概率论笔记

Contents

1 基本概念

1.1 运算

若 A 代表事件 A 发生, $\overline{A}$ 代表事件没有发生，我们定义如下在随机事件上的关系运算:

包含	并集

$$A \subset B \Leftrightarrow A \to B$$

另外有 $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

$$A \cup B \Leftrightarrow A \vee B$$

交集

$$A \cap B \Leftrightarrow A \wedge B$$

差集

$$A - B \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$$

另外有 $A - B = A - AB = A\overline{B}$

对于交集和并集运算，符合以下四种运算律：

交换律

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

对偶律（德摩根定律）

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

1.2 关系

在事件间，存在如下两种关系：

互斥事件

$$A \cap B = \varnothing$$

对立事件

$$A \cap B = \varnothing \wedge A \cup B = \Omega.$$

1.3 频率和概率

定义 1.3.1:

频率

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

概率

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A) \to P$$

性质:

非负性

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

标准性

$$P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$$

无限可加性

If $A \cap B = \varnothing$ then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

互补性

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

概率之间存在如下运算：

Difference

$P(A - B) = P(A) - P(AB)$. If $B \subset A$, $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

$$\begin{array}{cc} \textit{Addition} & \textit{Multiplication} \\ P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) & P(AB)=P(A)P(B\mid A) \end{array}$$

1.4 条件概率

定义 1.4.1: 如果 $P(A)>0$，则条件概率为 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$。

依此，我们有两条推广式:

1. $P(B\cup C\mid A)=P(B\mid A)+P(C\mid A)-P(BC\mid A)$
2. $P(B-C\mid A)=P(B\mid A)-P(BC\mid A)$

1.5 全概率与贝叶斯公式

定义 1.5.1（完备事件组）: $S\coloneqq\{A_1,A_2,A_3,...,A_n\}$ 是一个属于 Ω 的事件组，并且满足 $\forall A_1,A_2\subset S, A_1\cap A_2=\varnothing, \wedge\ A_1\cup A_2\cup A_3\cup...\cup A_n=\Omega$，则 S 为一个完备事件组。

由定义，我们可以设 B 是一个随机事件, $\{A_1,A_2,...,A_i\}$ 是一个完备事件组，我们有:

公式 1.5.1（全概率公式）:

$$\begin{aligned} P(B)&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i) \end{aligned}$$

公式 1.5.2（贝叶斯公式）:

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$$

1.6 事件的独立性

若 A，B 是相互独立事件，则有

$$P(A\mid B)=P(A)\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B\mid A)=P\left(B\mid\overline{A}\right)\Leftrightarrow P\left(B\mid\overline{A}\right)=P(B)$$

且 $A,\overline{A},B,\overline{B}$ 也相互独立，此外有

$$\begin{aligned} &\text{若}A,B,C\ \text{互为独立事件}\longrightarrow A,B,C\ \text{两两独立}\\ &\text{若}A,B,C\ \text{互为独立事件}\longrightarrow \text{关于}\ A,B\ \text{的加法，乘法，减法}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{以及逆运算 也分别独立与}\ C\text{和}\overline{C} \end{aligned}$$

1.7 伯努利概型

定义 1.7.1 （伯努利实验）：实验只有两种可能结果 $A, \overline{A}$ 的实验叫做伯努利实验。

公式 1.7.1 （二项概率公式）：

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2 随机变量及其分布

2.1 $R.V.$ 和 分布函数

$R.V.$ 是一个从随机试验 E 的样本空间 Ω 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射。

2.2 分布函数

定义 2.2.1: 设 X 是一个 $R.V.$, r 是任意实数，则称事件 $\{X \leq r\}$ 的概率为 $R.V.\ X$ 的分布函数，计作 $F(r)$。

分布函数有如下性质:

性质:
1. $P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$.
2. $F(x)$ 是一个不减函数
3. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

2.3 离散型随机变量及其分布

例子:

0 – 1 分布

x	0	1
P	p	$1-p$

二项分布

$$P\{X = k\} \coloneqq \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{x \mid x \in \mathbb{N}^+ \cap [0, n]\}$$

计作 $X \sim B(n, p)$

泊松分布

$P\{X = k\} \coloneqq \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $(\lambda > 0)$ 计作 $X \sim P(\lambda)$

