

Índice

1. Introducción	1
2. Descripción de las Base de Datos	3
3. Reconstrucción del Libro de Posturas	7
4. Características Estadísticas del Libro de Posturas	13
5. Modelo del Libro de Posturas Limitado	19
5.1. La Transformación de Laplace Inversa	22
5.2. Dinámica del Libro de Posturas Limitado	26
5.3. Dirección de los Movimientos en el Precio	29
5.3.1. Estimación de los Parámetros	32
5.3.2. Resultados	34
6. Conclusiones	39
Índice de tablas	40
Índice de figuras	41
Bibliografía	42

1. Introducción

Los mercados de valores permiten el intercambio de activos con facilidad. La mayoría de los estudios de los mercados tratan de explicar el comportamiento de los mismos a través de procesos autorregresivos, en los cuales se trata de explicar la relación del valor actual de una serie de tiempo con los valores anteriores; sin embargo la mayoría de estos estudios ignoran el mecanismo básico detrás de estos mercados: la interacción entre compradores y vendedores.

Los mercados se pueden clasificar en dos tipos:

- Regidos por formadores de mercado (Quote-driven market)
- Regidos por órdenes (Order-driven market)

En los mercados regidos por formadores de mercado, éstos centralizan las órdenes proveyendo liquidez al fijar una postura de compra y una de venta; por ejemplo el especialista en el NYSE. En los mercados regidos por órdenes, las posturas de todos los participantes se agregan en lo que se conoce como el libro de posturas. Los mercados regidos por órdenes tienen como ventaja la transparencia, ya que todos los participantes conocen las posturas de los demás. Existen algunos mercados híbridos donde los formadores de mercado interactúan en el libro de posturas. La Bolsa Mexicana de Valores y NASDAQ son ejemplos de mercados híbridos.

El estudio de la microestructura del mercado es de utilidad ya que permite identificar patrones dentro del mismo, los cuales pueden ser utilizados para la predicción y también para identificar comportamientos fraudulentos. Los comportamientos fraudulentos son de gran interés para los reguladores del mercado, bases de datos parecidas han sido utilizadas para identificar casos en el que varios participantes del mercado han conspirado para manipular precios.

Con el objetivo de estudiar el comportamiento de la Bolsa Mexicana de Valores, se obtuvo una base de datos con todas las posturas del libro de órdenes en un periodo determinado. En este trabajo, se describirá en primer lugar esta base de datos; después se explicará la forma en que se reconstruyó el libro de posturas para poder llevar a cabo el análisis. Los resultados obtenidos tras la reconstrucción se compararán con los de otros estudios similares para otros mercados. Finalmente se describirá un modelo del libro de posturas y un

método basado en la transformación inversa de Laplace para llevar a cabo la predicción del movimiento en el precio de una emisora.

2. Descripción de las Base de Datos

La Bolsa Mexicana de Valores proporcionó para este trabajo una base de datos con las posturas en todas las emisoras entre el 16 de noviembre de 2010 y el 18 de febrero de 2011. La base de datos se compone de dos tablas:

- Posturas Iniciales
- Registro de Posturas

La tabla de registro tiene 25,491,702 renglones; mientras que la tabla de posturas iniciales tiene 275,005. En el registro se encuentran todas las posturas que se reciben a lo largo del día. Las tablas tienen los siguientes campos:

id Número de identificación

folio Número asignado por la BMV a la postura
Según el reglamento de la BMV; las órdenes que, en su caso, tengan modificaciones, perderán el folio de recepción que en un inicio les haya correspondido y se les asignará uno nuevo. No perderán su folio aquellas órdenes que sean modificadas únicamente para disminuir su volumen.

fecha_vig/vigencia Fecha de vigencia de la postura

casabolsa Casa de Bolsa

tipo_mov Tipo de Movimiento

Posibles Valores

CO	Compra
VE	Venta
MO	Modificación
CA	Cancelación
AH	Reconocimiento de Hecho
MH	Modificación de Hecho
CH	Cancelación de Hecho

tipo_op Tipo de Operación

Posibles Valores

CO	Contado
----	---------

PI	Pico
HC	Operación a Precio de Cierre
DC	Operaciones al Precio de Cierre Modalidad Después del Cierre
OR	Operaciones de Registro
OP	Oferta Pública
SR	Suscripción Recíproca
SA	Sobre Asignación

tipo_ord Tipo de Orden

Posibles Valores

LP	Limitada
MC	Mercado
MA	Mejor Postura Limitada Activa

Aquella que sigue el mejor precio límite visible en su mismo sentido y su precio buscará cerrar posturas en sentido contrario que se ubiquen dentro de su precio de protección.

MP Mejor Postura Limitada Pasiva

Aquella que sigue el mejor precio límite visible en su mismo sentido. Aún y cuando existan posturas en sentido contrario dentro de su precio de protección la postura no buscará cerrarlas.

VO	Postura Limitada con Volumen Oculto
LO	Mejor Postura Limitada Activa con Volumen Oculto
HC	Operación a Precio de Cierre
DC	Operaciones al Precio de Cierre Modalidad Después del Cierre
PQ	Paquete

tipo_val Tipo de Valor

emisora Emisora

serie Serie

precio Precio

volumen Volumen

La tabla de posturas iniciales utiliza además estos campos:

fecha Fecha

Este campo se utiliza para distinguir las órdenes que están activas al principio del día e inicializar el libro de órdenes.

orig_timestamp Fecha original de la postura expresada como la cantidad de milésimas de segundo transcurridas desde la medianoche del 1 de enero de 1970

La tabla de registro utiliza estos campos:

timestamp Fecha de la postura expresada como la cantidad de milésimas de segundo transcurridas desde la medianoche del 1 de enero de 1970

folio_anterior Folio Anterior
Se utiliza para localizar el folio de una postura que se va a modificar o cancelar.

fecha_folio_ant Fecha de Folio Anterior

Tabla 1: Posturas Iniciales

id	fecha	orig_timestamp	folio	fecha_vig	tipo_mov	casabol	tipo_op	tipo_ord	tipo_val	emisora	serie	precio	volumen
247	24/11/2010	1290011934040	318480	10/12/2010	CO	1277	CO	LP	1	LAB	B	25.95	2700
292	23/11/2010	1290189919100	368726	26/11/2010	VE	1392	CO	LP	1	CHDRAUI	B	39.8	100
519	23/12/2010	1292863358080	242642	24/12/2010	VE	1277	CO	LP	1	TELMEX	L	10.18	25000
651	27/01/2011	1295881813280	93317	28/01/2011	VE	1664	CO	LP	1	ASUR	B	72	100
848	15/02/2011	1295539042060	268023	18/02/2011	CO	1392	CO	LP	1	INCARSO	B-1	12.01	1000
...

Tabla 2: Registro de Posturas

id	timestamp	folio	vigencia	folio_anterior	fecha_folio_ant	tipo_mov	cas_bolsa	tipo_op	tipo_ord	tipo_val	emisora	serie	precio	precio volumen
48	1289916001700	19	0			VE	1369	CO	LP	1	ARA	*	39.6	800
329	1290785630710	124082	26/11/2010	0		CO	1369	CO	LP	1	AMX	L	35.69	12000
519	1291907916550	16032	0	0		AH	1305	CO	VO	1	GNP	*	58.1	1100
652	1296246310460	911020	0	0		VE	1369	PI	MC	1	ASUR	B	64.05	76
998	1298062094720	566388	18/02/2011	566388	18/02/2011	MO	1288	CO	MA	1	BIMBO	A	97.51	300
...

3. Reconstrucción del Libro de Posturas

Con los datos proporcionados se reconstruyó el libro de posturas. A lo largo del día existen un gran número de modificaciones y cancelaciones, por lo que para el análisis de los datos es indispensable identificar las posturas activas en cada instante. Aproximadamente el 11 % de los registros en la base de datos son modificaciones, mientras que casi el 35 % son cancelaciones.

El algoritmo que se ideó para reconstruir el libro de posturas no toma en cuenta el tipo de orden. Esto se hizo con el fin de simplificar el libro; además de la falta de información como el volumen de las posturas del tipo VO (Volumen Oculto). Las posturas de tipo VO comprenden sólo el 0.55 % del total, mientras que las de tipo LP (Limitadas) representan el 93.81 %. Las operaciones del tipo PI (Picos), las cuales implican la compra/venta de una cantidad de acciones inferior a un lote (para la mayoría de la emisoras son 100 acciones), no se incluyen en el libro de posturas como lo establece el reglamento de la BMV. Las operaciones de tipo PI representan el 0.61 % de la muestra. Adicionalmente como lo establece también el reglamento de la bolsa, antes de las 8:30 no se puede concretar ningún hecho, el algoritmo también respeta esto. En primera instancia se cargan las posturas que quedaron abiertas en días anteriores de la tabla de Posturas Iniciales, a continuación se procesa el registro.

El algoritmo se implementó en Java y se desarrolló una interfaz gráfica. Como se puede ver en la Figura 1, la interfaz permite analizar individualmente cada entrada del registro de una emisora para un día. La interfaz cuenta con 5 ventanas:

- Corros de Venta
- Corros de Compra
- Hechos Reportados por la BMV
- Hechos Reportados por el Algoritmo
- Registro

Con el botón de “Siguiente” se van procesando una a una las entradas del registro. En el caso de una postura de compra, se trata de buscar en primer lugar, una postura en losorros de venta para perfeccionarla, si no existe, ésta

se registra en los corros de compra, los cuales están ordenados de mayor a menor precio. Esto se hace de igual forma para las posturas de venta, éstas están ordenadas también de mayor a menor precio, de tal forma, que la postura que se encuentra en la parte inferior de los corros de venta y la que se encuentra en la parte más alta de los corros de compra son las puntas. La interfaz también permite cancelar una postura de compra o una de venta al seleccionarla y oprimir el botón correspondiente con el objeto de poder depurar errores en el funcionamiento del algoritmo.

Como se mencionó antes, los hechos se registran con la clave AH; éstos se mantienen en la ventana de “Hechos Registrados por la BMV”. Cuando el algoritmo desarrollado perfecciona un hecho, éste se registra en la venta de “Hechos Reportados por el Algoritmo”. Finalmente, se encuentran las cancelaciones y las modificaciones, para éstas es necesario localizar el folio correspondiente en los corros de compra o venta para hacer la cancelación o modificación correspondiente. Con el fin de poder analizar el registro con mayor rapidez, se implementó el botón de “Play”, el cual permite avanzar 100 entradas del registro.

