Índice

1. Introducción **1**

2. Descripción de las Base de Datos **2**

3. Reconstrucción del Libro de Posturas **6**

4. Características Estadísticas del Libro de Posturas **11**

5. Modelo del Libro de Posturas Limitado **15**

5.1. La Transformación de Laplace Inversa 18
5.2. Dinámica del Libro de Posturas Limitado 22
5.3. Dirección de los Movimientos en el Precio 24

Índice de tablas **29**

Índice de figuras **30**

Bibliografía **31**

1. Introducción

Los mercados de valores permiten el intercambio de activos con facilidad. La mayoría de los estudios de los mercados tratan de explicar el comportamiento de los mismos a través de procesos autorregresivos, en los cuales se trata de explicar la relación del valor actual de una serie de tiempo con los valores anteriores; sin embargo la mayoría de estos estudios ignoran el mecanismo básico detrás de estos mercados: la interacción entre compradores y vendedores.

Los mercados se pueden clasificar en dos tipos:

- Regidos por formadores de mercado (Quote-driven market)
- Regidos por órdenes (Order-driven market)

En los mercados regidos por formadores de mercado, éstos centralizan las órdenes proveyendo liquidez al fijar una postura de compra y una venta; por ejemplo el especialista en el NYSE. En los mercados regidos por órdenes, las posturas de todos los participantes se agregan en lo que se conoce como el libro de posturas. Los mercados regidos por órdenes tienen como ventaja la transparencia, ya que todos los participantes conocen las posturas de los demás. Existen algunos mercados híbridos donde los formadores de mercado interactúan en el libro de posturas. La Bolsa Mexicana de Valores y NASDAQ son ejemplos de mercados híbridos.

2. Descripción de las Base de Datos

La Bolsa Mexicana de Valores proporcionó para este trabajo una base de datos con las posturas en todas las emisoras entre el 16 de noviembre de 2010 y el 18 de febrero de 2011. La base de datos se compone de dos tablas:

- Posturas Iniciales
- Registro de Posturas

La tabla de registro tiene 25,491,702 renglones; mientras que la tabla de posturas iniciales tiene 275,005. En el registro se encuentran todas las posturas que se reciben a lo largo del día. Las tablas tienen los siguientes campos:

id Número de identificación

folio Número asignado por la BMV a la postura
Según el reglamento de la BMV; las órdenes que, en su caso, tengan modificaciones, perderán el folio de recepción que en un inicio les haya correspondido y se les asignará uno nuevo. No perderán su folio aquellas órdenes que sean modificadas únicamente para disminuir su volumen.

fecha_vig/vigencia Fecha de vigencia de la postura

casabolsa Casa de Bolsa

tipo_mov Tipo de Movimiento

Posibles Valores	
CO	Compra
VE	Venta
MO	Modificación
CA	Cancelación
AH	Reconocimiento de Hecho
MH	Modificación de Hecho
CH	Cancelación de Hecho

tipo_op Tipo de Operación

Posibles Valores	
CO	Contado
PI	Pico

HC	Operación a Precio de Cierre
DC	Operaciones al Precio de Cierre Modalidad Después del Cierre
OR	Operaciones de Registro
OP	Oferta Pública
SR	Suscripción Recíproca
SA	Sobre Asignación

tipo_ord Tipo de Orden

Posibles Valores

LP	Limitada
MC	Mercado
MA	Mejor Postura Limitada Activa

Aquella que sigue el mejor precio límite visible en su mismo sentido y su precio buscará cerrar posturas en sentido contrario que se ubiquen dentro de su precio de protección.

MP Mejor Postura Limitada Pasiva

Aquella que sigue el mejor precio límite visible en su mismo sentido. Aún y cuando existan posturas en sentido contrario dentro de su precio de protección la postura no buscará cerrarlas.

VO	Postura Limitada con Volumen Oculto
LO	Mejor Postura Limitada Activa con Volumen Oculto
HC	Operación a Precio de Cierre
DC	Operaciones al Precio de Cierre Modalidad Después del Cierre
PQ	Paquete

tipo_val Tipo de Valor

emisora Emisora

serie Serie

precio Precio

volumen Volumen

La tabla de posturas iniciales utiliza además estos campos:

fecha Fecha

Este campo se utiliza para distinguir las órdenes que están activas al principio del día e inicializar el libro de órdenes.

orig_timestamp Fecha original de la postura expresada como la cantidad de milésimas de segundo transcurridas desde la medianoche del 1 de enero de 1970

La tabla de registro utiliza estos campos:

timestamp Fecha de la postura expresada como la cantidad de milésimas de segundo transcurridas desde la medianoche del 1 de enero de 1970

folio_anterior Folio Anterior
Se utiliza para localizar el folio de una postura que se va a modificar o cancelar.

fecha_folio_ant Fecha de Folio Anterior

Tabla 1: Posturas Iniciales

id	fecha	orig_timestamp	folio	fecha_vig	tipo_mov	casabolsa	tipo_op	tipo_ord	tipo_val	emisora	serie	precio	volumen
247	24/11/2010	1290011934040	318480	10/12/2010	CO	1277	CO	LP	1	LAB	B	25.95	2700
292	23/11/2010	1290189919100	368726	26/11/2010	VE	1392	CO	LP	1	CHDRAUI	B	39.8	100
519	23/12/2010	1292863358080	242642	24/12/2010	VE	1277	CO	LP	1	TELMEX	L	10.18	25000
651	27/01/2011	1295881813280	93317	28/01/2011	VE	1664	CO	LP	1	ASUR	B	72	100
848	15/02/2011	1295539042060	268023	18/02/2011	CO	1392	CO	LP	1	INCARSO	B-1	12.01	1000
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 2: Registro de Posturas

id	timestamp	folio	vigencia	folio_anterior	fecha_folio_ant	tipo_mov	casa_bolsa	tipo_op	tipo_ord	tipo_val	emisora	serie	precio	volumen
48	1289916001700	19		0		VE	1369	CO	LP	1	ARA	*	39.6	800
329	1290785630710	124082	26/11/2010	0		CO	1369	CO	LP	1	AMX	L	35.69	12000
519	1291907916550	16032		0		AH	1305	CO	VO	1	GNP	*	58.1	1100
652	1296246310460	911020		0		VE	1369	PI	MC	1	ASUR	B	64.05	76
998	1298062094720	566388	18/02/2011	566388	18/02/2011	MO	1288	CO	MA	1	BIMBO	A	97.51	300
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

3. Reconstrucción del Libro de Posturas

Con los datos proporcionados se reconstruyó el libro de posturas. A lo largo del día existen un gran número de modificaciones y cancelaciones, por lo que para el análisis de los datos es indispensable identificar las posturas activas en cada instante. Aproximadamente el 11 % de los registros en la base de datos son modificaciones, mientras que casi el 35 % son cancelaciones.

El algoritmo que se ideó para reconstruir el libro de posturas no toma en cuenta el tipo de orden. Esto se hizo con el fin de simplificar el libro; además de la falta de información como el volumen de las posturas del tipo VO (Volumen Oculto). Las posturas de tipo VO comprenden sólo el 0.55 % del total, mientras que las de tipo LP (Limitadas) representan el 93.81 %. Las operaciones del tipo PI (Picos), las cuales implican la compra/venta de una cantidad de acciones inferior a un lote (para la mayoría de la emisoras son 100 acciones), no se incluyen en el libro de posturas como lo establece el reglamento de la BMV. Las operaciones de tipo PI representan el 0.61 % de la muestra. Adicionalmente como lo establece también el reglamento de la bolsa antes de las 8:30 no se puede concretar ningún hecho, el algoritmo también respeta esto. En primera instancia se cargan las posturas que quedaron abiertas en días anteriores de la tabla de Posturas Iniciales, a continuación se procesa el registro.

