

# 概率论笔记

## 目录

<b>1 基本概念</b>	<b>2</b>
1.1 运算 .....	2
1.2 关系 .....	2
1.3 频率和概率 .....	2
1.4 条件概率 .....	3
1.5 全概率与贝叶斯公式 .....	3
1.6 事件的独立性 .....	4
1.7 伯努利概型 .....	4
<b>2 随机变量及其分布</b>	<b>4</b>
2.1 $R.V.$ 和 分布函数 .....	4
2.2 分布函数 .....	4
2.3 离散型随机变量及其分布 .....	5
2.4 连续型 $R.V.$ .....	5
2.5 随机变量的分布 .....	7
<b>3 多维 <math>R.V.</math></b>	<b>7</b>
3.1 二维随机变量和联合分布函数 .....	7
3.2 连续型随机变量 .....	8
3.3 边缘分布 .....	9
3.4 条件分布 .....	10
3.5 独立性 .....	10
3.6 二维连续型随机变量的分布 .....	10
<b>4 随机变量的数字特征</b>	<b>11</b>
4.1 数学期望 .....	11
4.2 方差 .....	12
4.3 常见形式 .....	12
4.4 协方差 .....	13
<b>5 大数定律和中心极限定理</b>	<b>14</b>
5.1 大数定律 .....	14
5.2 中心极限定理 .....	14
<b>6 样本与抽样分布</b>	<b>15</b>
6.1 基本概念 .....	15
6.2 抽样分布 .....	16
<b>7 参数估计</b>	<b>18</b>
7.1 点估计 .....	18
7.2 评选标准 .....	18
7.3 区间估计 .....	18
<b>8 附录 1: 常见的分布类型的期望与方差及证明</b>	<b>19</b>

# 1 基本概念

## 1.1 运算

若  $A$  代表事件  $A$  发生,  $\bar{A}$  代表事件没有发生, 我们定义如下在随机事件上的关系运算:

包含

$$A \subset B \Leftrightarrow A \rightarrow B$$

另外有  $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

交集

$$A \cap B \Leftrightarrow A \wedge B$$

并集

$$A \cup B \Leftrightarrow A \vee B$$

差集

$$A - B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$$

另外有  $A - B = A - AB = A\bar{B}$

对于交集和并集运算, 符合以下四种运算律:

交换律

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

对偶律 (德摩根定律)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

## 1.2 关系

在事件间, 存在如下两种关系:

互斥事件

$$A \cap B = \emptyset$$

对立事件

$$A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = \Omega.$$

## 1.3 频率和概率

定义:

频率

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

概率

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) \rightarrow P$$

性质：

非负性

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

标准性

$$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$$

无限可加性

$$\begin{aligned} &\text{If } A \cap B = \emptyset \text{ then} \\ &P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{aligned}$$

互补性

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

概率之间存在如下运算：

1. 减法

$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A) - P(AB) \\ \text{If } B \subset A, P(A - B) &= P(A) - P(B). \end{aligned}$$

2. 加法

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

3. 乘法

$$P(AB) = P(A)P(B | A)$$

## 1.4 条件概率

定义： 如果  $P(A) > 0$ ，则条件概率为  $P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 。

依此，我们有两条推广式：

1.  $P(B \cup C | A) = P(B | A) + P(C | A) - P(BC | A)$
2.  $P(B - C | A) = P(B | A) - P(BC | A)$

## 1.5 全概率与贝叶斯公式

定义（完备事件组）：  $S := \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$  是一个属于  $\Omega$  的事件组，并且满足  $\forall A_1, A_2 \subset S, A_1 \cap A_2 = \emptyset, \wedge A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，则  $S$  为一个完备事件组。

由定义，我们可以设  $B$  是一个随机事件， $\{A_1, A_2, \dots, A_i\}$  是一个完备事件组，我们有：

公式（全概率公式）：

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(BA_i) \end{aligned}$$

公式（贝叶斯公式）：

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}$$

## 1.6 事件的独立性

若  $A, B$  是相互独立事件, 则有

$$\begin{aligned} P(A | B) = P(A) &\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \\ &\Leftrightarrow P(B | A) = P(B | \bar{A}) \\ &\Leftrightarrow P(B | \bar{A}) = P(B) \end{aligned}$$

