2019--2020 学年第一学期

《概率论与数理统计》试卷评分标准及参考答案（A 卷）

注：本试卷参考数据：$\sqrt{60}=7.75$，$\Phi(1.29)$=0.9014, $\Phi(2.33)$=0.9901, $z_{0.05}$=1.645, $t_{0.05}(24)$=1.7109, $t_{0.05}(25)$=1.7081.

（注意：所有答案必须写在答题卡上，在试卷上作答无效）

一、单选题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

1. 设 A, B 为两随机事件, $P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$, 则 $P(\overline{AB})$=(B)

(A) 0.4； (B) 0.6； (C) 0.12； (D) 0.8.

2. 设随机变量 X 的分布律

X	0	1	2	3
p_i	0.1	0.3	0.4	0.2

则 X 的分布函数值 $F(2)$= (C)

(A) 0.5； (B) 0.6； (C) 0.8； (D) 0.7.

3. 设二维随机变量(X，Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} c, & -1\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，

则 c = (C)

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{6}$.

4. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立， 则下列选项不一定正确的是(D)

(A) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$； (B) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

(C) $E(XY)=E(X)E(Y)$； (D) $D(XY)=D(X)D(Y)$.

5. 设总体 $X\sim Exp(\theta)$, X_1，X_2，⋯，X_n 是 X 的一个样本，$\overline{X}$，S^2分别为样本均值和样本方差, 则 $E(\overline{X})$，$E(S^2)$分别为(A)

(A) θ，θ^2; (B) θ^2, θ; (C) θ，$\frac{\theta}{n}$; (D) θ，$\frac{\theta}{n}$.

6. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$, X_1，X_2，…，X_n 为样本， μ是未知参数，则下列选项中不是统计量的是(C)

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$； (B) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；

(C) $\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2$； (D) $\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2$.

7. 设某种清漆的干燥时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ未知, 现抽取 9 个样品，测得样本均值 $\bar{x}=6$(小时)，样本标准差 $s=1$(小时)，则μ的置信水平为 0.95 的置信区间为(B)

(A) $\left(6\pm\frac{1}{9}t_{0.025}(8)\right)$； (B) $\left(6\pm\frac{1}{3}t_{0.025}(8)\right)$；

(C) $\left(6\pm\frac{1}{9}t_{0.025}(9)\right)$； (D) $\left(6\pm\frac{1}{3}t_{0.025}(9)\right)$.

二、填空题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

8. 现有 5 名留学生, 其中 3 名来自巴基斯坦, 2 名来自埃及，随机选 2 名留学生参加春节晚会, 则参加晚会的 2 名学生均来自巴基斯坦的概率为 0.3 .

9. 设总体 X 的均值为μ, 方差为σ^2, X_1，X_2，…，X_n ($n>2$) 为样本, 已知 $\overline{X}$与 X_1 均是

μ的无偏估计量, 比较这两个估计量得, $\overline{X}$ 更有效.

10. 设 $X\sim N(1,2), Y\sim N(-2,3)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $X-Y\sim$ N(3, 5) .

11. 设随机变量(X,Y)具有 $D(X)=9$, $D(Y)=4, \rho_{XY}=-\frac{1}{6}$，则

$Cov(X,Y)=$ −1 .

12. 已知 $P\{X>3.5\}=0.01$, 则随机变量 X 的上 0.01 分位数为 3.5 .

13. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， X_1，X_2，…，X_n 是 X 的一个样本， 则 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ 服从的分布为___$\chi^2(n)$______.

14. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，$\theta$是待估参数，$x_1, x_2,\cdots x_n$是样本观测值，则基于$x_1, x_2,\cdots x_n$的似然函数是

$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}, & 0<x_1,x_2,\cdots x_n<1\\ 0, & 其它\end{cases}$______.

