Yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärä, L26

Esimerkki 1 kvadraattinen yhtälöryhmä 1

Haluamme ratkaista yhtälöryhmän

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ -2x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esimerkki 1 kvadraattinen yhtälöryhmä 2

Yhtälöryhmä on kvadraattinen, koska kerroinmatriisi on neliömatriisi.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Yhtälöryhmä on kvadraattinen, koska kerroinmatriisi on neliömatriisi.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ratkaisujen olemassaoloa ja lukumäärää voidaan tutkia kerroinmatriisin determinantin avulla.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= +4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4(2 \cdot 2 - 1 \cdot 2) - (1 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)) - (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)) \\ &= 8 - 4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

Lause 1: Kun kvadraattisen yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on erisuuri kuin nolla, niin yhtälöryhmällä on yksi yksikäsitteinen ratkaisu.

Lause 1: Kun kvadraattisen yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on erisuuri kuin nolla, niin yhtälöryhmällä on yksi yksikäsitteinen ratkaisu.

Esimerkin tapauksessa on siis olemassa yksikäsitteinen ratkaisu, joka voidaan ratkaista

- rivioperaatioin,
- tai käänteismatriisia käyttäen,
- tai Cramerin kaavoilla.

Esimerkki 2 kvadraattinen homogeeninen YR 4

Haluamme ratkaista yhtälöryhmän

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina triviaali ratkaisu $x = 0, y = 0, z = 0.$

Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina triviaali ratkaisu $x = 0, y = 0, z = 0$.

Koska kerroinmatriisi on sama kuin edellisessä esimerkissä, tiedämme että $\det(A) = -2 \neq 0$, joten yhtälöryhmän ratkaisu on yksikäsitteinen.

Esimerkki 2 kvadraattinen homogeeninen YR

Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina triviaali ratkaisu $x = 0, y = 0, z = 0$.

Koska kerroinmatriisi on sama kuin edellisessä esimerkissä, tiedämme että $\det(A) = -2 \neq 0$, joten yhtälöryhmän ratkaisu on yksikäsitteinen.

Ei siis ole olemassa muuta ratkaisua, kuin triviaali

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

Haluamme ratkaista yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esimerkki 3 kvadraattinen homogeeninen YR 7

Nyt kerroinmatriisin determinantti on 0, joten löytyy ei-triviaali ratkaisu, joka voidaan ratkaista

- rivioperaatioilla
- tai asettamalla yhdelle muuttujalle arvo (esim. $z = 1$) ja ratkaisemalla näinsaatu (**ei-kvadraattinen**) yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & - & 1 & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 1 & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & -1 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Seuraavan määritelmän alakohdat 1,2,3 ovat keskenään yhtäpitävät:

Määr:(a) Matriisi A on lineaarisesti riippuva (sidottu), jos

1. jokin matriisin sarake voidaan muuttaa sarake-operaatioilla nollasarakkeeksi. (Jokin sarake voidaan lausua muiden sarakkeiden lineaarikombinaationa), tai
2. jokin transpoosin A^T rivi voidaan muuttaa rivi-operaatioilla nollariviksi, tai
3. $A\vec{x} = \vec{0}$, jollakin ei-triviaalilla vektorilla $\vec{x}$.

(b) Matriisi A on lineaarisesti riippumaton (eli vapaa), jos se ei ole lineaarisesti riippuva (eli ei ole sidottu).

Lause 2: Neliömatriisi A on vapaa, jos ja vain jos sen determinantti ei ole nolla $(\det(A) \neq 0)$.

Lause 2: Neliömatriisi A on vapaa, jos ja vain jos sen determinantti ei ole nolla ($\det(A) \neq 0$).

Lause 3: (a) Jos yhtälöryhmällä $A\vec{x} = \vec{b}$ on enemmän kuin yksi ratkaisu (kaksi tai enemmän), niin kerroinmatriisi on sidottu.

Lause 2: Neliömatriisi A on vapaa, jos ja vain jos sen determinantti ei ole nolla ($\det(A) \neq 0$).

Lause 3: (a) Jos yhtälöryhmällä $A\vec{x} = \vec{b}$ on enemmän kuin yksi ratkaisu (kaksi tai enemmän), niin kerroinmatriisi on sidottu.
(b) Jos yhtälöryhmän $A\vec{x} = \vec{b}$ kerroinmatriisi on vapaa, niin ryhmällä on korkeintaan yksi ratkaisu. (Yksi ratkaisu tai $Rj = \emptyset$.)

Lause 2: Neliömatriisi A on vapaa, jos ja vain jos sen determinantti ei ole nolla ($\det(A) \neq 0$).

Lause 3: (a) Jos yhtälöryhmällä $A\vec{x} = \vec{b}$ on enemmän kuin yksi ratkaisu (kaksi tai enemmän), niin kerroinmatriisi on sidottu.
(b) Jos yhtälöryhmän $A\vec{x} = \vec{b}$ kerroinmatriisi on vapaa, niin ryhmällä on korkeintaan yksi ratkaisu. (Yksi ratkaisu tai $Rj = \emptyset$.)

Perustelu: Jos löytyy kaksi erilaista ratkaisua $\vec{u}$ ja $\vec{v}$, niin niiden erotus $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ on ei-triviaali vektori ja

$$A\vec{w} = A(\vec{u} - \vec{v}) = A\vec{u} - A\vec{v} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

joten A on määritelmän nojalla sidottu.

