ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г.ШЕВЧЕНКО

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа и приложений

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические рекомендации по подготовке
к практико-ориентированному государственному экзамену

Бендеры, 2017

УДК 517(072.8)
ББК В161р30
М34

Составители:

С.А. Алещенко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и приложений Приднестровского государственного университета им. Т.Г. Шевченко

О.Ю. Баренгольц, главный специалист кафедры математического анализа и приложений Приднестровского государственного университета им. Т.Г. Шевченко

Г.И. Ворническу, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и приложений Приднестровского государственного университета им. Т.Г. Шевченко

Л.С. Николаева, старший преподаватель кафедры математического анализа и приложений Приднестровского государственного университета им. Т.Г. Шевченко

Рецензенты:

К.Д. Ляхомская, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и приложений

Г.Н. Ермакова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики

М34 Математический анализ и его приложения: Методические рекомендации по подготовке к практико-ориентированному государственному экзамену./ Составители: С.А. Алещенко, О.Ю. Баренгольц, Г.И. Ворническу, Л.С. Николаева. – Бендеры: РВТ, 2017. – 71 с.

В работе приведен теоретический материал и примеры решения практической части вопросов государственного экзамена по высшей математике для студентов физико-математического факультета ПГУ 2013 года набора. При составлении методических рекомендаций учтены требования Федерального Государственного образовательного стандарта высшего образования третьего поколения по направлениям 01.03.01 «Математика», 01.03.04 «Прикладная математика» и 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

УДК 517(072.8)
ББК В161р30

Рекомендовано к электронному изданию Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко.

Оглавление

Введение

В связи с внедрением новых федеральных государственных образовательных стандартов, предусматривающих две ступени высшего образования – бакалавриат и магистратуру, изменились требования к государственной аттестации выпускников первой ступени обучения. Наиболее значимыми изменениями являются требования практической направленности обучения и, как следствие, государственной аттестации.

Методические рекомендации по подготовке к практико-ориентированному государственному экзамену рассчитаны в первую очередь на студентов IV курса физико-математического факультета, обучающихся в бакалавриате по направлениям «Математика», «Прикладная математика» и «Прикладная математика и информатика».

Методические рекомендации содержат теоретические вопросы и практические задания по дисциплинам «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения» и «Комплексный анализ» (теория функций комплексного переменного), входящие в содержание экзаменационных билетов для государственного экзамена.

В методических рекомендациях рассмотрено пятнадцать вопросов, соответствующих программе практико-ориентированного государственного экзамена: восемь вопросов по математическому анализу, три вопроса по дифференциальным уравнениям и четыре вопроса по комплексному анализу. Методические рекомендации содержат ответы по каждому вопросу, включая теоретическую и практическую часть. Решение практических заданий опирается на сформулированные теоретические положения. В работе приведены упражнения для самостоятельного решения и ответы к ним.

Методические рекомендации могут быть полезными для студентов I-III курсов физико-математического факультета, а также для выпускников университета других специальностей, планирующих дальнейшее обучение в магистратуре по направлению «Математика».

1. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

1.1. Локальный экстремум функции одной переменной.

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале (a,b) и $x_0 \in (a,b)$.

Определение 1. Говорят, что функция f имеет в точке x_0 локальный максимум, если существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$. При этом, если $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, то говорят, что функция f имеет в точке x_0 строгий локальный максимум.

Определение 2. Говорят, что функция f имеет в точке x_0 локальный минимум, если существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнено неравенство $f(x) \ge f(x_0)$. Если для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ выполнено строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$, то говорят, что функция f имеет в точке x_0 строгий локальный минимум.

Определение 3. Если функция f имеет в точке x_0 локальный максимум или локальный минимум (строгий локальный максимум или строгий локальный минимум), то говорят, что функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум (строгий локальный экстремум).

Замечание. Если в каждой точке $x \in (a,b)$ имеет место неравенство $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$), то говорят, что функция f имеет в точке x_0 абсолютный максимум (абсолютный минимум) на интервале (a,b).

Теорема 1 (необходимое условие существования локального экстремума функции одной переменной). Пусть функция $f(x)$ задана на интервале (a,b), $x_0 \in (a,b)$, и выполнены условия:

1) функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум;
2) в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$.

Тогда $f'(x_0) = 0$.

Теорема 2 (первое достаточное условие существования локального экстремума функции одной переменной). Пусть функция $f(x)$ задана на интервале (a,b), $x_0 \in (a,b)$, и выполнены условия:

1) в каждой точке $x \in (a,b)$ существует производная $f'(x)$;
2) $f'(x_0) = 0$;
3) производная $f'(x)$ сохраняет знак слева и справа от точки x_0.

Тогда:

I. Если $f'(x) < 0$ слева от точки x_0, и $f'(x) > 0$ справа от точки x_0, то функция f имеет в точке x_0 строгий локальный минимум;

II. Если $f'(x) > 0$ слева от точки x_0, и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то функция f имеет в точке x_0 строгий локальный максимум;

III. Если слева и справа от точки x_0 производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак, то функция f не имеет в точке x_0 локальный экстремум.

Следствие. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, и ее производная $f'(x)$ сохраняет знак на каждом из интервалов (a, x_0) и (x_0, b), то тогда:

I. Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, x_0)$, и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (x_0, b)$, то функция f имеет в точке x_0 абсолютный минимум на интервале (a,b);

II. Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, x_0)$, и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0, b)$, то функция f имеет в точке x_0 абсолютный максимум на интервале (a,b).

Теорема 3 (второе достаточное условие существования локального экстремума функции одной переменной). Пусть функция $f(x)$ задана на интервале (a,b), $x_0 \in (a,b)$, и выполнены условия:

1) в каждой точке $x \in (a,b)$ существует производная $f'(x)$;
2) в точке x_0 существует вторая производная $f''(x_0)$;
3) $f''(x_0) \neq 0$.

Тогда:

I. Если $f''(x_0) > 0$, то функция f имеет в точке x_0 строгий локальный минимум;

II. Если $f''(x_0)<0$, то функция f имеет в точке x_0 строгий локальный максимум.

Во многих геометрических, физических и технических задачах требуется найти наибольшее или наименьшее значение некоторой величины, связанной функциональной зависимостью с другими величинами. Для постановки и решения соответствующей задачи на локальный экстремум функции одной переменной следует:

1) выделить величину, которая должна принимать наибольшее (наименьшее) значение, и величины, имеющие отношение к задаче;
2) выбрать независимую переменную;
3) выразить через независимую переменную все величины, имеющие отношение к задаче;
4) определить величину, которая должна принимать наибольшее (наименьшее) значение, как функцию выбранной независимой переменной;
5) исследовать на экстремум функцию одной переменной;
6) найти искомую величину.

Замечание. Если при постановке задачи на локальный экстремум функции одной переменной не удается выразить величину, которая должна принимать наибольшее (наименьшее) значение, как функцию одной выбранной независимой переменной, то задачу следует решать, как задачу на локальный экстремум функции нескольких переменных.

Пример. Прямоугольник ABCD лежит внутри четверти круга с центром в точке А радиуса 1. Какова наибольшая возможная площадь прямоугольника?

Решение.

Выберем систему координат так, чтобы центр окружности А был началом координат, и четверть круга с прямоугольником ABCD были расположены в координатной четверти $x>0$, $y>0$ (см. рис. 1).

Пусть точка D, расположенная на оси OX, имеет абсциссу x, где $x\in(0,1)$. Тогда точка C, расположенная на окружности, также имеет абсциссу x, а ординату точки C мы находим из уравнения единичной окружности $x^2+y^2=1$, и получаем $C\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$.

Тогда площадь прямоугольника ABCD равна:

$$S_{ABCD} = AD \cdot CD = x \cdot \sqrt{1-x^2}\ .$$

Исследуем на локальный экстремум функцию

$$S(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}\ .$$

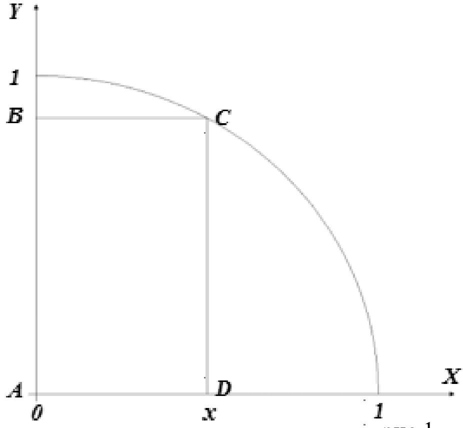


рис.1

Находим производную функции $S(x)$:

$$S'(x) = (x)' \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)' =$$

$$= \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) =$$

$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Находим критические точки функции $S(x)$ на интервале $(0,1)$:

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Запишем производную $S'(x)$ в виде

$$S'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

и определим знак производной $S'(x)$ слева и справа от точки $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$S'(x) > 0$ для всех $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $S'(x) < 0$ для всех $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

Таким образом, выполнены следующие условия:

1) в каждой точке $x \in (0,1)$ существует производная $S'(x)$;

2) $S'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$;

3) $S'(x) > 0$ для всех $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $S'(x) < 0$ для всех $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

Значит, согласно следствию из теоремы 2 функция $S(x)$ имеет в точке $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ абсолютный максимум на интервале $(0,1)$.

Найдем значение функции $S(x)$ при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$S_{ABCD} \to S_{\max} = S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: наибольшая возможная площадь прямоугольника ABCD равна $\frac{1}{2}$.

Упражнение 1.1.

1. Определите, при каком действительном значении a сумма квадратов корней уравнения $2x^2+2ax+3a^2-2a=0$ принимает наибольшее значение, и найдите это наибольшее значение.

Ответ: $a=\frac{1}{2}$; наибольшее значение суммы квадратов корней уравнения равно $\frac{1}{2}$.

2. В прямоугольной системе координат дана точка $P(1,2)$. Провести через эту точку прямую линию так, чтобы она образовывала вместе с положительными полуосями координат треугольник наименьшей площади.

Ответ: $y=-2x+4$.

3. Найти конус наименьшего объема, описанный около шара радиуса R.

Ответ: радиус конуса $r=R\sqrt{2}$; высота конуса $h=4R$.

1.2. Полное исследование функций и построение графиков.

Для построения графиков можно проводить полное исследование функций по следующей схеме:

1. Область определения функции.
2. Специальные свойства функции (четность, нечетность, периодичность).
3. Исследование функции на непрерывность, точки разрыва.

4. Пересечение графика с осями координат; интервалы знакопостоянства функции.
5. Исследование функции на монотонность, экстремум, гладкость.
6. Исследование функции на выпуклость и точки перегиба.
7. Асимптоты и асимптотические линии.

При исследовании функции на экстремум следует использовать теоретический материал, рассмотренный в разделе I. Рассмотрим основные определения и теоремы, имеющие непосредственное отношение к данному исследованию.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей на интервале $(a;b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a;b)$ таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется убывающей на интервале $(a;b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a;b)$ таких, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Теорема 1 (достаточное условие монотонности функции). Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(a;b)$, и в каждой точке $x \in (a;b)$ имеет производную $f'(x)$. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ для любого $x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$;
2) если $f'(x) < 0$ для любого $x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ убывает на интервале $(a;b)$.

Определение 3. Говорят, что график функции $y = f(x)$ обращен выпуклостью вниз в точке $x_0 \in (a;b)$, если в некоторой окрестности точки x_0 график функции $y = f(x)$ лежит не ниже касательной, проведенной к нему в точке с абсциссой x_0.

Определение 4. Говорят, что график функции $y = f(x)$ обращен выпуклостью вверх в точке $x_0 \in (a;b)$, если в некоторой окрестности точки x_0 график функции $y = f(x)$ лежит не выше касательной, проведенной к нему в точке с абсциссой x_0.

Теорема 2 (достаточное условие выпуклости функции). Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(a;b)$, и в каждой точке $x \in (a;b)$ имеет вторую производную $f''(x)$. Тогда:

1) если $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a;b)$, то график функции $y = f(x)$ обращен выпуклостью вниз на интервале $(a;b)$;
2) если $f''(x) < 0$ для любого $x \in (a;b)$, то график функции $y = f(x)$ обращен выпуклостью вверх на интервале $(a;b)$.

