Mathmatics Analysis

一个短篇

2024 年 01 月 31 日

目录

参考书目为《陶哲轩实分析》

1 自然数

1.1 皮亚诺公理

Axioms 1.1 （皮亚诺自然数公理）

1. 0 是自然数
2. 每个自然数 n 都有一个后继，计作 $\text{succ } n$，也是自然数
3. 0 不是任何自然数的后继
4. 当且仅当 $\text{succ } n = \text{succ } m$ 时，$n = m$

Axioms 1.1 中第三第四条公理是为了处理自然数的绕回状况，是对前两条公理的强化。

Axiom 1.2 （数学归纳法原理） $P(n)$ 表示自然数 n 的某一性质，若 $P(0)$ 为真，$P(n)$ 为真，则有 $P(\text{succ } n)$ 为真，即对于任意自然数 n 都有 $P(n)$ 为真。

自然数的数学归纳法原理中所指的性质并不是确定的，该条原理也并非是一个独立的公理而是一种公理模式。

假设存在数系 $\mathbb{N}$， 若满足 Axiom 1.1 以及 Axiom 1.2，我们就称这个数系为自然数。

在自然数的基础上，我们可以递归的定义序列。序列是一列自然数，其下标，也就是索引值也是自然数，序列有基值，是一个常数，也有一个函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，通过这个函数得到数列中这一项的后继元素的值。更准确的，有命题

Proposition 1.1 （序列的递归定义） 有函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，以及序列基值 $a_0 = c$，对于任意自然数 n，都可以确定唯一的 $a_{\text{succ } n} = f(a_n)$ 。

1.2 加法

Definition 1.1 （加法） 对于任意一个自然数 m，$0 + m = m$，假设我们已经定义了 $n + m$，我们有 $(\text{succ } n) + m = \text{succ } (m + n)$ 。

Lemma 1.1 对于任意自然数 n，有 $n + 0 = n$ 成立。

Proof: 由 Definition 1.1 可知，对于任意自然数 m，有$0 + m = m$，所以有 $0 + 0 = 0$，假设 $n + 0 = n$ 成立，则需证明 $\text{succ } n + 0 = \text{succ } n$，由加法定义可知 $(\text{succ } n) + 0 = \text{succ } (n + 0)$，将 $n + 0 = n$ 代入可得 $\text{succ } (n + 0) = \text{succ } n$ 。 □

Lemma 1.2 对于任意自然数 m, n 有 $m + (\text{succ } n) = \text{succ } (m + n)$ 。

证明时对 m 进行数学归纳法即可。

Proposition 1.2 （交换律） $\forall n,\ m \in \mathbb{N},\ n + m = m + n$

固定 n 对 m 进行数学归纳法即可证明。

Proposition 1.3 （结合律） $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{N},\ (a+b)+c = a+(b+c)$

Proposition 1.4 （消去律） $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{N},\ \text{if } a+b = a+c,\ \text{then } b = c$

1.2.1 正整数

Definition 1.2 （正整数） 正整数系中所有的元素都是非 0 的自然数，计作 $\mathbb{Z}^+$ 。

Proposition 1.5 $\forall a \in \mathbb{Z}^+,\ b \in \mathbb{N},\ a+b \in \mathbb{Z}^+$

Corollary 1.1 $\forall a,\ b \in \mathbb{N},\ \text{if } a+b = 0,\ \text{then } a = 0,\ b = 0$

Lemma 1.3 $\forall a \in \mathbb{Z}^+,\ \exists b \in \mathbb{N},\ \text{succ } b = a$

1.2.2 自然数的序

Definition 1.3 （自然数的序） $\forall n,\ m,\ a \in \mathbb{N}$，若 $n = m + a$，则称 $n \geq m$ 或 $m \leq n$，若 $n \geq m$ 并且 $n \neq m$，则称 $n > m$ 或 $m < n$ 。