几何分布

$$P\{X = k\} \coloneqq (1-p)^{k-1} P$$

超几何分布

$$P\{X = k\} \coloneqq \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k \in \{1, 2, 3, \dots \min(M, N)\} \text{ 计作 } X \sim H(N, M, n)$$

定理 2.3.1 （泊松定理）：当 $X \sim B(n, p)$ 且 n 充分大，p 充分小时

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda = np$$

2.4 连续型 $R.V.$

定义 2.4.1（分布函数）:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

其中 $f(t)$ 是概率密度函数，$F(x)$ 是分布函数

公式 2.4.1（区间概率公式）: $F\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

2.4.1 常见形式

定义 2.4.1.1（均匀分布）:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & b<x<a\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

定义 2.4.1.2（指数分布）:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x>0\\ 0, & \text{otherwize}\end{cases}$$

指数分布具有无记忆性，即 $P\{x>t+T\mid x>t\}=P\{x>T\}$。

2.4.2 正态分布

定义 2.4.2.1（Normal）: Marked $X\sim N(\mu,\sigma^2),\sigma>0$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in\mathbb{R}$$

公式 2.4.2.1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{A\pi},\ A>0$$

Proof: 设 $X\sim N\left(0,\frac{A}{2}\right)$, 因为概率分布函数具有规范性 $F(+\infty)=1$ 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1$. 带入得

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{A\pi}} e^{-\frac{x^2}{A}} \, \mathrm{d}x &= 1 \\
\frac{1}{\sqrt{A\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} \, \mathrm{d}x &= 1 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} \, \mathrm{d}x &= \sqrt{A\pi}
\end{aligned}
$$

□

定义 2.4.2.2 （标准正态分布）：当 $\mu = 0, \sigma^2 = 1, X \sim N(0,1), x \in \mathbb{R}$时，其为标准正态分布。

$$
\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - e^{\frac{x^2}{2}}
$$

$$
\Phi(x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) \, \mathrm{d}t
$$

定义 2.4.2.3 （标准化）：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 不满足标准正态分布，则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

根据标准化，如果我们想要计算一个满足非标准化的正态分布的随机变量在范围 $(a, b]$上的概率，我们可以 X 先将其标准化为 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ 并计算 $\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ 即可。

定义 2.4.2.4 （Quantile 分位点）：μ_α 表示 $P\{x > \mu_\alpha\} = \alpha$.
并且有 $\mu_{1-\alpha} = \mu(-\alpha)$.

2.5 随机变量的分布

对于离散型随机变量，我们可以先求出取值，在分别对对应的取值求出概率。而对于连续性随机变量，重点是求其密度函数：即已知 $X \sim f_X(x), Y = g(X)$，求 $R.V.Y$ 的分布函数 $f_Y(y)$。

首先介绍根据分布函数求 $R.V.Y$ 的 密度函数的方法：

公式 2.5.1 （根据分布函数法）：

1. 首先，找到密度函数 $f_Y(y)$ 的分段点，一般有如下两种情况
   1. $f_X(x)$ 的分段点，带入 $g(x)$ 后得到的 y 的值，和
   2. $y = g(x)$ 的最值
2. 其次，根据以上分段点，求出区间 $(l, r]$ 的 $F_Y(y)$：

$$
F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(x) \leq y\} = \int_{l}^{r} f_X(x) \, \mathrm{d}x
$$

3. 最后，对求出的分布函数求导即可得到随机变量 y 的密度函数 $f_Y(y) = {F_Y}'(y)$。

除此之外，还可以用下方的定理中的公式来进行求解：

定理 2.5.1: 设 $f_X(x)$ 随机变量 X 的密度函数，对于随机变量 Y 有 $Y=g(X)$，且 $g(X)$ 为单调函数，令 $x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数，α,β 分别是 $g(x)$ 的最小值和最大值。则 $Y=g(X)$ 的密度函数 $f_Y(y)$ 为:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{otherwize} \end{cases}$$

3 多维 $R.V.$

3.1 二维随机变量和联合分布函数

定义 3.1.1 （二维随机变量）：设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{e\}$，$X=X(e),Y=Y(e)$ 的定义在 Ω 上的随机变量，则 (X,Y) 为定义在 Ω 上的二维随机变量。

