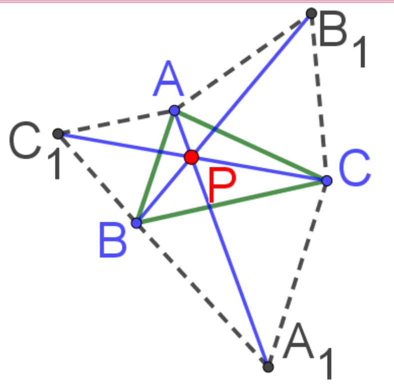
摘要

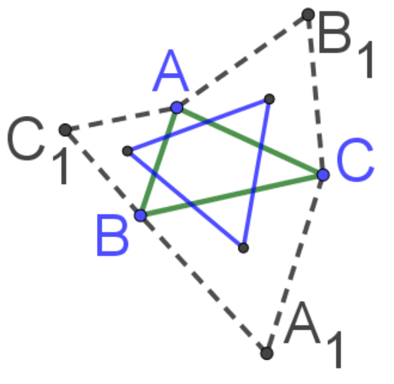
任意 $\triangle ABC$ 三邊向外或向內作正 m 邊形，將衍生圖形最外頂點相連得第 1 衍生 $\triangle A_1B_1C_1$，再以相同規則得第 2 衍生 $\triangle A_2B_2C_2$，…，第 n 衍生 $\triangle A_nB_nC_n$。首先，不論向外或向內的次序，或衍生的正 m 邊形的邊數為何，所有衍生 $\triangle A_nB_nC_n$ 之重心共點，$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。第二，在內外(或外內)交錯作正三角形的前提下，若所得的衍生三角形 $\triangle A_nB_nC_n$ 的垂心為 H_n、外心為 O_n，則 $H_n=O_{n+2}$，且 $\{O_{2n+1}\}$、$\{O_{2n}\}$、$\{H_{2n+1}\}$、$\{H_{2n}\}$ 各自共線，$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。最後，我們得到 $B_1B_2\cdots B_n$ 為正 n 邊形的充要條件為 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 滿足 $\overline{A_kA_m}\,//\,\overline{A_{k+1}A_{m-1}}$，其中 $A_k=A_{qn+k},A_m=A_{qn+m},q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。

動機

我們閱讀過費馬點及拿破崙三角形，也閱讀過許多不同的科展報告，因為有這兩個定理及歷屆科展說明書，我們利用 GGB 嘗試將定理內容修改過後，以我們設定的新規則去作圖，觀察是否有特殊的性質出現。而在經過多次的作圖測試後我們發現確實有一些不同的結果。