Para medir la efectividad del algoritmo se compararon los hechos reportados por la BMV con los hechos arrojados por el algoritmo. Ignorando acciones de muy baja bursatilidad, si se considera la acción de KUO serie B, la cual tiene en promedio alrededor de 28 posturas diarias en la base de datos comparado con la media de 2,550 posturas diarias para las demás emisoras. Para la muestra de 68 días, el algoritmo reproduce el 50.3 % del volumen operado según la BMV. Al analizar el volumen operado con mayor profundidad, esto se debe a una serie de posturas de muy alto volumen que se registraron el 29 de diciembre de 2010. Se puede presumir que se tratan de posturas de volumen oculto. Si se excluye esa fecha el algoritmo reporta un volumen de 5,607,600 acciones mientras que la BMV 5,972,500, es decir el algoritmo registra 6.1 % menos volumen que la bolsa. Para AMX serie L, la acción con mayor volumen en la BMV con un promedio 44,396 posturas por día, el algoritmo reproduce el 89.7 % de las operaciones.

Aún más importante que el volumen operado es la tendencia de precios. Una forma de evaluar esto es el VWAP (Volume-weighted average price). El VWAP es el precio promedio ponderado por volumen. Para la acción de KUO el VWAP de por ejemplo el 28 de enero de 2011 registrado por la BMV es de 21.72491, el registrado por el algoritmo es de 21.72289. En un día en donde el volumen operado difiere de mayor forma como el 31 de diciembre de 2010, el VWAP de la bolsa y del algoritmo son similares, 20.35595 y 20.27741 respectivamente. En el caso de AMX, el 28 de diciembre es el día en que el algoritmo reproduce de peor forma el volumen, con un 69.0 % sin embargo la tendencia del precio de las operaciones es bastante similar. El VWAP de las operaciones registradas por la BMV es de 35.12914 mientras que el de el del algoritmo es de 35.10326. Mientras que para el día en el que el algoritmo sigue de mejor forma a las operaciones por la BMV, el 20 de enero de 2011, el VWAP de la bolsa es de 35.28202 mientras que el del algoritmo es de 35.26883.

