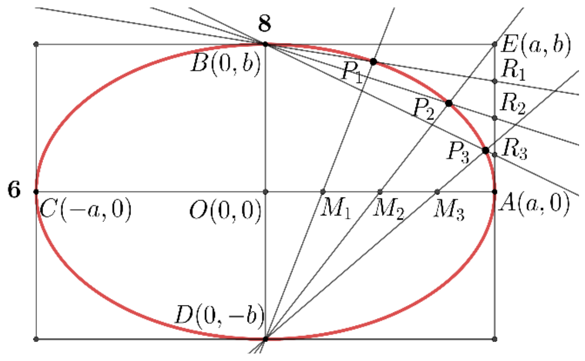
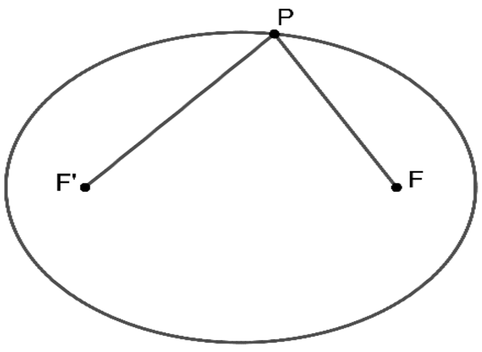
摘要

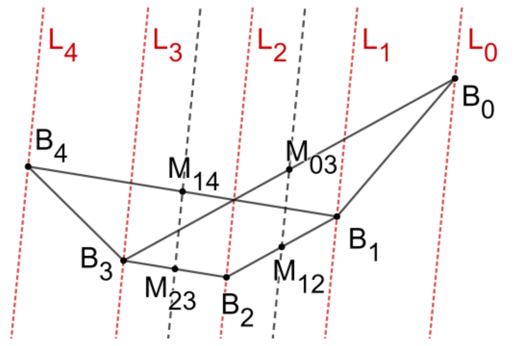
本研究主要提出新的圓錐曲線製造方法。首先，若點集$\{B_0,B_1,B_2,B_3,B_4\}$構成一個三梯五點形，則其必落在一拋物線Γ上，且點集$\{B_0,B_1,B_2,B_3,B_4\}$也會落在與拋物線Γ的軸平行的五道平行線上，當固定其中四點而改變其中一點在平行線上的位置時，則會出現橢圓、雙曲線、二相交直線與二平行直線；第二，由一個一階點列$l(A_1,A_2,A_3,A_4)$往平面上一點B_0 投射，滿足$\overrightarrow{B_kB_0}=k\,\overrightarrow{B_0A_k}$得$B_k$，$k\in\{1,2,3,4\}$ ，依$\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}$的不同比例，$B_0$、$B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$會落於不同二次曲線上。最後，我們改變兩個線束基線夾角與線束中心在平面上的相對位置，用以製造各種特定的圓錐曲線。

研究動機

當初在課堂上看到一題題目，有一矩形，以兩長邊中點為投射點，並將$\overline{OA}$與$\overline{EA}$切為4等分，對應線交點連同投射點會位於一橢圓上，這與我們在課堂上給定兩焦點與長軸長或給定焦點、準線與離心率的製造方式截然不同，這引發了我們的好奇心。





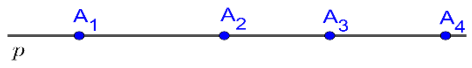


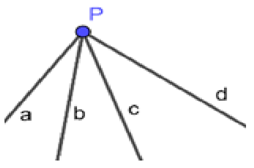
動機 ➡ 五等距平行線拉動一點構成不同圓錐曲線 ➡ 更動點列比例可構成不同圓錐曲線 ➡ 五條交錯等距平行線拉動一點構成不同圓錐曲線 ➡ 兩全等三角形投射構成二次曲線

研究方法與過程

I. 定義

1. n梯五點形：五邊形$ABCDE$中，頂點連線恰有n組對邊平行，稱其為n梯五點形 $n=0,1,2,3$
2. (1)點集與點列：平面上B_1、B_2、B_3、B_4⋯稱為點集，記為$\{B_k\}$。而一直線p上的點集稱為點列，記為$p(A,B,C,D)$，直線p稱為此點列的基。





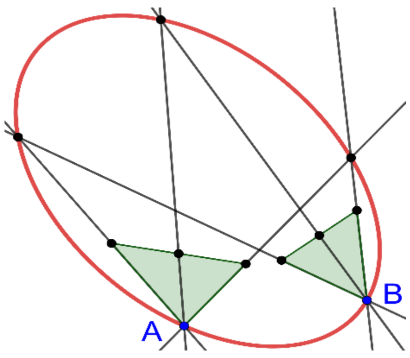
(2)平面上過一點P的直線a、b、c、d稱為線束，記為$P(a,b,c,d)$。點P稱為線束的中心。

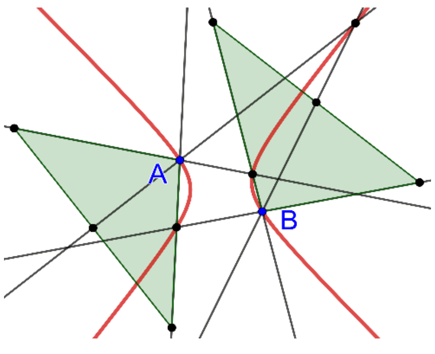
II. 預備定理

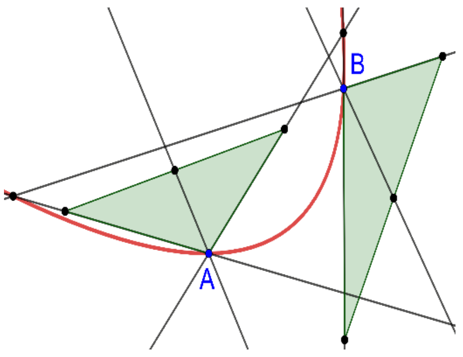
Lemma1(朱德祥、朱維宗(2007))[1]:兩透射對應的線束，其對應線的交點連同線束中心可構成二次曲線。

