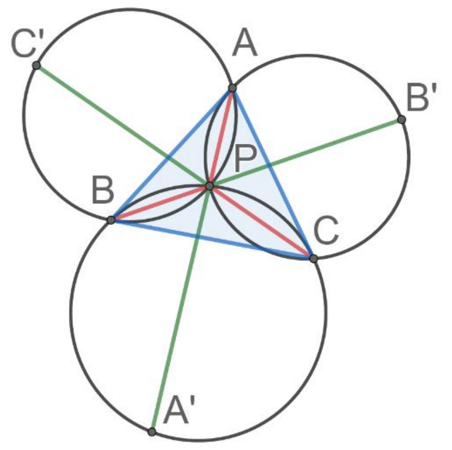
摘要

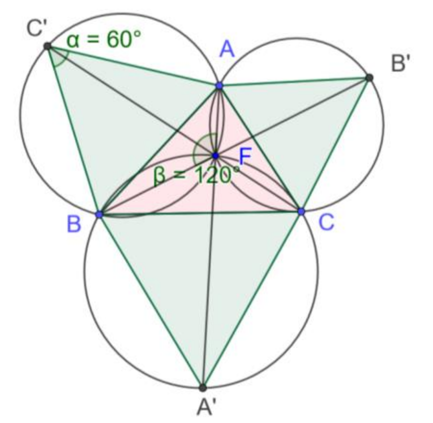
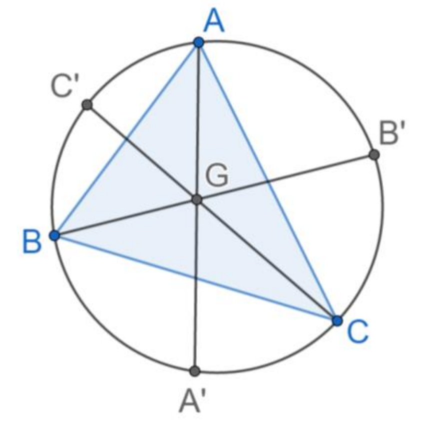
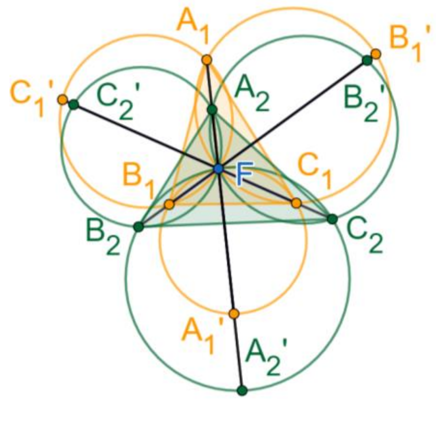
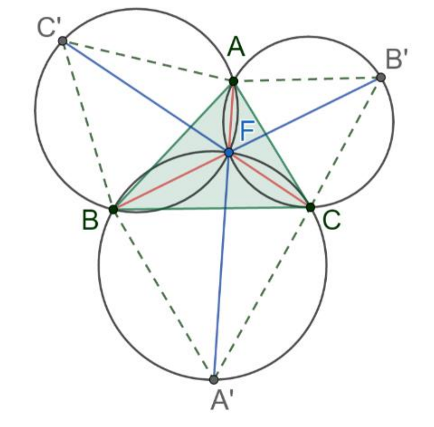
平面上，P 點為 $\triangle ABC$ 內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$ 這三個三角形的外接圓於 A'、B'、C'，若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，則 $\dfrac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\geq 8$，並以三角形的三內角來表示 P 點為費馬點、外心、內心、垂心、重心時的確切比值，且藉此比值的最小值來得到一特殊的三角函數不等式。最後推廣至空間，當 P 點為四面體 $ABCD$ 內任意一點時，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$、$\overleftrightarrow{DP}$ 分別與 $P-ABC$、$P-ABD$、$P-ACD$、$P-BCD$ 這四個四面體的外接球交於 A'、B'、C'、D'，則 $\dfrac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}\cdot\overline{PD'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}}\geq 81$。