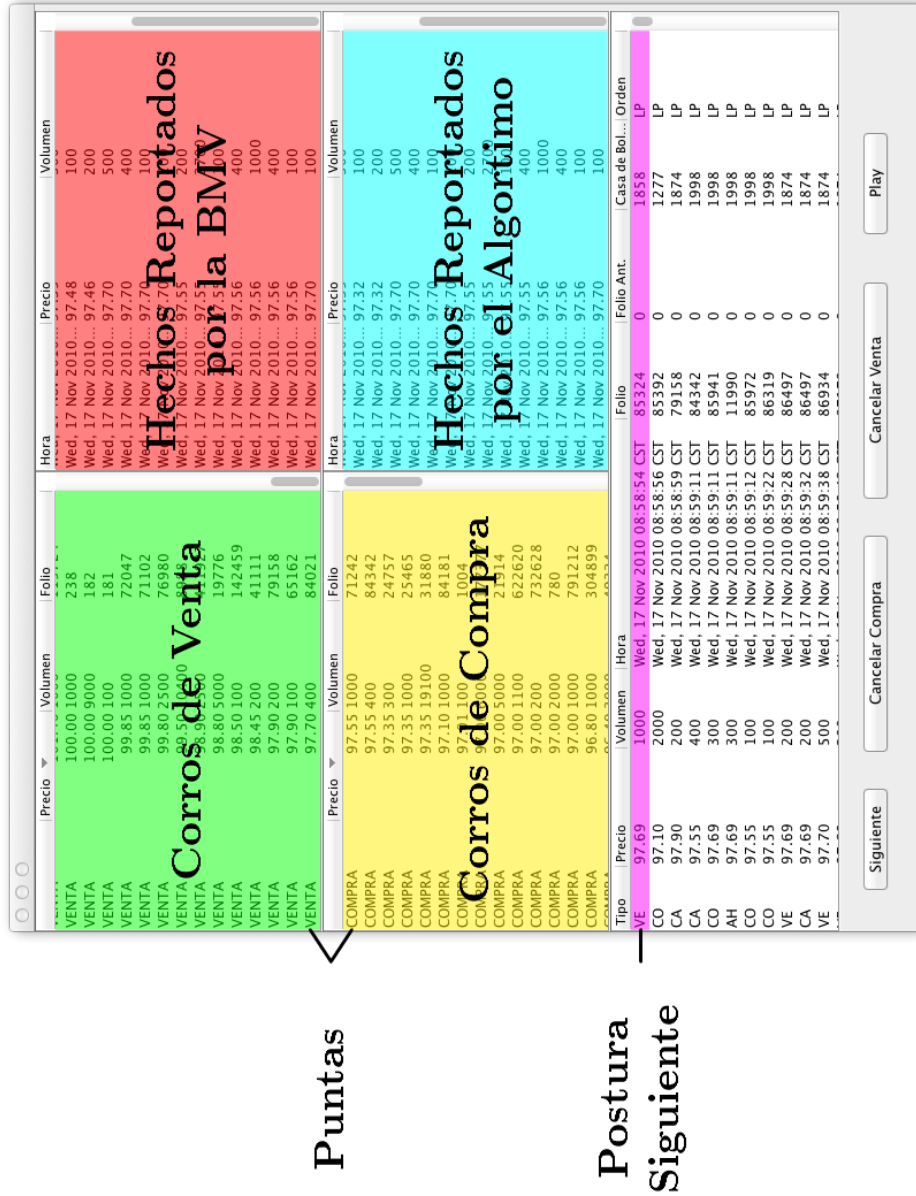


Figura 1: Captura de pantalla de la Interfaz desarrollada en Java

Para medir la efectividad del algoritmo se compararon los hechos reportados por la BMV con los hechos arrojados por el algoritmo. Ignorando acciones de muy baja bursatilidad, si se considera la acción de KUO serie B, la cual tiene en promedio alrededor de 28 posturas diarias en la base de datos comparado con la media de 2,550 posturas diarias para las demás emisoras. Para la muestra de 68 días, el algoritmo reproduce el 50.3 % del volumen operado según la BMV. Al analizar el volumen operado con mayor profundidad, esto se debe a una serie de posturas de muy alto volumen que se registraron el 29 de diciembre de 2010. Se puede presumir que se trata de posturas de volumen oculto. Si se excluye esa fecha, el algoritmo reporta un volumen de 5,607,600 acciones mientras que la BMV reporta 5,972,500, es decir el algoritmo registra 6.1 % menos volumen que la bolsa. Para AMX serie L, la acción con mayor volumen en la BMV con un promedio 44,396 posturas por día, el algoritmo reproduce el 89.7 % de las operaciones.

Aún más importante que el volumen operado es la tendencia de precios. Una forma de evaluar esto es el VWAP (Volume-weighted average price). El VWAP es el precio promedio ponderado por volumen. Para la acción de KUO el VWAP de por ejemplo el 28 de enero de 2011 registrado por la BMV es de 21.72491, el registrado por el algoritmo es de 21.72289. En un día en donde el volumen operado difiere de mayor forma como sucedió el 31 de diciembre de 2010, el VWAP de la bolsa y del algoritmo son similares, 20.35595 y 20.27741 respectivamente. En el caso de AMX, el 28 de diciembre es el día en que el algoritmo reproduce de peor forma el volumen, con un 69.0 % sin embargo la tendencia del precio de las operaciones es bastante similar. El VWAP de las operaciones registradas por la BMV es de 35.12914 mientras que el del algoritmo es de 35.10326. Mientras que para el 20 de enero de 2011, día en el que el algoritmo sigue de mejor forma a las operaciones registradas por la BMV, el VWAP de la bolsa es de 35.28202 mientras que el del algoritmo es de 35.26883.