費馬點

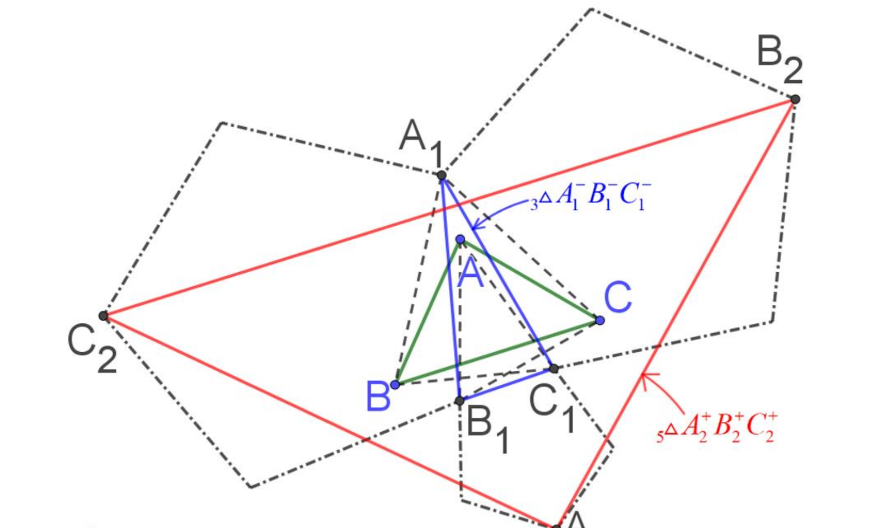


拿破崙三角形

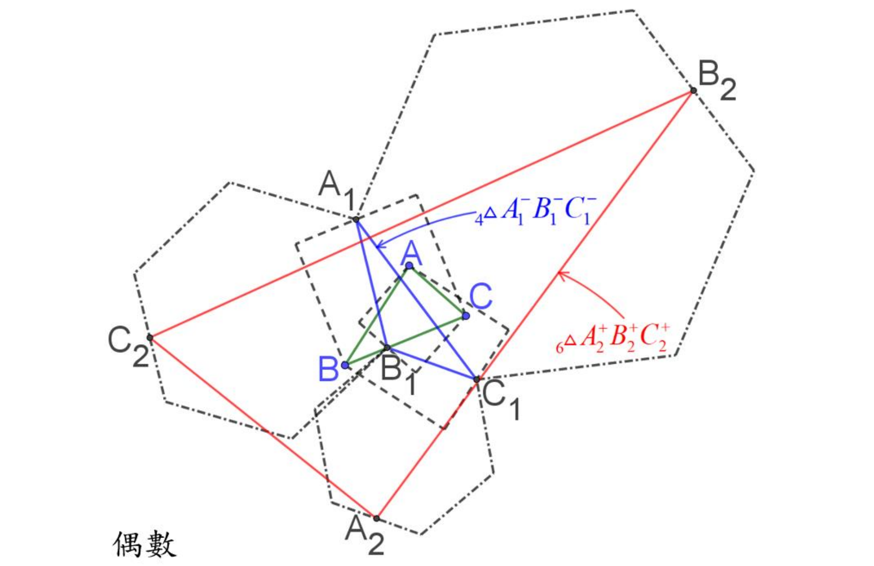
符號定義與預備定理

Definition 1. 拿破崙定理：任意三角形，三邊向外作正三角形，則這三個正三角形的重心連線構成正三角形。

Definition 2. 衍生三角形



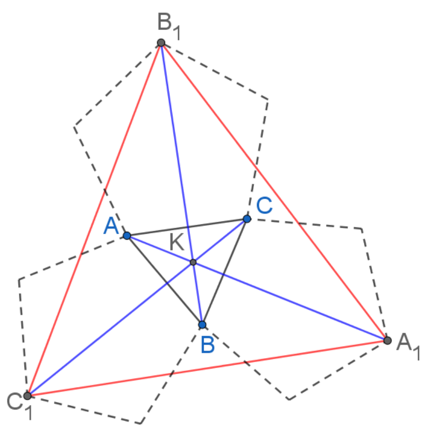
奇數



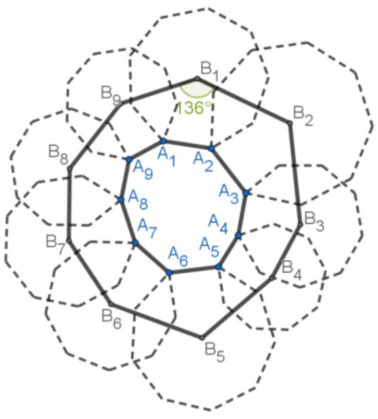
偶數

Definition 3. K_n：以 $\triangle ABC$ 各邊<u>向外</u>作正 m 邊形，${}_m\triangle A_n^+B_n^+C_n^+$ 及 ${}_m\triangle A_{n+1}^+B_{n+1}^+C_{n+1}^+$，連接 $\overline{A_n^+A_{n+1}^+}$、$\overline{B_n^+B_{n+1}^+}$、$\overline{C_n^+C_{n+1}^+}$，此三線交於一點 K_n，$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。

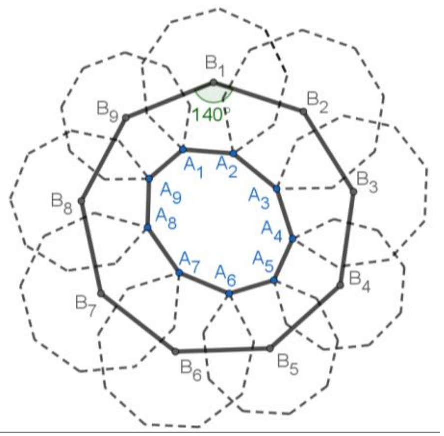
Definition 4. 拿破崙 n 邊形與拿破崙初始 n 邊形：凸多邊形 $A_1A_2......A_n$ 各邊向外作正 n 邊形，將這 n 個正 n 邊形的中心 B_1、B_2、......、B_n 相連，稱 $B_1B_2......B_n$ 為拿破崙 n 邊形；若拿破崙 n 邊形為正 n 邊形，則稱多邊形 $A_1A_2......A_n$ 為拿破崙初始 n 邊形。



