

概率论笔记

目录

1 基本概念	2
1.1 运算	2
1.2 关系	2
1.3 频率和概率	2
1.4 条件概率	3
1.5 全概率与贝叶斯公式	3
1.6 事件的独立性	4
1.7 伯努利概型	4
2 随机变量及其分布	4
2.1 $R.V.$ 和 分布函数	4
2.2 分布函数	4
2.3 离散型随机变量及其分布	4
2.4 连续型 $R.V.$	5
2.5 随机变量的分布	7
3 多维 $R.V.$	7
3.1 二维随机变量和联合分布函数	7
3.2 连续型随机变量	7
3.3 边缘分布	8
3.4 条件分布	9
3.5 独立性	9
3.6 二维连续型随机变量的分布	9
4 随机变量的数字特征	10
4.1 数学期望	10
4.2 方差	11
4.3 常见形式	11
4.4 协方差	12
5 大数定律和中心极限定理	13
5.1 大数定律	13
5.2 中心极限定理	14
6 样本与抽样分布	14
6.1 基本概念	14
6.2 抽样分布	15
7 附录 1: 常见的分布类型的期望与方差及证明	17

1 基本概念

1.1 运算

若 A 代表事件 A 发生, \bar{A} 代表事件没有发生, 我们定义如下在随机事件上的关系运算:

包含

$$A \subset B \Leftrightarrow A \rightarrow B$$

另外有 $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

交集

$$A \cap B \Leftrightarrow A \wedge B$$

并集

$$A \cup B \Leftrightarrow A \vee B$$

差集

$$A - B \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$$

另外有 $A - B = A - AB = A\bar{B}$

对于交集和并集运算, 符合以下四种运算律:

交换律

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

对偶律 (德摩根定律)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

1.2 关系

在事件间, 存在如下两种关系:

互斥事件

$$A \cap B = \emptyset$$

对立事件

$$A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = \Omega.$$

1.3 频率和概率

定义:

频率

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

概率

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) \rightarrow P$$

性质：

非负性

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

标准性

$$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$$

无限可加性

$$\text{If } A \cap B = \emptyset \text{ then } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

互补性

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

概率之间存在如下运算：

减法

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) \\ \text{If } B \subset A, P(A - B) = P(A) - P(B).$$

加法

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

乘法

$$P(AB) = P(A)P(B | A)$$

1.4 条件概率

定义： 如果 $P(A) > 0$ ，则条件概率为 $P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 。

依此，我们有两条推广式：

1. $P(B \cup C | A) = P(B | A) + P(C | A) - P(BC | A)$
2. $P(B - C | A) = P(B | A) - P(BC | A)$

1.5 全概率与贝叶斯公式

定义（完备事件组）： $S := \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ 是一个属于 Ω 的事件组，并且满足 $\forall A_1, A_2 \subset S, A_1 \cap A_2 = \emptyset, \wedge A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，则 S 为一个完备事件组。

由定义，我们可以设 B 是一个随机事件， $\{A_1, A_2, \dots, A_i\}$ 是一个完备事件组，我们有：

公式（全概率公式）：

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i) \\ = \sum_{i=1}^n P(BA_i)$$

公式（贝叶斯公式）：

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}$$

1.6 事件的独立性

若 A, B 是相互独立事件, 则有

$$\begin{aligned}P(A | B) = P(A) &\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \\&\Leftrightarrow P(B | A) = P(B | \bar{A}) \\&\Leftrightarrow P(B | \bar{A}) = P(B)\end{aligned}$$

且 A, \bar{A}, B, \bar{B} 也相互独立, 此外有

若 A, B, C 互为独立事件 $\rightarrow A, B, C$ 两两独立

若 A, B, C 互为独立事件 \rightarrow 关于 A, B 的加法, 乘法, 减法
以及逆运算 也分别独立与 C 和 \bar{C}

1.7 伯努利概型

定义 (伯努利实验): 实验只有两种可能结果 A, \bar{A} 的实验叫做伯努利实验。

公式 (二项概率公式):

