

数理统计笔记

Contents

1 样本与抽样分布	1
1.1 抽样分布	1
1.1.1 统计量	1
1.1.2 χ^2 分布	2

1 样本与抽样分布

定义 1.1 (样本) : 设随机变量 X 服从分布 F , 若随机变量序列 X_1, X_2, \dots, X_n 具有同一分布 F 且相互独立, 则称这一随机变量序列为从总体 F 或总体 X 得到的容量为 n 的样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为 X 的 n 个独立观测值。

反之, 若一随机变量序列是总体 F 的一个样本, 则序列中的随机变量同分布为 F , 且相互独立。

定义 1.2 (经验分布函数) : 有样本 x_1, x_2, \dots, x_n , 用 $S(x)$, $-\infty < x < \infty$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_n 中不大于 x 的随机变量的个数, 定义经验分布函数 $F_n(x)$ 为

$$F_n(x) = \frac{1}{n}S(x), \quad -\infty < x < \infty$$

1.1 抽样分布

1.1.1 统计量

定义 1.1.1.1 (统计量与统计量的观测值) : 若有一随机变量序列 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 F 的一个容量为 n 的样本, 则称不含有位置参数的函数 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为统计量。

由定义可知, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 也是一个随机变量, 若有 x_1, x_2, \dots, x_n 是样本的观测值, 则 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是随机变量 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的观测值。

有总体 X , $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, 下方为常见的统计量:

定义 1.1.1.2 (样本平均值) : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

根据定义可得 $E(\bar{X}) = \mu$, $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

定义 1.1.1.3 (样本方差) : $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$

根据定义可得, $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

定义 1.1.1.4 (样本标准差) : $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

定义 1.1.1.5 (样本 k 阶原点矩) : $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$

定义 1.1.1.6 (样本 k 阶中心矩) : $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, \quad k = 2, 3, \dots$

抽样分布即为统计量为 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布, 如 χ^2 分布。

1.1.2 χ^2 分布

定义 1.1.2.1 (χ^2 分布) : 设样本 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且均服从 $N(0, 1)$ 分布, 则有 $X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布。即 $X \sim \chi^2(n)$ 。

χ^2 分布有如下几条性质:

性质:

1. 可加性

2. 均值与方差

若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ 则
 $X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

若 $X \sim \chi^2(n)$, 则 $E(X) = n, D(X) = 2n$.

3. 上 α 分位点

在 χ^2 分布的密度图形中, 当 $x = x_\alpha$ 时, $x > x_\alpha$ 的面积为 α , 称此点为上 α 分位点。
此时有 $P\{X > x_\alpha\} = \alpha$.

t 分布, F 分布定义暂略

5. 正态总体的样本均值与样本方差的分布.

(1) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的一个样本, 则:

① $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$; ② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$; ③ \bar{X} 与 S^2 独立.