2019--2020 学年第一学期

《概率论与数理统计》试卷评分标准及参考答案（B 卷）

（全校各专业适用）

注：本试卷参考数据：$\sqrt{23.04}=4.8$，$\Phi(2.5)$=0.9938, $\Phi(2.33)$=0.9901, $z_{0.025}$=1.96, $z_{0.005}$=2.576, $t_{0.025}(8)$=2.306, $t_{0.05}(9)$=2.2622.

（注意：所有答案必须写在答题卡上，在试卷上作答无效）

一、单选题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

1. 现有 5 名留学生, 其中 3 名来自巴基斯坦, 2 名来自埃及，随机选 2 名留学生参加植树活动, 则参加活动的 2 名学生来自不同国家的概率为(A)

(A) $\frac{6}{10}$; (B) $\frac{6}{20}$; (C) $\frac{5}{10}$; (D) $\frac{5}{20}$.

2. 设随机变量 X 的分布律

X	0	1	2	3
p_i	0.1	0.3	0.4	0.2

则 X 的分布函数值 $F(1)$=(D)

(A) 0.5； (B) 0.6； (C) 0.8； (D) 0.4.

3. 设二维随机变量(X，Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} c, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，

则 c =（ A ）

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{6}$.

4. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立， 则下列选项不一定正确的是(D)

(A) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$； (B) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

(C) $E(XY)=E(X)E(Y)$； (D) $D(XY)=D(X)D(Y)$.

5. 设总体 $X\sim Exp(\theta)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本，$\overline{X}$，S^2分别为样本均值和样本方差, 则 $E(\overline{X})$，$E(S^2)$分别为(A)

(A) θ，θ^2; (B) θ^2,θ; (C) θ，$\frac{\theta}{n}$; (D) θ，$\frac{\theta}{n}$.

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为样本，σ^2已知，μ是未知参数，则下列选项中不是统计量的是(C)

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$； (B) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；

(C) $\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2$； (D) $\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2$.

7. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，$\theta$是待估参数，$x_1,x_2,\cdots x_n$是样本观测值，则基于$x_1,x_2,\cdots x_n$的似然函数是(C)

(A) $\begin{cases}(\theta+1)^n\sum_{i=1}^{n}x_i, & 0<x_1,x_2,\cdots x_n<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$； (B) $n\theta\prod_{i=1}^{n}x_i$；

(C) $\begin{cases}(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}, & 0<x_1,x_2,\cdots x_n<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$； (D) $n\theta\sum_{i=1}^{n}x_i$.

二、填空题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

8. 设 A,B 为两随机事件, $P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$, 则 $P(\overline{AB})=$ <u>0.6</u> .

9. 设总体 X 的均值为μ, 方差为σ^2, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (n>2) 为样本, 已知 $\overline{X}$ 与 $\frac{1}{2}(X_1+X_n)$均为μ的无偏估计量, 比较这两个估计量可得, <u>$\overline{X}$</u> 更有效.

10. 设 $X\sim N(1,2), Y\sim N(-2,3)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $X-2Y\sim$ <u>$N(5,14)$</u> .

11. 设随机变量 (X,Y) 具有 $D(X)=9$, $D(Y)=4$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=-1$, 则 $\rho_{XY}=$ <u>$-1/6$</u> .

12. 已知 $P\{X>2\}=0.05$，则随机变量 X 的上 0.05 分位数为 <u>2</u>.

13. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1，X_2，$\cdots$，X_n 是 X 的一个样本，S^2 为样本方差，则 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 服从的分布为 <u>$\chi^2(n-1)$</u>.

14. 设某种清漆的干燥时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ未知，现抽取 9 个样品，测得样本均值 $\bar{x}=6$(小时)，样本标准差 $s=1$(小时)，则μ的置信水平为 0.95 的置信区间为 $\left(6\pm\frac{1}{3}t_{0.025}(8)\right)$.

