数理统计笔记

目录

1 样本与抽样分布

定义 1.1 （样本）：设随机变量 X 服从分布 F，若随机变量序列 $X_1, X_2, ..., X_n$ 具有同一分布 F 且相互独立，则称这一随机变量序列为从总体 F 或总体 X 得到的容量为 n 的样本，$x_1, x_2, ..., x_n$ 为 X 的 n 个独立观测值。

反之，若一随机变量序列是总体 F 的一个样本，则序列中的随机变量同分布为 F，且相互独立。

定义 1.2 （经验分布函数）：有 样本 $x_1, x_2, ..., x_n$，用$S(x)$，$-\infty < z < \infty$ 表示 $x_1, x_2, ..., x_n$ 中不大于 x 的随机变量的个数，定义经验分布函数 $F(z)$ 为

$$F_{n(x)} = \frac{1}{n} S(x), \quad -\infty < x < \infty$$

1.1 抽样分布

1.1.1 统计量

定义 1.1.1.1 （统计量与统计量的观测值）：若有一随机变量序列 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是总体 F 的一个容量为 n 的样本，则称不含有位置参数的函数函数 $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ 为统计量。

由定义可知，$g(X_1, X_2, ..., X_n)$ 也是一个随机变量，若有 $x_1, x_2, ..., x_n$ 是样本的观测值，则 $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ 是随机变量 $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的观测值。

有总体 $X, E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$，下方为常见的统计量:

定义 1.1.1.2 （样本平均值）：$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

根据定义可得 $E\left(\overline{X}\right) = n\mu, D\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$

定义 1.1.1.3 （样本方差）：$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \right)$

根据定义可得，$E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

定义 1.1.1.4 （样本标准差）：$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}$

定义 1.1.1.5 （样本 k 阶原点矩）：$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, ...$

定义 1.1.1.6 （样本 k 阶中心矩）：$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k, \quad k = 2, 3, \ldots$

抽样分布即为统计量为 $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的分布，如 χ^2 分布。

1.1.2 χ^2 分布

定义 1.1.2.1 （ χ^2 分布）：设样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且均服从 $N(0,1)$ 分布，则有 $X = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布。即 $X \sim \chi^2(n)$。

χ^2 分布有如下几条性质:

性质:

1. 可加性

若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ 则 $X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

2. 均值与方差

若 $X \sim \chi^2(n)$，则 $E(X) = n, D(X) = 2n.$

3. 上 α 分位点

在 χ^2 分布的密度图形中，当 $x = x_\alpha$ 时，$x > x_\alpha$ 的面积为 α，称此点为上 α 分位点。此时有 $P\{X > x_\alpha\} = \alpha$.

t 分布，F 分布定义暂略

5. 正态总体的样本均值与样本方差的分布.

(1) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，则:

① $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ； ② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ； ③ $\overline{X}$ 与 S^2 独立.