Comparação de Métodos de Comparação de Ruído Acústico

Antônio Nascimento, Felipe Farias e Marília Alves

Stanford University

Maio de 2017

Seleção de Sinais

- Em seleção de sinais, sinais considerados ótimos são os que minimizam a probabilidade de erro P_e.
- Caso de duas hipóteses:
  - Há duas hipóteses h_1 e h_2.
  - Os sinais são descritos como os processos $p_1(x)$ e $p_2(x)$
  - Qual conjunto de parâmetros α ou β **minimiza** P_e.
- Nem sempre é possível expressar analiticamente a probabilidade de erro.

Medidas de Distância

- Descrição numérica do quão longe estão dois objetos.
  - Pearson (1921)
  - Estatística-D^2 de Mahalanobis (1925)
  - Função Discriminante Linear de Fisher (1936)
  - **Divergência** de Jeffreys (1947)
  - **Distância de Bhattacharyya** (1943)
- Não há relação direta com a probabilidade de erro.

A Divergência

- Introduzida por Jeffreys em 1947.

  Dada a taxa de similaridade

$$L(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$$

  A divergência

$$J = E_1[\ln L(x)] - E_2[\ln L(x)]$$

  Em que

$$E_i[\ln L(x)] = \int [\ln L(x)] p_i(x) dx, i = 1, 2$$

A Divergência em Seleção de Sinais

- Parâmetro α melhor que β se:
  - $J(\alpha) > J(\beta)$
- Depende apenas da média de $p_1(x)$ e $p_2(x)$
- **Se $J(\alpha) > J(\beta)$, há um conjunto de probabilidades *a priori* que**

$$P_e(\alpha, \pi) < P_e(\beta, \pi)$$

A Distância de Bhattacharyya

- Introduzida por Bhattacharyya em 1943.

$$B = \text{a distância de Bhattacharyya } = -\ln \rho$$

.

Em que ρ é o coeficiente de Bhattacharyya dado por

$$\rho = \int \sqrt{p_1(x)p_2(x)dx}$$

.

A Distância de Bhattacharyya em Seleção de Sinais

- Parâmetro α melhor que β se:
  - $B(\alpha) > B(\beta)$, ou analogamente $\rho(\alpha) < \rho(\beta)$.
- **Se $B(\alpha) > B(\beta)$, há um conjunto de probabilidades *a priori* que**

$$P_e(\alpha, \pi) < P_e(\beta, \pi)$$

Aplicações em Seleção de Sinais

- Processos Gaussianos com Funções de Valor Médio Desiguais
- Processos Gaussianos com Funções de Covariância Desiguais

Processos Gaussianos com Funções de Valor Médio Desiguais - 1

Dados dois processos Gaussianos:

$$h_1 : x(t) = m_1(t) + n(t)$$

$$h_2 : x(t) = m_2(t) + n(t)$$

$$t \in T, m_1 \neq m_2$$

Energia:

$$\int_T {m_i}^2(t)dt = E, i = 1, 2$$

Coeficiente de correlação:

$$\int_T m_1(t)m_2(t)dt = E\mu$$

Processos Gaussianos com Funções de Valor Médio Desiguais - 2

- **Quais os valores de m_1 e m_2 que maximizam B e J?**

$$B = \frac{1}{8}J = \frac{1}{8}\frac{2E}{N_0}(1-\mu)$$

- Para maximizar B e J, $m_i(t)$ devem ser antipodais, ou seja:

$$m_1(t) = -m_2(t)$$

Processos Gaussianos com Funções de Covariância Desiguais - 1

- Dados dois sinais Gaussianos transmitidos por L canais.

$$h^{(i)} : x_k(t) = \alpha_k m_2(t) + n_k(t), k = 1, ..., L, i = 1, 2$$

Com energia

$$\int_T {m_i}^2(t)dt = E/L, i = 1, 2$$

Qual o número ideal de canais?

Processos Gaussianos com Funções de Covariância Desiguais - 2

Supondo os dois canais ortogonais

- Pela Divergência

$$J = \frac{R^2}{R+L}, R = \frac{2E\sigma^2}{N_0}$$

- Pela distância de Bhattacharyya

$$\rho = e^{-B} = \frac{\left(1+\frac{R}{L}\right)^L}{\left(1+\frac{R}{2L}\right)^{2L}}, R = \frac{2E\sigma^2}{N_0}$$

$$L_{opt} = R/3.08$$

Algumas outras propriedades de B e J

- Interpretação Geométrica.
  - Relação de ρ com a informação de Fisher
- Distância Variacional de Kolmogorov
  - Limites Superiores e Inferiores da Probabilidade de Erro
- Fórmulas Explícitas