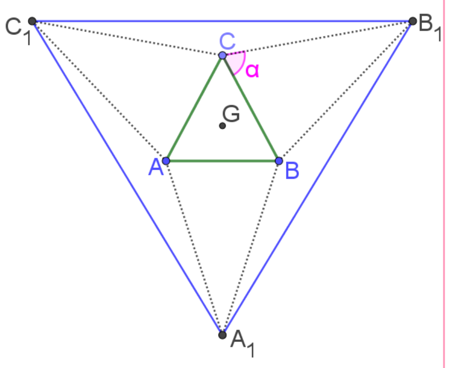
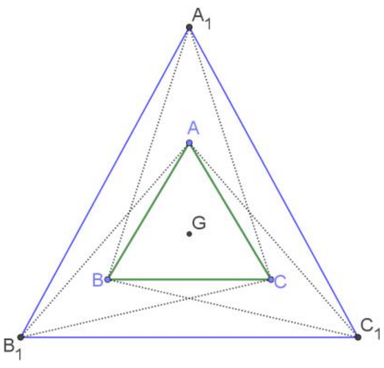
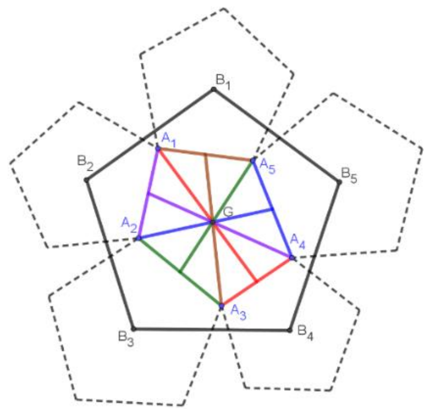
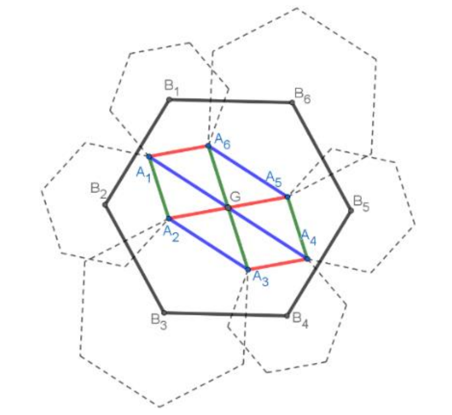
$\overline{AA_1}$、$\overline{BB_1}$、$\overline{CC_1}$ 交於點 K



$B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9$ 為拿破崙九邊形



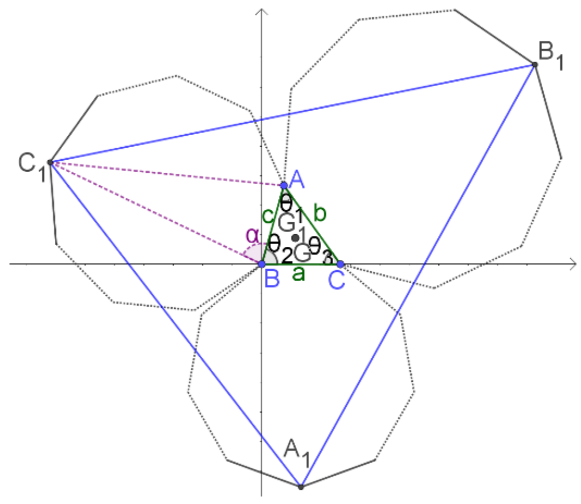
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ 為拿破崙初始九邊形

Lemma1 向外或向內作等腰三角形，$\triangle A_nB_nC_n$ 及 $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 之重心共點，$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。		Lemma2 [1] 在拿破崙多邊形中，全部頂點與其對應頂點或對應邊中點連線會共中心。	
 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A_1^+B_1^+C_1^+$ 共重心	 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A_1^-B_1^-C_1^-$ 共重心	 對應線交於五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 及六邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 的中心	 對應線交於六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 及六邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 的中心

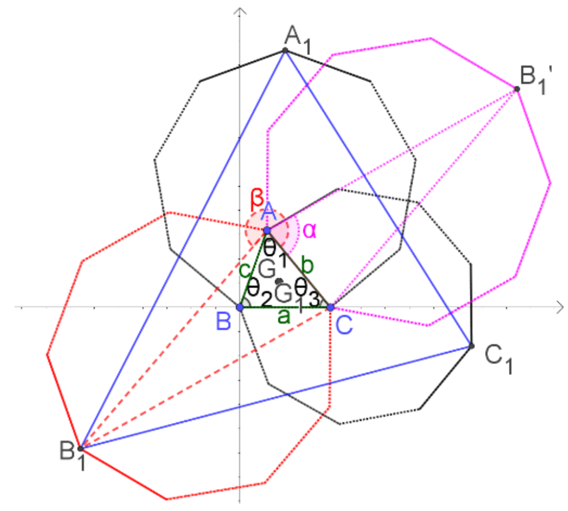
研究方法與過程

定理(一)

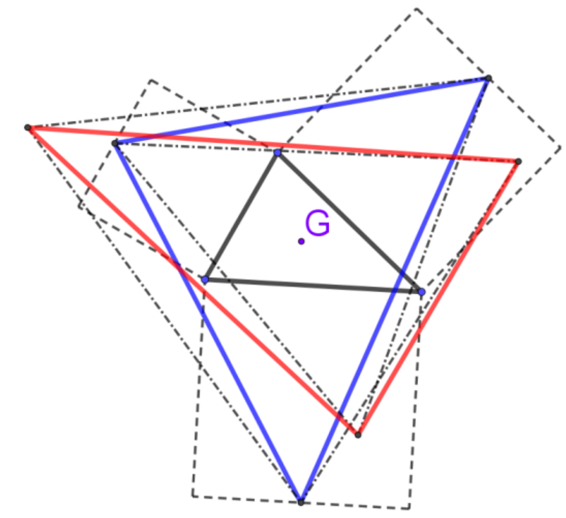
若 $\triangle A_nB_nC_n = {}_m\triangle A_n^+B_n^+C_n^+$ 或 $\triangle A_nB_nC_n = {}_m\triangle A_n^-B_n^-C_n^-$，$\forall n\in\mathbb{N}$，則 $\{\triangle A_kB_kC_k\}$ 之重心 $\{G_k\}$ 共點，$\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$m\ge 3$。