研究動機

在 2017 國際科展的題目：「給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓 O 和重心 G，若 $\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$ 分別交 O 於 A'、B'、C'，則 $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\dfrac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}=6$」。恰巧當時數學課在介紹費馬點 F，於是我們先用 GGB 觀察線段的比值關係，設法找出相關的性質，以下是我們的測試結果，發現 $\dfrac{\overline{FA'}\cdot\overline{FB'}\cdot\overline{FC'}}{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}\geq 8$，等號成立時 $\triangle ABC$ 為正三角形，而且三內角都需小於 120°，費馬點才會在 $\triangle ABC$ 內部。

以ggb測試並觀察線段比值關係 → **研究平面上各個特殊點的情形** → **利用三角函數及三線性坐標探討不等式** → **在三維空間中探討線段比值關係** → **利用向量探討平面及空間中的恆等式** → **結論與討論**

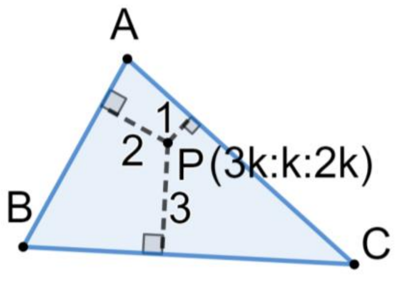
費馬點性質	2017 國際科展	測試結果	費馬證明
			
A、F、A' 三點共線 $\overline{AA'}=\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$ F、B、A'、C 四點共圓	$\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\dfrac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}=6$	$\dfrac{\overline{FA'}\cdot\overline{FB'}\cdot\overline{FC'}}{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}\approx 8.53332\geq 8$ $\dfrac{\overline{FA'}\cdot\overline{FB'}\cdot\overline{FC'}}{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}\approx 8.93767\geq 8$	$\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}=\dfrac{\overline{FB}+\overline{FC}}{\overline{FA}}\geq\dfrac{2\sqrt{\overline{FB}\cdot\overline{FC}}}{\overline{FA}}$ $\dfrac{\overline{FA'}\cdot\overline{FB'}\cdot\overline{FC'}}{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}\geq 8$

研究方法與過程

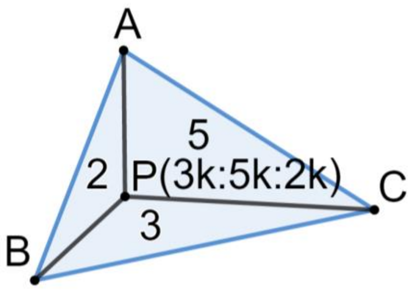
Ⅰ 預備定理

<Definition 1> 設 $\triangle ABC$ 為平面上一個三角形，P 為平面上任意一點。若點 P 至 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 的有向距離分別為 a、b 和 c，則對每個非零實數 k，有序三實數 $(ka:kb:kc)$ 稱為點 P 對 $\triangle ABC$ 的一組齊次三線性坐標。（圖一）

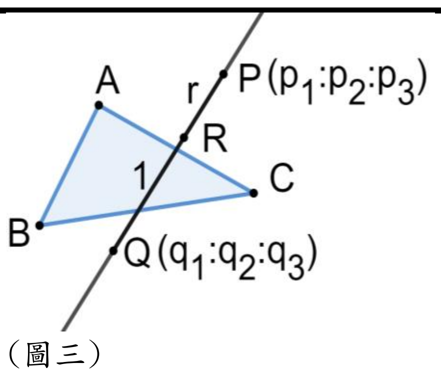
<Lemma 1> 若 $(v_1:v_2:v_3)$ 是點 P 對 $\triangle ABC$ 的一組三線性坐標，A、B、C 的直角坐標分別為 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c$，則點 P 的直角坐標 (x,y) 為 $\left(\dfrac{a_1\cdot v_1\cdot x_1+a_2\cdot v_2\cdot x_2+a_3\cdot v_3\cdot x_3}{a_1\cdot v_1+a_2\cdot v_2+a_3\cdot v_3},\dfrac{a_1\cdot v_1\cdot y_1+a_2\cdot v_2\cdot y_2+a_3\cdot v_3\cdot y_3}{a_1\cdot v_1+a_2\cdot v_2+a_3\cdot v_3}\right)$。



