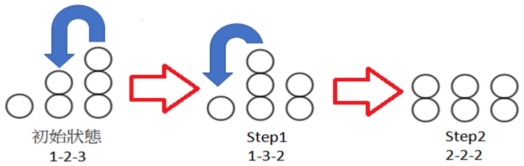
摘要

奇數的n個人分別拿著1、2　、⋯　、n　支筆，一次只能傳給左右相鄰的人一支筆，最後每個人要達到相同筆數，本研究主要依各種排列型態來探討如何得到最少總傳遞數^{m}T。首先假設n個人作直線排列，從筆數的排列為遞增開始探討，得到最少總傳遞數^{m}T為$\frac{1}{2}\cdot C_3^{n+1}$；若筆數的排列為非遞增，則得到$^{m}T$的上、下界分別為$\frac{1}{2}\cdot C_3^{n+1}$、$\frac{3}{4n}\cdot C_3^{n+1}$，並提供兩個演算法以求得確切$^{m}T$的值。第二，使$n$個人作環狀排列，當筆數從一人開始連續遞增時，則$^{m}T=\sum_{k=0}^{\frac{S-1}{2}}(S-k)\times(2k+1)+\sum_{k=1}^{\frac{S-1}{2}}\left[\frac{(S-2k+1)^2}{2}\right]$ or $\sum_{k=0}^{\frac{S}{2}-1}\left[(S-k)\times(2k+1)+\frac{(S-2k)^2}{2}\right]$ $(S=\frac{n-1}{2})$；若筆數為任意排列，則提供一個演算法來求得確切^{m}T的值。最後，改變型態於棋盤格式的矩陣排列，傳遞方向可為上、下、左、右，驚奇的是此為直線排列型態結論應用。

研究動機

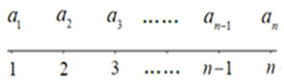
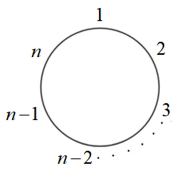
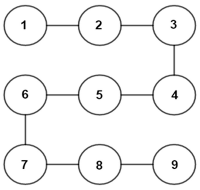
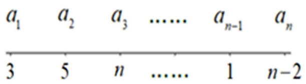
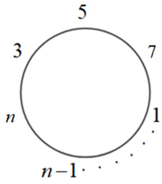
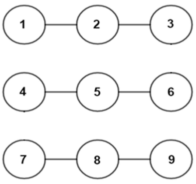
高一下課時間，班上有同學在玩一種叫競技疊杯的運動，我們對此深感興趣。根據班上疊杯的規則，疊杯是在比如何在最短的時間內，利用有限的杯子橫移使每堆的杯子數達到相同的數量。我們不禁好奇，若在移動速度相同的情況下，如何達到總移動次數最少。而為了方便研究，最後我們將其改成傳筆的問題。下圖為將本來杯數為1-2-3的排列疊成2-2-2。

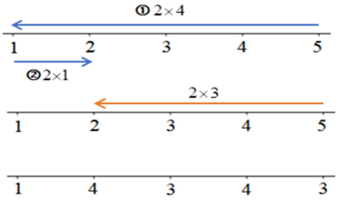


研究方法與過程

一、名詞定義

1. 排列方式：

順序直線 $L(1,2,3,......,n-1,n)$	**順序圓** $C(1,2,3,......,n-1,n)$	**蛇行矩陣** $S[a_{ij}]_{3\times3}$
		
亂序直線 Ex：$L(3,5,n,......,1,n-2)$	**亂序圓** Ex：$C(5,7,1,......,n,3)$	**順序矩陣** $O[a_{ij}]_{3\times3}$
		



2. **傳遞數**T＝次數×間隔

Ex.　①5 傳 2 支筆給 1

　　②1 傳 1 支筆給 2

$T = 2\times4+2\times1=10$

3. a傳給b的傳遞數以T_{ab}表示

4. **最少傳遞數**：以$^{m}T_{排列方式}$表示

5. 傳給相鄰的人 1 支筆，稱為**一次傳遞**

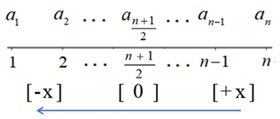
6. **平衡狀態**：當所有人都達到平均筆數時，即達到平衡狀態；平均筆數＝目標筆數＝μ

