

## 《概率论与数理统计》

注：1. 本试卷共 3 个大题，20 个小题，满分 100 分；

2. 本试卷参考数据： $\Phi(0.8)=0.7881$ ； $\Phi(0.2)=0.9772$ ；

$z_{0.025}=1.96$ ； $t_{0.025}(9)=2.2622$ ； $t_{0.025}(8)=2.3060$ ；

$\chi^2_{0.025}(24)=39.36$ ； $\chi^2_{0.025}(25)=40.65$ ； $\chi^2_{0.05}(24)=36.42$ ； $\chi^2_{0.05}(25)=37.65$ .

### 一、单项选择题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

1. 对于任意两事件  $A$  和  $B$ ，若  $P(AB)=0$ ，则必有\_\_\_\_\_（ ）.

- (A)  $\bar{A}\bar{B}=\emptyset$  (B)  $P(A-B)=P(A)$   
(C)  $P(A)P(B)=0$  (D)  $\bar{A}\bar{B}\neq\emptyset$

2. 设随机变量  $X, Y$  独立同分布，且  $X$  的分布函数为  $F(x)$ ，则  $Z=\max\{X, Y\}$  的分布函数为\_\_\_\_\_（ ）.

- (A)  $F^2(x)$  (B)  $F(x)F(y)$   
(C)  $1-[1-F(x)]^2$  (D)  $[1-F(x)][1-F(y)]$

3. 对任意两个随机变量  $X$  和  $Y$ ，以下选项正确的是\_\_\_\_\_（ ）.

- (A)  $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$  (B)  $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$   
(C)  $E(XY)=E(X)E(Y)$  (D)  $D(XY)=D(X)D(Y)$

4. 设随机变量  $X_i (i=1, 2, \dots)$  相互独立，具有同一分布， $E(X_i)=0$ ， $D(X_i)=\sigma^2$ ，

$k=1, 2, \dots$ ，则当  $n$  很大时， $\sum_{i=1}^n X_i$  的近似分布是\_\_\_\_\_（ ）.

- (A)  $N(0, n\sigma^2)$  (B)  $N(0, \sigma^2)$   
(C)  $N(0, \frac{\sigma^2}{n})$  (D)  $N(0, \frac{\sigma^2}{n^2})$

5. 设总体  $X \sim P(\lambda)$ ， $X_1, X_2, \dots, X_n$  是  $X$  的一个样本， $\bar{X}, S^2$  分别是样本均值及样本方差，则  $E(\bar{X})$  和  $E(S^2)$  分别为：\_\_\_\_\_（ ）.

- (A)  $\lambda, n\lambda$  (B)  $\lambda, \lambda$   
(C)  $\lambda, \lambda/n$  (D)  $n\lambda, \lambda$

6. 设  $X_1, X_2$  是取自总体  $N(\mu, 1)$  的一个样本， $\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2$ ， $\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$ ， $\frac{1}{2}(X_1 + X_2)$  均为  $\mu$  的无偏估计量，其中最有效的一个是\_\_\_\_\_（ ）.

- (A)  $\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2$  (B)  $\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$   
(C)  $\frac{1}{2}(X_1 + X_2)$  (D) 无法确定

7. 在显著性水平  $\alpha$  下的检验结果犯第一类错误的概率\_\_\_\_\_（ ）.

- (A)  $\geq \alpha$  (B)  $1-\alpha$  (C)  $> \alpha$  (D)  $\leq \alpha$

### 二、填空题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

8.  $A, B, C$  是三个随机事件，且  $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$ ， $P(AC)=1/8$ ， $P(AB)=P(BC)=0$ ，则  $A, B, C$  中至少有一个发生的概率为\_\_\_\_\_.

9. 设  $X \sim N(1, 2), Y \sim N(-2, 3)$ ，且  $X$  与  $Y$  独立，则  $X-2Y \sim$ \_\_\_\_\_.

10. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x)=\begin{cases} kx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，则  $k=$ \_\_\_\_\_.

11. 设随机变量  $X$  的期望  $E(X)$  为一非负值, 且  $E(\frac{X^2}{2}-1)=2, D(\frac{X}{2}-1)=\frac{1}{2}$ , 则  $E(X)=$  \_\_\_\_\_.

12. 设随机变量  $X$  的数学期望为  $E(X)=\mu$ , 方差为  $D(X)=\sigma^2$ , 则由切比雪夫不等式, 有  $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq$  \_\_\_\_\_.

13. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本,  $\bar{X}, S^2$  分别为样本均值和样本方差, 则  $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$  服从的分布是 \_\_\_\_\_.

14. 设总体  $X$  的分布律为

$X$	-1	0	1
$p_i$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中  $\theta$  为未知参数, 现有一个样本观测值  $x_1=1, x_2=2, x_3=1$ , 则  $\theta$  的矩估计值为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题 (6 小题, 共 58 分)

15. (本题 10 分) 用  $A_1, A_2, A_3$  三个机床加工同一种零件, 出厂时产品混在一起, 已知零件由各机床加工的概率分别为 0.5, 0.3, 0.2, 各机床加工的零件为合格品的概率分别等于 0.94, 0.9, 0.95.

(1) 任取一个零件, 问它是合格品的概率多大?

(2) 如果任取一个零件是合格品, 那么它是由  $A_1$  机床生产的概率多大?

16. (本题 10 分) 设随机变量  $X$  在 (2, 5) 上服从均匀分布, 现对  $X$  进行三次独立观测, 试求:

(1) 事件 “对  $X$  的观测值大于 3” 的概率;

(2) 至少有两次观测值大于 3 的概率.

17. (本题 10 分) 设随机变量  $X$  和  $Y$  的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	$a$	$b$

若  $X$  与  $Y$  相互独立, 求参数  $a, b$  的值.

18. (本题 10 分) 据以往经验, 某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布. 现随机地取 16 只, 设它们的寿命是相互独立的. 求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率. (提示: 考虑使用独立同分布的中心极限定理)

19. (本题 10 分) 为研究某种植物的高度, 随机选取 9 颗这种植物进行测量, 其高度 (分米) 分别为 6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0, 设该植物高度总体服从  $N(\mu, \sigma^2)$ , 且方差  $\sigma^2=0.36$  已知; 求  $\mu$  的置信水平为 95% 的置信区间.

20. (本题 8 分) 某自动车床生产的产品尺寸服从正态分布, 按规定产品尺寸的方差  $\sigma^2$  不得超过 0.1, 为检验该自动车床的工作精度, 随机的取 25 件产品, 测得样本方差  $s^2=0.1975$ ,  $\bar{x}=3.86$ . 问该车床生产的产品是否达到所要求的精度 (显著性水平  $\alpha=0.05$ ) ?