laskusääntöjen mukaan

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + (-1) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 2\mathbf{u} - \mathbf{v}, 3\mathbf{v} + 4\mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle &= \langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} + 4\mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, 3\mathbf{v} + 4\mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle \\
&= \langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle + \langle 2\mathbf{u}, 4\mathbf{u} \rangle + \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \\
&\quad - \langle \mathbf{v}, 3\mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, 4\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \\
&= 8 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 3 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle .
\end{aligned}$$

18.2 Normi ja metriikka

Määritelmä 18.2.1 Olkoon $(V, +, \cdot, \langle, \rangle)$ reaalikertoiminen sisätuloavaruus.

a) Kuvaus $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$,

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle},$$

on *normi*. Ei-negatiivista lukua $\|\mathbf{u}\|$ sanotaan vektorin $\mathbf{u}$ *normiksi* tai *pituudeksi*. Vektori $\mathbf{u} \in V$ on *yksikkövektori* (*unit vector*), jos $\|\mathbf{u}\| = 1$.

b) Kuvaus $d : V \times V \to \mathbb{R}$,

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$

on *metriikka* (tai *etäisyys*). Ei-negatiivinen luku $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen *etäisyys* (*distance*).

On syytä heti huomauttaa, että lineaariavaruudessa voi olla muitakin normin vaatimukset täyttäviä kuvauksia, joita voidaan myös kutsua normeiksi. Samassa joukossa voi olla hyvinkin erilaisia normeja, ks. Tehtävä 18.3.4.

Tehtävä 18.2.2 Esitä seuraavat sisätulot normien avulla (jos mahdollista):

a) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle$,

b) $\langle 2\mathbf{u} - \mathbf{v}, 3\mathbf{v} + 4\mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle$.

Ratkaisu sivulla 252.

Tehtävä 18.2.3 Ilmaise $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\|$ vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ sisätulojen avulla.

Ratkaisu sivulla 252.

Tehtävä 18.2.4 Laske avaruudessa $\mathcal{C}([1, 2], \mathbb{R})$ $\langle f, g \rangle$, $\|f\|$ ja $\|g\|$, kun

$$f(x) \equiv 1, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Ratkaisu sivulla 252.

Lause 18.2.5 (*Schwarzin epäyhtälö*). Sisätuloavaruudessa V pätee kaikilla $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|.$$

Lisäksi: $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ jos ja vain jos $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat lineaarisesti riippuvia (ts. on olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolle $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ tai $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$).

Todistus. Jos $\|\mathbf{v}\| = 0$, on $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ja asia on selvä. Olkoon $\|\mathbf{v}\| > 0$. Jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$ on voimassa epäyhtälö

$$\begin{aligned} 0 \le \|\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} - \alpha\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \alpha^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 \alpha^2 - 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \alpha + \|\mathbf{u}\|^2 . \end{aligned}$$

Tällä muuttujan α ylöspäin aukeavalla paraabelilla on siis enintään yksi reaalinen nollakohta, joten sen diskriminantti

$$D := 4 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4 \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \le 0.$$

Mutta

$$4 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4 \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \le 0 \iff |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \le \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| .$$

Jos $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ tai $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, on jälkimmäinen väite selvästi tosi.

Olkoot siis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Jos $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$, on paraabelilla (tasan yksi) nollakohta, joten $D = 0$ ja siis $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

Olkoon lopuksi $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$. Silloin paraabelilla on jokin nollakohta α_0 ja siten $\mathbf{u} = \alpha_0\mathbf{v}$. $\square$

Tehtävä 18.2.6 Osoita, että sisätuloavaruudessa

a) $|\langle 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}, \mathbf{u} - 2\mathbf{v} \rangle| \le 2 \|\mathbf{u}\|^2 + 6 \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$,

b) $|\langle 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}, 3\mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle| \le 9 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + 3 \|\mathbf{u}\|^2 + 6 \|\mathbf{v}\|^2 + 9 |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|$.

Ratkaisu sivulla 252.

Lause 18.2.7 Sisätuloavaruuden V normille pätee kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$:

a) $\|\mathbf{u}\| \ge 0$, ja lisäksi: $\|\mathbf{u}\| = 0$ jos ja vain joss $\mathbf{u} = \mathbf{0}$,

b) $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$,

c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$,

d) $\Big| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \Big| \le \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

Todistus. Kohta a) seuraa Määritelmistä 18.1.1 (i) ja 18.2.1.

Myös kohta b) seuraa normin määritelmästä:

$$\|\alpha\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{u} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = |\alpha| \|\mathbf{u}\| .$$

Kohta c): Käyttäen Schwarzin epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2,\end{aligned}$$

josta positiivisuuden nojalla $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Kohta d) harjoitustehtävä. □

Ehtoja c) ja d) sanotaan *kolmioepäyhtälöiksi* (*triangle inequality*).

Tehtävä 18.2.8 Osoita, että sisätuloavaruudessa

a) $\|3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}\| \le 3\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|$,

b) $\|3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}\| \ge \Big| 4\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| - \|\mathbf{u}\| \Big|$.

Ratkaisu sivulla 253.

Lause 18.2.9 Normin määräämälle metriikalle pätee kaikilla $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$:

α) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ge 0$ ja lisäksi: $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{v}$,

β) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$,

γ) $d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \le d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Todistus. Harjoitustehtäviä. □

Esimerkki 18.2.10 Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ sisätulo (pistetulo) määrää vektorin $\mathbf{x}$ euklidisen (tai pythagoralaisen) pituuden

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

sekä pisteiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välisen etäisyyden

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pisteiden $\mathbf{x} := (3\ 1\ 2\ {-4})^T$ ja $\mathbf{y} := (1\ 3\ 0\ 2)^T$ etäisyys on

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2 + (2-0)^2 + (-4-2)^2} = 4\sqrt{3}.$$

Esimerkki 18.2.11 Sisätuloavaruuden vektori $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ voidaan *normittaa*, so. muodostaa vektorin $\mathbf{u}$ *suuntainen yksikkövektori*

$$\mathbf{u}^0 := \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}.$$

Esimerkki 18.2.12 Määritä vakio $\alpha \in \mathbb{R}$ niin, että funktio $\alpha \sin$ on yksikkövektori avaruudessa $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Tässä on siis sisätulona välin $[-\pi, \pi]$ integraalisisätulo, ks. Esimerkki 18.1.6.

Ratkaisu. Funktion $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ normille on voimassa

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx,$$

joten

$$\|\sin\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx = \pi.$$

Valitaan $\alpha := \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (tai $\alpha := -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$). Silloin

$$\|\alpha \sin\| = |\alpha| \, \|\sin\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

18.3 Metrinen avaruus ja normiavaruus

Metriikkoja voidaan käsitellä missä tahansa joukossa, mutta normi on mielekäs vain algebrallisissa struktuureissa kuten lineaariavaruus.

Määritelmä 18.3.1 Olkoon X epätyhjä joukko. Pari (X, d) on *metrinen avaruus* ja kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}$ on *metriikka*, jos d toteuttaa (jo Lauseessa 18.2.9 esiintyneet) ehdot $\alpha)$ – $\gamma)$:

$\alpha)$ $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ ja lisäksi: $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{v}$,

$\beta)$ $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$,

$\gamma)$ $d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Määritelmä 18.3.2 Olkoon V reaalinen lineaariavaruus. Pari $(V, \| \, \|)$ on *normiavaruus* ja kuvaus $\| \, \| : V \to \mathbb{R}$ on *normi*, jos se täyttää (Lauseen 18.2.7) ehdot a) – c).

a) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, ja lisäksi: $\|\mathbf{u}\| = 0$ jos ja vain joss $\mathbf{u} = \mathbf{0}$,

b) $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{u}\|$,

c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Tehtävä 18.3.3 Osoita, että ehtojen b) ja c) ollessa voimassa ehto a) voidaan korvata ehdolla

a') $\|\mathbf{u}\| = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ratkaisu sivulla 253.

Tehtävä 18.3.4 Keksi erilaisia normeja tasossa.
Ratkaisu sivulla 253.

18.4 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 18.2.2 : Esimerkkiä 18.1.7 jatkaen:

$$\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$$

$$\begin{aligned}\langle 2\mathbf{u}-\mathbf{v}, 3\mathbf{v}+4\mathbf{u}+\mathbf{w}\rangle &= 8\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 3\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \\ &= 8\|\mathbf{u}\|^2 - 3\|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle .\end{aligned}$$

Tehtävä 18.2.3 : Normin määritelmän ja sisätulon laskusääntöjen avulla:

$$\begin{aligned}\|2\mathbf{u}-3\mathbf{v}\|^2 &= \langle 2\mathbf{u}-3\mathbf{v}, 2\mathbf{u}-3\mathbf{v}\rangle = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 6\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - 6\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + 9\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &= 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 12\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + 9\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle\end{aligned}$$

ja siten

$$\|2\mathbf{u}-3\mathbf{v}\| = \sqrt{4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 12\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + 9\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}.$$

Tehtävä 18.2.4 : Määritelmien mukaan

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_1^2 f(t)\,g(t)\,d(t) = \int_1^2 1\cdot \tfrac{1}{t}\,dt = \ln 2. \\ \|f\|^2 &= \langle f, f\rangle = \int_1^2 1\,dt = 1, \text{ joten } \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = 1 \\ \|g\|^2 &= \langle g, g\rangle = \int_1^2 \tfrac{1}{t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}, \text{ joten } \|g\| = \sqrt{\langle g, g\rangle} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Tehtävä 18.2.6 a) Normeilla ilmaistuna

$$\langle 2\mathbf{u}+3\mathbf{v}, \mathbf{u}-2\mathbf{v}\rangle = 2\|\mathbf{u}\|^2 - 6\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle ,$$

joten reaalilukujen kolmioepäyhtälöä ja Schwarzin epäyhtälöä käyttäen

$$\begin{aligned}|\langle 2\mathbf{u}+3\mathbf{v}, \mathbf{u}-2\mathbf{v}\rangle| &= |2\|\mathbf{u}\|^2 - 6\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \\ &\leq 2\|\mathbf{u}\|^2 + 6\|\mathbf{v}\|^2 + |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \\ &\leq 2\|\mathbf{u}\|^2 + 6\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| .\end{aligned}$$

b) Järjestetään tarvittava erotus ja lasketaan aluksi:

$$\begin{aligned}\langle 2\mathbf{u}-3\mathbf{v}, 3\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle &= \langle 3(\mathbf{u}-\mathbf{v})-\mathbf{u}, 3(\mathbf{u}-\mathbf{v})+2\mathbf{v}\rangle \\ &= 9\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 - 3\|\mathbf{u}\|^2 - 6\|\mathbf{v}\|^2 + 7\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle .\end{aligned}$$

Reaalilukujen kolmioepäyhtälöä käyttäen

$$
\begin{aligned}
|\left\langle 2\mathbf{u}-3\mathbf{v}, 3\mathbf{u}-\mathbf{v}\right\rangle| &= |9\left\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\right\|^2 - 3\left\|\mathbf{u}\right\|^2 - 6\left\|\mathbf{v}\right\|^2 + 7\left\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\right\rangle| \\
&\leq 9\left\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\right\|^2 + 3\left\|\mathbf{u}\right\|^2 + 6\left\|\mathbf{v}\right\|^2 + 7|\left\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\right\rangle| \\
&\leq 9\left\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\right\|^2 + 3\left\|\mathbf{u}\right\|^2 + 6\left\|\mathbf{v}\right\|^2 + 9|\left\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\right\rangle|
\end{aligned}
$$

Tehtävä 18.2.8 : Sopivasti ryhmitellen: a) $3\mathbf{u}-4\mathbf{v} = 3(\mathbf{u}-\mathbf{v})-\mathbf{v}$, joten kolmioepäyhtälöä käyttäen

$$\left\|3\mathbf{u}-4\mathbf{v}\right\| \leq 3\left\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\right\| + \left\|\mathbf{v}\right\|.$$

b) Toista kolmioepäyhtälöä (Lause 18.2.7 d) käyttäen

$$\Big|4\left\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\right\| - \left\|\mathbf{u}\right\|\Big| \leq \Big|\left\|4(\mathbf{u}-\mathbf{v})\right\| - \left\|-\mathbf{u}\right\|\Big| \leq |4(\mathbf{u}-\mathbf{v})-\mathbf{u}| = \left\|3\mathbf{u}-4\mathbf{v}\right\|.$$

Tehtävä 18.3.3 : Pitäisi siis osoittaa, että $\left\|\mathbf{u}\right\| \geq 0$. Mutta Määritelmän 18.3.2 ehdon c) mukaan:

$$
\begin{aligned}
0 &= \tfrac{1}{2}\left\|\mathbf{u}+(-\mathbf{u})\right\| \leq \tfrac{1}{2}\left\|\mathbf{u}\right\| + \tfrac{1}{2}\left\|-\mathbf{u}\right\| = \tfrac{1}{2}\left\|\mathbf{u}\right\| + \tfrac{1}{2}|-1|\left\|\mathbf{u}\right\| \\
&= \tfrac{1}{2}\left\|\mathbf{u}\right\| + \tfrac{1}{2}\left\|\mathbf{u}\right\| = \left\|\mathbf{u}\right\|.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 18.3.4 : Olkoon $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T$.

a) Tavallinen (standardi) normi (eli ”vektorin kärjen etäisyys alkupisteestä”) on jo tuttu:

$$\left\|\mathbf{x}\right\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

b) ”Taksiautonormi” määritellään näin

$$\left\|\mathbf{x}\right\|_1 := |x_1| + |x_2|.$$

c) Edelleen nk. maksiminormi:

$$\left\|\mathbf{x}\right\|_\infty := \max\left(|x_1|, |x_2|\right).$$

Lukijan huoleksi jätetään normin määritelmän ehtojen tarkastus kohdissa b) ja c).

Huomautus 18.4.1 Yllä olevat normit saadaan yleisestä *p-normista*

$$\left\|\mathbf{x}\right\|_p := \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p},$$

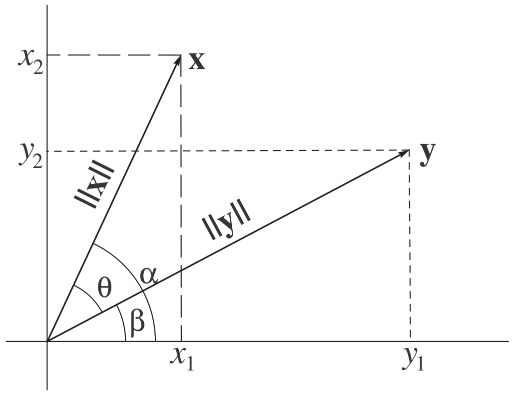
mikä määrittelee normin arvoilla $p \geq 1$. Miten saadaan $\left\|\mathbf{x}\right\|_\infty$?

19 ORTOGONAALISET JOUKOT – PROJEKTIOT

Tarkastellaan vektorien välisiä kulmia ja kohtisuoruutta, määritellään ortonormaali vektorijoukko ja vektorin projektiot aliavaruuteen.

19.1 Kulman määrittely

Olkoot $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ tason vektoreita kuten Kuvassa 27.



Kuva 27: Vektoreiden välinen kulma

Lasketaan koordinaattien avulla niiden välinen kulma $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

$$
\begin{aligned}
\theta &= \alpha - \beta \\
\cos\theta &= \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
&= \frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{y_1}{\|\mathbf{y}\|} + \frac{x_2}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{y_2}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \\
&= \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.
\end{aligned}
$$

Kun muistetaan, että Schwarzin epäyhtälön mukaan sisätuloavaruuden nollasta poikkeaville vektoreille pätee

$$
-1 \le \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1,
$$

päästään myös aksiomaattisessa sisätuloavaruudessa käsiksi kulmiin.

Määritelmä 19.1.1 Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus.

a) Kahden vektorin $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ *välinen kulma* (*angle*) on se välin $[0, \pi]$ luku θ, jolle

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \quad \text{eli} \quad \theta = \overline{\text{arc}} \cos \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}.$$

Vektorien välistä kulmaa merkitään $\theta = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

b) Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat *ortogonaalisia* eli *kohtisuorassa* toisiaan vastaan, jos $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Kohtisuoruutta merkitään $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Huomautus 19.1.2 a) Kaikilla $\mathbf{u} \in V$ on $\mathbf{u} \perp \mathbf{0}$.

b) Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ nollasta poikkeavia vektoreita. Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat

1) samansuuntaisia jos ja vain jos $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$,

2) ortogonaalisia jos ja vain jos $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\pi}{2}$,

3) vastakkaissuuntaisia jos ja vain jos $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi$.

c) Yksikkövektoreille on $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{\text{arc}} \cos \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Lause 19.1.3 Olkoon V sisätuloavaruus ja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$.

a) Jos $\mathbf{u} \in V$ ja $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \perp \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{u} \perp \mathbf{v}_k$, sekä $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, niin

$$\mathbf{u} \perp (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k).$$

b) Jos $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$ kaikilla $i \neq j$, niin (ks. Kuva 28)

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_k\|^2.$$

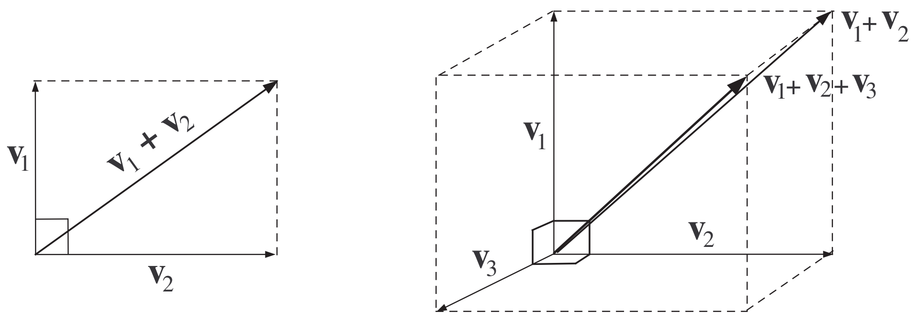
Todistus. a) Koska $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ kaikilla i, on sisätulon lineaarisuuden (yleistyksen) nojalla

$$\langle \mathbf{u}, \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \cdots + \alpha_k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k \rangle = 0.$$

b) Kahden vektorin tapaus: Jos $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, niin $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ ja

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 &= \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle + 2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle \\ &= \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2. \end{aligned}$$

Yleinen tapaus: harjoitustehtävä. □



Kuva 28: Pythagoraan lauseen yleistyksiä

Esimerkki 19.1.4 a) Avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollisen kannan vektorit ovat ortogonaalisia yksikkövektoreita.

b) Tasovektorit $(a\ b)^T$ ja $(-b\ a)^T$ ovat ortogonaalisia.

c) Eräs vektoreiden $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ ja $\mathbf{y} = (y_1\ y_2\ y_3)^T$ kanssa ortogonaalinen vektori on näiden *ristitulo* eli *vektoritulo* $\mathbf{z} = \mathbf{x}\times\mathbf{y}$, jonka koordinaatit ovat *formaalin* determinantin 1. rivin kofaktorit:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Esimerkki 19.1.5 a) Avaruuden $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ funktiot $\sin$ ja $\cos$ ovat ortogonaalisia, sillä

$$\langle \sin, \cos\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\, dx = 0.$$

b) Funktiot $f,\ g \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, $f(x) := x$, $g(x) := e^x$, ovat painofunktion $x \mapsto e^{-x}$ suhteen määritellyn sisätulon suhteen ortogonaalisia, sillä

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)e^{-x}\, dx = \int_{-1}^{1} xe^x e^{-x}\, dx = 0.$$

Tehtävä 19.1.6 Mitkä vektorit ovat kohtisuorassa kahta vektoria $(1\ 2\ 3)^T$ ja $(2\ {-2}\ 1)^T$ vastaan?
Ratkaisu sivulla 266.

