

## 4. Функции

### 4.1. Функции

**4.1-0** Даны координаты вершин двух треугольников. Написать программу, проверяющую, лежит ли один треугольник внутри другого. (Определить функцию для проверки, находится ли точка внутри треугольника.)

**4.1-1** Даны  $n$  натуральных чисел. Написать программу, находящую их общий делитель. (Определить функцию для расчёта наибольшего общего делителя двух чисел.)

**4.1-2** Даны три квадратных уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$bx^2 + ax + c = 0,$$

$$cx^2 + ax + b = 0,$$

где  $a, b, c \neq 0$ . Написать программу, определяющую, сколько из них имеют действительные корни. (Определить функцию, позволяющую распознавать наличие вещественных корней в квадратном уравнении.)

**4.1-3** Написать программу для вычисления биномиального коэффициента

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

для заданных  $n$  и  $k$ . (Определить функцию для вычисления факториала числа.)

**4.1-4** Два простых числа называются «близнецами», если модуль их разности равен 2 (например, 41 и 43 — «близнецы»). Написать программу, находящую все числа-близнецы, не превышающие 200. (Определить функцию для распознавания простых чисел.)

**4.1-5** Написать программу, находящую периметр треугольника по координатам его вершин. (Определить функцию для расчёта длины отрезка по координатам его концов.)

**4.1-6** Три прямые заданы в виде уравнений вида  $ax + by + c = 0$ . Написать программу, проверяющую, образуют ли они треугольник. (Определить функцию, проверяющую, пересекаются ли две прямые ровно в одной точке.)

**4.1-7** Три вектора на плоскости заданы своими координатами. Написать программу, находящую пару векторов, образующих наименьший угол. (Определить функцию, вычисляющую угол между векторами.)

**4.1-8** Написать программу, находящую все трёхзначные числа, у которых ровно  $k$  делителей. (Определить функцию, находящую количество делителей числа.)

**4.1-9** Написать программу, находящую корни системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными по заданным коэффициентам. (Определить функцию, вычисляющую определитель матрицы  $2 \times 2$ .)

## 4.2. Функции высшего порядка

**4.2-0** Определить функцию, вычисляющую значение выражения

$$\sum_{m=1}^n \left( f(m) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq m}}^n \frac{k}{k-m} \right)$$

для заданного натурального числа  $n$  и функции  $f$ . (Рассмотренное выражение — значение в нуле интерполяционного полинома Лагранжа.) Написать программу, использующую эту функцию.

**4.2-1** Уравнение вида  $f(x) = x$  при  $|f'(x)| < 1$  может быть решено методом простых итераций. В этом методе рассматриваются последовательные приближения  $x_k$  к корню уравнения.  $x_0$  выбирается произвольно, а каждое следующее приближение вычисляется по формуле

$$x_{k+1} = f(x_k).$$

Вычисления продолжаются, пока  $|f(x_k) - x_k| \geq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некоторое малое число.

Определить функцию, решающую уравнение по заданным  $f$ ,  $x_0$  и  $\varepsilon$ . Написать программу, использующую эту функцию.

**4.2-2** Многие уравнения вида  $f(x) = 0$  можно решить методом хорд. Для этого выбираются два числа  $x_0$  и  $x_1$  — концы отрезка, содержащего корень. Затем выполняется последовательное приближение к корню:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}.$$

Вычисления продолжаются, пока  $|f(x_k)| \geq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некоторое малое число.

Определить функцию, решающую уравнение по заданным  $f$ ,  $x_0$ ,  $x_1$  и  $\varepsilon$ . Написать программу, использующую эту функцию.

**4.2-3** Определить функцию, вычисляющую минимум средних

$$\min_{\substack{1 \leq m \leq n, \\ m \in \mathbb{N}}} \left( \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(k) \right)$$

для заданного натурального числа  $n$  и функции  $f$ . Написать программу, использующую эту функцию.

**4.2-4** Определить функцию для приближённого вычисления значения определённого интеграла методом левых прямоугольников по формуле

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

для заданного натурального  $n$ , функции  $f$  и пределов интегрирования  $a$  и  $b$ . Написать программу, использующую эту функцию.