且  $A, \bar{A}, B, \bar{B}$  也相互独立, 此外有

若  $A, B, C$  互为独立事件  $\rightarrow A, B, C$  两两独立

若  $A, B, C$  互为独立事件  $\rightarrow$  关于  $A, B$  的加法, 乘法, 减法  
以及逆运算 也分别独立与  $C$  和  $\bar{C}$

## 1.7 伯努利概型

定义 (伯努利实验): 实验只有两种可能结果  $A, \bar{A}$  的实验叫做伯努利实验。

公式 (二项概率公式):

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

## 2 随机变量及其分布

### 2.1 R.V. 和 分布函数

$R.V.$  是一个从随机试验  $E$  的样本空间  $\Omega$  到  $\mathbb{R}$  的一个映射。

### 2.2 分布函数

定义: 设  $X$  是一个  $R.V.$ ,  $r$  是任意实数, 则称事件  $\{X \leq r\}$  的概率为  $R.V. X$  的分布函数, 计作  $F(r)$ 。

分布函数有如下性质:

性质:

1.  $P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$ .
2.  $F(x)$  是一个不减函数
3.  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ .

## 2.3 离散型随机变量及其分布

定义：

0-1 分布			二项分布
x	0	1	$P\{X = k\} := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{x \mid x \in \mathbb{N}^+ \cap [0, n]\}$ 计作 $X \sim B(n, p)$
P	$p$	$1-p$	

泊松分布	几何分布
$P\{X = k\} := \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, (\lambda > 0)$ 计作 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X = k\} := (1-p)^{k-1} p$

超几何分布

$$P\{X = k\} := \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k \in \{1, 2, 3, \dots, \min(M, N)\}$$

计作  $X \sim H(N, M, n)$

**定理**（泊松定理）：当  $X \sim B(n, p)$  且  $n$  充分大， $p$  充分小时

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda = np$$

## 2.4 连续型 R.V.

**定义**（分布函数）：若  $f(t)$  是概率密度函数，则分布函数  $F(x)$  为

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

**公式**（区间概率公式）： $F\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx$

### 2.4.1 常见形式

**定义**（均匀分布）：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & b < x < a \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

**定义（指数分布）：**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

指数分布具有无记忆性，即  $P\{x > t + T \mid x > t\} = P\{x > T\}$ 。

## 2.4.2 正态分布

**定义（正态分布）：** 计作  $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

**公式：**  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} dx = \sqrt{A\pi}, A > 0$

**证明：** 设  $X \sim N(0, \frac{A}{2})$ , 因为概率分布函数具有规范性  $F(+\infty) = 1$  即  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ . 带入得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{A\pi}} e^{-\frac{x^2}{A}} dx &= 1 \\ \frac{1}{\sqrt{A\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} dx &= \sqrt{A\pi} \end{aligned}$$

□

**定义（标准正态分布）：** 当  $\mu = 0, \sigma^2 = 1, X \sim N(0, 1), x \in \mathbb{R}$  时，其为标准正态分布。

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \Phi(x) = F(x) &= \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \end{aligned}$$

**定义（标准化）：** 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  不满足标准正态分布，则  $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

根据标准化，如果我们想要计算一个满足非标准化的正态分布的随机变量在范围  $(a, b]$  上的概率，我们可以  $X$  先将其标准化为  $\frac{X-\mu}{\sigma}$  并计算  $\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$  即可。

**定义（分位点）：**  $\mu_\alpha$  表示  $P\{x > \mu_\alpha\} = \alpha$ .  
并且有  $\mu_{1-\alpha} = \mu(-\alpha)$ .

## 2.5 随机变量的分布

对于离散型随机变量，我们可以先求出取值，在分别对对应的取值求出概率。而对于连续性随机变量，重点是求其密度函数：即已知  $X \sim f_X(x)$ ,  $Y = g(X)$ ，求  $R.V.Y$  的分布函数  $f_Y(y)$ 。