Tehtävä 19.1.7 Missä lineaariavaruuksissa $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ovat funktiot f, $f(x) := 1/x$, ja g, $g(x) := \ln x$, ortogonaalisia?
Ratkaisu sivulla 266.

19.2 Ortogonaalinen joukko – ortonormaalisuus

Määritelmä 19.2.1 Sisätuloavaruuden V osajoukko A on *ortogonaalinen*, jos $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Jos A on ortogonaalinen ja $\|\mathbf{u}\| = 1$ kaikilla $\mathbf{u} \in A$, niin A on *ortonormaali* tai *ortonormitettu* joukko.

Lause 19.2.2 Sisätuloavaruuden ortogonaalinen vektorijoukko U on lineaarisesti riippumaton jos ja vain jos $\mathbf{0} \notin U$. Erityisesti ortonormaali joukko on lineaarisesti riippumaton.

Todistus. 1) Jos $\mathbf{0} \in U$, on U lineaarisesti riippuva.

2) Oletetaan, että $\mathbf{0} \notin U$. Olkoot $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{u}_k \in U$ sellaisia, että

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Lauseen 18.1.3 d), sisätulon lineaarisuuden ja ortogonaalisuuden nojalla on kaikilla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$0 = \left\langle \mathbf{u}_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{u}_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = \alpha_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = \alpha_i \|\mathbf{u}_i\|^2 .$$

Koska mikään vektoreista $\mathbf{u}_i$ ei ole $\mathbf{0}$, on oltava $\alpha_i = 0$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Seuraus 19.2.3 Olkoon $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ sisätuloavaruuden ortonormaali osajoukko. Jos $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i$, missä $\alpha_i \in \mathbb{R}$, niin kaikilla $j = 1, 2, 3, \ldots, k$ on $\alpha_j = \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_j \rangle$.

Todistus. Ks. Lauseen 19.2.2 todistus. □

Tehtävä 19.2.4 Osoita ortogonaaliseksi avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektorijoukko

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ja normalisoi se ortonormaaliksi joukoksi U^0. Säilytä vektorien järjestys.
Ratkaisu sivulla 266.

Tehtävä 19.2.5 Testaa Seurausta 19.2.3 Tehtävässä 19.2.4 lasketulla ortonormaalilla joukolla U^0 ja vektorilla $\mathbf{u}$, jonka koordinaatit kannassa U^0 ovat $(1\ 2\ 3)^T$.
Ratkaisu sivulla 266.

19.3 Projektiot

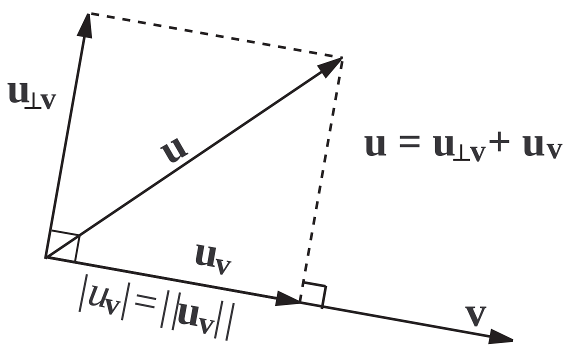
Määritelmä 19.3.1 Olkoon V sisätuloavaruus ja $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.

a) Vektorin $\mathbf{u} \in V$ *ortogonaaliprojektio* vektorille $\mathbf{v}$ on vektori (sanotaankin myös *vektoriprojektioksi*)

$$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}^0$$

ja *skalaariprojektio* on luku (ks, kuva 29)

$$u_{\mathbf{v}} := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}.$$



Kuva 29: Projektio ja ortogonaalikomponentti

b) Vektorin $\mathbf{u} \in V$ *ortogonaalikomponentti* vektorille $\mathbf{v}$ on vektori

$$\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}.$$

Huomautus 19.3.2 Ortogonaalikomponentti on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{v}$ (ja siis myös projektiota) vastaan, sillä

$$\langle \mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Projektiot lausuttuina kulman avulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathbf{v}} &= \|\mathbf{u}\| \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}^\circ = \|\mathbf{u}\| \cos\left(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right) \mathbf{v}^\circ \\ u_{\mathbf{v}} &= \|\mathbf{u}\| \cos\left(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right). \end{aligned}$$

Kyseessähän on vektorin hajottaminen kohtisuoriin komponentteihin

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}},$$

joista toinen on annetun vektorin suuntaisella origon kautta kulkevalla suoralla.

Esimerkki 19.3.3 Vektorin $\mathbf{u} := (0\ 1)^T$ projektiot vektorille $\mathbf{v} := (-1\ -1)^T$ ovat

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{\mathbf{v}} &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Skalaariprojektio $u_{\mathbf{v}} = -\sqrt{2}/2$.

Esimerkki 19.3.4 Avaruuden $\mathcal{C}([0, \pi/2], \mathbb{R})$ funktioiden $\sin$ ja $\cos$ välinen kulma integraalisisätulon suhteen on (vrt. Esimerkki 19.1.5)

$$\theta = \overline{\mathrm{arc}} \cos \frac{\langle \sin, \cos \rangle}{\|\sin\| \, \|\cos\|} = \overline{\mathrm{arc}} \cos \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \overline{\mathrm{arc}} \cos \tfrac{2}{\pi} \approx 0,88$$

sillä

$$\begin{aligned}
\langle \sin, \cos \rangle &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2} \sin 2x \, dx = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}, \\
\|\sin\|^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \tfrac{\pi}{4}, \\
\|\cos\|^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \, dx = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Edelleen vektoriprojektiot

$$\begin{aligned}
\cos_{\sin} &= \frac{\langle \cos, \sin \rangle}{\|\sin\|^2} \sin = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4}} \sin = \tfrac{2}{\pi} \sin \\
\cos_{\perp \sin} &= \cos - \tfrac{2}{\pi} \sin .
\end{aligned}$$

Tehtävä 19.3.5 Osoita, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ vektorien projektiot vektorille $\mathbf{v}$ saadaan myös kertomalla niitä vasemmalta nk. *projektiomatriisilla*

$$P_{\mathbf{v}} := \mathbf{v}(\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{-1} \mathbf{v}^T.$$

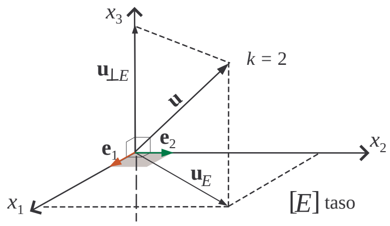
Ratkaisu sivulla 267.

19.4 Projektiot aliavaruuksiin

Määritelmä 19.4.1 Olkoon $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ sisätuloavaruuden V ortonormaali osajoukko. Vektorin $\mathbf{u} \in V$ *projektio* aliavaruudelle $[E]$ on vektori

$$\mathbf{u}_E := \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \, \mathbf{e}_i$$

ja *ortogonaalikomponentti* $\mathbf{u}_{\perp E} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_E$ (ks. Kuva 30).



Kuva 30: Projektio ortonormaalin joukon virittämään aliavaruuteen

Lause 19.4.2 Määritelmän 19.4.1 tilanteessa vektorin $\mathbf{u}$ projektio on avaruudessa $[E]$ ja ortogonaalikomponentti on kohtisuorassa jokaista vektoria $\mathbf{e}_i$ vastaan. Viritetyille aliavaruuksille pätee $[E \cup \{\mathbf{u}\}] = [E \cup \{\mathbf{u}_{\perp E}\}]$.

Todistus. Vektorien $\mathbf{e}_i$ lineaarikombinaationa $\mathbf{u}_E \in [E]$. Kohtisuoruus seuraa määritelmistä käyttäen Seurausta 19.2.3:

$$\langle \mathbf{u}_{\perp E}, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_j \rangle - \langle \mathbf{u}_E, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_j \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_j \rangle = 0.$$

Viritetyt aliavaruudet samat: Merkitään $\alpha_j := \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_j \rangle$, jolloin $\mathbf{u}_E = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i$.

1) Olkoon $\mathbf{v} \in [E \cup \{\mathbf{u}\}]$. Silloin

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{e}_i + \beta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{e}_i + \beta \mathbf{u}_E + \beta \mathbf{u}_{\perp E} = \sum_{i=1}^{k} (\beta_i + \alpha_i \beta) \mathbf{e}_i + \beta \mathbf{u}_{\perp E},$$

joten $\mathbf{v} \in [E \cup \{\mathbf{u}_{\perp E}\}]$.

2) Olkoon $\mathbf{w} \in [E \cup \{\mathbf{u}_{\perp E}\}]$. Silloin

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \mathbf{e}_i + \gamma \mathbf{u}_{\perp E} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \mathbf{e}_i - \gamma \mathbf{u}_E + \gamma \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i - \alpha_i \gamma) \mathbf{e}_i + \gamma \mathbf{u},$$

joten $\mathbf{w} \in [E \cup \{\mathbf{u}\}]$. □

19.5 Gram-Schmidtin ortonormitusmenetelmä

Konstruoidaan äärellisulotteiseen sisätuloavaruuteen ortonormaali kanta lähtien annetusta kannasta. Yksiulotteisessa avaruudessa riittää normittaa yksi vektori.

Lause 19.5.1 Jokaisella vähintäin yksiulotteisella äärellisulotteisella sisätuloavaruudella on ortonormaaleja kantoja.

Todistus. Jokaisella äärellisulotteisella vektoriavaruudella on kantoja ja mikä tahansa sisätuloavaruuden äärellinen kanta voidaan ortonormittaa mm. Gram-Schmidtin menetelmällä (Kuvassa 31). □

Olkoon V vähintään kaksiulotteinen sisätuloavaruus ja $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ sen jokin kanta. Merkitään $U_k := \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ kullakin $k \in [n]$. Korvataan kannan U alkiot yksi kerrallaan ortogonaalisilla yksikkövektoreilla (katso Kuva 32).

Askel 1. Korvataan $\mathbf{u}_1$ yksikkövektorilla:

$$\mathbf{e}_1 := \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \quad E_1 := \{\mathbf{e}_1\}.$$

Askel 2. Korvataan $\mathbf{u}_2$ sen normitetulla ortogonaalikomponentilla aliavaruudelle $[E_1]$:

$$\mathbf{p}_2 := \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \, \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 := \frac{\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{p}_2\|}, \quad E_2 := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}.$$

Toistetaan arvoilla $k = 3, 4, \ldots, n$:

Askel k. Korvataan $\mathbf{u}_k$ sen normitetulla ortogonaalikomponentilla aliavaruudelle $[E_{k-1}]$:

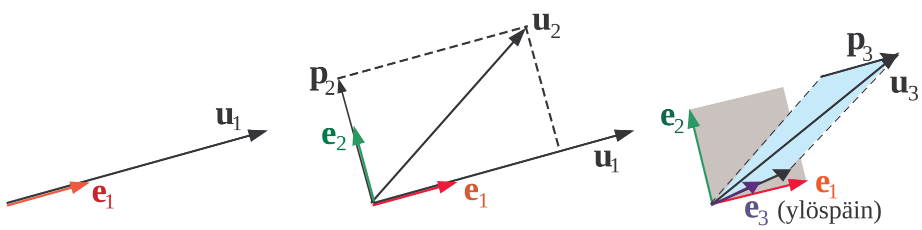
$$\mathbf{p}_k := \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_i \rangle \, \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_k := \frac{\mathbf{p}_k}{\|\mathbf{p}_k\|}, \quad E_k := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}.$$

Kuva 31: Gram-Schmidtin algoritmi

Gram-Schmidtin menetelmän (Kuva 31) kussakin vaiheessa

1) $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{0}$, sillä $E_{k-1} \cup \{\mathbf{u}_k\}$ on lineaarisesti riippumaton,
2) E_k on ortonormaali ja $[E_k] = [U_k]$ (Lause 19.4.2).

Lopuksi $[E_n] = [U_n] = V$.



Kuva 32: Ortogonalisointia

Esimerkki 19.5.2 Muodosta tasolle $\mathbb{R}^2$ ortonormaali kanta, jonka toinen vektori on suoran $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ suuntainen.

Ratkaisu. On tietenkin oltava $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Olkoon

$$\mathbf{e}_1 := \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Tason kierrolla saatu vektori $\mathbf{u} := (-v_2\ v_1)^T$ ei ole vektorin $\mathbf{v}$ suuntainen, joten lasketaan sen avulla toinen vektori:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_2 &:= \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}\left\langle \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{e}_2 &:= \frac{\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{p}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Eräs kelvollinen kanta on $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Tehtävä 19.5.3 Mitä muita ratkaisuja keksit Esimerkille 19.5.2?
Ratkaisu sivulla 267.

Esimerkki 19.5.4 Muodosta avaruudella $\mathbb{R}^3$ ortonormaali kanta lähtien kannasta U, jonka vektorit ovat

$$\mathbf{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu. Todenna aluksi esimerkiksi determinantilla, että U on kanta. Gram-Schmidtin menetelmä antaa ortonormaalin kannan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &:= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
\mathbf{p}_2 &:= \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \, \mathbf{e}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{e}_2 &:= \frac{\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{p}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}}} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\
\mathbf{p}_3 &:= \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \, \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \, \mathbf{e}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} - \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{e}_3 &:= \frac{\mathbf{p}_3}{\|\mathbf{p}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Esimerkki 19.5.5 Onko $U := \{1, x, x^2\}$ ortogonaalinen avaruudessa $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$?

Ratkaisu. Sisätulo on siis $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$, joten

$$
\begin{aligned}
\langle 1, x \rangle &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot x dx = 0 \\
\langle 1, x^2 \rangle &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx = \frac{2}{3} \\
\langle x, x^2 \rangle &= \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = 0.
\end{aligned}
$$

Joukko U ei siis ole ortogonaalinen.

Tehtävä 19.5.6 Ortogonalisoi Gram-Schmidtilla Esimerkin 19.5.5 joukko $U = \{1, x, x^2\}$ välin $[-1, 1]$ integraalisisätulon

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

suhteen. Ratkaisu sivulla 267.

19.6 Sovellutuksia – pisteen etäisyys ...

suorasta

Pisteen $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *etäisyys suorasta* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ voidaan määritellä kaavalla

$$d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) := \min\{\|\mathbf{b} - \mathbf{x}(t)\| \mid t \in \mathbb{R}\},$$

mikä voitaisiin laskea analyysin keinoin. Nimittäin, kuvaus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

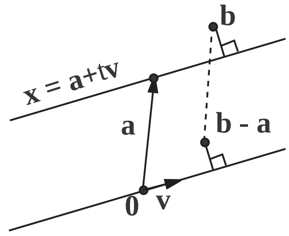
$$\varphi(t) := \|\mathbf{b} - \mathbf{x}(t)\|^2,$$

on derivoituva, $\lim_{t\to\pm\infty} \varphi(t) = \infty$ ja sillä on tasan yksi minimipiste.

Toisaalta on ilmeistä, että pisteen $\mathbf{b}$ etäisyys *origon kautta* kulkevasta suorasta $\mathbf{y} = t\mathbf{v}$ on yhtä kuin vektorin $\mathbf{b}$ vektorille $\mathbf{v}$ lasketun ortogonaalikomponentin $\mathbf{b}_{\perp\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_{\mathbf{v}}$ pituus $d(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{b}_{\perp\mathbf{v}}\|$.

Etäisyys mielivaltaiselle suoralle $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ saadaan siirtämällä vektoria $\mathbf{b}$ ja suoraa vakiolla $-\mathbf{a}$, jolloin suora $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ kulkee origon kautta (ks. Kuva 33). Siis

$$d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = d(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = \|(\mathbf{b} - \mathbf{a})_{\perp\mathbf{v}}\|.$$



Kuva 33: Pisteen etäisyys suorasta

Tehtävä 19.6.1 Laske pisteen $(2\ 3\ 1\ 0)^T$ etäisyys

a) suorasta $\mathbf{y} = t(1\ 0\ 1\ 0)^T$,

b) suorasta $\mathbf{x} = (0\ 1\ 1\ 2)^T + t(1\ 0\ 1\ 0)$.

Ratkaisu sivulla 268.

Tehtävä 19.6.2 Osoita edellisten kaavojen nojalla, että pisteen $(x_0\ y_0)^T$ etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ on

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ratkaisu sivulla 269.

tasosta

Pisteen $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ etäisyys tasosta $\mathbf{x}(s,t) = \mathbf{a} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ lasketaan samalla tavalla vektorin $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ortogonaalikomponentin pituutena tasolle $\mathbf{x} - \mathbf{a}$. Tälle tasolle olisi kuitenkin ensin muodostettava esitys ortonormaalin kannan avulla, jotta voitaisiin käyttää Määritelmän 19.4.1 kaavoja.

Voidaan kuitenkin osoittaa, että projisointi onnistuu taas projektiomatriisin avulla (vrt. Tehtävä 19.3.5):

Lineaarisesti riippumattomat vektorit $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ määräävät origon kautta kulkevan tason ja matriisille $\mathbf{V} := (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2)$ (sarakkeinaan kyseiset vektorit) on 2×2-matriisi $\mathbf{V}^T\mathbf{V}$ säännöllinen (perustele!). On siis olemassa $n\times n$-matriisi

$$P_{\mathbf{V}} = \mathbf{V}(\mathbf{V}^T\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^T,$$

ja voitaisiin todistaa, että $P_{\mathbf{V}}$ kuvaa kaikki vektorit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ortogonaalisesti tasolle $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$.

Tehtävä 19.6.3 Laske pisteen $(1\ 2\ 3)^T$ etäisyys tasosta

$$\mathbf{x} = (0\ 1\ 0)^T + s(2\ \ -1\ 1)^T + t(3\ 2\ 4)^T.$$

Ratkaisu sivulla 269.

Ortogonaalista projisointia aliavaruuteen havainnollistaa seuraava dynaaminen kuvio:

Avaruusvektorin projisointi kahden vektorin virittämään tasoon
(linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/OrtogProj32.htm`

19.7 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 19.1.6 : Olkoon $(x\ y\ z)^T$ vektori, joka on ortogonaalinen annettujen vektorien kanssa, ts.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \text{ ja } \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Saamme yhtälöryhmän

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/6 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Kysyttyjä vektoreita ovat siis kaikki $t(-8\ -5\ 6)^T,\ t \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 19.1.7 : On löydettävä välit $[a, b]$, joilla

1) $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

2) $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$.

Voidaan järkevyyden nimissä heti vaatia, että $0 < a < b$. Silloin $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ja

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle &= \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{x}\ln x\,dx = \Big/_a^b \frac{1}{2}(\ln x)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left((\ln b)^2 - (\ln a)^2\right) = \frac{1}{2}(\ln b + \ln a)(\ln b - \ln a). \end{aligned}$$

Edellä asetetuilla ehdoilla tämä on nolla täsmälleen arvoilla $\ln b + \ln a = \ln ab = 0$ eli $ab = 1$. Sopivat välit ovat siis muotoa $[1/r, r]$, missä $r > 1$.

Tehtävä 19.2.4 : Näytä, että pareittain muodostetut pistetulot ovat nollia. Kerro kukin vektori sen normin käänteisluvulla. Tuloksena pitäisi olla ortonormaali vektorijoukko

$$U^0 := \left\{ \frac{1}{\sqrt{23}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{122}}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

joka on tietenkin on virittämänsä aliavaruuden ortonormaali kanta.

Tehtävä 19.2.5 : Muodosta skalaarivektorin $(1\ 2\ 3)^T$ avulla lineaarikombinaatio $\mathbf{u}$ Tehtävän 19.2.4 ratkaisuvektoreista (säilytä järjestys!), ja laske pistetulot $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ kaikilla $\mathbf{v} \in U^0$. Niistä pitäisi tulla alunperäiset koordinaatit 1, 2 ja 3.