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2 随机变量及其分布

2.1 R.V. 和 分布函数

$R.V.$ 是一个从随机试验 E 的样本空间 Ω 到 \mathbb{R} 的一个映射。

2.2 分布函数

定义: 设 X 是一个 $R.V.$, r 是任意实数, 则称事件 $\{X \leq r\}$ 的概率为 $R.V. X$ 的分布函数, 计作 $F(r)$ 。

分布函数有如下性质:

性质:

1. $P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$.
2. $F(x)$ 是一个不减函数
3. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

2.3 离散型随机变量及其分布

定义：

0-1 分布

x	0	1
P	p	$1-p$

二项分布

$$P\{X = k\} := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{x \mid x \in \mathbb{N}^+ \cap [0, n]\}$$

计作 $X \sim B(n, p)$

泊松分布

$$P\{X = k\} := \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, (\lambda > 0) \text{ 计作 } X \sim P(\lambda)$$

几何分布

$$P\{X = k\} := (1-p)^{k-1} p$$

超几何分布

$$P\{X = k\} := \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k \in \{1, 2, 3, \dots, \min(M, N)\}$$

计作 $X \sim H(N, M, n)$

定理（泊松定理）：当 $X \sim B(n, p)$ 且 n 充分大, p 充分小时

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda = np$$

2.4 连续型 R.V.

定义（分布函数）：

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

其中 $f(t)$ 是概率密度函数, $F(x)$ 是分布函数

公式（区间概率公式）： $F\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx$

2.4.1 常见形式

定义（均匀分布）：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & b < x < a \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

定义（指数分布）：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

指数分布具有无记忆性，即 $P\{x > t + T \mid x > t\} = P\{x > T\}$ 。

2.4.2 正态分布

定义（正态分布）： 计作 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

公式： $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} dx = \sqrt{A\pi}, A > 0$

证明： 设 $X \sim N(0, \frac{A}{2})$, 因为概率分布函数具有规范性 $F(+\infty) = 1$ 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. 带入得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{A\pi}} e^{-\frac{x^2}{A}} dx &= 1 \\ \frac{1}{\sqrt{A\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{A}} dx &= \sqrt{A\pi} \end{aligned}$$

□

定义（标准正态分布）： 当 $\mu = 0, \sigma^2 = 1, X \sim N(0, 1), x \in \mathbb{R}$ 时， 其为标准正态分布。

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \Phi(x) = F(x) &= \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \end{aligned}$$

定义（标准化）： 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 不满足标准正态分布， 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

根据标准化， 如果我们想要计算一个满足非标准化的正态分布的随机变量在范围 $(a, b]$ 上的概率， 我们可以 X 先将其标准化为 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ 并计算 $\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$ 即可。

定义（分位点）： μ_α 表示 $P\{x > \mu_\alpha\} = \alpha$.

并且有 $\mu_{1-\alpha} = \mu(-\alpha)$.

2.5 随机变量的分布

对于离散型随机变量，我们可以先求出取值，在分别对对应的取值求出概率。而对于连续性随机变量，重点是求其密度函数：即已知 $X \sim f_X(x), Y = g(X)$ ，求 $R.V.Y$ 的分布函数 $f_Y(y)$ 。

首先介绍根据分布函数求 $R.V.Y$ 的密度函数的方法：

公式（根据分布函数法）：

1. 首先，找到密度函数 $f_Y(y)$ 的分段点，一般有如下两种情况
 1. $f_X(x)$ 的分段点，带入 $g(x)$ 后得到的 y 的值，和
 2. $y = g(x)$ 的最值
2. 其次，根据以上分段点，求出区间 $(l, r]$ 的 $F_Y(y)$ ：

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(x) \leq y\} = \int_l^r f_X(x) dx$$