7.　排列中第i個人用a_i表示，a_i所持有的筆數以$N(a_i)$表示

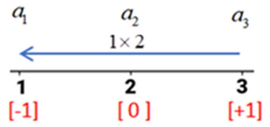
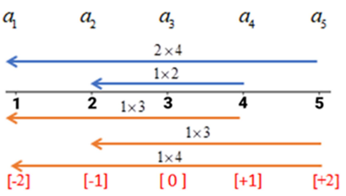
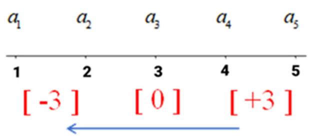
二、順序直線

定理 1：如果排列規則為 L(1,　2,　⋯⋯　,　$n-1$,　n)，則最少傳遞數

$$^{m}T_{L(1,2,......n-1,n)}=\frac{n^3-n}{12}=\frac{1}{2}\cdot C_3^{n+1}$$



<說明>

Ex1. $^{m}T_{L(1,2,3)}=1\times2=2$	**Ex2.** $^{m}T_{L(1,2,3,4,5)}=1\times2+2\times4=10$	
		
步驟 1：a_3 傳 1 支筆給 a_2 **步驟 2**：a_2 傳 1 支筆給 a_1	**步驟 1**：a_4 傳 1 支筆給 a_2 **步驟 2**：a_5 傳 2 支筆給 a_1	**《結論 1》** 1. 差距值互為相反數之兩數進行傳遞 2. 將差距值為 0 的數分成左右兩群

三、亂序直線

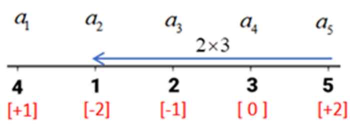
定理 2：當有 n 個人按照直線排列，則 $\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} k = \frac{n^2-1}{8} \le {}^{m}T_L \le \frac{n^3-n}{12} \Rightarrow \frac{3}{4n}\cdot C_3^{n+1} \le {}^{m}T_L \le \frac{1}{2}\cdot C_3^{n+1}$

<說明>

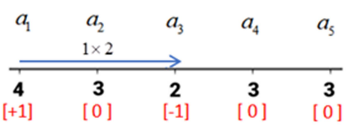
Ex3. L(4, 1, 2, 3, 5)

① $T_{L(4,1,2,3,5)} = 2\times3+1\times2=8$

Step 1.

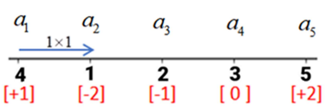


Step 2.

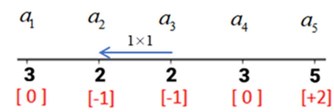


② ${}^{m}T_{L(4,1,2,3,5)} = 1\times1+1\times1+2\times2=6$

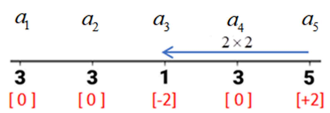
Step 1.



Step 2.

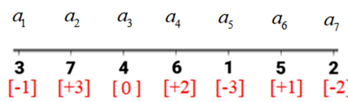


Step 3.

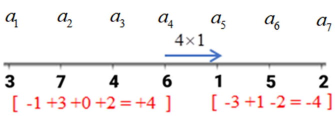


Ex4. L(3, 7, 4, 6, 1, 5, 2) ${}^{m}T_{L(3,7,4,6,1,5,2)} = 2\times2+8\times1=12$

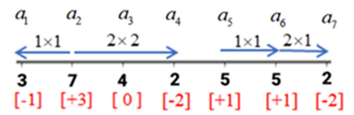
Step 1.



Step 2.



Step 3.