Tehtävä 19.3.5 : Dimensiotarkastelu varmistaa, että $P_{\mathbf{v}}$ on $n \times n$-matriisi. Koska $\mathbf{v}^T\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ ja $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ovat lukuja, on

$$P_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{v})^{-1}\mathbf{v}^T\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}.$$

Tehtävä 19.5.3 : Vaaditut ehdot toteuttavia kantoja ovat kaikki seuraavat:

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\}, \{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\}$$

Tehtävä 19.5.6 : Olkoot $R_0 := 1$, $R_1(x) := x$ ja $R_2(x) := x^2$. Silloin

$$\|R_0\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2 \, dx = 2,$$

joten $\|R_0\| = \sqrt{2}$. Saadaan yksikkövektori Q_0:

$$Q_0(x) = \frac{1}{\|R_0\|} R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ortogonaalikomponentti $S_1 = R_1 - \langle R_1, Q_0 \rangle \, Q_0$, missä

$$\begin{aligned} S_1(x) &= x - \left(\int_{-1}^{1} x \tfrac{\sqrt{2}}{2} \, dx \right) \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = x \\ \|S_1\|^2 &= \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \tfrac{2}{3}, \end{aligned}$$

jolloin $\|S_1\| = \sqrt{2/3}$. Saadaan toinen yksikkövektori Q_1:

$$Q_1(x) = \frac{1}{\|S_1\|} S_1(x) = \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \, x = \tfrac{\sqrt{6}}{2} \, x.$$

Ortogonaalikomponentti $S_2 = R_2 - \langle R_2, Q_0 \rangle \, Q_0 - \langle R_2, Q_1 \rangle \, Q_1$, missä

$$\begin{aligned} S_2(x) &= x^2 - \int_{-1}^{1} x^2 \tfrac{\sqrt{2}}{2} \, dx \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \int_{-1}^{1} x^2 \tfrac{\sqrt{6}}{2} \, x \, dx \cdot \tfrac{\sqrt{6}}{2} \, x = \cdots = x^2 - \tfrac{1}{3} \\ \|S_2\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \tfrac{1}{3} \right)^2 \, dx = \cdots = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

jolloin $\|S_2\| = \sqrt{8/45}$. Saadaan kolmas yksikkövektori Q_2:

$$Q_2(x) = \frac{1}{\|S_2\|} S_2(x) = \cdots = \tfrac{\sqrt{10}}{2} \cdot \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Näin saatu ortonormaali kanta on

$$\left\{ \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{6}}{2}x, \tfrac{\sqrt{10}}{2}\left(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\right) \right\}.$$

Tehtävä 19.6.1 : a) Merkitään $\mathbf{y} = t\mathbf{v} = t(1\ 0\ 1\ 0)^T$ ja $d(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{b}_{\perp\mathbf{v}}\|$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{\mathbf{v}} &= \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}^2\|}\mathbf{v} = \frac{\begin{pmatrix} 2\\3\\1\\0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\\0\\\frac{3}{2}\\0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{b}_{\perp\mathbf{v}} &= \mathbf{b} - \mathbf{b}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2\\3\\1\\0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\\0\\\frac{3}{2}\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\3\\-\frac{1}{2}\\0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

joten

$$d(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{b}_{\perp\mathbf{v}}\| = \frac{\sqrt{38}}{2}.$$

b) Merkitään $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ ja $d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = \|(\mathbf{b} - \mathbf{a})_{\perp\mathbf{v}}\|$. Merkitään myös

$$\mathbf{c} := \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2\\3\\1\\0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\2\\0\\-2 \end{pmatrix}$$

jolloin $d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{c}_{\perp\mathbf{v}}\|$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{\mathbf{v}} &= \frac{\langle \mathbf{c}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}^2\|}\mathbf{v} = \frac{\begin{pmatrix} 2\\2\\0\\-2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{c}_{\perp\mathbf{v}} &= \mathbf{c} - \mathbf{c}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2\\2\\0\\-2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\2\\-1\\-2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

joten $d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = \|(\mathbf{b} - \mathbf{a})_{\perp\mathbf{v}}\| = \sqrt{1 + 4 + 1 + 4} = \sqrt{10}$.

Tehtävä 19.6.2 : Muodostetaan suoralle $by = -ax - c$ parametriesitys, vaikkapa $x = t$, $y = -at/b - c/b$, $t \in \mathbb{R}$. Valitaan vektorit

$$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} := \begin{pmatrix} 0 \\ -c/b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := \mathbf{a} + t\mathbf{v}.$$

Silloin hieman työläällä laskulla (ks. Maple-lasku)

$$d(\mathbf{b}, \mathbf{x})^2 = \|(\mathbf{b} - \mathbf{a})_{\perp \mathbf{v}}\|^2 = \ldots = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

Maple-ratkaisu (linkki Maple-työarkkiin)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/Teht1962.mws`

Tehtävä 19.6.3 : Merkitään $\mathbf{b} = (1\ 2\ 3)^T$, $\mathbf{a} := (0\ 1\ 0)^T$, $\mathbf{v}_1 = (2\ -1\ 1)^T$ ja $\mathbf{v}_2 = (3\ 2\ 4)^T$. Nyt etäisyys on vektorin $\mathbf{b}$ etäisyys tasosta $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$ on sama kuin vektorin $\mathbf{c} := \mathbf{b} - \mathbf{a}$ ortogonaalikomponentin pituus projisoitaessa se aliavaruuteen $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$.

Vektorimatriisi ja projektiomatriisi ovat (laske läpi!)

$$\mathbf{V} := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad P_{\mathbf{V}} = \mathbf{V}(\mathbf{V}^T\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \frac{37}{55} & \frac{-3}{11} & \frac{21}{55} \\ \frac{-3}{11} & \frac{17}{22} & \frac{7}{22} \\ \frac{21}{55} & \frac{7}{22} & \frac{61}{110} \end{pmatrix}$$

Projektiovektori $\mathbf{c}_{\mathbf{V}}$ ja ortogonaalikomponentti $\mathbf{c}_{\perp \mathbf{V}}$ ovat

$$\mathbf{c}_{\mathbf{V}} = P_{\mathbf{V}}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \frac{17}{11} \\ \frac{16}{11} \\ \frac{26}{11} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_{\perp \mathbf{V}} = \mathbf{c} - \mathbf{c}_{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{11} \\ \frac{-5}{11} \\ \frac{7}{11} \end{pmatrix}$$

Sen pituus, eli kysytty etäisyys, on $\sqrt{110}/11 \approx 0.953$.

20 ORTONORMAALIT KANNAT JA MATRIISIT

20.1 Ortonormaali kanta

Tarkastellaan seuraavaksi joitakin ortonormaalien kantojen erityispiirteitä; mm. vektorien sisätulo ja normi voidaan laskea suoraa koordinaattien avulla; tämän sanoo Parsevalin lause (Marc-Antoine Parseval des Chênes, Ranska, 1755-1836). Lisäksi tutkitaan matriisien ortogonaalisuutta.

Lause 20.1.1 (*Parsevalin lause*). Olkoon $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ sisätuloavaruuden V ortonormaali kanta.

a) Vektorin $\mathbf{u} \in V$ koordinaatit saadaan sisätulon avulla:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_k \rangle \, \mathbf{e}_k.$$

b) Vektorien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k$, $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{e}_k$, sisätulo saadaan koordinaattien avulla:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Erikoisesti vektorin $\mathbf{u}$ normille pätee

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Todistus. a) Ks. Seuraus 19.2.3.

b) Kohdan a) mukaan $\langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_k \rangle = x_k$, joten

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \mathbf{u}, \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{e}_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} y_k \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k.$$

□

Tehtävä 20.1.2 Laske vektorin $\mathbf{x} = (2\ 3\ 4)^T$ koordinaatit Esimerkin 19.5.4 kannassa $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$E = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ratkaisu sivulla 274.

Tehtävä 20.1.3 Olkoon $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortonormaali kanta kuten Esimerkissä 19.5.4 ja Tehtävässä 20.1.2. Laske vektorien

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= 2\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

sisätulo. Ratkaisu sivulla 274.

Esimerkki 20.1.4 Lasketaan Parsevalin lauseen avulla

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} (4 + 5\sin x - 6\cos x)(2 - 7\sin x + 2\cos x)\, dx.$$

Avaruuden $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ osajoukko $S := \{1, \cos, \sin\}$ on ortogonaalinen integraalisisätulon suhteen, sillä

$$\langle 1, \cos\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = 0, \quad \langle 1, \sin\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 0$$

ja $\langle \cos, \sin\rangle = 0$ (ks. Esimerkki 19.1.5). Edelleen

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi,$$

Esimerkin 18.2.12 mukaan $\|\sin\|^2 = \pi$ ja siten

$$\|\cos\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \sin^2 x)\, dx = 2\pi - \pi = \pi.$$

Joukko

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin \right\}$$

on täten aliavaruuden $[S]$ ortonormaali kanta.

Laskettava integraali on sisätulo $\langle f, g\rangle$, jonka tekijät ovat

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sqrt{2\pi}\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} - 6\sqrt{\pi}\,\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x + 5\sqrt{\pi}\,\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x \\ g(x) &= 2\sqrt{2\pi}\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + 2\sqrt{\pi}\,\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x - 7\sqrt{\pi}\,\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x. \end{aligned}$$

Parsevalin lauseen mukaan integraali on

$$I = 4\sqrt{2\pi}\cdot 2\sqrt{2\pi} - 6\sqrt{\pi}\cdot 2\sqrt{\pi} - 5\sqrt{\pi}\cdot 7\sqrt{\pi} = -31\pi.$$

20.2 Ortogonaalinen matriisi

Määritelmä 20.2.1 Matriisi $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *ortogonaalinen* (voitaisiin sanoa myös *ortonormaali*), jos sen sarakkeet muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaalin joukon.

Lause 20.2.2 Ortogonaalinen matriisi Q on säännöllinen ja $Q^{-1} = Q^T$.

Todistus. Matriisi Q sarakkeet $\mathbf{q}_j$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kannan, joten ne ovat lineaarisesti riippumattomia. Lauseen 11.3.1 mukaan Q on säännöllinen.

Ortonormaalisuuden perusteella tulon $A := Q^T Q$ alkio $a_{ii} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i = 1$ ja muilla $a_{ij} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = 0$. Siis $Q^T Q = I$, joten Seurauksen 6.6.3 nojalla $Q^{-1} = Q^T$. $\square$

Esimerkki 20.2.3 Määritä kaikki ortogonaaliset 2×2-matriisit.

Ratkaisu. Matriisi

$$A := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

on ortogonaalinen jos ja vain jos

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \quad \text{ja} \quad ac + bd = 0.$$

Mielivaltainen tason yksikkövektori on muotoa $(\cos\varphi \;\; \sin\varphi)^T$, missä $\varphi \in [0, 2\pi[$. Tätä vastaan kohtisuorat yksikkövektorit ovat $(-\sin\varphi \;\; \cos\varphi)^T$ ja $(\sin\varphi \;\; -\cos\varphi)^T$. Ortogonaalisia ovat siis

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi[$$

sekä näiden transpoosit (ts. käänteismuunnokset). Ensimmäinen on kulman φ kierto positiiviseen suuntaan, jälkimmäinen kulman φ kierto negatiiviseen suuntaan ja lisäksi peilaus x_1-akselin suhteen.

Esimerkki 20.2.4 Käännä matriisi

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ratkaisu. Havaitaan, että matriisin sarakevektorit ovat ortonormaali joukko, joten $A^{-1} = A^T$ eli

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

20.3 Isometrinen lineaarikuvaus

Määritelmä 20.3.1 Sisätuloavaruuden V lineaarikuvaus $L\colon V \to V$ on *isometria*, jos se *säilyttää vektorien pituudet*, ts. jos

$$\|L(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\| \quad \text{kaikilla} \quad \mathbf{u} \in V.$$

Voitaisiin osoittaa, että isometria säilyttää koko sisätulon, ts.

$$\langle L(\mathbf{u}), L(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\,.$$

Samalla säilyvät vektorien väliset kulmat.

Lause 20.3.2 Neliömatriisille $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ovat seuraavat ominaisuudet yhtaikaa voimassa:

a) Q on ortogonaalinen (sarakkeet ortonormaalit).

b) Matriisin Q rivit muodostavat ortonormaalin joukon.

c) Q on säännöllinen ja $Q^{-1} = Q^T$.

d) $Q^T Q = I$.

e) Lineaarikuvaus $\mathbf{x} \mapsto Q\mathbf{x}$ on isometria $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

f) $\langle Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ kaikilla $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Sivuutetaan (osin todistettu). □

Tehtävä 20.3.3 Mitkä funktioista $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: projektio, peilaus, venytys, kierto, siirto, ovat isometrioita?
Ratkaisu sivulla 274

20.4 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 20.1.2 : Voidaan laskea kahdellakin tavalla.

I tapa: Määritelmän mukaan ratkaisemalla koordinaatit yhtälöryhmästä

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3.$$

II tapa: Ottamalla huomioon, että E on ortonormaali, saadaan Parsevalin lauseesta

$$\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 9 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Tarkasta, onko

$$\frac{9}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{6}} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_3 = \cdots = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 20.1.3 : Kahdellakin tavalla:

I tapa: Lasketaan $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ luonnolliseen kantaan sijoittamalla $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$. Sitten sisätulo (pistetulo).

II tapa: Koska kanta on ortonormaali, saadaan Parsevalin lauseesta

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2 \cdot 3 + (-7) \cdot (-1) + \tfrac{1}{2} \cdot (-1) = 12\tfrac{1}{2}.$$

Tehtävä 20.3.3 : Siirto $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ ei ole edes lineaarinen (paitsi kun $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, mutta silloin kyseessä onkin identtinen kuvaus eikä aidosti siirto). Muut annetut kuvaukset ovat lineaarisia. Venytys S_λ on ilmeisestikin isometria vain jos $|\lambda| = 1$. Projektiot eivät ole isometrioita, sillä kuva-avaruus on suora, ja siten sen matriisi ei voi olla säännöllinen. Peilaukset ovat isometrioita, sillä peilaus ilmiselvästi säilyttää pituudet. Isometrioita ovat myös kierrot; niiden matriisithan olivat ortogonaalisia (ks. Esimerkki 20.2.3).

21 ORTOGONAALISET ALIAVARUUDET JA PNS–MENETELMÄ

Määritellään sisätuloavaruuden aliavaruuden ortogonaalinen komplementti ja tarkastellaan ortogonaalisten aliavaruuksien ominaisuuksia. Tässä vaiheessa tarvitsemme myös jo Luvussa 11.6 tarkastelemamme *suoran summan*.

21.1 Ortogonaalinen komplementti

Määritelmä 21.1.1 Sisätuloavaruuden V epätyhjän osajoukon A *ortogonaalinen komplementti* on joukko

$$A^{\perp} := \{\mathbf{u} \in V \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle = 0 \text{ kaikilla } \mathbf{a} \in A\,\}.$$

Joukko $A^{\perp}$ koostuu siis kaikista vektoreista $\mathbf{u} \in V$, jotka ovat kohtisuorassa *jokaista* joukon A vektoria vastaan.

Lause 21.1.2 Sisätuloavaruuden V osajoukon A ortogonaalinen komplementti on aliavaruus ja $[A] \cap A^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Todistus. 1) Määrittelyn perusteella $A^{\perp} \subseteq V$. Koska $\langle \mathbf{0}, \mathbf{a} \rangle = 0$ kaikilla $\mathbf{a} \in A$, on $\mathbf{0} \in A^{\perp}$ ja siis $A^{\perp} \neq \emptyset$. Olkoon α, $\beta \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in A^{\perp}$. Jos $\mathbf{a} \in A$, saadaan sisätulon määritelmän ehdon (iii) mukaan

$$\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle = 0,$$

joten $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in A^{\perp}$. Siis $A^{\perp}$ on aliavaruus.

2) Ensinnäkin, $\mathbf{0} \in [A] \cap A^{\perp}$, koska molemmat ovat aliavaruuksia. Olkoon toisaalta $\mathbf{u} \in [A] \cap A^{\perp}$ mielivaltainen. Koska $\mathbf{u} \in [A]$, on sillä esitys

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ \mathbf{a}_i \in A.$$

Koska toisaalta $\mathbf{u} \in A^{\perp}$, on $\mathbf{u}$ kohtisuorassa jokaista $\mathbf{a}_i$ vastaan ja

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \left\langle \mathbf{u}, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{a}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_i \rangle = 0.$$

Mutta silloin $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Siis $[A] \cap A^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. □

Lause 21.1.3 Olkoon V äärellisulotteinen sisätuloavaruus, jolle $\dim V \geq 1$. Jos $W \subseteq V$ on aliavaruus, niin $(W^{\perp})^{\perp} = W$. Edelleen V voidaan hajottaa suoraksi summaksi

$$V = W \oplus W^{\perp},$$

ts. jokainen $\mathbf{u} \in V$ voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla muodossa

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{k}$$

sopivilla $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{k} \in W^{\perp}$. Lisäksi $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$.

Todistus. Ensimmäinen väite on harjoitustehtävätasoa. Toinen väite saadaan suoran summan määritelmästä Lauseiden 21.1.2 ja 11.6.2 avulla. Viimeinen väite seuraa niinikään suoran summan ominaisuuksista. □

Esimerkki 21.1.4 Olkoot

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Mikä on joukon

a) $\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \ s, t \in \mathbb{R}$
b) $\mathbf{y} = \mathbf{a} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \ s, t \in \mathbb{R}$

ortogonaalinen komplementti?

Ratkaisu. Vektorit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ovat selvästi erisuuntaisia, joten kohdan a) joukko on origon kautta kulkeva taso ja siten aliavaruus. Sen vektoreita vastaan kohtisuorassa ovat täsmälleen ne vektorit $\mathbf{w}$, jotka ovat sen kantaa $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ vastaan kohtisuorassa. Ne löytyvät yhtälöryhmän

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle & = & 0 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} w_1 & + & 3w_2 & + & 2w_3 & = & 0 \\ 2w_1 & + & w_2 & + & 4w_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

ratkaisuina $\mathbf{w} = t(-2 \ 0 \ 1)^T$. Tason $\mathbf{x}$ ortogonaalinen komplementti on siis avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora

$$W = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esimerkiksi determinantin avulla nähdään, että joukko $\{\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ on lineaarisesti riippumaton, joten taso $\mathbf{y}$ ei kulje origon kautta eikä siten ole aliavaruus. Äskeinen menettely ei siis sovellu.

Koska ortogonaalinen komplementti on aliavaruus, ainakin $\mathbf{0}$ sisältyy siihen. Oletetaan, että vektori $\mathbf{z}$ on kohtisuorassa kaikkia tason $\mathbf{y}$ vektoreita vastaan. Silloin se on kohtisuorassa esimerkiksi kolmea vektoria $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{u}$ ja $\mathbf{a}+\mathbf{v}$ vastaan, ts.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{a}+\mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{a}+\mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle = 0.$$

Tämän yhtälöryhmän toteuttaa vain $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, joten joukon $\mathbf{y}$ ortogonaalinen komplementti on $\{\mathbf{0}\}$.

Toinen tapa olisi todeta, että joukko $\mathbf{y}$ virittää koko avaruuden $\mathbb{R}^3$, jolloin Lauseen 21.1.2 toisen väitteen mukaan ortogonaalinen komplementti sisältää vain nollan.

Huomautus 21.1.5 Olkoon V sisätuloavaruus, jonka dimensio on vähintään yksi.

a) Koko avaruuden V ortogonaalinen komplementti on $\{\mathbf{0}\}$ ja kääntäen.

b) Jos $\dim V = n$, origon kautta kulkevan suoran ortogonaalinen komplementti on origon sisältävä $(n-1)$-ulotteinen taso, jonka virittäjäjoukon vektorit ovat suoran suuntavektorin kanssa ortogonaalisia.

Tehtävä 21.1.6 Määritä vektorin $(1\ 2)^T$ ortogonaalinen komplementti tasossa.
Ratkaisu sivulla 286.