$\triangle ABC$ 與 ${}_m\triangle A_1^+B_1^+C_1^+$ 共重心



$\triangle ABC$ 與 ${}_m\triangle A_1^-B_1^-C_1^-$ 共重心



$\triangle ABC$、${}_4\triangle A_1^+B_1^+C_1^+$ 與 ${}_3\triangle A_2^-B_2^-C_2^-$ 共重心

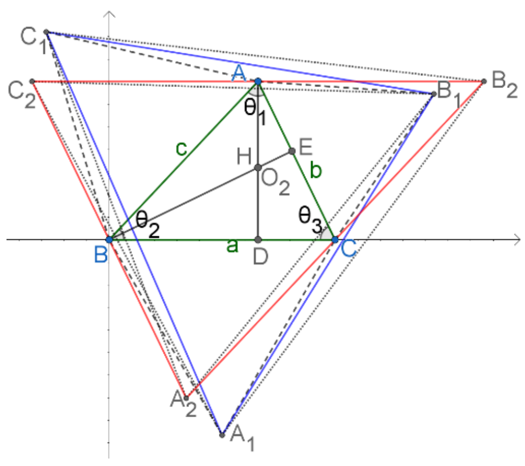
定理(二)

若符合下列規則之一，則 ${}_3\triangle A_nB_nC_n$ 的垂心與 ${}_3\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}$ 之外心共點，$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$：

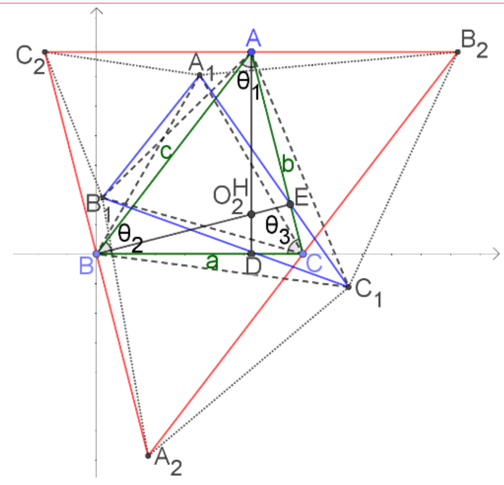
(1) ${}_3\triangle A_{2k+1}B_{2k+1}C_{2k+1} = {}_3\triangle A_{2k+1}^+B_{2k+1}^+C_{2k+1}^+$ 且 ${}_3\triangle A_{2k}B_{2k}C_{2k} = {}_3\triangle A_{2k}^-B_{2k}^-C_{2k}^-$，$\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

(2) ${}_3\triangle A_{2k+1}B_{2k+1}C_{2k+1} = {}_3\triangle A_{2k+1}^-B_{2k+1}^-C_{2k+1}^-$ 且 ${}_3\triangle A_{2k}B_{2k}C_{2k} = {}_3\triangle A_{2k}^+B_{2k}^+C_{2k}^+$，$\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

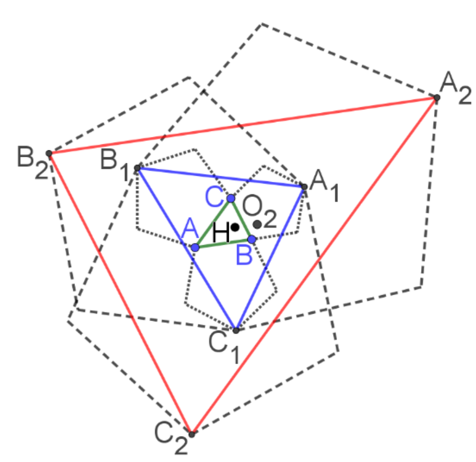
即依序內外或外內交錯，皆可得 ${}_3\triangle A_nB_nC_n$ 的垂心與 ${}_3\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}$ 之外心共點，$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。



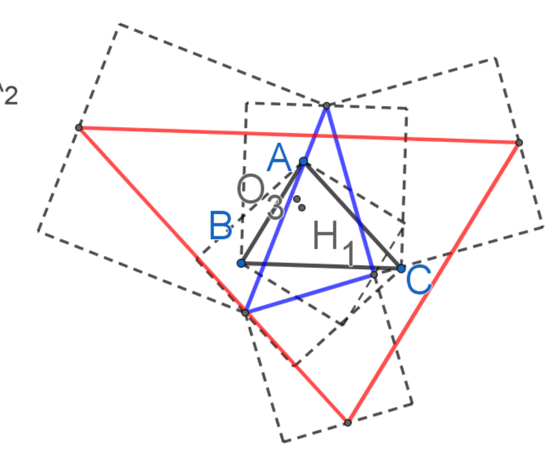
${}_3\triangle A_1^+B_1^+C_1^+$ 垂心、${}_3\triangle A_2^-B_2^-C_2^-$ 外心共點