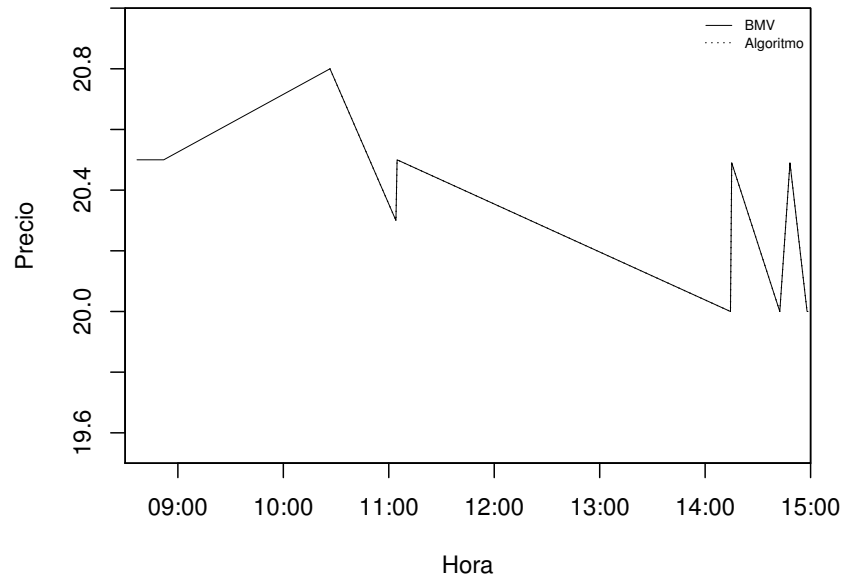


Figura 2: Reconstrucción: KUO diciembre 31

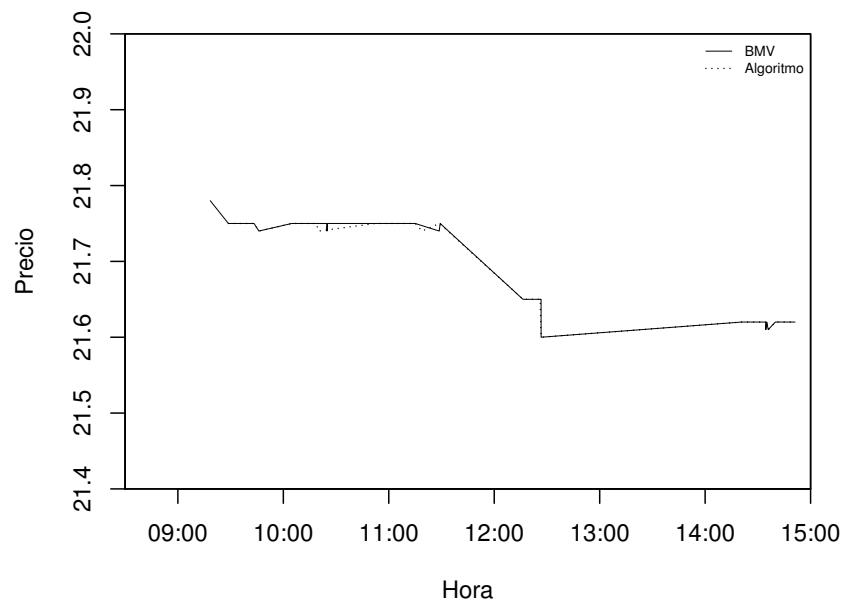


Figura 3: Reconstrucción: KUO enero 28

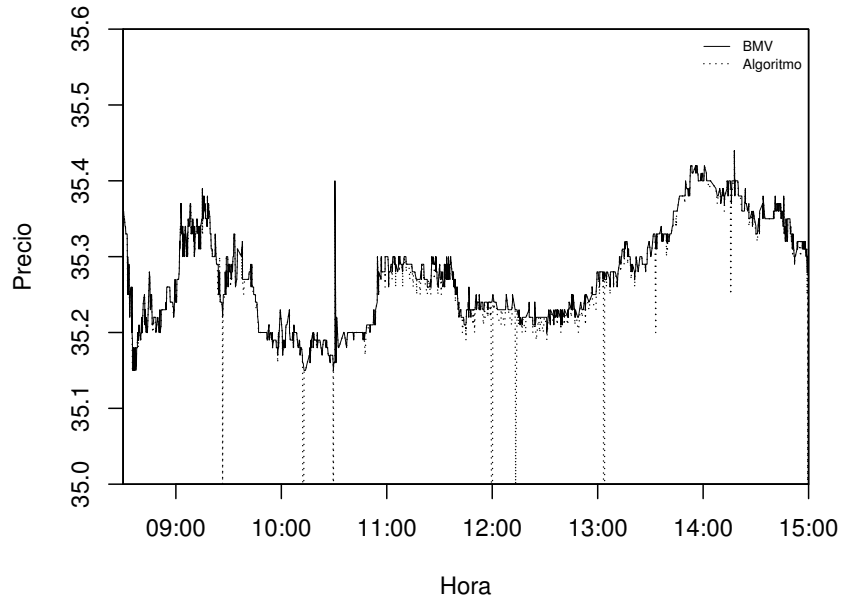


Figura 4: Reconstrucción: AMX enero 20

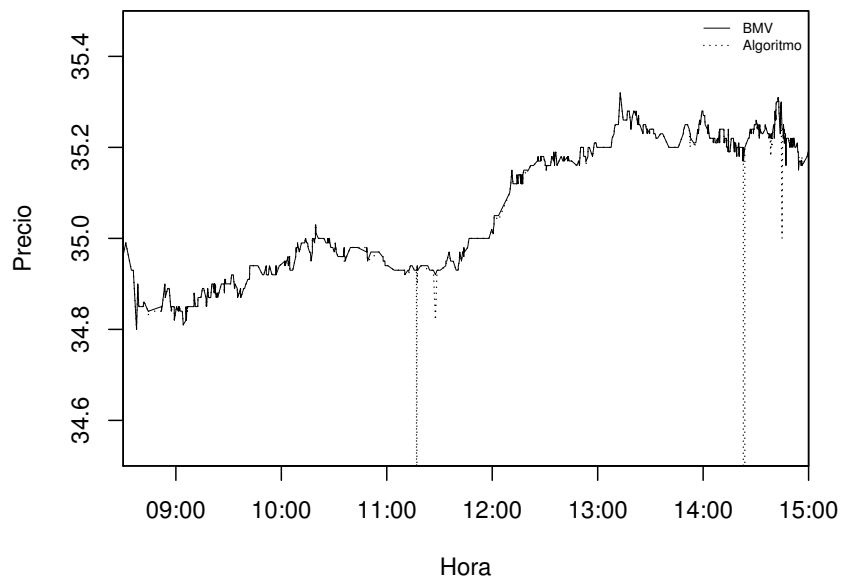


Figura 5: Reconstrucción: AMX diciembre 28

4. Características Estadísticas del Libro de Posturas

Los mercados financieros ofrecen una gran cantidad de información, sin embargo, es posible identificar algunos patrones. Por ejemplo, se ha identificado que la distribución de los precios de las posturas sigue una ley de potencias, es decir, que las frecuencias decrecen exponencialmente al aumentar la variable. Es decir si definimos a $b(t)$ como el precio de la mejor postura de compra y $a(t)$ como el precio de la mejor postura de venta, el precio de una nueva postura de compra o venta se puede expresar como $b(t) - \Delta$ ó $a(t) + \Delta$ respectivamente, donde la Δ está expresada en pujas o ticks, es decir el importe mínimo en que puede variar el precio unitario de cada título. Cabe mencionar que Δ puede tomar valores negativos. Si por ejemplo, con $\Delta < 0$, se registra una postura con el precio $b(t) - \Delta \geq a(t)$ entonces se concretará un hecho, mientras que si $b(t) - \Delta < a(t)$ entonces el precio $b(t+1) = b(t) - \Delta$. Ahora si se excluyen las posturas donde $\Delta \leq 0$ se puede decir que los precios siguen una distribución definida por:

$$P(\Delta) \propto \frac{A}{(\Delta + \lambda)^{\alpha+1}} \quad (4.1)$$

Se ajustó el modelo para distintas acciones. Para ajustar el modelo se excluyeron la modificaciones, las cuales se podrían considerar como una nueva postura en algunos casos. Otros estudios han encontrado que el parámetro α es muy similar entre las distintas emisoras [Zovko and Farmer, 2002] de un mercado en particular, sin embargo, en este caso las acciones tienen parámetros distintos. La distribución ajustada es conocida como Lomax o Pareto Tipo II con $\mu = 0$. La media de esta distribución está definida cuando $\alpha > 1$, por lo que en este caso para algunas de las emisoras se podría definir la media. Otro hecho que se destaca en otros trabajos es que el parámetro α es similar para las posturas de compra y venta [Bouchaud et al., 2002]. Para las acciones estudiadas en este caso, para una misma emisora el parámetro es similar en la mayoría de los casos, sin embargo, en el caso de KUO el parámetro α para las posturas de venta es 50 % mayor que el de las de compra.

Se realizó un estudio similar para la distribución del volumen de las posturas. El volumen también se puede representar con una distribución Lomax, por lo menos para volúmenes superiores a 1,000 títulos. Otro fenómeno interesante es la preferencia de los participantes por volúmenes múltiples de 1,000.

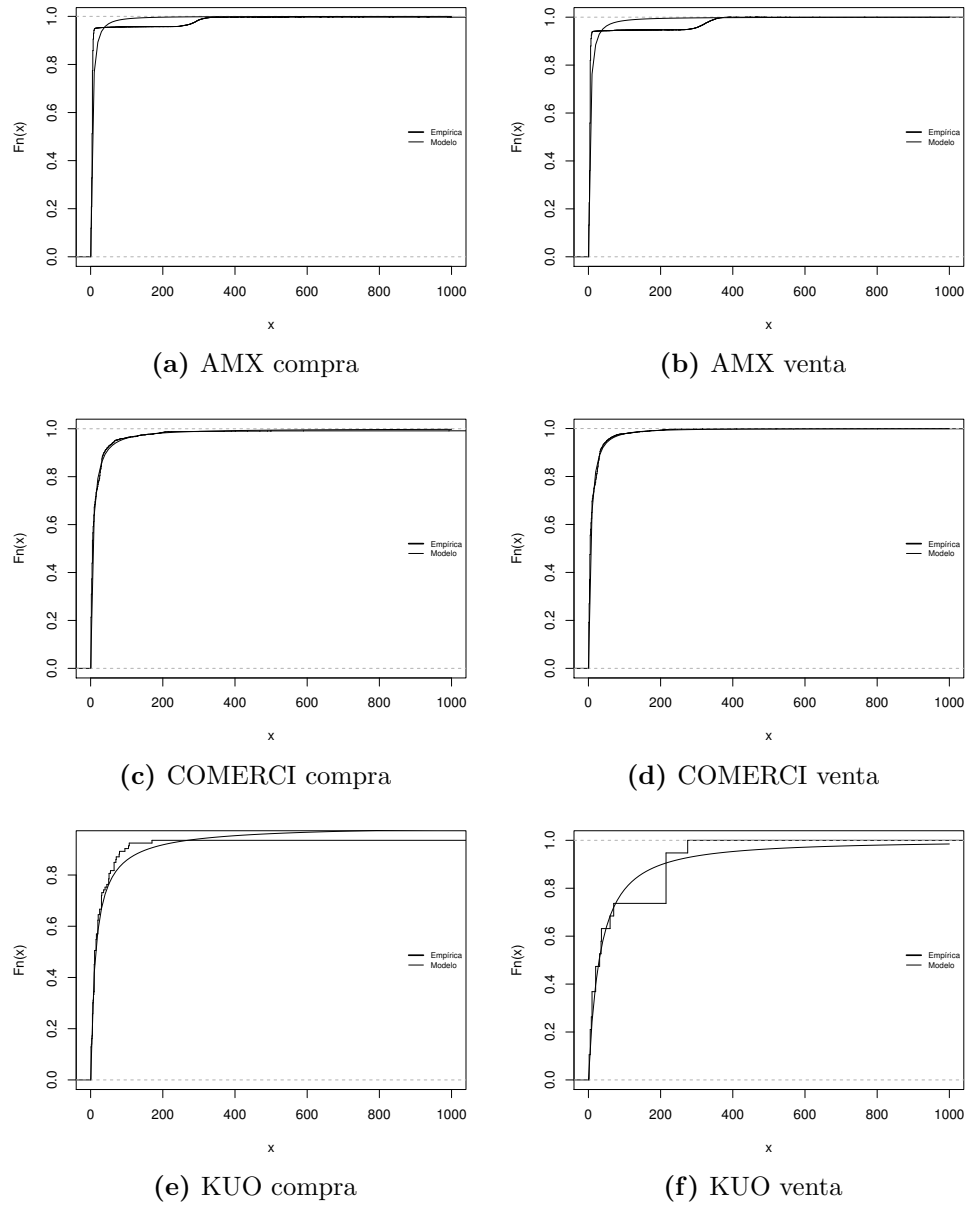


Figura 6: Ajuste del Modelo de Distribución de Precios de las Posturas

Tabla 3: Distribución de Precios de las Posturas de Compra

	λ	α	#posturas	$\Delta > 0$
AMX	7.4441	1.7098	629,302	454,039
BIMBO	14.7809	0.8242	37,021	9,042
COMERCI	7.6756	1.2256	20,955	4,201
GRUMA	58.6601	4.4624	49,895	27,845
HERDEZ	21.1333	2.3332	6,811	1,773
KUO	11.3803	0.8556	495	93

Tabla 4: Distribución de Precios de las Posturas de Venta

	λ	α	#posturas	$\Delta > 0$
AMX	6.2232	1.5022	767,215	555,595
BIMBO	31.2291	1.2005	36,671	11,400
COMERCI	11.0780	1.6555	28,893	6,584
GRUMA	63.2991	4.1402	49,026	30,012
HERDEZ	21.1781	2.3215	5,493	1,263
KUO	42.1747	1.3034	319	19

Como se puede ver en la Tabla 5, en la mayoría de los casos los parámetros para una misma emisora son similares para las posturas de compra y venta. Para 4 de las 6 emisoras estudiadas se puede establecer la media. En el caso de COMERCI no se puede definir una media con el modelo ajustado tanto para las posturas de compra como las de venta. En el caso de KUO no se puede definir la media para las posturas de compra; para HERDEZ no está definida para las posturas de venta.

Por ejemplo, con el modelo ajustado, la media del volumen de las posturas de compra de AMX es de 18,322.35 títulos, mientras que el de venta es de 17,491.36. La media del volumen de compra para BIMBO es de 1,647.74 mientras que la media las posturas de venta es de 1,802.22.