Sisätuloavaruus voidaan siis jakaa yhden sen aliavaruuden määräämästi kahteen aliavaruuteen, joiden leikkaus on lähes tyhjä – vain pelkkä nollavektorin muodostama yksiö – mutta joiden suora summa se itse on. Aliavaruuden ja sen ortogonaalisen komplementin vektorit ovat pareittain kohtisuorassa. Tämä antaa idean yleistykseen ortogonaalisista aliavaruuksista, joiden suora summa ei välttämättä olekaan koko avaruus.

Määritelmä 21.1.7 Sisätuloavaruuden kaksi aliavaruutta W_1 ja W_2 ovat *ortogonaaliset*, jos niiden vektorit ovat keskenään pareittain ortogonaaliset, ts. $\mathbf{w}_1 \perp \mathbf{w}_2$ kaikilla $\mathbf{w}_1 \in W_1$ ja $\mathbf{w}_2 \in W_2$.
Jos näin on, merkitään $W_1 \perp W_2$.

Tehtävä 21.1.8 Mitä ortogonaalisia aliavaruuksia on standardilla euklidisella sisätuloavaruudella $\mathbb{R}^3$?
Ratkaisu sivulla 286.

21.2 Matriisin määräämät ortogonaaliset avaruudet

Olkoot $N(A)$ ja $R(A) := [A]_s$ matriisin A nolla- ja sarakeavaruudet sekä $r(A)$ matriisin aste (ks. Luku 13.2).

Lause 21.2.1 Jos $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, niin

$$N(A) = R(A^T)^\perp \quad \text{ja} \quad N(A^T) = R(A)^\perp.$$

Todistus. 1) $N(A) \subseteq R(A^T)^\perp$: Olkoot $\mathbf{x} \in N(A)$ ja $\mathbf{y} \in R(A^T)$. Koska jollekin $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ on $\mathbf{y} = A^T\mathbf{z}$, on

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T A^T\mathbf{z} = (A\mathbf{x})^T\mathbf{z} = \mathbf{0}^T\mathbf{z} = 0.$$

Siis $\mathbf{x} \in R(A^T)^\perp$ ja siten $N(A) \subseteq R(A^T)^\perp$.

2) $R(A^T)^\perp \subseteq N(A)$: Olkoon $\mathbf{x} \in R(A^T)^\perp$. Silloin $\mathbf{x}$ on kohtisuorassa jokaista matriisin A^T saraketta vastaan, joten $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Siis $\mathbf{x} \in N(A)$.

Toinen väite seuraa valitsemalla matriisin A paikalle A^T ja ottamalla huomioon, että $(A^T)^T = A$. $\square$

Lauseista 21.1.3 ja 21.2.1 saadaan välittömästi

Seuraus 21.2.2 $N(A)^\perp = R(A^T)$ ja $R(A) = N(A^T)^\perp$.

Esimerkki 21.2.3 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ astetta r. Määritä avaruuksien $N(A)^\perp$ ja $N(A^T)$ dimensiot.

Ratkaisu. Dimensiolauseen 13.3.3 mukaan $\dim N(A) = n - r$ ja $\dim N(A^T) = m - r$. Koska $N(A)$ ja $N(A)^\perp$ ovat ortogonaalisia komplementteja avaruudessa $\mathbb{R}^n$, on $\dim N(A)^\perp = n - (n - r) = r$. (Yhtä hyvin tämä olisi voitu päätellä yhtälöstä $N(A)^\perp = R(A^T)$, sillä myös matriisin A^T aste on r.)

Siis $\dim N(A)^\perp = r$ ja $\dim N(A^T) = m - r$.

21.3 Pienimmän neliösumman ratkaisu

Ylimäärätyllä lineaarisella yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ei yleensä ole ratkaisua. Kuitenkin sille voidaan laskea *pienimmän neliösumman mielessä paras "kompromissiratkaisu"*, nk. PNS-ratkaisu. Tämän menetelmän yksinkertaisimpia sovellutuksia on mm. fysiikassa ja taloustieteissä usein käytetty suoran tai polynomin sovittaminen pistejoukkoon (ks. Luku 22).

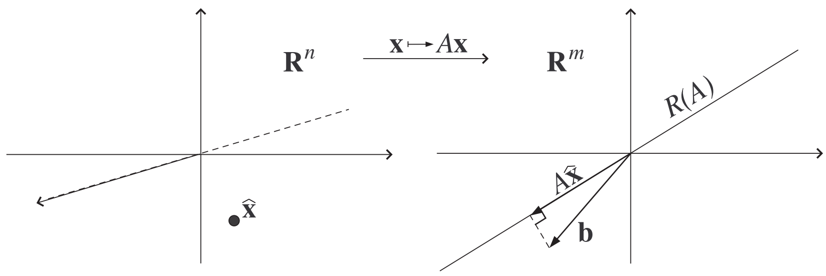
Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja kuvauksen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ kuva-avaruus $R(A) := [A]_s$, jolloin

$$\mathbf{b} \in R(A) \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ jollekin } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$R(A)$ on siis avaruuden $\mathbb{R}^m$ aliavaruus, ja on kaksi mahdollisuutta:

1. Jos $\mathbf{b} \in R(A)$, on $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkeava.

2. Oletetaan, että $\mathbf{b} \notin R(A)$ (ks. Kuva 34).



Kuva 34: PNS-ratkaisu

Yhtälöryhmän PNS-ratkaisuksi on järkevää valita vektori $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, joka kuvautuu lähimmäs vektoria $\mathbf{b}$, ts. jolle etäisyys $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ on pienimmillään (Lauseen 21.4.1 mukaan tälläisiä on olemassa).

Jos $R(A) = \{\mathbf{0}\}$, jokainen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on PNS-ratkaisu. Jos $R(A) \neq \{\mathbf{0}\}$, $\widehat{\mathbf{x}}$ on vektori, jolle

$$A\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_{R(A)}$$

eli vektorin $\mathbf{b}$ projektio alivaruuteen $R(A)$.

Määritelmä 21.3.1 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matriisi, missä $m > n$, ja tarkastellaan yhtälöä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sen *residuaali* on kuvaus $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$r(\mathbf{x}) := \mathbf{b} - A\mathbf{x}.$$

Vektori $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, jolla lauseke $\|r(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|^2$ on minimissään, on yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *pienimmän neliösumman ratkaisu* (*least squares solution*) eli PNS-*ratkaisu*.

Osoitetaan, että PNS-ratkaisuja on aina olemassa, ja että jos matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia, on PNS-ratkaisu yksikäsitteinen.

Lause 21.3.2 Olkoon $S \subseteq \mathbb{R}^m$ aliavaruus ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

a) On olemassa $\mathbf{p} \in S$, joka on lähimpänä pistettä $\mathbf{b}$, ts. kaikilla $\mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{p}\}$

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{s}\| > \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\| \,.$$

b) Piste $\mathbf{p} \in S$ on lähimpänä pistettä $\mathbf{b}$ jos ja vain jos $\mathbf{b} - \mathbf{p} \in S^\perp$.

Todistus. a) Koska $\mathbb{R}^m = S \oplus S^\perp$, on vektorilla $\mathbf{b}$ Lauseen 21.1.3 nojalla yksikäsitteinen esitys

$$\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{p} \in S,\, \mathbf{z} \in S^\perp.$$

Siis $\mathbf{b} - \mathbf{p} = \mathbf{z} \in S^\perp$.

Olkoon $\mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{p}\}$. Silloin $\|\mathbf{p} - \mathbf{s}\| > 0$. Koska

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{s}\|^2 = \|(\mathbf{b} - \mathbf{p}) + (\mathbf{p} - \mathbf{s})\|^2$$

ja $\mathbf{b} - \mathbf{p} \perp \mathbf{p} - \mathbf{s}$, on Lauseen 19.1.3 kohdan b) mukaan

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{p} - \mathbf{s}\|^2 > \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\|^2 \,.$$

Täten $\|\mathbf{b} - \mathbf{s}\| > \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\|$, eli $\mathbf{s}$ on kauempana kuin $\mathbf{p}$.

b) Jos $\mathbf{p} \in S$ ja $\mathbf{b} - \mathbf{p} \in S^\perp$, on $\mathbf{p}$ a)-kohdan mukaan lähimpänä pistettä $\mathbf{b}$. Kääntäen, olkoon $\mathbf{q} \in S$ sellainen, että $\mathbf{b} - \mathbf{q} \notin S^\perp$. Silloin $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ ja kohdan a) nojalla (valitaan $\mathbf{s} := \mathbf{q}$) on $\|\mathbf{b} - \mathbf{q}\| > \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\|$. Siis $\mathbf{b} - \mathbf{p} \in S^\perp$ on myös välttämätöntä. □

Seuraus 21.3.3 a) Jos $S = \{\mathbf{0}\}$, pistettä $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ lähinnä on avaruuden S ainoa piste $\mathbf{0}$.

b) Jos $\dim S \geq 1$, pistettä $\mathbf{b}$ lähin avaruuden S piste on projektio $\mathbf{p} := \mathbf{b}_S$ ja lyhin etäisyys on ortogonaalikomponentin pituus $\|\mathbf{b}_{\perp S}\|$.

Todistus. a) Triviaali.

b) Äärellisulotteisena S on jonkin ortonormaalin kannan virittämä, joten projektiot $\mathbf{b}_S \in S$ ja $\mathbf{b}_{\perp S} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_S \in S^\perp$ ovat määriteltyjä (ks. Lause 19.4.2). Koska $\mathbf{b} = \mathbf{b}_S + \mathbf{b}_{\perp S}$, seuraa Lauseista 21.1.3 ja 21.3.2, että $\mathbf{b}_S$ on lähimpänä pistettä $\mathbf{b}$ ja

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_S\| = \|\mathbf{b}_{\perp S}\| \,.$$

□

Lause 21.3.4 Jos $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, niin vektori $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ on PNS-ratkaisu yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jos ja vain jos

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}.$$

Todistus. Seurauksen 21.3.3 mukaan $\hat{\mathbf{x}}$ on PNS-ratkaisu yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jos ja vain jos $A\hat{\mathbf{x}}$ on vektorin $\mathbf{b}$ projektio sarakeavaruuteen $R(A)$. Mutta

$$\begin{aligned} A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_{R(A)} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}} \in R(A)^\perp = N(A^T) \\ &\Longleftrightarrow \quad A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \iff A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

Lauseen 21.2.1 nojalla. □

21.4 Normaaliyhtälö

Lause 21.4.1 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matriisi, jonka aste on n (sanomme silloin, että matriisi A on *täyttä astetta*). Silloin *normaaliyhtälöllä*

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b}$, joka samalla on ainoa PNS-ratkaisu yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $n\times n$-matriisi $A^T A$ on säännöllinen.
Olkoon $A^T A\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Silloin $A\mathbf{z} \in N(A^T)$. Triviaalisti $A\mathbf{z} \in R(A)$. Seurauksen 21.2.2 mukaan $R(A) = N(A^T)^\perp$, joten $A\mathbf{z} \in N(A^T) \cap N(A^T)^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Siis $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Koska matriisin A aste on n, ovat sen sarakkeet lineaarisesti riippumattomia, joten $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Koska homogeeniyhtälöllä $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaaliratkaisu, on $A^T A$ säännöllinen.

Normaaliyhtälöllä on siis tasan yksi ratkaisu $\hat{\mathbf{x}}$. Lauseen 21.3.4 mukaan se on myös ainoa PNS-ratkaisu yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. □

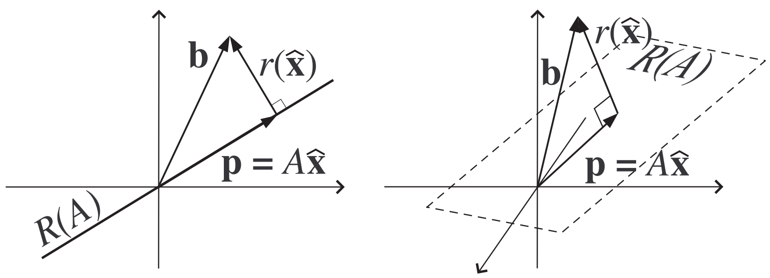
Projektiovektori $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}} = A(A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b}$ on pistettä $\mathbf{b}$ lähimpänä oleva sarakeavaruuden $R(A)$ vektori; Kuvassa 35 on tästä kaksi erilaista tapausta.

Normaaliyhtälöä ratkaistaessa muodostuvaa $m\times m$-matriisia

$$P := A(A^T A)^{-1}A^T,$$

jolla mikä tahansa vektori voidaan projisoida ortogonaalisesti matriisin A sarakeavaruuteen, sanotaan *projektiomatriisiksi* (ks. myös Tehtävä 19.3.5 ja Luku 19.6).

3x2-yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ **PNS-visualisointi** (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/PNSRatkaisu32.htm`



Kuva 35: $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ astetta 1, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ja $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ astetta 2, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

Tehtävä 21.4.2 Osoita, että projektiomatriisimme $P := A(A^TA)^{-1}A^T$ toteuttaa yhtälöt $X^2 = X$, samoin kuin myös matriisi $I - P$. Mitä matriisin $I - P$ avulla voidaan laskea? Ratkaisu sivulla 286.

Tarkastellaan vielä projektiomatriisissa P esiintyvää termiä A^TA. Olkoot $1 < n < m$ ja $U := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ sekä näistä koottu matriisi

$$V := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}.$$

Matriisia $G := V^TV$ kutsutaan vektorijoukon U *Grammin matriisiksi*.

Tehtävä 21.4.3 Osoita, että Grammin matriisi G koostuu kaikista vektorien $\mathbf{v}_i$ välisistä sisätuloista; tarkemmin sanottuna $G_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$. Ratkaisu sivulla 286.

Lauseen 21.4.1 todistuksen mukaan Grammin matriisi on säännöllinen, jos vektorit $\mathbf{v}_i$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

21.5 PNS ja $3{\times}2$-yhtälöryhmän geometrinen tulkinta

Arvoilla $m > 2$ reaaliseen $m{\times}2$-matriisiin liittyy ylimäärätty kahden muuttujan lineaarinen yhtälöryhmä. Kukin yhtälö voidaan tulkita suoraksi tasossa, ja tulee sinänsä mielekkääksi laskea yhtälöryhmälle PNS-ratkaisu, joka taas voidaan niinikään tulkita pisteeksi tasossa. Tässä tulee kuitenkin vastaan eräs yllättävä piirre, jos ratkaisua koetetaan tulkita tason suorien leikkauspisteen kompromissiratkaisuksi, ks. Esimerkki 21.5.1.

Esimerkki 21.5.1 Määritä PNS-ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 20x_1 - 10x_2 = 20 \end{cases}$$

Ratkaisut. a) Olkoon A yhtälöryhmän a) kerroinmatriisi. Normaaliyhtälö saa muodon

$$\begin{aligned}
A^TA\mathbf{x} &= A^T\mathbf{b} \\
\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\iff \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{83}{50} \\ \frac{71}{50} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ PNS-ratkaisu on siis

$$\widehat{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{83}{50} \\ \frac{71}{50} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.66 \\ 1.42 \end{pmatrix}$$

b) Vastaavalla tavalla saadaan PNS-ratkaisuksi

$$\widehat{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{868}{505} \\ \frac{727}{505} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.72 \\ 1.44 \end{pmatrix}$$

Esimerkki 21.5.1 osoittaa, että PNS-ratkaisu riippuu tason suorien *esityksistä*; vaikka kohtien a) ja b) suorat ovat tasossa samat, niiden PNS-ratkaisut ovat eri pisteitä!

Esimerkissä PNS-ratkaisut ovat sattumoisin lähes samat, mutta ne voivat poiketa hyvin dramaattisestikin. Seuraavalla työarkilla voi tutkiskella tason PNS-ratkaisuasioita dynaamisessa ympäristössä. Osoittautuu, että järkevä yksikäsitteinen tilanne saadaan aikaan valitsemalla suorille esitys $ax + by = c$, jossa $a^2 + b^2 = 1$.

Tason suorat ja PNS (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/PNSYR.htm`

Tehtävä 21.5.2 Piirrä kuva Esimerkin 21.5.1 tilanteesta. Kuinka kaukana ovat $A\widehat{\mathbf{x}}$ ja $\mathbf{b}$ toisistaan kohdassa a)? Ratkaisu sivulla 286.

21.6 PNS ja yhtälöryhmät yleensä

On arvattavissa, että esimerkiksi tapauksessa tasot avaruudessa kohtaamme samankaltaisen yksikäsitteisyysongelman kuin suorilla tasossa. Tässä kuitenkin käsittelemme useampiulotteisesta tapauksesta vain pari laskuesimerkkiä.

Esimerkki 21.6.1 Määritä PNS-ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Ratkaisu. Kerroinmatriisi A ja A^TA ovat

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A^TA = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & -6 \\ 9 & -6 & 33 \end{pmatrix}$$

Käänteismatriisi

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{363}\begin{pmatrix} 62 & -39 & -24 \\ -39 & 46 & 19 \\ -24 & 19 & 21 \end{pmatrix}$$

joten normaaliyhtälön $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ ratkaisu eli PNS-ratkaisu on

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 64 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.94 \\ -0.42 \\ -0.36 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 21.6.2 Määritä PNS-ratkaisu Esimerkin 21.6.1 yhtälöryhmälle tapauksessa, että ensimmäinen yhtälö on ensin kerrottu sadalla.

Ratkaisu sivulla 287.

Tehtävä 21.6.3 Määritä PNS-ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Miten selität sen, että ratkaisuja onkin äärettömästi:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 32 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{7}\begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisu sivulla 287.

21.7 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 21.1.6 : Vektorin $(1\ 2)^T$ kanssa kohtisuorassa ovat täsmälleen vektorit $t(-2\ 1)^T$, $t \in \mathbb{R}$, joten ortogonaalinen komplementti on suora

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^{\perp} = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Tehtävä 21.1.8 : Avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruudet ovat origo, sen kautta kulkevat suorat ja sen sisältävät tasot. Selvitäpä tarkemmin mitkä niistä ovat ortogonaalisia pareja!

Tehtävä 21.4.2 : Liitännäisyyden ym. mukaan

$$\begin{aligned} P^2 &= (A(A^TA)^{-1}A^T)(A(A^TA)^{-1}A^T) = A(A^TA)^{-1}(A^TA)(A^TA)^{-1}A^T) \\ &= AI(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P \\ (I-P)^2 &= I^2 - IP - PI + P^2 = I - 2P + P = I - P \end{aligned}$$

Matriisilla $I - P$ saadaan vektorin ortogonaalinen komponentti.

Tehtävä 21.4.3 : Grammin matriisin määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} G = V^TV &= \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{m1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

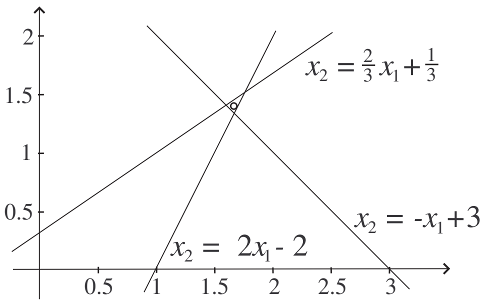
Grammin matriisi G koostuu siis vektorien $\mathbf{v}_i$ välisistä sisätuloista niin että $G_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$.

Tehtävä 21.5.2 : Katso Kuva 36 ja Maple-dokumentti.