三、解答题（7 小题，共 58 分）

15.（**本题 8 分**）设某班男女之比为 51:49，男生有 5%来自澳门，女生有 2%来自澳门，现从该班中随机抽取一名学生参加全国大学生数学竞赛，请解答：

(1) 该生来自澳门的概率是多少？

(2) 已知参加数学竞赛的学生来自澳门，问该生为男生的概率是多少？

解：设 $B=$ {随机抽取的学生来自澳门}，$A_1=$ {抽到男生}，$A_2=$ {抽到女生}，

$P(A_1)=\frac{51}{100}$， $P(A_2)=\frac{49}{100}$，$P(B\mid A_1)=5\%$， $P(B\mid A_2)=2\%$， **2 分**

(1)由全概率公式，

$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=\frac{51}{100}\times0.05+\frac{49}{100}0.02=\frac{353}{10000}=0.0353$，

5 分

由贝叶斯公式得

$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{0.51\times0.05}{0.0354}=\frac{255}{353}\approx0.72$. **8 分**

注：若两问的最终答案分别成$\frac{353}{10000}$与$\frac{255}{353}$即可得 8 分.

16.（**本题 8 分**）小战同学有时需要坐校车去新区上课，设候车时间 $X\sim U(0,30)$，若候车超过 10 分钟，则小战改乘出租车.

(1) 求小战未乘校车而改乘出租车的概率；

(2) 小战一个月需要到新区 4 次， Y 表示他未坐校车而改乘出租车的次数，请写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geq1\}$.

解：(1)由已知可得 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}, & 0\leq x\leq30,\\ 0, & 其它，\end{cases}$ **1 分**

则根据题意可得小战未乘校车而改乘出租车的概率为 $p=P\{X>10\}=\int_{10}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{2}{3}$，

3 分

(2) 根据题意，$Y\sim B(4,\frac{2}{3})$， **4 分**

则 Y 的分布律为 $P\{Y=k\}=C_4^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(1-\frac{2}{3}\right)^{4-k}=C_4^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$， **6 分**

因此 $P\{Y\geq1\}=1\text{-}P\{Y=0\}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{80}{81}$. **8 分**

17.（**本题 8 分**）设二维随机变量（X,Y）的分布律如下表所示

$X \backslash Y$	2	3	8
4	0.1	0.3	0.4
8	0.05	0.12	0.03

求：(1)关于 X 和关于 Y 的边缘分布律；

(2) X 和 Y 是否相互独立？请说明理由；

(3) $Z=\max(X, Y)$的分布律.

X	11	3	-3
P_i	0.2	0.7	0.1

Y	6	4	-1
P_i	0.2	0.7	0.1

解

(1)

X \ Y	2	3	8	$P\{X=y_i\}$
4	0.1	0.3	0.4	0.8
8	0.05	0.12	0.03	0.2
$P\{X=x_i\}$	0.15	0.42	0.43	1

3 分

因此，关于 X 和关于 Y 的边缘分布律

X	4	8
p_i	0.8	0.2

Y	2	3	8
p_j	0.15	0.42	0.43

4 分

(2) 由于 $P\{X=4,Y=2\}=0.1$，

而 $P\{X=4\}P\{Y=2\}=0.8\times0.15=0.12$，

易知 $P\{X=4,Y=2\}\neq P\{X=4\}P\{Y=2\}$，故 X 和 Y 不相互独立. **6 分**

(3) Z=max(X, Y)的分布律为

Z	4	8
p	0.4	0.6

8 分

18.（**本题 7 分**）某人有一笔资金，可投入两个项目：房产和商业，其收益都与市场状态有关. 若把未来市场划分为好, 中, 差三个等级, 其发生的概率分别为: 0.2，0.7, 0.1. 通过调查，该投资者认为投资于房产的收益 X(万元)和投资于商业的收益 Y(万元)的分布分别为

(1) 计算投资于房产和商业的平均收益 $E(X), E(Y)$;

(2) 计算两种投资方案收益的方差 $D(X), D(Y)$;

(3) 投资者如何投资较好？并说明理由.

