

# 概率论笔记

## Contents

1 基本概念	1
1.1 运算	1
1.2 关系	2
1.3 频率和概率	2
1.4 条件概率	2
1.5 全概率与贝叶斯公式	3
1.6 事件的独立性	3
1.7 伯努利概型	3
2 随机变量及其分布	3
2.1 $R.V.$ 和 分布函数	4
2.2 分布函数	4
2.3 离散型随机变量及其分布	4
2.4 连续型 $R.V.$	4
2.4.1 正态分布	5
2.5 随机变量的分布	6
3 多维 $R.V.$	6
3.1 二维随机变量和联合分布函数	6
3.2 连续型随机变量	6
3.2.1 边缘分布	7
3.2.2 条件分布	8
3.3 独立性	8
3.4 二维连续型随机变量的分布	8
4 随机变量的数字特征	9
4.1 数学期望	9
4.2 方差	10
4.3 常见形式	10
4.4 协方差	11
5 附录 1: 常见的分布类型的期望与方差	11

## 1 基本概念

### 1.1 运算

若  $A$  代表事件  $A$  发生,  $\bar{A}$  代表事件没有发生, 我们定义如下在随机事件上的关系运算:

包含

$$A \subset B \Leftrightarrow A \rightarrow B$$

$$\text{另外有 } A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

交集

$$A \cap B \Leftrightarrow A \wedge B$$

并集

$$A \cup B \Leftrightarrow A \vee B$$

差集

$$A - B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$$

$$\text{另外有 } A - B = A - AB = A\bar{B}$$

对于交集和并集运算，符合以下四种运算律：

交换律

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

结合律

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

分配律

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

对偶律（德摩根定律）

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

## 1.2 关系

在事件间，存在如下两种关系：

互斥事件

$$A \cap B = \emptyset$$

对立事件

$$A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = \Omega.$$

## 1.3 频率和概率

定义 1.3.1:

频率

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

概率

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) \rightarrow P$$

性质：

非负性

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

标准性

$$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$$

无限可加性

$$\begin{aligned} \text{If } A \cap B = \emptyset \text{ then} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

互补性

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

概率之间存在如下运算：

*Difference*

$$P(A - B) = P(A) - P(AB). \text{ If } B \subset A, P(A - B) = P(A) - P(B).$$

*Addition*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

*Multiplication*

$$P(AB) = P(A)P(B | A)$$

## 1.4 条件概率

定义 1.4.1: 如果  $P(A) > 0$ ，则条件概率为  $P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 。

依此，我们有两条推广式：

1.  $P(B \cup C | A) = P(B | A) + P(C | A) - P(BC | A)$
2.  $P(B - C | A) = P(B | A) - P(BC | A)$

## 1.5 全概率与贝叶斯公式

**定义 1.5.1** (完备事件组):  $S := \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$  是一个属于  $\Omega$  的事件组，并且满足  $\forall A_1, A_2 \subset S, A_1 \cap A_2 = \emptyset, \wedge A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，则  $S$  为一个完备事件组。

由定义，我们可以设  $B$  是一个随机事件， $\{A_1, A_2, \dots, A_i\}$  是一个完备事件组，我们有：

**公式 1.5.1** (全概率公式):

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(BA_i) \end{aligned}$$

**公式 1.5.2** (贝叶斯公式):

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}$$

## 1.6 事件的独立性

若  $A, B$  是相互独立事件，则有

$$P(A | B) = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B | A) = P(B | \bar{A}) \Leftrightarrow P(B | \bar{A}) = P(B)$$

且  $A, \bar{A}, B, \bar{B}$  也相互独立，此外有

若  $A, B, C$  互为独立事件  $\rightarrow A, B, C$  两两独立

若  $A, B, C$  互为独立事件  $\rightarrow$  关于  $A, B$  的加法，乘法，减法  
以及逆运算 也分别独立与  $C$  和  $\bar{C}$

## 1.7 伯努利概型

**定义 1.7.1** (伯努利实验): The experiment have only two probability result  $A, \bar{A}$

**公式 1.7.1** (Binomial probability formula):

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

## 2 随机变量及其分布

## 2.1 R.V. 和 分布函数

R.V. 是一个从随机试验  $E$  的样本空间  $\Omega$  到  $\mathbb{R}$  的一个映射。

## 2.2 分布函数

**定义 2.2.1:** 设  $X$  是一个 R.V.,  $r$  是任意实数, 则称事件  $\{X \leq r\}$  的概率为 R.V.  $X$  的分布函数, 记作  $F(r)$ 。

分布函数有如下性质:

性质:

1.  $P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$ .
2.  $F(x)$  是一个不减函数
3.  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ .

## 2.3 离散型随机变量及其分布

例子:

0 - 1 分布

x	0	1
P	$p$	$1 - p$

二项分布

$$P\{X = k\} := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{x \mid x \in \mathbb{N}^+ \cap [0, n]\}$$

记作  $X \sim B(n, p)$

泊松分布

$$P\{X = k\} := \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, (\lambda > 0) \text{ 记作 } X \sim P(\lambda)$$

几何分布

$$P\{X = k\} := (1-p)^{k-1} p$$

超几何分布

$$P\{X = k\} := \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k \in \{1, 2, 3, \dots, \min(M, N)\} \text{ 记作 } X \sim H(N, M, n)$$

**定理 2.3.1 (Passion's theorem):** 当  $X \sim B(n, p)$  且  $n$  充分大,  $p$  充分小时

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda = np$$

## 2.4 连续型 R.V.

**定义 2.4.1 (distribution function):**

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

其中  $f(t)$  是概率密度函数,  $F(x)$  是分布函数

$$\text{公式 2.4.1 (Range probability): } F\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx$$

**定义 2.4.2 (Uniform distribution):**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & b < x < a \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

定义 2.4.3 (Index):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

指数分布具有无记忆性, 即  $P\{x > t + T \mid x > t\} = P\{x > T\}$ 。

### 2.4.1 正态分布

定义 2.4.1.1 (Normal): Marked  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

公式 2.4.1.1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} dx = \sqrt{A\pi}, \quad A > 0$$

Proof: 设  $X \sim N(0, \frac{A}{2})$ , 因为概率分布函数具有规范性  $F(+\infty) = 1$  即  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$ . 带入得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{A\pi}} e^{-\frac{x^2}{A}} dx &= 1 \\ \frac{1}{\sqrt{A\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} dx &= \sqrt{A\pi} \end{aligned}$$

□

定义 2.4.1.2 (标准正态分布): 当  $\mu = 0, \sigma^2 = 1, X \sim N(0, 1), x \in \mathbb{R}$  时, 其为标准正态分布。

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \Phi(x) = F(x) &= \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \end{aligned}$$

定义 2.4.1.3 (标准化): 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  不满足标准正态分布, 则  $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

根据标准化, 如果我们想要计算一个满足非标准化的正态分布的随机变量在范围  $(a, b]$  上的概率, 我们可以  $X$  先将其标准化为  $\frac{X-\mu}{\sigma}$  并计算  $\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$  即可。

**定义 2.4.1.4 (Quantile 分位点):**  $\mu_\alpha$  表示  $P\{x > \mu_\alpha\} = \alpha$ .  
并且有  $\mu_{1-\alpha} = \mu(-\alpha)$ .

## 2.5 随机变量的分布

对于离散型随机变量, 我们可以先求出取值, 在分别对对应的取值求出概率。而对于连续性随机变量, 重点是求其密度函数: 即已知  $X \sim f_X(x), Y = g(X)$ , 求  $R.V.Y$  的分布函数  $f_Y(y)$ 。

首先介绍根据分布函数求  $R.V.Y$  的密度函数的方法:

**公式 2.5.1 (根据分布函数法):**

1. 首先, 找到密度函数  $f_Y(y)$  的分段点, 一般有如下两种情况
  1.  $f_X(x)$  的分段点, 带入  $g(x)$  后得到的  $y$  的值, 和
  2.  $y = g(x)$  的最值
2. 其次, 根据以上分段点, 求出区间  $(l, r]$  的  $F_Y(y)$ :

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(x) \leq y\} = \int_l^r f_X(x) dx$$

3. 最后, 对求出的分布函数求导即可得到随机变量  $y$  的密度函数  $f_Y(y) = F_Y'(y)$ 。

除此之外, 还可以用下方的定理中的公式来进行求解:

**定理 2.5.1:** 设  $f_X(x)$  随机变量  $X$  的密度函数, 对于随机变量  $Y$  有  $Y = g(X)$ , 且  $g(X)$  为单调函数, 令  $x = h(y)$  是  $y = g(x)$  的反函数,  $\alpha, \beta$  分别是  $g(x)$  的最小值和最大值。则  $Y = g(X)$  的密度函数  $f_Y(y)$  为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