La distribución de la distancia Δ de las cancelaciones del mejor precio de compra $b(t)$ y de venta $a(t)$ también se puede modelar mediante una distribución Lomax. Se debe considerar como se mostrará en las distribuciones empíricas, que un gran número de las cancelaciones suceden con $\Delta = 0$, es decir, al mejor precio de compra y venta respectivamente. La distribución Lomax asume que $F(0) = 0$, lo cual no es así en este caso. Para evitar esto, sólo se considerarán las posturas donde $\Delta > 0$, se menciona por separado la

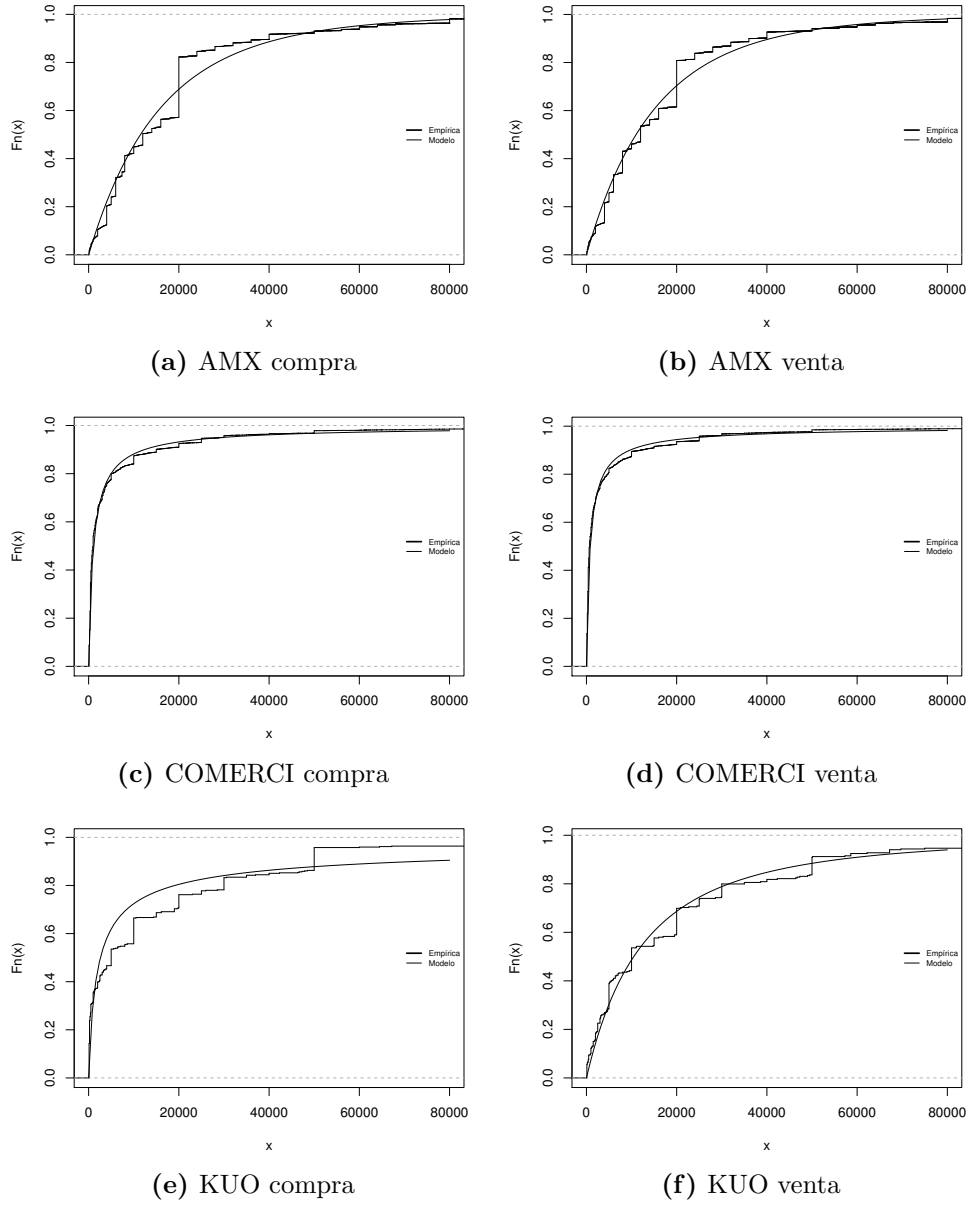


Figura 7: Ajuste del Modelo de Distribución del Volumen de las Posturas

Tabla 5: Distribución del Volumen de las Posturas

	Compra		Venta	
	λ	α	λ	α
AMX	115,318.20	7.2939	112,105.20	7.4092
BIMBO	689.36	1.4184	550.10	1.3052
COMERCI	863.75	0.8432	648.47	0.8336
GRUMA	6,135.30	2.6177	9,413.25	3.1836
HERDEZ	4,064.11	1.2659	2,316.45	0.8967
KUO	975.37	0.5320	24,193.91	1.9253

proporción de las cancelaciones donde $\Delta = 0$.

Como se puede ver en la Figura 8, en este caso la distribución Lomax no es la más adecuada, ya que el grueso de las cancelaciones se concentra en un intervalo con $\Delta < 20$. De hecho la media de cada una de las emisoras en la muestra elegida es menor a 35. Esto quiere decir que las cancelaciones se concentran cerca de los mejores precios de compra y venta respectivamente. Otra consideración importante es que en las emisoras estudiadas en el peor de los casos cerca del 15 % de las cancelaciones suceden al mejor precio de compra o venta. En el caso de HERDEZ para las posturas de venta, más del 50 % de las cancelaciones se realizan en la punta.

Tabla 6: Distribución de las Cancelaciones de las Posturas

	Compra			Venta		
	λ	α	$\Delta = 0$	λ	α	$\Delta = 0$
AMX	7.6567	1.7677	0.1570 %	6.2821	1.5505	0.1575 %
BIMBO	3.9398	0.6827	0.4175 %	14.4289	1.1085	0.3817 %
COMERCI	5.2260	1.3656	0.4670 %	6.8606	1.7948	0.5354 %
GRUMA	88.3815	6.9082	0.2002 %	91.1204	6.4492	0.1461 %
HERDEZ	15.5851	1.7531	0.4269 %	20.0407	1.9113	0.5392 %
KUO	26.0058	1.7855	0.4031 %	22.8162	1.7143	0.6486 %

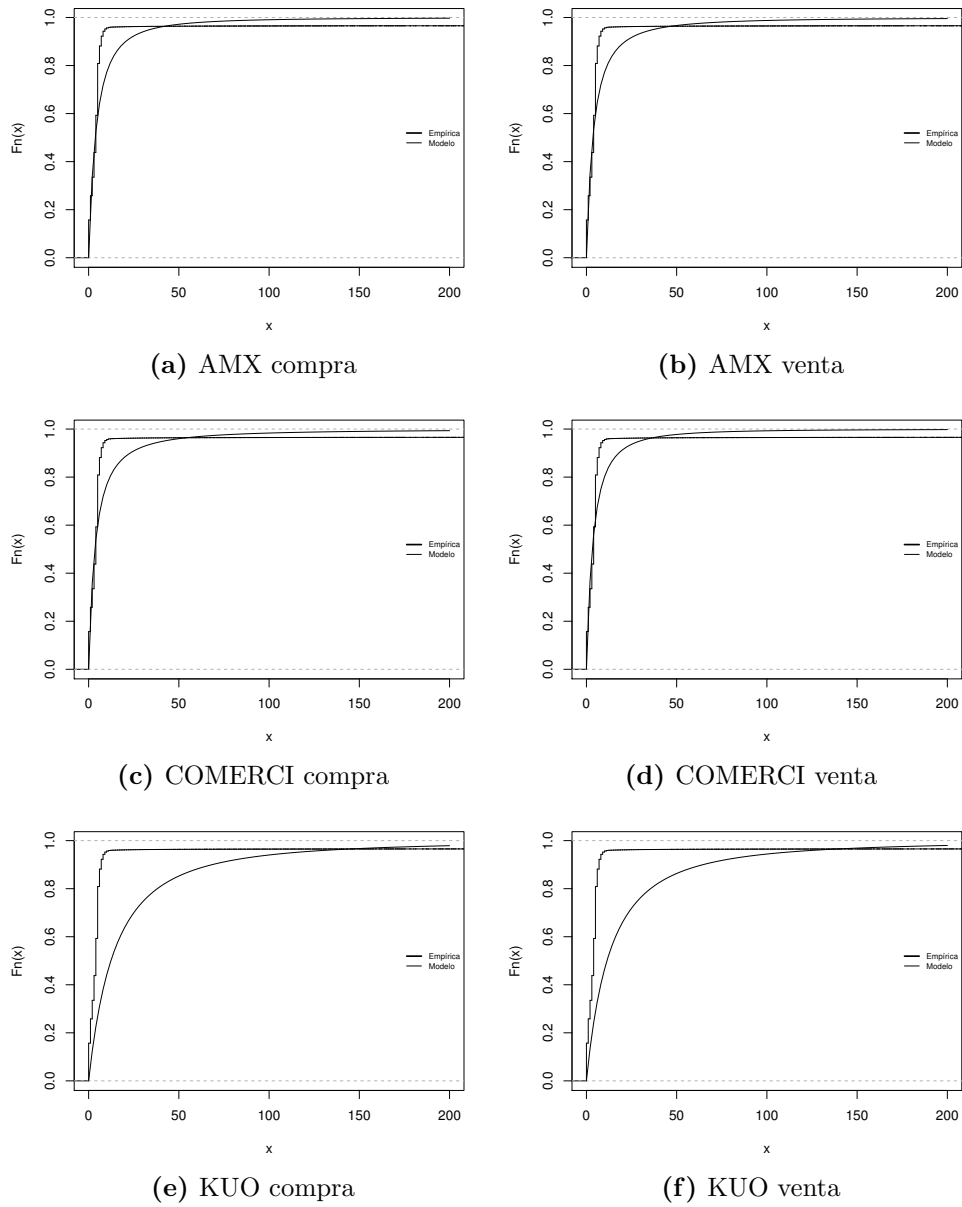


Figura 8: Ajuste del Modelo de Distribución de las Cancelaciones de las Posturas

5. Modelo del Libro de Posturas Limitado

Un proceso estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ con un conjunto de estados $\mathcal{S} \subset I$ se dice que es una cadena de Markov homogénea si para toda $n \in I$, estados $i_0, i_1, \dots, i_n, i, j$ y tiempos $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < s$

$$\begin{aligned} P\{X(t+s) = j | X(\tau_0) = i_0 \dots X(\tau_n) = i_n, X(s) = i\} \\ = P\{X(t+s) = j | X(s) = i\} = P\{X(t) = j | X(0) = i\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Un proceso estocástico se conoce como proceso de nacimiento y muerte con un espacio de estados \mathcal{S} si cumple con los siguientes axiomas:

1. $\mathcal{S} \subset I = \{0, 1, 2, \dots\}$
2. Es una cadena Markov homogénea
3. Existen las constantes no negativas λ_j y μ_j , con $j = 0, 1, \dots$ con $\mu_0 = 0$, tal que para $s > 0$ y $t \geq 0$, se cumple:

$$P\{X(t+s) = j+1 | X(t) = j\} = \lambda_j s + o(s) \quad j \in I \quad (5.2a)$$

$$P\{X(t+s) = j-1 | X(t) = j\} = \mu_j s + o(s) \quad j \in I \quad (5.2b)$$

$$P\{X(t+s) = j | X(t) = j\} = 1 - (\lambda_j + \mu_j)s + o(s) \quad j \in I \quad (5.2c)$$

$X(t)$ se conoce como el tamaño de la población al tiempo t . A λ_j se le conoce como la tasa de nacimiento y μ_j como la tasa de muerte. Una medida interesante de los procesos de nacimiento y muerte es el tiempo del primer paso del estado i al estado j , que se denota como $T_{i,j}$. Para calcular la distribución de esta variable aleatoria es conveniente utilizar la transformación de Laplace bilateral. La cual se define de la siguiente forma:

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (5.3)$$

El tiempo $T_{i,j}$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$T_{i,j} = T_{i,i+1} + T_{i+1,i+2} + \dots + T_{j-1,j} \quad (5.4)$$

donde $T_{k,k+1}$ con $k = 1, 2, \dots, j-1$ son independientes, lo cual permite utilizar la siguiente propiedad de la transformación de Laplace:

$$\hat{f}_{X+Y}(s) = E[e^{-s(X+Y)}] = E[e^{-sX}] E[e^{-sY}] = \hat{f}_X(s) \hat{f}_Y(s) \quad (5.5)$$

Lo cual permite expresar a la transformación de la función de densidad de $T_{i,j}$ como:

$$\hat{f}_{i,j}(s) = \prod_{k=i}^{j-1} \hat{f}_{k,k+1}(s) \quad (5.6)$$

haciendo deseable encontrar una transformación \mathcal{L}^{-1} tal que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\} = f(t) \quad (5.7)$$

Primero es necesario encontrar una expresión para $\hat{f}_{i,i-1}$. Ahora, si condicionamos $T_{i,i-1}$ a la primera transición, donde S_1 es el tiempo para el primer evento, podemos expresarlo como:

$$T_{i,i-1} = \begin{cases} S_1, & \text{si } X(S_1) = i - 1 \\ S_1 + T_{i+1,i-1}, & \text{si } X(S_1) = i + 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

$$T_{i+1,i-1} = T_{i+1,i} + T_{i,i-1} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} F_{i,i-1}(t) &= P\{T_{i+1,i-1} \leq t\} = P\{T_{i,i-1} \leq t | X(S_1) = i - 1\}P\{X(S_1) = i - 1\} + \\ &\quad P\{T_{i,i-1} \leq t | X(S_1) = i + 1\}P\{X(S_1) = i + 1\} \\ &= P\{S_1 \leq t\}P\{X(S_1) = i - 1\} + \\ &\quad P\{S_1 + T_{i+1,i-1} \leq t\}P\{X(S_1) = i + 1\} \\ &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} P\{S_1 \leq t\} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} P\{S_1 + T_{i+1,i-1} \leq t\} \\ &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} F_{S_1}(t) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} F_{S_1 + T_{i+1,i-1}}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_{i,i-1}(t) &= f_{i,i-1}(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \frac{d}{dt} F_{S_1}(t) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \frac{d}{dt} F_{S_1 + T_{i+1,i-1}}(t) \\ &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} f_{S_1}(t) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} f_{S_1 + T_{i+1,i-1}}(t) \end{aligned}$$

Ahora S_1 tiene una distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda_i + \mu_i}$ por lo que:

$$\mathcal{L}\{f_{S_1}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f_{S_1}(t) dt = (\lambda_i + \mu_i) \int_0^\infty e^{-(\lambda_i + \mu_i + s)t} dt = \frac{\lambda_i + \mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_{i,i-1}(t)\} &= \hat{f}_{i,i-1}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} f_{S_1}(t) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} f_{S_1 + T_{i+1,i-1}}(t)\right\} \\ &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \hat{f}_{S_1}(s) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \hat{f}_{S_1 + T_{i+1,i-1}}(s) \\ &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \frac{\lambda_i + \mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \hat{f}_{S_1}(s) \hat{f}_{T_{i+1,i-1}}(s) \\ &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \frac{\lambda_i + \mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \frac{\lambda_i + \mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s} \hat{f}_{i+1,i}(s) \hat{f}_{i,i-1}(s) \end{aligned}$$

$$\hat{f}_i(s) = \hat{f}_{i,i-1}(s) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s - \lambda_i \hat{f}_{i+1}(s)} \quad (5.10)$$

Otro concepto que es necesario introducir es lo que se conoce como fracciones continuas. Las cuales son expresiones de la forma:

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}}$$

Una fracción continua infinita se define con las sucesiones $[\{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty, \{w_n\}_1^\infty]$ donde t_k se define como:

$$t_k := \frac{a_k}{b_k + u}$$

donde:

$$w_n := t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_n(0)$$

por lo que se puede denotar a la fracción continua $[\{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty, \{w_n\}_1^\infty]$ de la siguiente forma:

$$\Phi_{k=i}^\infty \frac{a_n}{b_n}$$

Ahora iterando en la expresión que se obtuvo previamente para $\hat{f}_i(s)$, obtenemos:

$$\hat{f}_i(s) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s - \lambda_i \frac{\mu_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \mu_{i+1} + s - \lambda_{i+1} \frac{\mu_{i+2}}{\lambda_{i+2} + \mu_{i+2} + s + \ddots}}}$$

$$\hat{f}_i(s) = -\frac{1}{\lambda_{i-1}} \frac{-\lambda_{i-1}\mu_i}{\lambda_i + \mu_i + s + \frac{-\lambda_i\mu_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \mu_{i+1} + s + \frac{-\lambda_{i+1}\mu_{i+2}}{\lambda_{i+2} + \mu_{i+2} + s + \ddots}}}$$

$$\hat{f}_i(s) = -\frac{1}{\lambda_{i-1}} \Phi_{k=i}^{\infty} \frac{-\lambda_{k-1}\mu_k}{\lambda_k + \mu_k + s} \quad (5.11)$$

Debido a las propiedades de la función de densidad f , se puede probar [Abate and Whitt, 1999] que \hat{f} converge y está acotada entre la sucesión creciente de aproximantes pares w_{2n} y la sucesión decreciente de aproximantes impares w_{2n+1} :

$$w_{2n}(s) < \hat{f}(s) < w_{2n+1}(s) \text{ para toda } n$$

Donde w_n se puede calcular de la siguiente forma:

$$w_n = \frac{P_n}{Q_n}$$

donde $P_0 = 0, P_1 = a_1, Q_0 = 1, Q_1 = b_1$ con:

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}$$

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}$$

5.1. La Transformación de Laplace Inversa

El reto que aún queda es encontrar una forma de calcular numéricamente \mathcal{L}^{-1} , la cual está definida por la siguiente integral de variable compleja, que se puede evaluar a lo largo de la línea vertical $\gamma = a$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\} &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{a-iT}^{a+iT} e^{st} \hat{f}(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+iu)t} \hat{f}(a+iu) du \\ &= \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos ut + i \sin ut) \hat{f}(a+iu) du \\ &= \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{Re}(\hat{f}(a+iu)) \cos ut - \operatorname{Im}(\hat{f}(a+iu)) \sin ut \right] du \\ &= \frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}(\hat{f}(a+iu)) \cos ut du \end{aligned}$$

Para evaluar esta integral se utiliza un método [Dubner and Abate, 1968] que se basa en la expansión de series de Fourier. Si se considera una función $h(t)$ tal que $h(t) = 0$ para $t < 0$ la cual se dividirá en segmentos de tamaño T , al reflejar cada segmento, se puede construir un conjunto de funciones pares $g_n(t)$, tal que:

$$g_n(t) = \begin{cases} h(t), & \text{si } nT \leq t \leq (n+1)T \\ h(2nT - t), & \text{si } (n-1)T \leq t \leq nT \end{cases}$$

Estas funciones se pueden expresar en el intervalo $(-T, T)$. De tal forma que para $n = 0, 2, 4, \dots$:

$$g_n(t) = \begin{cases} h(nT + t), & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ h(nT - t), & \text{si } -T \leq t \leq 0 \end{cases}$$

y para $n = 1, 3, 5, \dots$

$$g_n(t) = \begin{cases} h((n+1)T - t), & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ h((n+1)T + t), & \text{si } -T \leq t \leq 0 \end{cases}$$

La expansión en series de Fourier de $g_n(t)$ es la siguiente:

$$g_n(t) = \frac{a_{n,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right)$$

donde $a_{a,k}$ está definido como:

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^T h(nT + x) \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) dx, & \text{si } n = 0, 2, 4, \dots \\ \frac{2}{T} \int_0^T h((n+1)T - x) \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) dx, & \text{si } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Esto se puede expresar de forma compacta como:

$$a_{n,k} = \frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt$$

Ahora sumando las funciones $g_n(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) = \frac{2}{T} \left[\frac{A(w_0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A(w_k) \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \right]$$

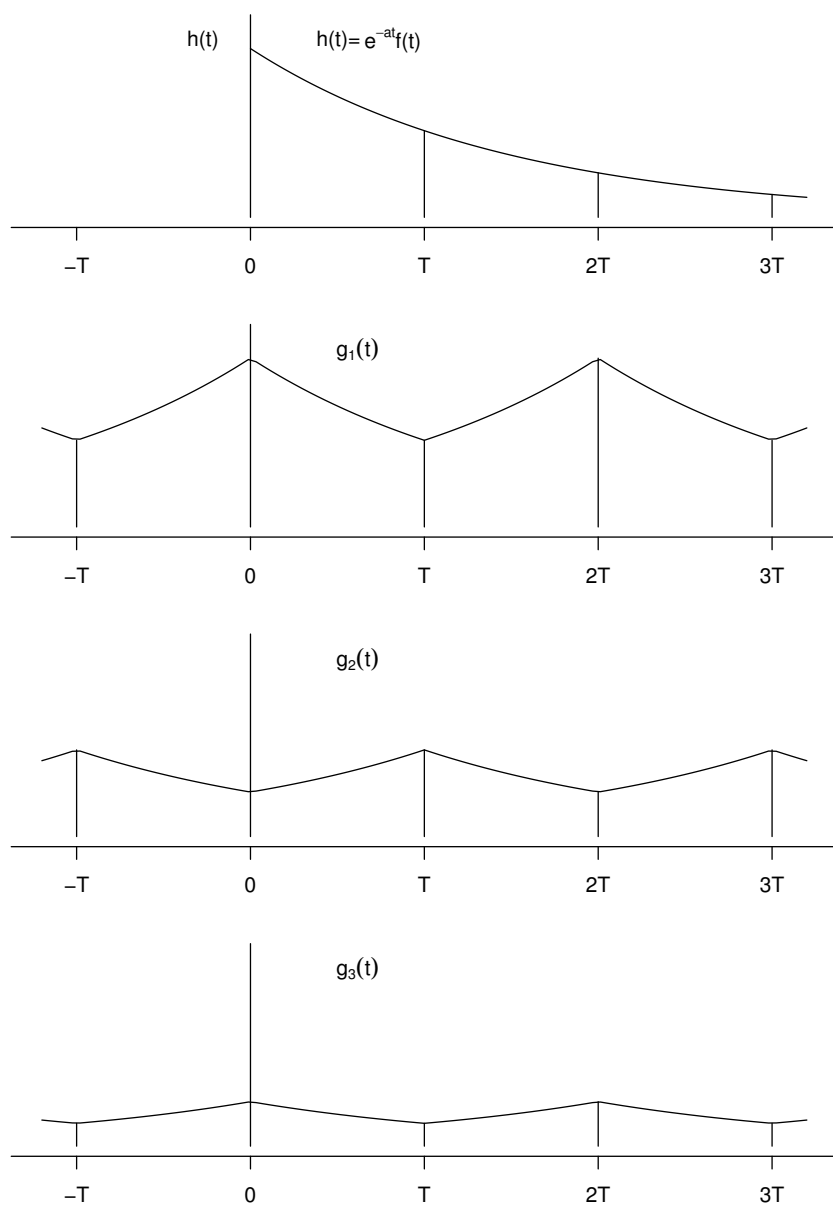


Figura 9: Funciones $g_n(t)$

donde:

$$A(w_k) = \int_0^\infty h(t) \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt$$

Ahora si se introduce un factor de atenuación tal que:

$$h(t) = e^{-at} f(t)$$

de tal forma que $A(w_k)$ es la transformación de Laplace de una función en los números reales.