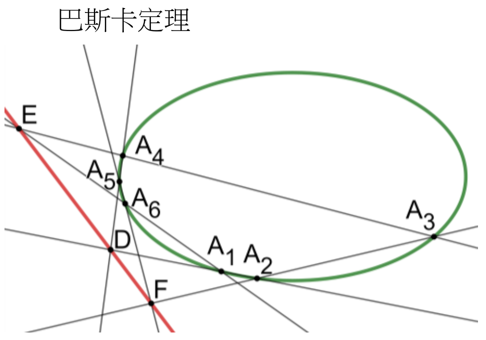
〈pf〉設兩個線束的方程為$G+\mu H=0$，$G'+\mu' H'=0$，其中G、H、G'、H'是x_1、x_2、x_3的一次齊次式，由於兩線束成射影對應，有$\mu'=\dfrac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}$，$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$，解出$\mu$和$\mu'$，得二次齊式$G'(\delta H-\gamma G)+H'(\beta H-\alpha G)=0$，故得證。

Lemma2:巴斯卡定理：一圓錐曲線中有A、B、C、D、E、F六點，$\overleftrightarrow{AB}$交$\overleftrightarrow{ED}$於G、$\overleftrightarrow{BC}$交$\overleftrightarrow{FE}$於H、$\overleftrightarrow{CD}$交$\overleftrightarrow{AF}$於I，此時G、H、I共線。(可以用此定理製造圓錐曲線的切線)





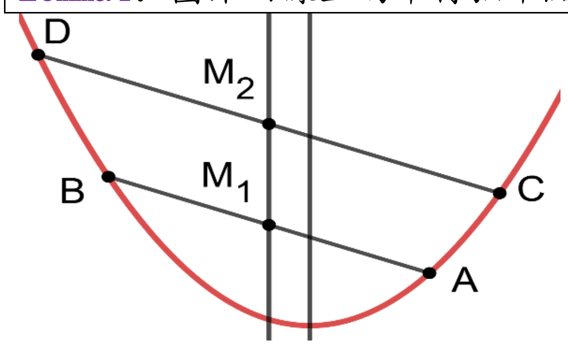


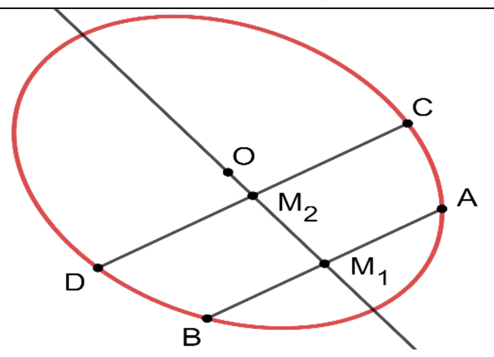


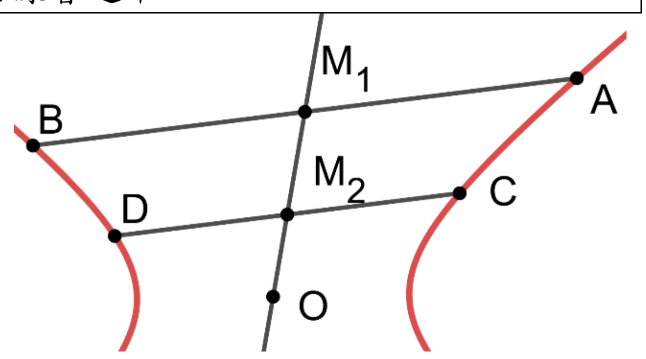
Lemma3: 二次曲線$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$中，判別式：$H=a+c$；$\delta=b^2-4ac$；$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}$

	$\delta<0$	$\delta=0$	$\delta>0$
$\Delta=0$	一點	①若$d^2+e^2>4(a+c)f$為兩平行線 ②若$d^2+e^2=4(a+c)f$為兩重合直線 ③若$d^2+e^2<4(a+c)f$為空集合	兩相交直線
$\Delta\neq0$	①$H\cdot\Delta>0$空集合 ②$H\cdot\Delta<0$圓或橢圓	拋物線	雙曲線

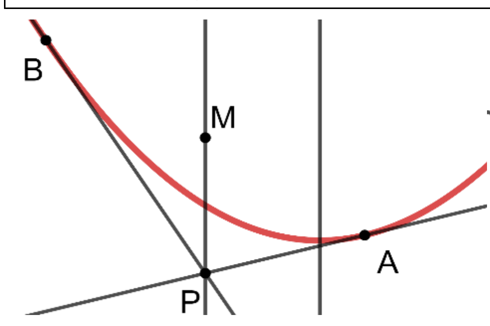
Lemma4: 圓錐曲線上的平行弦中點連線，拋物線平行於軸，橢圓和雙曲線會過中心