首先介绍根据分布函数求  $R.V.Y$  的密度函数的方法：

**公式（根据分布函数法）：**

1. 首先，找到密度函数  $f_Y(y)$  的分段点，一般有如下两种情况

1.  $f_X(x)$  的分段点，带入  $g(x)$  后得到的  $y$  的值，和
2.  $y = g(x)$  的最值

2. 其次，根据以上分段点，求出区间  $(l, r]$  的  $F_Y(y)$ ：

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(x) \leq y\} = \int_l^r f_X(x) dx$$

3. 最后，对求出的分布函数求导即可得到随机变量  $y$  的密度函数  $f_Y(y) = F_Y'(y)$ 。

除此之外，还可以用下方的定理中的公式来进行求解：

**公式：** 设  $f_X(x)$  随机变量  $X$  的密度函数，对于随机变量  $Y$  有  $Y = g(X)$ ，且  $g(X)$  为单调函数，令  $x = h(y)$  是  $y = g(x)$  的反函数， $\alpha, \beta$  分别是  $g(x)$  的最小值和最大值。则  $Y = g(X)$  的密度函数  $f_Y(y)$  为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

## 3 多维 $R.V.$

### 3.1 二维随机变量和联合分布函数

**定义（二维随机变量）：** 设随机试验  $E$  的样本空间  $\Omega = \{e\}$ ， $X = X(e)$ ,  $Y = Y(e)$  的定义在  $\Omega$  上的随机变量，则  $(X, Y)$  为定义在  $\Omega$  上的二维随机变量。

**定义（联合分布函数）：** 设  $x, y \in \mathbb{R}$ ，则  $x, y$  的联合分布函数为事件  $\{X \leq x\}$  与事件  $\{Y \leq y\}$  同时发生的概率为二维随机变量的联合分布函数

$$F(x, y) = P\{(X \leq x) \cup (Y \leq y)\} \stackrel{\text{计作}}{=} P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

随机变量的分布函数的几何意义为在二维坐标轴中,  $F(x, y)$  为  $X \leq x$  与  $Y \leq y$  所围成的矩形区域的面积。易得, 点  $(X, Y)$  落在  $\{(x, y) \mid x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2\}$  区域的概率为  $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$ 。

### 3.2 连续型随机变量

**定义 (密度函数) :** 联合概率密度指的是对于二维随机变量  $(X, Y)$ , 其概率分布函数为

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, du \, dv$$

其中的非负函数  $f(x, y)$  即为联合概率密度。

二维随机变量的联合密度函数有如下性质:

**性质:**

1. 非负性:

$$f(x, y) \geq 0$$

2. 规范性:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \, du \, dv = F(\infty, \infty) = 1$$

3. 设  $G$  是平面  $xOy$  上的闭区域, 则点  $(X, Y)$  落在  $G$  区域上的概率为

$$F\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) \, dx \, dy$$

#### 3.2.1 常见形式

**定义 (均匀分布) :**

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{S_G}, & (u, v) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



定义（二维正态分布）：

(2) 二维正态分布

$$\text{若 } (X, Y) \text{ 的 } f_{X,Y} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 \leq \rho \leq 1 \Rightarrow$  则称  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$



### 3.3 边缘分布

定义（分布函数）：设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布函数为  $F(X, Y)$ ,  $\Omega$  为完备事件组, 则  $F_X(x) = P\{X \leq x, \Omega\}$ ,  $F_Y(y) = P\{\Omega, Y \leq y\}$  分别为二维随机变量关于  $X$  或  $Y$  的边缘分布函数。

定义（分布律 / 质量函数）：已知二维随机变量  $(X, Y)$  的分布律为  $P\{X, Y\} = P\{X = x_i \cap Y = y_j\}$  则关于  $X$  的边缘分布律为

$$P_X(x) = \sum_{i=1}^n P(x, y_i)$$

定义（密度函数）：设  $(X, Y)$  的密度函数为  $f(x, y)$  则关于  $X$  的边缘密度函数和关于  $Y$  的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