De esta forma, multiplicando ambos lados por el factor de atenuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = \frac{2e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} \{\hat{f}(a)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\hat{f} \left(a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right) \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right]$$

por lo que de la definición de $g_n(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} h(2nT + t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{at} h(2nT - t)$$

de tal forma que sustituyendo $h(t) = e^{-at} f(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = f(t) + \text{error}$$

Con esto podemos deducir el resultado:

$$f(t) \approx \frac{2e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} \{\hat{f}(a)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\hat{f} \left(a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right) \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right] \quad (5.12)$$

Esto es similar al resultado que se obtiene si se utilizarax la regla del trapecio para evaluar la integral de la transformación inversa. La cual tiene como resultado la siguiente expresión:

$$f(t) \approx f_h(t) = \frac{he^{at}}{\pi} \operatorname{Re}(\hat{f}(a)) + \frac{2he^{at}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\hat{f}(a + ikh)) \cos kht$$

para acelerar la convergencia de la serie [Abate and Whitt, 1995], se toma $h = \pi/2t$ y $a = A/2t$, se llega a la siguiente serie, la cual es casi alternante:

$$f_h(t) = \frac{e^{A/2}}{2t} \operatorname{Re} \left(\hat{f} \left(\frac{A}{2t} \right) \right) + \frac{e^{A/2}}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Re} \left(\hat{f} \left(\frac{A + 2k\pi i}{2t} \right) \right)$$

esta aproximación tiene un error de discretización acotado [Abate and Whitt, 1995].

Debido a que la serie es casi alternante se pueden utilizar métodos para acelerar la convergencia, tal como la transformación de Euler. Al utilizar este método obtenemos la siguiente aproximación:

$$E(m, n, t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^{-m} s_{n+k}(t)$$

donde:

$$s_n = \frac{e^{A/2}}{2t} \operatorname{Re} \left(\hat{f} \left(\frac{A}{2t} \right) \right) + \frac{e^{A/2}}{t} \sum_{k=1}^n (-1)^k \operatorname{Re} \left(\hat{f} \left(\frac{A + 2k\pi i}{2t} \right) \right)$$

Se sugiere utilizar $m = 11$ y $n = 15$. Para probar la ventaja de la aceleración se encontró la transformación de Laplace de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución exponencial. La aceleración permite encontrar una aproximación muy cercana sumando 26 términos mientras que cuando no se recurre a este método, el error de aproximación es mayor aún utilizando 2,000 términos. Es importante mencionar que las funciones deben de tener ciertas propiedades para que la transformación de Euler sea útil.

5.2. Dinámica del Libro de Posturas Limitado

Para modelar la dinámica del libro de posturas limitado se considera el modelo propuesto en [Cont et al., 2010]. Este modelo tiene varias bondades que permiten la utilización de ciertas herramientas matemáticas para realizar el cálculo de las probabilidades de ciertos eventos. El modelo también tiene ciertas limitaciones. En primer lugar considera que las llegadas de las posturas siguen un proceso Poisson, es decir que son completamente aleatorias. También considera posturas con un volumen estandarizado o único.

Si se considera un mercado donde las posturas se pueden colocar en una matriz de precios $\{1, \dots, n\}$ múltiplos de una puja. n se elige de forma que es suficientemente grande para que el precio de todas las posturas estén dentro

de este rango. El estado del libro se puede representar mediante el proceso $X(t) = \{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ donde $|X_p(t)|$ es el número de posturas a un precio p . Si $X_p(t) < 0$ se dice que hay $-X_p(t)$ posturas de compra, cuando $X_p > 0$ existen X_p posturas de venta.

El precio de la mejor postura de venta $p_A(t)$ se define como:

$$p_A(t) = \inf\{p = 1, \dots, n, X_p(t) > 0\}$$

de igual forma el precio de la mejor postura de venta se define como:

$$p_B(t) = \sup\{p = 1, \dots, n, X_p(t) < 0\}$$

También se pueden definir las siguientes cantidades, el precio medio $p_M(t)$ y la diferencia o “spread” $p_S(t)$ entre la mejor postura de compra y venta respectivamente:

$$p_M(t) = \frac{p_B(t) + p_A(t)}{2}$$

$$p_S(t) = p_A(t) - p_B(t)$$

El libro de posturas limitado se actualiza al llegar nuevas posturas. Para un estado $x \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq p \leq n$ se define:

$$x^{p\pm 1} = x \pm (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

donde el 1 se encuentra en la posición p del vector anterior. De esta forma:

- Una postura de compra a un precio $p < p_A(t)$ incrementa la cantidad al nivel p : $x \rightarrow x^{p-1}$
- Una postura de venta a un precio $p > p_B(t)$ incrementa la cantidad al nivel p : $x \rightarrow x^{p+1}$
- Una postura de compra a mercado disminuye la cantidad al mejor precio de venta: $x \rightarrow x^{p_A(t)-1}$
- Una postura de venta a mercado disminuye la cantidad al mejor compra de venta: $x \rightarrow x^{p_B(t)+1}$
- Una cancelación de una postura activa de compra a un precio $p < p_A(t)$ disminuye la cantidad al nivel p : $x \rightarrow x^{p+1}$

- Una cancelación de una postura activa de venta a un precio $p > p_B(t)$ disminuye la cantidad al nivel p : $x \rightarrow x^{p-1}$

Los eventos mencionados arriba se modelan con procesos de Poisson independientes, de tal forma que para $i \geq 0$:

- Las posturas limitadas de compra (venta) arriban a una distancia de i pujas de la mejor postura contraria de acuerdo a distribuciones exponenciales independientes con tasa $\lambda(i)$
- La llegada de las posturas a mercado siguen distribuciones exponenciales independientes con tasa μ
- La cancelación de posturas a una distancia de i pujas de la mejor postura contraria sucede de acuerdo a una distribución exponencial donde la tasa es proporcional al número de órdenes activas, es decir, si a cierto nivel existe un número x de posturas activas, la tasa de cancelación es $\theta(i)x$
- Los eventos mencionados anteriormente son independientes

De este forma se puede decir que el proceso X es una cadena de Markov en tiempo continuo, con el espacio de estados \mathbb{Z}^n con las siguientes tasas de transición:

- $x \rightarrow x^{p-1}$ con tasa $\lambda(p_A(t) - p)$ para $p < p_A(t)$
- $x \rightarrow x^{p+1}$ con tasa $\lambda(p - p_B(t))$ para $p > p_B(t)$
- $x \rightarrow x^{p_B(t)+1}$ con tasa μ
- $x \rightarrow x^{p_A(t)-1}$ con tasa μ
- $x \rightarrow x^{p+1}$ con tasa $\theta(p_A(t) - p)|x_p|$ para $p < p_A(t)$
- $x \rightarrow x^{p-1}$ con tasa $\theta(p - p_B(t))|x_p|$ para $p > p_B(t)$

5.3. Dirección de los Movimientos en el Precio

Se puede calcular la probabilidad de que en el siguiente movimiento el precio medio $p_M(t)$ aumente. El precio medio se altera en el tiempo del primer paso de las colas al mejor precio de compra o venta a cero. También este precio se puede alterar si el “spread” $p_S(t) > 1$ y llega una postura dentro de este “spread”. Definimos a $X_A = X_{p_A(\cdot)}(\cdot)$ y $X_B = X_{p_B(\cdot)}(\cdot)$ y $\theta = \inf\{t \geq 0, p_M(t) \neq p_M(0)\}$.

Dada una configuración inicial del libro de posturas, la probabilidad de que en el siguiente movimiento el precio medio aumente se puede expresar de la siguiente forma:

$$P\{p_M(\theta) > p_M(0) | X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = S\}$$

Los procesos X_A y X_B son procesos de nacimiento y muerte con las siguientes tasas de transición:

$$n \rightarrow n + 1 \text{ con una tasa } \lambda(S)$$

$$n \rightarrow n - 1 \text{ con una tasa } \mu + n\theta(S)$$

En particular cuando $S = 1$ el precio medio $p_M(t)$ se altera cuando X_A ó X_B alcanzan el estado 0. Ahora, si se denota σ_A y σ_B como el tiempo del primer paso de los procesos X_A y X_B a cero, la distribución de θ está dada por el mínimo de los tiempos del primer paso de los procesos X_A y X_B . La probabilidad de interés se puede expresar como $P\{\sigma_A < \sigma_B | X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = S\}$. La transformación de Laplace de la distribución condicional de $\sigma_A - \sigma_B$ está dada por:

$$\hat{f}^A(s)\hat{f}^B(-s)$$

donde:

$$\hat{f}_{j,0}^Z(s) = - \left(\frac{1}{\lambda(S)} \right)^j \left(\prod_{i=1}^b \Phi_{k=i}^{\infty} \frac{-\lambda(S)(\mu + k\theta(S))}{\lambda(S) + \mu + k\theta(S) + s} \right)$$

Por lo que la probabilidad buscada se obtiene al evaluar la función de distribución acumulada en 0. Para hacer esto es necesario encontrar la transformación inversa de $\hat{f}^A(s)\hat{f}^B(-s)$ e integrar esta función.

En el caso de que $S > 1$, es necesario considerar que si se recibe una postura dentro del spread el precio medio $p_M(t)$ también se alterará. Por lo que si denotamos σ_A^i y σ_B^i como el tiempo en el que llega la primera orden a i pujas del mejor precio de venta o compra respectivamente. El tiempo en el que cambia por primera vez $p_M(t)$ está dado por el mínimo de los tiempos $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_A^i$ y σ_B^i con $i = 1, \dots, S - 1$. Es importante mencionar que σ_A^i y σ_B^i se distribuyen de manera exponencial con tasa $\lambda(i)$. Para que $p_M(t)$ aumente es necesario que arribe una orden de compra a $S - 1$ pujas del mejor precio de venta o se agoten las posturas al mejor precio de venta antes de que llegue una postura de venta a $S - 1$ pujas de la mejor postura de compra o se agoten las posturas al mejor precio de compra.