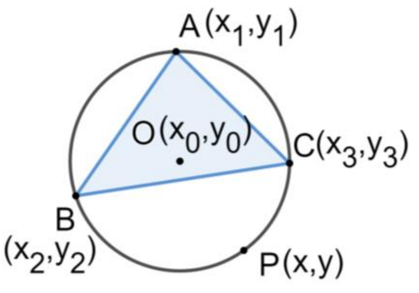
（圖一）



（圖二）



（圖三）



（圖四）

<Definition 2> 設 $\triangle ABC$ 為平面上一個三角形，P 為平面上任意一點。若 $\triangle PBC$、$\triangle PAC$、$\triangle PAB$ 的有向面積分別為 a、b 和 c，則對每個非零實數 k，有序三實數 $(ka:kb:kc)$ 稱為點 P 對 $\triangle ABC$ 的一組齊次面積坐標。（圖二）

<Lemma 3 分點公式> 設 $\triangle ABC$、P、Q、R 皆在同一平面上且 $\overrightarrow{PR}=r\cdot\overrightarrow{RQ}$，若 P、Q 對 $\triangle ABC$ 的規範化面積坐標為 $(p_1:p_2:p_3)$、$(q_1:q_2:q_3)$，則 R 對 $\triangle ABC$ 的規範化面積坐標為 $\left(\dfrac{p_1+r\cdot q_1}{1+r}:\dfrac{p_2+r\cdot q_2}{1+r}:\dfrac{p_3+r\cdot q_3}{1+r}\right)$（圖三）

（註：P 對 $\triangle ABC$ 的一組面積坐標為 $(u_1:u_2:u_3)$，令 $\lambda_i=\dfrac{u_i}{u_1+u_2+u_3},i=1,2,3$，則 $(\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3)$ 是點 P 對 $\triangle ABC$ 的規範化面積坐標，且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$）

<Lemma 4 外接圓方程式> 設圓 $O(x_0,y_0)$ 為 $\triangle ABC$ 外接圓，A、B、C 直角坐標為 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c$，若有一點 $P(x,y)$ 在圓 O 上，且 P 對 $\triangle ABC$ 的面積坐標為 $(u_1:u_2:u_3)$，則 $a^2\cdot u_2\cdot u_3+b^2\cdot u_3\cdot u_1+c^2\cdot u_1\cdot u_2=0$（圖四）

<Lemma 5(1)> 若 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，$_a\triangle BPC:{}_a\triangle APC:{}_a\triangle APB=l:m:n$ 的充要條件為 $l\cdot\overrightarrow{PA}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$

<Lemma 5(2)> 若 P 為四面體 $ABCD$ 內一點，$V_{PBCD}:V_{PACD}:V_{PABD}:V_{PABC}=k:l:m:n$ 的充要條件為 $k\cdot\overrightarrow{PA}+l\cdot\overrightarrow{PB}+m\cdot\overrightarrow{PC}+n\cdot\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{0}$

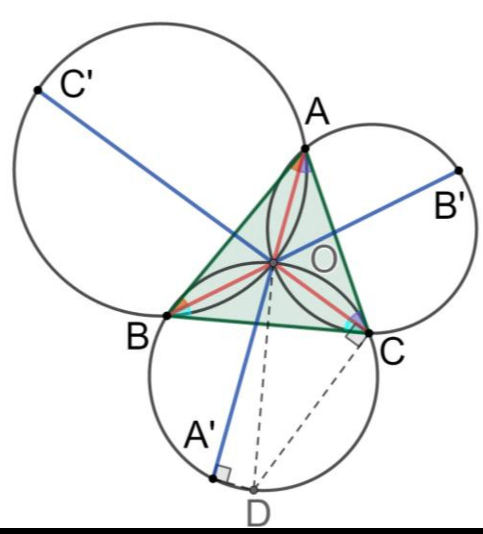
Ⅱ 主定理

(一)當 P 點為 $\triangle ABC$ 內一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$ 的外接圓於 A'、B'、C'，則

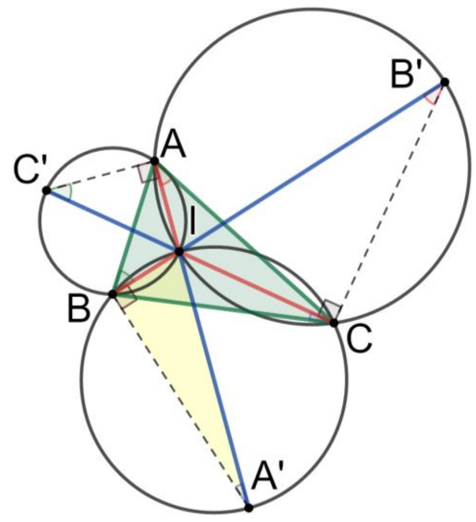
$\dfrac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\geq 8$，且僅有 $\triangle ABC$ 為正三角形時等號成立。