Определение 5. Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$. Если слева и справа от точки x_0 график функции $y = f(x)$ имеет разные направления выпуклости, то точку x_0 называют точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Определение 6. Если в точке a функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Определение 7. Если прямая $y = kx + b$ такова, что

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - (kx + b) \right) = 0,$$

то прямую $y = kx + b$ называют наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Замечание. Если $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (k_1 x + b_1) \right) = 0$, то прямую $y = k_1 x + b_1$ называют правой наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$; если $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (k_2 x + b_2) \right) = 0$, то прямую $y = k_2 x + b_2$ называют левой наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Теорема 3 (достаточные условия существования наклонной асимптоты). Пусть выполнены следующие условия:

1) существует конечный предел $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$;

2) существует конечный предел $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Тогда прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Определение 8. Если кривая $y=\varphi(x)$ такова, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=0,$$

то кривую $y=\varphi(x)$ называют асимптотической линией графика функции $y=f(x)$.

Пример. Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.

1) Область определения функции

$$D(y)=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right).$$

2) Функция является нечетной, так как $y(-x)=-y(x)$ для любого $x\in D(y)$.

3) Функция непрерывна на своей области определения; точки $x=\pm\sqrt{3}$ являются точками разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty;\quad \lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty.$$

4) График функции пересекает ось OX и ось OY в точке $O(0;0)$; $y(x)>0$ для всех $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(0;\sqrt{3}\right)$, $y(x)<0$ для всех $x\in\left(-\sqrt{3};0\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

5) Найдем производную функции.

$$y'=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'\cdot\left(3-x^2\right)-\left(3-x^2\right)'\cdot x^3}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{3x^2\cdot\left(3-x^2\right)+2x\cdot x^3}{\left(3-x^2\right)^2}=$$

$$= \frac{9x^2 - 3x^4 + 2x^4}{\left(3 - x^2\right)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{\left(3 - x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(9 - x^2\right)}{\left(3 - x^2\right)^2} = -\frac{x^2\left(x + 3\right)\left(x - 3\right)}{\left(3 - x^2\right)^2}.$$

Функция имеет производную $y'(x)$ в каждой точке $x \in D(y)$, и при этом $y'(x)$ является непрерывной функцией на $x \in D(y)$. Производная $y'(x)$ обращается в нуль в точках $x = 0$, $x = 3$ и $x = -3$. Кроме того, $y'(x) < 0$ для всех $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ и $y'(x) > 0$ для всех $x \in \left(-3; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 3\right)$.

Таким образом, функция убывает на интервале $(-\infty; -3)$, функция возрастает на интервале $\left(-3; -\sqrt{3}\right)$, функция возрастает на интервале $\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$, функция возрастает на интервале $\left(\sqrt{3}; 3\right)$, функция убывает на интервале $(3; +\infty)$. Точка $x = -3$ является точкой локального минимума функции, $y_{\min} = 4{,}5$; точка $x = 3$ является точкой локального максимума функции, $y_{\max} = -4{,}5$; точка $x = 0$ не является точкой локального экстремума функции.

6) Найдем вторую производную функции.

$$y'' = \left(\frac{9x^2 - x^4}{\left(3 - x^2\right)^2}\right)' = \frac{\left(9x^2 - x^4\right)' \cdot \left(3 - x^2\right)^2 - \left(\left(3 - x^2\right)^2\right)' \cdot \left(9x^2 - x^4\right)}{\left(3 - x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(18x - 4x^3\right) \cdot \left(3 - x^2\right)^2 + 2\left(3 - x^2\right) \cdot 2x \cdot \left(9x^2 - x^4\right)}{\left(3 - x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(18x - 4x^3\right) \cdot \left(3 - x^2\right) + 4x \cdot \left(9x^2 - x^4\right)}{\left(3 - x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{48x - 12x^3 - 18x^3 + 4x^5 + 36x^3 - 4x^5}{\left(3 - x^2\right)^3} = \frac{48x + 6x^3}{\left(3 - x^2\right)^3} = \frac{6x\left(x^2 + 8\right)}{\left(3 - x^2\right)^3}.$$

Вторая производная $y''(x)$ обращается в нуль в точке $x = 0$; при этом $y''(x) < 0$ для всех $x \in \left(-\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ и $y''(x) > 0$ для всех $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(0; \sqrt{3}\right)$.

Таким образом, функция выпукла вниз на интервале $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, функция выпукла вверх на интервале $\left(-\sqrt{3};0\right)$, функция выпукла вниз на интервале $\left(0;\sqrt{3}\right)$, функция выпукла вверх на интервале $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. Точка $(0;0)$ является точкой перегиба графика функции.

7) График функции имеет две вертикальные асимптоты: $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$. Найдем наклонную асимптоту графика функции.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=-1;\ b=\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0.$$

Следовательно, $y=-x$ – наклонная асимптота графика функции.

На основании проведенного исследования строим график функции.

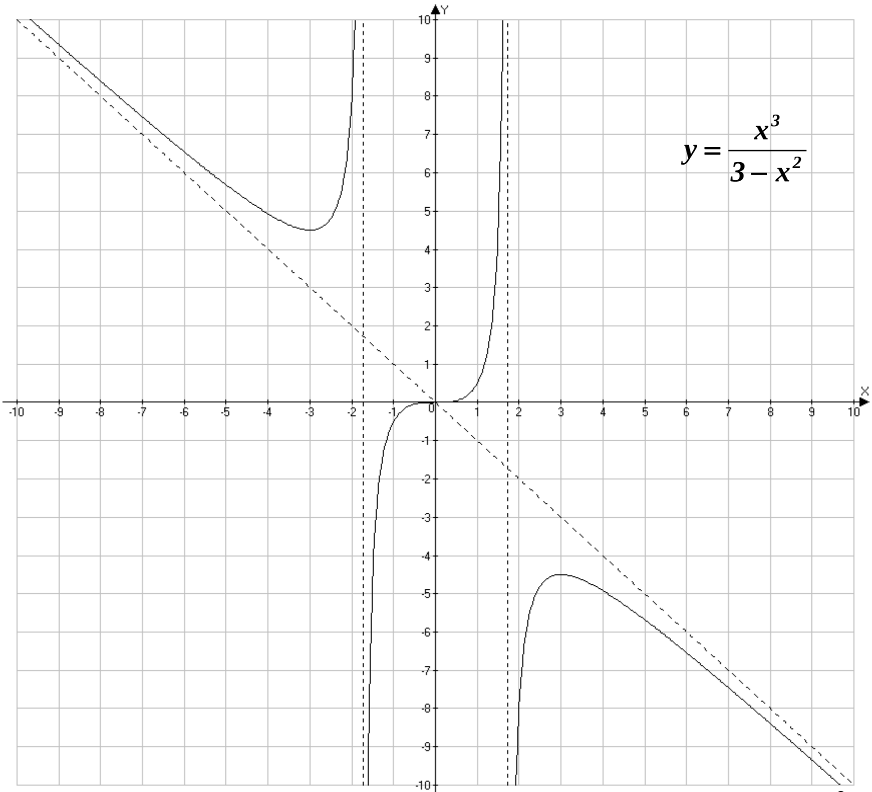


рис.2

Упражнение 1.2.

1. Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{\left(x^2-5\right)^3}{125}$.

Ответ: определена везде; график симметричен относительно оси ординат. $y_{\min}=-1$ при $x=0$. Точки перегиба графика $\left(\pm 1;-64/125\right)$, $\left(\pm\sqrt{5},0\right)$. Асимптот нет.

2. Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{x^3}{2\left(x+1\right)^2}$;

Ответ: определена везде, кроме $x=-1$; $y_{\max}=-3\dfrac{3}{8}$ при $x=-3$. Точка перегиба графика $\left(0;0\right)$. Асимптоты $x=-1$ и $y=\dfrac{1}{2}x-1$.

3. Провести полное исследование и построить график функции $y=\sqrt{x}\ln x$.

Ответ: определена при $x>0$; $\lim\limits_{x\to 0+}y(x)=0$; $\lim\limits_{x\to 0+}y'(x)=-\infty$. $y_{\min}=-\dfrac{2}{e}$ при $x=\dfrac{1}{e^2}$. Точка перегиба графика $\left(1;0\right)$. Асимптот нет.

1.3. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла.

Пусть на отрезке $\left[a,b\right]$ задана ограниченная функция $f\left(x\right)$. Разобьем отрезок $\left[a,b\right]$ произвольным образом на n частей точками

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,x_{n-1},x_n=b.$$

Длина отрезка разбиения $\left[x_{k-1},x_k\right]$ равна

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}.$$

Обозначим разбиение отрезка $\left[a,b\right]$ через $\lambda\left(\left[a,b\right]\right)$, т.е.

$$\lambda\left(\left[a,b\right]\right)=\left\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\right\}.$$

Диаметром разбиения $\lambda([a,b])$ мы будем называть наибольшую среди длин отрезков разбиения, и обозначать $|\lambda|$, т.е.

$$|\lambda| = \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} \Delta x_k .$$

На каждом из отрезков разбиения выбираем произвольным образом точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, и составляем следующую сумму:

$$S\left(f(x), \lambda([a,b]), \{\xi_k, 1 \le k \le n\}\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Эту сумму называют интегральной суммой, составленной для функции $f(x)$, разбиения $\lambda([a,b])$ и набора точек $\{\xi_k, 1 \le k \le n\}$.

Определение 1. Если существует конечный предел интегральных сумм

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S\left(f(x), \lambda([a,b]), \{\xi_k, 1 \le k \le n\}\right),$$

и этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$, ни от выбора промежуточных точек $\{\xi_k, 1 \le k \le n\}$, то тогда функцию $f(x)$ называют интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$, а предел интегральных сумм называют интегралом Римана или определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$, и обозначают символом $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\lambda|\to 0} S\left(f(x), \lambda([a,b]), \{\xi_k, 1 \le k \le n\}\right).$$

Теорема 1 (достаточное условие интегрируемости функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то тогда функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$.

Теорема 2 (основная формула интегрального исчисления). Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и имеет первообразную $F(x)$ на отрезке $[a,b]$, то тогда имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Рассмотрим понятие квадрируемой фигуры на плоскости. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – некоторое ограниченное множество. Будем вписывать в D и описывать около D всевозможные многоугольники. Обозначим через G_* – вписанный многоугольник, через G^* – описанный многоугольник.

Определение 2. Внутренней площадью фигуры D называют

$$S_*(D) = \sup_{G_* \subset D} S(G_*).$$

Определение 3. Внешней площадью фигуры D называют

$$S^*(D) = \inf_{G^* \supset D} S(G^*).$$

Определение 4. Если $S_*(D) = S^*(D)$, то плоская фигура D называется квадрируемой, и площадью фигуры D называют

$$S(D) = S_*(D) = S^*(D).$$

Теорема 3 (о площади криволинейной трапеции). Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяет условиям:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$,

2) $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a,b]$,

то тогда криволинейная трапеция

$$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

является квадрируемой фигурой на плоскости, площадь которой равна

$$S(D) = \int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 4 (о площади плоской фигуры). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют условиям:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$,

2) $f(x) \leq g(x)$ для любого $x \in [a,b]$,

то тогда плоская фигура

$$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

является квадрируемой, и ее площадь равна

$$S(D)=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx .$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-3x}$, $y=0$. Сделать чертеж.

Решение.