${}_3\triangle A_1^-B_1^-C_1^-$ 垂心、${}_3\triangle A_2^+B_2^+C_2^+$ 外心共點



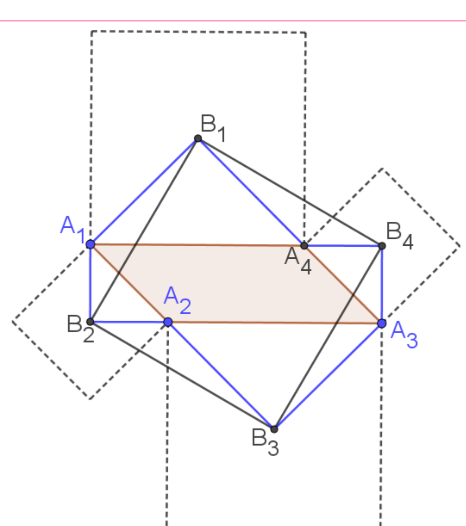
接五邊形無共點情形



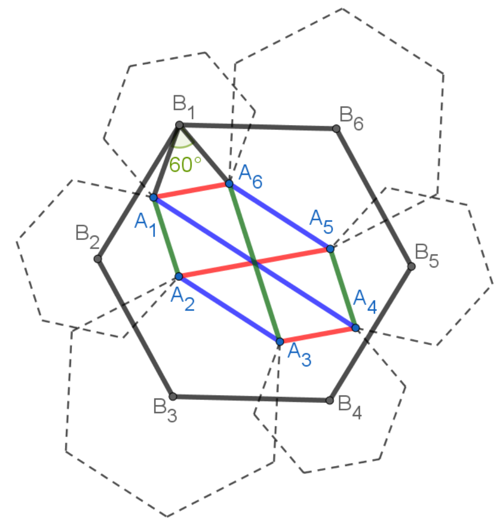
接四邊形無共點情形

定理(三) **拿破崙初始 n 邊形充要條件**

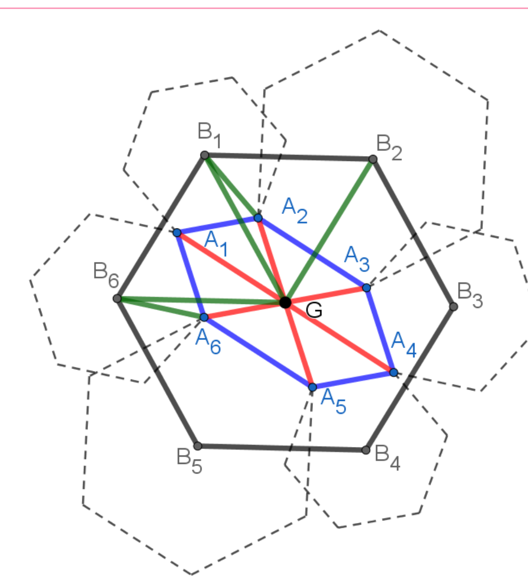
1. 若拿破崙 n 邊形 $B_1B_2B_3B_4\ldots B_n$ 為一正 n 邊形，則拿破崙初始 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\ldots A_n$ 中滿足 $\overline{A_kA_m}//\overline{A_{k+1}A_{m-1}}$，其中 $A_k=A_{qn+k}, A_m=A_{qn+m}, q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。
2. 若拿破崙初始 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\ldots A_n$ 中滿足 $\overline{A_kA_m}//\overline{A_{k+1}A_{m-1}}$，其中 $A_k=A_{qn+k}, A_m=A_{qn+m}, q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，則拿破崙 n 邊形 $B_1B_2B_3B_4\ldots B_n$ 為一正 n 邊形。



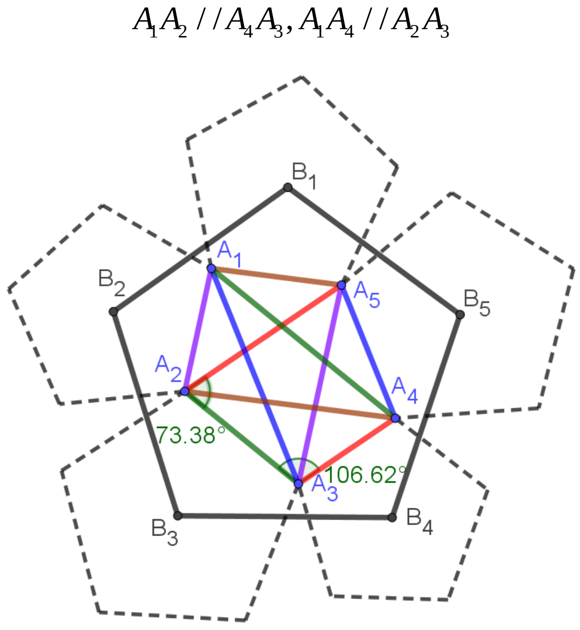
$\overline{A_1A_2}//\overline{A_4A_3}, \overline{A_1A_4}//\overline{A_2A_3}$