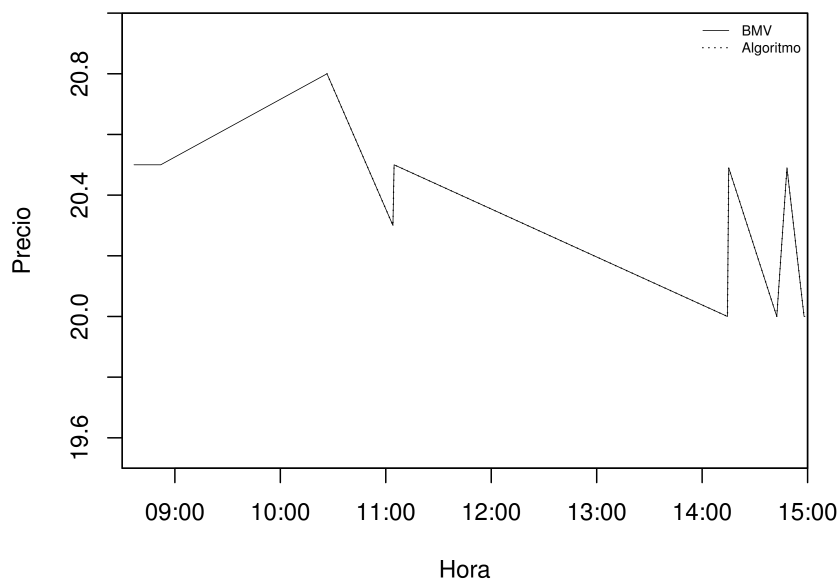


Figura 1: Reconstrucción: KUO diciembre 31

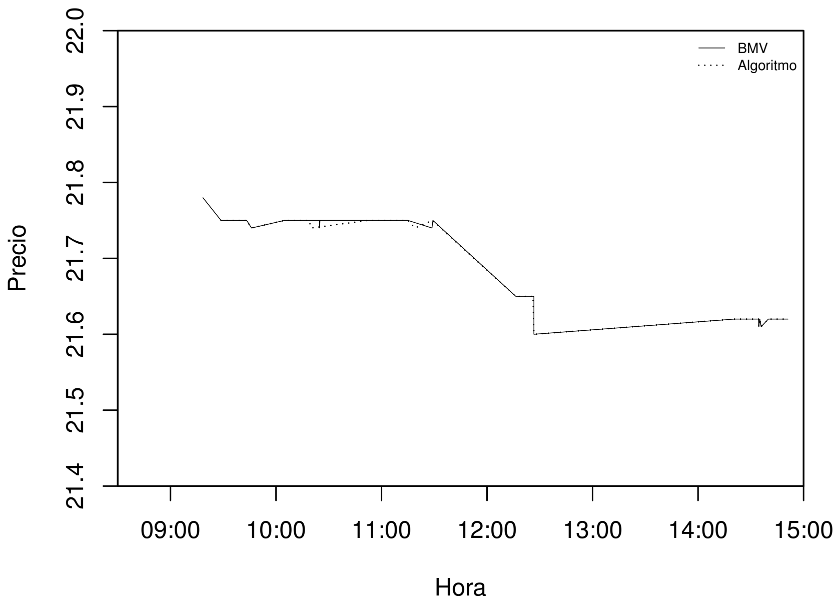


Figura 2: Reconstrucción: KUO enero 28

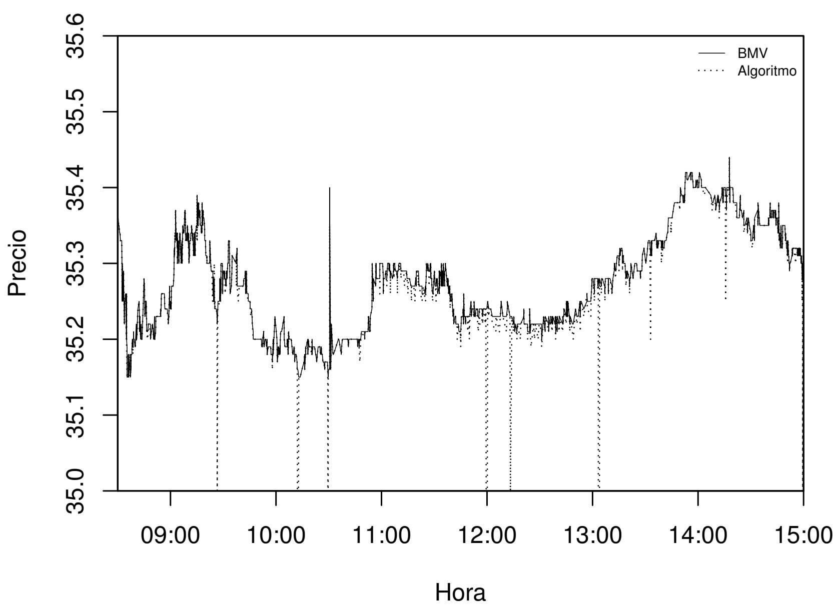


Figura 3: Reconstrucción: AMX enero 20

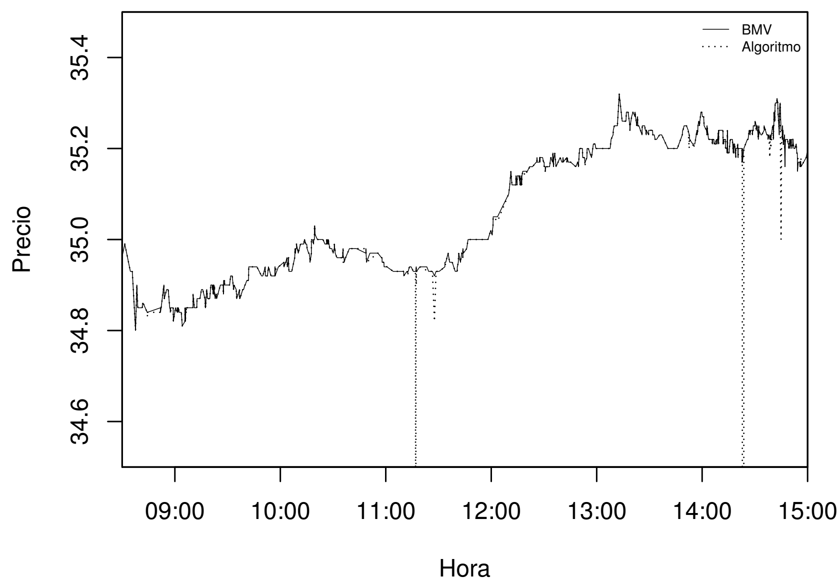


Figura 4: Reconstrucción: AMX diciembre 28

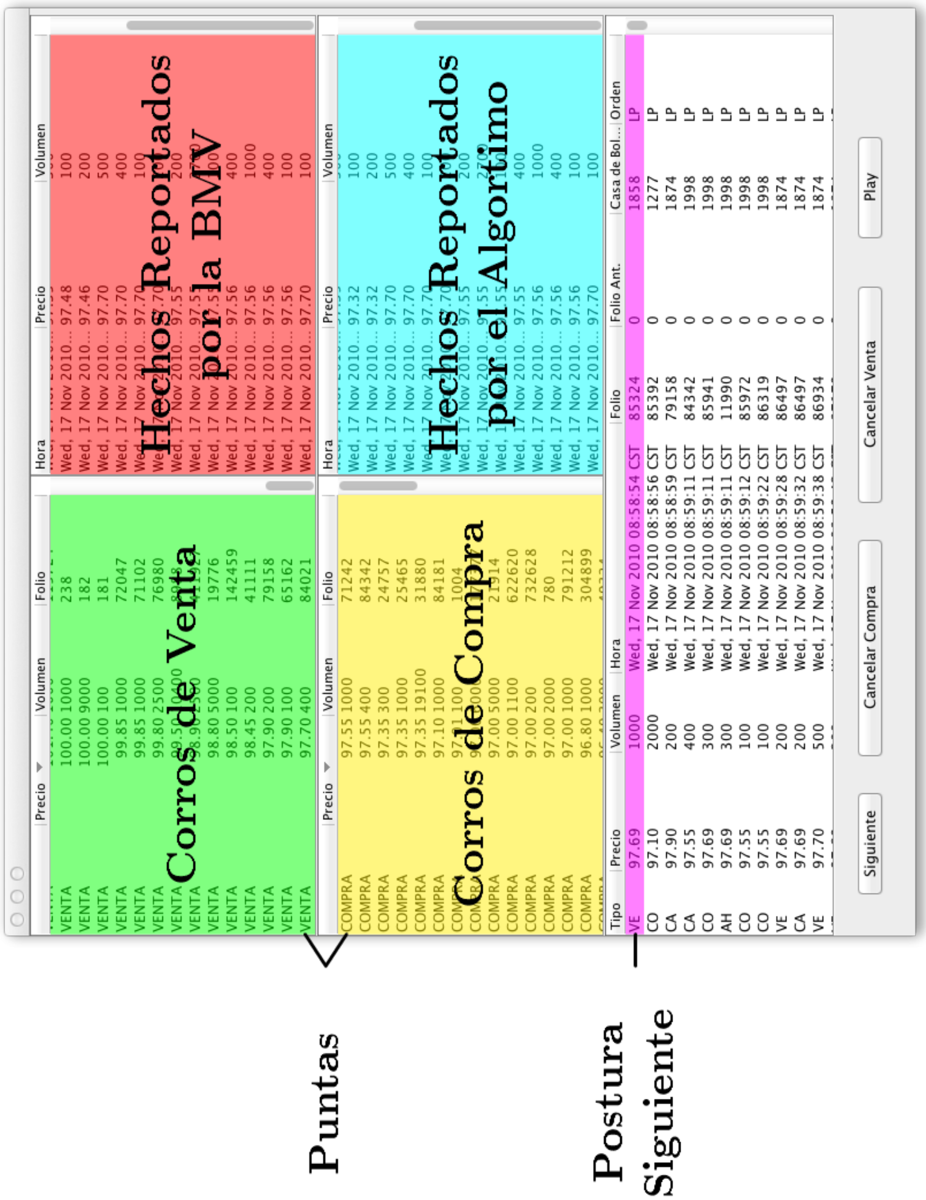


Figura 5: Captura de pantalla de la Interface desarrollada en Java

4. Características Estadísticas del Libro de Posturas

Los mercados financieros ofrecen un gran número de información, es posible identificar algunos patrones. Por ejemplo se ha identificado que la distribución de los precios de las posturas sigue una ley de potencias, es decir las frecuencias decrecen exponencialmente al aumentar la variable. Es decir si definimos a $b(t)$ como el precio de la mejora postura de compra y $a(t)$ el precio de la mejor postura de venta. El precio de una nueva postura de compra o venta se puede expresar como $b(t)-\Delta$ ó $a(t)+\Delta$ respectivamente, donde la Δ esta expresada en pujas o ticks, es decir el importe minimo en que puede variar el precio unitario de cada título. Cabe mencionar que Δ puede tomar valores negativos. Si por ejemplo, con $\Delta < 0$, se registra una postura con el precio $b(t)-\Delta \geq a(t)$ entonces se concretará un hecho, mientras que si $b(t) - \Delta < a(t)$ entonces el precio $b(t+1) = b(t) - \Delta$. Ahora si se excluyen las posturas donde $\Delta \leq 0$ se puede decir que los precios siguen una distribución definida por:

$$P\left(\Delta\right) \propto \frac{A}{\left(\Delta + \lambda\right)^{\alpha+1}} \tag{4.1}$$

Se ajusto el modelo para distintas acciones. Para ajustar el modelo se excluyeron la modificaciones, las cuales se podrían considerar como una nueva postura en algunos casos. Otros estudios han encontrado que el parámetro *alpha* es muy similar entre las distintas emisoras [Zovko and Farmer, 2002] de un mercado en particular, sin embargo, en este caso las acciones tienen parámetros distintos. La distribución ajustada es conocida como Lomax o Pareto Tipo II con $\mu = 0$. La media de esta distribución esta definida cuando $\alpha > 1$, por lo que en este caso para algunas de las emisoras se podría definir la media. Otro hecho que se destaca en otros trabajos es que el parámetro α es similar para las posturas de compra y venta [Bouchaud et al., 2002]. Para las acciones estudiadas en este caso, para una misma emisora el parámetro es similar en la mayoría de los casos, sin embargo, en el caso de KUO el parámetro α para las posturas de venta es 50 % mayor que el de las de compra.

Se realizó un estudio similar para la distribución del volumen de las posturas. El volumen también se puede representar con una distribución Lomax, por lo menos para volúmenes superiores a 1,000 títulos. Otro fenómeno interesante es la preferencia de los participantes por volúmenes múltiplos de 1,000.

Tabla 3: Distribución de Precios de las Posturas de Compra

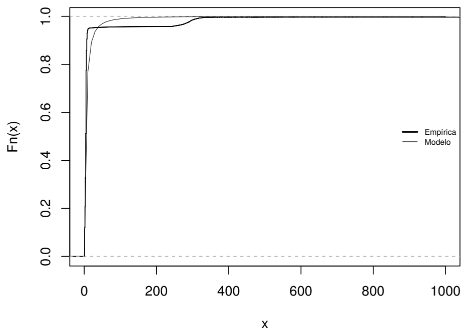
	λ	α	#posturas	$\Delta > 0$
AMX	7.4441	1.7098	629,302	454,039
BIMBO	14.7809	0.8242	37,021	9,042
COMERCI	7.6756	1.2256	20,955	4,201
GRUMA	58.6601	4.4624	49,895	27,845
HERDEZ	21.1333	2.3332	6,811	1,773
KUO	11.3803	0.8556	495	93