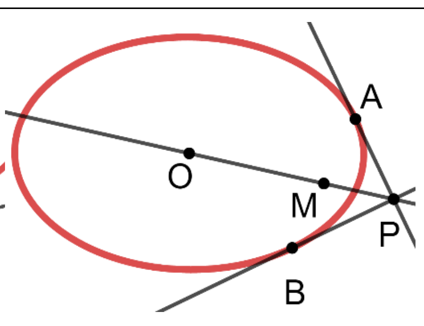


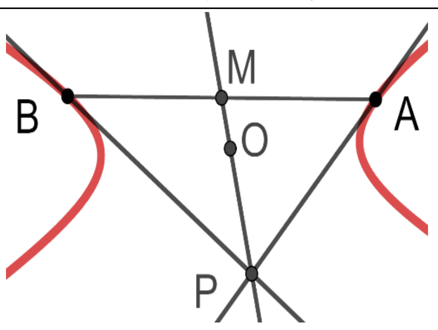


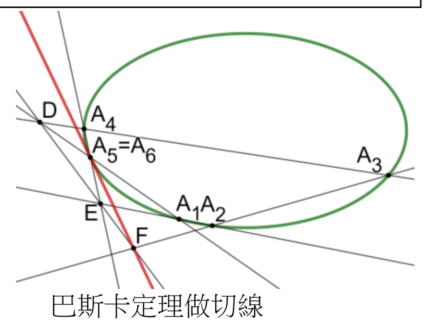


Lemma5: 圓錐曲線上兩點的切線交點與這兩點的中點連線，拋物線平行於軸，橢圓和雙曲線會過中心









III. 主定理

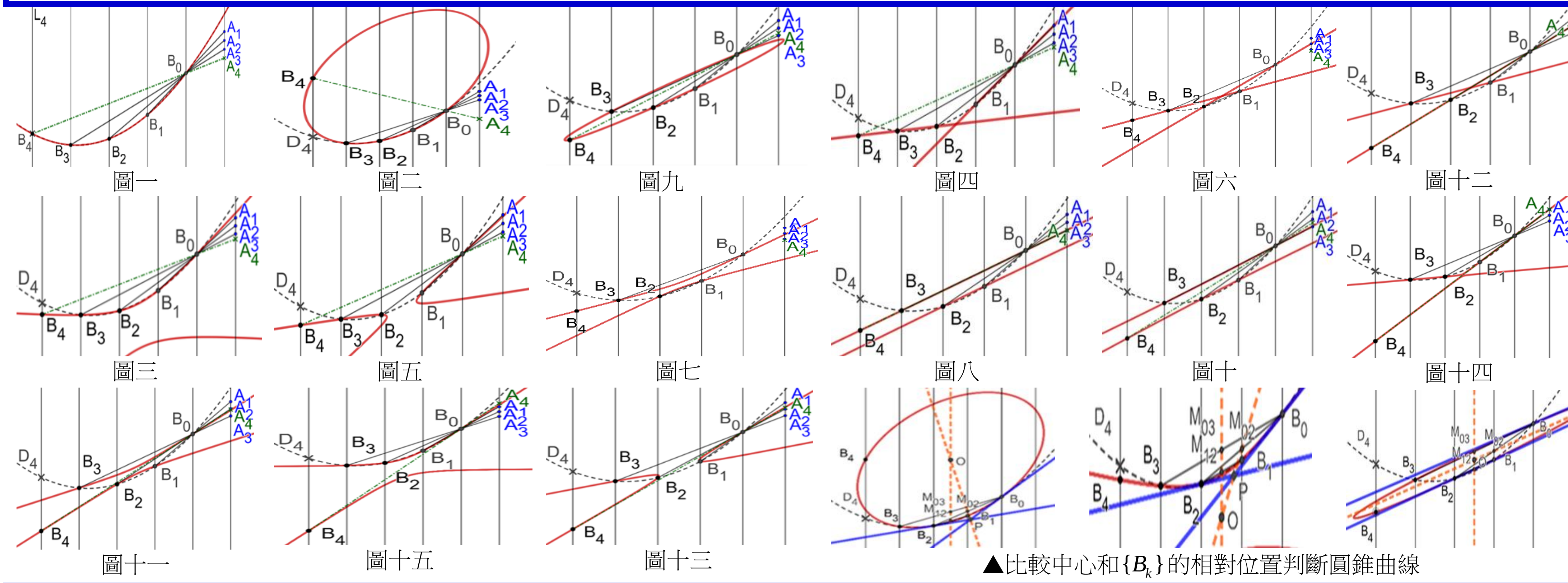
Theorem1(拉拉 move 法)

L_0、L_1、L_2、L_3、L_4 依序相鄰等距且互相平行，B_0、B_1、B_2、B_3、B_4 任三點不共線，點 $B_k \in L_k$，$\overline{B_0B_3}//\overline{B_1B_2}$，其中 $\overline{B_1B_2}//\overline{B_0B_3}$；過 B_0 與 $\overline{B_1B_3}$ 平行的直線交 L_4 於 D_4，$k=0,1,2,3,4$，

(1) 當 $B_4=D_4$，則 $\{B_k\}$ 會落在一拋物線上。

(2) 當 $\overline{B_4B_0}$ 不平行於 $\overline{B_3B_1}$，則①若 B_4 與 $\{B_1,B_2,B_3\}$ 位於 $\overline{D_4B_0}$ 之異側，或落在 $\overline{B_0B_3}$ 與 $\overline{B_1B_2}$ 間，則 $\{B_k\}$ 會落在一橢圓上。