## 3 多维 $R.V.$

### 3.1 二维随机变量和联合分布函数

**定义 3.1.1 (double R.V.):** 设随机试验  $E$  的样本空间  $\Omega = \{e\}$ ,  $X = X(e), Y = Y(e)$  的定义在  $\Omega$  上的随机变量, 则  $(X, Y)$  为定义在  $\Omega$  上的二维随机变量。

**定义 3.1.2 (Union Distribution Function):** 设  $x, y \in \mathbb{R}$ , 则  $x, y$  的联合分布函数为事件  $\{X \leq x\}$  与事件  $\{Y \leq y\}$  同时发生的概率为二维随机变量的联合分布函数

$$F(x, y) = P\{(X \leq x) \cup (Y \leq y)\} \stackrel{\text{计作}}{=} P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

随机变量的分布函数的几何意义为在二维坐标轴中,  $F(x, y)$  为  $X \leq x$  与  $Y \leq y$  所围成的矩形区域的面积。易得, 点  $(X, Y)$  落在  $\{(x, y) \mid x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2\}$  区域的概率为  $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$ 。

### 3.2 连续型随机变量

**定义 3.2.1 (Density function):** 联合概率密度指的是对于二维随机变量  $(X, Y)$ , 其概率分布函数为

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

其中的非负函数  $f(x, y)$  即为联合概率密度。

**性质:** 有如下性质:

1. 非负性:  $f(x, y) \geq 0$
2. 规范性:  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du dv = F(\infty, \infty) = 1$
3. 设  $G$  是平面  $xOy$  上的闭区域, 则点  $(X, Y)$  落在  $G$  区域上的概率为

$$F\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$$

一些分布的常见形式

1. 均匀分布

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{S_G}, (u, v) \in G \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

1. 二维正态分布

(2) 二维正态分布

$$\text{若 } (X, Y) \text{ 的 } f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 \leq \rho \leq 1 \Rightarrow$  则称  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$



### 3.2.1 边缘分布

**定义 3.2.1.1 (Distribution function):** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布函数为  $F(X, Y)$ ,  $\Omega$  为完备事件组, 则  $F_X(x) = P\{X \leq x, \Omega\}$ ,  $F_Y(y) = P\{\Omega, Y \leq y\}$  分别为二维随机变量关于  $X$  或  $Y$  的边缘分布函数。

**定义 3.2.1.2 (Distribution Law):** 已知二维随机变量  $(X, Y)$  的分布律为  $P\{X, Y\} = P\{X = x_i \cap Y = y_j\}$  则关于  $X$  的边缘分布律为

$$P_X(x) = \sum_i P(x, y_i)$$

**定义 3.2.1.3 (Density function):** 设  $(X, Y)$  的密度函数为  $f(x, y)$  则关于  $X$  的边缘密度函数为

$$f_X(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

同理

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

为关于  $Y$  的边缘密度函数。

### 3.2.2 条件分布

**定义 3.2.2.1 (law):** 有二维随机变量  $(X, Y)$

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P_Y\{Y = y_j\}}$$

即为随机变量  $X$  在  $Y = y_j$  下的条件分布律

**定义 3.2.2.2 (Density function):** 有二维随机变量  $(X, Y)$  及其联合概率密度  $f(x, y)$ , 固定  $Y = y$ , 则随机变量  $X$  在  $Y = y$  条件下的概率密度函数为  $f_{X|Y} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

### 3.3 独立性

**定义 3.3.1:** 有二维随机变量  $(X, Y)$ ,  $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$  满足独立。对于离散型随机变量, 独立性在于是否满足  $P(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$ 。对于连续性随机变量, 在于其密度函数是否满足  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 。

### 3.4 二维连续型随机变量的分布

对于离散型随机变量, 依旧是先求取值, 再求概率。而对于两个连续型随机变量, 我们有如下方法:

**公式 3.4.1 (分布函数法):** 有二维随机变量  $(X, Y)$  及其联合概率分布  $f(x, y)$ , 已知  $Z = g(X, Y)$ , 则  $Z$  的概率分布为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = P\{(X, Y) | g(X, Y) \leq z\} = \iint_G f(x, y) dx dy$$

或使用卷积公式:

**公式 3.4.2 (卷积公式):** 若随机变量  $X, Z, Y$  存在  $Z = X + Y$  关系, 则

$X, Y$ 不独立 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx$	$X, Y$ 独立 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z - x) dx$
--	--



*Proof:* 对于  $Z = X + Y$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy$$

令  $y + x = t$  将二重积分中对  $y$  的积分换为对  $t$  的积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^z f(x, t-x) dt$$