Properties 1.1 （自然数的序的基本性质）

(a) 自反性：$a \geq a$
(b) 传递性：若 $a \geq b$，$b \geq c$，则 $a \geq c$
(c) 反对称性：若 $a \geq b$，$b \geq a$，则 $a = b$
(d) 加法不变性：若 $a \geq b$，则 $a + c \geq b + c$
(e) 当且仅当 $\text{succ } a \leq b$ 时，有 $a < b$
(f) 当且仅当 $\exists d \in \mathbb{Z}^+,\ b + d = a$，有 $a > b$

Proposition 1.6 （序的三歧性） $\forall a,\ b \in \mathbb{N}$，命题 $a > b$，$a < b$，$a = b$ 必只有一个成立。

Proposition 1.7 （强归纳法原理） $\forall m_0,\ x \in \mathbb{N}$，$P(x)$ 表示与自然数 x 有关的性质 P，$\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq m_0$，若 $\forall m' \in \mathbb{N},\ m_0 \leq m' < m, P(m')$ 为真,则 $P(m)$ 为真。当 $m = m_0$ 时，假设中的 m' 的取值范围为空，所以假设依然成立，即 $P(m_0)$ 总是为真的。

1.3 乘法

Definition 1.4 （自然数乘法） $\forall,\ n,\ m \in \mathbb{N}$，首先当 $n = 0$ 时，有 $0 \times m \coloneqq 0$，现在归纳性的假设已经定义了 $n \times m$，我们有 $(\text{succ } n) \times m = (n \times m) + m$ 。

乘法具有交换律，且乘法的运算优先级要大于加法，通常省略 times 符号如
$ab + c = (a \times b) + c$ 。

Lemma 1.4 （交换律） $\forall n,\ m \in \mathbb{N},\ n \times m = m \times n$

Lemma 1.5 （正整数没有零因子） $\forall n,\ m \in \mathbb{N}$，若有 $nm = 0$，当且仅当 n，m 中至少有一个为 0，特别的，正整数乘法的结果为正整数。

Lemma 1.6 （交换律） $\forall\, a,\ b,\ c \in \mathbb{N},\ a(b+c) = ab + ac,\ (b+c)a = ba + ca$

Lemma 1.7 （结合律） $\forall\, a,\ b,\ c \in \mathbb{N},\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Lemma 1.8 （序不变性） $\forall\, a,\ b \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{Z}^{+}$，若 $a < b$，则有 $ac < bc$ 。

Lemma 1.9 （消去律） $\forall\, a,\ b \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{Z}^{+}$，若有 $ac = bc$，则 $a = b$ 。

在证明消去律时，可以用到序的三歧性。

Proposition 1.8 （欧几里得算法）
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z}^{+},\ \exists\, m,\ r \in \mathbb{N},\ 0 \le r < q,\ n = mq + r$ 。

其中 r 为余数，这个算法标志着数论的开始。

Definition 1.5 （指数运算） $\forall\, n,\ m \in \mathbb{N}$，当 $n = 0$ 时，$m^0 \coloneqq 1$，特别的 $0^0 = 1$，现在归纳性的假设已经定义了 m^n 我们有 $m^{n+1} = m^n \times m$ 。

2 集合论

2.1 基础知识

Definition 2.1 （集合的定义） 集合是一堆没有顺序的对象，若有集合 A 且 x 是集合 A 的这些对象当中的一个，我们称 x 属于这个集合，计作 $x \in A$ 。

Axiom 2.1 （集合也是对象） 若 A 是一个集合，那么 A 也是一个对象。

这条公理指出一个集合可以作为一个元素，或者说对象而被另一个集合包含。

在纯粹集合论当中，任何对象都是集合，例如在自然数的表示当中，用 $\varnothing$ 表示 0，用 $\{\varnothing\}$，表示 1，用 $\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$ 表示 2，也就是每个自然数都是集合，由其前面的所有自然数所表示的集合组成。 在非纯粹集合论中，有些对象可以不是集合，在一般数学研究下，两者是近乎等价的。

Definition 2.2 （集合的相等） 若有集合 A，B，当且仅当所有 $x \in A$，$y \in B$，满足 $x \in B$，$y \in A$ 时，我们称 $A = B$ 。