②若 B_4 與 $\{B_1,B_2,B_3\}$ 位於 $\overline{D_4B_0}$ 之同側，且不落在 $\overline{B_0B_3}$ 與 $\overline{B_1B_2}$ 間，則 $\{B_k\}$ 會落在一雙曲線上。



圖一 圖二 圖九 圖四 圖六 圖十二

圖三 圖五 圖七 圖八 圖十 圖十四

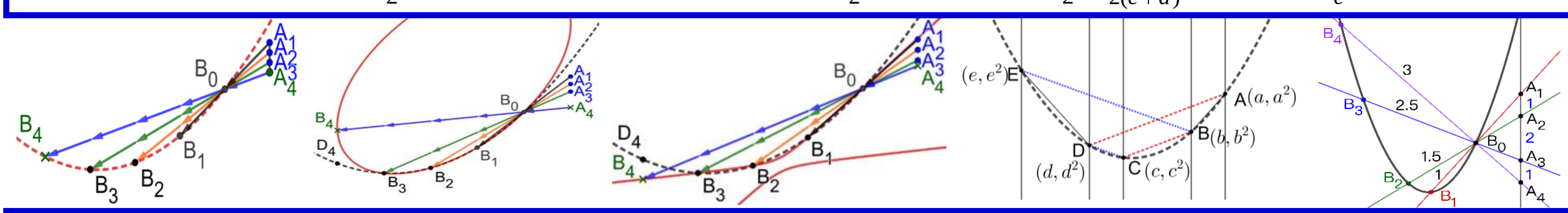
圖十一 圖十五 圖十三 ▲比較中心和 $\{B_k\}$ 的相對位置判斷圓錐曲線

Theorem2(點列 1234 Shoot 法) 考慮滿足 $\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}:\overrightarrow{A_3A_4}=1:1:m$ 的點列 $l(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 及一投射中心 $B_0\notin l$，利用 $k\overrightarrow{A_kB_0}=\overrightarrow{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$，$k=1,2,3,4$，則①若 $m=1$，則 $\{B_k\}\in$ 拋物線，②若 $m>1$ 或 $-\frac{1}{2}<m<0$，則 $\{B_k\}\in$ 橢圓，③若 $0<m<1$ 或 $m<-\frac{1}{2}$ 且 $m\neq\frac{1}{4}$、-1、-2，則 $\{B_k\}\in$ 雙曲線。

Theorem3(交錯等距拉拉 move 法)

考慮滿足 $\overrightarrow{A_1A_2}:\overrightarrow{A_2A_3}:\overrightarrow{A_3A_4}=c:d:m$ 的點列 $l(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 及一投射中心 $B_0\notin l$，用 $\dfrac{[\frac{k}{2}]c+[\frac{k+1}{2}]d}{d}\cdot\overrightarrow{A_kB_0}=\overrightarrow{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$，$k=1,2,3,4$，則

①若 $m=c$，則 $\{B_k\}\in$ 拋物線，②若 $\frac{-d}{2}<m<0$ 或 $m>c$，則 $\{B_k\}\in$ 橢圓，③若 $m<\frac{-d}{2}$ 或 $0<m<c$，$m\neq\frac{c}{2}$、$\frac{cd}{2(c+d)}$、$-d$、$-(d+\frac{d^2}{c})$，則 $\{B_k\}\in$ 雙曲線。



Theorem4(雙線束 Shoot 法) 一矩形 $MNGH$，B_0、C_0、E、F、原點 O 分別為 $\overline{MN}$、$\overline{GH}$、$\overline{NG}$、$\overline{MH}$、$\overline{B_0C_0}$ 之中點，L_k、A_k 分別為 $\overline{OE}$、$\overline{A_0A_n}$ 的 n 等分點，B_k 為 $\overleftrightarrow{P_LL_k}$ 與 $\overleftrightarrow{P_AA_k}$ 之交點，$k=1,2,\ldots,n-1$，若 $\overline{MN}=2a$，$\overline{NG}=2b$，則：

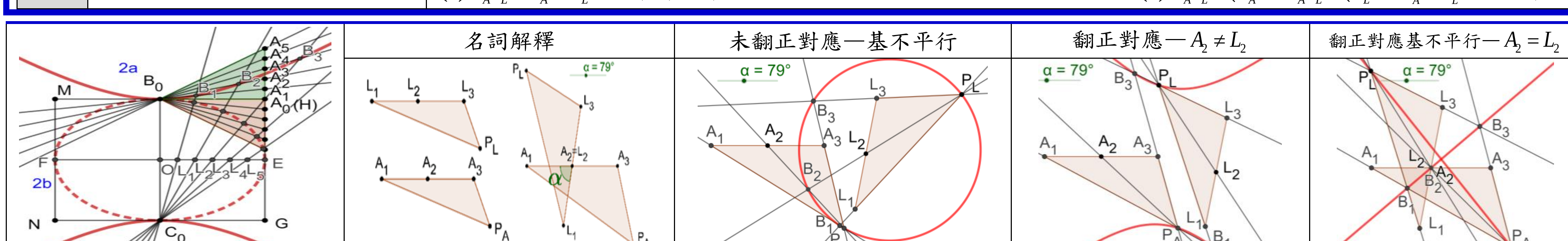
①當 $A_n=E$，$\{B_k\}$ 會落在圓或橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上　　②當 $A_n=F$，$\{B_k\}$ 會落在雙曲線 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 上