《結論 2》亂序直線無法利用差距值互為相反數之兩數進行傳遞得最少傳遞數

《結論 3》亂序直線可從任兩人中間分成兩群

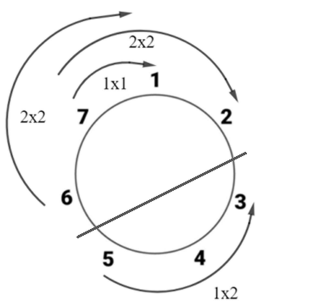
四、順序圓

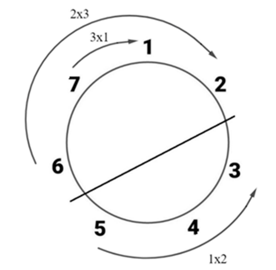
定理 3：如果排列規則為 C(1, 2, …… , $n-1$, n)，則最少傳遞數的通式，分成兩種情況。令 $S=\frac{n-1}{2}$**，則**

$n\equiv3 \pmod 4$ 時，${}^{m}T_{C(1,2,\ldots\ldots,n)} = \sum_{k=0}^{\frac{S-1}{2}} (S-k)\times(2k+1) + \sum_{k=1}^{\frac{S-1}{2}} \left[\frac{(S-2k+1)^2}{2}\right]$ 或 $n\equiv1 \pmod 4$ 時，${}^{m}T_{C(1,2,\ldots\ldots,n)} = \sum_{k=0}^{\frac{S}{2}-1} \left[(S-k)\times(2k+1) + \frac{(S-2k)^2}{2}\right]$

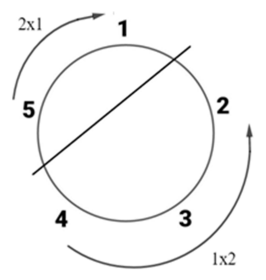
<說明>

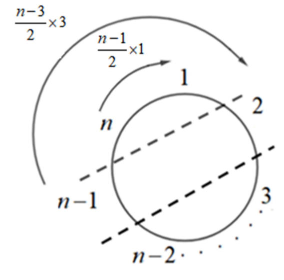
Ex5. C(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) ${}^{m}T_{C(1,2,3,4,5,6,7)} = 3\times1+2\times3+1\times2=11$





Ex6. C(1, 2, 3, 4, 5) ${}^{m}T_{C(1,2,3,4,5)} = 2\times1+1\times2=4$





《結論 4》1. 差距值互為相反數之兩數進行傳遞　　2. 利用分隔線使兩邊各自進行內部傳遞。

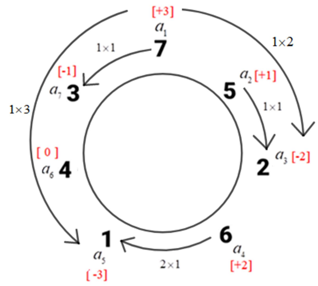
五、亂序圓

定理 4：當有 n 個人按照圓形排列，則 $\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} k \le {}^{m}T_C \le \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} k^2 \Rightarrow \frac{n^2-1}{8} \le {}^{m}T_C \le \frac{n^3-n}{24}$

<說明>

Ex8.C(7,5,2,6,1,4,3)

${}^{m}T_{C(1,2,6,4,3,5,7)} = 1\times7+2\times1=9$



<矩陣觀點>

我們定義矩陣變數由左至右的次序分別為 $T_{a_1a_3}$、$T_{a_1a_5}$、$T_{a_1a_7}$、$T_{a_2a_3}$、$T_{a_2a_5}$、$T_{a_2a_7}$、$T_{a_4a_3}$、$T_{a_4a_5}$、$T_{a_4a_7}$，可得係數矩陣。傳遞數 $S = T_{a_1a_3}\times2 + T_{a_1a_5}\times3 + T_{a_1a_7}\times1 + T_{a_2a_3}\times1 + T_{a_2a_5}\times3 + T_{a_2a_7}\times2 + T_{a_4a_3}\times1 + T_{a_4a_5}\times1 + T_{a_4a_7}\times3$