解：(1)

$E(X)=11\times0.2+3\times0.7+(-3)\times0.1=4.0$ (万元)， **1 分**

$E(Y)=6\times0.2+4\times0.7+(-1)\times0.1=3.9$ (万元)， **2 分**

(2)

$D(X)=(11-4)^2\times0.2+(3-4)^2\times0.7+(-3-4)^2\times0.1=15.4$ ，

$D(Y)=(6-3.9)^2\times0.2+(4-3.9)^2\times0.7+(-1-3.9)^2\times0.1=3.29$ ， **5 分**

(3)从平均收益看，投资房产比投资商业多收益 0.1 万元，但另一方面，由于方差越大，收益的波动越大，从而风险也大，根据计算结果看投资房产比投资商业的风险要大的多，因此投资商业较好. **7 分**

注：若回答宁愿承受较大风险而去投资房产，仍可得满分，即能表达出“方差体现收益的波动性”相关意思的解答均为正确答案.

19.（**本题 8 分**）

已知某本书有 300 页，第 i 页印刷错误的个数$X_i\sim P(0.2), i=1,2,3,\cdots,300$.

(1) 利用独立同分布的中心极限定理，写出$\sum_{i=1}^{300} X_i$所服从的近似分布;

(2) 求整本书中印刷错误总数不多于 70 个的概率.

解：(1) 由$X_i \sim P(0.2)$可知$E(X_i)=0.2$，$D(X_i)=0.2$， **2 分**

因此$\sum_{i=1}^{300} X_i \overset{近似}{\sim} N(300\times 0.2, 300\times 0.2)$，即$\sum_{i=1}^{300} X_i \overset{近似}{\sim} N(60,60)$. **4 分**

(2)所求概率为

$$P\left\{\sum_{i=1}^{300} X_i \le 70\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{300} X_i - 60}{\sqrt{60}} \le \frac{70-60}{\sqrt{60}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{300} X_i - 60}{\sqrt{60}} \le \frac{10}{\sqrt{60}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{60}}\right) \approx \Phi(1.29) = 0.9014$$ **8 分**

20.（**本题 10 分**）

设总体 X 的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta, \\ 0, & 其他,\end{cases}$ $\theta>0$ 是待估参数,

$X_1, X_2, \cdots X_n$是为来自总体 X 的样本.

(1) 求参数θ的矩估计量，并判断此估计量是否是参数θ的无偏估计量;

(2) 抽样得到的样本观测值为 0.8, 0.6, 0.4, 0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.8, 求参数θ的矩估计值.

解：(1)

$$E(X)=\int_0^\theta \frac{2}{\theta^2}(\theta-x)x\,dx=\frac{1}{3}\theta,\ \theta=3E(X),$$ **2 分**

因此θ的矩估计量$\hat{\theta}=3\bar{X}$. **4 分**

由$E(\hat{\theta})=E(3\bar{X})=3E(\bar{X})=3E(X)=\theta$得，$\hat{\theta}=3\bar{X}$为$\theta$的无偏估计量， **6 分**

(2) 计算得

$$\bar{x}=\frac{1}{8}(0.8+0.6+0.4+0.5+0.5+0.6+0.6+0.8)=0.6,$$ **8 分**

结合(1)可得参数θ的矩估计值为$\hat{\theta}=3\bar{x}=1.8$. **10 分**

21.（**本题 9 分**）从某种实验动物中取出 25 个样品，测量其发热量，算得平均值为 12214，样本标准差 315. 设发热量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,

(1) 在显著水平$\alpha=0.05$下，是否可以认为该试验物发热量的平均值μ不大于 12100？(2) 你的检验结果可能会犯哪一类错误？犯该类错误的概率能否控制？

解：(1) 假设： $H_0:\mu\le\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$ **1 分**

此为右边检验，由于方差未知，应选用 t 统计量检验，在显著水平$\alpha=0.05$下，H_0 的

拒绝域为$\left\{t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1)\right\}=\{t\ge t_{0.05}(25-1)\}$ **3 分**

由表得$\{t_{0.05}(24)\}=1.71$，现有$\bar{x}=12214$，$s=315$，$\mu_0=12100$，计算得到

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=1.8>1.71$$ **5 分**

t 落入拒绝域中，故在 0.05 的显著水平下应拒绝H_0，认为该试验物发热量的平均值大于 12100. **6 分**

(2) 检验结果可能会犯第一类(弃真)错误，犯该类错误的概率可以控制在 0.05 以下(犯该类错误的概率小于等于 0.05). **9 分**