	G 為特殊點	真實比值	證明方式	$\triangle ABC$ 條件
Theorem 1	F 費馬點	$\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}=\dfrac{\overline{FB}+\overline{FC}}{\overline{FA}}$	算幾不等式	三內角小於 120°
Theorem 2	O 外心	$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\dfrac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}$	三角函數、三角恆等式、算幾不等式	銳角三角形
Theorem 3	I 內心	$\overline{IA'}\cdot\sin\dfrac{C}{2}=\overline{IB}$	三角函數不等式	任意三角形
Theorem 4	H 垂心	$\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}=\dfrac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}$	三線性座標、三角恆等式、算幾不等式	銳角三角形
Theorem 5	G 重心	$\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=\dfrac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2}$	面積座標、外接圓方程式，中線定理、算幾不等式	任意三角形

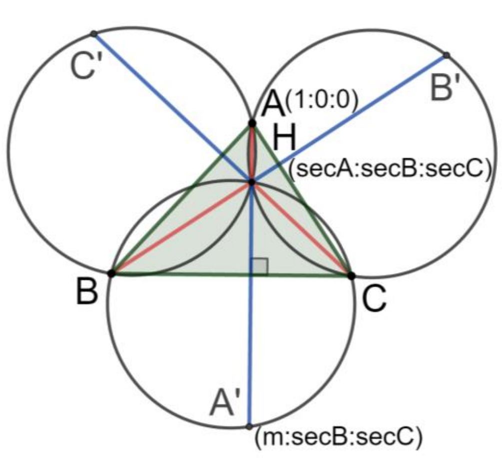
●外心



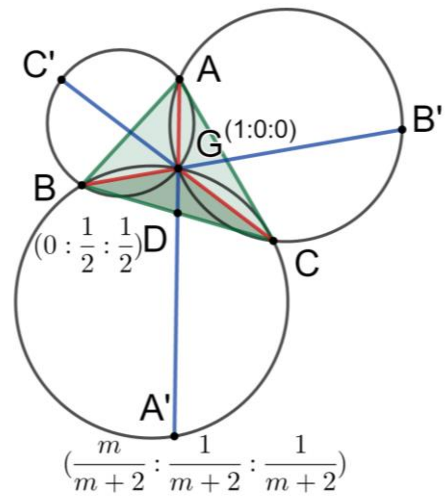
●內心



●垂心



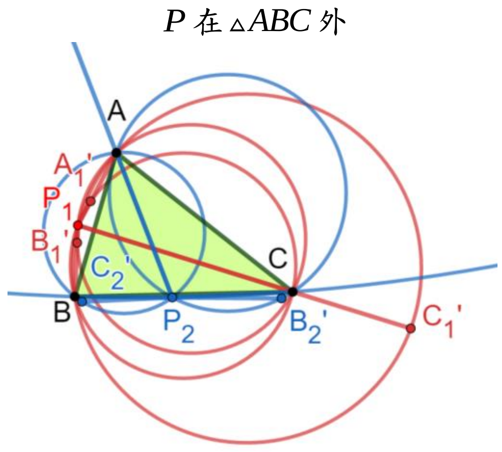
●重心



Theorem 6	P 為 $\triangle ABC$ 內任意一點，則 $\dfrac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\geq 8$，且當等號成立時 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=2$
Theorem 7	P 為四面體 $ABCD$ 內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$ 交球 $PBCD$ 於另一點 A'，$\overleftrightarrow{BP}$ 交球 $PACD$ 於另一點 B'，$\overleftrightarrow{CP}$ 交球 $PABD$ 於另一點 C'，$\overleftrightarrow{DP}$ 交球 $PABC$ 於另一點 D'，則 $\dfrac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}\cdot\overline{PD'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}}\geq 81$，且當等號成立時 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=\dfrac{\overline{PD'}}{\overline{PD}}=3$