**4.2-5** Определить функцию для приближённого вычисления производной по формуле

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

для заданного малого числа  $h$ , точки  $x$  и функции  $f$ . Написать программу, использующую эту функцию.

**4.2-6** Правой свёрткой некоторого списка

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

с помощью функции  $f(x, y)$  называется выражение

$$f(a_0, f(a_1, f(\dots f(a_{n-1}, a_n)) \dots)).$$

Определить функцию, вычисляющую правую свёртку списка  $1, 2, 3, \dots, n$  для заданного натурального числа  $n > 2$  и функции  $f$ . Написать программу, использующую эту функцию.

**4.2-7** Определить функцию для приближённого вычисления значения определённого интеграла методом трапеций по формуле

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right)$$

для заданного натурального  $n$ , функции  $f$  и пределов интегрирования  $a$  и  $b$ . Написать программу, использующую эту функцию.

**4.2-8**левой свёрткой некоторого списка

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

с помощью функции  $f(x, y)$  называется выражение

$$f(\dots f(f(a_0, a_1), a_2) \dots, a_n).$$

Определить функцию, вычисляющую левую свёртку списка  $1, 2, 3, \dots, n$  для заданного натурального числа  $n > 2$  и функции  $f$ . Написать программу, использующую эту функцию.

**4.2-9** Определить функцию для приближённого вычисления значения определённого интеграла методом центральных прямоугольников по формуле

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right)$$

для заданного натурального  $n$ , функции  $f$  и пределов интегрирования  $a$  и  $b$ . Написать программу, использующую эту функцию.

### 4.3. Рекурсивные функции

**4.3-0** Определить рекурсивную функцию для вычисления количества цифр десятичной записи натурального числа. Написать программу, использующую эту функцию.

**4.3-1** Квадратный корень произвольного действительного числа  $a$  можно вычислить при помощи итерационного метода Герона. Начальное приближение  $x_0 = 1$ , Каждое следующее вычисляется по формуле

$$x_k = \frac{1}{2} \left( x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}} \right).$$

Итерации повторяются, пока  $|x_k^2 - a| \geq \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — некоторое малое число.

Определить рекурсивную функцию, находящую приближённое значение  $\sqrt{a}$  для заданных  $a$  и  $\varepsilon$ . Написать программу, использующую эту функцию.

**4.3-2** Определить рекурсивную функцию для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел при помощи алгоритма Евклида. Написать программу, использующую эту функцию.

**4.3-3** Линейный конгруэнтный метод генерации псевдослучайных чисел заключается в следующем. Выбирается произвольное число  $x_0$ , а каждое следующее вычисляется по формуле

$$x_k = (ax_{k-1} + b) \bmod m,$$

где коэффициенты выбраны особым образом. Например,

$$a = 1664525, b = 1013904223, m = 2^{32}.$$

Определить рекурсивную функцию, выводящую на экран  $n$  псевдослучайных чисел для заданного  $x_0$ .

**4.3-4** Определить рекурсивную функцию для вычисления функции Аккермана

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & \text{если } m = 0; \\ A(m - 1, 1), & \text{если } m > 0, n = 0; \\ A(m - 1, A(m, n - 1)), & \text{если } m > 0, n > 0. \end{cases}$$

Написать программу, использующую эту функцию.

**4.3-5** Последовательность Нарайаны определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_k &= a_{k-1} + a_{k-3}. \end{aligned}$$

Определить функцию, находящую  $k$ -й член последовательности. Написать программу, использующую эту функцию.

**4.3-6** Определить рекурсивную функцию для нахождения максимального из  $n$  чисел. Написать программу, использующую эту функцию.

**4.3-7** Определить рекурсивную функцию находящую количество единиц в двоичной записи заданного числа. Написать программу, использующую эту функцию.

**4.3-8** Определить рекурсивную функцию, которая находит максимальную цифру десятичной записи указанного числа. Написать программу, использующую эту функцию.

**4.3-9** Для биномиальных коэффициентов верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} C_n^k &= C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \\ C_n^0 &= 1, \\ C_n^n &= 1. \end{aligned}$$

Определить рекурсивную функцию для вычисления биномиальных коэффициентов. Написать программу, использующую эту функцию.