改变积分次序后得

$$\int_{-\infty}^z \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x) dx \right] dt$$

要求  $Z$  的密度函数, 对变上限积分求导可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

若  $(X, Y)$  独立, 又有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

□

## 4 随机变量的数字特征

### 4.1 数学期望

**定义 4.1.1** (*Discrete type*): 对于离散型随机变量  $X$ , 设  $x_i$  为其分布律的第  $i$  个取值, 相应概率为  $p_i$ , 则其数学期望 (均值) 为:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

**定义 4.1.2** (*continuous type*): 若连续型随机变量  $X$  的密度函数为  $f_X(x)$  则它的均值为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

若要求  $Y = g(X)$  的均值, 则

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

若  $Z = g(X, Y)$  且二维随机变量  $(X, Y)$  有联合概率密度  $f(x, y)$  则

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

性质: 有常数  $C$ , 随机变量  $X$  与  $Y$ :

1.  $E(C) = C$
2.  $E(C + X) = C + E(X)$
3.  $E(CX) = CE(X)$
4.  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
5. 若  $X, Y$  独立, 则  $E(XY) = E(X)E(Y)$

## 4.2 方差

定义 4.2.1: 方差为随机变量与其均值的距离的平方的均值即  $D(X) = E[(X - E(X))^2]$ , 其用来表示  $X$  偏离其均值  $E(X)$  的程度大小。且方差  $D(X) \geq 0$ 。

公式 4.2.1:  $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

性质:  $C$  为常数

1.  $D(C) = 0$
2.  $D(CX) = C^2 D(X)$
3.  $D(X + Y) = D(X) + D(Y) - 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$

## 4.3 常见形式

定理 4.3.1 (0-1 分布): 若随机变量  $X$  服从 0-1 分布, 则

$$E(X) = p, D(X) = p(1-p)$$

定理 4.3.2 (二项分布): 若随机变量  $X$  服从二项分布即  $X \sim B(n, p)$  则

$$E(X) = np, D(X) = np(1-p)$$

Proof: 若随机变量  $X \sim B(n, p)$  则其含义为  $n$  重伯努利实验中成功的次数即  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , 其中  $X_i$  表示第  $i$  次伯努利实验, 每次伯努利实验独立且都有相同的  $p$ , 即  $E(X_i) = p$ , 则

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = np \\ D(X) &= D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = np(1-p) \end{aligned}$$

□

定理 4.3.3 (Poisson 分布): 若随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布即  $X \sim P(\lambda)$  则

$$E(X) = D(X) = \lambda$$

定理 4.3.4 (Uniform 分布): 若  $X \sim U(a, b)$  则

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

定理 4.3.5 (Index 分布): 若  $X \sim e(\lambda)$  则

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

定理 4.3.6 (Normal 分布): 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  则

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$$

#### 4.4 协方差

### 5 附录 1: 常见的分布类型的期望与方差

#### 1. 泊松分布

若  $X \sim p(\lambda)$ , 即  $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0, 1, \dots$ , 则  $E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$

解释: ①  $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$   
 $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{\text{令 } n=k-1}{=} \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

②  $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$   
 $= \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1) + 1] \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = E(X) = \lambda$   
 $= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \lambda = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$

#### 4. 均匀分布

设  $X \sim U(a, b)$ , 则  $E(X) = \frac{a+b}{2}$ ,  $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

解释: ①  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$

②  $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$   
 $= \frac{b^3 - a^3}{3} \cdot \frac{1}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4}$   
 $= \frac{(b-a)^2}{12} \checkmark$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

## 5 指数分布

设  $X \sim e(\lambda)$ , 则  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

解释: ①  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \xrightarrow{\text{分部法}} \left( \frac{1}{\lambda} \right)$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x^2 d e^{-\lambda x} \\ &= - \left[ x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(x^2) \right] \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= 2 \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \xrightarrow{\text{分部法}} \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\therefore D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

## 6. 正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $E(X) = \mu$ ,  $D(X) = \sigma^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

解释: ①  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \xrightarrow{\substack{\frac{x-\mu}{\sigma} = t \\ x = \sigma t + \mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt$

$$= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mu + 0 = \mu$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \xrightarrow{\substack{\frac{x-\mu}{\sigma} = t \\ x = \sigma t + \mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma t)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu^2 + 2\mu\sigma t + \sigma^2 t^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \xrightarrow{\text{分部法}} \mu^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

故  $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$