Theorem5(全等三角形 Shoot 法) 考慮線束 $P_A(A_k)$、$P_L(L_k)$，且 $P_A\neq P_L$，$\triangle P_AA_1A_3\cong\triangle P_LL_1L_3$，$\overline{A_kA_{k+1}}:\overline{A_kA_{k-1}}=\overline{L_kL_{k+1}}:\overline{L_kL_{k-1}}=1:1$，$k=1,2,3$，固定一基，另一基平行移動，使得 A_2 與 L_2 重合，令 $\angle A_1A_2L_1=\alpha$，

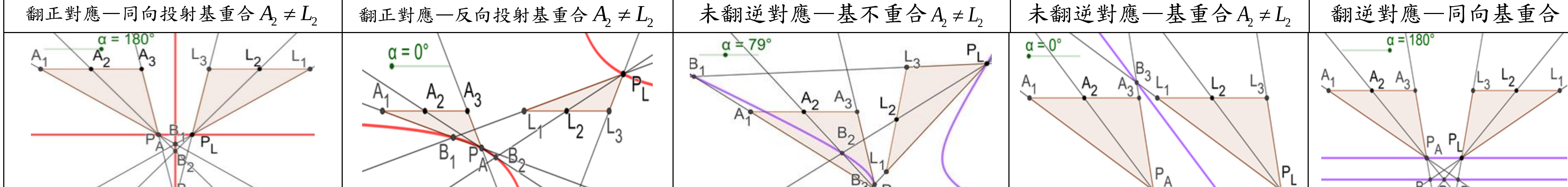
①正對應：$A_k\mapsto L_k$；逆對應：$A_k\mapsto L_{4-k}$ ②翻：在 $\alpha=0°$，投射方向相反；未翻：在 $\alpha=0°$，投射方向同。則線束對應交點軌跡如下：

分類	正對應	逆對應	
未翻	(1) $\overrightarrow{v_A}\not\parallel\overrightarrow{v_L}$：圓 (2) $\overrightarrow{v_A}//\overrightarrow{v_L}$：$\phi$	(5) $\overrightarrow{P_AP_L}\not\parallel\overrightarrow{v_A}$ 且 $\overrightarrow{P_AP_L}\not\parallel\overrightarrow{v_L}$ 且 $\overrightarrow{v_A}\not\parallel\overrightarrow{v_L}$：雙曲線或兩相交直線	(6) $\overrightarrow{P_AP_L}//\overrightarrow{v_A}//\overrightarrow{v_L}$：兩相交直線
翻	(3) $\overline{P_AB_2}\neq\overline{P_LB_2}$：雙曲線 (4) $\overline{P_AB_2}=\overline{P_LB_2}$：兩垂直直線	(7) $\overrightarrow{v_A}\not\parallel\overrightarrow{v_L}$：雙曲線或橢圓或拋物線或兩相交直線或兩平行直線，當 $\alpha=k\pi-2\angle P_AA_2A_3,k\in\mathbb{Z}$ 為拋物線或兩平行直線 (8) $\overrightarrow{P_AP_L}//\overrightarrow{v_A}//\overrightarrow{v_L}$：兩平行直線	(9) $\overrightarrow{P_AP_L}\not\parallel\overrightarrow{v_A}$ 且 $\overrightarrow{P_AP_L}\not\parallel\overrightarrow{v_L}$ 且 $\overrightarrow{v_A}//\overrightarrow{v_L}$：拋物線

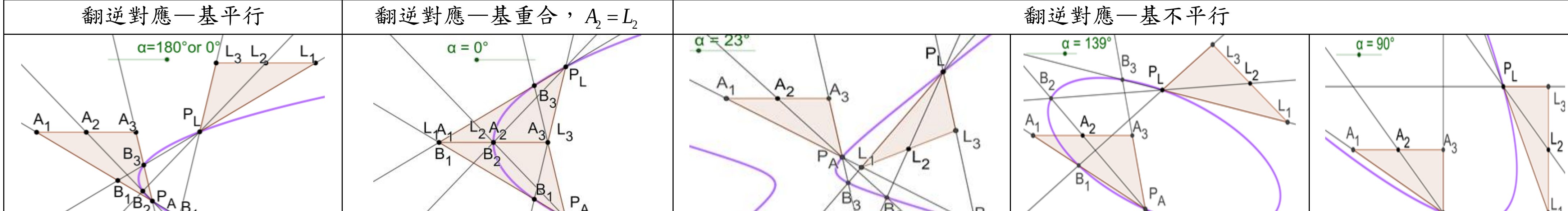
名詞解釋　未翻正對應—基不平行　翻正對應—$A_2\neq L_2$　翻正對應基不平行—$A_2=L_2$



翻正對應—同向投射基重合 $A_2\neq L_2$　翻正對應—反向投射基重合 $A_2\neq L_2$　未翻逆對應—基不重合 $A_2\neq L_2$　未翻逆對應—基重合 $A_2\neq L_2$　翻逆對應—同向基重合