<ggb 測試>

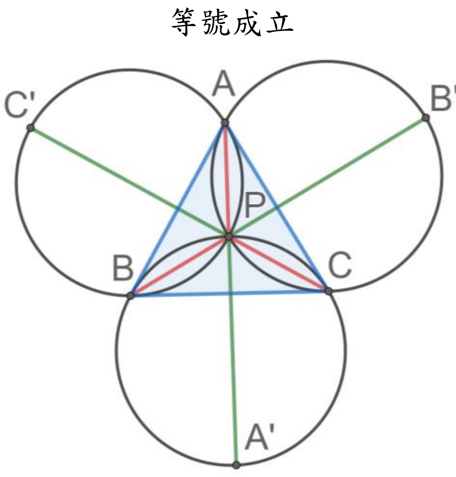
P 在 $\triangle ABC$ 外



$\dfrac{\overline{P_1A_1'}\cdot\overline{P_1B_1'}\cdot\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1A}\cdot\overline{P_1B}\cdot\overline{P_1C}}\approx 0.126<2^3$

$\dfrac{\overline{P_2A_2'}\cdot\overline{P_2B_2'}\cdot\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2A}\cdot\overline{P_2B}\cdot\overline{P_2C}}\approx 20.238>2^3$

等號成立

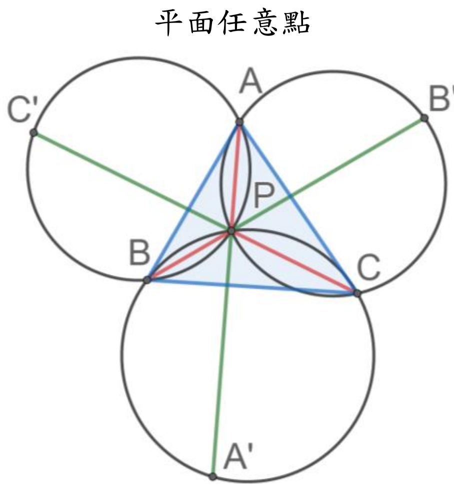


條件：

$\triangle ABC$ 為正三角形

且 P 為重心

平面任意點

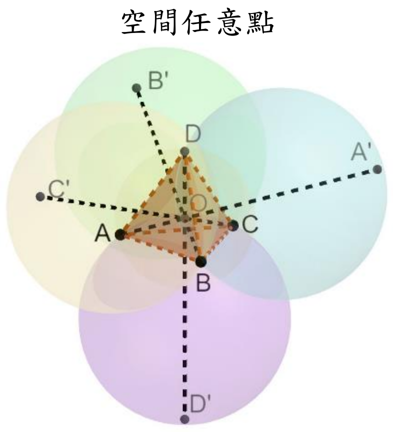


<proof>令 $\overrightarrow{AP}=\lambda_A\cdot\overrightarrow{PA'}$，則 $-\lambda_A l\cdot\overrightarrow{PA'}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow -\lambda_A l\cdot\overline{PA'}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2=0$，

$\Rightarrow \dfrac{1}{\lambda_A}=\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\dfrac{m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2}\geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{m\cdot\overline{PB}^2\cdot n\cdot\overline{PC}^2}{l^2\cdot\overline{PA}^4}}$

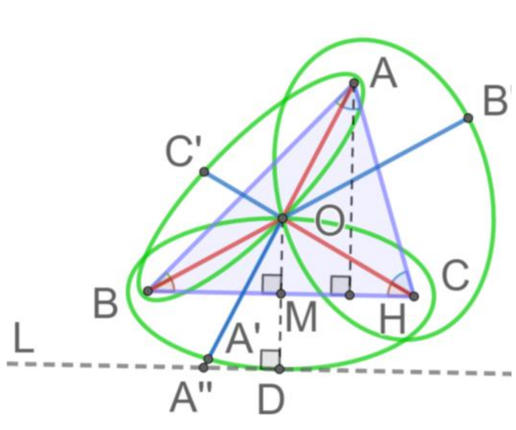
空間任意點



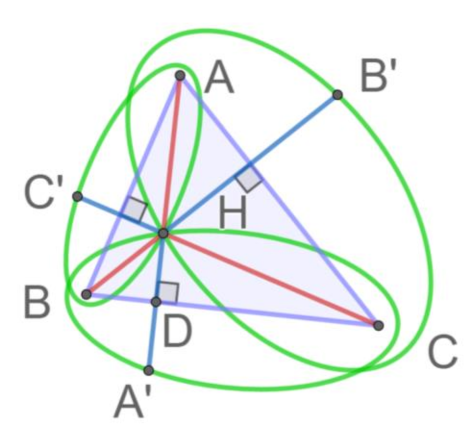
(二)P 點為 $\triangle ABC$ 內一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交以三邊為焦距或長軸，P 為其上一點的橢圓於 A'、B'、C'