3. 最后，对求出的分布函数求导即可得到随机变量 y 的密度函数 $f_Y(y) = F_Y'(y)$ 。

除此之外，还可以用下方的定理中的公式来进行求解：

公式： 设 $f_X(x)$ 随机变量 X 的密度函数，对于随机变量 Y 有 $Y = g(X)$ ，且 $g(X)$ 为单调函数，令 $x = h(y)$ 是 $y = g(x)$ 的反函数， α, β 分别是 $g(x)$ 的最小值和最大值。则 $Y = g(X)$ 的密度函数 $f_Y(y)$ 为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3 多维 $R.V.$

3.1 二维随机变量和联合分布函数

定义（二维随机变量）： 设随机试验 E 的样本空间 $\Omega = \{e\}$ ， $X = X(e), Y = Y(e)$ 的定义在 Ω 上的随机变量，则 (X, Y) 为定义在 Ω 上的二维随机变量。

定义（联合分布函数）： 设 $x, y \in \mathbb{R}$ ，则 x, y 的联合分布函数为事件 $\{X \leq x\}$ 与事件 $\{Y \leq y\}$ 同时发生的概率为二维随机变量的联合分布函数

$$F(x, y) = P\{(X \leq x) \cup (Y \leq y)\} \stackrel{\text{计作}}{=} P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

随机变量的分布函数的几何意义为在二维坐标轴中， $F(x, y)$ 为 $X \leq x$ 与 $Y \leq y$ 所围成的矩形区域的面积。易得，点 (X, Y) 落在 $\{(x, y) \mid x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2\}$ 区域的概率为 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$ 。

3.2 连续型随机变量

定义（密度函数）： 联合概率密度指的是对于二维随机变量 (X, Y) ，其概率分布函数为

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

其中的非负函数 $f(x, y)$ 即为联合概率密度。

二维随机变量的联合密度函数有如下性质：

性质：

1. 非负性：

$$f(x, y) \geq 0$$

2. 规范性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du dv = F(\infty, \infty) = 1$$

3. 设 G 是平面 xOy 上的闭区域，则点 (X, Y) 落在 G 区域上的概率为

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$$

3.2.1 常见形式

定义（均匀分布）：

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{S_G}, & (u, v) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

定义（二维正态分布）：

(2) 二维正态分布

$$\text{若 } (X, Y) \text{ 的 } f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

其中 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 \leq \rho \leq 1 \Rightarrow$ 则称 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$



3.3 边缘分布

定义（分布函数）： 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(X, Y)$, Ω 为完备事件组, 则 $F_X(x) = P\{X \leq x, \Omega\}$, $F_Y(y) = P\{\Omega, Y \leq y\}$ 分别为二维随机变量关于 X 或 Y 的边缘分布函数。

定义（分布律 / 质量函数）： 已知二维随机变量 (X, Y) 的分布律为 $P\{X, Y\} = P\{X = x_i \cap Y = y_j\}$ 则关于 X 的边缘分布律为

$$P_X(x) = \sum_i P(x, y_i)$$

定义（密度函数）： 设 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y)$ 则关于 X 的边缘密度函数和关于 Y 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

3.4 条件分布

定义（分布律）： 有二维随机变量 (X, Y)

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P_Y\{Y = y_j\}}$$

即为随机变量 X 在 $Y = y_j$ 下的条件分布律

定义（密度函数）： 有二维随机变量 (X, Y) 及其联合概率密度 $f(x, y)$, 固定 $Y = y$, 则随机变量 X 在 $Y = y$ 条件下的概率密度函数为 $f_{X|Y} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

3.5 独立性

定义： 有二维随机变量 (X, Y) , $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ 满足独立。对于离散型随机变量, 独立性在于是否满足 $P(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$ 。对于连续性随机变量, 在于其密度函数是否满足 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 。