Maple-ratkaisu (linkki Maple-työarkkiin)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/Esim2151ab.mws`

Etäisyys on residuaalin pituus arvolla $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\|r(\hat{\mathbf{x}})\| = \|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{50} \begin{pmatrix} 83 \\ 71 \end{pmatrix} \right) \right\|$$



Kuva 36: PNS-ratkaisu

$$= \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 154 \\ 47 \\ 95 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{50} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{10} \approx 0.14.$$

Tehtävä 21.6.2 : Samanlaisella menettelyllä kuin Esimerkissä 21.6.1 saadaan (ks. Maple-dokumentti)

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{220011} \begin{pmatrix} 456685 \\ -103337 \\ -83337 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.08 \\ -0.47 \\ -0.38 \end{pmatrix}$$

Maple-ratkaisu (linkki Maple-työarkkiin)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/Teht2162.mws`

Tehtävä 21.6.3 : Tarkastellaan yhtälöryhmää matriisimuodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vaikkapa determinantin avulla ($\det(A) = 0$) nähdään, ettei yhtälöryhmällä ole ainakaan yksikäsitteista ratkaisua. Porrasmuodosta näkyy, että ratkaisuja ei todellakaan ole.

Vaikka yhtälöryhmä ei ole ylimäärätty, se voitaisiin täydentää ekvivalentiksi (muodollisesti) ylimäärätyksi vaikkapa lisäämällä nollarivi.

PNS-ratkaisuksi saadaan (ks. Maple-lasku)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 32 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{7} \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Selitys ratkaisun ei-yksikäsitteisyyteen on kerroinmatriisin lineaarinen riippuvuus (ks. Lause 21.4.1).

Maple-ratkaisu (linkki Maple-työarkkiin)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/Teht2163.mws`

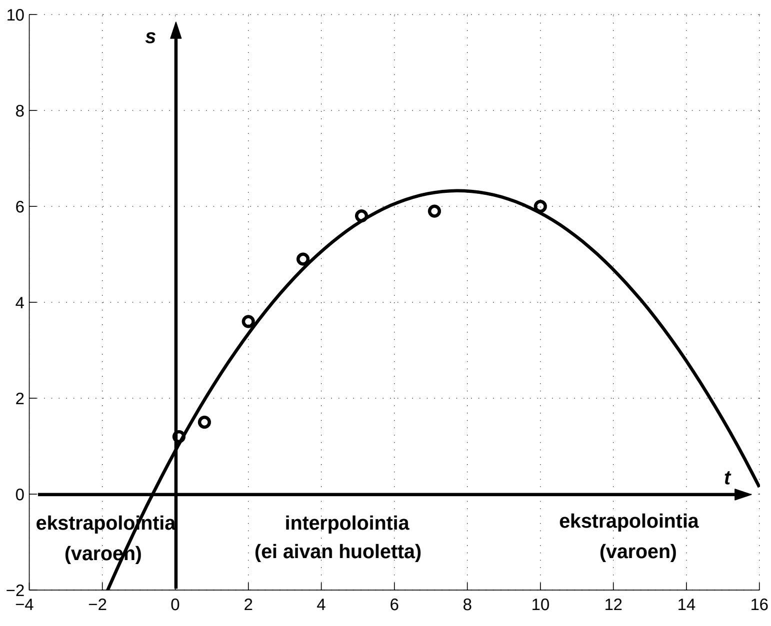
22 KÄYRÄN SOVITUS PNS-MENETELMÄLLÄ

Toimenpidettä, jossa tavalla tai toisella määritetään funktio, joka saa annetuissa pisteissä – jonkin kriteerin mukaan – mahdollisimman lähellä vaadittuja arvoja olevat arvot, sanotaan *funktion sovittamiseksi pistejoukkoon*. Yleensä tällainen *sovitusfunktio* valitaan tarkoin rajatusta funktiojoukosta.

22.1 Interpolaatio – ekstrapolaatio

Kun sovitusfunktiota käytetään sen kuvaaman suureen arvioimiseen annettujen pisteiden *väleissä*, on kyse *interpolaatiosta*. Jos sitä käytetään ennustettaessa suureen käytöstä annetun pistejoukon *ulkopuolella*, puhutaan *ekstrapolaatiosta*. Erityisesti ekstrapolaation luotettava käyttö vaatii tutkittavan ilmiön syvällistä tuntemista.

Seuraavassa rajoitutaan interpolointiin ja sovittamaan pistejoukkoon polynomeja, sillä muunlaiset sovitukset johtavat *epälineaariseen* tarkasteluun. Useimmin interpolointiin käytetään suoria, 2. asteen paraabeleja tai paloittain näiden osia. *Korkea-asteinen polynomi ei yleensä kelpaa edes interpolointiin* (ks. Kuva 37)!



Kuva 37: Polynomeilla approksimoinnista

22.2 Polynomin sovittaminen pistejoukkoon

Oletetaan aluksi, että jonkin reaalisen suureen $s(t)$ tiedetään riippuvan likimäärin *lineaariaffiinisti* yhdestä reaalimuuttujasta t välillä $[a, b]$. Tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa reaalivakiot c_0, $c_1 \in \mathbb{R}$, joille $s(t) \approx c_0 + c_1 t$ ainakin välillä $[a, b]$. Tällöin suureen s *muutos* riippuu *lineaarisesti* parametrin t muutoksesta, ts. $\Delta s = c_1 \Delta t$.

Ongelma 1 On mitattu suuri määrä vastaavuuksia (t_i, s_i), $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. Määritä vakiot c_0, $c_1 \in \mathbb{R}$, joille on ”mahdollisimman tarkkaan”

$$s_i \approx c_0 + c_1 t_i \text{ kaikilla } i = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Interpolaatiosuoraa $s(t) := c_0 + c_1 t$ voidaan käyttää arvioitaessa suureen s arvoja välillä $[\min\{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_m\}, \max\{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_m\}]$.

Jos taas riippuvuus ei ole suoraviivainen, voidaan käyttää yleistystä:

Ongelma 2 Määritä polynomi

$$s(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n,$$

jonka kuvaaja kulkee ”mahdollisimman tarkasti” annettujen $m \geq n + 1$ tason pisteen (t_i, s_i) kautta.

Ratkaisut. Tehtävät edustavat saman matemaattisen ongelman ääripäitä. Molemmat ratkeavat etsimällä kertoimille c_k PNS-ratkaisu. Jos Tehtävässä 2 on $m = n + 1$, polynomi todella kulkee kaikkien pisteiden kautta, mutta voi pisteiden t_i välillä heilahdella rajustikin. *Tällainen sovitus ei yleensä sovellu minkään reaaliilmiön arvioimiseen!*

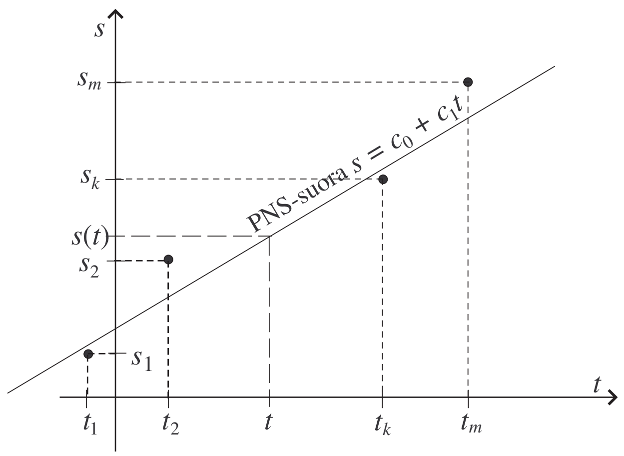
Olkoon siis annettu muuttujan t ja funktion $s = s(t)$ arvot

t	t_1	t_2	$\cdots$	t_m
s	s_1	s_2	$\cdots$	s_m

missä luvut $t_i < t_{i+1}$.

Suoran sovitus. Teeskennellään, että parit (t_i, s_i) todella olisivat suoralla $s = c_0 + c_1 t$ (ks. Kuva 38):

$$\begin{cases} c_0 + c_1 t_1 = s_1 \\ c_0 + c_1 t_2 = s_2 \\ c_0 + c_1 t_3 = s_3 \\ \qquad \vdots \\ c_0 + c_1 t_m = s_m \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{s}}$$



Kuva 38: PNS-suora

Tälle ylimäärätylle yhtälöryhmälle $T\mathbf{c} = \mathbf{s}$ lasketaan PNS-ratkaisu $\widehat{\mathbf{c}} = (c_0\ c_1)^T$, josta saadaan PNS-sovitus $s(t) = c_0 + c_1 t$.

Suoran sovitus (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/SuoranSovitus.htm`

Polynomin sovitus. Nyt on etsittävä PNS-ratkaisu $\mathbf{c}$ ylimäärätylle yhtälöryhmälle

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix},$$

missä vektori $\mathbf{c}$ on polynomin kertoimet.

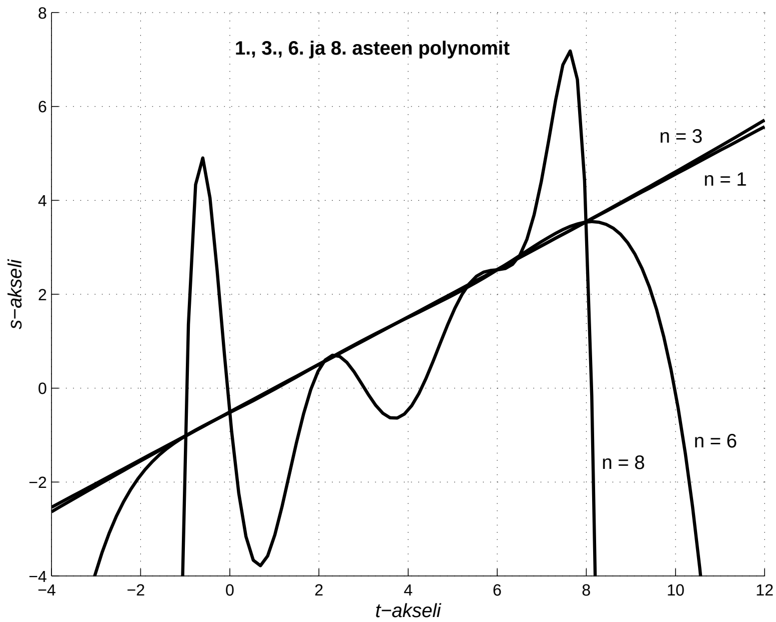
Esimerkki 22.2.1 Kuvassa 39 on kuvattu eräiden polynomien sovitus 9-pisteiseen joukkoon.

Esimerkki 22.2.2 Sovita tason pistejoukkoon

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

a) PNS-suora,

b) PNS-paraabeli.



Kuva 39: Eräiden polynomien sovitus 9-pisteiseen joukkoon

Ratkaisu. a) Siis tulisi olla

$$\begin{cases} c_0 & + & c_1 \cdot 0 & = & 3 \\ c_0 & + & c_1 \cdot 1 & = & 2 \\ c_0 & + & c_1 \cdot 2 & = & 4 \\ c_0 & + & c_1 \cdot 3 & = & 4 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \iff T\mathbf{c} = \mathbf{s}.$$

Kertomalla tämä vasemmalta kerroinmatriisin T transpoosilla saadaan normaaliyhtälö, josta lähtien:

$$\begin{aligned} & T^T T\mathbf{c} = T^T\mathbf{s} \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 22 \end{pmatrix} \\ \iff \quad & \ldots \iff \begin{cases} c_0 & = & 2\frac{1}{2} \\ c_1 & = & \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

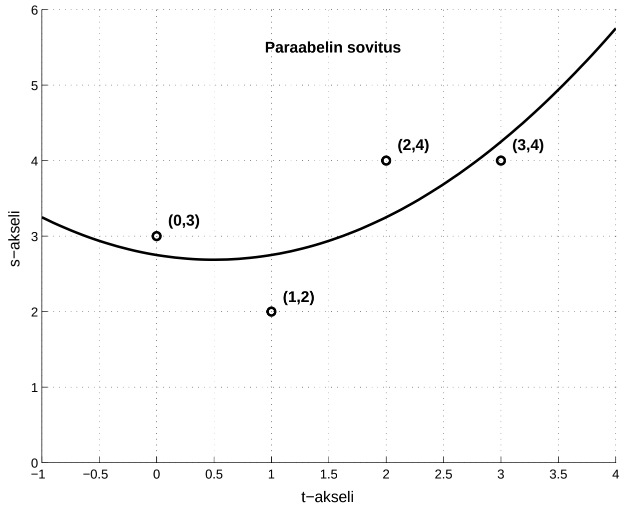
Siis PNS-suora $s(t) = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$.

b) Kerrotaan yhtälöryhmä $T\mathbf{c} = \mathbf{s}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vasemmalta kerroinmatriisin transpoosilla ja ratkaistaan saatu kvadraattinen yhtälöryhmä. Polynomin kertoimiksi saadaan $c_0 = 2.75$, $c_1 = -0.25$ ja $c_2 = 0.25$ eli (ks. Kuva 40)

$$s(t) = 2.75 - 0.25t + 0.25t^2.$$



Kuva 40: PNS-paraabeli $s(t) = 2.75 - 0.25t + 0.25t^2$

Esimerkki 22.2.3 Sovita PNS-suora tason pisteikköön

$$(-5, 3), (-3, 2), (-2, 2), (0, 1), (2, -1), (5, -2).$$

Ratkaisu. Kerrotaan yhtälöryhmä

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

vasemmalta kerroinmatriisin transpoosilla ja ratkaistaan saatu kvadraattinen yhtälöryhmä. Suoran kertoimiksi saadaan

$$c_0 = \frac{224}{393} \approx 0.57 \text{ ja} c_1 = -\frac{69}{131} \approx -0.53.$$

Suora on täten $s(t) = 0.57 - 0.53t$.

Tehtävä 22.2.4 Sovita PNS-suora ts-tason pisteikköön, jonka muuttujan t arvoja vastaavat funktion arvot ovat taulukoituina:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
s	-4.9781	-2.9953	-0.9321	1.0679	3.0935	5.0384	7.0519

Laske arviot pisteissä $t = -2.5$, -1.5 ja -0.5.
Ratkaisu sivulla 296.

22.3 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 22.2.4 : PNS-suoran yhtälö on

$$s(t) = 1.0495 + 2.0065t$$

Tämän avulla saadaan interpolaatioarviot:

$s(-2.5) = -4.00$

$s(-1.5) = -1.96$ ja

$s(-0.5) = 0.046$.

23 OMINAISARVOT JA OMINAISVEKTORIT

Tässä luvussa tarkastellaan pääasiassa reaalisen matriisin ominaisarvoyhtälön

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

ratkaisemista ja ratkaisujen $\lambda \in \mathcal{K}$ sekä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ merkitystä. Yleiset määritelmät voidaan kuitenkin esittää yleisemmillekin lineaarikuvauksille, ja tämä on lähtökohtana luvussa 23.1.

23.1 Lineaarikuvauksen ominaisarvot ja ominaisvektorit

Määritelmä 23.1.1 Olkoon V $\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus ja $L : V \to V$ lineaarikuvaus.

a) Vektoria $\mathbf{u} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ sanotaan kuvauksen L *ominaisvektoriksi* (*eigenvector*), jos on olemassa $\lambda \in \mathcal{K}$ siten, että

$$L(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}.$$

b) Jos $\mathbf{u}$ on lineaarikuvauksen L ominaisvektori, on $\lambda \in \mathcal{K}$ sitä vastaava *ominaisarvo* (*eigenvalue*).

c) Jos $\lambda \in \mathcal{K}$ on lineaarikuvauksen L ominaisarvo, niin joukko

$$E_\lambda := \{\mathbf{u} \in V \mid L(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}\}.$$

on sen ominaisarvoa λ vastaava *ominaisavaruus*.

Lause 23.1.2 Jos $\lambda \in \mathcal{K}$ on lineaarikuvauksen $L : V \to V$ ominaisarvo, on ominaisavaruus E_λ avaruuden V aliavaruus.

Todistus. Määrittelyn mukaan $E_\lambda \subseteq V$. Koska $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$, on $E_\lambda \neq \emptyset$. Jos $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ ja $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_\lambda$, niin $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in E_\lambda$, sillä (perustele!)

$$L(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{u}) + \beta L(\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\mathbf{u}) + \beta(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}).$$

Huomautus 23.1.3 a) Vain *nollasta poikkeavat* ominaisavaruuden E_λ vektorit hyväksytään ominaisvektoreiksi.

b) Jos $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, niin ominaisvektorit ilmoittavat, minkä suuntaiset vektorit säilyttävät kuvauksessa suuntansa. Ominaisarvo ilmoittaa kyseisensuuntaisten vektoreiden suurennussuhteen. Jos $\lambda < 0$, niin vastaavat vektorit $L(\mathbf{u})$ ja $\mathbf{u}$ ovat vastakkaissuuntaiset. Ominaisarvoja ja -vektoreita voidaan toisaalta joutua hakemaan kompleksialueelta kuten esimerkiksi polynomiyhtälön juuriakin.

Esimerkki 23.1.4 Olkoon V lineaariavaruus. Määritetään eräiden peruskuvausten $L : V \to V$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

a) $L(\mathbf{u}) := \mathbf{0}_V$ kaikilla $\mathbf{u} \in V$, eli nollakuvaus. Silloin

$$\mathbf{0}_V = L(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u} \iff \lambda = 0 \text{ tai } \mathbf{u} = \mathbf{0}_V.$$

Arvolla $\lambda = 0$:

$$L(\mathbf{u}) = 0\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{kaikilla } \mathbf{u} \in V.$$

Ominaisvektoreita ovat siis kaikki vektorit $\mathbf{u} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, joten $E_0 = V$.

b) $L(\mathbf{u}) := \mathbf{u}$ kaikilla $\mathbf{u} \in V$, eli identtinen kuvaus. Silloin

$$\mathbf{u} = L(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u} \iff \lambda = 1 \text{ tai } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Arvoa $\lambda = 1$ vastaavat ominaisvektorit ovat kaikki $\mathbf{u} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, joten $E_1 = V$.

c) $L(\mathbf{u}) := -3\mathbf{u}$ kaikilla $\mathbf{u} \in V$ (venytys). Silloin

$$-3\mathbf{u} = L(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u} \iff (-3-\lambda)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \lambda = -3 \text{ tai } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Myös arvoa $\lambda = -3$ vastaavia ominaisvektoreita ovat kaikki $\mathbf{u} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ja $E_{-3} = V$.

Esimerkki 23.1.5 Määritä kuvauksen $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix},$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Ratkaisu. Kuvaus on selvästi lineaarinen, joten tehtävä on mielekäs. Ratkaistaan ominaisarvoyhtälö $L(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, siis yhtälöryhmä:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} (\lambda-1)x_1 & = & 0 \\ (\lambda+1)x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} |\lambda| & \neq & 1 \\ x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{tai} \quad \left\{ \begin{array}{rcll} \lambda & = & 1 & \\ x_1 & = & s & \in \mathbb{R} \\ x_2 & = & 0 & \end{array} \right. \quad \text{tai} \quad \left\{ \begin{array}{rcrl} \lambda & = & -1 & \\ x_1 & = & 0 & \\ x_2 & = & t & \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Nollavektori $(0\ 0)^T$ ei kelpaa ominaisvektoriksi, joten ominaisarvot ovat

$$\begin{array}{rcrll} \lambda & = & 1 & \text{ominaisvektoreina} & s(1\ 0)^T, \quad s \neq 0, \\ \lambda & = & -1 & \text{ominaisvektoreina} & t(0\ 1)^T, \quad t \neq 0. \end{array}$$

Kuvaus L on peilaus x_1-akselin yli, joten se säilyttää koordinaattiakselien suuntaisten vektorien suunnan.