令 $T_{a_1a_3}=t_1$，$T_{a_1a_5}=t_2$，$T_{a_2a_7}=t_3$，$T_{a_4a_3}=t_4$

$\because t_1 \le 2, t_2 \le 3, t_3 \le 1, t_4 \le 2$ 又 $t_k \in \mathbb{N}\cup\{0\}0\}$

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&3\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&2\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0&2\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&3\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&1 \end{bmatrix}$$

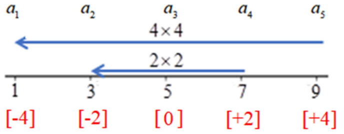
$$\begin{cases} T_{a_1a_3}=t_1\\ T_{a_1a_5}=t_2\\ T_{a_1a_7}=3-t_1-t_2\\ T_{a_2a_3}=2-t_1-t_4\\ T_{a_2a_5}=t_1-t_3+t_4-1\\ T_{a_2a_7}=t_3\\ T_{a_4a_3}=t_4\\ T_{a_4a_5}=4-t_1-t_2+t_3-t_4\\ T_{a_4a_7}=t_1+t_2-t_3-2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 0\le t_1 \le 2\\ 0\le t_2\le3\\ 0\le t_3\le1\\ 0\le t_4\le2\\ 0\le 3-t_1-t_2\le1\\ 0\le 2-t_1-t_4\le1\\ 0\le t_1-t_3+t_4-1\le1\\ 0\le 4-t_1-t_2+t_3-t_4\le2\\ 0\le t_1+t_2-t_3-2\le1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le t_2\le3\\ 1\le t_1\le2\\ 0\le t_4\le1\\ t_3=0 \end{cases}$$

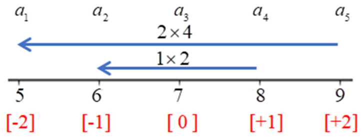
$\therefore S = 5t_1+4t_2-3t_3+2t_4 \ge 5\times1+4\times1-3\times0+2\times0=9$

應用一、公差不為1與平均筆數增加

Ex9.L(1,3,5,7,9) ${}^{m}T_{L(1,3,5,7,9)} = 2\bullet{}^{m}T_{L(1,2,3,4,5)}$



Ex10.L(5,6,7,8,9) ${}^{m}T_{L(5,6,7,8,9)} = {}^{m}T_{L(1,2,3,4,5)}$



應用二、矩陣

定理5： 蛇形矩陣 $S[a_{ij}]_{K\times N}$

令 $N=2n+1$, $K=2k+1$, $n,k\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow {}^{m}T_{[a_{ij}]_{K\times N}} = \frac{n(n+1)(2n+1)+k(k+1)(2k+1)(2n+1)^2}{3}$$

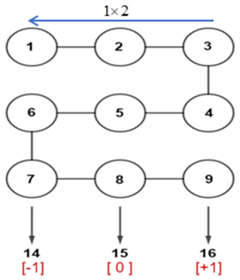
定理6： 順序矩陣 $O[a_{ij}]_{K\times N}$

令 $N=2n+1$, $K=2k+1$, $n,k\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow {}^{m}T_{O[a_{ij}]_{K\times N}} = \frac{n(n+1)(2n+1)(2k+1)+k(k+1)(2k+1)(2n+1)^2}{3}$$

<說明>

Ex11. $S[a_{ij}]_{3\times3}$ ${}^{m}T_{S[a_{ij}]_{3\times3}} = 1\times2+5\times1+6\times1+7\times1=20$