翻逆對應—基平行　翻逆對應—基重合，$A_2=L_2$　翻逆對應—基不平行

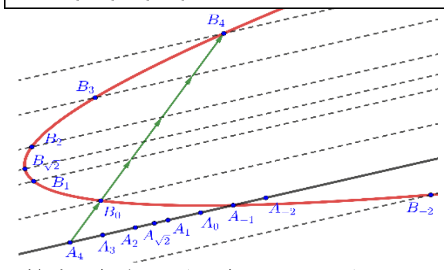


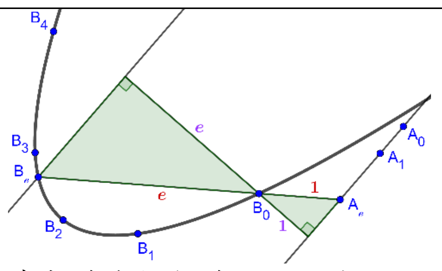
IV. 研究應用

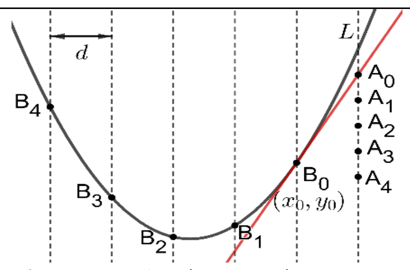
Property1: $\overline{A_0A_1}$ 上取一點 A_k，以 $\overrightarrow{B_kB_0}=kr\,\overrightarrow{B_0A_k}$ 作 B_k，$k=\dfrac{\overline{A_0A_k}}{\overline{A_0A_1}},k\in\mathbb{R}$，$r\in\mathbb{R}-\{0\}$，則 $\{B_k\}$ 會落在一拋物線上。

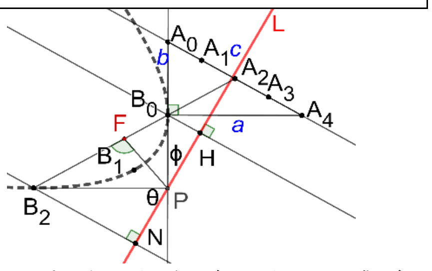
Property2: 考慮滿足相鄰等距的點列 $l(A_k)$ 及投射中心 $B_0\notin l$，以 $k\,\overrightarrow{A_kB_0}=\overrightarrow{B_0B_k}$ 得 $\{B_k\}$，$k=0,1,2,3,4$，Γ 為 $\{B_k\}$ 所在的拋物線，則：① $\overline{A_0B_0}$ 為 Γ 過 B_0 的切線，②當 $\angle A_0B_0A_4=90^\circ$ 時，$\overline{B_0F}:\overline{B_2F}=\overline{B_0A_0}^2:\overline{B_0A_4}^2$，其中 F 為 Γ 的焦點。

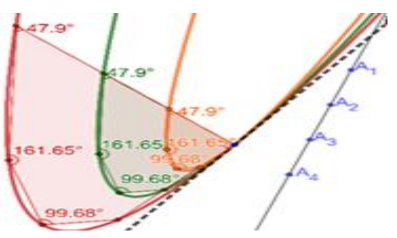
Property3: 考慮滿足 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}=1:n:m$ 的點列 $l(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 及一投射中心 $B_0\notin l$，以 $k\,\overrightarrow{A_kB_0}=\overrightarrow{B_0B_k}$ 得 $\{B_k\}$，$k=\frac{1}{r},\frac{2}{r},\frac{3}{r},\frac{4}{r}$，$r\in\mathbb{R}-\{0\}$，由 $\{B_k\}$ 構出之圓錐曲線彼此相似。