Кривые $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{4-3x}$ пересекаются в точке $(1;1)$. Проведем через эту точку вертикальную прямую и разобьем плоскую фигуру D на две части: D_1 и D_2 (см. рис. 3). D_1 и D_2 – криволинейные трапеции, заданные неравенствами

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sqrt{x}\right\},\ D_2=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le \frac{4}{3},\ 0\le y\le \sqrt{4-3x}\right\}.$$

Так как функция $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, то по теореме 3 криволинейная трапеция D_1 является квадрируемой фигурой, и ее площадь равна

$$S(D_1)=\int_0^1 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{2}{3} .$$

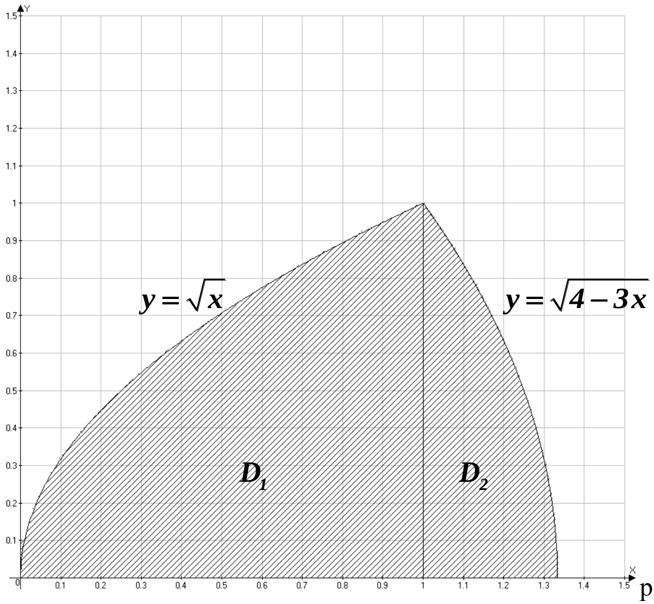


рис. 3

Функция $g(x)=\sqrt{4-3x}$ непрерывна на отрезке $\left[1;\frac{4}{3}\right]$. Значит, по теореме 3 плоская фигура D_2 также является квадрируемой, и ее площадь равна

$$S(D_2)=\int_1^{4/3}\sqrt{4-3x}dx=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(4-3x)\sqrt{4-3x}\Big|_1^{4/3}=\frac{2}{9}.$$

Из квадрируемости фигур D_1 и D_2 следует квадрируемость плоской фигуры D. Площадь фигуры D находим по свойству аддитивности площади

$$S(D)=S(D_1)+S(D_2)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}.$$

Ответ: $S(D)=\frac{8}{9}$.

Упражнение 1.3.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{16}{x^2}$, $y=17-x^2$ ($x>0$).Сделать чертеж.

Ответ: $S=18$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+4x-3$, касательными к ней в точках с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=3$. Сделать чертеж.

Ответ: $S=2,25$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $5x+3y-25=0$, $x=0$, $y=0$. Сделать чертеж.

Ответ: $S=12\frac{1}{6}$.

1.4. Локальный экстремум функции нескольких переменных.

Пусть функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ задана в области $G\subset\mathbb{R}^n$, и $x^*=\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\right)\in G$.

Определение 1. Говорят, что функция f имеет в точке x^* локальный максимум, если существует такое число $\delta>0$, что для всех $x\in G$ таких, что

$\rho\left(x, x^*\right) < \delta$, выполнено неравенство $f(x) \le f\left(x^*\right)$. При этом, если $f(x) < f\left(x^*\right)$ для всех $x \in G$ таких, что $0 < \rho\left(x, x^*\right) < \delta$, то говорят, что функция f имеет в точке x^* строгий локальный максимум.

Определение 2. Говорят, что функция f имеет в точке x^* локальный минимум, если существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in G$ таких, что $\rho\left(x, x^*\right) < \delta$, выполнено неравенство $f(x) \ge f\left(x^*\right)$. При этом, если $f(x) > f\left(x^*\right)$ для всех $x \in G$ таких, что $0 < \rho\left(x, x^*\right) < \delta$, то говорят, что функция f имеет в точке x^* строгий локальный максимум.

Определение 3. Если функция f имеет в точке x^* локальный максимум или локальный минимум (строгий локальный максимум или строгий локальный минимум), то говорят, что функция f имеет в точке x^* локальный экстремум (строгий локальный экстремум).

Замечание. Если в каждой точке $x \in G$ имеет место неравенство функция $f(x) \le f\left(x^*\right)$ ($f(x) \ge f\left(x^*\right)$), то говорят, что функция f имеет в точке x^* абсолютный максимум (абсолютный минимум) в области G.

Теорема 1 (необходимое условие существования локального экстремума функции нескольких переменных). Пусть функция $f(x)$ задана в области G, $x^* \in G$, и выполнены условия:

1) функция f имеет в точке x^* локальный экстремум;
2) функция f дифференцируема в точке x^*.

Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\left(x^*\right) = 0$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2 (достаточное условие существования локального экстремума функции нескольких переменных). Пусть функция $f(x)$ задана в области G, $x^* \in G$, и выполнены условия:

1) функция f дифференцируема в каждой точке $x \in G$;
2) функция f дважды дифференцируема в точке x^*;
3) $\det D \ne 0$, где $D = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x^*\right)\right)_{i,j=1}^{n}$.

Тогда:

I. Если матрица D положительно определена, то функция f имеет в точке x^* строгий локальный минимум;

II. Если матрица D отрицательно определена, то функция f имеет в точке x^* строгий локальный максимум;

III. Если матрица D не знакоопределена, то функция f не имеет в точке x^* локальный экстремум.

Теорема 3 (критерий Сильвестра знакоопределенности матрицы). Пусть $D = \left(d_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ – невырожденная симметричная действительная квадратная матрица; D_1, D_2, …, D_n – ее главные миноры, где $D_k = \det\left(d_{ij}\right)_{i,j=1}^{k}$. Тогда:

1) Матрица D является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы D положительны:
$$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ D_3 > 0,\ \ldots,\ D_n > 0;$$

2) Матрица D является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда первый главный минор отрицателен, и остальные главные миноры являются знакочередующимися:
$$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0,\ \ldots,\ \left(-1\right)^n D_n > 0.$$

Пример. Исследовать на локальный экстремум функцию $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Решение.

Найдем частные производные первого порядка функции $u\left(x, y, z\right)$:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{4x^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z}.$$

Приравняем частные производные к нулю, и найдем в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ точки, подозрительные на экстремум.

$$\begin{cases} 1-\dfrac{y^2}{4x^2}=0 \\ \dfrac{y}{2x}-\dfrac{z^2}{y^2}=0 \\ \dfrac{2z}{y}-\dfrac{2}{z^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{y^2}{4} \\ y^3=2xz^2 \\ y=z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4}z^{14}=\dfrac{z^6}{4} \\ z^7=2x \\ y=z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^8=1 \\ x=\dfrac{z^7}{2} \\ y=z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

Получили точку $M\left(\frac{1}{2};1;1\right)$.

Найдем частные производные второго порядка функции $u(x,y,z)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2}{2x^3}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{2x^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-\frac{2z}{y^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3}.$$

Определим значения частных производных второго порядка в точке M:

$$d_{11}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M)=\frac{1^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}=4, \qquad d_{12}=d_{21}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(M)=-\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-2,$$

$$d_{13}=d_{31}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}(M)=0, \qquad d_{22}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M)=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}+\frac{2\cdot 1^2}{1^3}=3,$$

$$d_{23}=d_{32}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(M)=-\frac{2\cdot 1}{1^2}=-2, \qquad d_{33}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M)=\frac{2}{1}+\frac{4}{1^3}=6.$$

Составим матрицу из чисел d_{ij}, $i,j=1,2,3$:

$$D=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значения главных миноров матрицы D:

$$D_1=4,$$

$$D_2=\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=8,$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 32 .$$

Так как $D_1 = 4 > 0$, $D_2 = 8 > 0$, $D_3 = 32 > 0$, то матрица D положительно определена по критерию Сильвестра. Значит, по теореме 2 функция $u(x, y, z)$ имеет локальный экстремум в точке $M\left(\frac{1}{2};1;1\right)$, и минимальное значение функции равно

$$u_{\min} = u(M) = \frac{1}{2} + \frac{1^2}{4\cdot\frac{1}{2}} + \frac{1^2}{1} + \frac{2}{1} = 4 .$$

Ответ: точка $M\left(\frac{1}{2};1;1\right)$ является точкой локального минимума функции; $u_{\min} = 4$.

Упражнение 1.4.

1. Исследовать на локальный экстремум функцию $u = xy^2z(1 - x - 2y - z)$ в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Ответ: точка $M\left(\frac{1}{5};\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$ является точкой локального максимума функции; $u_{\max} = \frac{1}{3125}$.

2. Исследовать на локальный экстремум функцию $u = \dfrac{2x + 3y - 9}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

Ответ: точка $M\left(-\frac{2}{9};-\frac{1}{3}\right)$ является точкой локального минимума функции; $u_{\min} = -\sqrt{94}$.

3. Исследовать на локальный экстремум функцию $u = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ в области $x > 0$, $y > 0$.

Ответ: точка $M(5;2)$ является точкой локального минимума функции; $u_{\min} = 30$.

1.5. Интегрирование иррациональных функций.

Рассмотрим основные виды иррациональных функций, которые можно проинтегрировать с помощью замены переменной.

А. Простейшие иррациональности.

Будем обозначать $R(x, y, z, u, \ldots, w)$ произвольную рациональную функцию нескольких переменных.

1. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx,$$

где $m_j \in \mathbb{Z}$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Для вычисления интеграла делаем замену переменной

$$x = t^q ,$$

где

$$q = НОК\left\{ n_j \middle| 1 \le j \le k \right\}.$$

2. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx ,$$

где $m_j \in \mathbb{Z}$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Для вычисления интеграла делаем замену переменной

$$ax + b = t^q ,$$

где

$$q = НОК\left\{ n_j \middle| 1 \le j \le k \right\}.$$

3. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

где $m_j \in \mathbb{Z}$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,2,\ldots,k$, $ad - bc \neq 0$. Для вычисления интеграла делаем замену переменной

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q,$$

где

$$q = HOK\left\{n_j \middle| 1 \le j \le k\right\}.$$

В. *Дифференциальный бином.*

Дифференциальным биномом называют выражение вида $x^m\left(ax^n + b\right)^p dx$. Рассмотрим методы вычисления интегралов вида

$$\int x^m\left(ax^n + b\right)^p dx.$$

1. Если p – целое число, то делают замену

$$x = t^q,$$

где

$$q = HOK\left\{q_m, q_n\right\},$$

$$m = \frac{p_m}{q_m},\ m = \frac{p_n}{q_n},\ p_m, p_n \in \mathbb{Z},\ q_m, q_n \in \mathbb{N}.$$

2. Если $p \notin \mathbb{Z}$, а $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то делают замену

$$ax^n + b = t^q,$$

где q – знаменатель числа p.

3. Если $p \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$ а $p + \frac{m+1}{n}$ – целое число, то делают замену

$$\frac{ax^n + b}{x^n} = t^q,$$

где q – знаменатель числа p.

C. Тригонометрические подстановки для некоторых квадратичных иррациональностей.

1. Для вычисления интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$$

делают замену

$$x = a \cdot \sin t \ .$$

2. Для вычисления интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$$

делают замену

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t \, .$$

3. Для вычисления интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$$

делают замену

$$x = \frac{a}{\cos t} \ .$$

D. Подстановки Эйлера для квадратичных иррациональностей.

Рассмотрим методы вычисления интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx \ .$$

1. Первая подстановка Эйлера.

Если $a > 0$, то делают замену

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a} \cdot x \pm t \ .$$

2. Вторая подстановка Эйлера.

Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то делают замену

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t\left(x - x_1\right),$$

где x_1 – один из корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

3. Третья подстановка Эйлера.

Если $c > 0$, то делают замену

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\cdot x\pm\sqrt{c}\,.$$

Пример. С помощью замены переменной вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Решение.