Esimerkki 23.1.6 Määritä ominaisarvot ja ominaisvektorit tason kierrolle $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu. Ratkaistaan ominaisarvoyhtälöryhmä:

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & \lambda x_2 \\ (\lambda^2+1)x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} (\lambda^2+1) & \neq & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \end{array} \right. \text{ tai } \left\{ \begin{array}{rcr} \lambda & = & i \\ x_2 & = & s \\ x_1 & = & is \end{array} \right. \in \mathbb{C} \text{ tai } \left\{ \begin{array}{rcr} \lambda & = & -i \\ x_2 & = & t \\ x_1 & = & -it \end{array} \right. \in \mathbb{C}$$

Tällä kertaa ei-reaaliset ominaisarvot ovat

$$\begin{array}{rcrll} \lambda & = & i & \text{ominaisvektoreina} & s(i\ \ 1)^T, \quad s \neq 0, \\ \lambda & = & -i & \text{ominaisvektoreina} & t(-i\ \ 1)^T, \quad t \neq 0. \end{array}$$

Tässä tapauksessa kaikkien (nollasta poikkeavien) vektorien suunta muuttuu!

Esimerkki 23.1.7 Derivointi $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) := f'$, on jo aiemmin todettu lineaariseksi operaatioksi. Määritä sen ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Ratkaisu. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$f' = \lambda f \iff f' - \lambda f = 0 \iff f(x) = Ce^{\lambda x} \text{ jollakin } C \in \mathbb{R}.$$

Ominaisvektoreita ovat funktiot f_λ,

$$f_\lambda(x) = Ce^{\lambda x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

ja kutakin funktiota f_λ vastaa ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$.

23.2 Matriisin ominaisarvot ja -vektorit

Äärellisulotteisten lineaariavaruuksien väliset lineaarikuvaukset voidaan Luvussa 16 kuvatulla tavalla esittää matriisien avulla. Jatkossa keskitytäänkin matriisin ominaisarvojen ja -vektorien tarkasteluun.

Tästä lähtien käsiteltävät *matriisit voivat olla reaalisia tai kompleksisia.* Reaalinen matriisi voidaan tietenkin aina tulkita kompleksiseksi. Jos reaalista matriisia tarkastellaan nimenomaan reaalisena, hyväksytään vain reaaliset ominaisarvot (vrt. Esimerkki 23.1.6).

Määritelmä 23.2.1 Neliömatriisin A *ominaisarvoilla* ja *ominaisvektoreilla* tarkoitetaan sen välittämän lineaarikuvauksen vastaavia käsitteitä, ts. *ominaisarvoyhtälön*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

skalaariratkaisuja λ ja vastaavia vektoreita $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Olkoon A $n\times n$-matriisi. Ominaisarvoyhtälössä $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ on $n+1$ tuntematonta skalaaria x_i ja λ, eikä se ole yhtälöryhmänä lineaarinen. Pyritään kuitenkin hajottamaan se selkeisiin osatehtäviin, joihin kehittelemämme matriisilaskennan teoria puree. Katsotaan asiaa ensin esimerkin valossa.

2×2-matriisin tapaus

Esimerkki 23.2.2 Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Millä arvolla $\lambda \in \mathbb{R}$ on yhtälöllä $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ei-triviaaleja ratkaisuja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$?

Ratkaisu. Matriisilaskennan sääntöjen mukaan $\lambda\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ ja siten

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff A\mathbf{x} - \lambda I\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Kvadraattisella homogeenisella yhtälöllä $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on ei-triviaaleja ratkaisuja jos ja vain jos $\det(A - \lambda I) = 0$, eli

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Arvoilla $\lambda = 2$ ja $\lambda = 3$ on yhtälöllä $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ei-triviaaleja ratkaisuja, mikä tarkoittaa myös sitä, että luvut 2 ja 3 ovat matriisin ominaisarvoja ja nuo ei-triviaalit ratkaisut vastaavia ominaisvektoreita.

Seuraava dynaaminen kuvio illustroi hauskalla tavalla reaalisen matriisin ominaisarvoja ja -vektoreita tasossa.
2x2-matriisin ominaisarvoista (linkki JavaSketchpad-animaatioon)
`http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/Lineaarialgebra/Kurssimateriaali/LAText/OminaisarvotJaVektorit.htm`

$n\times n$-matriisin ominaisarvot

Ongelma. Miten selvitetään $n\times n$-matriisin ominaisarvot?

Ratkaisu Esimerkkiä 23.2.2 yleistäen. Koska

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

on skalaari λ ominaisarvo jos ja vain jos lineaarisella $n\times n$-yhtälöryhmällä

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

on ei-triviaaleja ratkaisuja (jotka silloin tietysti ovat myös ominaisvektoreita). Mutta tämä tapahtuu silloin ja vain silloin kun $A - \lambda I$ on singulaarinen. Singulaarisuuden kanssa yhtäpitävistä ehdoista on tässä tapauksessa hyödyllisin ehto

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

josta pääsemme käsiksi puhtaasti skalaarin λ yhtälöön.

Saamme esille useita ominaisarvojen karakterisointeja:

Lause 23.2.3 Olkoon $A \in \mathcal{K}^{n\times n}$ ja $\lambda \in \mathcal{K}$. Seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä:

(a) Luku λ on matriisin A ominaisarvo.

(b) Homogeeniyhtälöllä $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on epätriviaali ratkaisu.

(c) Nolla-avaruus $N(A - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$.

(d) Matriisi $A - \lambda I$ on singulaarinen.

(e) $\det(A - \lambda I) = 0$.

Todistus. Edellä jo todettiin, että

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ehtojen yhtäpitävyys seuraa nyt Lauseista 5.4.2 ja 6.5.1 sekä nolla-avaruuden määritelmästä. □

23.3 Karakteristinen yhtälö

Määritelmä 23.3.1 Neliömatriisin A *karakteristinen polynomi* on muuttujan λ polynomi $\det(A - \lambda I)$. Vastaava yhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on *karakteristinen yhtälö*.

Determinantin määritelmästä seuraa, että $n \times n$-matriisin $A = (a_{ij})$ karakteristinen yhtälö

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

on n. asteen polynomiyhtälö, joten sen ominaisarvot määritetään yksinkertaisimmin etsimällä polynomin nollakohdat. Vastaavat ominaisvektorit saadaan ratkaisemalla $\mathbf{x}$ yhtälöryhmästä $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ kullakin ominaisarvolla λ.

Esimerkki 23.3.2 Lasketaan ominaisvektorit Esimerkin 23.2.2 matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu. Ominaisarvoiksihan saatiin jo $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = 2$.

1. Arvolla $\lambda = 3$ saadaan yhtälöstä $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} (A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4-3 & 2 \\ 1 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Ominaisvektorit ovat siis

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

2. Arvolla $\lambda = 2$ saadaan vastaavasti yhtälöstä $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$

$$(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ominaisvektorit ovat nyt

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

Algebran peruslauseen mukaan jokaisella n. asteen polynomilla on n nollakohtaa, joista jotkut voivat olla useampikertaisia. Tämä tarkoittaa sitä, että n-asteinen polynomi $p(z)$ voidaan (ainakin periaatteessa) saattaa nollakohtiensa $z_k \in \mathbb{C}$ avulla tekijämuotoon

$$p(z) = C(z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_m)^{n_m},$$

missä $C \in \mathbb{C}$ on vakio ja $\sum_{k=1}^{m} n_k = n$. Luvut z_k ovat tällöin n_k-*kertaisia* nollakohtia. Lisäksi kannattaa muistaa, että jos $a + ib$ on k-kertainen nollakohta, myös liittoluku $a - ib$ on k-kertainen nollakohta.

2×2-matriisin ominaisarvot voidaan aina laskea tarkasti jopa käsin. Useissa matematiikan tietokoneohjelmissa on aivan erityiset työkalut polynomin nollakohtien (tai jopa ominaisarvojen ja -vektoreiden) etsimistä varten. Kuitenkin 3×3-matriisia suurempien matriisien ominaisarvot joudutaan usein laskemaan likimääräisesti jollakin numeerisella menetelmällä. Reaalisia nollakohtia voidaan arvioida myös graafisesti piirtämällä polynomin kuvaaja koordinaatistoon.

Ominaisarvojen ja -vektorien määritysmenettelyn pääpiirteet on koottu Kuvaan 41.

Olkoon A neliömatriisi.
1. Muodostetaan karakteristinen polynomiyhtälö

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2. Etsitään sen ratkaisut $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (ominaisarvot, joista voi osa olla samoja).

3. Ratkaistaan matriisiyhtälön

$$A\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$$

eli

$$(A - \lambda_k I)\mathbf{x}_k = \mathbf{0},$$

sisältämät yhtälöryhmät, missä $\mathbf{x}_1$ on ominaisarvoa λ_1 vastaava ominaisvektori, $\mathbf{x}_2$ vastaa ominaisarvoa λ_2, ja niin edespäin.

Kuva 41: Ominaisvektorien laskeminen

Kokonaislukukertoimisen matriisin tapauksessa saattaa olla apua seuraavasta aputuloksesta, jonka avulla voi kokeilemalla yrittää löytää karakteristisen yhtälön rationaalijuuria.

Lause 23.3.3 Jos supistetussa muodossa oleva rationaaliluku r/s on kokonaislukukertoimisen yhtälön

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

juuri, niin r on luvun a_n ja s luvun a_0 tekijä.

Esimerkki 23.3.4 Matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

karakteristinen yhtälö on

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 10 = 0.$$

Mahdolliset rationaalijuuret ovat ± 1, ± 2, ± 5 ja ± 10. Kokeilemalla nähdään, että $\lambda_1 = 2$ on juuri. Jakamalla tekijällä $\lambda - 2$ saadaan

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0,$$

josta $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{6}$. Ominaisarvot ovat siis 2, $1+\sqrt{6}$ ja $1-\sqrt{6}$.

1. Arvolla $\lambda = 2$ saadaan:

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \iff (A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1-2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1-2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 4-2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\iff \ldots \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Valitaan $x_3 = 9t$, $t \in \mathbb{R}$, jolloin $x_2 = 14t$ ja $x_1 = 8t$, jolloin ominaisavaruus on

$$E_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ja ominaisvektorit

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}, \ t \neq 0.$$

2. Arvolla $\lambda = 1+\sqrt{6}$ saadaan

$$A\mathbf{x} = (1+\sqrt{6})\mathbf{x} \iff \ldots \iff \mathbf{x} = s\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$$

Ominaisavaruus on

$$E_{1+\sqrt{6}} = \left\{ s\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$$

ja ominaisvektorit

$$\mathbf{x} = s\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix},\ s \neq 0.$$

3. Arvolla $\lambda = 1-\sqrt{6}$ taas

$$A\mathbf{x} = (1-\sqrt{6})\mathbf{x} \iff \ldots \iff \mathbf{x} = u\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix},\ u \in \mathbb{R}.$$

Ominaisavaruus on

$$E_{1-\sqrt{6}} = \left\{ u\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \right\}$$

ja ominaisvektorit

$$\mathbf{x} = u\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix},\ u \neq 0.$$

Esimerkki 23.3.5 Määritä ominaisvektorit matriisille

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu. Karakteristisen yhtälön

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$$

ratkaisut – kysytyt ominaisarvot – ovat $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = i$ ja $\lambda_3 = -i$. Ominaisvektorit saadaan yhtälöryhmistä $(A - \lambda_k I)\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

1. Arvolla $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2-3 & -5 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2-3 & | & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 &= t \in \mathbb{C} \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases}$$

Ominaisvektorit ovat $\mathbf{x}_1 = t(1\ 0\ 0)^T$, $t \neq 0$.

2. Arvolla $\lambda_2 = i$:

$$\begin{pmatrix} 3-i & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2-i & -5 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2-i & | & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3-i & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2-i & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ja ominaisvektorit ovat $\mathbf{x}_2 = t(0\ \ 2+i\ \ 1)^T$, $t \neq 0$.

3. Vastaavasti arvolla $\lambda_3 = -i$ saadaan ominaisvektorit $\mathbf{x}_3 = t(0\ \ 2-i\ \ 1)^T$, $t \neq 0$ (laske itse yksityiskohdat).

Tehtävä 23.3.6 Määritä matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit.

Vihje. Maple antaa ratkaisuksi:

```
>  eigenvectors(A);
```

$$[0,\ 1,\ \{[-2,\ 1,\ 0]\}],\ [2,\ 2,\ \{[1,\ 0,\ 0],\ \left[0,\ \frac{3}{2},\ 1\right]\}]$$

Ratkaisu sivulla 310.

Luetellaan lopuksi lyhyesti joitakin ominaisarvojen ominaisuuksia.

Määritelmä 23.3.7 Neliömatriisin $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *jälki* (*trace*) on diagonaalialkioiden summa
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Lause 23.3.8 Olkoon $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matriisi, jonka ominaisarvot ovat λ_1, λ_2, ..., λ_n. Silloin

a) $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

b) $\prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \det(A)$.

c) Kolmiomatriisin ominaisarvot ovat sen diagonaalialkiot.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 23.3.9 Olkoon $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matriisi.

a) A on singulaarinen jos ja vain jos sillä on ominaisarvona 0.

b) Jos A on säännöllinen ja λ on sen ominaisarvo, niin $1/\lambda$ on käänteismatriisin A^{-1} ominaisarvo.

c) Matriiseilla A ja A^T on samat ominaisarvot.

Esimerkki 23.3.10 2×2-matriisista A tiedetään, että sen jälki $\mathrm{tr}(A) = 3$ ja ominaisarvoille pätee $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 3$. Määritä ominaisarvot.

Ratkaisu. Koska $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A) = 3$ ja $\lambda_1 = 3\lambda_2$, on $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ ja siten $\lambda_1 = \frac{9}{4}$.

Tehtävä 23.3.11 Maple antaa Esimerkin 23.3.4 matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit käskyllä

```
>  eigenvectors(A);
```

muodossa

$$[1+\sqrt{6},\ 1,\ \{\left[\frac{1}{3}\sqrt{6},\ 1,\ 1\right]\}],\ [1-\sqrt{6},\ 1,\ \{\left[-\frac{1}{3}\sqrt{6},\ 1,\ 1\right]\}],\ [2,\ 1,\ \{\left[1,\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{8}\right]\}]$$

Ovatko nämä oikein ja miten niitä pitää tulkita?
Ratkaisu sivulla 311

23.4 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 23.3.6 : Lasketaan tuttuun tapaan:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-2 & 4 & -6 \\ 0 & 0-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 = 0 \iff \lambda_1 = 0 \vee \lambda_{2,3} = 2.$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_{2,3} = 2$.

1. Arvo $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\iff (A - 0 \cdot I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2-0 & 4 & -6 & \mid 0 \\ 0 & 0-0 & 3 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 2-0 & \mid 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 3 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 2 & \mid 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x_1 &= -2s \\ x_2 &= s, \ s \in \mathbb{R} \\ x_3 &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ominaisvektorit ovat siis

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0.$$

2. Arvo $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\iff (A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2-2 & 4 & -6 & \mid 0 \\ 0 & 0-2 & 3 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 2-2 & \mid 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 & \mid 0 \\ 0 & -2 & 3 & \mid 0 \\ 0 & 2 & 0 & \mid 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x_1 &= s, \ s \in \mathbb{R} \\ x_2 &= \frac{3}{2}t \\ x_3 &= t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ominaisvektoreihin tulee nyt kaksi vapaasti valittavaa parametria, ja ominaisavaruudeksi tulee kahden vektorin virittämä aliavaruus. Ominaisvektorit ovat siis

$$\mathbf{x} = s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}, \quad s \neq 0 \text{ tai } t \neq 0.$$

Tehtävä 23.3.11 : Seuraavassa Maple-laskua ominaisarvojen ja -vektoreiden laskemiseksi:

```
> restart; with(linalg);
> A := matrix([[1,-2,4],[3,-1,2],[3,-3,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\3 & -1 & 2\\3 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(A);
```

$$2,\ 1+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6}$$

```
> eigenvectors(A);
```

$$[1+\sqrt{6},\ 1,\ \{\left[\frac{1}{3}\sqrt{6},\ 1,\ 1\right]\}],\ [1-\sqrt{6},\ 1,\ \{\left[-\frac{1}{3}\sqrt{6},\ 1,\ 1\right]\}],\ [2,\ 1,\ \{\left[1,\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{8}\right]\}]$$

Käskyllä `eigenvectors` saadaan tiedoksi kolmikkoja

[ominaisarvo, kertaluku, ominaisavaruuden kanta]

Kantavektorijoukon Maple ilmoittaa luettelemalla vektorit vaakavektorimuodossa.

Esitys ei kuitenkaan aina ole kovin eksplisiittinen, jos polynomiyhtälöllä ei ole rationaalijuuria. Jos antaa yhdenkin matriisialkion liukulukumuodossa (esim. 3.0), Maple käyttää numeerista ratkaisumenetelmää.

Huomautus! Kannattaa aina tarkastaa tulokset laskulla $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

24 MATRIISIN DIAGONALISOINTI

Tarkastellaan neliömatriisin A jakamista tekijämuotoon $A = SDS^{-1}$, missä D on diagonaalimatriisi. Tällaisessa jaossa nimittäin matriisin A ominaisarvot ovat matriisin D diagonaalilla ja vastaavat ominaisvektorit matriisin S sarakkeina.

Osoitetaan, että esitys on $n \times n$-matriisille A olemassa täsmälleen silloin, kun sen ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kannan.

24.1 Ominaisarvot ja lineaarinen riippumattomuus

Lause 24.1.1 Jos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ovat matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *erisuuria* ominaisarvoja, niin niitä vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_p$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todistus. Induktiotodistus erisuurten ominaisarvojen lukumäärän $p \in \mathbb{N}$ suhteen.

I1) $p = 1$: Koska $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, on $\{\mathbf{x}_1\}$ lineaarisesti riippumaton.

I2) $p = k$ (induktio-oletus): Olkoon väite tosi jollakin arvolla $k \geq 1$.

I3) $p = k+1$: Olkoot $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ matriisin A erisuuria ominaisarvoja, vektorit $\mathbf{x}_i$ vastaavia ominaisvektoreita ja

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Kertomalla tämä puolittain matriisilla A ja ottamalla huomioon, että kyseessä ovat ominaisvektorit, siis $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$, saadaan matriisilaskusääntöjä käyttäen

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\lambda_k\mathbf{x}_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}. \tag{13}$$

Vähennetään yhtälöstä (13) yhtälö (12) kerrottuna luvulla λ_{k+1}, jolloin saadaan

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Koska induktio-oletuksen mukaan $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ on lineaarisesti riippumaton, ovat kertoimet nollia:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \cdots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Koska $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ kaikilla $i < k+1$, ovat kaikki $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Koska $\mathbf{x}_{k+1} \neq \mathbf{0}$, on yhtälön (12) mukaan myös $\alpha_{k+1} = 0$. Näin on induktioaskel todistettu.

Induktioperiaatteen mukaan väite pätee kaikilla $p \in \mathbb{N}$.

Obs! Mutta mitä arvoja p voikaan todellisuudessa saada? $\square$

24.2 Diagonalisoituvuus

Määritelmä 24.2.1 Neliömatriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *diagonalisoituva*, jos on olemassa sellainen säännöllinen matriisi S, että $D := S^{-1}AS$ on diagonaalimatriisi. Tällöin sanotaan, että S *diagonalisoi* matriisin A.