Tabla 4: Distribución de Precios de las Posturas de Venta

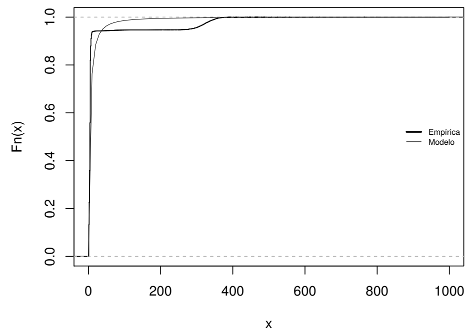
	λ	α	#posturas	$\Delta > 0$
AMX	6.2232	1.5022	767,215	555,595
BIMBO	31.2291	1.2005	36,671	11,400
COMERCI	11.0780	1.6555	28,893	6,584
GRUMA	63.2991	4.1402	49,026	30,012
HERDEZ	21.1781	2.3215	5,493	1,263
KUO	42.1747	1.3034	319	19

Tabla 5: Distribución del Volumen de las Posturas

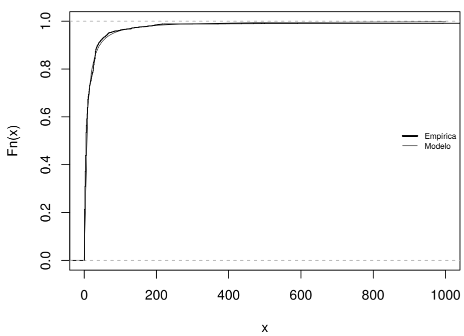
	Compra		**Venta**	
	λ	α	λ	α
AMX	115,318.20	7.2939	112,105.20	7.4092
BIMBO	689.36	1.4184	550.10	1.3052
COMERCI	863.75	0.8432	648.47	0.8336
GRUMA	6,135.30	2.6177	9,413.25	3.1836
HERDEZ	4,064.11	1.2659	2,316.45	0.8967
KUO	975.37	0.5320	24,193.91	1.9253



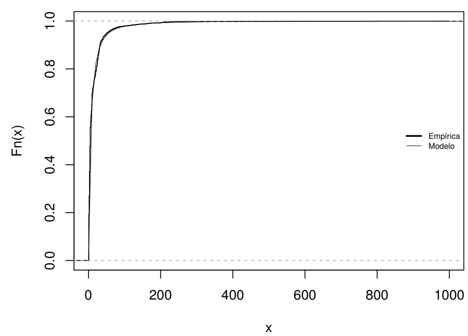
(a) AMX compra



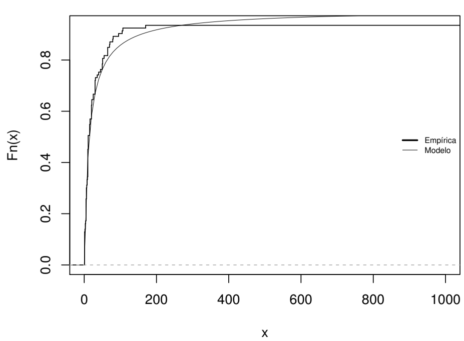
(b) AMX venta



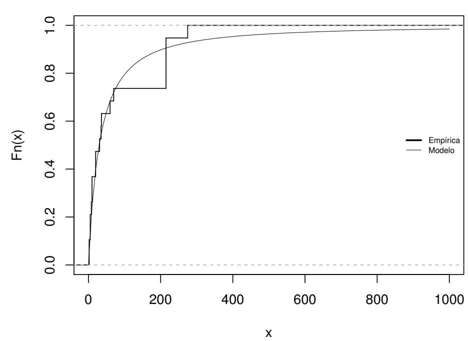
(c) COMERCI compra



(d) COMERCI venta

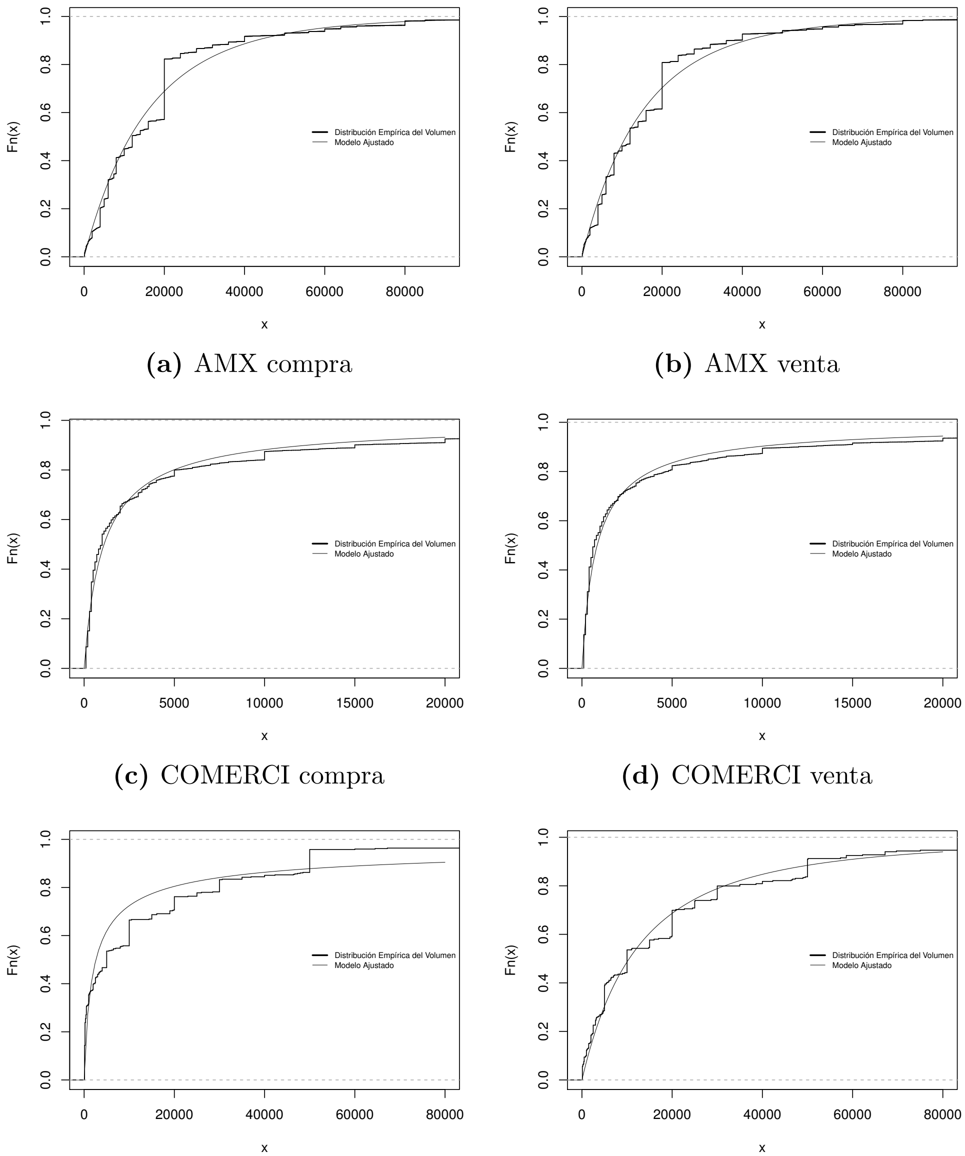


(e) KUO compra



(f) KUO venta

Figura 6: Ajuste del Modelo de Distribución de Precios de las Posturas



(a) AMX compra

(b) AMX venta

(c) COMERCI compra

(d) COMERCI venta

(e) KUO compra

(f) KUO venta

Figura 7: Ajuste del Modelo de Distribución del Volumen de las Posturas

5. Modelo del Libro de Posturas Limitado

Un proceso estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ con un conjunto de estados $\mathcal{S} \subset I$ se dice que es una cadena de Markov homogénea si para toda $n \in I$, estados $i_0, i_1, \ldots, i_n, i, j$ y tiempos $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < s$

$$\begin{aligned} &P\{X(t+s) = j | X(\tau_0) = i_0 \ldots X(\tau_n)\tau_n) = i_n, X(s) = i\} \\ &= P\{X(t+s) = j | X(s) = i\} = P\{X(t) = j | X(0) = i\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Un proceso estocástico se conoce como proceso de nacimiento y muerte con un espacio de estados $\mathcal{S}$ si cumple con los siguientes axiomas:

1. $\mathcal{S} \subset I = \{0, 1, 2, \ldots\}$
2. Es una cadena Markov homogénea
3. Existen las constantes no negativas λ_j y μ_j, con $j = 0, 1, \ldots$ con $\mu_0 = 0$, tal que para $s > 0$ y $t \geq 0$, se cumple:

$$P\{X(t+s) = j+1 | X(t) = j\} = \lambda_j s + o(s) \quad j \in I \tag{5.2a}$$
$$P\{X(t+s) = j-1 | X(t) = j\} = \mu_j s + o(s) \quad j \in I \tag{5.2b}$$
$$P\{X(t+s) = j | X(t) = j\} = 1 - (\lambda_j + \mu_j)s + o(s) \quad j \in I \tag{5.2c}$$

$X(t)$ se conoce como el tamaño de la población al tiempo t. A λ_j se le conoce como la tasa de nacimiento y μ_j como la tasa de muerte. Una medida interesante de los procesos de nacimiento y muerte es el tiempo del primer paso del estado i al estado j, que se denota como $T_{i,j}$. Para calcular la distribución de esta variable aleatoria es conveniente utilizar la transformación de Laplace bilateral. La cual se define de la siguiente forma:

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \tag{5.3}$$

El tiempo $T_{i,j}$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$T_{i,j} = T_{i,i+1} + T_{i+1,i+2} + \ldots + T_{j-1,j} \tag{5.4}$$

donde $T_{k,k+1}$ con $k = 1, 2, \ldots, j-1$ son independientes, lo cual permite utilizar la siguiente propiedad de la transformación de Laplace:

$$\hat{f}_{X+Y}(s) = \mathrm{E}[e^{-s(X+Y)}] = \mathrm{E}[e^{-sX}]\,\mathrm{E}[e^{-sY}] = \hat{f}_X(s)\hat{f}_Y(s) \tag{5.5}$$

Lo cual permite expresar a la transformación de la función de densidad de $T_{i,j}$ como:

$$\hat{f}_{i,j}(s) = \prod_{k=i}^{j-1} \hat{f}_{k,k+1}(s) \tag{5.6}$$

haciendo deseable encontrar una transformación $\mathcal{L}^{-1}$ tal que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\} = f(t) \tag{5.7}$$

Primero es necesario encontrar una expresión para $\hat{f}_{i,i-1}$. Ahora si condicionamos $T_{i,i-1}$ a la primera transición, donde S_1 es el tiempo para el primer evento, podemos expresarlo como:

$$T_{i,i-1} = \begin{cases} S_1, & \text{si } X(S_1) = i-1 \\ S_1 + T_{i+1,i-1}, & \text{si } X(S_1) = i+1 \end{cases} \tag{5.8}$$

$$T_{i+1,i-1} = T_{i+1,i} + T_{i,i-1} \tag{5.9}$$

$$\begin{array}{rclcl} F_{i,i-1}(t) & = & P\{T_{i+1,i-1} \leq t\} & = & P\{T_{i,i-1} \leq t | X(S_1) = i-1\}P\{X(S_1) = i-1\} + \\ & & & & P\{T_{i,i-1} \leq t | X(S_1) = i+1\}P\{X(S_1) = i+1\} \\ & & & = & P\{S_1 \leq t\}P\{X(S_1) = i-1\} + \\ & & & & P\{S_1 + T_{i+1,i-1} \leq t\}P\{X(S_1) = i+1\} \\ & & & = & \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}P\{S_1 \leq t\} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}P\{S_1 + T_{i+1,i-1} \leq t\} \\ & & & = & \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}F_{S_1}(t) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}F_{S_1+T_{i+1,i-1}}(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \frac{d}{dt}F_{i,i-1}(t) & = & f_{i,i-1}(t) & = & \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\frac{d}{dt}F_{S_1}(t) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}\frac{d}{dt}F_{S_1+T_{i+1,i-1}}(t) \\ & & & = & \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}f_{S_1}(t) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}f_{S_1+T_{i+1,i-1}}(t) \end{array}$$

Ahora S_1 tiene una distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}$ por lo que:

$$\mathcal{L}\{f_{S_1}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f_{S_1}(t)\, dt = (\lambda_i + \mu_i)\int_0^\infty e^{-(\lambda_i+\mu_i+s)t}\, dt = \frac{\lambda_i + \mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s}$$

$$\begin{array}{rclcl} \mathcal{L}\{f_{i,i-1}(t)\} & = & \hat{f}_{i,i-1}(s) & = & \mathcal{L}\{\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}f_{S_1}(t) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}f_{S_1+T_{i+1,i-1}}(t)\} \\ & & & = & \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\hat{f}_{S_1}(s) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}f_{S_1+T_{i+1,i-1}}(s) \\ & & & = & \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\frac{\lambda_i+\mu_i}{\lambda_i+\mu_i+s} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}\hat{f}_{S_1}(s)\hat{f}_{T_{i+1,i}}(s)\hat{f}_{T_{i,i-1}}(s) \\ & & & = & \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\frac{\lambda_i+\mu_i}{\lambda_i+\mu_i+s} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}\frac{\lambda_i+\mu_i}{\lambda_i+\mu_i+s}\hat{f}_{i+1,i}(s)\hat{f}_{i,i-1}(s) \end{array}$$

$$\hat{f}_i(s) = \hat{f}_{i,i-1}(s) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s - \lambda_i \hat{f}_{i+1}(s)} \tag{5.10}$$

Otro concepto que es necesario introducir es lo que se conoce como fracciones continuas. Las cuales son expresiones de la forma:

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}}$$

Una fracción continua infinita se define con las sucesiones $[\{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty, \{w_n\}_1^\infty]$ donde t_k se define como:

$$t_k :\rightarrow \frac{a_k}{b_k + u}$$

donde:

$$w_n := t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_n(0)$$

por lo que se puede denotar a la fracción continua $[\{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty, \{w_n\}_1^\infty]$ de la siguiente forma:

$$\Phi_{k=i}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Ahora iterando en la expresión que se obtuvo previamente para $\hat{f}_i(s)$, obtenemos:

$$\hat{f}_i(s) = \cfrac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s - \lambda_i \cfrac{\mu_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \mu_{i+1} + s - \lambda_{i+1} \cfrac{\mu_{i+2}}{\lambda_{i+2} + \mu_{i+2} + s + \ddots}}}$$

$$\hat{f}_i(s) = -\frac{1}{\lambda_{i-1}} \cfrac{-\lambda_{i-1}\mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s + \cfrac{-\lambda_i \mu_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \mu_{i+1} + s + \cfrac{-\lambda_{i+1}\mu_{i+2}}{\lambda_{i+2} + \mu_{i+2} + s + \ddots}}}$$

$$\hat{f}_i(s) = -\frac{1}{\lambda_{i-1}} \Phi_{k=i}^{\infty} \frac{-\lambda_{k-1}\mu_k}{\lambda_k + \mu_k + s} \tag{5.11}$$

Debido a las propiedades de la función de densidad f, se puede probar [Abate and Whitt, 1999] que $\hat{f}$ converge y esta acotada entre la sucesión creciente de aproximantes pares w_{2n} y la sucesión decreciente de aproximantes impares w_{2n+1}:

$$w_{2n}(s) < \hat{f}(s) < w_{2n+1}(s) \text{ para toda } n$$

Donde w_n se puede calcular de la siguiente forma:

$$w_n = \frac{P_n}{Q_n}$$

donde $P_0 = 0, P_1 = a_1, Q_0 = 1, Q_1 = b_1$ con:

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}$$

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}$$

5.1. La Transformación de Laplace Inversa

El reto que aún queda es encontrar una forma de calcular numéricamente $\mathcal{L}^{-1}$, la cual esta definida por la siguiente integral de variable compleja, la cual se puede evaluar a lo largo de la línea vertical $\gamma = a$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\} &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{a-iT}^{a+iT} e^{st} \hat{f}(s)\, ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+iu)t} \hat{f}(a+iu)\, du \\
&= \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos ut + i \sin ut) \hat{f}(a+iu)\, du \\
&= \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[Re(\hat{f}(a+iu)) \cos ut - Im(\hat{f}(a+iu)) \sin ut \Big]\, du \\
&= \frac{2e^{at}}{\pi} \int_{0}^{\infty} Re(\hat{f}(a+iu)) \cos ut\, du
\end{aligned}$$

Para evaluar esta integral seguimos se utiliza un método [Dubner and Abate, 1968] que se basa en la expansión de series de Fourier. Si se considera una función $h(t)$ tal que $h(t) = 0$ para $t < 0$ la cual se dividirá en segmentos de tamaño T. Al reflejar cada segmento, se puede construir un conjunto de funciones pares $g_n(t)$, tal que:

$$g_n(t) = \begin{cases} h(t), & \text{si } nT \leq t \leq (n+1)T \\ h(2nT - t), & \text{si } (n-1)T \leq t \leq nT \end{cases}$$

Estas funciones se pueden expresar en el intervalo $(-T, T)$. De tal forma que para $n = 0, 2, 4, \ldots$:

$$g_n(t) = \begin{cases} h(nT + t), & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ h(nT - t), & \text{si } -T \leq t \leq 0 \end{cases}$$

y para $n = 1, 3, 5, \ldots$

$$g_n(t) = \begin{cases} h((n+1)T - t), & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ h((n+1)T + t), & \text{si } -T \leq t \leq 0 \end{cases}$$

La expansión en series de Fourier de $g_n(t)$ es la siguiente:

$$g_n(t) = \frac{a_{n,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right)$$

donde $a_{a,k}$ esta definido como:

$$a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T h(nT + x) cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) dx, & \text{si } n = 0, 2, 4, \ldots \\ \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T h((n+1)T - x) cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) dx, & \text{si } n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Esto se puede expresar de forma compacta como:

$$a_{n,k} = \frac{2}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} h(t) cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt$$

Ahora sumando las funciones $g_n(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) = \frac{2}{T}\left[\frac{A(w_0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A(w_k) cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right)\right]$$

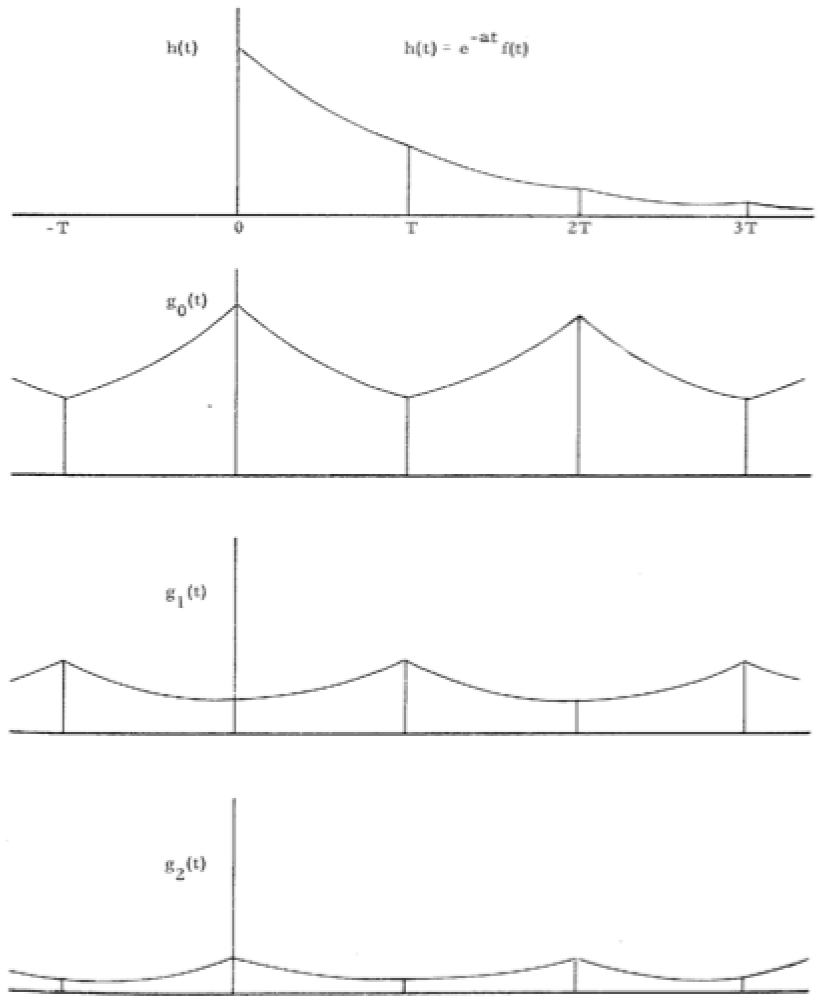


FIG. 1

Figura 8: $g_n(t)$

donde:

$$A(w_k) = \int_0^{\infty} h(t) cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right)\, dt$$

Ahora si se introduce un factor de atenuación tal que:

$$h(t) = e^{-at} f(t)$$

de tal forma que $A(w_k)$ es la transformación de Laplace de una función en los números reales.

De esta forma, multiplicando ambos lados por el factor de atenuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = \frac{2e^{at}}{T}\left[\frac{1}{2}\{\hat{f}(a)\} + \sum_{k=1}^{\infty} Re\left(\hat{f}\left(a + \frac{k\pi i}{T}\right)\right) cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right)\right]$$

por lo que de la definición de $g_n(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} h(2nT + t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{at} h(2nT - t)$$

de tal forma que sustituyendo $h(t) = e^{-at} f(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = f(t) + \text{error}$$

Con esto podemos deducir el resultado:

$$f(t) \approx \frac{2e^{at}}{T}\left[\frac{1}{2}\{\hat{f}(a)\} + \sum_{k=1}^{\infty} Re\left(\hat{f}\left(a + \frac{k\pi i}{T}\right)\right) cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right)\right] \tag{5.12}$$

Esto es similar al resultado que se obtiene si se utilizará la regla del trapecio para evaluar la integral de la transformación inversa. La cual tiene como resultado la siguiente expresión:

$$f(t) \approx f_h(t) = \frac{he^{at}}{\pi} Re(\hat{f}(a)) + \frac{2he^{at}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} Re(\hat{f}(a + ikh)) cos\, kht$$

para acelerar la convergencia de la serie [Abate and Whitt, 1995], se toma $h = \pi/2t$ y $a = A/2t$, se llega a la siguiente serie, la cual es casi alternante:

$$f_h(t) = \frac{e^{A/2}}{2t} Re\left(\hat{f}\left(\frac{A}{2t}\right)\right) + \frac{e^{A/2}}{t}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k Re\left(\hat{f}\left(\frac{A+2k\pi i}{2t}\right)\right)$$

esta aproximación tiene un error de discretización acotado [Abate and Whitt, 1995].

Debido a que la serie es casi alternante se pueden utilizar métodos para acelerar la convergencia, tal como la transformación de Euler. Al utilizar este método obtenemos la siguiente aproximación:

$$E(m,n,t) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^{-m}s_{n+k}(t)$$

donde:

$$s_n = \frac{e^{A/2}}{2t} Re\left(\hat{f}\left(\frac{A}{2t}\right)\right) + \frac{e^{A/2}}{t}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k Re\left(\hat{f}\left(\frac{A+2k\pi i}{2t}\right)\right)$$

Se sugiere utilizar $m = 11$ y $n = 15$. Para probar la ventaja de la aceleración se encontró la transformación de Laplace de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución exponencial. La aceleración permite encontrar una aproximación muy cercana sumando 26 términos mientras que cuando no se recurre a este método, el error de aproximación es mayor aún utilizando 2,000 términos. Es importante mencionar que las funciones deben de tener ciertas propiedades para que la transformación de Euler sea útil.