Подинтегральное выражение является дифференциальным биномом, поскольку его можно записать в виде

$$x^0\left(x^3+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx\,.$$

Определим числа p, m и n:

$$p=-\frac{1}{3},\ m=0,\ n=3\,.$$

Заметим, что $p=-\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$ а $p+\frac{m+1}{n}=0$ – целое число. Значит, нужно сделать замену

$$\frac{x^3+1}{x^3}=t^3\,.$$

Применяя эту замену, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=\left|\begin{array}{ll}\dfrac{x^3+1}{x^3}=t^3 & dx=-\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot t^2dt\\ x^3=\dfrac{1}{t^3-1} & \sqrt[3]{1+x^3}=\dfrac{t}{\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}}}\\ x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}} & t=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}}}{t}\cdot\left(-t^2\right)\cdot\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}dt=-\int\frac{t}{t^3-1}dt\,.$$

Разложим правильную дробь $\frac{t}{t^3-1}$ на сумму простых дробей по методу неопределенных коэффициентов:

$$\frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1},$$

$$\frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{A(t^2+t+1)+Bt(t-1)+C(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)},$$

$$A(t^2+t+1)+Bt(t-1)+C(t-1)=t,$$

$$(A+B)t^2+(A-B+C)t+(A-C)=t.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, мы получим систему уравнений относительно неизвестных A, B и C:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=1, \\ A-C=0. \end{cases}$$

Решая систему, получим $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$. Подставим коэффициенты в разложение и продолжим вычисление интеграла.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=-\int\frac{t}{t^3-1}dt=-\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}{t^2+t+1}\right)dt=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{3}\int\frac{(t-1)\,dt}{t^2+t+1}=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(t-1)}{t-1}+\frac{1}{6}\int\frac{(2t-2)\,dt}{t^2+t+1}=-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\int\frac{(2t+1-3)\,dt}{t^2+t+1}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|t-1|++\frac{1}{6}\int\frac{(2t+1)\,dt}{t^2+t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+t+1}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2\cdot t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\right)^2+\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+1}{\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}-1\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}+C\,.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=\frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}+C$.

Упражнение 1.5.

1. С помощью замены переменной вычислить неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$.

Ответ: $\displaystyle\frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$.

2. С помощью замены переменной вычислить неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$.

Ответ: $\displaystyle 6\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+2\ln\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3}}+C$.

3. С помощью замены переменной вычислить неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Ответ: $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

1.6. Интегрирование по частям.

Формула интегрирования по частям основана на формуле для дифференциала от произведения двух функций. Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции на интервале $(a;b)$, то тогда их произведение $u(x)\cdot v(x)$ также является дифференцируемой функцией на интервале $(a;b)$, и дифференциал функции $u(x)\cdot v(x)$ удовлетворяет равенству

$$d(u\cdot v) = vdu + udv,$$

откуда получаем

$$udv = d(uv) - vdu.$$

И если функция $v(x)\cdot u'(x)$ имеет первообразную на интервале $(a;b)$, то тогда функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную интервале $(a;b)$, и интегрируя последнее равенство, мы получим

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

т.е.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Для применения формулы интегрирования по частям используется следующий принцип: за функцию $u(x)$ всегда следует брать ту функцию, которая может исчезнуть после нескольких применений формулы, либо ее производная гораздо проще самой функции; за dv следует брать такое выражение, интеграл от которого можно выразить через элементарные функции.

Рассмотрим основные виды неопределенных интегралов, к которым можно применить интегрирование по частям.

А. Интегралы вида $\int P_n(x)T(x)dx$.

Пусть $P_n(x)$ – многочлен степени n, $T(x)$ – одна из следующих функций:

1) $T(x) = e^{kx}$;

2) $T(x) = \cos(kx+b)$;

3) $T(x) = \sin(kx+b)$;

4) $T(x)=\operatorname{ch}(kx+b)$;

5) $T(x)=\operatorname{sh}(kx+b)$.

Тогда для применения формулы интегрирования по частям берем

$$u=P_n(x); \qquad dv=T(x)dx.$$

В этом случае следует применять формулу интегрирования по частям n раз в соответствии со степенью многочлена $P_n(x)$.

B. Интегралы вида $\int A(x)T(x)dx$.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – некоторые алгебраические функции переменной x, $T(x)$ – одна из следующих функций:

1) $T(x)=\ln^k(B(x))$;

2) $T(x)=\arcsin^k(B(x))$;

3) $T(x)=\arccos^k(B(x))$;

4) $T(x)=\operatorname{arctg}^k(B(x))$;

5) $T(x)=\operatorname{arcctg}^k(B(x))$.

Тогда для применения формулы интегрирования по частям берем

$$u=T(x); \qquad dv=A(x)dx.$$

В этом случае следует применять формулу интегрирования по частям k раз в соответствии со степенью трансцендентной функции $T(x)$.

Замечание. Под алгебраической функцией мы понимаем функцию, полученную в результате конечного применения основных алгебраических операций к функциям вида $\left\{x^m \middle| m\in\mathbb{Z}_0^+\right\}$: сложение, вычитание, умножение, деление, умножение на числа, возведение в целую степень, извлечение корня степени $n\in\mathbb{N}$.

C. Интегралы вида $\int e^{\alpha x}T(x)dx$.

Пусть $T(x)$ – одна из следующих функций:

1) $T(x)=\cos(kx+b)$;

2) $T(x)=\sin(kx+b)$;

3) $T(x)=\operatorname{ch}(kx+b)$;

4) $T(x)=\operatorname{sh}(kx+b)$.

Тогда для применения формулы интегрирования по частям берем

$$u=e^{\alpha x};\ dv=T(x)dx.$$

В этом случае формулу интегрирования по частям мы применяем 2 раза, и в результате получаем уравнение относительно искомого интеграла. Решаем уравнение, и находим интеграл.

Замечание 1. И на первом шаге, и на втором шаге следует брать одну и туже функцию $u=e^{\alpha x}$. В противном случае второе применение формулы интегрирования по частям аннулирует первое применение.

Замечание 2. Для вычисления интегралов вида $\int e^{\alpha x}T(x)dx$ можно поступить и по-другому, а именно взять

$$u=T(x);\qquad dv=e^{\alpha x}dx.$$

В этом случае нужно брать $dv=e^{\alpha x}dx$ и на первом шаге, и на втором.

Пример. Применяя интегрирование по частям, вычислить неопределенный интеграл $\int x\ln\left(1+x^2\right)dx$.

Решение.

Для вычисления интеграла возьмем

$$u=\ln\left(1+x^2\right);\quad dv=x\,dx.$$

Тогда

$$\int x\ln\left(1+x^2\right)dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln\left(1+x^2\right) & du=\dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ dv=x\,dx & v=\dfrac{1}{2}x^2 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(1+x^2\right)-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\int\frac{\left(x^3+x\right)-x}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-$$

$$-\int\frac{x\left(x^2+1\right)}{1+x^2}dx+\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\int xdx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C=$$

$$=\frac{x^2+1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{x^2}{2}+C.$$

Ответ: $\int x\ln\left(1+x^2\right)dx=\frac{x^2+1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{x^2}{2}+C$.

Упражнение 1.6.

1. Применяя интегрирование по частям, вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

Ответ: $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$.

2. Применяя интегрирование по частям, вычислить неопределенный интеграл $\int\sqrt{x}\ln^2 x\,dx$.

Ответ: $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C$.

3. Применяя интегрирование по частям, вычислить неопределенный интеграл $\int\operatorname{ch}3x\cos 5x\,dx$.

Ответ: $\frac{5}{17}\operatorname{ch}3x\sin 5x+\frac{3}{17}\operatorname{sh}3x\cos 5x+C$.

1.7. Восстановление функции двух переменных по заданному полному дифференциалу.

Восстановление функции двух переменных по заданному полному дифференциалу основано на следующей теореме о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Теорема (о независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования). Пусть $G\subset\mathbb{R}^2$ – односвязная область, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ –

непрерывно дифференцируемые функции в области G. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Для любых $A, B \in G$ криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

не зависит от кривой, соединяющей точки A и B.

2. Существует функция $\Phi(x,y)$, дважды непрерывно дифференцируемая в области G, такая, что

$$d\Phi = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

в каждой точке $(x,y) \in G$.

3. $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ для любых $(x,y) \in G$.

4. Для любой замкнутой кривой $\Gamma \subset G$ имеет место равенство

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Рассмотрим выражение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

такое, что $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – непрерывно дифференцируемые функции в области G, и удовлетворяют условию $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ для любых $(x,y) \in G$.

По теореме о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования существует функция $u(x,y)$, дважды непрерывно дифференцируемая в области G, такая, что

$$du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Пусть $(x_0, y_0) \in G$ – фиксированная точка области G, $(x,y) \in G$ – переменная точка области G. Для того, чтобы восстановить функцию $u(x,y)$ по заданному полному дифференциалу, найдем криволинейный интеграл второго рода

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

По теореме о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования мы можем вычислить наш криволинейный интеграл по любой кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y), лежащей в области G. Соединяем точки (x_0, y_0) и (x, y) ломаной, звенья которой параллельны координатным осям (см. рис.4), и находим функцию $u(x, y)$, вычисляя соответствующий криволинейный интеграл

Пример. Проверить, что заданное выражение

$$du = \frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$ в $\mathbb{R}^2$, и найти эту функцию.

Решение.

Проверим, является ли выражение полным дифференциалом. Обозначим $P = \dfrac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$, $Q = \dfrac{e^y}{1+x^2}+1$, и найдем частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\right) = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(1-e^y\right) = -\frac{2xe^y}{\left(1+x^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right) = e^y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = e^y \cdot \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{2xe^y}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Мы видим, что

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

для любых $(x, y) \in R^2$. Следовательно, по теореме о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования заданное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$ в $\mathbb{R}^2$.

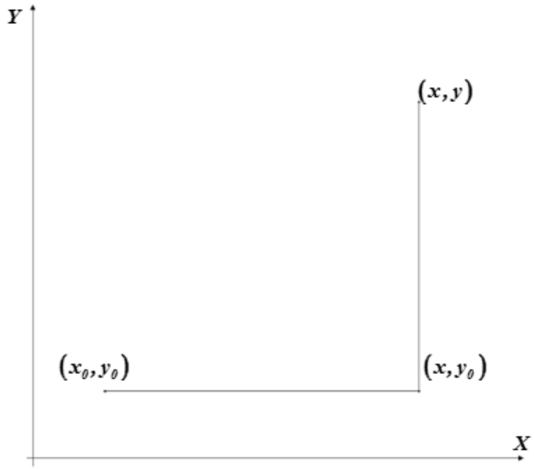


рис.4

Найдем функцию $u=u(x,y)$, вычисляя криволинейный интеграл второго рода

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

где интеграл будем брать по ломаной, соединяющей точки (x_0,y_0) и (x,y) (см. рис. 4).

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy=$$

$$=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} \frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy+\int\limits_{(x,y_0)}^{(x,y)} \frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy.$$

Так как первое звено ломаной параллельно оси OX, то по свойствам криволинейных интегралов

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} \left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy=0.$$

Второе звено ломаной параллельно оси OY. Следовательно,

$$\int\limits_{(x,y_0)}^{(x,y)} \frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx=0.$$

Поэтому

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} \frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\int\limits_{(x,y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x} \frac{2x\left(1-e^{y_0}\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy=\left(1-e^{y_0}\right)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{1+x^2}\int\limits_{y_0}^{y} e^y dy+\int\limits_{y_0}^{y} dy=\left(1-e^{y_0}\right)\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x_0}^{x}+\frac{1}{1+x^2}\cdot e^y\Bigg|_{y_0}^{y}+y-y_0=$$

$$=-\frac{1-e^{y_0}}{1+x^2}+\frac{1-e^{y_0}}{1+x_0^2}+\frac{e^y}{1+x^2}-\frac{e^{y_0}}{1+x^2}+y-y_0=$$

$$=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{e^{y_0}}{1+x^2}+\frac{1-e^{y_0}}{1+x_0^2}+\frac{e^{y}}{1+x^2}-\frac{e^{y_0}}{1+x^2}+y-y_0=$$

$$=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{e^{y}}{1+x^2}+y+\left(\frac{1-e^{y_0}}{1+x_0^2}-y_0\right).$$

Обозначая $C=\frac{1-e^{y_0}}{1+x_0^2}-y_0$, мы получим $u(x,y)=y+\frac{e^y-1}{1+x^2}+C$.

Ответ: $u(x,y)=y+\frac{e^y-1}{1+x^2}+C$, где $C\in\mathbb{R}$ – любое число.

Упражнение 1.7.