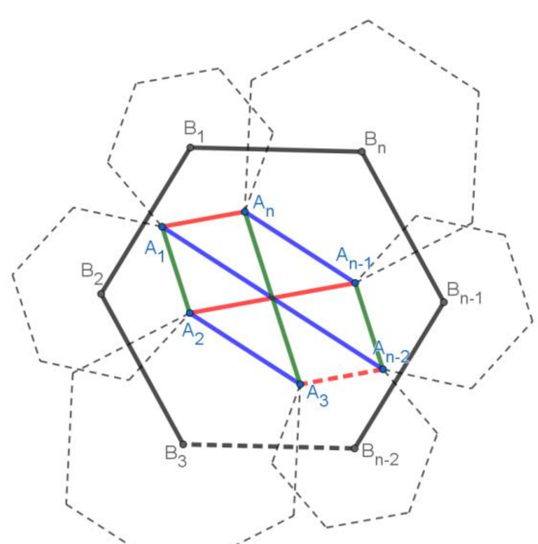
$\overline{A_1A_2}//\overline{A_6A_3}//\overline{A_5A_4}, \overline{A_2A_3}//\overline{A_1A_4}//\overline{A_6A_5}, \overline{A_3A_4}//\overline{A_2A_5}//\overline{A_1A_6}$

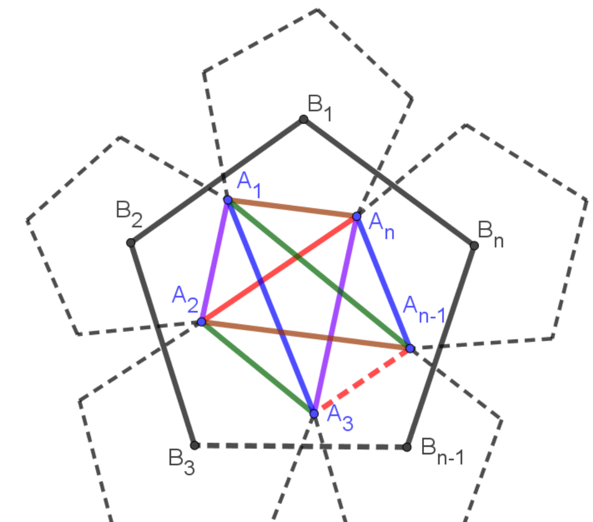


綠色三角形全等且為正三角形



$\overline{A_1A_2}//\overline{A_3A_5}, \overline{A_2A_3}//\overline{A_4A_1}, \overline{A_3A_4}//\overline{A_5A_2},$
$\overline{A_4A_5}//\overline{A_1A_3}, \overline{A_5A_1}//\overline{A_2A_4}$