定义 3.1.2 （联合分布函数）：设 $x,y\in\mathbb{R}$，则 x,y 的联合分布函数为事件 $\{X\le x\}$ 与事件 $\{Y\le y\}$ 同时发生的概率为二维随机变量的联合分布函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cup(Y\le y)\}\overset{\text{计作}}{=}P\{X\le x,Y\le y\}$$

随机变量的分布函数的几何意义为在二维坐标轴中，$F(x,y)$ 为 $X\le x$ 与 $Y\le y$ 所围成的矩形区域的面积。易得，点 (X,Y) 落在 $\{(x,y)\mid x_1<x\le x_2,y_1<y\le y_2\}$ 区域的概率为 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$。

3.2 连续型随机变量

定义 3.2.1 （密度函数）：联合概率密度指的是对于二维随机变量 (X,Y)，其概率分布函数为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

其中的非负函数 $f(x,y)$ 即为联合概率密度。

二维随机变量的联合密度函数有如下性质:

性质:

非负性:	规范性:
$f(x,y)\ge 0$	$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=F(\infty,\infty)=1$

设 G 是平面 xOy 上的闭区域，则点 (X,Y) 落在 G 区域上的概率为

$$F\{(X,Y)\in G\} = \iint\limits_{G} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3.2.1 常见形式

定义 3.2.1.1 （均匀分布）：

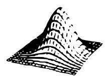
$$f(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{S_G}, (u,v) \in G \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

定义 3.2.1.2 （二维正态分布）：

(2) 二维正态分布

若 (X,Y) 的 $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma^2}\right]\right\}$

其中 $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $-1<\rho\leq 1$ $\Rightarrow$ 则称 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$



3.3 边缘分布

定义 3.3.1 （分布函数）：设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(X,Y)$，Ω 为完备事件组，则 $F_X(x) = P\{X \leq x, \Omega\}, F_Y(y) = P\{\Omega, Y \leq y\}$ 分别为 二维随机变量关于 X 或 Y 的边缘分布函数。

定义 3.3.2 （分布律 / 质量函数）: 已知 二维随机变量 (X,Y) 的分布律为 $P\{X,Y\} = P\{X = x_i \cap Y = y_i\}$ 则关于 X 的边缘分布律为

$$P_X(x) = \sum^{i} P(x, y_i)$$

定义 3.3.3 （密度函数）：设 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y)$ 则关于 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}y$$

同理

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x$$

为关于 Y 的边缘密度函数。

3.4 条件分布

定义 3.4.1 （分布律）：有二维随机变量 (X, Y)

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P_Y\{Y = y_j\}}$$

即为随机变量 X 在 $Y = y_j$ 下的条件分布律

定义 3.4.2 （密度函数）：有二维随机变量 (X, Y) 及其联合概率密度$f(x, y)$，固定 $Y = y$，则随机变量 X 在 $Y = y$ 条件下的概率密度函数为 $f_{X \mid Y} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

3.5 独立性

定义 3.5.1: 有二维随机变量 (X, Y)，$F(x, y) = F_X(y)F_Y(x)$ 满足独立。对于离散型随机变量，独立性在于是否满足 $P(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$。对于连续性随机变量，在于其密度函数是否满足 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 。

3.6 二维连续型随机变量的分布

对于离散型随机变量，依旧是先求取值，再求概率。而对于两个连续型随机变量，我们有如下方法:

公式 3.6.1 （分布函数法）：有二维随机变量 (X, Y) 及其联合概率分布 $f(x, y)$，已知 $Z = g(X, Y)$，则 Z 的概率分布为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = P\{(X, Y) \mid g(X, Y) \leq z\} = \iint\limits_G f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

或使用卷积公式:

公式 3.6.2（卷积公式）：若随机变量 X,Z,Y 存在 $Z=X+Y$ 关系，则

X,Y 不独立	X,Y 独立
$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$	$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$

Proof: 对于 $Z=X+Y$

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

令 $y+x=t$ 将二重积分中对 y 的积分换为对 t 的积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z} f(x,t-x)\,\mathrm{d}t$$

改变积分次序后得

$$\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t-x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$$