1. Проверить, что заданное выражение $du=\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u=u(x,y)$ в $\mathbb{R}^2$, и найти эту функцию.

Ответ: $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x+C$.

2. Проверить, что заданное выражение $du=\frac{(3y-x)dx+(y-3x)dy}{(x+y)^3}$ является полным дифференциалом некоторой функции $u=u(x,y)$ в области $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,y>-x\right\}$, и найти эту функцию.

Ответ: $u(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^2}+C$.

3. Проверить, что заданное выражение $du=\frac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$ является полным дифференциалом некоторой функции $u=u(x,y)$ в области $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,y>0\right\}$, и найти эту функцию.

Ответ: $u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-y}{2y\sqrt{2}}+C$.

1.8. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – замкнутая ограниченная квадрируемая плоская область, $f(x, y)$ – некоторая ограниченная функция, заданная в D. Разобьем область D произвольным образом на n частей так, чтобы:

1) $D = \bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k$;

2) $\overset{\circ}{D}_k \bigcap \overset{\circ}{D}_j = \varnothing$ для всех $k \neq j$;

3) D_k – замкнутая квадрируемая фигура для любого $k = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим

$$\lambda(D) = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$$

разбиение области D; диаметром разбиения $\lambda(D)$ называют

$$|\lambda| = \max_{1 \le k \le n} \operatorname{diam} D_k .$$

Площадь области D_k мы будем обозначать

$$\Delta S_k = S(D_k), \; k = 1, 2, \ldots, n .$$

В каждой области D_k выберем произвольным образом точку $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, и составим следующую сумму:

$$S\Big(f(x, y), \lambda(D), \big\{(\xi_k, \eta_k), 1 \le k \le n\big\}\Big) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k .$$

Эту сумму называют интегральной суммой, составленной для функции $f(x, y)$, разбиения $\lambda(D)$ и набора точек $\big\{(\xi_k, \eta_k), 1 \le k \le n\big\}$.

Определение 1. Если существует конечный предел интегральных сумм

$$\lim_{|\lambda| \to 0} S\Big(f(x, y), \lambda(D), \big\{(\xi_k, \eta_k), 1 \le k \le n\big\}\Big),$$

и этот предел не зависит ни от способа разбиения области D, ни от выбора промежуточных точек $\big\{(\xi_k, \eta_k), 1 \le k \le n\big\}$, то тогда функцию $f(x, y)$ называют интегрируемой по Риману в области D, а предел интегральных сумм называют двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D, и обозначают символом $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, т.е.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{|\lambda|\to 0} S\Big(f(x,y),\lambda(D),\big\{(\xi_k,\eta_k),1\le k\le n\big\}\Big).$$

Теорема 1 (достаточное условие существования двойного интеграла). Пусть $D\subset\mathbb{R}^2$ – замкнутая ограниченная квадрируемая плоская область. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то тогда функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману в области D.

Теорема 2 (формула замены переменных в двойном интеграле). Пусть $D\subset\mathbb{R}^2$ – замкнутая ограниченная квадрируемая плоская область, $f(x,y)$ – непрерывная функция в области D. Пусть задано отображение $\vec{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ такое, что:

1) $\vec{\psi}:\tilde{D}\to D$ – биекция, где $\tilde{D}\subset\mathbb{R}^2$ – замкнутая ограниченная квадрируемая плоская область;

2) $x=\psi_1(u,v)$, $y=\psi_2(u,v)$, $(u,v)\in\tilde{D}$;

3) $\vec{\psi}\in C^1(\tilde{D})$;

4) $\vec{\psi}^{-1}\in C^1(D)$;

5) $J\ne 0$, где J – якобиан отображения $\vec{\psi}$, $J=\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, где

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

Тогда справедлива следующая формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{\tilde{D}} f\big(\psi_1(u,v),\psi_2(u,v)\big)\cdot|J|\,dudv.$$

Следствие. Пусть $D\subset\mathbb{R}^2$ – замкнутая ограниченная квадрируемая плоская область, $f(x,y)$ – непрерывная функция в области D. Если $\tilde{D}\subset\mathbb{R}^2$ – замкнутая ограниченная квадрируемая плоская область такая, что

$$\tilde{D} = \left\{ (r, \varphi) \middle| -\pi < \varphi \le \pi,\ r \ge 0,\ (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in D \right\},$$

то справедлива следующая формула

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, drd\varphi .$$

Пример. Переходя к полярной системе координат, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, если

$$D = \left\{ (x, y) \middle| \left(x^2 + y^2\right)^3 \le a^2\left(x^4 + y^4\right),\ x > 0,\ y > 0 \right\}.$$

Сделать чертеж области D.

Решение.

Уравнение кривой $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2\left(x^4 + y^4\right)$ в полярной системе координат примет вид:

$$\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^3 = a^2\left(r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi\right),$$

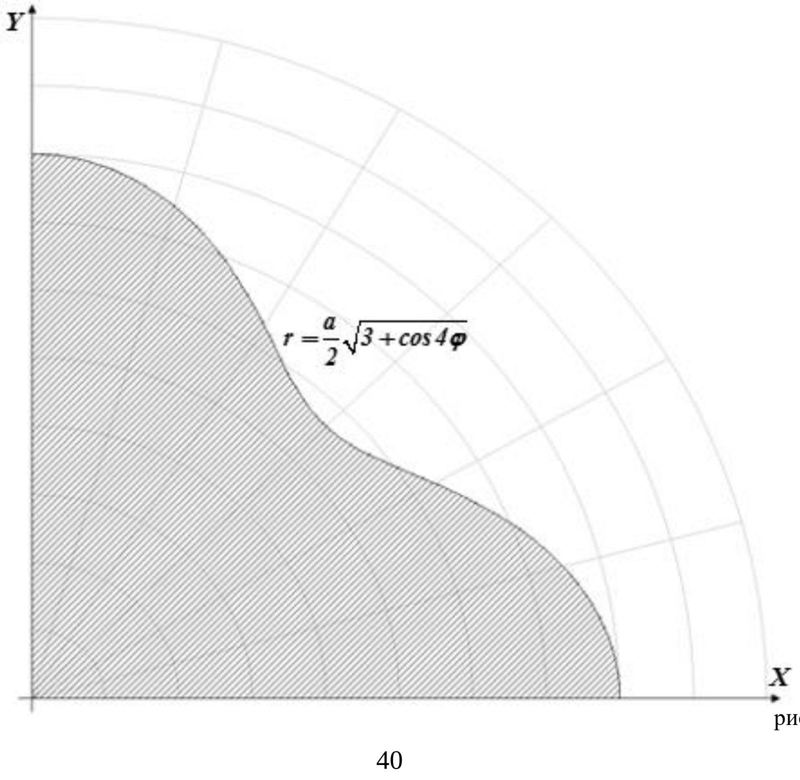


рис.5

$$r^6 = a^2 r^4 \left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right),$$

$$r^2 = a^2 \left(\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi + 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right) - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right),$$

$$r^2 = a^2 \left(\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right),$$

$$r^2 = a^2 \left(1 - \frac{1}{4}\left(1 - \cos 4\varphi\right)\right),$$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{3 + \cos 4\varphi}\ .$$

Как мы видим из рисунка 5, область $\tilde{D}$ в полярной системе координат можно представить в виде

$$\tilde{D} = \left\{ (r,\varphi) \middle| 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le \frac{a}{2}\sqrt{3+\cos 4\varphi} \right\}.$$

Вычислим двойной интеграл.

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi & 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ y = r\sin\varphi & 0 \le r \le \dfrac{a}{2}\sqrt{3+\cos 4\varphi} \\ J = r & \end{vmatrix} =$$

$$= \iint_{\tilde{D}} \left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right) \cdot |J|\, dr d\varphi = \iint_{\tilde{D}} r^3 dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3+\cos 4\varphi}} r^3 dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3+\cos 4\varphi}} \right) d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{a^4}{16}\left(3 + \cos 4\varphi\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{64}\int_0^{\pi/2} \left(9 + 6\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi\right) d\varphi = \frac{a^4}{64}\left.\left(9\varphi + \frac{3}{2}\sin 4\varphi\right)\right|_0^{\pi/2} +$$

$$+ \frac{a^4}{128}\int_0^{\pi/2} \left(1 + \cos 8\varphi\right) d\varphi = \frac{a^4}{64}\cdot\frac{9\pi}{2} + \frac{a^4}{128}\left.\left(\varphi + \frac{1}{8}\sin 8\varphi\right)\right|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{9\pi a^4}{128} + \frac{a^4}{128}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{256}a^4\ .$$

Ответ: $\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \dfrac{19\pi}{256}a^4$.

Упражнение 1.8.

1. Переходя к полярной системе координат, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, если

$$D=\left\{(x,y)\middle| y\le x^2+y^2\le 2y\right\}.$$

Сделать чертеж области D.

Ответ: $\dfrac{45\pi}{32}$.

2. Переходя к полярной системе координат, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^2dxdy$, если

$$D=\left\{(x,y)\middle| 1/4\le x^2+y^2\le 4,\ x/\sqrt{3}\le y\le x\sqrt{3},\ x>0\right\}.$$

Сделать чертеж области D.

Ответ: $\dfrac{255\pi}{768}$.

3. Переходя к полярной системе координат, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D y\,dxdy$, если

$$D=\left\{(x,y)\middle| \left(x^2+y^2\right)^3\le 4a^2x^2y^2,\ x>0,\ y>0\right\}.$$

Сделать чертеж области D.

Ответ: $\dfrac{16}{105}a^3$.

2. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.

Определение 1. Уравнение вида

$$f_1(x)\,f_2(y)\,dx+\phi_1(x)\phi_2(y)\,dy=0\,, \qquad (1)$$

в котором коэффициенты при dx и dy являются произведениями функций, зависящих только от одной из переменных – x или y, называют уравнением с разделяющимися переменными.

В нормальной форме уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}=\psi_1(x)\psi_2(y)\,, \qquad (2)$$

т.е. функция в правой части является произведением двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая – только от y.

Из (1) непосредственно следует

$$\frac{f_1(x)}{\phi_1(x)}dx+\frac{\phi_2(y)}{f_2(y)}dy=0\,,$$

и после интегрирования получаем общее решение (общий интеграл):

$$\int\frac{f_1(x)}{\phi_1(x)}dx+\int\frac{\phi_2(y)}{f_2(y)}dy=C\,.$$

Определение 2. Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией степени n, если для всех $\lambda>0$ она удовлетворяет равенству

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)\,.$$

Например, $z=\dfrac{x^3}{y}+3xy$ – однородная функция степени $n=2$; $z=\ln\dfrac{y}{x}$ – однородная функция степени $n=0$; $z=e^{xy}$ – неоднородная функция.

Определение 3. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \qquad (3)$$

называется однородным**,** если его коэффициенты $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени.

Из уравнения (3) следует:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=f(x,y)\ .$$

Так как $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени, то степень однородности функции $f(x,y)$ равна нулю:

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)\,.$$

Определение 4. Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{4}$$

называется однородным, если $f(x,y)$ является однородной функцией нулевой степени.

В однородном уравнении функцию $f(x,y)$ всегда можно представить как функцию одной переменной $u=\dfrac{y}{x}$. Действительно, если $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$, то, положив $\lambda=\dfrac{1}{x}$, получим

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

В результате, из (4) следует:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Применим замену $u=\dfrac{y}{x}$. Тогда $y=xu$, откуда $y'=u+xu'$, и из исходного уравнения будем иметь:

$$xu'+u=\phi(u)\ ,$$

$$x\frac{du}{dx}=\phi(u)-u\ ,$$

$$\frac{du}{\phi(u)-u}=\frac{dx}{x}\ .$$

Получено уравнение с разделенными переменными, из которого следует общий интеграл

$$\int \frac{du}{\phi(u)-u} = \ln Cx .$$

Возвращаясь к исходным переменным через подстановку $u = \frac{y}{x}$, приходим к общему интегралу однородного уравнения.