集合的相等关系可以很容易证明出是自反的，对称的，传递的，且因为相等的概念是通过 $\in$ 运算来描述的，也自然继承 $\in$ 运算的替换公理，所有只由 $\in$ 运算构成的新运算都遵循替换公理。

Axiom 2.2 （空集） 存在一个不包含任何对象的集合：空集 $\varnothing$ 或 $\{\}$，表示对于任意的对象 x，均有 $x \notin \varnothing$ 。

我们可以用单个选取引理来证明集合的非空性，即若有一非空集合 A，则存在 $x \in A$ 。

Axiom 2.3 （单元素集合与双元素集合） 单元素集合即一个只存在一个对象的集合 $\{a\}$，当且仅当 $x = a$ 时，有 $x \in \{a\}$，双元素集合为之存在两个对象的集合 $\{a,\ b\}$，当且仅当 $y = a$ 或 $y = b$ 时，有 $y \in \{a,\ b\}$ 。

Axiom 2.4 （两个集合的并集） 有集合 A，B，若有一个集合包含了所有属于集合 A ，或属于集合 B 或同时属于集合 A，B 的对象，我们称这个集合为集合 A，B 的并集 $A \cup B$ 。即，对于任意的对象 x 有

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{或 } x \in B$$

Lemma 2.1 集合的并集符合交换律和结合律。

Definition 2.3 （子集） 有集合 A, B，若对于 A 中的任意对象 x，有 $x \in B$，则称集合 $A \subseteq B$，即集合 A 是集合 B 的子集。当 $A \neq B$ 时，称 $A \subsetneq B$ 即集合 A 是集合 B 的真子集。

定义子集的同时也定义了集合间的包含关系，其使得集合是偏序的而非全序的。即两个集合之间存在除了子集，真子集，相等集合外的彼此不为对方子集的关系。

Axiom 2.5 （分类公理） 又称为分离公理，对于集合 A 中某一对象 X 的某一性质 $P(x)$，其要么为真要么为假，由分类公理构成的集合为 $\{x \in A : P(x)\}$ 表示集合 A 中那些对于 $P(x)$ 为真的对象所构成的新集合。即

$$y \in \{x \in A : P(X)\} \iff y \in A \text{ 并且 } P(y) \text{ 为真}$$

Definition 2.4 （集合的交集） 有集合 A，B 根据分类公理，我们定义集合的交集为

$$A \cap B \coloneqq \{y \in A : y \in B\}$$

Definition 2.5 （集合的差集） 有集合 A，B 根据分类公理，我们定义集合的交集为

$$A \setminus B \coloneqq \{x \in A,\ x \notin B\}$$

通过差集，交集，并集的运算，集合可以构成布尔代数

Proposition 2.1 （集合构成布尔代数）

(a) 最小元
(b) 最大元
(c) 恒等式
(d) 交换律
(e) 结合律
(f) 分配律
(g) 分拆法
(h) 德摩根律

Axiom 2.6 （替换公理） 对一集合 A 上的元素 x，有命题 $P(x,\ y)$，当对于任意的 x 都存在最多一个 y 满足 $P(x,\ y)$ 时称命题为真，那么存在一个集合 $\{y : P(x,\ y)$ 对于任 $x \in A$ 为真$\}$ 使得对任意的对象 z 有

$$z \in \{y : P(x,\ y) \text{ 对于任 } x \in A \text{ 为真}\} \iff \text{对于 } x \in A, P(x, z) \text{ 为真}$$

替换公理的另一种形式是 $\{y : x \in A,\ y = f(x)\}$，我们可以将其表示为 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 。

Axiom 2.7 （无穷大） 对于一个集合 $\mathbb{N}$，0 在集合中，以及对于所有 $x \in \mathbb{N}$，其满足皮亚诺公理的后继也在集合 $\mathbb{N}$ 中，这个集合是个无穷大的集合。