### 3.4 条件分布

定义（分布律）： 有二维随机变量  $(X, Y)$

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P_Y\{Y = y_j\}}$$

即为随机变量  $X$  在  $Y = y_j$  下的条件分布律

定义（密度函数）： 有二维随机变量  $(X, Y)$  及其联合概率密度  $f(x, y)$ ，固定  $Y = y$ ，则随机变量  $X$  在  $Y = y$  条件下的概率密度函数为  $f_{X|Y} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

### 3.5 独立性

定义： 有二维随机变量  $(X, Y)$ ， $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$  满足独立。对于离散型随机变量，独立性在于是否满足  $P(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$ 。对于连续性随机变量，在于其密度函数是否满足  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 。

### 3.6 二维连续型随机变量的分布

对于离散型随机变量，依旧是先求取值，再求概率。而对于两个连续型随机变量，我们有如下方法：

公式（分布函数法）： 有二维随机变量  $(X, Y)$  及其联合概率分布  $f(x, y)$ ，已知  $Z = g(X, Y)$ ，则  $Z$  的概率分布为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = P\{(X, Y) | g(X, Y) \leq z\} = \iint_G f(x, y) dx dy$$

或使用卷积公式：

公式（卷积公式）： 若随机变量  $X, Z, Y$  存在  $Z = X + Y$  关系，则

$$\begin{array}{ll} X, Y \text{ 不独立} & X, Y \text{ 独立} \\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx & f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx \end{array}$$

证明： 对于  $Z = X + Y$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy$$

令  $y + x = t$  将二重积分中对  $y$  的积分换为对  $t$  的积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^z f(x, t-x) dt$$

改变积分次序后得

$$\int_{-\infty}^z \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x) dx \right] dt$$

要求  $Z$  的密度函数, 对变上限积分求导可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

若  $(X, Y)$  独立, 又有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx$$

□

## 4 随机变量的数字特征

### 4.1 数学期望

**定义 (离散型):** 对于离散型随机变量  $X$ , 设  $x_i$  为其分布律的第  $i$  个取值, 相应概率为  $p_i$ , 则其数学期望 (均值) 为:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

**定义 (连续型):** 若连续型随机变量  $X$  的密度函数为  $f_X(x)$  则它的均值为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

若要求  $Y = g(X)$  的均值, 则

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

若  $Z = g(X, Y)$  且二维随机变量  $(X, Y)$  有联合概率密度  $f(x, y)$  则

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

**性质：** 有常数  $C$ ，随机变量  $X$  与  $Y$ ：

1.  $E(C) = C$
2.  $E(C + X) = C + E(X)$
3.  $E(CX) = CE(X)$
4.  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
5. 若  $X, Y$  独立，则  $E(XY) = E(X)E(Y)$

## 4.2 方差

**定义：** 方差为随机变量与其均值的距离的平方的均值即  $D(X) = E[(X - E(X))^2]$ ，其用来表示  $X$  偏离其均值  $E(X)$  的程度大小。且方差  $D(X) \geq 0$ 。

**公式（方差计算公式）：**  $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

**性质：**  $C$  为常数

1.  $D(C) = 0$
2.  $D(X + C) = D(X)$
3.  $D(CX) = C^2 D(X)$
4.  $D(X + Y) = D(X) + D(Y) - 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$

## 4.3 常见形式

**定理（0-1 分布）：** 若随机变量  $X$  服从 0-1 分布，则

$$E(X) = p, D(X) = p(1 - p)$$

**定理（二项分布）：** 若随机变量  $X$  服从二项分布即  $X \sim B(n, p)$  则

$$E(X) = np, D(X) = np(1 - p)$$

**证明：** 若随机变量  $X \sim B(n, p)$  则其含义为  $n$  重伯努利实验中成功的次数即  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ，其中  $X_i$  表示第  $i$  次伯努利实验，每次伯努利实验独立且都有相同的  $p$ ，即  $E(X_i) = p$ ，则

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = np \\ D(X) &= D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = np(1 - p) \end{aligned}$$