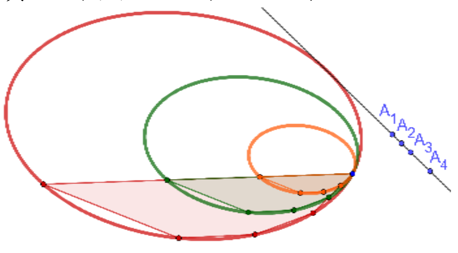

整數線與拋物線一一對應

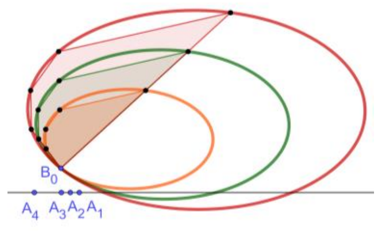

實數線與拋物線一一對應

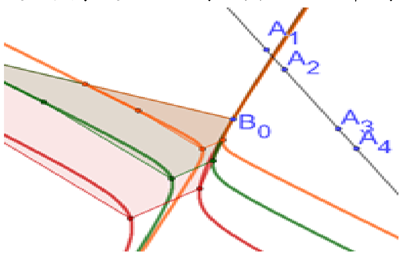

作特定拋物線的切線


定出特定拋物線的焦點、準線

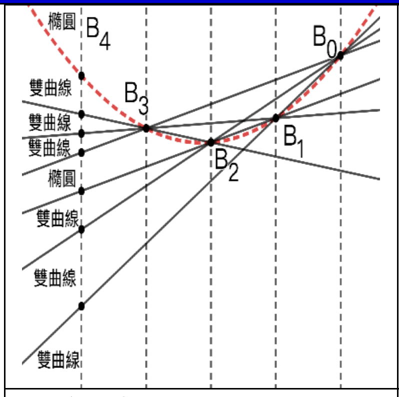

① $n=m=1$，三梯五點形相似

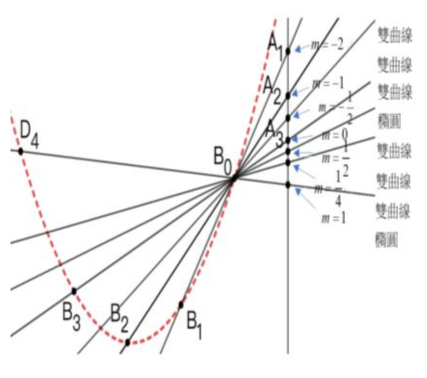

② $m>n=1$，一梯五點形相似

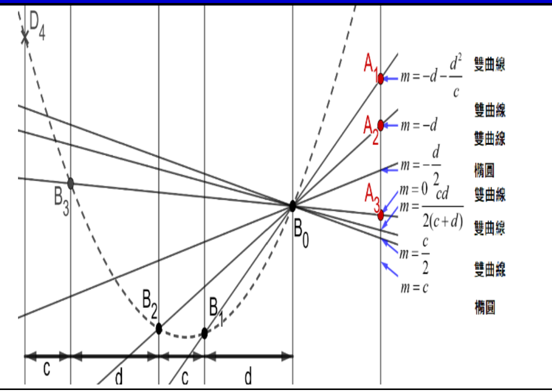

③ $m>n=1$，負倍投射

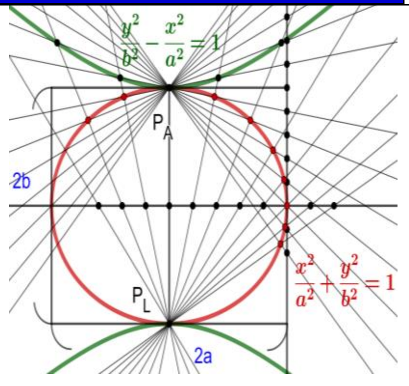

④ $n>m=1$，零梯五點形相似

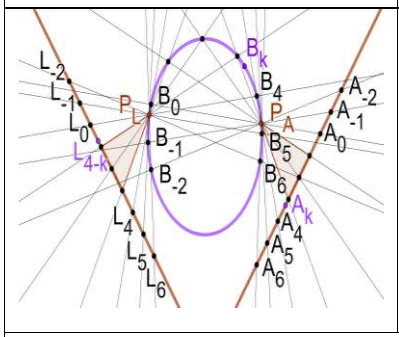
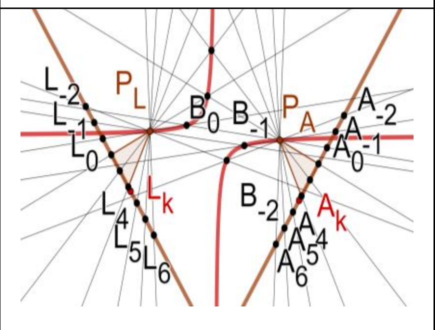
研究結果

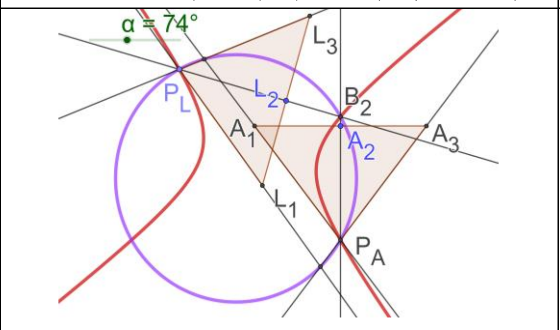

▲Thm. 1 拉拉 move 法

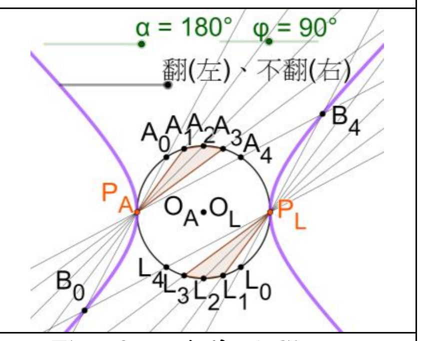

▲Thm. 2 點列 1234Shoot 法
投射倍率 $1:2:3:4$


▲Thm. 3 交錯等距拉拉 move 法
投射倍率 $d:(d+c):(2d+c):(2d+2c)$


▲Thm. 4 雙線束 Shoot 法



▲Thm. 5 ❶全等三角形 Shoot 法


❷等腰全等三角形 Shoot 法

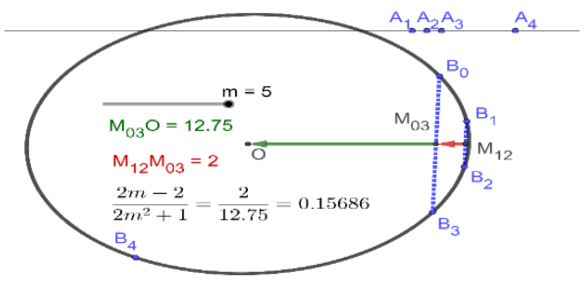
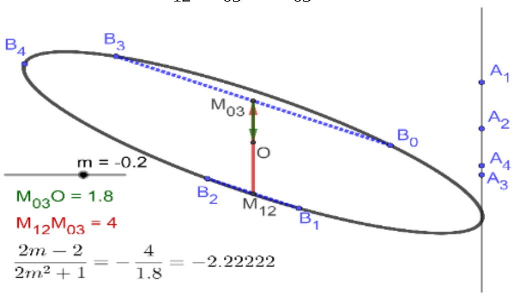
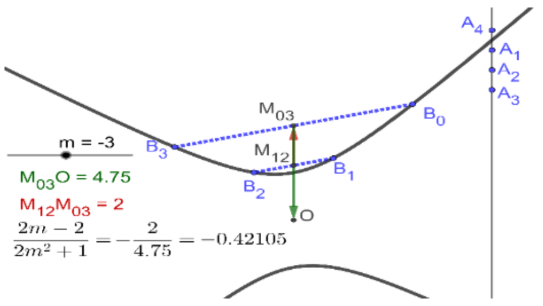