3.6 二维连续型随机变量的分布

对于离散型随机变量, 依旧是先求取值, 再求概率。而对于两个连续型随机变量, 我们有如下方法:

公式（分布函数法）： 有二维随机变量 (X, Y) 及其联合概率分布 $f(x, y)$, 已知 $Z = g(X, Y)$, 则 Z 的概率分布为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = P\{(X, Y) \mid g(X, Y) \leq z\} = \iint_G f(x, y) \, dx \, dy$$

或使用卷积公式：

公式（卷积公式）： 若随机变量 X, Z, Y 存在 $Z = X + Y$ 关系，则

$$\begin{array}{ll} X, Y \text{ 不独立} & X, Y \text{ 独立} \\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) \, dx & f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \, dx \end{array}$$

证明： 对于 $Z = X + Y$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) \, dy$$

令 $y + x = t$ 将二重积分中对 y 的积分换为对 t 的积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^z f(x, t-x) \, dt$$

改变积分次序后得

$$\int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x) \, dx \right] dt$$

要求 Z 的密度函数，对变上限积分求导可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) \, dx$$

若 (X, Y) 独立，又有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \, dx$$

□

4 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

定义（离散型）： 对于离散型随机变量 X ，设 x_i 为其分布律的第 i 个取值，相应概率为 p_i ，则其数学期望（均值）为：

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

定义（连续型）： 若连续型随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$ 则它的均值为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

若要求 $Y = g(X)$ 的均值, 则

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

若 $Z = g(X, Y)$ 且二维随机变量 (X, Y) 有联合概率密度 $f(x, y)$ 则

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

性质： 有常数 C , 随机变量 X 与 Y :

1. $E(C) = C$
2. $E(C + X) = C + E(X)$
3. $E(CX) = CE(X)$
4. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
5. 若 X, Y 独立, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$

4.2 方差

定义： 方差为随机变量与其均值的距离的平方的均值即 $D(X) = E[(X - E(X))^2]$, 其用来表示 X 偏离其均值 $E(X)$ 的程度大小。且方差 $D(X) \geq 0$ 。

公式（方差计算公式）： $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

性质： C 为常数

1. $D(C) = 0$
2. $D(X + C) = D(X)$
3. $D(CX) = C^2 D(X)$
4. $D(X + Y) = D(X) + D(Y) - 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$

4.3 常见形式

定理（0-1 分布）： 若随机变量 X 服从 0-1 分布, 则

$$E(X) = p, D(X) = p(1 - p)$$

定理（二项分布）： 若随机变量 X 服从二项分布即 $X \sim B(n, p)$ 则

$$E(X) = np, D(X) = np(1 - p)$$

证明：若随机变量 $X \sim B(n, p)$ 则其含义为 n 重伯努利实验中成功的次数即 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ，其中 X_i 表示第 i 次伯努利实验，每次伯努利实验独立且都有相同的 p ，即 $E(X_i) = p$ ，则

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = np \\ D(X) &= D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = np(1 - p) \end{aligned}$$

□

定理（泊松分布）： 若随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布即 $X \sim P(\lambda)$ 则

$$E(X) = D(X) = \lambda$$

定理（均匀分布）： 若 $X \sim U(a, b)$ 则

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

定理（指数分布）： 若 $X \sim e(\lambda)$ 则

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

定理（正态分布）： 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$$

4.4 协方差

定义（协方差）： 有二维随机变量 (X, Y) ，称 $E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$ 为随机变量 (X, Y) 的协方差，通常计作 $\text{cov}(X, Y)$ 即

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

特别的，相同变量的协方差为其方差 $\text{cov}(X, X) = D(X)$ 。

已知方差的性质 3： $D(X + Y) = D(X) + D(Y) - 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$ ，我们将协方差的计算公式带入可得到 $D(X + Y) = D(X) + D(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$ 。

协方差有以下性质

性质：

1. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
2. $\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$
 a, b 为常数
3. $\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$
4. 若 X, Y 相互独立, 则
 $\text{cov}(X, Y) = 0$