□

**定理（泊松分布）：** 若随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布即  $X \sim P(\lambda)$  则

$$E(X) = D(X) = \lambda$$

**定理（均匀分布）：** 若  $X \sim U(a, b)$  则

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**定理**（指数分布）：若  $X \sim e(\lambda)$  则

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**定理**（正态分布）：若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  则

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$$

## 4.4 协方差

**定义**（协方差）：有二维随机变量  $(X, Y)$ ，称  $E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$  为随机变量  $(X, Y)$  的协方差，通常计作  $\text{cov}(X, Y)$  即

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

特别的，相同变量的协方差为其方差  $\text{cov}(X, X) = D(X)$ 。

已知方差的性质 3：  $D(X + Y) = D(X) + D(Y) - 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$ ，我们将协方差的计算公式带入可得到  $D(X + Y) = D(X) + D(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$ 。

协方差有以下性质

**性质：**

1.  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
2.  $\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$   
 $a, b$  为常数
3.  $\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$
4. 若  $X, Y$  相互独立，则  
 $\text{cov}(X, Y) = 0$

**定义**（相关系数）：有随机变量  $X, Y$ ，则其相关系数为：

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

相关系数有以下性质

性质：

1.  $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
2. 相关性
  1. 若相关系数  $\rho_{XY} = 0$  则称  $X, Y$  不相关
  2. 若  $\rho_{XY} = 1$ , 则称  $X, Y$  为正相关,  $y = ax + b, a > 0$
  3. 若  $\rho_{XY} = -1$ , 则称  $X, Y$  为负相关,  $y = ax + b, a < 0$

## 5 大数定律和中心极限定理

### 5.1 大数定律

**定理** (切比雪夫不等式)：有随机变量  $X$  及其均值  $E(X)$  方差  $D(X)$ , 存在任意正数  $\varepsilon$  有

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

另有

$$P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

**定理** (切比雪夫大数定律)：设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立的随机变量序列, 且  $E(X_i), D(X_i)$  均存在, 且  $D(X_i) \leq C$ , 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  则对于任意正数  $\varepsilon$ , 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon\} &= 1 \\ \Leftrightarrow \bar{X} \text{ 依概率收敛到 } E(\bar{X}) \text{ 即: } \bar{X} \xrightarrow{P} E(\bar{X}) \end{aligned}$$

**定理** (伯努利大数定律)：设  $n_A$  为  $n$  次独立重复试验中事件  $A$  发生的次数, 且  $P(A) = p$ , 则对于任意正数  $\varepsilon$ , 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p \end{aligned}$$

**定理** (辛钦大数定律)：有随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 随机变量间相互独立且服从同一分布,  $E(X_i)$  存在, 则对于任意正数  $\varepsilon$  有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon\} &= 1 \\ \Leftrightarrow \bar{X} \xrightarrow{P} E(\bar{X}) \end{aligned}$$

### 5.2 中心极限定理

独立随机变量的和的分布当随机变量的个数足够大的时候, 近似的服从正态分布。

**定理**（独立同分布（列维－林德伯格）中心极限定理）：

若一随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n$  服从同一分布且具有相同的期望  $E(X_i) = \mu$ ，相同的方差  $D(X_i) = \sigma^2$ ，将  $\sum_{i=1}^n X_i$  记作  $\eta_n$  则当  $n$  充分大的时候，有

$$\begin{aligned}\eta_n &\text{ 近似服从 } N(E(\eta_n), D(\eta_n)) \\ &= N(n\mu, n\sigma^2)\end{aligned}$$

又由正态分布的标准化可得

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ 近似服从 } N(0, 1)$$

**定理**（棣莫弗－拉普拉斯（De Moivre - Laplace）定理）：若随机变量  $X_n, n = 1, 2, \dots$  服从参数为  $n, p$  的二项分布，也即随机变量  $X$  可以分为  $n$  的相互独立的随机变量  $X_i$  服从  $0-1$  分布，对于任意的  $x$  有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left\{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

也即：当  $n$  充分大时， $\sum_{i=1}^n X_i$  近似服从参数为  $np$  与  $np(1-p)$  的正态分布，进而  $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  近似服从标准正态分布。