	P 為特殊點	橢圓作法	$\triangle ABC$ 條件	滿足性質	真實比值
Theorem 8	O 外心	以三邊為焦距	銳角三角形	$\dfrac{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\overline{OC'}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}}\leq 1$	$\dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}=2\cdot\dfrac{1-\cot B\cot C}{1+\cot B\cot C}$
Theorem 9	H 垂心	以三邊為焦距	銳角三角形	$\dfrac{\overline{HA'}\cdot\overline{HB'}\cdot\overline{HC'}}{\overline{HA}\cdot\overline{HB}\cdot\overline{HC}}\leq 1$	$\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}=\dfrac{2\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}$
Theorem 10	G 重心	以三邊為焦距	任意三角形	$\dfrac{\overline{GA'}\cdot\overline{GB'}\cdot\overline{GC'}}{\overline{GA}\cdot\overline{GB}\cdot\overline{GC}}=1$	$\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}=\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$
Theorem 11	O 外心	以三邊為長軸	$45^\circ\leq\angle A,\angle B,\angle C<90^\circ$	$\dfrac{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\overline{OC'}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}}\leq 1$	$\dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}=2\cdot\dfrac{1-\cot B\cot C}{1+\cot B\cot C}$

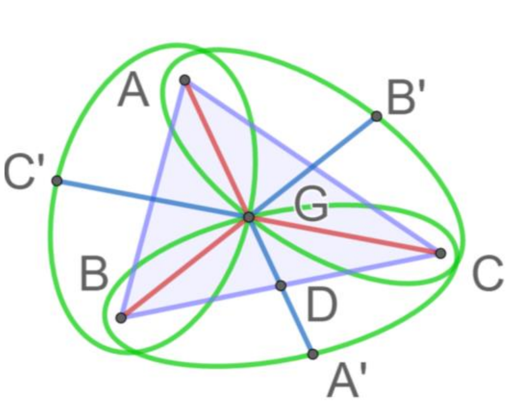
●外心(以其中兩點為焦點)



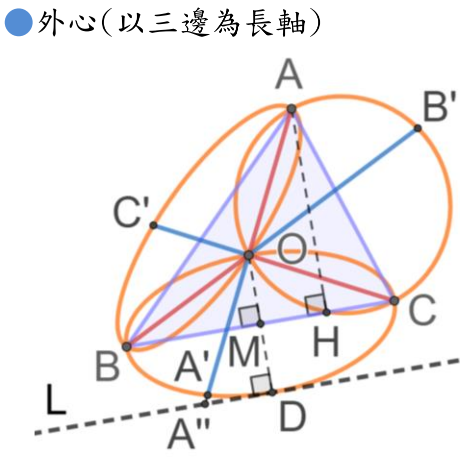
●垂心



●重心



●外心(以三邊為長軸)



Ⅲ 應用

一、透過任意點的結果，我們可以輕易得到許多特殊的三角函數不等式的結果：

1. $\frac{(\sqrt{3}\sin A-2\cdot\sin B\sin C)\cdot(\sqrt{3}\sin B-2\cdot\sin A\sin C)\cdot(\sqrt{3}\sin C-2\cdot\sin A\sin B)}{\sin A\sin B\sin C\cdot(\sqrt{3}\cos A-\sin A)\cdot(\sqrt{3}\cos B-\sin B)\cdot(\sqrt{3}\cos C-\sin C)}\ge 8$ 2. $\frac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\cdot\frac{1+\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}\cdot\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\ge 8$

二、比值相加=1：P 為 $\triangle ABC$ 內任意一點，$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$；$P$ 為四面體 $ABCD$ 內任意一點，$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}+\frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{DD'}}=1$