2.2 罗素悖论

Axiom 2.8 （万有分类） 有一性质 P 对于任意对象 x 有 $P(x)$，可以构造出所有只含有 $P(x)$ 为真的对象 x，即

$$y \in \{x : P(x) \text{ 为真}\} \iff P(y) \text{ 为真}$$

万有分类 (universal specification) 公理希望对于某一个性质，可以构造出一个含有符合这个性质的所有对象的集合，若这条公理成立，在处理问题时，大概可以只考虑某一性质 P 然后通过这条公理（也称为概括公理或万有公理）来构造出一个所有符合该性质的全部，也就是没有缺口的集合，并用集合操作来进行数学研究等等。但是这条公理并不能进入公理化集合论，罗素指出了万有公理是悖论性的。

Definition 2.6 （罗素悖论） 对于任意对象 x 有性质P:

$$P \Leftrightarrow \text{若}x \text{ 是一个集合, 有}x \notin x$$

通过万有公理构造集合 $S \coloneqq \{x : P(x)\}$，问 S 是否属于集合 S。

1. 若 $S \in S$，则对于定义来说，$P(S)$ 为假，根据万有公理，$S \notin S$ 。
2. 若 $S \notin S$，则对于定义来说，$P(S)$ 为真，根据万有公理，$S \in S$ 。

也就是不管从那方面进行推断，我们得到的结论都是 $S \in S \land S \notin S$，这显然是不正确的。

这是因为集合也是对象，在构造自身的同时自身也成为了构造自身的一部分，也就是发生了自指。在数学中，对自指的研究最终导致了著名的哥德尔不完备定理。

为了解决罗素悖论，数学家为集合论加上了限制以防止自指对发生。数学家们为集合划分了等级，最原始的等级是那些不能用集合表达的原始对象，如自然数 1 等，次之是只包含原始对象的原始集合以及空集，如 $\{1, 2\}, \varnothing$，接着是可以包含原始对象，也可以包含原始集合的集合，以此类推，也就是一个层级的集合只能包含低于其层级的对象。

陶哲轩没有给出复杂的严格形式化表达，而是给出了一条正则性公理:

Axiom 2.9 （正则性） 对于任意一个集合 S，至少有一个对象 $x \in S$，并且 x 不是一个集合，或者当 x 是一个集合时有 $x \cap S = \varnothing$ 。

2.3 函数

Definition 2.7 （函数） 对于一个集合 X, Y 存在映射关系 f，对于任意 $x \in X$，恰只有一个 $f(x) \in Y$，则称 $f : X \to Y$ 为定义域 X 到陪域 Y 上的一个函数，或映射、变换。

函数有定义域 domain，陪域 codomain 和值域 range，其中值域是对于所有 $x \in$ domain 可以取到的所有 $f(x)$ 所构成的集合，其中 range $\subseteq$ codomain 。

Definition 2.8 （函数的相等性） 有函数 f, g 若它们有相同的定义域和值域 X, Y 且对于任意 $x \in X$，有 $f(x) = g(x)$，则称 $f = g$ 。

函数有三种特殊类型：单射 injective，满射 surjective，双射 bijective。

Definition 2.9 （单射函数） 有函数 $f : X \to Y$，$\forall\, x$，$x' \in X$，有 $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ 。

Definition 2.10 （满射函数） 有函数 $f : X \to Y$，对于每一个 $y \in Y$，存在 $x \in X, f(x) = y$ 。 满射函数的陪域等于其值域。

Definition 2.11 （双射） 即是单射又是满射的函数为双射函数，双射函数又称为可逆函数。

若函数 $f : X \to Y$ 是双射，那么对于任意 $y \in Y$，恰好存在一个 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$。此时 $x = f^{-1}(y)$，我们称 f^{-1} 为 f 的逆。

Definition 2.12 （函数的复合） 有函数 $f : X \to Y, g : Y \to Z$，这时函数 f 的值域与 g 的定义域相同，我们称 $g \circ f : X \to Z$ 为两个函数的复合函数，有

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Definition 2.13 （复合是可结合的） 有三个函数 $f : Z \to W, g : Y \to Z, h : X \to Y$，则有 $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ 。