5.2. Dinámica del Libro de Posturas Limitado

Para modelar la dinámica del libro de posturas limitado se considera el modelo propuesto en [Cont et al., 2010]. Este modelo tiene varias bondades que permiten la utilización de ciertas herramientas matemáticas para realizar el cálculo de las probabilidades de ciertos eventos. El modelo también tiene ciertas limitaciones. En primer lugar considera que las llegadas de las posturas siguen un proceso Poisson, es decir que son completamente aleatorias. También considera posturas con un volumen estandarizado o único.

Si se considera un mercado donde las posturas se pueden colocar en una matriz de precios $\{1, \ldots, n\}$ múltiplos de una puja. n se elige de forma que es suficientemente grande para que el precio de todas las posturas estén dentro de este rango. El estado del libro se puede representar mediante el proceso $X(t) = \{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ donde $|X_p(t)|$ es el número de posturas a un precio p. Si $X_p(t) < 0$ se dice que hay $-X_p(t)$ posturas de compra, cuando $X_p > 0$ existen X_p posturas de venta.

El precio de la mejor postura de venta $p_A(t)$ se define como:

$$p_A(t) = \text{ínf}\{p = 1, \ldots, n, X_p(t) > 0\}$$

de igual forma el precio de la mejor postura de venta se define como:

$$p_B(t) = \sup\{p = 1, \ldots, n, X_p(t) < 0\}$$

También se pueden definir las siguientes cantidades, el precio medio $p_M(t)$ y la diferencia o"spread" $p_S(t)$ entre la mejor postura de compra y venta respectivamente:

$$p_M(t) = \frac{p_B(t) + p_A(t)}{2}$$
$$p_S(t) = p_A(t) - p_B(t)$$

El libro de posturas limitado se actualiza al llegar nuevas posturas. Para un estado $x \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq p \leq n$ se define:

$$x^{p\pm1} = x \pm (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

donde el 1 se encuentra en la posición p del vector anterior. De esta forma:

- Una postura de compra a un precio $p < p_A(t)$ incrementa la cantidad al nivel p: $x \to x^{p-1}$
- Una postura de venta a un precio $p > p_B(t)$ incrementa la cantidad al nivel p: $x \to x^{p+1}$
- Una postura de compra a mercado disminuye la cantidad al mejor precio de venta: $x \to x^{p_A(t)-1}$
- Una postura de venta a mercado disminuye la cantidad al mejor compra de venta: $x \to x^{p_B(t)+1}$
- Una cancelación de una postura activa de compra a un precio $p < p_A(t)$ disminuye la cantidad al nivel p: $x \to x^{p+1}$

- Una cancelación de una postura activa de venta a un precio $p > p_B(t)$ disminuye la cantidad al nivel p: $x \to x^{p-1}$

Los eventos mencionados arriba se modelan con procesos de Poisson independientes de tal forma que para $i \geq 0$:

- Las posturas limitadas de compra (venta) arriban a una distancia de i pujas de la mejor postura contraria de acuerdo a distribuciones exponencial independientes con tasa $\lambda(i)$
- La llegada de las posturas a mercado siguen distribuciones exponenciales independientes con tasa μ
- La cancelación de posturas a una distancia de i pujas de la mejor postura contraria sucede de acuerdo a una distribución exponencial donde la tasa es proporcional al número de órdenes activas, es decir, si a cierto nivel existe un número x de posturas activas, la tasa de cancelación es $\theta(i)x$
- Los eventos mencionados anteriormente son independientes

De este forma se puede decir que el proceso X es una cadena de Markov en tiempo continuo, con el espacio de estados $\mathbb{Z}^n$ con las siguientes tasas de transición:

- $x \to x^{p-1}$ con tasa $\lambda(p_A(t) - p)$ para $p < p_A(t)$
- $x \to x^{p+1}$ con tasa $\lambda(p - p_B(t))$ para $p > p_B(t)$
- $x \to x^{p_B(t)+1}$ con tasa μ
- $x \to x^{p_A(t)-1}$ con tasa μ
- $x \to x^{p+1}$ con tasa $\theta(p_A(t) - p)|x_p|$ para $p < p_A(t)$
- $x \to x^{p-1}$ con tasa $\theta(p - p_B(t))|x_p|$ para $p > p_B(t)$

5.3. Dirección de los Movimientos en el Precio

Se puede calcular la probabilidad de que en el siguiente movimiento el precio medio $p_M(t)$ aumente. El precio medio se altera en el tiempo del primer paso de las colas al mejor precio de compra o venta a cero. También este precio se puede alterar si cuando el “spread” $p_S(t) > 1$ y llega una postura dentro de este “spread”. Definimos a $X_A = X_{p_A(\cdot)}(\cdot)$ y $X_B = X_{p_B(\cdot)}(\cdot)$ y

$T = \text{ínf}\{t \geq 0, p_M(t) \neq P_M(0)\}$.

Dada una configuración inicial del libro de posturas, la probabilidad de que en el siguiente movimiento el precio medio aumente se puede expresar de la siguiente forma:

$$P\{p_M(T) > p_M(0)|X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = S\}$$

Los procesos X_A y X_B son procesos de nacimiento nacimiento y muerte con las siguientes tasas de transición:

$$n \to n+1 \text{ con una tasa } \lambda(S)$$

$$n \to n-1 \text{ con una tasa } \mu + n\theta(S)$$

En particular cuando $S = 1$ el precio medio $p_M(t)$ se altera cuando X_A ó X_B alcanzan el estado 0. Ahora si se denota σ_A y σ_B como el tiempo del primer paso de los procesos X_A y X_B a cero. La distribución de T esta dada por el mínimo de los tiempos del primer paso de los procesos X_A y X_B. La probabilidad de interés se puede expresar como $P\{\sigma_A < \sigma_B|X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = S\}$. La transformación de Laplace de la distribución condicional de $\sigma_A - \sigma_B$ esta dada por:

$$\hat{f}^A(s)\hat{f}^B(-s)$$

donde:

$$\hat{f}^Z_{j,0}(s) = -\left(\frac{1}{\lambda(S)}\right)^j \left(\prod_{i=1}^{b} \Phi^{\infty}_{k=i} \frac{-\lambda(S)(\mu + k\theta(S))}{\lambda(S) + \mu + k\theta(S) + s}\right)$$

Por lo que la probabilidad buscada se obtiene al evaluar la función de distribución acumulada en 0. Para hacer esto es necesario encontrar la transformación inversa de $\hat{f}^A(s)\hat{f}^B(-s)$ e integrar esta función.

En el caso de que $S > 1$, es necesario considerar que si se recibe una postura dentro del spread el precio medio $p_M(t)$ también se alterará. Por lo que si denotamos σ^i_A y σ^i_B como el tiempo en el que llega la primera orden a i pujas del mejor precio de venta o compra respectivamente. El tiempo en el que cambia por primera vez $p_M(t)$ esta dado por el mínimo de los tiempos $\sigma_A, \sigma_B, \sigma^i_A$ y σ^i_B con $i = 1, \ldots, S-1$. Es importante mencionar que σ^i_A y σ^i_B se distribuyen de manera exponencial con tasa $\lambda(i)$. Para $p_M(t)$ aumente es necesario que arribe una orden de compra a $S-1$ pujas del mejor precio de venta o se agoten las posturas al mejor precio de venta antes de que llegue una postura de venta a $S-1$ pujas de la mejor postura de compra o se agoten las posturas al mejor precio de compra.