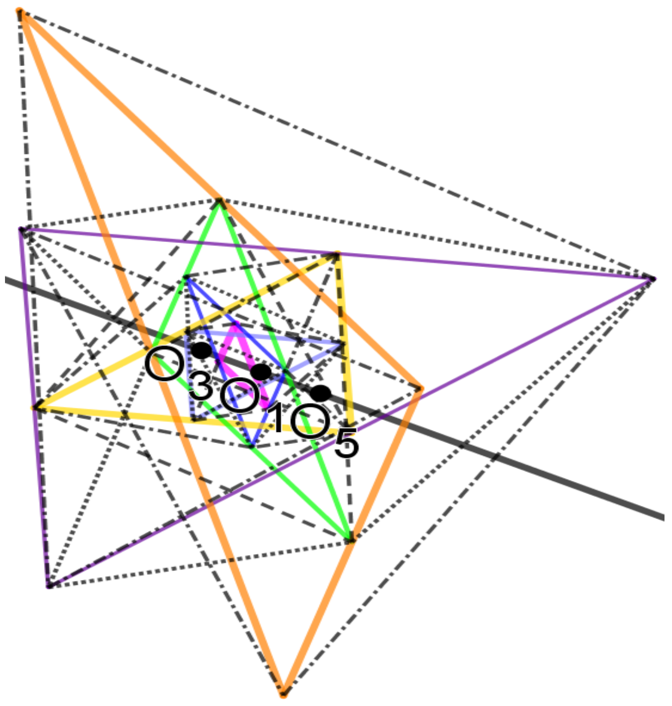




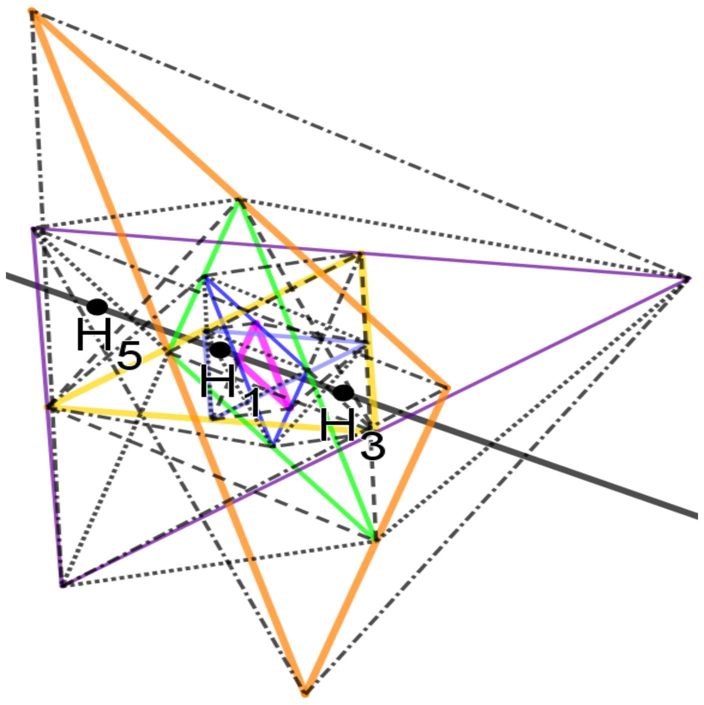
$\overline{A_kA_m}//\overline{A_{k+1}A_{m-1}}$，其中 $A_k=A_{qn+k}, A_m=A_{qn+m}, q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$\boxed{\text{應用}}$：

1. ${}_3\triangle A_{2k+1}B_{2k+1}C_{2k+1}$之外心共線，${}_3\triangle A_{2k}B_{2k}C_{2k}$之外心共線，$\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。
2. ${}_3\triangle A_{2k+1}B_{2k+1}C_{2k+1}$之垂心共線，${}_3\triangle A_{2k}B_{2k}C_{2k}$之垂心共線，$\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。



奇數層外心共線



奇數層垂心共線

討論與研究結果

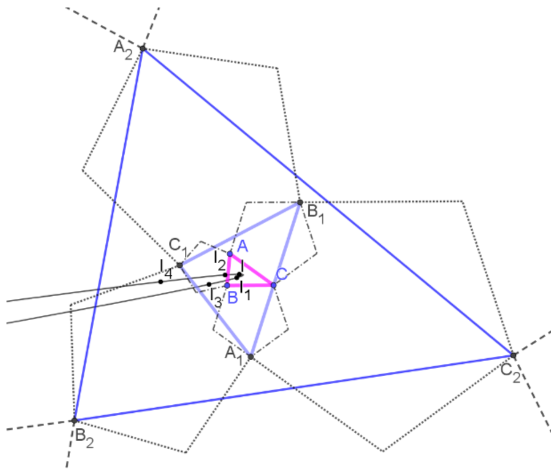
Lemma1	向外或向內作等腰三角形，$\triangle A_nB_nC_n$及$\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$之重心共點，$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。
Lemma2	拿破崙多邊形中，全部頂點與其對應頂點或對應邊中點連線會共點。
定理(一)	$\triangle ABC$與其${}_m\triangle A_n^+B_n^+C_n^+$及${}_m\triangle A_n^-B_n^-C_n^-$之重心皆共點。
定理(二)	內外交錯時，${}_3\triangle A_nB_nC_n$的垂心與${}_3\triangle A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}$之外心共點。
應用	奇、偶數層之外心、垂心分別共線。
定理(三)	形成拿破崙初始多邊形的充要條件。