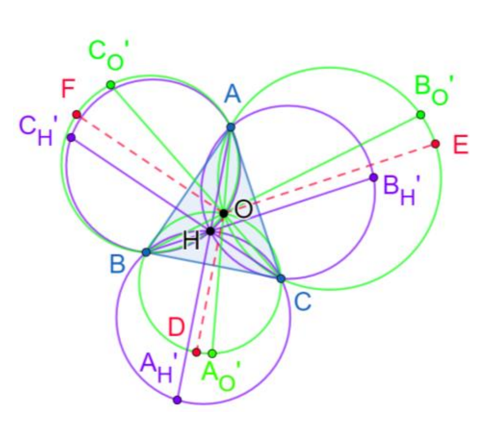
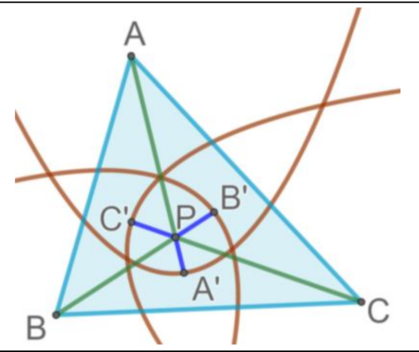
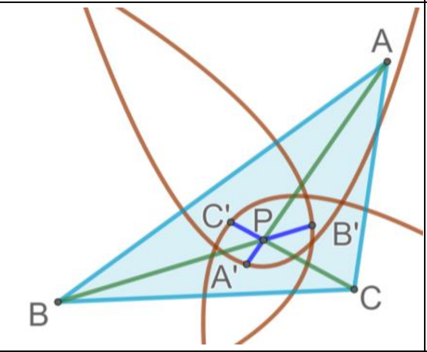
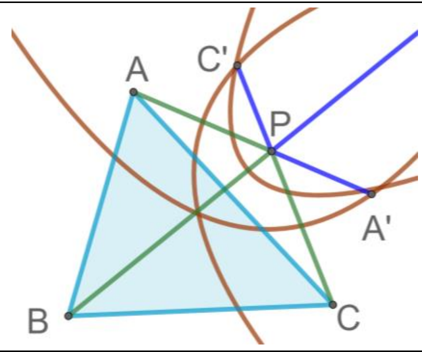
研究結果

平面	銳角三角形時成立	外心	$\frac{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\overline{OC'}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}}=\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\ge 2^3$	垂心	$\frac{\overline{HA'}\cdot\overline{HB'}\cdot\overline{HC'}}{\overline{HA}\cdot\overline{HB}\cdot\overline{HC}}=\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\ge 2^3$
	最大角 $<120^\circ$ 時成立	費馬點	$\frac{\overline{FA'}\cdot\overline{FB'}\cdot\overline{FC'}}{\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}}=\prod_{cyc}\frac{\sin A\cdot(\sqrt{3}\sin A-\sin 2A)}{\sin B\sin C\cdot(\sqrt{3}\cos A-\sin A)}$ $=\frac{(\sqrt{3}\sin A-\sin 2A)\cdot(\sqrt{3}\sin B-\sin 2B)\cdot(\sqrt{3}\sin C-\sin 2C)}{\sin A\sin B\sin C\cdot(\sqrt{3}\cos A-\sin A)\cdot(\sqrt{3}\cos B-\sin B)\cdot(\sqrt{3}\cos C-\sin C)}\ge 8$		
	任意三角形時成立	內心	$\frac{\overline{IA'}\cdot\overline{IB'}\cdot\overline{IC'}}{\overline{IA}\cdot\overline{IB}\cdot\overline{IC}}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\times\sin\frac{B}{2}\times\sin\frac{C}{2}}\ge 2^3$	△內任意一點	1. $\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\ge 2^3$ 2. $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$ 3. $\frac{r_A\cdot r_B\cdot r_C}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\ge 1$
		重心	$\frac{\overline{GA'}\cdot\overline{GB'}\cdot\overline{GC'}}{\overline{GA}\cdot\overline{GB}\cdot\overline{GC}}=$ $\prod_{cyc}\frac{\left[\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\cdot\overline{BC}^2+\overline{BC}\cdot(\overline{AB}\cdot\cos B+\overline{AC}\cdot\cos C)\right]}{(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A)}\ge 2^3$		
空間	四面體內任意一點	1. $\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}\cdot\overline{PD'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}}\ge 3^4$ 2. $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}+\frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{DD'}}=1$			