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$3x + y' = y \cdot y'$$

при заданных начальных условиях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

Решение.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Перепишем уравнение в виде

$$3x = y'\left(y-1\right).$$

Подставляем $y' = \frac{dy}{dx}$ в уравнение:

$$3x = \frac{dy}{dx}\left(y-1\right).$$

Умножим уравнение на dx:

$$3xdx = \left(y-1\right)dy .$$

Интегрируем уравнение:

$$\int 3xdx = \int \left(y-1\right)dy ,$$

$$\frac{3}{2}x^2 = \frac{y^2}{2} - y + c .$$

Мы получили общий интеграл заданного уравнения. Находим его частное значение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\frac{3}{2}\cdot 1^2 = \frac{1^2}{2} - 1 + c ,$$

откуда $c = \frac{3}{2}$. Окончательно получаем частный интеграл дифференциального уравнения:

$$\frac{3}{2}x^2 = \frac{y^2}{2} - y + \frac{3}{2}$$

или

$$3x^2-(y-1)^2=2\,.$$

Ответ: $3x^2-(y-1)^2=2$.

Пример 2. Решить уравнение $4x^2dy=\left(3x^2+y^2\right)\,dx$.

Решение.

Данное уравнение можно представить в виде:

$$4\frac{dy}{dx}=3+\left(\frac{y}{x}\right)^2\,.$$

Правая часть содержит только отношение вида $\frac{y}{x}$, следовательно, уравнение является однородным. Найдем общее решение с помощью замены $u=\frac{y}{x}$. Подставляя в заданное уравнение $y=ux$ и $y'=xu'+u$, мы получим

$$4xu'+4u=3+u^2\,,$$

$$4x\frac{du}{dx}=u^2-4u+3\,,$$

$$4x\frac{du}{dx}=\left(u-2\right)^2-1\,.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{4du}{\left(u-2\right)^2-1}=\frac{dx}{x}\,.$$

Интегрируя уравнения, мы имеем

$$2\ln\left|\frac{u-3}{u-1}\right|=\ln|\,x\,|+\ln|\,C\,|,$$

откуда следует

$$\left(\frac{u-3}{u-1}\right)^2=Cx\,.$$

Подставляя $u=\frac{y}{x}$, возвращаемся к исходным переменным, и получаем

$\left(\frac{y-3x}{y-x}\right)^2=Cx$ – общий интеграл исходного уравнения.

Ответ: $\left(\frac{y-3x}{y-x}\right)^2 = Cx$.

Упражнение 2.1.

1. Решить дифференциальное уравнение $y'\left(1+\operatorname{tg}^2 y\right)-\left(x^2+3\right)=x$.

Ответ: $\operatorname{tg} y = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x+C$.

2. Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{x+y}{x}$.

Ответ: $y = x\left(\ln x + C\right)$.

3. Решить дифференциальное уравнение $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

Ответ: $y = xe^{Cx+1}$.

2.2. Линейные уравнения первого порядка.

Определение 1. Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции переменной x, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

В частности, если $Q(x)=0$, то уравнение (1) называют линейным однородным уравнением первого порядка, и его можно решить как уравнение с разделяющимися переменными.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка можно решить двумя способами.

1. Метод вариации постоянной (метод Лагранжа).

Сначала решаем соответствующее однородное уравнение

$$y' + P(x)y = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)\,y,$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx,$$

$$\ln|y| = -\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx + \ln|C|.$$

Получаем $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ – общее решение линейного однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{2}$$

где $C = C(x)$. Вычисляя производную

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x), \tag{3}$$

подставляем (2) и (3) в (1):

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x) + C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x) = Q(x),$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2), получаем общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

2. Метод Бернулли.

Общее решение линейного неоднородного уравнения $y = y(x)$ будем искать можно представить в виде произведения двух неизвестных функций:

$$y = u(x)v(x),$$

одну из которых выбирают произвольно, а другую – в соответствии с исходным уравнением. Используя краткое обозначение $u(x) = u$, $v(x) = v$, мы получаем

$$y = u\,v,\ y' = u'v + v'u.$$

Подставим выражения для y и y' в уравнение (1):

$$u'v + v'u + uvP(x) = Q(x),$$

$$v\left[u' + P(x)u\right] + v'u = Q(x). \qquad (5)$$

Выберем $u(x)$ так, чтобы в (5) выражение в скобках равнялось нулю, т.е.

$$u' + P(x)u = 0. \qquad (6)$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными, которое легко интегрируется, при этом константу интегрирования в правой части полагают равной нулю:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx,$$

$$u = e^{-\int P(x)dx}. \qquad (7)$$

После нахождения функции $u(x)$ возвращаемся к уравнению (5), которое при условии (6) принимает вид:

$$v'u = Q(x). \qquad (8)$$

Подставляя (7) в (8), получим

$$v'e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$v' = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

$$v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C. \qquad (9)$$

С учетом (7) и (9) мы можем записать общее решение уравнения (1):

$$y = uv = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{3y}{x} = 1 - \frac{1}{x}$.

Решение.

1. Решим уравнение методом Лагранжа. Сначала рассмотрим решение соответствующего однородного уравнения:

$$y' + \frac{3y}{x} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = -3\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем уравнение

$$\int \frac{dy}{y} = -3\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -3\ln|x| + \ln|C|,$$

и получаем общее решение линейного однородного уравнения:

$$y = Cx^{-3}.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y = C(x)x^{-3}.$$

Тогда

$$y' = C'(x)x^{-3} - 3C(x)x^{-4}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$C'(x)x^{-3} - 3C(x)x^{-4} + 3C(x)x^{-4} = 1 - \frac{1}{x},$$

$$C'(x) = x^3 - x^2,$$

$$C(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C.$$

Тогда линейное неоднородное уравнение имеет общее решение:

$$y = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C\right)x^{-3} = \frac{x}{4} - \frac{1}{3} + \frac{C}{x^3}.$$

2. Решим уравнение методом Бернулли. Применим подстановку

$$y = uv, \quad y' = u'v + v'u.$$

Получаем:

$$u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = 1 - \frac{1}{x};$$

$$u'v+u(v'+\frac{3}{x}v)=1-\frac{1}{x}.$$

Приравниваем к нулю выражение в скобках, и составляем систему:

$$\begin{cases} v'+\frac{3}{x}v=0, \\ u'v=1-\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Решаем сначала первое уравнение этой системы.

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{3}{x}v,$$

$$\int\frac{dv}{v}=-3\int\frac{dx}{x},$$

$$v=x^{-3}.$$

Найденное значение подставим во второе уравнение системы, и решим его:

$$u'\cdot x^{-3}=1-\frac{1}{x},$$

$$\int du=\int\left(x^3-x^2\right)dx,$$

$$u=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+C.$$

Найдём искомую функцию:

$$y=uv=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+C\right)x^{-3}=\frac{x}{4}-\frac{1}{3}+\frac{C}{x^3}.$$

Окончательно имеем общее решение уравнения: $y=\frac{x}{4}-\frac{1}{3}+\frac{c}{x^3}$.

Ответ: $y=\frac{x}{4}-\frac{1}{3}+\frac{C}{x^3}$.

Упражнение 2.2.

1. Решить дифференциальное уравнение $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

Ответ: $y=e^{-x^2}\left(x^2+c\right)$.

2. Решить дифференциальное уравнение $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x$.

Ответ: $y=(x+C)\sin x$.

3. Решить дифференциальное уравнение $xy'-y=\sqrt{x}$.

Ответ: $y=2\sqrt{x}+Cx$.

2.3. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Согласно теоремы об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения общим решением уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0,$$

в котором $a_i=a_i(x)$, является линейная комбинация

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$$

n линейно независимых частных решений с произвольными постоянными коэффициентами C_i. Для того, чтобы найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, применим следующие этапы решения:

1. Составляем характеристическое уравнение

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0.$$

2. Находим корни характеристического уравнения

$$k_1,k_2,\ldots,k_n.$$

3. В зависимости от вида корней записываем частные линейно независимые решения по следующим правилам:

а) каждому действительному однократному корню k соответствует частное решение e^{kx};

б) каждому действительному корню k кратности s соответствует s линейно независимых частных решений $e^{kx},xe^{kx},x^2e^{kx},\ldots,x^{s-1}e^{kx}$;

в) каждой паре комплексных сопряженных однократных корней $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ соответствуют два частных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

г) паре комплексных сопряженных корней $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ кратности s соответствует $2s$ линейно независимых частных решений $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, …, $x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

В каждом случае число частных решений будет равно степени характеристического уравнения (т.е. порядку n линейного дифференциального уравнения).

4. Найдя n линейно независимых частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, строим общее решение данного линейного уравнения:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где C_i – произвольные постоянные.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + py' + q = P_n(x) e^{\alpha x}. \qquad (1)$$

Здесь p, q, α – постоянные действительные числа. Однородное уравнение

$$y'' + py' + q = 0, \qquad (2)$$

соответствующее уравнению (1), называют сопровождающим для дифференциального уравнения (1).

Теорема. Если $y^*(x)$ есть какое-либо частное решение уравнения (1), и

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (3)$$

– общее решение его сопровождающего уравнения (2), то их сумма

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x)$$

– есть общее решение дифференциального уравнения (1).

Решение $\bar{y}(x)$ однородного уравнения (2) находим с помощью характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (4)$$

Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$, где α – действительное число, а $P_n(x)$ – многочлен n-й степени от аргумента x. Тогда возможны следующие три случая.

1. Если $\alpha \neq k_1$ и $\alpha \neq k_2$, где k_1, k_2 – корни характеристического уравнения (4), то

$$y^*(x) = Q_n(x) e^{\alpha x}, \qquad (5)$$

где $Q_n(x)$ – также полином n-й степени, зависящий от x.

2. Если $\alpha = k_1$ или $\alpha = k_2$, где k_1, k_2 – различные корни характеристического уравнения (4), то

$$y^*(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x}. \tag{6}$$

3. Если $\alpha = k_1 = k_2$, где k_1, k_2 – корни характеристического уравнения (4), то

$$y^*(x) = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}. \tag{7}$$

Пример1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(4)} - 6y'' + 9y = 0.$$

Решение.

Данное дифференциальное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением четвертого порядка. Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$k^4 - 6k^2 + 9 = 0,$$

$$\left(k^2 - 3\right)^2 = 0,$$

$$\left(k - \sqrt{3}\right)^2 \left(k + \sqrt{3}\right)^2 = 0.$$

Мы видим, что $k_1 = \sqrt{3}$ – действительный корень кратности 2; $k_2 = -\sqrt{3}$ – действительный корень кратности 2. Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 x e^{\sqrt{3}x} + C_3 e^{-\sqrt{3}x} + C_4 x e^{-\sqrt{3}x}.$$

Ответ: $y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 x e^{\sqrt{3}x} + C_3 e^{-\sqrt{3}x} + C_4 x e^{-\sqrt{3}x}$.

Пример2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' - 3y = 6x \cdot e^x,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$; $y'(0) = -\dfrac{3}{8}$.

Решение.

Данное дифференциальное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Его решение будем искать в виде

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x),$$

где $\bar{y}(x)$ – общее решение однородного уравнения, а $y^*(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Решим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение в данном случае имеет вид:

$$k^2 + 2k - 3 = 0 .$$

Мы видим, что оно имеет корни $k_1 = -3$, $k_2 = 1$. Тогда получаем

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

или

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} .$$

Так как правая часть исходного неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$, где $P_n(x) = 6x$ и $\alpha = k_2 = 1$, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y^*(x) = x(Ax + B)e^x .$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A и B воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Имеем:

$$y = (Ax^2 + Bx)e^x ,$$

$$y' = (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x ,$$

$$y'' = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x .$$

Подставим в исходное уравнение выражения для y, y', y'':

$$2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x +$$

$$+2(2Ax + B)e^x + 2\left(Ax^2 + Bx\right)e^x - 3\left(Ax^2 + Bx\right)e^x = 6xe^x ,$$

$$(8Ax + 2A + 4B)e^x = 6xe^x ,$$

$$8Ax + 2A + 4B = 6x .$$

Приравнивая коэффициенты при x^1 и x^0, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 8A = 6, \\ 2A + 4B = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы будут значения $A = \dfrac{3}{4}$, $B = -\dfrac{3}{8}$. Следовательно,

$$y^*(x) = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}x\right)e^x ,$$

и общее решение исходного уравнения примет вид:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}x\right)e^x .$$

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, перепишем функцию $y(x)$ в более удобной форме, и найдем ее производную:

$$y(x)=C_1e^{-3x}+\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x+C_2\right)e^x,$$

$$y'(x)=-3C_1e^{-3x}+\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{8}\right)e^x+\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x+C_2\right)e^x,$$

$$y'(x)=-3C_1e^{-3x}+\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{8}x+C_2-\frac{3}{8}\right)e^x.$$

Определим значения C_1 и C_2 из начальных условий $y(0)=1$, $y'(0)=-\frac{3}{8}$:

$$y(0)=C_1+C_2=1, \qquad y'(0)=-3C_1+C_2-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}.$$

Решаем систему уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -3C_1+C_2-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -3C_1+C_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=\frac{1}{4} \\ C_2=\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Окончательно получим: $y=\frac{1}{4}e^{-3x}+\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x+\frac{3}{4}\right)e^x$.