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:
(1) Jos $m < n$ (rivejä vähemmän kuin sarakkeita), niin matriisi on sidottu.

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:
(1) Jos $m < n$ (rivejä vähemmän kuin sarakkeita), niin matriisi on sidottu.
(2) Jos $m = n$ (A on neliömatriisi), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:
(1) Jos $m < n$ (rivejä vähemmän kuin sarakkeita), niin matriisi on sidottu.
(2) Jos $m = n$ (A on neliömatriisi), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.
(3) Jos $m > n$ (rivejä enemmän kuin sarakeita), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A^T A) \neq 0$.

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:
(1) Jos $m < n$ (rivejä vähemmän kuin sarakkeita), niin matriisi on sidottu.
(2) Jos $m = n$ (A on neliömatriisi), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.
(3) Jos $m > n$ (rivejä enemmän kuin sarakeita), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A^T A) \neq 0$.
Perustelu

$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:
(1) Jos $m < n$ (rivejä vähemmän kuin sarakkeita), niin matriisi on sidottu.
(2) Jos $m = n$ (A on neliömatriisi), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.
(3) Jos $m > n$ (rivejä enemmän kuin sarakeita), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A^T A) \neq 0$.
Perustelu

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$$

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:
(1) Jos $m < n$ (rivejä vähemmän kuin sarakkeita), niin matriisi on sidottu.
(2) Jos $m = n$ (A on neliömatriisi), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.
(3) Jos $m > n$ (rivejä enemmän kuin sarakeita), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A^T A) \neq 0$.
Perustelu

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}^T A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$$

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:
(1) Jos $m < n$ (rivejä vähemmän kuin sarakkeita), niin matriisi on sidottu.
(2) Jos $m = n$ (A on neliömatriisi), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.
(3) Jos $m > n$ (rivejä enemmän kuin sarakeita), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A^T A) \neq 0$.
Perustelu

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}^T A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{(A\vec{x})^T A\vec{x}}_{=\|A\vec{x}\|^2} = \vec{0} \Rightarrow$$

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:
(1) Jos $m < n$ (rivejä vähemmän kuin sarakkeita), niin matriisi on sidottu.
(2) Jos $m = n$ (A on neliömatriisi), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.
(3) Jos $m > n$ (rivejä enemmän kuin sarakeita), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A^T A) \neq 0$.
Perustelu

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}^T A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{(A\vec{x})^T A\vec{x}}_{=\|A\vec{x}\|^2} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$$

Lause 4: $m \times n$ matriisin A vapaus vapaus voidaan tutkia seuraavasti:
(1) Jos $m < n$ (rivejä vähemmän kuin sarakkeita), niin matriisi on sidottu.
(2) Jos $m = n$ (A on neliömatriisi), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.
(3) Jos $m > n$ (rivejä enemmän kuin sarakeita), niin A on vapaa, jos ja vain jos $\det(A^T A) \neq 0$.
Perustelu

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}^T A^T A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{(A\vec{x})^T A\vec{x}}_{=\|A\vec{x}\|^2} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$$

Siis $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A^T A\vec{x} = \vec{0}$, eli A on sidottu, jos ja vain jos $A^T A$ on sidottu. Mutta $A^T A$ on neliömatriisi, jonka vapaus voidaan tutkia kohdan (2) mukaisesti.

Tarkastellaan yhtälöryhmää $A\vec{x} = \vec{b}$. Muodostetaan täydennetty (augmented) apumatriisi W siten, että yhtälöryhmän RHS lisätään viimeiseksi sarakkeeksi A:n sarakkeiden jälkeen.

Esimerkki

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 4x & + & y & = & 7 \\ x & + & 2y & = & 7 \\ -2x & + & 2y & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad W = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 7 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lause 5: Tarkastellaan yhtälöryhmää $A\vec{x} = \vec{b}$, jonka täydennetty (augmented) kerroinkaavio on W, niin

Lause 5: Tarkastellaan yhtälöryhmää $A\vec{x} = \vec{b}$, jonka täydennetty (augmented) kerroinkaavio on W, niin

(1) Jos A on vapaa, niin ryhmällä on enintään yksi ratkaisu.

Lause 5: Tarkastellaan yhtälöryhmää $A\vec{x} = \vec{b}$, jonka täydennetty (augmented) kerroinkaavio on W, niin

(1) Jos A on vapaa, niin ryhmällä on enintään yksi ratkaisu.

(2) Jos A on vapaa ja W on sidottu, niin ryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, joka saadaan kvadraattiselle ryhmälle kaavalla

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

ja ei-kvadraattiselle ryhmälle kaavalla

$$\vec{x} = A^{\dagger}\vec{b} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

Lause 5: Tarkastellaan yhtälöryhmää $A\vec{x} = \vec{b}$, jonka täydennetty (augmented) kerroinkaavio on W, niin

(1) Jos A on vapaa, niin ryhmällä on enintään yksi ratkaisu.

(2) Jos A on vapaa ja W on sidottu, niin ryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, joka saadaan kvadraattiselle ryhmälle kaavalla

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

ja ei-kvadraattiselle ryhmälle kaavalla

$$\vec{x} = A^{\dagger}\vec{b} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

(3) Jos A on vapaa ja W on vapaa, niin ryhmällä ei ole tarkkaa ratkaisua, mutta pienimmän neliösumman approksimaatio (PNS-ratkaisu) saadaan kaavalla

$$\vec{x} = A^{\dagger}\vec{b} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$