橢圓	以三邊為焦距	銳角三角形時成立	1. $\frac{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\overline{OC'}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}}\le 1$ 2. $\frac{\overline{HA'}\cdot\overline{HB'}\cdot\overline{HC'}}{\overline{HA}\cdot\overline{HB}\cdot\overline{HC}}\le 1$	任意三角形時成立	$\frac{\overline{GA'}\cdot\overline{GB'}\cdot\overline{GC'}}{\overline{GA}\cdot\overline{GB}\cdot\overline{GC}}=1$
	以三邊為長軸	$45^\circ\le$ 三內角 $<90^\circ$	1. $\frac{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\overline{OC'}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}}\le 1$ 2. $\frac{\overline{HA'}\cdot\overline{HB'}\cdot\overline{HC'}}{\overline{HA}\cdot\overline{HB}\cdot\overline{HC}}=\prod_{cyc}\frac{2\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\le 1$ 3. $\frac{\overline{GA'}\cdot\overline{GB'}\cdot\overline{GC'}}{\overline{GA}\cdot\overline{GB}\cdot\overline{GC}}=1$		

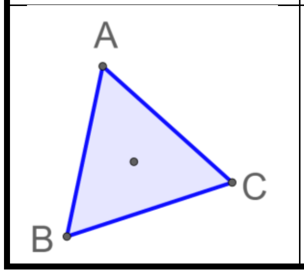
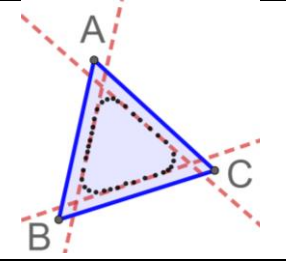
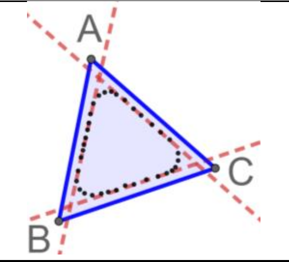
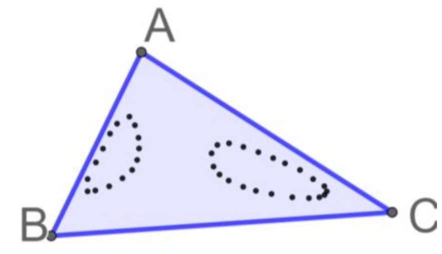
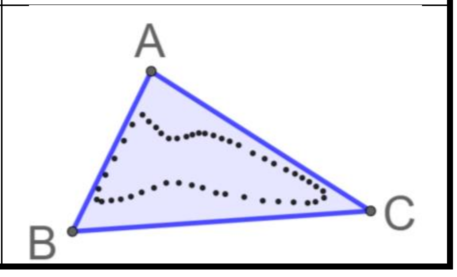
討論與未來展望

(一) 將圓換成其他圖形探討比值關係：令 P 為任意 $\triangle ABC$ 內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交以 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 為準線，P 為焦點的拋物線於另一點 A'、B'、C'，我們發現 $\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\le\frac{1}{64}$。

當 $\triangle ABC$ 是銳角三角形且 P 在 $\triangle ABC$ 內	當 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形且 P 在 $\triangle ABC$ 內	當 P 在 $\triangle ABC$ 外	
			
$\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\approx 0.01502<\frac{1}{64}$	$\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\approx 0.01166<\frac{1}{64}$	$\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\approx 36.67423>\frac{1}{64}$	外心、垂心直觀

(二)外心和垂心的幾何直觀：整組比值 $\frac{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\overline{OC'}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}}=\frac{\overline{HA'}\cdot\overline{HB'}\cdot\overline{HC'}}{\overline{HA}\cdot\overline{HB}\cdot\overline{HC}}=\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}$，相對應的比值 $\frac{\overline{OA_O'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA_H'}}{\overline{HA}}$、$\frac{\overline{OB_O'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{HB_H'}}{\overline{HB}}$、$\frac{\overline{OC_O'}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{HC_H'}}{\overline{HC}}$ 也相同。

(三)在固定比值下探討任意點軌跡；

$\triangle ABC$ 為正三角形			$\triangle ABC$ 為任意三角形	
$\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}=8$	$\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}=9$	$\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}=10$	$\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}=9$	$\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}=10$
				

參考資料

1. 石博允、錢昀(2017)，三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討。

2. 黃家禮(1997)，幾何明珠，台北市：九章出版社。

3. 趙文敏(1997)，三線性坐標與面積(一)-(五)，科學教育月刊 198-202 期。