Lause 24.2.2 Matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on diagonalisoituva jos ja vain jos sillä on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Todistus. 1) Olkoot $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, ..., $\mathbf{s}_n$ lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita ja λ_1, λ_2, ..., λ_n vastaavia ominaisarvoja. Olkoon D diagonaalimatriisi, jolle $d_{ii} = \lambda_i$ kaikilla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Muodostetaan ominaisvektoreista sarakkeittain samassa järjestyksessä matriisi $S := (\mathbf{s}_1\ \mathbf{s}_2\ \cdots\ \mathbf{s}_n)$. Silloin

$$\begin{aligned} AS &= \begin{pmatrix} A\mathbf{s}_1 & A\mathbf{s}_2 & \cdots & A\mathbf{s}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{s}_1 & \lambda_2\mathbf{s}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{s}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = SD. \end{aligned}$$

Lauseen 11.3.1 mukaan S on säännöllinen, joten voidaan ratkaista

$$D = S^{-1}SD = S^{-1}AS.$$

2) Olkoon A diagonalisoituva ja S säännöllinen matriisi, jolle $D := S^{-1}AS$ on diagonaalinen. Koska $AS = SD$, matriisin S sarakkeille $\mathbf{s}_j$ on

$$A\mathbf{s}_j = d_{jj}\mathbf{s}_j \ \text{ kaikilla } \ j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Täten luvut $\lambda_j := d_{jj}$ ovat matriisin A ominaisarvoja vastaavina ominaisvektoreina sarakkeet $\mathbf{s}_j$. Koska S on säännöllinen, ovat ominaisvektorit $\mathbf{s}_j$ lineaarisesti riippumattomia. □

Seuraus 24.2.3 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriisi.

a) Jos matriisilla A on n erisuurta ominaisarvoa, on A diagonalisoituva.

b) Jos matriisi S diagonalisoi matriisin A, niin $A = SDS^{-1}$, missä D on diagonaalimatriisi. Yleisemmin, matriisin A positiiviset potenssit ovat

$$A^k = SD^kS^{-1}.$$

Todistus. a) Lauseet 24.1.1 ja 24.2.2. b) Induktiolla. □

Lauseen 24.2.2 todistuksesta voidaan poimia eräs diagonalisointimetodi; ks. Kuva 42.

Matriisin diagonalisointi. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
1. Lasketaan karakteristisen polynomin $\det(A-\lambda I)=0$ juuret eli ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, lasketaan vastaavat (yhdet) ominaisvektorit $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.
2. Jos $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton, (testi esimerkiksi determinantilla) asetetaan

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ja

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}.$$

Silloin $A = SDS^{-1}$.

Kuva 42: Diagonalisointi ominaisvektorien avulla

Esimerkki 24.2.4 Matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -4$. Eräät vastaavat ominaisvektorit ovat

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

jotka ovat lineaarisesti riippumattomia. Eräs diagonalisoiva matriisi ja vastaava diagonaalimatriisi ovat

$$S := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 24.2.5 2×2-matriisi

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ei ole diagonalisoituva; nimittäin sen ainoata ominaisarvoa 1 vastaava ominaisavaruus on $\{t(1\ 0)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja siten sillä ei ole kahta lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Matriisi voi olla diagonalisoituva, vaikka sen ominaisarvot eivät ole erisuuria.

Esimerkki 24.2.6 Onko matriisi

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

diagonalisoituva?

Ratkaisu. Lasketaan ominaisarvot karakteristisen yhtälön avulla:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda_1 = 0 \text{ tai } \lambda_2 = 1 \text{ tai } \lambda_3 = 1.$$

Vastaavat ominaisvektorit (oikeastaan ominaisavaruudet) saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmät:

1. Ominaisarvo $\lambda = 0$:

$$A\mathbf{x} = 0\mathbf{x} \iff \mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2. Ominaisarvo $\lambda = 1$:

$$A\mathbf{x} = 1\mathbf{x} \iff \mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ t, u \in \mathbb{R}.$$

Eräs ominaisarvoa 0 vastaava ominaisvektori on $\mathbf{s}_1 := (1\ 1\ 1)^T$. Ominaisarvoa 1 vastaa kaksiulotteinen ominaisavaruus, jonka virittävät esimerkiksi $\mathbf{s}_2 := (1\ 0\ 1)^T$ ja $\mathbf{s}_3 := (0\ \ 2\ -1)^T$. Muodostetaan näistä sarakkeittain matriisit

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koska $\det(S) = 1 \neq 0$ (tarkasta!), on saatu kolme lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Matriisi A on siis diagonalisoituva ja esimerkiksi S diagonalisoi sen.

Tehtävä 24.2.7 Tarkasta, että Esimerkeissä 24.2.4 ja 24.2.6 todella on onnistunut diagonalisointi.
Ratkaisusta sivulla 318.

Esimerkeistä 24.2.5 ja 24.2.6 opimme, että jos ominaisarvot eivät ole kaikki erisuuria, ei diagonalisoituvuudesta tiedetä suoralta kädeltä mitään. Kuitenkin voitaisiin todistaa ominaisavaruuksista tieto, että ominaisavaruuden dimensio on aina *enintään* vastaavan ominaisarvon kertaluku, ja sen avulla edelleen:

Lause 24.2.8 a) $n\times n$-matriisi on diagonalisoituva jos ja vain jos eri ominaisarvoihin liittyvien ominaisavaruuksien dimensioiden summa on n.

b) Jos matriisi on diagonalisoituva, niin diagonalisoiva matriisi saadaan ominaisavaruuksien kantavektoreista.

Tehtävä 24.2.9 Diagonalisoi matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu sivulla 318.

Lasketaan lopuksi vielä kompleksinen diagonalisointi.

Esimerkki 24.2.10 Diagonalisoi matriisi

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu. I ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \iff \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

II ominaisvektorit: 1. Arvo $\lambda_1 = 1 + 2i$:

$$\begin{aligned}
(A - (1{+}2i)I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\iff \begin{pmatrix} 1-(1{+}2i) & 2 & | & 0 \\ -2 & 1-(1{+}2i) & | & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -2i & 2 & | & 0 \\ -2 & -2i & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -2i & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 + iR_1 \end{matrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2ix_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ & & x_2 & = & t \in \mathbb{C} \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{-2t}{-2i} = -it \\ x_2 & = & t \in \mathbb{C} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ominaisvektorit ovat
$$\mathbf{x}_1 = t\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0.$$
2. Arvolla $\lambda_2 = 1 - 2i$ saadaan vastaavasti
$$\mathbf{x}_2 = t\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0.$$

Valitaan nyt diagonalisoivaksi matriisiksi S ominaisvektorisarakkeet ja diagonaalimatriisiksi vastaavat ominaisarvot:
$$S := \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ja } D := \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$$

Silloin
$$SDS^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A.$$

24.3 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 24.2.7 : Täytyy vain tarkastaa laskemalla, että yhtälö $A = SDS^{-1}$ toteutuu.

Tehtävä 24.2.9 : Koska A on alakolmiomatriisi, nähdään heti, että luvut $\lambda_1 = -3$ ja $\lambda_2 = 5$ ovat kaksinkertaisia ominaisarvoja. Ominaisavaruudet (laske!)

$$\begin{aligned} E_{-3} &= \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ E_5 &= \left\{ s \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

ovat kaksiulotteisia ja niiden dimensioiden summa $2 + 2 = 4 =$ neliömatriisin A dimensio. Asetetaan siis

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tarkasta, että todella $SDS^{-1} = A$!

25 SYMMETRISET MATRIISIT JA SPEKTRAALILAUSE

Tämän luvun päämääränä on pohjustaa neliömuotojen

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_i x_j$$

teoriaa ja luokittelua. Luvussa 26.1 nähdään, että jokainen reaalinen neliömuoto voidaan esittää symmetrisen reaalimatriisin avulla muodossa $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, joten riittää tarkastella reaalimatriiseja A, joille $A = A^T$. Osoitetaan aluksi, että tällaisen matriisin ominaisarvot ovat aina reaalisia ja vastaavat ominaisavaruudet pareittain ortogonaalisia.

25.1 Symmetrisen matriisin ominaisarvoista

Olkoon $\overline{z}$ kompleksiluvun $z = a + ib$ liittoluku eli kompleksikonjugaatti, ts. $\overline{z} = a - ib$. Silloin tunnetusti

1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

2) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

3) $\overline{z}z = |z|^2 = a^2 + b^2 \geq 0$

4) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \iff \operatorname{Im} z = 0.$

Kompleksiselle vektorille $\mathbf{z} = (z_1\ z_2\ \cdots\ z_n)^T \in \mathbb{C}^n$ merkitään $\overline{\mathbf{z}}$ vektoria, jossa koordinaatit z_i on konjugoitu, ts.

$$\overline{z} = (\overline{z}_1\ \overline{z}_2\ \cdots\ \overline{z}_n)^T \in \mathbb{C}^n.$$

Silloin $\overline{\mathbf{z}}^T\mathbf{z}$ on reaalinen, ja

$$\overline{\mathbf{z}}^T\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i z_i = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \geq 0.$$

Kompleksisille matriiseille ja vektoreille pätevät mm. tulon konjugointisäännöt

$$\overline{\alpha\mathbf{x}} = \overline{\alpha}\,\overline{\mathbf{x}}, \quad \overline{A\mathbf{x}} = \overline{A}\overline{\mathbf{x}}, \quad \overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}, \quad \overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\overline{A}.$$

Tehtävä 25.1.1 a) Todista, että $\overline{A\mathbf{x}} = \overline{A}\overline{\mathbf{x}}$.

b) Todista, että jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja λ, $\mathbf{x}$ ovat sen ominaisarvo ja vastaava ominaisvektori, niin $\overline{\lambda}$, $\overline{\mathbf{x}}$ ovat myös sen ominaisarvo ja ominaisvektori.
Ratkaisu sivulla 324.

Lause 25.1.2 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrinen matriisi, $\lambda \in \mathbb{C}$ sen ominaisarvo ja $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vastaava ominaisvektori, ts. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Silloin

a) $\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}$ on reaalinen.

b) λ on reaalinen.

Tehtävä 25.1.3 Todista Lause 25.1.2.
Ratkaisu sivulla 324.

25.2 Spektraalilause symmetrisille reaalimatriiseille

Lause 25.2.1 Jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on symmetrinen, ovat kahden eri ominaisarvon ominaisavaruudet keskenään ortogonaalisia (ks. Määritelmä 21.1.7).

Todistus. Riittää todistaa, että eri ominaisarvoihin liittyvät vektorit ovat kohtisuorassa keskenään.

Olkoot $\lambda_1 \neq \lambda_2$ symmetrisen reaalimatriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvoja ja $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ vastaavia ominaisvektoreita. Silloin

$$\begin{aligned}\lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= (\lambda\mathbf{v}_1)^T\mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1^T A^T)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T(A\mathbf{v}_2)\\ &= \mathbf{v}_1^T(\lambda_2\mathbf{v}_2) = \lambda_2\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle .\end{aligned}$$

Koska $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ja edellisen mukaan $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$, on oltava $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ ja siten $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$. □

Spektraalilause 25.2.2 Symmetrisen matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisvektoreista voidaan muodostaa avaruudelle $\mathbb{R}^n$ ortonormaali kanta. Erikoisesti symmetrinen matriisi on diagonalisoituva.

Todistus. Osittain perusteltu edellä. Yksityiskohdat sivuutetaan. □

Spektraalilauseen takaaman ortonormaalin kannan avulla pääsemme esittämään neliömuodon $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ sekatermittömässä muodossa sopivalla koordinaatiston vaihdolla:

Lause 25.2.3 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrinen matriisi. Valitaan diagonalisoivaksi matriisiksi ortonormaaleista ominaisvektoreista $\mathbf{e}'_i$ koostuva matriisi S ja olkoon $D := S^{-1}AS$, jonka diagonaalilla ovat vastaavat ominaisarvot $\lambda_i = d_{ii}$. Tällöin $E' := \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaali kanta. Jos vektorin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ koordinaattivektori kannassa E' on $\mathbf{x}'$, niin

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T D \mathbf{x}' = \lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2.$$

Todistus. Ortogonaalinen matriisi S on siirto kannasta E' luonnolliseen kantaan, ts. $S\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ ja $S^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Koska $S^{-1} = S^T$, on

$$\mathbf{x}'^T = (S^T \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T S.$$

Siis

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T S D S^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T D \mathbf{x}'.$$

□

25.3 Symmetristen matriisien luokittelu

Määritelmä 25.3.1 Symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on

a) *positiivisesti definiitti*, jos $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ kaikilla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

b) *negatiivisesti definiitti*, jos $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$ kaikilla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

c) *positiivisesti semidefiniitti*, jos $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{y}^T A \mathbf{y} = 0$ jollakin $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$,

d) *negatiivisesti semidefiniitti*, jos $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{y}^T A \mathbf{y} = 0$ jollakin $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$,

e) *indefiniitti*, jos on olemassa $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, joille $\mathbf{y}^T A \mathbf{y} > 0$ ja $\mathbf{z}^T A \mathbf{z} < 0$.

Lause 25.3.2 a) Symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on positiivisesti (vast. negatiivisesti) definiitti jos ja vain jos sen kaikki ominaisarvot ovat aidosti positiivisia (vast. aidosti negatiivisia).

b) Symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on positiivisesti (vast. negatiivisesti) semidefiniitti jos ja vain jos sen kaikki ominaisarvot ovat ei-negatiivisia (vast. ei-positiivisia) ja ainakin yksi ominaisarvo on 0.

c) Symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on indefiniitti jos ja vain jos sillä on aidosti positiivisia ja aidosti negatiivisia ominaisarvoja.

Todistus. Seuraa suoraan Lauseen 25.2.3 esityksestä. □

25.4 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 25.1.1 : Olkoot $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ja $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Silloin $A\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, samoin sen alkioittainen kompleksikonjugaatti $\overline{A\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$. Vastaavasti matriisin A alkioittainen konjugaatti $\overline{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ja $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$, ja tulo $\overline{A}\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$.

a) Riittää siis näyttää, että vektoreilla $\overline{A\mathbf{x}}$ ja $\overline{A}\overline{\mathbf{x}}$ on samat vastinalkiot. Vektorin $A\mathbf{x}$ alkiot ovat summia $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, ja siten vektorin $\overline{A\mathbf{x}}$ alkiot

$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}\,\overline{x}_j,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

kompleksilukujen laskusääntöjen 1) ja 2) nojalla (Luvun 25.1 alkupuoli). Mutta toisaalta luvut $\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}\,\overline{x}_j$ ovat vektorin $\overline{A}\overline{\mathbf{x}}$ vastaavia alkioita.

b) Koska A on reaalinen, on $A = \overline{A}$. Kohdan a) ja ominaisarvoyhtälön nojalla

$$A\overline{\mathbf{x}} = \overline{A}\,\overline{\mathbf{x}} = \overline{A\mathbf{x}} = \overline{\lambda\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}},$$

ja siten $\overline{\lambda}$ ja $\overline{\mathbf{x}}$ ovat matriisin A ominaisarvo ja ominaisvektori.

Tehtävä 25.1.3 : a) Osoitetaan reaalisuus yhtälöllä $\mathbf{z} = \overline{\mathbf{z}}$. Väite seuraa käytäen tulon konjugoinnin laskusääntöjä, matriisin A reaalisuutta ja sitä, että muunneltavana on koko ajan *luku* (muotoa $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$; sen transponointi ei vaikuta mitään):

$$\overline{\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}} = \overline{\overline{\mathbf{x}}}^T\overline{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A\overline{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^T A\overline{\mathbf{x}})^T = \overline{\mathbf{x}}^T A^T\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}.$$

b) Edellisen nojalla $\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}$ on reaalinen. Koska toisaalta reaalinen

$$\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^T(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x},$$

missä myös $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}$ on reaalinen ja $\neq 0$, koska $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, on oltava $\lambda \in \mathbb{R}$.

26 NELIÖMUODOISTA

26.1 Neliömuoto

Määritelmä 26.1.1 Polynomeja

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j,$$

missä $c_{ij} \in \mathbb{R}$, sanotaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ *neliömuodoiksi* (quadratic form).

Jokainen neliömuoto saadaan aikaan neliömatriisin avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T C\mathbf{x} &= (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{array}{ccccccccc} & c_{11}x_1^2 & + & c_{12}x_1x_2 & + & \ldots & + & c_{1n}x_1x_n \\ + & c_{21}x_2x_1 & + & c_{22}x_2^2 & + & \ldots & + & c_{2n}x_2x_n \\ \vdots & & & & & & & \\ + & c_{n1}x_nx_1 & + & c_{n2}x_nx_2 & + & \ldots & + & c_{nn}x_n^2 \end{array} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j
\end{aligned}$$

Esityksestä nähdään myös, että sama neliömuoto saadaan aikaan symmetrisellä matriisilla $C' = (c'_{ij})_{n\times n}$, jolle

$$\begin{cases} c'_{ii} &= c_{ii} \text{ kaikilla } i = 1, 2, \ldots, n \\ c'_{ij} &= \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) \text{ kaikilla } i \neq j. \end{cases}$$

Koska $\mathbf{x}^T C\mathbf{x} = \mathbf{x}^T C'\mathbf{x}$ riittää tarkastella symmetristen matriisien määräämiä neliömuotoja.

Esimerkki 26.1.2 Esitä neliömuodot

a) $P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_1x_2 - 7x_2^2$

b) $Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$

symmetrisen matriisin avulla.

Ratkaisu. Haetaan sopivat symmetriset matriisit:

$$\begin{aligned} \text{a)}\quad P(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{b)}\quad Q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tehtävä 26.1.3 Esitä neliömuoto

$$P(x, y, z) := x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 6yz + 4xz$$

symmetrisen matriisin avulla.
Ratkaisu sivulla 327.

26.2 Neliömuotojen luokittelu

Määritelmä 26.2.1 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ neliömuoto P on

a) *positiivisesti definiitti*, jos $P(\mathbf{x}) > 0$ kaikilla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

b) *negatiivisesti definiitti*, jos $P(\mathbf{x}) < 0$ kaikilla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

c) *positiivisesti semidefiniitti*. jos $P(\mathbf{x}) \geq 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $P(\mathbf{y}) = 0$ jollakin $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

d) *negatiivisesti semidefiniitti*, jos $P(\mathbf{x}) \leq 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $P(\mathbf{y}) = 0$ jollakin $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

e) *indefiniitti*, jos on olemassa $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, joille $P(\mathbf{y}) > 0$ ja $P(\mathbf{z}) < 0$.

Esimerkki 26.2.2 Määritä neliömuotojen (ks. Esimerkki 26.1.2)

a) $P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_1x_2 - 7x_2^2$

b) $Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$

tyypit.

Ratkaisu. Helposti nähdään, että P saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja; esimerkiksi

$$P(1, 0) = 2 > 0 \text{ ja } P(0, 1) = -7 < 0,$$

joten se on indefiniitti. Mutta

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 1\tfrac{3}{4}x_1^2 + (\tfrac{1}{2}x_1)^2 - 2(\tfrac{1}{2}x_1)x_2 + x_2^2 = \tfrac{7}{4}x_1^2 + (\tfrac{1}{2}x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

ja $Q(\mathbf{x}) = 0$ vain kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Se on siis positiivisesti definiitti.

Huomautus 26.2.3 Olkoon P avaruuden $\mathbb{R}^n$ neliömuoto esitettynä symmetrisen matriisin avulla muodossa $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Neliömuodon tyypin tarkastelun voi palauttaa matriisin A tyypin tutkimiseen, sillä P on Määritelmän 26.2.1 tyyppiä X jos ja vain jos A on Määritelmän 25.3.1 tyyppiä X. Voidaan siis käyttää mm. Lauseita 25.2.3 ja 25.3.2.

Seuraus 26.2.4 Olkoon $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ neliömuoto, missä $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on symmetrinen. Olkoon $E' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ matriisin A ominaisvektoreista muodostettu ortonormaali kanta ja vastaavat ominaisarvot λ_1, λ_2, …, λ_n matriisin D diagonaalilla. Jos vektorin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ koordinaattivektori kannassa E' on $\mathbf{x}'$, niin

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}'^T D\mathbf{x}' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2.$$

Todistus. Lause 25.2.3. □

Esimerkki 26.2.5 Mitä tyyppiä on neliömuoto

$$P(x, y, z) := x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 6yz + 4xz?$$

Ratkaisu. Tehtävässä 26.1.3 muodostettiin symmetrinen matriisi A, jolle $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Sen ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & -3 \\ 2 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 18\lambda = 0 \iff \lambda = 0 \text{ tai } \lambda = 2 \text{ tai } \lambda = 9.$$

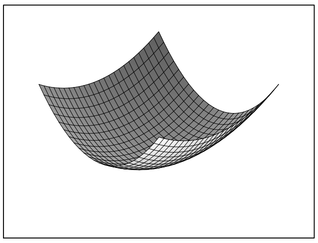
Ominaisarvot ovat ei-negatiivisia ja eräs niistä on 0, joten P on Lauseen 25.3.2 mukaan positiivisesti semidefiniitti.