Interpretação Geométrica

- Cada valor $\sqrt{p_i(x)}$ é o cosseno da direção de dois vetores no espaço de x.
- O coeficiente de Bhattacharyya é o cosseno do ângulo entre os dois vetores.

$$\rho = cos\triangle$$

$$\triangle = \text{ângulo entre os vetores}$$

$$0 < \triangle < \pi/2$$

$$0 < \rho < 1$$

Relação de ρ com Informação de Fisher

Supondo $p(x|\theta), \theta, 0 \leq \theta \leq 1$ e usando a representação geométrica.

$$\cos \delta s = \int \sqrt{p(x|\theta)p(x|\theta + \delta\theta)}dx \doteq 1 - \frac{(\delta\theta)^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\dot{p}(x|\theta)]^2}{p(x|\theta)} dx$$

No limite em que δs e $\delta\theta$ tendem a zero nós obtemos

$$(\frac{ds}{d\theta})^2 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\dot{p}(x|\theta)]^2}{p(x|\theta)} dx = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta)[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln p(x|\theta)] d\theta = \frac{1}{4}$$

A Distância Variacional de Kolmogorov

- A Distância Variacional de Kolmogorov:

$$K(\pi) = \frac{1}{2}\int (|\pi_1 p_1(x) - \pi_2 p_2(x)|dx)$$

- Relação com ρ:

$$\sqrt{1 - 4\pi_1\pi_2\rho^2} \geq 2K(\pi) \geq 1 - \sqrt{\pi_1\pi_2\rho}$$

- relação com P_e:

$$P_e = \pi_1 - K(\pi),$$

Limites Superiores e Inferiores em Probabilidade de Erro

Combinando os resultados anteriores temos:

$$2\pi_1 - \sqrt{1 - 4\pi_1\pi_2\rho^2} \leq 2P_e = 2\pi_1 - K(\pi) \leq 2\pi_1 - 2\sqrt{\pi_1\pi_2\rho}$$

Que, no caso de $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$, resulta em:

$$\frac{1}{4}\rho^2 \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\rho}) \leq P_e \leq \frac{1}{2}\rho$$

E, considerando J:

$$P_e \geq \rho^2/8 \geq \frac{1}{8}e^{J/2}$$

Fórmulas Explícitas para B e J - 1

- Para Distribuições Multinomiais

$$B = -\ln[\sum_{j=1}^{N} \sqrt{p_j^{(1)} p_j^{(2)}}]$$

- Para Distribuições de Poisson

$$B = -\frac{1}{2}(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})^2$$

Fórmulas Explícitas para B e J - 2

- Para Distribuições de Gaussianas Univariadas

$$B = \frac{1}{4}\frac{(m_1 - m_2)^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} + \frac{1}{2}\ln\{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1\sigma_2}\}$$

- Para Distribuições de Gaussianas Multivariadas

$$B = \frac{1}{8}(m_1 - m_2)'R^1(m_1 - m_2) + \frac{1}{2}\ln\{\frac{detR}{\sqrt{detR_1.detR_2}}\}$$

Fórmulas Explícitas para B e J - 3

- Para distribuições exponenciais.
  - Divergência

$$J = -\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2}{\partial V_j \partial V_k} \times \{V_j(h_2) - V_j(h_1)\}\{V_k(h_2) - V_k(h_1)\}$$

  - Distância de Bhattacharyya

$$B = -\ln \rho, \rho = \frac{\sqrt{b(h_j)b(h_i)}}{g(\{\frac{1}{2}V_j(h_1) + \frac{1}{2}V_j(h_2)\})}$$

B no Tempo Contínuo

Definindo

$$\lim_{N\to\infty} q_{iN}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{p_{iN}(x)}{p_{iN}(x) + p_{2N}(x)}$$

Temos que

$$B = -\ln\rho, \text{ onde } \rho = \lim_{N\to\infty} \int \sqrt{q_{1N}(x) q_{2N}(x)} dx$$

O que permite

$$\frac{1}{8}\rho^2 \leq P_e \leq \frac{1}{2}\rho$$

Considerações finais

- Medidas de distância ajudam na resolução de problemas de seleção de sinal de forma mais simples que calculando a probabilidade de erro.
- A distância de Bhattacharyya é mais fácil de calcular e fornece resultados por vezes melhores que a Divergência.
- A distância de Bhattacharyya é utilizada até hoje no contexto de reconhecimento de padrões.

Obrigado!

- Ao IME;
- À professora Rosângela;
- A todos aqui presentes!