要求 Z 的密度函数，对变上限积分求导可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$$

若 (X,Y) 独立，又有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

□

4 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

定义 4.1.1（离散型）：对于离散型随机变量 X，设 x_i 为其分布律的第 i 个取值，相应概率为 p_i，则其数学期望（均值）为：

$$E(X)=\sum^{i} x_i p_i$$

定义 4.1.2（连续型）：若连续型随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$ 则它的均值为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

若要求 $Y=g(X)$ 的均值，则

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $Z=g(X,Y)$ 且二维随机变量 (X,Y) 有联合概率密度 $f(x,y)$ 则

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

性质: 有常数 C，随机变量 X 与 Y:
1. $E(C)=C$
2. $E(C+X)=C+E(X)$
3. $E(CX)=CE(X)$
4. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
5. 若 X,Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

4.2 方差

定义 4.2.1: 方差为随机变量与其均值的距离的平方的均值即 $D(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]$，其用来表示 X 偏离其均值 $E(X)$ 的程度大小。且方差 $D(X)\geq 0$。

公式 4.2.1: $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

性质: C 为常数
1. $D(C)=0$
2. $D(X+C)+D(X)$
3. $D(CX)=C^2D(X)$
4. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)-2[E(XY)-E(X)E(Y)]$

4.3 常见形式

定理 4.3.1（0 - 1 分布）：若随机变量 X 服从 $0-1$ 分布，则

$$E(X)=p, D(X)=p(1-p)$$

定理 4.3.2（二项分布）：若随机变量 X 服从二项分布即 $X\sim B(n,p)$ 则

$$E(X)=np, D(X)=np(1-p)$$

Proof: 若随机变量 $X\sim B(n,p)$ 则其含义为 n 重伯努利实验中成功的次数即 $X=X_1+X_2+...+X_n$，其中 X_i 表示第 i 次伯努利实验，每次伯努利实验独立且都有相同的 p，即 $E(X_i)=p$，则

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = np$$
$$D(X) = D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = np(1-p)$$

□

定理 4.3.3 （Passion 分布）：若随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布即 $X \sim P(\lambda)$ 则

$$E(X) = D(X) = \lambda$$

定理 4.3.4 （Uniform 分布）：若 $X \sim U(a,b)$ 则

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

定理 4.3.5 （Index 分布）：若 $X \sim e(\lambda)$ 则

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

定理 4.3.6 （Normal 分布）：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$$

4.4 协方差

定义 4.4.1 （协方差）：有二维随机变量 (X,Y)，称 $E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ 为随机变量 (X,Y) 的协方差，通常计作 $\mathrm{cov}(X,Y)$ 即

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X,Y) &= E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

特别的，相同变量的协方差为其方差 $\mathrm{cov}(X,X) = D(X)$。

已知方差的性质 3：$D(X+Y) = D(X) + D(Y) - 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$，我们将协方差的计算公式带入可得到 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) - 2\mathrm{cov}(X,Y)$。

协方差有以下性质

性质：

1. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$
2. $\mathrm{cov}(aX,bY) = ab\ \mathrm{cov}(X,Y)$
   a,b 为常数
3. $\mathrm{cov}(X+Y,Z) = \mathrm{cov}(X,Z) + \mathrm{cov}(Y,Z)$
4. 若 X,Y 相互独立，则
   $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

定义 4.4.2 （相关系数）：有随机变量 X,Y，则其相关系数为：

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

相关系数有以下性质

性质:

1. $-1\le\rho_{XY}\le1$
2. 相关性
    1. 若相关系数 $\rho_{XY}=0$ 则称 X,Y 不相关
    2. 若 $\rho_{XY}=1$，则称 X,Y 为正相关，$y=ax+b,a>0$
    3. 若 $\rho_{XY}=-1$，则称 X,Y 为负相关，$y=ax+b,a<0$

5 大数定律和中心极限定理

5.1 大数定律

定义 5.1.1 （切比雪夫不等式）：有随机变量 X 及其均值 $E(X)$ 方差 $D(X)$，存在任意正数 ε 有

$$P\{\mid X-E(X)\mid\ge\varepsilon\}\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

另有

$$P\{\mid X-E(X)\mid<\varepsilon\}\ge1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