三、解答题（7 小题，共 58 分）

15.（**本题 8 分**）一个机床有$\frac{1}{3}$的时间加工一号零件，其余时间加工二号零件，加工一号零件时停机的概率是 0.3，加工二号零件时停机的概率是 0.4. 请解答：

(1) 该机床停机的概率是多少？

(2) 已知机床停机，问停机时机床加工二号零件的概率是多少？

解：设 $B=\{$加工零件时停机$\}$，$A_1=\{$机床加工一号零件$\}$，$A_2=\{$机床加工二号零件$\}$，

$P(A_1)=\frac{1}{3}$，$P(A_2)=\frac{2}{3}$，$P(B|A_1)=0.3$，$P(B|A_2)=0.4$， **2 分**

(1)由全概率公式，

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{1}{3}\times0.3+\frac{2}{3}\times0.4=\frac{11}{30}\approx0.367,$$

5 分

由贝叶斯公式得

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\times0.4}{\frac{11}{30}}=\frac{8}{11}\approx0.727=\frac{255}{353}\approx0.727.$$ **8 分**

注：若两问的最终答案分别成$\frac{11}{30}$与$\frac{8}{11}$即可得 8 分.

16.（**本题 8 分**）设顾客在某超市的收银窗口等待服务的时间 X 服从参数为 1 的指数分布. 李现同学在窗口等待服务，若超过 5 分钟，就离开. 李现一个月需要到超市 4 次，Y 表示他未等到服务而离开的次数，请解答：

(1) 李现未等到服务而离开的概率；

(2) 请写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geq1\}$.

解：(1)

法 1：由已知可得 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leq0,\end{cases}$ **1 分**

则根据题意可得

李现未等到服务而离开的概率为 $p=P\{X>5\}=\int_5^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-5}$， **3 分**

法 2：由已知可得 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}1\text{-}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leq0,\end{cases}$ **1 分**

则根据题意可得李现未等到服务而离开的概率为

$p=P\{X>5\}=1-P\{X\leq5\}=e^{-5}$， **3 分**

(2) 根据题意，$Y\sim B(4,e^{-5})$， **4 分**

则 Y 的分布律为 $P\{Y=k\}=C_4^k\left(e^{-5}\right)^k\left(1-e^{-5}\right)^{4-k}$， **6 分**

因此 $P\{Y\geq1\}=1\text{-}P\{Y=0\}=1-\left(1\text{-}e^{-5}\right)^4$. **8 分**

17.（**本题 8 分**）设二维随机变量（X,Y）的分布律如下表所示

$X \backslash Y$	2	3	8
4	0.1	0.30	0.4
8	0.05	0.12	0.03

求：(1) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

(2) X 和 Y 是否相互独立？请说明理由;

(3) $Z=\max(X, Y)$的分布律.

解 (1)

$X \backslash Y$	2	3	8	$P\{X=x_i\}$
4	0.1	0.3	0.4	0.8
8	0.05	0.12	0.03	0.2
$P\{Y=y_i\}$	0.15	0.42	0.43	1

3 分

因此，关于 X 和关于 Y 的边缘分布律

X	4	8
p_i	0.8	0.2

Y	2	3	8
p_j	0.15	0.42	0.43

4 分

(2)由于 $P\{X=4,Y=2\}=0.1$，而 $P\{X=4\}P\{Y=2\}=0.8\times0.15=0.12$，

易知 $P\{X=4,Y=2\}\neq P\{X=4\}P\{Y=2\}$，故 X 和 Y 不相互独立. **6 分**

(3) $Z=\max(X, Y)$的分布律 为

Z	4	8
p	0.4	0.6

8 分

18.（**本题 7 分**）某种发酵微生物的 PH 值为随机变量，记为 X，已知它的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & 3\le x\le 4, \\ -x+5, & 4<x\le 5, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求该发酵微生物 PH 值 X 的数学期望 $E(X)$.