定义（相关系数）：有随机变量 X, Y , 则其相关系数为：

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

相关系数有以下性质

性质：

1. $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
2. 相关性
 1. 若相关系数 $\rho_{XY} = 0$ 则称 X, Y 不相关
 2. 若 $\rho_{XY} = 1$, 则称 X, Y 为正相关, $y = ax + b, a > 0$
 3. 若 $\rho_{XY} = -1$, 则称 X, Y 为负相关, $y = ax + b, a < 0$

5 大数定律和中心极限定理

5.1 大数定律

定理（切比雪夫不等式）：有随机变量 X 及其均值 $E(X)$ 方差 $D(X)$, 存在任意正数 ε 有

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

另有

$$P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

定理（切比雪夫大数定律）：设 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的随机变量序列, 且 $E(X_i), D(X_i)$ 均存在, 且 $D(X_i) \leq C$, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 则对于任意正数 ε , 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon\} &= 1 \\ \Leftrightarrow \bar{X} \text{ 依概率收敛到 } E(\bar{X}) \text{ 即: } \bar{X} \xrightarrow{P} E(\bar{X}) \end{aligned}$$

定理（伯努利大数定律）：设 n_A 为 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，且 $P(A) = p$ ，则对于任意正数 ε ，有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p$$

定理（辛钦大数定律）：有随机变量序列 X_1, X_2, \dots, X_n ，随机变量间相互独立且服从同一分布， $E(X_i)$ 存在，则对于任意正数 ε 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left\{\left|\bar{X} - E(\bar{X})\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} \xrightarrow{P} E(\bar{X})$$

5.2 中心极限定理

独立随机变量的和的分布当随机变量的个数足够大的时候，近似的服从正态分布。

定理（独立同分布（列维－林德伯格）中心极限定理）：

若一随机变量序列 X_1, X_2, \dots, X_n 服从同一分布且具有相同的期望 $E(X_i) = \mu$ ，相同的方差 $D(X_i) = \sigma^2$ ，将 $\sum_{i=1}^n X_i$ 记作 η_n 则当 n 充分大的时候，有

$$\eta_n \text{ 近似服从 } N(E(\eta_n), D(\eta_n))$$

$$= N(n\mu, n\sigma^2)$$

又由正态分布的标准化可得

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ 近似服从 } N(0, 1)$$

定理（棣莫弗－拉普拉斯（De Moivre - Laplace）定理）：若随机变量 $X_n, n = 1, 2, \dots$ 服从参数为 n, p 的二项分布，也即随机变量 X 可以分为 n 的相互独立的随机变量 X_i 服从 $0-1$ 分布，对于任意的 x 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left\{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

也即：当 n 充分大时， $\sum_{i=1}^n X_i$ 近似服从参数为 np 与 $np(1-p)$ 的正态分布，进而 $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从标准正态分布。

6 样本与抽样分布

6.1 基本概念

定义（样本）： 设随机变量 X 服从分布 F ，若随机变量序列 X_1, X_2, \dots, X_n 具有同一分布 F 且相互独立，则称这一随机变量序列为从总体 F 或总体 X 得到的容量为 n 的样本， x_1, x_2, \dots, x_n 为 X 的 n 个独立观测值。

反之，若一随机变量序列是总体 F 的一个样本，则序列中的随机变量同分布为 F ，且相互独立。

定义（经验分布函数）： 有样本 x_1, x_2, \dots, x_n ，用 $S(x)$ ， $-\infty < x < \infty$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_n 中不大于 x 的随机变量的个数，定义经验分布函数 $F_n(x)$ 为

$$F_n(x) = \frac{1}{n}S(x), \quad -\infty < x < \infty$$

6.1.1 统计量

定义（统计量与统计量的观测值）： 若有一随机变量序列 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 F 的一个容量为 n 的样本，则称不含有位置参数的函数 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为统计量。

