

Note on Calculus

一个短篇

2024 年 01 月 17 日

目录

1 重积分	2
1.1 二重积分	2
1.2 三重积分	2
2 曲线积分和曲面积分	3
2.1 曲线积分	4
2.2 曲面积分	4

1 重积分

1.1 二重积分

Definition 1.1:

$$\iint_D f(x, y) \, d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \sigma_i$$

1.1.1 直角坐标系

$$d\sigma = dx \, dy$$

Formula 1.1: 先横切再竖切

$$D := \{(x, y) \mid y \in [c, d], x \in [\varphi_1(y), \varphi_2(y)]\}$$
$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) \, dx \right] dy$$

Also represented as

$$\int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) \, dx$$

Formula 1.2: 先竖切再横切

$$D := \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$$
$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy$$

1.1.2 极坐标系

Formula 1.3:

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho$$

1.2 三重积分

Definition 1.2: 三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

1.2.1 直角坐标系

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Formula 1.4: 投影穿线法：（先对 z 积分，再对 x, y 做二重积分的处理）

将 封闭区域 Ω 投影至 xOy 面上得到封闭面 D_{xy} ，因此：

$$\Omega := \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$

$$D_{xy} := \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$$

则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Formula 1.5: 投影切面法：

记 l 为 Ω 在 z 轴上的投影， D_z 为 Ω 在 $z = z$ 的截面：

$$\Omega := \{(x, y, z) \mid x, y \in D_z, a \leq z \leq b\}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

1.2.2 柱坐标系

圆柱，圆锥，旋转体

Formula 1.6:

$$\iiint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \rho d\rho \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz$$

1.2.3 球坐标系

积分区域与球有关

Definition 1.3:

在球面坐标系中，球半径设为 r ， r 与 z 轴的夹角设为 φ ， r 在 xOy 面上的投影距离 x 轴的夹角设为 θ ，有：

$$\begin{cases} z = r \cos \varphi \\ x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \end{cases}$$

体积元 $dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$

Formula 1.7:

$$I = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr$$

2 曲线积分和曲面积分

2.1 曲线积分

2.1.1 对弧长的曲线积分

Definition 2.1:

$$\int_L f(x, y) \, ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

Formula 2.1:

有参数方程:

$$L := \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

所以:

$$\int_L f(x, y) \, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt \quad (\alpha < \beta)$$

2.1.2 对坐标的曲面积分

Definition 2.2:

$$\begin{aligned} \int_L F(x, y) \cdot d\mathbf{r} &= \int_L P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i + P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i] \end{aligned}$$

Formula 2.2: 有参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} I &= \int_L P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} \, dt \end{aligned}$$

2.1.3 格林公式

Formula 2.3:

$$\oint_L P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

2.2 曲面积分

2.2.1 对面积的曲面积分

Formula 2.4:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} f(x, y, z) \, dS \\ &= \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy \end{aligned}$$

2.2.2 对坐标的曲面积分

Formula 2.5:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} f(x, y, z) \, dx \, dy \\ &= \pm \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \, dx \, dy \end{aligned}$$

2.2.3 高斯公式

Formula 2.6:

$$\oiint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dv$$