定义 5.1.2 （切比雪夫大数定律）：设 $X_1,X_2,...,X_n$ 是相互独立的随机变量序列，且 $E(X_i),D(X_i)$ 均存在，且 $D(X_i)\le C$，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 则对于任意正数 ε，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\mid\overline{X}-E\left(\overline{X}\right)\mid<\varepsilon\right\}=1$$

$$\Leftrightarrow\overline{X}\text{ 依概率收敛到 }E\left(\overline{X}\right)\text{ 即: }\overline{X}\xrightarrow{P}E\left(\overline{X}\right)$$

定义 5.1.3 （伯努利大数定律）：设 n_A 为 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，且 $P(A)=p$，则对于任意正数 ε，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\mid\frac{n_A}{n}-p\mid<\varepsilon\right\}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{n_A}{n}\xrightarrow{P}p$$

定义 5.1.4 （辛钦大数定律）：有随机变量序列 $X_1, X_2, ..., X_n$，随机变量间相互独立且服从同一分布，$E(X_i)$ 存在，则对于任意正数 ε 有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} P\left\{\mid \overline{X} - E\left(\overline{X}\right) \mid < \varepsilon\right\} = 1\\ \Leftrightarrow\ &\overline{X} \xrightarrow{P} E\left(\overline{X}\right)\end{aligned}$$

5.2 中心极限定理

独立随机变量的和的分布当随机变量的个数足够大的时候，近似的服从正态分布。

定义 5.2.1 （独立同分布（列维– 林德伯格）中心极限定理 ）：
若一随机变量序列 $X_1, X_2, ..., X_n$ 服从同一分布且具有相同的期望 $E(X_i) = \mu$，相同的方差 $D(X_i) = \sigma^2$，将 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 计作 $\overline{X}$ 则当 n 充分大的时候，有

$$\begin{aligned}\overline{X}\ \text{近似服从}\ &N\left(E\left(\overline{X}\right), D\left(\overline{X}\right)\right)\\ &= N(n\mu, n\sigma^2)\end{aligned}$$

又由正态分布的标准化可得

$$\frac{\overline{X} - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\ \text{近似服从}\ N(0, 1)$$

定义 5.2.2 （棣莫弗一拉普拉斯 (De Moivre-Laplace) 定理）：若随机变量 $X_n, n = 1, 2, ...$ 服从参数为 n, p 的二项分布，也即随机变量 X 可以分为 n 的相互独立的随机变量 X_i 服从 $0 - 1$ 分布，对于任意的 x 有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = \Phi(x).$$

也即：当 n 充分大时，$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从参数为 np 与 $np(1-p)$ 的正态分布，进而 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从标准正态分布。

6 附录 1：常见的分布类型的期望与方差

3. 泊松分布

若 $X \sim P(\lambda)$，即 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,\cdots\cdots$，则 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$

解释、① $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \xlongequal{令 n=k-1} \lambda \cancel{e^{-\lambda}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}}_{=e^{\lambda}} = \lambda$

② $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} [(k^2-k)+k] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}_{=E(X)=\lambda}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \lambda = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 \cdot \cancel{e^{-\lambda} e^{\lambda}} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a, b)$，则 $E(X) = \frac{a+b}{2}$ =中点，$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & 其它 \end{cases}$

解释：① $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$

② $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$= \frac{b^3-a^3}{3} \cdot \frac{1}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4}$

$= \frac{(b-a)^2}{12}$ ✓

5 指数分布

设 $X \sim e(\lambda)$，则 $E(X)=\frac{1}{\lambda}$，$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

解释：① $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx \xlongequal{分部法} \frac{1}{\lambda}$

② $E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx=-\int_0^{+\infty}\underset{u}{x^2}\,d\underset{v}{e^{-\lambda x}}$

$=-\left[x^2\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx^2\right]$

$=2\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-\lambda x}\,dx$

$=2\frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{\frac{1}{\lambda}}=\frac{2}{\lambda^2}$

$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$

6. 正态分布

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$

解释：① $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \xlongequal[x=\sigma t+\mu]{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\sigma\,dt$

$=\mu\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{1}+\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma t\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{0}=\mu+0=\mu$

② $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \xlongequal{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma\,dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu^2+\cancel{2\mu\sigma t}+\sigma^2t^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ 　0　奇

$=\mu^2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{1}+\sigma^2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{分部法=1}=\mu^2+\sigma^2$

故 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\mu^2+\sigma^2-\mu^2=\sigma^2$