En este caso la probabilidad buscada está dada por $P\{\sigma_A \wedge \sigma_B^1 \wedge \dots \wedge \sigma_B^{S-1} < \sigma_B \wedge \sigma_A^1 \wedge \dots \wedge \sigma_A^{S-1} | X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = S\}$. El mínimo de un conjunto de variables aleatorias que se distribuyen de forma exponencial con parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Por lo que podemos expresar la probabilidad de interés de la siguiente forma $P\{\sigma_A \wedge \sigma_B^\Sigma < \sigma_B \wedge \sigma_A^\Sigma | X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = S\}$. Por lo que la transformación de Laplace de la función de densidad de $\sigma_A \wedge \sigma_B^\Sigma - \sigma_B \wedge \sigma_A^\Sigma$ está dada por:

$$\left(\hat{f}^A(\Lambda + s) + \frac{\Lambda}{\Lambda + s}(1 - \hat{f}_A(\Lambda + s)) \right) \left(\hat{f}^B(\Lambda + s) + \frac{\Lambda}{\Lambda + s}(1 - \hat{f}_B(\Lambda + s)) \right)$$

donde $\Lambda = \sum_{i=1}^{S-1} \lambda(i)$. De igual forma es necesario encontrar la transformación, integrar la función y evaluar en 0.

Los métodos para invertir la transformación de Laplace discutidos en la sección anterior están diseñados para la transformación unilateral de Laplace, es decir definida en los reales positivos. La distribución de $\sigma_A \wedge \sigma_B^\Sigma - \sigma_B \wedge \sigma_A^\Sigma$ están definidas en todos los reales, por lo que es necesario utilizar algunas herramientas para poder encontrar la transformación inversa.

Es importante tener presente que el método utilizado para encontrar la transformación inversa presentado en este trabajo está basado en la expansión en series de Fourier, el cual utiliza funciones pares. Además es importante notar que el método permite encontrar la transformación inversa para $t \in (0, T)$. Las funciones de densidad estudiadas no son pares y están definidas para $t < 0$ por lo que para resolver este problema definimos la función $g(t) = f(t - a)$,

donde a es tal que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = 0$$

En este caso se realizaron diversas simulaciones de los procesos X_A y X_B para evaluar la distribución de θ , la cual disminuye exponencialmente de ambos lados a partir de un cierto máximo. En la Figura 10 se muestra el resultado que se obtiene de las simulaciones y el que se obtiene al utilizar el método de la transformación inversa de Laplace.

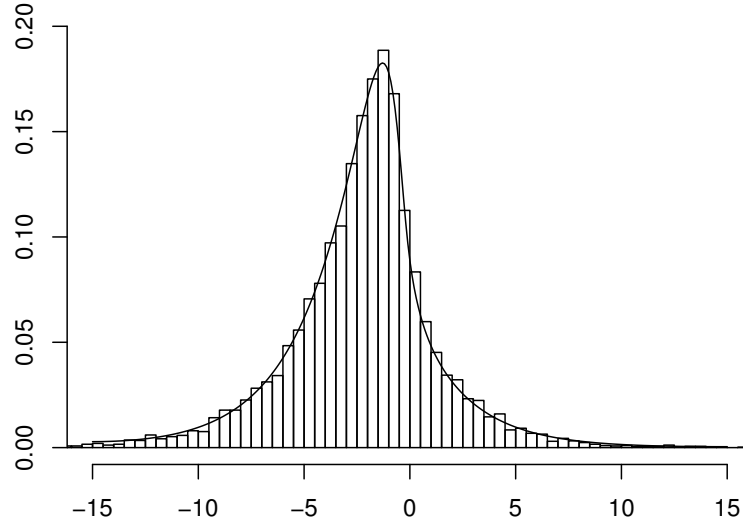


Figura 10: Función de densidad de θ

Si definimos a $u(t)$ como la función de escalón unitario, es decir:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

debido a las propiedades de la transformación de Laplace:

$$\mathcal{L}\{g(t)u(t-a)\} = \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\hat{f}(s)$$

por lo que de esta forma podemos desplazar la función de densidad de forma que $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = 0$, como se puede apreciar en la Figura 11.

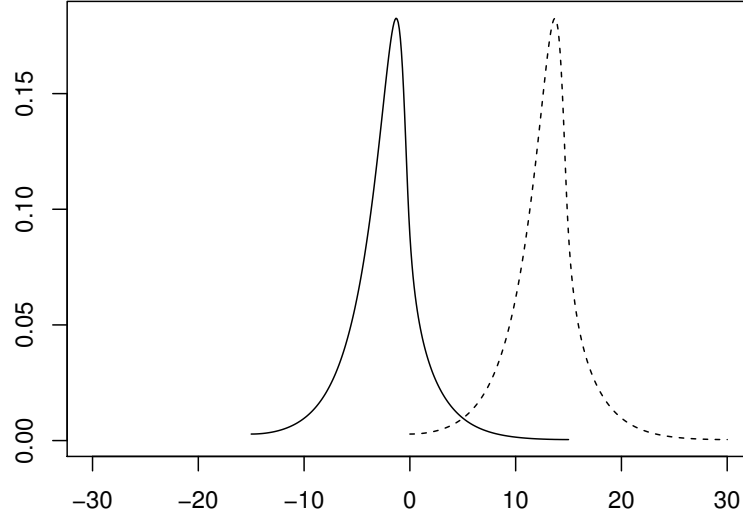


Figura 11: Función de densidad de θ

También es importante utilizar el parámetro correcto T para encontrar la distribución correcta. Como se puede ver en la Figura 12, la función de densidad es radicalmente distinta cuando T no es lo suficientemente grande.

5.3.1. Estimación de los Parámetros

Debido a como se mencionó anteriormente el modelo considera posturas con un volumen estandarizado o único, es necesario encontrar el promedio de las posturas limitadas S_l , posturas a mercado S_m y de las cancelaciones S_c . Con esto se estima la tasa de llegada de las ordenes limitadas λ a una distancia de i pujas, $1 \leq i \leq 5$

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{N_l(i)}{T_*}$$

donde $N_l(i)$ es el número de posturas que llegaron a una distancia i de la mejor postura contraria y T_* es el tiempo total en el que el mercado estuvo abierto expresado en minutos. Para $i > 5$ esto se extrapola siguiendo la siguiente ley de potencias:

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{k}{i^\alpha}$$

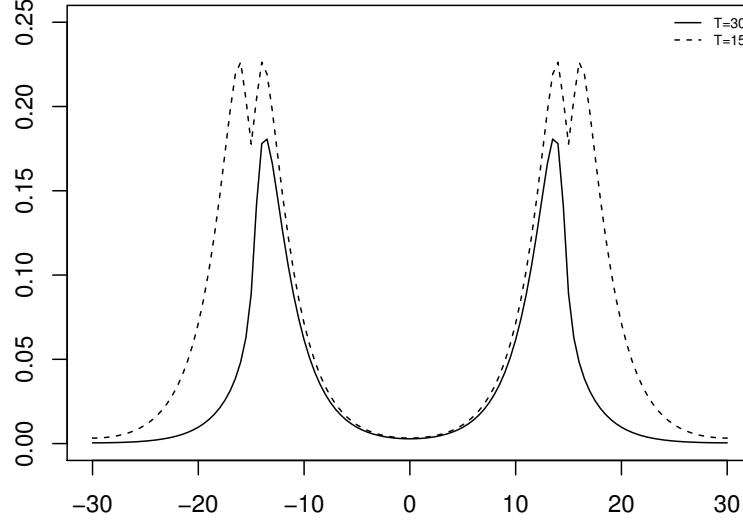


Figura 12: Función de densidad de θ

La tasa de llegada de las posturas a mercado μ se estima de la siguiente forma:

$$\hat{\mu} = \frac{N_m}{T_*} \frac{S_m}{S_l}$$

N_m es el número de posturas de mercado; en este caso se consideran como posturas de mercado todas aquellas que superan la mejor postura contraria.

En trabajos anteriores no se cuenta con información tan detallada del libro de posturas, por lo que no se han considerado las modificaciones que en este caso forman una parte muy importante de la muestra. El promedio del volumen de las modificaciones para BIMBO es casi 10 veces mayor al de las nuevas posturas. Esto se puede deber a que los participantes del mercado que están interesados en comprar o vender un volumen mayor seguramente lo harán a través de posturas limitadas, ya que son más sensibles al precio. Las posturas limitadas garantizan un precio, mientras que a través de una postura a mercado se garantiza la ejecución pero no el precio. Los participantes con posturas de gran volumen se verán obligados a adaptar el precio de sus posturas a través de modificaciones para lograr la ejecución de las mismas. Existen tres alternativas:

- Considerar las modificaciones como una cancelación y una nueva postura
- Ignorar las modificaciones
- Modelar las modificaciones como otro proceso

La primera alternativa es la que más se acerca a estudios anteriores ya que estos no cuentan con la noción de las modificaciones, al tener la información de las puntas del libro de posturas sólo notan la cancelación de una postura y la aparición de una nueva a otro nivel. No se considera la diferencia en el volumen de las nuevas posturas y de las modificaciones. Por ejemplo, en la acción de BIMBO el volumen de las nuevas posturas limitadas de compra es de 2,005.23. Mientras que si se toman en conjunto las nuevas posturas y las modificaciones el promedio del volumen es de 10,518.09. Esto se debe a que el promedio del volumen de las modificaciones de compra es de 27,237.23. La segunda alternativa no es viable ya que hay un gran número de modificaciones, al ignorarlas se descartaría información importante en el modelo. La tercera alternativa le agrega un poco de complejidad al modelo, ya que es necesario modelar de alguna forma la llegada de las modificaciones y el comportamiento de ellas. En este caso se optará por la primera alternativa.

Finalmente para calcular los parámetros de cancelación $\theta(i)$, es necesario calcular el libro promedio. En la Figura 13 se encuentra el libro promedio para BIMBO. Bajo los supuestos del modelo, el número de cancelaciones depende del número de órdenes activas. Si definimos Q_i^A y Q_i^B como el número promedio de órdenes activas a i pujas de la mejor postura de venta y compra respectivamente, $\theta(i)$ para $1 \leq i \leq 5$ se pueden calcular de la siguiente forma, donde Q_i es el promedio de Q_i^A y Q_i^B :

$$\hat{\theta}(i) = \frac{N_c(i)S_c}{Q_i T_*}$$

$N_c(i)$ es el número de posturas de cancelación a una distancia i de la mejor postura contraria. Para $i > 5$, $\hat{\theta}(i) = \hat{\theta}(5)$.