Ответ: $y=\frac{1}{4}e^{-3x}+\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x+\frac{3}{4}\right)e^x$.

Упражнение 2.3.

1. Решить дифференциальное уравнение $y^{(4)}+2y''-8y'+5y=0$.

Ответ: $y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)e^{-x}$.

2. Решить дифференциальное уравнение $y''-y'-2y=3e^{2x}$.

Ответ: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+xe^{2x}$.

3. Решить дифференциальное уравнение $y''-4y'=-12x^2+6x-4$.

Ответ: $y=C_1+C_2e^{4x}+x^3+x$.

3. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ «КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ»

3.1. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами.

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad (1)$$

где x и y – любые действительные числа;

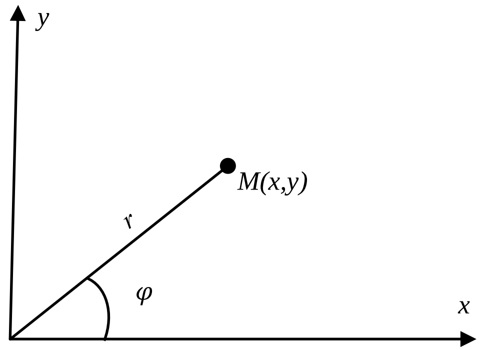
i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$;

x – действительная часть комплексного числа z, обозначающаяся $x = Re\, z$,

y – мнимая часть комплексного числа z, обозначающаяся $y = Im\, z$.

Равенство (1) выражает алгебраическую форму записи комплексного числа.

Комплексное число $z = x + \mathrm{i}y$ изображается на плоскости XOY точкой M с координатами (x,y) либо вектором, начало которого находится в точке O(0,0), а конец в точке M(x,y).



Модулем комплексного числа называется длина вектора $\overrightarrow{OM}$ и обозначается $|z|$, где

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргументом комплексного числа называется угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью OX и обозначается $\varphi = Argz$. Он определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$Argz = argz + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

где $argz$ есть главное значение $Argz$, определяемое условием

$$-\pi < argz < \pi,$$

при чем

$$argz = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0 \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Модуль и аргумент комплексного числа удовлетворяют следующим свойствам:

1) $|x + iy| \geq |x|, \quad |x + iy| \geq |y|, \quad |x + iy| \leq |x| + |y|;$

2) $|z_1 - z_2|$- есть расстояние между двумя точками z_1 и z_2, $arg(z_1 - z_2)$ – есть угол наклона к положительному направлению оси абсцисс вектора идущего из точки z_1 в точку z_2;

3) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$

4) $|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|,$ $Arg(z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n) = Argz_1 + Argz_2 + \cdots + Argz_n;$

5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Argz_1 - Argz_2;$

6) $|z^n| = |z|^n, \quad Arg(z^n) = nArgz;$

7) $\left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|}, \quad Arg\sqrt[n]{z} = \frac{Argz}{n}.$

Любое комплексное число можно записать в тригонометрической форме

$$z = |z|(cos\varphi + isin\varphi), \quad \varphi = Argz.$$

Возведение комплексного числа в натуральную степень производится по формуле

$$z^n = |z|^n(cosn\varphi + isinn\varphi)$$

Отсюда получается формула Муавра:

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = cosn\varphi + isinn\varphi$$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1, \ldots, n-1, \ \ \varphi = argz.$$

Пример 1. *Найти все значения корня* $\sqrt{-5+12i}$.

Решение.

n значений корня n-й степени из комплексного числа $z = x + iy$ получим из формулы:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k = 0,1,\dots,n-1 \qquad (2)$$

где $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi = argz$.

Рассмотрим число $z = -5 + 12i$. Найдем модуль $|z|$ и главное значение аргумента $\varphi = \arg z$ этого числа.

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$,

$\varphi = argz = \pi + arctg\left(\frac{12}{-5}\right) = \pi - arctg\frac{12}{5}$.

По условию $n = 2$. Подставляя все найденные значения в формулу (2) получим:

$$\sqrt{-5+12i} = \sqrt{13}\left(cos\frac{\pi - arctg\frac{12}{5} + 2\pi k}{2} + isin\frac{\pi - arctg\frac{12}{5} + 2\pi k}{2}\right),$$

$k = 0, 1$.

При $k = 0$

$$\sqrt{-5+12i} = \sqrt{13}\left(cos\frac{\pi - arctg\frac{12}{5}}{2} + isin\frac{\pi - arctg\frac{12}{5}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{13}\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{arctg\frac{12}{5}}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{arctg\frac{12}{5}}{2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{13}\left(sin\frac{arctg\frac{12}{5}}{2} + icos\frac{arctg\frac{12}{5}}{2}\right).$$

При $k = 1$

$$\sqrt{-5+12i} = \sqrt{13}\left(cos\frac{\pi - arctg\frac{12}{5} + 2\pi}{2} + isin\frac{\pi - arctg\frac{12}{5} + 2\pi}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{13}\left(cos\frac{3\pi - arctg\frac{12}{5}}{2} + isin\frac{3\pi - arctg\frac{12}{5}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{13}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{arctg\,\frac{12}{5}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{arctg\,\frac{12}{5}}{2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{13}\left(-\sin\frac{arctg\,\frac{12}{5}}{2} - i\cos\frac{arctg\,\frac{12}{5}}{2}\right).$$

Пример 2. *Решить уравнение* $z^4 + 1 - 2i = 0.$

Решение.

$$z^4 + 2 - 2i = 0,$$
$$z^4 = -2 + 2i,$$
$$z = \sqrt[4]{-2 + 2i}.$$

Найдем все значения корня 4 степени из числа $-2 + 2i$. Для этого найдем модуль и главное значение аргумента:

$|-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$

$\arg(-2 + 2i) = \pi + arctg\left(-\frac{2}{2}\right) = \pi - arctg1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$

$$z = \sqrt[4]{-2 + 2i} = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{3\pi + 8\pi k}{16} + i\sin\frac{3\pi + 8\pi k}{16}\right), \quad k = 0,1,2,3.$$

$$z_1 = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{16} + i\sin\frac{11\pi}{16}\right),$$

$$z_3 = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{3\pi + 16\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi + 16\pi}{16}\right) = \sqrt[8]{8}\left(\cos\left(\pi + \frac{3\pi}{16}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{3\pi}{16}\right)\right)$$

$$= \sqrt[8]{8}\left(-\cos\frac{3\pi}{16} - i\sin\frac{3\pi}{16}\right),$$

$$z_4 = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{3\pi + 24\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi + 24\pi}{16}\right)$$

$$= \sqrt[8]{8}\left(\cos\left(\pi + \frac{11\pi}{16}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{11\pi}{16}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[8]{8}\left(-\cos\frac{11\pi}{16} - i\sin\frac{11\pi}{16}\right).$$

Упражнение 3.1.1.

Вычислить все значения корня: 1) $\sqrt[5]{1-i}$; 2) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.

Ответы:

1. $\sqrt[10]{2}\left(cos\frac{\pi}{20}-isin\frac{\pi}{20}\right)$ при $k=0$, $\sqrt[10]{2}\left(cos\frac{7\pi}{20}+isin\frac{7\pi}{20}\right)$ при $k=1$, $\frac{1}{\sqrt[10]{16}}(i-1)$ при $k=2$, $\sqrt[10]{2}\left(cos\frac{23\pi}{20}+isin\frac{23\pi}{20}\right)$ при $k=3$, $\sqrt[10]{2}\left(cos\frac{31\pi}{20}+isin\frac{31\pi}{20}\right)$ при $k=4$.

2. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$ при $k=0$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$ при $k=1$.

3. $\sqrt[4]{4}\left(cos\frac{\pi}{24}+isin\frac{\pi}{24}\right)$ при $k=0$, $\sqrt[4]{4}\left(cos\frac{13\pi}{24}+isin\frac{13\pi}{24}\right)$ при $k=1$, $\sqrt[4]{4}\left(-cos\frac{\pi}{24}-isin\frac{\pi}{24}\right)$ при $k=2$, $\sqrt[4]{4}\left(-cos\frac{13\pi}{24}-isin\frac{13\pi}{24}\right)$ при $k=3$.

Упражнение 3.1.2.

Решить уравнения: 1) $z^4-\sqrt{2}+\sqrt{2}i=0$; 2) $z^3-\sqrt{3}-\sqrt{6}i=0$; 3) $z^5+1+i=0$.

Ответы:

1. $\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{\pi}{16}-isin\frac{\pi}{16}\right)$ при $k=0$,

$\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{7\pi}{16}+isin\frac{7\pi}{16}\right)$ при $k=1$,

$\sqrt[4]{2}\left(-cos\frac{\pi}{16}+isin\frac{\pi}{16}\right)$ при $k=2$,

$\sqrt[4]{2}\left(-cos\frac{7\pi}{16}-isin\frac{7\pi}{16}\right)$ при $k=3$.

2. $\sqrt[3]{3}\left(cos\frac{arctg\sqrt{2}+2\pi k}{3}+isin\frac{arctg\sqrt{2}+2\pi k}{3}\right)$ при $k=0,1,2$.

3. $\sqrt[10]{2}\left(cos\frac{3\pi}{20}-isin\frac{3\pi}{20}\right)$ при $k=0$,

$\sqrt[10]{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)$ при $k=1$,

$\sqrt[10]{2}\left(cos\frac{13\pi}{20}+isin\frac{13\pi}{20}\right)$ при $k=2$,

$\sqrt[10]{2}\left(-cos\frac{\pi}{20}-isin\frac{\pi}{20}\right)$ при $k=3$,

$\sqrt[10]{2}\left(-cos\frac{9\pi}{20}-isin\frac{9\pi}{20}\right)$ при $k=4$.

3.2. Понятие функции комплексного переменного. Элементарные функции комплексного переменного.

Говорят, что в области D определена функция $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ ставится в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная) значений w.

Т.е. геометрически функция $w = f(z)$ отображает точки комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости w. Если $z = x + iy$, а $w = u + iv$, то зависимость между комплексной функцией w и комплексной переменной z может быть описана с помощью двух функций двух действительных переменных

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Показательная функция определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

Свойства показательной функции:

а) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, т.е. показательная функция комплексного переменного является периодической с периодом $2k\pi i$.

б) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Тригонометрические функции $sinz$ и $cosz$ определяются как суммы абсолютно сходящихся во всей комплексной плоскости степенных рядов

$$sinz = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

$$cos\, z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

Для функций $e^z, sinz, cosz$ имеют место формулы Эйлера

$$e^{iz} = cos\, z + isinz,$$

$$e^{-iz} = cos\, z - isinz.$$

Из этих формул

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Функции tgz и $ctgz$ определяются равенствами

$$tgz = \frac{sinz}{cosz}, \qquad ctgz = \frac{cosz}{sinz}.$$

Логарифмическая функция Lnz $(z \neq 0)$ определяется как функция, обратная показательной, причем

$$Lnz = ln|z| + iargz + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Эта функция является многозначной. Главным значением является то значение, при котором $k = 0$. Оно обозначается lnz:

$$lnz = ln|z| + iargz.$$

Свойства логарифма:

а) $Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$,

б) $Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2$.