(2) 计算得 $E(X^2)=\frac{97}{6}$, 求 PH 值 X 的方差 $D(X)$.

解: (1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_3^4 x(x-3)dx+\int_4^5 x(-x+5)dx$ **2 分**

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_3^4+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2\right)\Big|_4^5=4$$ **4 分**

(2) $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{97}{6}-16=\frac{1}{6}$. **7 分**

19.（**本题 8 分**）设某车间有 100 台机床，假定每台机床是否开工是独立的，每台机床的平均开工率为 0.64,

(1) 利用棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理，写出同时开工的机床数 X 所服从的近似分布;

(2) 每台机床开工时消耗电能 10 千瓦，已知发电机供给车间 760 千瓦电能，求该车间正常工作的概率.

解：设同时开工的机床数为 X，则 $X\sim B(100,0.64)$

(1) 由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理可知 **2 分**

因此 $X\overset{\text{近似}}{\sim}N(100\times0.64,100\times0.64\times0.36)$，即 $X\overset{\text{近似}}{\sim}N(64,23.04)$. **4 分**

(2)所求概率为

$$P\{10X\le760\}=P\{X\le76\}=P\left\{\frac{X-64}{\sqrt{23.04}}\le\frac{76-64}{\sqrt{23.04}}\right\}$$

$$\approx\Phi(2.5)=0.9938.$$ **8 分**

20.（**本题 10 分**）

设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $\theta>0$ 是待估参数，

$X_1,X_2,\cdots X_n$是为来自总体 X 的样本.

(1) 求参数θ的矩估计量，并判断此估计量是否是参数θ的无偏估计量;

(2) 抽样得到的样本观测值为 0.8, 0.6, 0.4, 0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.8, 求参数θ的矩估计值.

解：(1) $E(X)=\int_0^\theta \frac{2}{\theta^2}(\theta-x)xdx=\frac{1}{3}\theta$，$\theta=3E(X)$，　**2 分**

因此θ的矩估计量 $\hat{\theta}=3\bar{X}$.　**4 分**

由 $E(\hat{\theta})=E(3\bar{X})=3E(\bar{X})=3E(X)=\theta$ 得，$\hat{\theta}=3\bar{X}$ 为θ的无偏估计量，　**6 分**

(2) 计算得

$\bar{x}=\frac{1}{8}(0.8+0.6+0.4+0.5+0.5+0.6+0.6+0.8)=0.6$，　**8 分**

结合(1)可得参数θ的矩估计值为 $\hat{\theta}=3\bar{x}=1.8$.　**10 分**

21.（**本题 9 分**）某种零件的长度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，方差$\sigma^2=16$，随机抽取 9 件，测量其长度(毫米)，算得平均值为 31.1,

(1) 在显著水平$\alpha=0.01$ 下，是否可以认为这批零件的平均长度μ为 32.50 毫米?

(2) 你的检验结果可能会犯哪一类错误？犯该类错误的概率是否可以控制?

(1) 假设：$H_0:\mu=\mu_0$；　$H_1:\mu\neq\mu_0$　**1 分**

此为双边检验，由于方差 $\sigma^2=16$ 已知，应选用 z 统计量检验，在显著水平 $\alpha=0.01$ 下，

H_0 的拒绝域为 $\left\{|z|=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\{|z|\geq z_{0.005}\}=\{|z|\geq 2.576\}$　**3 分**

现有 $\bar{x}=31.1$，$n=9$，$\sigma=4$，$\mu_0=32.50$，计算得到

$|z|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{31.1-32.05}{4/3}\right|=1.05<2.576>1.71$，　**5 分**

Z 未落入拒绝域中，故在 0.05 的显著水平下应接受 H_0，认为这批零件的平均长度μ为 32.50 毫米.　**6 分**

(2) 检验结果可能会犯第二类(存伪)错误，犯该类错误的概率不可以控制.　**9 分**