## 6 样本与抽样分布

### 6.1 基本概念

**定义**（样本）：设随机变量  $X$  服从分布  $F$ ，若随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n$  具有同一分布  $F$  且相互独立，则称这一随机变量序列为从总体  $F$  或总体  $X$  得到的容量为  $n$  的样本， $x_1, x_2, \dots, x_n$  为  $X$  的  $n$  个独立观测值。

反之，若一随机变量序列是总体  $F$  的一个样本，则序列中的随机变量同分布为  $F$ ，且相互独立。

**定义**（经验分布函数）：有样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，用  $S(x), -\infty < x < \infty$  表示  $x_1, x_2, \dots, x_n$  中不大于  $x$  的随机变量的个数，定义经验分布函数  $F_n(z)$  为

$$F_{n(x)} = \frac{1}{n} S(x), \quad -\infty < x < \infty$$

#### 6.1.1 统计量

**定义**（统计量与统计量的观测值）：若有一随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是总体  $F$  的一个容量为  $n$  的样本，则称不含有位置参数的函数  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为统计量。

由定义可知， $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  也是一个随机变量，若有  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是样本的观测值，则  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是随机变量  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的观测值。

有总体  $X$ ,  $E(X) = \mu$ ,  $D(X) = \sigma^2$ ，下方为常见的统计量：

**定义**（样本平均值）： $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  .

根据定义可得  $E(\bar{X}) = \mu$ ,  $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

**定义**（样本方差）： $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$

根据定义可得， $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

**定义**（样本标准差）： $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

**定义**（样本  $k$  阶原点矩）： $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

**定义**（样本  $k$  阶中心矩）： $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$ ,  $k = 2, 3, \dots$

## 6.2 抽样分布

抽样分布即为统计量为  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的分布，在做题时题目一般会给出提示数据，可以查表求解。

### 6.2.1 $\chi^2$ 分布, $t$ 分布和 $F$ 分布

**定义**（ $\chi^2$  分布）：设样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立，且均服从  $N(0, 1)$  分布，则有  $X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$  服从自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布，即  $X \sim \chi^2(n)$ 。

$\chi^2$  分布有如下几条性质：



性质：

1. 可加性

若  $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$  则  
 $X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2)$ .

2. 均值与方差

若  $X \sim \chi^2(n)$ , 则  $E(X) = n, D(X) = 2n$ .

3. 上  $\alpha$  分位点

在  $\chi^2$  分布的密度图形中, 当  $x = x_\alpha$  时,  $x > x_\alpha$  的面积为  $\alpha$ , 称此点为上  $\alpha$  分位点。  
此时有  $P\{X > x_\alpha\} = \alpha$ .

定义 ( $t$  分布) : 若有  $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$  且相互独立, 则

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = t \sim t(n)$$

定义 ( $F$  分布) : 若有  $X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2)$  且相互独立, 则

$$\frac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}} = F \sim F(n_1, n_2)$$

与  $\chi^2$  分布类似的,  $t$  分布及  $F$  分布都具有上  $\alpha$  分位点。

定义 (正态总体的样本均值与样本方差的分布) : 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为总体的一个样本, 则

1.  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

2.  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

3.  $\bar{X}$  与  $S^2$  独立

4.  $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

## 7 参数估计

### 7.1 点估计

**定义：** 已知总体  $X$  的分布，含有未知参数  $\theta$ ，用样本做参数来构造统计量  $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  来估计  $\theta$ 。

由一阶矩估计（点估计）推广到  $k$  阶矩估计，由大数定理可得，当数量足够大时，样本矩趋近于总体矩，根据矩估计中用样本矩代替总体矩的思想，由总体的分布可以得到总体矩，接着用样本矩代替总体矩，也即构造未知参数  $\theta$  与样本矩的等价关系。最后解得  $\hat{\theta}$  即为矩估计量。