Общая степенная функция $w = z^a$, $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$z^a = e^{aLnz}.$$

Функция является многозначной. Ее главное значение равно $z^a = e^{alnz}$.

Общая показательная функция $w = a^z$, $a \neq 0$ определяется равенством

$$a^z = e^{zLna}.$$

Функция является многозначной. Ее главное значение равно $a^z = e^{zlna}$.

Пример 1. Выделить действительную и мнимую части функции комплексного переменного $f(z) = sinz$.

Решение.

Пусть $z = x + iy$. Тогда функция примет вид

$$f(z) = sinz = sin(x + iy).$$

Используем известную формулу тригонометрии

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta.$$

$$f(z) = sinz = sin(x + iy) = sinx \cdot cosiy + cosx \cdot siniy.$$

Далее воспользуемся формулами, связывающими тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента

$$siniz = ishz$$

$$cosiz = chz$$

Получим следующее

$$sinz = sin(x + iy) = sinx \cdot cosiy + cosx \cdot siniy =$$

$$= sinx \cdot chy + icosx \cdot shy.$$

Таким образом, для функции $f(z) = sinz$ действительная часть $u(x, y) = sinx \cdot chy$, мнимая часть $v(x, y) = cosx \cdot shy$.

Ответ. $u(x, y) = sinxchy$; $v(x, y) = cosxshy$.

Пример 2. Записать в алгебраической форме (выделить действительную и мнимую части) $e^{2+\pi i}$.

Решение.

$$e^{2+\pi i} = e^2 \cdot e^{\pi i}.$$

Воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{zi} = cosz + isinz.$$

Получим

$$e^{2+\pi i} = e^2 \cdot e^{\pi i} = e^2(cos\pi + isin\pi) = -e^2.$$

Пример 3. Вычислить указанные значения:

а) $Ln(3-2i)$; б) $(1-i)^{3-3i}$.

Решение.

а) Воспользуемся следующей формулой

$$Lnz = ln|z| + iargz + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Т.к. $z = 3 - 2i$,

то $|3-2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

и $arg(3-2i) = arctg\left(\frac{-2}{3}\right) = -arctg\frac{2}{3}$.

Таким образом,

$$Ln(3-2i) = ln\sqrt{13} - iarctg\frac{2}{3} + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

б) Полагая в формуле

$$z^a = e^{aLnz}$$

$z = 1 - i, a = 3 - 3i$, получим

$(1-i)^{3-3i} = e^{(3-3i)Ln(1-i)} = e^{(3-3i)(ln|1-i| + iarg(1-i) + 2k\pi i)} =$

$= e^{(3-3i)\left(ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i\right)} = e^{3ln\sqrt{2}}e^{3\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 3\left(\frac{\pi}{4} - 2k\pi + ln\sqrt{2}\right)i} =$

$= 2^{\frac{3}{2}}e^{3\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 3\left(\frac{\pi}{4} - 2k\pi + ln\sqrt{2}\right)i}$.

Ответ**.** а) $Ln(3-2i) = ln\sqrt{13} - iarctg\frac{2}{3} + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$;

б) $(1-i)^{3-3i} = 2^{\frac{3}{2}}e^{3\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 3\left(\frac{\pi}{4} - 2k\pi + ln\sqrt{2}\right)i}$.

Упражнение 3.2.1. Выделить действительную и мнимую части функции комплексного переменного:

1) $f(z) = e^{-z}$;

2) $f(z) = i\bar{z} + 2z^2$;

3) $f(z) = isin2z$.

Ответы:

1. $u(x,y) = e^{-x}cosy;\ \ v(x,y) = e^{-x}siny.$
2. $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + y; v(x,y) = x + 4xy.$
3. $u(x,y) = cos2xsh2y; v(x,y) = sin2xch2y.$

Упражнение 3.2.2. Записать в алгебраической форме (выделить действительную и мнимую части): 1) $e^{\frac{\pi i}{2}}$; 2) $\cos(2+i)$; 3) $\sin(2i-1)$.

Ответы: 1) i; 2) $cos2ch1 - isin2sh1$; 3) $ish1cos1 - sin1ch1$.

Упражнение 3.2.3. Вычислить:

1. а) $Ln(4+3i)$; б) 3^{2-i}.
2. а) $Ln(1-i)$; б) $(-e)^i$.
3. а) $Ln\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\right)$; б) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2i}$.

Ответы: 1. а) $ln5 + iarctg\frac{3}{4} + 2k\pi i$; б) $e^{2ln3+2k\pi-iln3}$.

2. а) $ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i$; б) $e^{\pi(2k+1)}$.

3. а) $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi i$; б) $e^{2iln2-\frac{\pi}{3}-4k\pi}$.

3.3. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции.

Определение 1. Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю произвольным образом. Этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$.

Таким образом, по определению имеем

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Теорема. Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$в некоторой точке z имела производную, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имели полные дифференциалы и выполнялись условия *Коши-Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

При этом

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Определение 2. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке, так и в некоторой окрестности этой точки. Функция называется аналитической в области D, если она является аналитической в каждой точке этой области.

Пример 1. Показать, что функция $w = e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости

Решение.

Имеем $e^z = e^x(cosy + isiny)$. Таким образом,

$$u(x,y) = e^x cosy; \;\; v(x,y) = e^x siny.$$

Функции $u(x,y), \; v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y) как функции действительных переменных и удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x cosy, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x siny,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x siny, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x cosy.$$

Следовательно, функция $w = e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости.

Пример 2. Восстановить аналитическую функцию по ее действительной части $u(x,y) = 3e^x cosy + 2$, удовлетворяющую условию $f(0) = 2 - i$.

Решение.

Так как искомая функция по условию задачи является аналитической, то для нее справедливы условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Так как $u(x,y) = 3e^x cosy + 2$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^x cosy$.

Согласно условию (1) получим, что $\frac{\partial v}{\partial y} = 3e^x cosy$.

Проинтегрировав последнее равенство по переменной y, найдем функцию $v(x,y)$:

$$v(x,y) = \int 3e^x cosydy = 3e^x\, siny + C(x),$$

где функция $C(x)$ пока неизвестна. Продифференцируем теперь последнее равенство по переменной x:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3e^x siny + \ C'(x).$$

Из условия задачи найдем теперь $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3e^x siny.$$

Согласно условию (2) получим следующее равенство:

$3e^x siny + \ C'(x) = 3e^x siny,$

$C'(x) = 0,$

$C(x) = C,$ где $C = const.$

Следовательно, мнимая часть искомой функции имеет вид

$$v(x,y) = 3e^x siny + C.$$

А значит сама функция запишется в виде $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ следующим образом:

$$f(z) = 3e^x cosy + 2 + i(3e^x siny + C),$$

или

$$f(z) = 3e^x cosy + 2 + i3e^x siny + iC = 3e^x(cosy + isiny) + 2 + Ci.$$

Выражение в скобках согласно формуле Эйлера равно e^{iy}. А значит

$$f(z) = 3e^{x+iy} + 2 + Ci$$

$$f(z) = 3e^z + 2 + Ci. \qquad (3)$$

Для того, чтобы найти значение постоянной С используем условие

$$f(0) = 2 - i.$$

$$2 - i = 3e^0 + 2 + Ci$$

$$Ci = -i - 3.$$

Подставляем полученное значение *Ci* в формулу (3). Итак, искомая функция имеет вид

$$f(z) = 3e^z + 2 - 3 - i,$$

$$f(z) = 3e^z - 1 - i.$$

Ответ**.** $f(z) = 3e^z - 1 - i.$

Упражнение 3.3.1. Выяснить, являются ли аналитическими на всей комплексной плоскости функции:

1. $w = z^2 \cdot \bar{z}.$
2. $w = sin3z - i.$

3. $w = \bar{z}Rez$.
4. $w = e^{z^2}$.

Ответы:
1. Не является.
2. Является.
3. не является.
4. Является.

Упражнение 3.3.2. Восстановить аналитическую функцию по ее действительной или мнимой части:
1.$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, f(0) = i$.
2. $v(x, y) = 2xy + 3,\ f(0) = 3$.
3.$v(x, y) = 5y - 4xy + 3, f(2i) = 3$.
4.$u(x, y) = e^{-2x}cos2y, f(0) = 1 + 2i$.

Ответы:
1. $f(z) = z^3 + 1$.
2. $f(z) = z^2$.
3. $f(z) = 5z - 2z^2 - 1 - 10i$.
4. $f(z) = e^{-2z} + 2i$.

3.4. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Основная теорема Коши. Интеграл по замкнутой кривой *L* равен нулю, если кривая ограничивает односвязную область *D*, а подынтегральная функция аналитическая не только внутри этой области, но и в области *D’*, содержащей внутри себя область *D* и ее границу *L*.

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

Теорема Коши для многосвязной области. Если область *D* ограничена конечным числом кусочно-гладких кривых $L_1, L_2, \dots L_n$, а функция $w = f(z)$ аналитическая внутри области *D’*, содержащей *D* и ограничивающие ее кривые, то интеграл по внешнему контуру *L* равен сумме интегралов по внутренним контурам $L_1, L_2, \dots L_n$, где эти контуры обходятся противчасовой стрелки.

$$\int_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)dz.$$

Если функция $f(z)$ аналитическая в области D, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром L, и на самом контуре непрерывна, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (z_0 \in D),$$

где контур L обходится так, чтобы область D оставалась все время слева.

Интегральная формула позволяет вычислять некоторые интегралы, а именно

$$\int_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Пример. Вычислить интеграл с помощью интегральной формулы Коши:

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz.$$

Решение.

Если функция $f(z)$является аналитической в области D, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром L, и на самом контуре, то имеет место интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz \ \ (z_0 \in D).$$

Внутри окружности $|z - 2| = 3$ знаменатель функции $\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}$ равен нулю в двух точках $z = 0,\ z = 6$. Внутри окружности лежит только точка $z = 0$. Поэтому можно непосредственно применить интегральную формулу Коши

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = \int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z(z - 6)} dz = \int_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z} dz.$$

Функция $\frac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в данной области, поэтому, согласно формуле Коши имеем

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z} dz = 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

Ответ: $-\frac{\pi i}{3}$.

Упражнение 3.4. Вычислить интеграл с помощью интегральной формулы Коши.

1. $\int\limits_{|z|=2} \frac{siniz}{z^2 - 4z + 3} dz.$
2. $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{dz}{z^2 + 16}.$
3. $\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z+1)} dz.$

Ответы:

1. $\pi sh1$.
2. 0.
3. $-\frac{2\pi i}{e}$.

Литература

1. Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах. Ч. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1988.
2. Виленкин Н.Я. и др. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1984.
3. Виноградова И.А. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч. 1, 2. – М.: Высшая школа, 2000.
4. Волковысский Л.И. и др. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
5. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1986.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1966.
7. Задачник по курсу математического анализа под ред. Виленкина Н.Я. Ч. 1,2. – М.: Просвещение, 1971.
8. Запорожец Г.Н. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966.
9. Ильин В.А. и др. Математический анализ. Ч. 1,2. – М.: изд. МГУ, 1987.
10. Краснов М.Л. и др. Функции комплексного переменного. – М.: УРСС, 2003.
11. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ Т. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1973.
12. Ляшко И.И. и др. Математический анализ в примерах и задачах. Ч.1-3. – Киев: Вища школа, 1977.
13. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988.
14. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.
15. Сидоров Ю.В. и др. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1976.
16. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1959.
17. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. – М.: Наука, 1962.
18. Хапланов М.Г. Теория функций комплексного переменного. – М.: Просвещение, 1965.
19. Школьник А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Учпедгиз, 1963.
20. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

Учебное издание

Математический анализ и его приложения

Методические рекомендации по подготовке
к практико-ориентированному государственному экзамену

Издаётся в авторской редакции

Подписано в печать 11.04.2017 г.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 4,5.
Заказ № 037. Тираж 10 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета
типографией ООО «РВТ»
3200, г. Бендеры, ул. Московская, д. 30