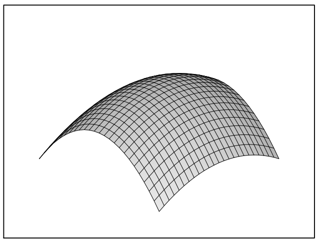
Tehtävä 26.2.6 Mitä tyyppiä ovat neliömuodot

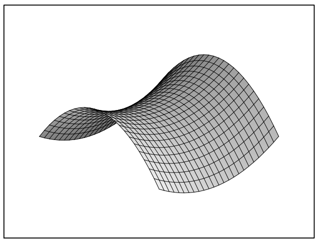
a) $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$?

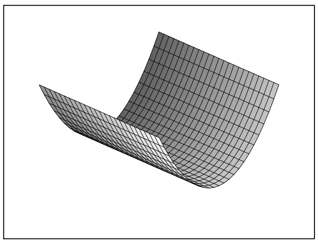
b) $-x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_1x_3$?

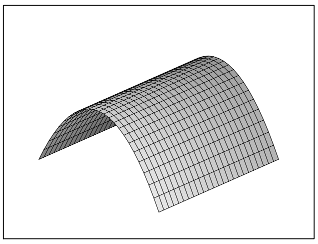
Ratkaisut sivulla 334.


Positiivisesti definiitti


Negatiivisesti definiitti


Indefiniitti


Positiivisesti semidefiniitti


Negatiivisesti semidefiniitti

Kuva 43: Neliömuotojen perustyyppejä

Olkoon P neliömuoto avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Koska $P(\mathbf{0}) = 0$, on funktiolla P pienin arvo 0 origossa jos ja vain jos P on positiivisesti definiitti tai semidefiniitti. Kuvassa 43 on erilaisia (kahden muuttujan) neliömuotojen graafisia esityksiä.

Sovellus ääriarvojen luokitteluun

Esimerkki 26.2.7 Kolme kertaa jatkuvasti derivoituvan (oikeastaan riittäisi kaksikin) funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mahdolliset lokaalit ääriarvopisteet ovat sen 1. derivaattojen yhteiset nollakohdat. Jos $\mathbf{x}_0$ on mahdollinen ääriarvopiste, niin määritellään nk. *Hessen matriisi* $H(\mathbf{x}_0) = (h_{ij})$, missä

$$h_{ij} := \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Silloin $\mathbf{x}_0$ on funktion F

a) lokaali minimi, jos $H(\mathbf{x}_0)$ on positiivisesti definiitti,

b) lokaali maksimi, jos $H(\mathbf{x}_0)$ on negatiivisesti definiitti,

c) satulapiste (siis ei ääriarvopiste), jos $H(\mathbf{x}_0)$ on indefiniitti.

(Ludwig Otto Hesse, Saksa, 1811-1874)

26.3 Pääakseliongelma

Määritelmä 26.3.1 Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrinen matriisi, $B \in \mathbb{R}^{1\times n}$ vaakavektori ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Muotoa

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + \alpha = 0$$

oleva yhtälö on avaruuden $\mathbb{R}^n$ *neliöyhtälö*. Niiden pisteiden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ joukkoa, jotka toteuttavat kyseisen yhtälön, sanotaan *neliöpinnaksi*.

Esimerkki 26.3.2 Tason neliöyhtälö on muotoa

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{14}$$

eli

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0.$$

Yhtälön (14) neliöpinta on *kartioleikkaus*. Jos yhtälöllä (14) ei ole reaalisia ratkaisuja, kartioleikkausta sanotaan *imaginaariseksi*; jos ratkaisujoukko on piste, suora tai kaksi suoraa, kartioleikkaus on *degeneroitunut*; muita kutsutaan tässä *varsinaisiksi* kartioleikkauksiksi.

Varsinaisten kartioleikkausten perustyypit ovat

ellipsi	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$
hyperbelit	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = \pm 1$
paraabelit	$x^2 = \alpha y$ tai $y^2 = \beta x$

Ellipsi, jolle $\alpha = \beta$ on *ympyrä*. Ellipsit ja hyperbelit ovat *keskipisteellisiä* käyriä ja paraabeli on *keskipisteetön*.

Mikäli termin xy kerroin $= 0$, kartioleikkaus voidaan muuntaa joksikin näistä koordinaattiakselien suuntaisilla siirroilla; algebrallisesti tämä tarkoittaa *neliöiksi täydentämistä*.

Esimerkki 26.3.3 Mitä käyrää esittää yhtälö $9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$?

Ratkaisu. Muodosta $9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) - 11 = 9 + 16$ saadaan

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1.$$

Käyrä on ellipsi keskipisteenä $(1\ -2)^T$ ja puoliakseleina 2 ja 3.

Ongelma. Millainen ratkaisukäyrä on yleisellä yhtälöllä

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0?$$

Ratkaisun pääpiirteet (vrt. Seuraus 26.2.4): Matriisimuodon

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

neliömuoto-osan symmetrinen matriisi A diagonalisoidaan etsimällä sen ominaisarvot λ_1, λ_2 ja muodostamalla ominaisvektoreista ortogonaalinen diagonalisoiva matriisi Q; tällöin ominaisarvot ovat matriisin $D := Q^T AQ$ diagonaalilla. Jos x' ja y' ovat koordinaatit ominaisvektorien muodostamassa kannassa, niin yhtälö menee muotoon

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0,$$

jossa ei ole sekatermiä $x'y'$. Kun yhtälö lopuksi täydennetään neliöiksi, saadaan yhtälö perustyypin kartioleikkausmuotoon matriisin Q sarakkeiden määräämässä nk. *pääakselikoordinaatistossa*.

Esimerkki 26.3.4 Millaista käyrää esittää

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0?$$

Ratkaisu. Neliömuoto-osan symmetrisen matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

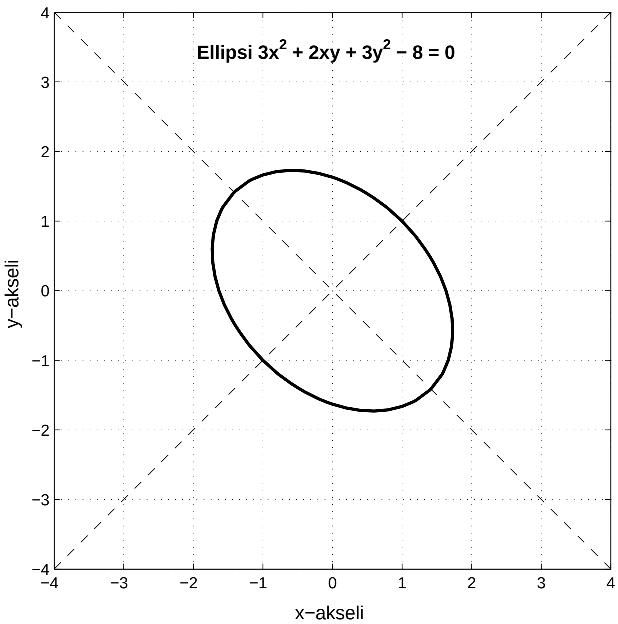
ominaisarvot ovat 2 ja 4. Vastaavista normitetuista ominaisvektoreista muodostettu matriisi ja ominaisarvoista muodostettu diagonaalimatriisi ovat

$$Q := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad D := Q^T AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Koska 1. asteen termit puuttuvat, on kyseessä vain koordinaatiston kierto, joten pääakselikoordinaatiston origo on sama kuin luonnollisen koordinaatiston. Yhtälö saadaan siten suoraan pääakselikoordinaatistoon muodossa

$$2x'^2 + 4y'^2 = 8 \quad \text{eli} \quad \frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{\sqrt{2}^2} = 1.$$

Kyseessä on origokeskinen ellipsi puoliakseleina 2 ja $\sqrt{2}$, kierrettynä kulman $\pi/4$ myötäpäivään, ks. Kuva 44.



Kuva 44: Ellipsi $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$

Esimerkki 26.3.5 Millainen on käyrä

$$8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0?$$

Neliömuoto-osan matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 9$ ja $\lambda_2 = -1$.

Ominaisarvomatriisi D ja normitettujen ominaisvektorien matriisi Q ovat

$$Q := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad D := \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Yhtälö saadaan kierretyssä koordinaatistossa K' muotoon

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & -26 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

$$\iff 9x'^2 - 9\sqrt{10}x' - y'^2 + \sqrt{10}y' + 11 = 0.$$

Täydennetään neliöiksi:

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9.$$

Yhtälö esittää siis hyperbeliä ja sen yhtälö pääakselikoordinaatistossa K” on

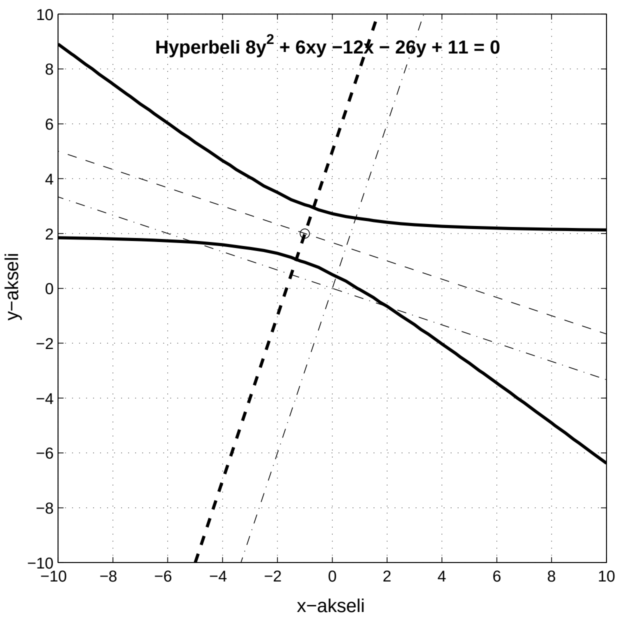
$$x''^2 - \frac{y''^2}{3^2} = 1.$$

Pääakselikoordinaatiston origo on pisteessä

$$Q\begin{pmatrix} \sqrt{10}/2 \\ \sqrt{10}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ja koordinaattiakseleina suorat (ks. Kuva 45)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{sekä} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$



Kuva 45: Hyberbeli $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$

26.4 Ratkaisuja tehtäviin

Tehtävä 26.1.3 : Olkoot $x_1 = x$, $x_2 = y$ ja $x_3 = z$. Silloin

$$P(\mathbf{x}) = x_1x_1 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_1 + 5x_2x_2 - 3x_2x_3 + 2x_3x_1 - 3x_3x_2 + 5x_3x_3$$

jonka kertoimista poimitaan matriisiksi

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 26.2.6 : a) Symmetrisoidun matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat aidosti positiiviset 7 ja 2, joten neliömuoto on positiivisesti definiitti.

b) Neliömuoto voidaan esittää symmetrisen matriisin

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

avulla. Matriisin ominaisarvot ovat (laske!) 6, $\sqrt{3}$ ja $-\sqrt{3}$, joten neliömuoto on Lauseen 25.3.2 mukaan indefiniitti.

A LIITE: Algebrallisista rakenteista

A.1 Ryhmä

Abstraktissa algebrassa tutkitaan mm. joukon sisäisten laskutoimitusten ominaisuuksia, kuten sitä onko laskutoimituksella seuraavia ominaisuuksia:

1) *vaihdannaisuus* eli *kommutatiivisuus*: $a \circ b = b \circ a$ kaikilla $a, b \in A$

2) *liitännäisyys* eli *assosiatiivisuus*: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ kaikilla $a, b, c \in A$

3) joukossa A on *neutraalialkio* eli *nolla-alkio* $e \in A$, jolle $a \circ e = a$ ja $e \circ a = a$ kaikilla $a \in A$

4) (olettaen, että joukossa A on neutraalialkio e) jokaisella alkiolla on *vasta-alkio*, so. kutakin $a \in A$ vastaa sellainen alkio $b_a \in A$, että $a \circ b_a = e$ ja $b_a \circ a = e$.

Algebrassa käytetään mm. seuraavia nimityksiä: Pari $(A, \circ)$ on *ryhmä* (group), jos se toteuttaa ehdot 2 – 4. Pari $(A, \circ)$ on *vaihdannainen* eli *Abelin ryhmä*, jos se toteuttaa ehdot 1 – 4. Voidaan osoittaa (vrt. Lause 9.4.1), että ryhmän alkioista täsmälleen yksi on neutraalialkio ja että kullakin alkiolla on yksi ja vain yksi vasta-alkio.

Esimerkki A.1.1 Äärellisessä joukossa laskutoimitus voidaan antaa esimekiksi taulukolla. Tutkitaan, mitkä ryhmän ominaisuudet ovat voimassa seuraavien taulukkojen joukossa $A := \{0, 1\}$ määräämien operaatioiden suhteen:

$$
\text{a)} \; \begin{array}{c|cc} \circ & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}
\qquad
\text{b)} \; \begin{array}{c|cc} \circ & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}
\qquad
\text{c)} \; \begin{array}{c|cc} \circ & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}
\qquad
\text{d)} \; \begin{array}{c|cc} \circ & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}
$$

Ratkaisut. a) Voimassa kaikki 1-4. b) Ei laskutoimitus lainkaan! c) Ei mikään kohdista 1-4. d) Voimassa 1-3, neutraalialkio on 0, mutta alkiolla 1 ei ole vasta-alkiota.

Esimerkki A.1.2 Määrittele joukossa $\{-1, 0, 1\}$ laskutoimituksen $\circ$ tulokset niin, että syntyy ryhmä:

$\circ$	-1	0	1
-1			
0			
1			

Esimerkki A.1.3 Yksialkioisessa joukossa voidaan määritellä vain yksi laskutoimitus (miten?) ja näin saadaan Abelin ryhmä. Oletetaan, että joukossa A on ainakin kaksi alkiota. Silloin Esimerkin 9.1.2

a) vakiolaskutoimitus on vaihdannainen ja liitännäinen, mutta ominaisuudet 3 tai 4 eivät ole voimassa (todista!).

b) projektiot eivät ole vaihdannaisia, mutta ovat liitännäisiä. Onko niillä neutraalialkio? Jopa vasta-alkiot?

Esimerkki A.1.4 Esimerkin 9.1.3 laskutoimitus $\min$ on vaihdannainen ja liitännäinen, muttei toteuta ehtoja 3 – 4. Kohdan b) laskutoimitus $\downarrow$ on vaihdannainen. Onko se liitännäinen? Toteuttaako se ehdon 3 tai 4?

Esimerkki A.1.5 a) Yhteenlaskulla joukossa $\mathbb{N}$ ei ole neutraalialkiota, mutta joukossa $\mathbb{N}_0$ on, nimittäin luku 0. Kummassakaan ei ole vasta-alkioita. Yhteenlasku on jopa Abelin ryhmä joukoissa $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$.

b) Kertolaskulla varustettuina joukot $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ja $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ovat Abelin ryhmiä, joiden neutraalialkio on luku 1 ja luvun $a \neq 0$ vasta-alkio on sen käänteisalkio $\frac{1}{a}$.

Tehtävä A.1.6 Mitkä ehdoista 1 – 4 ovat voimassa kertolaskulle joukoissa $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$?

Esimerkki A.1.7 Joukossa $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ modulo-yhteenlasku

$$m \oplus n := (m + n) \bmod 4$$

on sisäinen laskutoimitus, joka tuottaa Abelin ryhmän.

Esimerkki A.1.8 Joukossa $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$ on modulo-tulon

$$m \odot n := (mn) \bmod 5$$

määrittelemä ryhmärakenne.

Esimerkki A.1.9 Olkoon S joukon $\mathbb{Z}_3 := \{0, 1, 2\}$ kaikkien järjestettyjen kolmikkojen (m, n, p) joukko; siis $S = \mathbb{Z}_3^3$. Joukko S varustettuna koordinaateittaisella modulo 3-yhteenlaskulla on Abelin ryhmä.

A.2 Kunta

Oletetaan, että ryhmässä(ks. Liite A.1) $(A, \circ)$ on määritelty myös toinen, kertolaskun kaltainen laskutoimitus $\star$. Tällöin käytetään yleensä seuraavia merkintöjä:

$\circ$:n neutraalialkio 0_A on *nolla-alkio*, alkion a vasta-alkiota merkitään $-a$

$\star$:n neutraalialkio 1_A on *ykkösalkio*, alkion a vasta-alkiota sanotaan *käänteisalkioksi* ja merkitään a^{-1}.

Määritelmä A.2.1 Kolmikko $(K, \circ, *)$ on *kunta* (*field*), jos *yhteenlaskuksi* kutsuttu operaatio $\circ$ ja *kertolaskuksi* kutsuttu $*$ toteuttavat seuraavat aksioomat:

k1) Pari $(K, \circ)$ on Abelin ryhmä (merkitään nolla-alkiota 0).

k2) Kertolasku on vaihdannainen ja liitännäinen.

k3) Yhteen- ja kertolasku toteuttavat yhdessä *osittelulait* eli ovat *distributiivisia*; so. kaikilla a, b, $c \in K$ on

$$\begin{aligned} a * (b \circ c) &= (a * b) \circ (a * c), \\ (a \circ b) * c &= (a * c) \circ (b * c). \end{aligned}$$

k4) Kertolaskulla on neutraalialkio (mekitään sitä symbolilla 1).

k5) Jokaisella $a \in K \setminus \{0\}$ on kertolaskun suhteen vasta-alkio (käänteisalkio, merkitään) a^{-1}, jolle siis $a * a^{-1} = 1$.

Esimerkki A.2.2 Joukot $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ varustettuina yhteen- ja kertolaskulla ovat mitä ilmeisimmin kuntia.

Huomaa, että ehdoista k2, k4 ja k5 seuraa, että $(K \setminus \{0\}, *)$ on Abelin ryhmä, jonka neutraalialkio on tuo 1.

Muita kuntia esitellään algebran kursseilla; tässä kuitenkin pari esimerkkiä äärellisistä kunnista:

Esimerkki A.2.3 Reaalilukujen osajoukko $\{0, 1\}$ varustettuna seuraavien taulukoiden mukaisilla yhteen- ja kertolaskuilla on kunta:

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Mikä onkaan sen nolla-alkio, mikä ykkösalkio? Mitkä ovat vasta-alkiot, mitkä käänteisalkiot?

Itse asiassa yllä oli esillä suppein mahdollinen kunta, vain kaksialkioinen.

Esimerkki A.2.4 Joukossa $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ määriteltyjen operaatioiden (vrt. A.1.8)

$$\begin{aligned} m \oplus n &:= (m+n) \bmod 3 \\ m \odot n &:= (mn) \bmod 3 \end{aligned}$$

kanssa kolmikko $(\mathbb{Z}_3, \oplus, \odot)$ toteuttaa kunnan aksioomat.

Esimerkki A.2.5 Joukossa $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ määriteltyjen operaatioiden (ks. A.1.7)

$$\begin{aligned} m \oplus n &:= (m+n) \bmod 4 \\ m \odot n &:= (mn) \bmod 4 \end{aligned}$$

kanssa kolmikko $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \odot)$ toteuttaa useimmat kunnan aksioomista, mutta ei kaikkia; mitä ei?

Algebrassa näytetään, että $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, \ldots p-1\}$ on kunta jos ja vain jos p on alkuluku, $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$. Muilla arvoilla renkaaseen tulee nollantekijöitä eikä kaikilla alkioilla voi silloin olla käänteisalkioita. Esimerkiksi renkaassa Z_4 on $2 \cdot 2 = 4 \bmod 4 = 0$.

Hakemisto