Al realizar los cálculos antes descritos para la emisora BIMBO se obtienen los siguientes parámetros:

5.3.2. Resultados

Para entender los resultados en primer lugar, es necesario obtener las probabilidades empíricas para compararlas con las obtenidas por el modelo. En

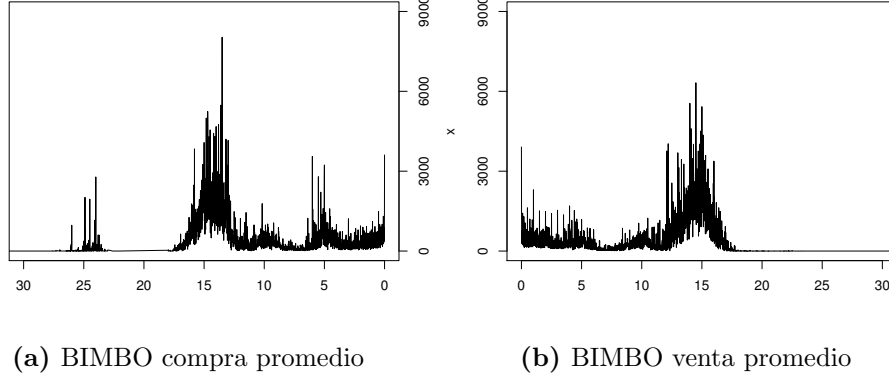


Figura 13: Libro Promedio

Tabla 7: Parámetros del Modelo

	1	2	3	4	5
$\lambda(i)$	0.1669	0.0732	0.0655	0.0601	0.0731
$\theta(i)$	0.6480	0.9954	1.3240	1.5714	0.7582
μ	0.1438				

este caso, se eligió la acción de BIMBO, en particular los casos donde $S = 1$, es decir, la distancia de la mejor postura de compra a la mejor postura de venta es de 1 puja. Para el caso de BIMBO, existen 21,256 eventos donde $S = 1$ de los 173,616 eventos que sucedieron en los 68 días de estudio.

Tabla 8: Ejemplo: Posturas BIMBO

id	timestamp	$p_B(t)$	$X_{p_B}(t)$	$p_A(t)$	$X_{p_A}(t)$	S	$p_M(t)$
151	1289919878430	97.79	600	97.8	2100	1	97.7950
152	1289919878450	97.79	600	97.8	2100	1	97.7950
153	1289919882930	97.79	600	97.8	1500	1	97.7950
154	1289919882940	97.79	600	97.8	1500	1	97.7950
155	1289919883070	97.75	39000	97.79	900	4	97.7700

Para analizar los resultados, se considerará la primera postura donde $S = 1$, en el ejemplo de la Tabla 8 esto sucede en el renglón 151, donde $p_M(t)$ es 97.7950 y el volumen de la mejor postura de venta excede el de la mejor postura de compra. Los siguientes eventos modifican posturas distintas a las puntas o el volumen en las puntas, hasta el evento 155 donde se modifica $p_M(t)$.

Para la acción de BIMBO existen 2,196 instancias como esta; para poder realizar el análisis se encontró la media del volumen del primer evento de cada instancia donde $S = 1$, la cual es de 2,707.45. El volumen de todos los eventos se dividió entre la media y se tomó el número entero más cercano mayor a este cociente para realizar los cálculos. Para el análisis se consideran las posturas donde el volumen normalizado es menor o igual a 5. De las 2,196 instancias mencionadas antes 2,043 cumplen esto, éstas se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9: Número de Posturas

compra	venta				
	1	2	3	4	5
1	1,217	253	116	59	5
2	193	23	9	4	1
3	62	3	4	1	1
4	39	4	0	0	0
5	15	1	0	0	0

En la Tabla 10 se encuentran los resultados que se obtuvieron. En los casos donde existen el mismo número de posturas de compra que de venta los resultados no son muy claros, ya que sólo en el 39.93 % y 34.78 % para 1 y 2 posturas respectivamente aumenta el precio; se esperaría un número cercano al 50 %. Sin embargo, los resultados sí reflejan algo que se esperaría, en los casos donde el número de posturas de compra es mayor al número de posturas de venta la probabilidad de un aumento de precio es mayor; al aumentar esta diferencia aumenta también la probabilidad de que el precio suba. Muchas de las combinaciones son poco concluyentes, ya que la muestra es muy pequeña.

Tabla 10: Resultados Empíricos

compra	venta				
	1	2	3	4	5
1	39.93 %	11.86 %	9.48 %	11.86 %	2.63 %
2	60.62 %	34.78 %	11.11 %	50.00 %	0.00 %
3	67.74 %	33.33 %	75.00 %	0.00 %	100.00 %
4	76.92 %	25.00 %	-	-	-
5	93.33 %	0.00 %	-	-	-

Los resultados obtenidos al aplicar el método de la transformación de Laplace siguen una tendencia similar como se puede ver en la Tabla 11. En

este caso cuando el número de órdenes de compra es el mismo al de las de venta, la probabilidad de un aumento en $p_M(t)$ es cercana al 50 %. Cuando el número de posturas de compra excede al de venta existe una mayor probabilidad de que el precio suba para todos los casos; también al aumentar la diferencia entre las posturas de compra y venta aumenta la probabilidad de un aumento en el precio. Un resultado interesante es que se esperaría que $P\{p_M(T) > p_M(0)|X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = 1\} = 1 - P\{p_M(T) > p_M(0)|X_A(0) = b, X_B(0) = a, p_S(0) = 1\}$, sin embargo, en este caso $P\{p_M(T) > p_M(0)|X_A(0) = 1, X_B(0) = 2, p_S(0) = 1\} = 69.31\%$ mientras que $P\{p_M(T) > p_M(0)|X_A(0) = 2, X_B(0) = 1, p_S(0) = 1\} = 35.32\%$. Esto se puede deber a la precisión de algunos de los cálculos que se realizaron, en particular las integraciones numéricas; esto se podría mejorar al alterar los parámetros.

Tabla 11: Resultados Transformación de Laplace

compra	venta				
	1	2	3	4	5
1	53.49 %	35.32 %	26.21 %	20.82 %	17.27 %
2	69.31 %	52.28 %	41.79 %	34.75 %	29.73 %
3	77.16 %	62.26 %	52.02 %	44.60 %	39.01 %
4	81.81 %	68.80 %	59.22 %	51.91 %	46.17 %
5	84.89 %	73.42 %	64.55 %	57.52 %	51.85 %

Con los mismos parámetros que se utilizaron para el método de Laplace se realizaron simulaciones. Para cada una de las combinaciones se realizaron 10,000 simulaciones. Para las simulaciones en los casos donde el número de posturas de compra y venta son iguales, el porcentaje de las ocasiones donde el precio sube es el más cercano al 50 %. También en este método se cumplen las premisas que se establecieron en los otros dos métodos en cuanto al aumento de la probabilidad de que el precio suba dada la diferencia entre el número de posturas de compra y venta. En este caso se podría decir que $P\{p_M(T) > p_M(0)|X_A(0) = a, X_B(0) = b, p_S(0) = 1\} = 1 - P\{p_M(T) > p_M(0)|X_A(0) = b, X_B(0) = a, p_S(0) = 1\}$ sí se cumple. Este método resulto ser bastante más rápido que el método de la transformación inversa de Laplace, sin embargo, probablemente el método de Laplace se podría mejorar considerablemente si se optimizaran algunos de los algoritmos utilizados.

Tabla 12: Resultados Simulación

compra	venta				
	1	2	3	4	5
1	49.85 %	33.23 %	25.10 %	19.71 %	16.29 %
2	66.78 %	50.26 %	40.35 %	33.20 %	28.28 %
3	75.55 %	60.08 %	50.41 %	42.41 %	36.89 %
4	79.55 %	66.27 %	57.13 %	49.40 %	43.76 %
5	83.90 %	71.98 %	63.65 %	55.75 %	50.59 %

6. Conclusiones

Después de reconstruir el libro de posturas de la Bolsa Mexicana de Valores, se compararon los resultados con los que se han realizado para otros mercados. Para algunas de las variables los resultados fueron similares a los encontrados en otros mercados; por ejemplo los precios siguen una ley de potencias.

Índice de tablas

1.	Posturas Iniciales	6
2.	Registro de Posturas	6
3.	Distribución de Precios de las Posturas de Compra	15
4.	Distribución de Precios de las Posturas de Venta	15
5.	Distribución del Volumen de las Posturas	17
6.	Distribución de las Cancelaciones de las Posturas	17
7.	Parámetros del Modelo	35
8.	Ejemplo: Posturas BIMBO	35
9.	Número de Posturas	36
10.	Resultados Empíricos	36
11.	Resultados Transformación de Laplace	37
12.	Resultados Simulación	38

Índice de figuras

1.	Captura de pantalla de la Interfaz desarrollada en Java	9
2.	Reconstrucción: KUO diciembre 31	11
3.	Reconstrucción: KUO enero 28	11
4.	Reconstrucción: AMX enero 20	12
5.	Reconstrucción: AMX diciembre 28	12
6.	Ajuste del Modelo de Distribución de Precios de las Posturas .	14
7.	Ajuste del Modelo de Distribución del Volumen de las Posturas	16
8.	Ajuste del Modelo de Distribución de las Cancelaciones de las Posturas	18
9.	Funciones $g_n(t)$	24
10.	Función de densidad de θ	31
11.	Función de densidad de θ	32
12.	Función de densidad de θ	33
13.	Libro Promedio	35

Bibliografía

- [Abate and Whitt, 1995] Abate, J. and Whitt, W. (1995). Numerical inversion of laplace transforms of probability distributions. *ORSA Journal on Computing*, 7(1):36–43.
- [Abate and Whitt, 1999] Abate, J. and Whitt, W. (1999). Computing laplace transforms for numerical inversion via continued fractions. *INFORMS Journal on Computing*, 11(4):394–405.
- [Bouchaud et al., 2002] Bouchaud, J.-P., Mézard, M., and Potters, M. (2002). Statistical properties of stock order books: empirical results and models. *Quantitative Finance*, 2(4):251–256.
- [Cont et al., 2010] Cont, R., Stoikov, S., and Talreja, R. (May/June 2010). A stochastic model for order book dynamics. *Operations Research*, 58(3):549–563.
- [Dubner and Abate, 1968] Dubner, H. and Abate, J. (1968). Numerical inversion of laplace transforms by relating them to the finite fourier cosine transform. *Journal of the ACM (JACM)*, 15(1):115–123.
- [Zovko and Farmer, 2002] Zovko, I. and Farmer, J. (2002). The power of patience: a behavioural regularity in limit-order placement. *Quantitative Finance*, 2(5):387–392.