▲Thm. 6 超雙基圓 Shoot 法

討論與未來展望

一、 考慮滿足 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}=1:n:m$ 的點列 $l(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 及投射中心 $B_0\notin l$，$n,m\in\mathbb{R}$，以 $\Phi\cdot\overrightarrow{A_kB_0}=\overrightarrow{B_0B_k}$ 得 $\{B_k\}$，$k=1,2,3,4$

1. 可透過中點連線段特殊比例來定住二次曲線中心：

若 $n=1,\Phi=k$，則 $\{B_k\}$ 所決定的圓錐曲線會滿足 $\overline{M_{12}M_{03}}:\overline{M_{03}O}=(2m-2):(2m^2+1)$

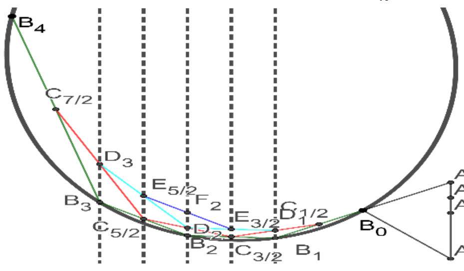
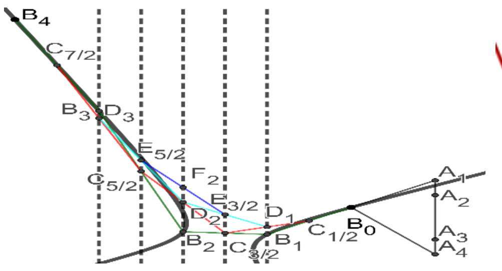
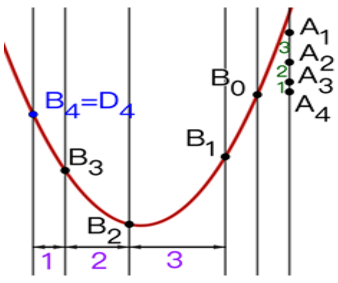
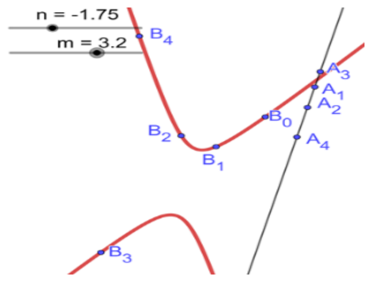
2. B 點集作中點皆落於五條相鄰等距且平行基線 l 之直線上：

若 $\Phi=k$，$\{B_k\}$ 相鄰兩點做中點，相鄰中點再做中點，則中點間連線會平行點列 $l(A_k)$

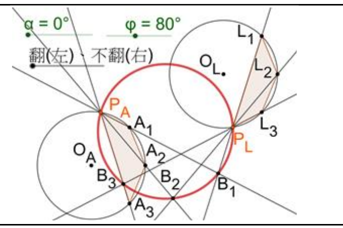
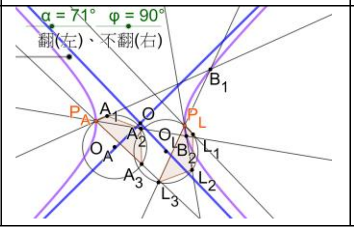
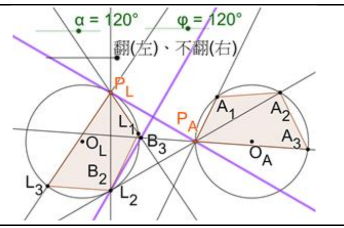
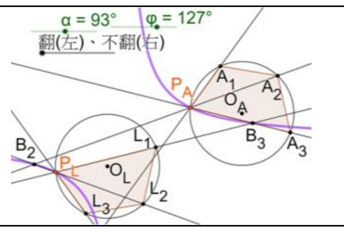
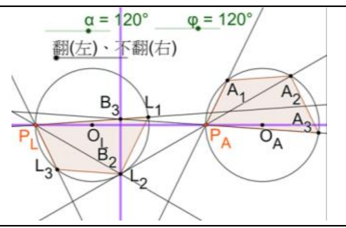
3. 廣義拉拉 move 點列製造法：

①若 $\Phi=\left[\dfrac{k+2}{3}\right]+\dfrac{1}{m}\left[\dfrac{k+1}{3}\right]+\dfrac{n}{m}\left[\dfrac{k}{3}\right]$，則 $\{B_k\}$ 屬於拋物線。分別更動 B_4, A_4，圖形會與 Thm. 1、Thm. 2 的結論一一對應

②若 $n<-1,\Phi=k$，則 $\{B_k\}$ 必屬於雙曲線或退化型。

二、超雙基圓 Shoot 法'： 固定一基圓，另一基圓平移，使得 O_A 與 O_L 重合，令此時的 $\angle A_2O_AL_2=\alpha$，$\varphi=\angle A_2O_AP_A$，$k=1,2,3$

翻正對應— $\alpha+\varphi\neq\pi$	未翻逆對應 $\overline{P_AB_2}\neq\overline{P_LB_2}$	未翻逆對應 $\overline{P_AB_2}=\overline{P_LB_2}$	翻逆對應— $\overline{P_AB_2}\neq\overline{P_LB_2}$	翻逆對應— $\overline{P_AB_2}=\overline{P_LB_2}$
				

參考資料

1. 朱德祥、朱維宗(2007)。高等幾何。高等教育出版社。
2. 黃家禮(2000)。幾何明珠。九章出版社。