#### 7.1.1 最大似然估计

基本思想是使得样本发生的概率最大的  $\hat{\theta}$  即为最大似然估计。

在最大似然估计中，用似然函数去刻画样本出现的概率大小，对于离散型随机变量，其最大似然函数即为样本间质量函数的积  $\Pi^1$  基本思想是使得样本发生的概率最大的  $\hat{\theta}$  即为最大似然估计。

在最大似然估计中，用似然函数去刻画样本出现的概率大小，其形式如下：

$$L(\theta) = \prod_{i=0}^n P\{X = X_i\} \quad (\text{离散型随机变量})$$
$$\prod_{i=0}^n f(x_i) \quad (\text{连续型随机变量})$$

在求解最大似然估计时，一般通过求导求其导数的驻点来得到  $\hat{\theta}$ ，对于连乘函数形式的似然函数而言，可以先等式两边同时取 **对数** 使连乘变为连加，再求导求驻点即  $\frac{d \ln Li(\theta)}{d\theta} \triangleq 0$ 。

### 7.2 评选标准

1. 无偏性，若  $E(\hat{\theta}) = \theta$  则称  $\hat{\theta}$  为无偏估计，若  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$  则称为渐进无偏估计。
2. 有效性，若对于未知参数  $\theta$  有两个估计量  $\hat{\theta}_1$  与  $\hat{\theta}_2$ ，两者当中方差较小的估计量更有效。
3. 一致性，若  $n$  趋于无穷时，估计量以概率趋紧于未知参数，则称估计量为质量一致，一般的，若估计量的均值等于未知参数及具有无偏性，估计量的方差趋近于零，即具有有效性，则满足估计量与未知参数具有一致性。

### 7.3 区间估计

**定义（置信区间）：** 对于总体的一个未知参数  $\theta$ ，存在一个  $\alpha$ ，使得  $P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha$ ，则称  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  为置信区间。

在求解置信区间时，通常先构造一个确定分布的含有参数  $\theta$  的样本统计量，也称作枢轴量  $J$ ，根据其分布求出  $P\{a < J < b\} = 1 - \alpha$ ，的左右端点  $a, b$ （一般是由其分布的函数图像总结而来，用上分位点表示），进而解出  $\theta$  的置信区间。

在构造枢轴量时, 可以根据正态总体的样本均值与样本方差的分布来进行构造。

## 8 附录 1: 常见的分布类型的期望与方差及证明

### 3. 泊松分布

若  $X \sim P(\lambda)$ , 即  $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ ,  $k=0, 1, \dots$ , 则  $E(X) = \lambda$ ,  $D(X) = \lambda$

解释: ①  $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$   
 $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{\text{令 } n=k-1}{=} \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$

②  $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$   
 $= \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k + k) \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = E(X) = \lambda$   
 $= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)}{(k-1)!} \lambda^k e^{-\lambda} + \lambda = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$

### 4. 均匀分布

设  $X \sim U(a, b)$ , 则  $E(X) = \frac{a+b}{2}$ ,  $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

解释: ①  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$

②  $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$   
 $= \frac{b^3 - a^3}{3} \cdot \frac{1}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4}$   
 $= \frac{(b-a)^2}{12} \checkmark$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

## 5 指数分布

设  $X \sim e(\lambda)$ , 则  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

解释: ①  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \xrightarrow{\text{分部法}} \left( \frac{1}{\lambda} \right)$

$$\begin{aligned} \text{② } E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x^2 d e^{-\lambda x} \\ &= - \left[ x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(x^2) \right] \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= 2 \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \xrightarrow{\text{分部法}} \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\therefore D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

## 6. 正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $E(X) = \mu$ ,  $D(X) = \sigma^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

解释: ①  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \xrightarrow{\substack{\frac{x-\mu}{\sigma} = t \\ x = \sigma t + \mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt$

$$= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mu + 0 = \mu$$

$$\begin{aligned} \text{② } E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \xrightarrow{\substack{\frac{x-\mu}{\sigma} = t \\ x = \sigma t + \mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma t)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu^2 + 2\mu\sigma t + \sigma^2 t^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \xrightarrow{\text{分部法}} \mu^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\text{故 } D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$