En este caso la probablidad buscada esta dada por $P\{\sigma_A \wedge \sigma_B^1 \wedge \cdots \wedge \sigma_B^{S-1} < \sigma_B \wedge \sigma_A^1 \wedge \cdots \wedge \sigma_A^{S-1} | X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = S\}$. El mínimo de un conjunto de variables aleatorias que se distribuyen de forma exponencial con parametros $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. Por lo que podemos expresar la probabilidad de interés de la siguiente forma $P\{\sigma_A \wedge \sigma_B^{\Sigma} < \sigma_B \wedge \sigma_A^{\Sigma} | X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = S\}$. Por lo que la transformación de Laplace de la función de densidad de $\sigma_A \wedge \sigma_B^{\Sigma} - \sigma_B \wedge \sigma_A^{\Sigma}$ esta dada por:

$$\left(\hat{f}^A(\Lambda + s) + \frac{\Lambda}{\Lambda + s}(1 - \hat{f}_A(\Lambda + s))\right)\left(\hat{f}^B(\Lambda + s) + \frac{\Lambda}{\Lambda + s}(1 - \hat{f}_B(\Lambda + s))\right)$$

donde $\Lambda = \sum_{i=1}^{S-1} \lambda(i)$. De igual forma es necesario encontrar la transformación, integrar la función y evaluar en 0.

Los métodos para invertir la transformación de Laplace discutidos en la sección anterior están diseñados para la transformación unilateral de Laplace, es decir definida en los reales positivos. La distribución de $\sigma_A \wedge \sigma_B^{\Sigma} - \sigma_B \wedge \sigma_A^{\Sigma}$ están definidas en todos los reales, por lo que es necesario utilizar algunas herramientas para poder encontrar la transformación inversa.

Es importante tener presente que el método utilizado para encontrar la transformación inversa presentado en este trabajo basado en la expansión en series de Fourier utiliza funciones pares. Además es importante notar que el método permite encontrar la transformación inversa para $t \in (0, T)$. Para resolver este problema definimos la función $g(t) = f(t-a)$, donde a es tal que:

$$\lim_{t \to 0^-} g(t) = 0$$

En este caso se realizaron diversas simulaciones de los procesos X_A y X_B para evaluar la distribución de T la cual disminuye exponencialmente para cierta de ambos lados a partir de un cierto máximo.

Si definimos a $u(t)$ como la función de escalón unitario, es decir:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

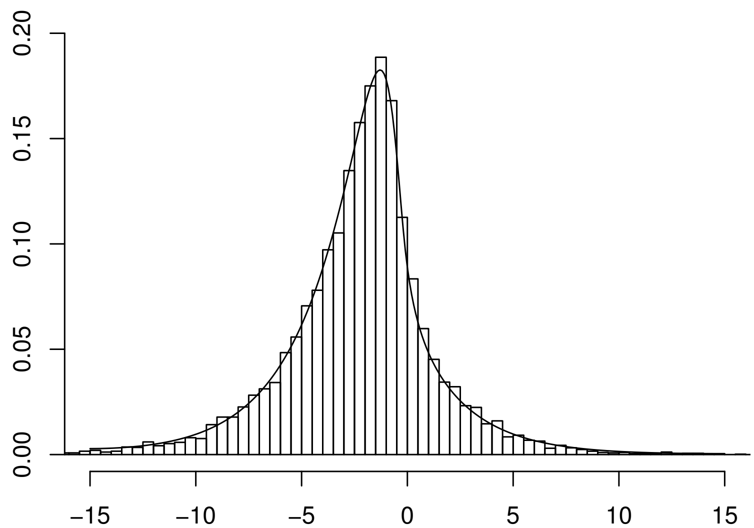


Figura 9: Función de densidad de T

debido a las propiedades de la transformación de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{g(t)u(t-a)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}\hat{f}(s)$$

por lo que de esta forma podemos desplazar la función de densidad de forma que $\lim_{t\to 0^-} g(t) = 0$.

También es importante utilizar el parámetro correcto T para

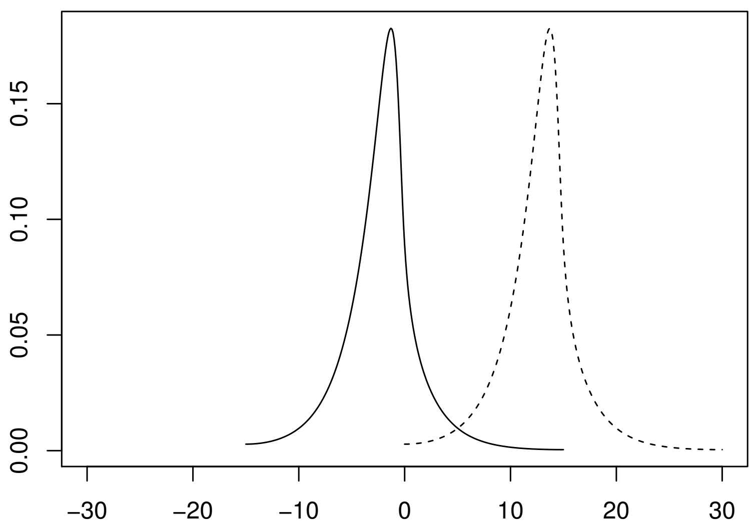


Figura 10: Función de densidad de T

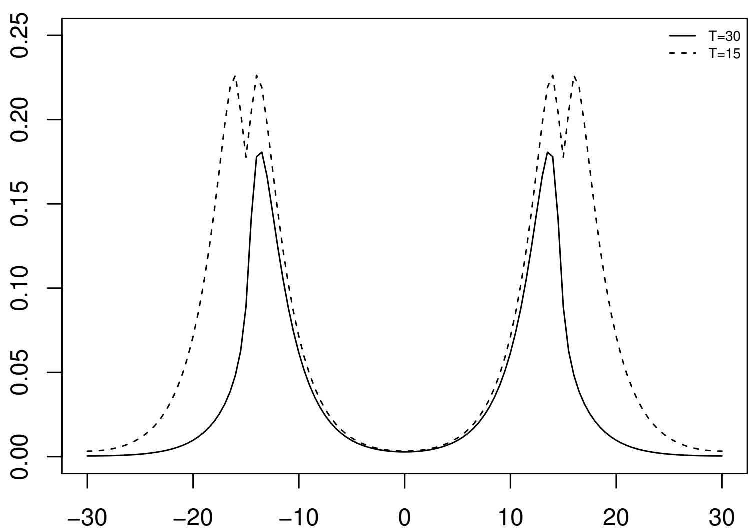


Figura 11: Función de densidad de T

Índice de tablas

1. Posturas Iniciales 5
2. Registro de Posturas 5
3. Distribución de Precios de las Posturas de Compra 12
4. Distribución de Precios de las Posturas de Venta 12
5. Distribución del Volumen de las Posturas 12

Índice de figuras

1. Reconstrucción: KUO diciembre 31 7
2. Reconstrucción: KUO enero 28 8
3. Reconstrucción: AMX enero 20 8
4. Reconstrucción: AMX diciembre 28 9
5. Captura de pantalla de la Interface desarrollada en Java 10
6. Ajuste del Modelo de Distribución de Precios de las Posturas . 13
7. Ajuste del Modelo de Distribución del Volumen de las Posturas 14
8. $g_n(t)$ 20
9. Función de densidad de T 27
10. Función de densidad de T 28
11. Función de densidad de T 28

Bibliografía

[Abate and Whitt, 1995] Abate, J. and Whitt, W. (1995). Numerical inversion of laplace transforms of probability distributions. *ORSA Journal on Computing*, 7(1):36–43.

[Abate and Whitt, 1999] Abate, J. and Whitt, W. (1999). Computing laplace transforms for numerical inversion via continued fractions. *INFORMS Journal on Computing*, 11(4):394–405.

[Bouchaud et al., 2002] Bouchaud, J.-P., Mézard, M., and Potters, M. (2002). Statistical properties of stock order books: empirical results and models. *Quantitative Finance*, 2(4):251–256.

[Cont et al., 2010] Cont, R., Stoikov, S., and Talreja, R. (May/June 2010). A stochastic model for order book dynamics. *Operations Research*, 58(3):549–563.

[Dubner and Abate, 1968] Dubner, H. and Abate, J. (1968). Numerical inversion of laplace transforms by relating them to the finite fourier cosine transform. *Journal of the ACM (JACM)*, 15(1):115–123.

[Zovko and Farmer, 2002] Zovko, I. and Farmer, J. (2002). The power of patience: a behavioural regularity in limit-order placement. *Quantitative Finance*, 2(5):387–392.