

考试类别[学生填写] (□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它)

# 《概率论与数理统计》试卷 (B 卷)

(全校各专业适用)

注: 本试卷参考数据:  $\sqrt{23.04} = 4.8$ ,  $\Phi(2.5) = 0.9938$ ,  $\Phi(2.33) = 0.9901$ ,  $z_{0.025} = 1.96$ ,  
 $z_{0.005} = 2.576$ ,  $t_{0.025}(8) = 2.306$ ,  $t_{0.05}(9) = 2.2622$ .

(注意: 所有答案必须写在答题卡上, 在试卷上作答无效)

## 一、单选题 (7 小题, 每小题 3 分, 共 21 分)

1. 现有 5 名留学生, 其中 3 名来自巴基斯坦, 2 名来自埃及, 随机选 2 名留学生参加植树活动, 则参加活动的 2 名学生来自不同国家的概率为( )

- (A)  $\frac{6}{10}$ ; (B)  $\frac{6}{20}$ ; (C)  $\frac{5}{10}$ ; (D)  $\frac{5}{20}$ .

2. 设随机变量  $X$  的分布律

$X$	0	1	2	3
$p_i$	0.1	0.3	0.4	0.2

则  $X$  的分布函数值  $F(1) = ( )$

- (A) 0.5; (B) 0.6; (C) 0.8; (D) 0.4.

3. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ,

则  $c = ( )$

- (A)  $\frac{1}{2}$ ; (B)  $\frac{1}{3}$ ; (C)  $\frac{1}{4}$ ; (D)  $\frac{1}{6}$ .

4. 已知随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 则下列选项不一定正确的是( )

- (A)  $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ ; (B)  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ ;

(C)  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ;

(D)  $D(XY) = D(X)D(Y)$ .

5. 设总体  $X \sim \text{Exp}(\theta)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是  $X$  的一个样本,  $\bar{X}$ ,  $S^2$  分别为样本均值和样本方差, 则  $E(\bar{X})$ ,  $E(S^2)$  分别为( )

- (A)  $\theta, \theta^2$ ; (B)  $\theta^2, \theta$ ; (C)  $\theta, \frac{\theta}{n}$ ; (D)  $\theta, \frac{\theta}{n}$ .

6. 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为样本,  $\sigma^2$  已知,  $\mu$  是未知参数, 则下列选项中不是统计量的是( )

- (A)  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2$ ; (B)  $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ;

- (C)  $\sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2$ ; (D)  $\sum_{i=1}^n (X_i)^2$ .

7. 设总体  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ,  $\theta$  是待估参数,

$x_1, x_2, \dots, x_n$  是样本观测值, 则基于  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的似然函数是( )

- (A)  $\begin{cases} (\theta+1)^n \sum_{i=1}^n x_i, & 0 < x_1, x_2, \dots, x_n < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ; (B)  $n\theta \prod_{i=1}^n x_i$ ;

- (C)  $\begin{cases} (\theta+1)^n (x_1 x_2 \dots x_n)^\theta, & 0 < x_1, x_2, \dots, x_n < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ; (D)  $n\theta \sum_{i=1}^n x_i$ .

## 二、填空题 (7 小题, 每小题 3 分, 共 21 分)

8. 设  $A, B$  为两随机事件,  $P(A) = 0.7$ ,  $P(A - B) = 0.3$ , 则  $P(\overline{AB}) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 设总体  $X$  的均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$  为样本, 已知  $\bar{X}$  与  $\frac{1}{2}(X_1 + X_n)$  均为  $\mu$  的无偏估计量, 比较这两个估计量可得,  $\underline{\hspace{2cm}}$  更有效.

10. 设  $X \sim N(1, 2)$ ,  $Y \sim N(-2, 3)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $X - 2Y \sim \underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 设随机变量  $(X, Y)$  具有  $D(X) = 9$ ,  $D(Y) = 4$ ,  $\text{Cov}(X, Y) = -1$ , 则

$\rho_{XY} =$ \_\_\_\_\_.

12. 已知 $P\{X > 2\} = 0.05$ , 则随机变量 $X$ 的上 0.05 分位数为\_\_\_\_\_.

13. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是 $X$ 的一个样本,  $S^2$  为样本方差, 则

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  服从的分布为\_\_\_\_\_.

14. 设某种清漆的干燥时间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma$ 未知, 现抽取 9 个样品, 测得样本均值 $\bar{x} = 6$ (小时), 样本标准差 $s = 1$ (小时), 则 $\mu$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题 (7 小题, 共 58 分)

15. (本题 8 分) 一个机床有 $\frac{1}{3}$ 的时间加工一号零件, 其余时间加工二号零件, 加工一号零件时停机的概率是 0.3, 加工二号零件时停机的概率是 0.4. 请解答:

- (1) 该机床停机的概率是多少?
- (2) 已知机床停机, 问停机时机床加工二号零件的概率是多少?

16. (本题 8 分) 设顾客在某超市的收银窗口等待服务的时间 $X$ 服从参数为 1 的指数分布. 李现同学在窗口等待服务, 若超过 5 分钟, 就离开. 李现一个月需要到超市 4 次,  $Y$ 表示他未等到服务而离开的次数, 请解答:

- (1) 李现未等到服务而离开的概率;
- (2) 请写出 $Y$ 的分布律, 并求 $P\{Y \geq 1\}$ .

17. (本题 8 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的分布律如下表所示

$X \backslash Y$	2	3	8
4	0.1	0.30	0.4
8	0.05	0.12	0.03

- 求: (1) 关于  $X$  和关于  $Y$  的边缘分布律;  
(2)  $X$  和  $Y$  是否相互独立? 请说明理由;  
(3)  $Z = \max(X, Y)$  的分布律.

18. (本题 7 分) 某种发酵微生物的 PH 值为随机变量, 记为  $X$ , 已知它的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & 3 \leq x \leq 4, \\ -x+5, & 4 < x \leq 5, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 求该发酵微生物 PH 值  $X$  的数学期望 $E(X)$ .
- (2) 计算得 $E(X^2) = \frac{97}{6}$ , 求 PH 值  $X$  的方差 $D(X)$ .

19. (本题 8 分) 设某车间有 100 台机床, 假定每台机床是否开工是独立的, 每台机床的平均开工率为 0.64,

- (1) 利用棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理, 写出同时开工的机床数 $X$ 所服从的近似分布;
- (2) 每台机床开工时消耗电能 10 千瓦, 已知发电机供给车间 760 千瓦电能, 求该车间正常工作的概率.

20. (本题 10 分) 设总体 $X$ 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \theta > 0$

是待估参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本.

- (1) 求参数 $\theta$ 的矩估计量, 并判断此估计量是否是参数 $\theta$ 的无偏估计量;
- (2) 抽样得到的样本观测值为 0.8, 0.6, 0.4, 0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.8, 求参数 $\theta$ 的矩估计值.

21. (本题 9 分) 某种零件的长度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 方差 $\sigma^2 = 16$ , 随机抽取 9 件, 测量其长度(毫米), 算得平均值为 31.1,

- (1) 在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下, 是否可以认为这批零件的平均长度 $\mu$ 为 32.50 毫米?
- (2) 你的检验结果可能会犯哪一类错误? 犯该类错误的概率是否可以控制?