2.4 象和逆象

Definition 2.14 （函数的象） 有函数 $f : X \to Y$，有 $S \subseteq X$，我们称

$$f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}$$

为集合 S 在函数 f 上的象，或前象（与后文逆象相对）。

Definition 2.15 （函数的逆象） 有函数 $f : X \to Y$，有 $S \subseteq Y$，我们称

$$f^{-1}(S) := \{x \mid x \in X, f(x) \in S\}$$

为集合 S 在函数 f 上的逆象。

2.4.1 幂集公理

Axiom 2.10 （幂集公理） 有集合 X, Y，我们称集合 X^Y 为含有定义域为 X 值域为 Y 的所有函数的集合，即

$$\forall f \in X^Y \Longleftrightarrow f : X \to (\text{range} : Y)$$

Lemma 2.2 若 X 是一个集合，则有 $\{Y \mid Y \subseteq X\}$ 是一个集合。

Axiom 2.11 （并集公理） 若集合 S 其中的所有元素也都是集合，则有集合 $\cup S$，它是集合 S 中所有集合的并集，即

$$\forall x \in \cup S \coloneqq \exists A \in S,\ x \in A$$

在公理之前，我们并不能方便的表达“集合中所有元素的并集”这句话，因此我们引入指标集 I，其中标签 $\alpha \in I$，而所有的 A_α 被称为一个集族。那么我们定义集族的交集为:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \coloneqq \cup \{A_\alpha \mid a \in I\}$$

类似的，集族的并集为:

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \coloneqq \{x \mid \forall a \in I, x \in A_\alpha\}$$

集合论章节介绍的公理 Axiom 2.1 - Axiom 2.10 不包括万有分类公理 Axiom 2.8 被称为 Zermelo - Fraenkel 集合论公理（ZF）。

2.5 笛卡尔积

Definition 2.16 （有序对） 对于任意的对象 a，b，有序对是形如 (a, b) 的对象，其中对象 a, b 的顺序是有意义的，即 (a, b) 和 (b, a) 是不同的对象。

Definition 2.17 （笛卡尔积） 有集合 X, Y，定义 $X \times Y = \{(a, b) \mid a \in X, b \in Y\}$ 。

Definition 2.18 （n 维有序对与 n 重笛卡尔积） 有 n 个集合 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 则它们的笛卡尔积为

$$\prod_{i=1}^{n} S_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \text{对于任意的 } 1 \le i \le n, x_i \in S_i\}$$

其中形如 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的有序对为 n 维有序对。

特殊的，空笛卡尔积 $\prod_{1 \le i \le 0}$ 为集合 $\{()\}$ 。

Lemma 2.3 （有限选取） 有 n 个集合 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 都是非空集合，则其 n 重笛卡尔积 $\prod_{i=1}^{n} S_i$ 也为非空集合。

2.6 集合的基数

集合是顺序无关的，但在有限集内，集合中对象的数量是固定的，可数的，而目前为止只介绍了自然数集 $\mathbb{N}$，本章主要内容为阐明只要集合是有限的，就可以用自然数作为集合的计数集合这一命题。

Definition 2.19 （相等的基数） 有集合 S_1，S_2，当且仅当两集合之间存在一个双射 $f : S_1 \to S_2$，称两个集合有相同的基数。

相等的基数也是一种等价关系，若有三个集合 X, Y, Z 其中两两具有相同的基数，那么它们三个有相同的基数，通过函数复合的结合律即可以证明这一点。

Definition 2.20 （自然数作为计数集合） 有自然数 n，当且仅当集合 $\{i \mid i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le n\}$ 与集合 S 有相等的基数时，称集合 S 的基数为 n，即集合 S 中有 n 个元素。

Proposition 2.2 （集合基数的唯一性） 一个集合有且只有一个基数。

Definition 2.21 （有限集） 当一个集合的基数是一个自然数时，称这个集合是有限集，否则这个集合为无限集。用 $\#(S) = n$ 来表示这个集合的基数。

Theorem 2.1 自然数集 $\mathbb{N}$ 是一个无限集。

集合之间存在基数算数。