初始動作:計算每行(列)鉛直(水平)總和

步驟1(水平傳遞)： a_{13} 傳1支筆給 a_{11}

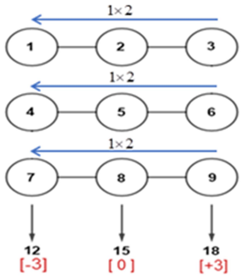
步驟2(鉛直傳遞)：

① a_{31} 傳2支給 a_{21}，a_{21} 傳3支給 a_{11}

② a_{32} 傳3支給 a_{22}，a_{22} 傳3支給 a_{12}

③ a_{33} 傳4支給 a_{23}，a_{23} 傳3支給 a_{13}

Ex12. $O[a_{ij}]_{3\times3}$ ${}^{m}T_{O[a_{ij}]_{3\times3}} = 1\times2\times3+6\times3=24$



初始動作：計算每行(列)鉛直(水平)總和

步驟1 水平傳遞：

a_{13}、a_{23}、a_{33} 分別傳1支筆給 a_{11}、a_{21}、a_{31}

步驟2 鉛直傳遞：

① a_{31}、a_{32}、a_{33} 分別傳3支筆給 a_{21}、a_{22}、a_{23}

② a_{21}、a_{22}、a_{23} 分別傳3支筆給 a_{11}、a_{12}、a_{13}

研究結果

順序直線演算法

1. ‧把每人的筆數都用差距值表示
2. ‧以差距值為0的數為中心，將左右兩邊的差距值分別累加起來，分成左右兩個群體。設其中一邊為+z，另一邊為-z
3. ‧接著由+z傳的群體傳z支筆給-z的群體，傳完後這兩個群體各自在其內部分配筆數即可以最少傳遞數完成傳遞

亂序直線演算法

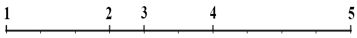
1. ‧把每人的筆數都用差距值表示
2. ‧從排列中任意兩數中間切開，將切點的左右兩邊所有數的差距值分別累加起來，分成左右兩個群體。設其中一邊為+z，右邊為-z
3. ‧接著由+z傳的群體傳z支筆給-z的群體，傳完後這兩個群體各自在其內部分配筆數即可以最少傳遞數完成傳遞

亂序圓演算法

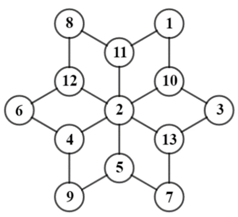
1. ‧先以差距值表示
2. ‧假設正差距值分別傳遞至每個負差距值的傳遞數(2者間的傳遞數)
3. ‧藉由2者間傳遞數的方程式與矩陣，以最少的變數表示出2者間的傳遞數
4. ‧最後由2者間的傳遞數的上下界，得到總傳遞數的最小值

討論與未來展望

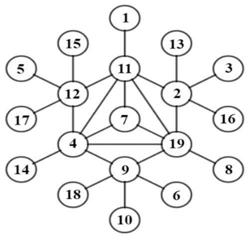
1. 矩陣排列不僅可以上下左右傳遞，還可以斜向傳遞。
2. 改變基本距離單位，從每個人之間的距離都等於1，推廣到不完全相等。如右圖：



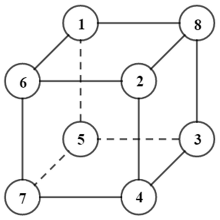
3. 發展出更多的圖形排列，如圖(1)、圖(2)、 圖(3)。
4. 前面我們算出順序直線之 ${}^{m}T=\frac{1}{2}\cdot C_3^{n+1}=\frac{1}{2}\cdot(C_2^n+C_3^n)$，而亂序直線的 ${}^{m}T$ 的上、下界分別為 $\frac{1}{2}\cdot C_3^{n+1}=\frac{1}{2}\cdot(C_2^n+C_3^n)$、$\frac{3}{4n}\cdot C_3^{n+1}=\frac{3}{4n}\cdot(C_2^n+C_3^n)$，我們想要找出更直觀的看法與遞迴關係式。
5. 原本每個人的筆數是完全相異的，若把筆數改成不完全相異，觀察會得出什麼樣的結果。



圖(1)



圖(2)



圖(3)

參考資料

[1]. 翰林版高中數學課本第二冊 1-1 數列、1-2 級數

[2]. 排序不等式 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8E%92%E5%BA%8F%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%BC%8F