由定义可知， $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 也是一个随机变量，若有 x_1, x_2, \dots, x_n 是样本的观测值，则 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是随机变量 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的观测值。

有总体 X ， $E(X) = \mu$ ， $D(X) = \sigma^2$ ，下方为常见的统计量：

定义（样本平均值）： $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 。

根据定义可得 $E(\bar{X}) = \mu$ ， $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

定义（样本方差）： $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$

根据定义可得， $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

定义（样本标准差）： $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

定义（样本 k 阶原点矩）： $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$

定义（样本 k 阶中心矩）： $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, \quad k = 2, 3, \dots$

6.2 抽样分布

抽样分布即为统计量为 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布，在做题时题目一般会给出提示数据，可以查表求解。

6.2.1 χ^2 分布

定义 (χ^2 分布) : 设样本 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且均服从 $N(0, 1)$ 分布, 则有 $X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 即 $X \sim \chi^2(n)$ 。

χ^2 分布有如下几条性质:

性质:

1. 可加性

若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ 则
 $X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

2. 均值与方差

若 $X \sim \chi^2(n)$, 则 $E(X) = n, D(X) = 2n$.

3. 上 α 分位点

在 χ^2 分布的密度图形中, 当 $x = x_\alpha$ 时, $x > x_\alpha$ 的面积为 α , 称此点为上 α 分位点。此时有 $P\{X > x_\alpha\} = \alpha$ 。

6.2.2 t 分布

定义 (t 分布) : 若有 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$ 且相互独立, 则

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = t \sim t(n)$$

6.2.3 F 分布

定义 (F 分布) : 若有 $X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2)$ 且相互独立, 则

$$\frac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}} = F \sim F(n_1, n_2)$$

5. 正态总体的样本均值与样本方差的分布.

(1) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的一个样本, 则:

① $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$; ② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$; ③ \bar{X} 与 S^2 独立.

定理四 设 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 与 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, 且这两个样本相互独立^①. 设 $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$ 分别是这两个样本的样本均值; $S_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2$ 分别是这两个样本的样本方差, 则有

$$1^\circ \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1);$$

2° 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时,

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

其中

$$S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

7 附录 1: 常见的分布类型的期望与方差及证明

1. 泊松分布

若 $X \sim p(\lambda)$, 即 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k=0, 1, \dots$, 则 $E(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$

角解释: ① $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
 $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{\text{令 } n=k-1}{=} \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

② $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
 $= \sum_{k=1}^{\infty} [(k^2 - k) + k] \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} = E(X) = \lambda$
 $= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)}{(k-1)!} \lambda^k e^{-\lambda} + \lambda = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a, b)$, 则 $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解释: ① $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$

$$\begin{aligned} \text{② } D(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3} \cdot \frac{1}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \quad \checkmark \end{aligned}$$

5 指数分布

设 $X \sim e(\lambda)$, 则 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

解释: ① $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \xrightarrow{\text{分部法}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)$

$$\begin{aligned} \text{② } E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x^2 d e^{-\lambda x} \\ &= - \left[x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(x^2) \right] \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= 2 \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \xrightarrow{\text{分部法}} \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\therefore D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

6. 正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

解释: ① $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ $\xrightarrow[\substack{\frac{x-\mu}{\sigma}=t \\ x=\sigma t+\mu}}{\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu+\sigma t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt}$

$$= \underbrace{\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_1 + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_0 = \mu + 0 = \mu$$

② $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \xrightarrow[\substack{\frac{x-\mu}{\sigma}=t \\ x=\sigma t+\mu}}{\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu+\sigma t)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\underbrace{\mu^2 + 2\mu\sigma t}_0 + \sigma^2 t^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \underbrace{\mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_1 + \underbrace{\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\substack{\text{分部积分} \\ =1}} = \mu^2 + \sigma^2$$

故 $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$