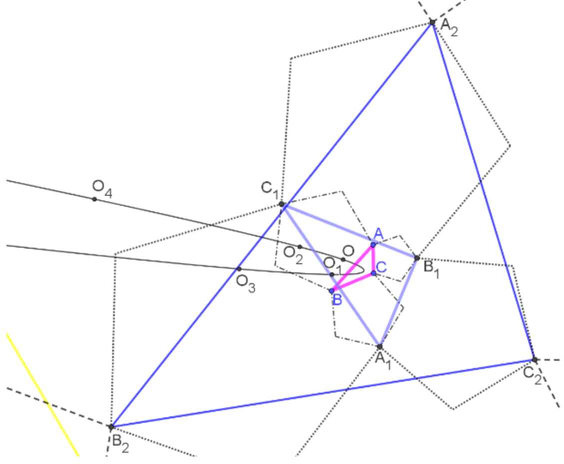
未來展望

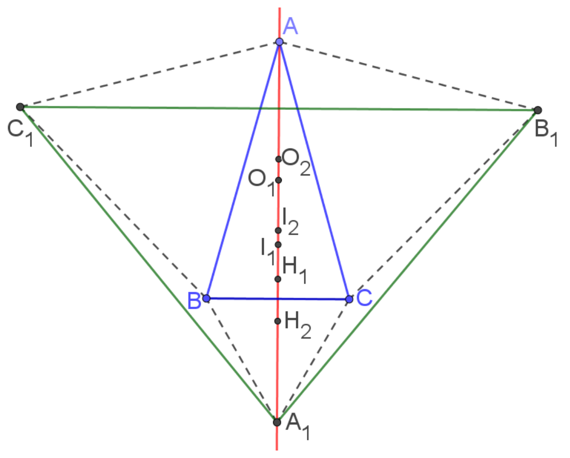
(一)完成定理(二)中點三角形的幾何直觀。

(二)非等腰$\triangle ABC$至${}_5\triangle A_4^+B_4^+C_4^+$之外心、內心、垂心各會在一條雙曲線上。

$\boxed{\text{特例}}$：等腰$\triangle ABC$及其${}_3\triangle A_n^+B_n^+C_n^+$，外心、內心、垂心會在一直線上。

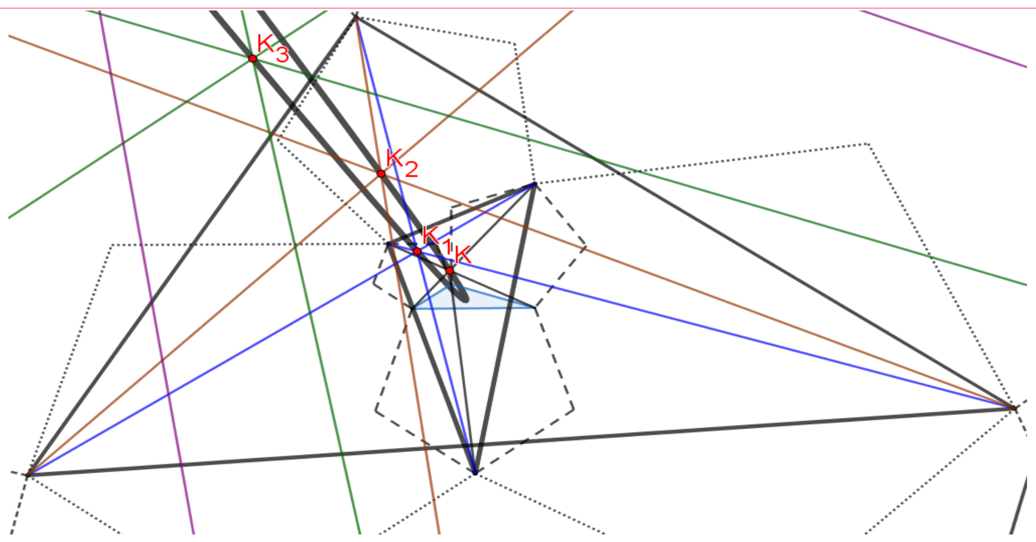

內心雙曲線

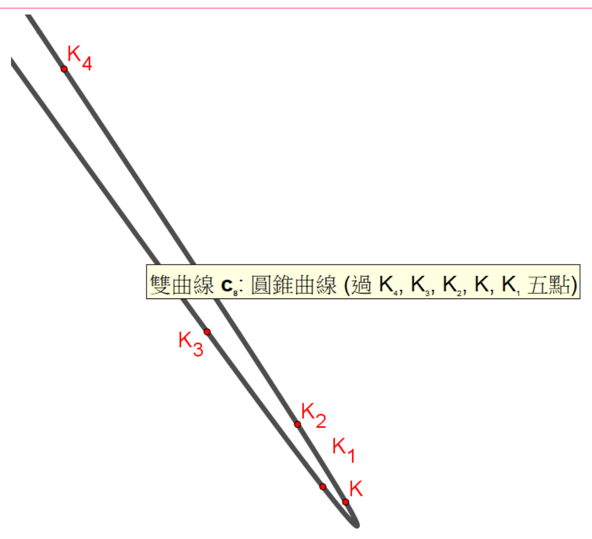

外心雙曲線



等腰三角形外、內、垂心共線

(三)${}_5\triangle A_n^+B_n^+C_n^+$至${}_5\triangle A_{n+4}^+B_{n+4}^+C_{n+4}^+$之$K_n$相連為一雙曲線。





參考資料

一、徐啓惇、楊宗諺、吳承諺(2018)。**從零開始-初始多邊形及拿破崙多角星之性質探討**。中華民國第58屆中小學科學展覽會國中組數學科作品。

二、黃家冠(2015)。**拿破崙定理對多邊形之推廣**。中華民國第55屆中小學科學展覽會國中組數學科作品。

三、黃家禮(2000)。**幾何明珠**。台北市:九章出版社。