概率论笔记

目录

1 基本概念

1.1 运算

若 A 代表事件 A 发生, $\overline{A}$ 代表事件没有发生，我们定义如下在随机事件上的关系运算:

包含

$$A \subset B \Leftrightarrow A \to B$$

另外有 $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

并集

$$A \cup B \Leftrightarrow A \vee B$$

交集

$$A \cap B \Leftrightarrow A \wedge B$$

差集

$$A - B \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$$

另外有 $A - B = A - AB = A\overline{B}$

对于交集和并集运算，符合以下四种运算律:

交换律

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

对偶律（德摩根定律）

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

1.2 关系

在事件间，存在如下两种关系:

互斥事件

$$A \cap B = \varnothing$$

对立事件

$$A \cap B = \varnothing \wedge A \cup B = \Omega.$$

1.3 频率和概率

定义:

频率

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

概率

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A) \to P$$

性质:

非负性

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

标准性

$$P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$$

无限可加性

$$\text{If } A \cap B = \varnothing \text{ then } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

互补性

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

概率之间存在如下运算:

1. 减法

$$P(A - B) = P(A) - P(AB)$$
$$\text{If } B \subset A, P(A - B) = P(A) - P(B).$$

2. 加法

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

3. 乘法

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$$

1.4 条件概率

定义: 如果 $P(A) > 0$，则条件概率为 $P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$。

依此，我们有两条推广式:
1. $P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A) - P(BC \mid A)$
2. $P(B - C \mid A) = P(B \mid A) - P(BC \mid A)$

1.5 全概率与贝叶斯公式

定义 （完备事件组）： $S \coloneqq \{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$ 是一个属于 Ω 的事件组，并且满足 $\forall A_1, A_2 \subset S, A_1 \cap A_2 = \varnothing, \wedge A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = \Omega$，则 S 为一个完备事件组。

由定义，我们可以设 B 是一个随机事件, $\{A_1, A_2, ..., A_i\}$ 是一个完备事件组，我们有:

公式 （全概率公式）：

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) \end{aligned}$$

公式 （贝叶斯公式）：

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

1.6 事件的独立性

若 A，B 是相互独立事件，则有

$$\begin{aligned}P(A \mid B)=P(A) &\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\\ &\Leftrightarrow P(B \mid A)=P\left(B \mid \overline{A}\right)\\ &\Leftrightarrow P\left(B \mid \overline{A}\right)=P(B)\end{aligned}$$

且 $A,\overline{A},B,\overline{B}$ 也相互独立，此外有

$$\begin{aligned}&\text{若}A,B,C\ \text{互为独立事件} \longrightarrow A,B,C\ \text{两两独立}\\ &\text{若}A,B,C\ \text{互为独立事件} \longrightarrow \text{关于}\ A,B\ \text{的加法，乘法，减法}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{以及逆运算 也分别独立与}\ C\text{和}\overline{C}\end{aligned}$$

1.7 伯努利概型

定义（伯努利实验）： 实验只有两种可能结果 $A,\overline{A}$ 的实验叫做伯努利实验。

公式（二项概率公式）：

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

2 随机变量及其分布

2.1 $R.V.$ 和 分布函数

$R.V.$ 是一个从随机试验 E 的样本空间 Ω 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射。

2.2 分布函数

定义： 设 X 是一个 $R.V.$, r 是任意实数，则称事件 $\{X \le r\}$ 的概率为 $R.V.\ X$ 的分布函数，计作 $F(r)$。

分布函数有如下性质:

性质:

1. $P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$.
2. $F(x)$ 是一个不减函数
3. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

2.3 离散型随机变量及其分布

定义:

0 – 1 分布

x	0	1
P	p	$1-p$

二项分布

$$P\{X=k\} \coloneqq \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{x \mid x \in \mathbb{N}^+ \cap [0,n]\}$$

计作 $X \sim B(n,p)$

泊松分布

$$P\{X=k\} \coloneqq \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ (\lambda>0) \text{ 计作 } X \sim P(\lambda)$$

几何分布

$$P\{X=k\} \coloneqq (1-p)^{k-1} P$$

超几何分布

$$P\{X=k\} \coloneqq \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k \in \{1,2,3,...\min(M,N)\}$$

计作 $X \sim H(N,M,n)$

定理（泊松定理）： 当 $X \sim B(n,p)$ 且 n 充分大，p 充分小时

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda = np$$

2.4 连续型 $R.V.$

定义（分布函数）：

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

其中 $f(t)$ 是概率密度函数，$F(x)$ 是分布函数

公式（区间概率公式）： $F\{a<X<b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

2.4.1 常见形式

定义（均匀分布）：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & b<x<a \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

定义（指数分布）：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}},\ x>0\\ 0, \qquad \text{otherwize}\end{cases}$$

指数分布具有无记忆性，即 $P\{x>t+T\mid x>t\}=P\{x>T\}$ 。

2.4.2 正态分布

定义（正态分布）： 计作 $X\sim N(\mu,\sigma^2),\sigma>0$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in\mathbb{R}$$

公式： $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{A}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{A\pi},\ A>0$

证明： 设 $X\sim N\left(0,\frac{A}{2}\right)$, 因为概率分布函数具有规范性 $F(+\infty)=1$ 即 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)=1$. 带入得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{A\pi}}e^{-\frac{x^2}{A}}\,\mathrm{d}x=1$$
$$\frac{1}{\sqrt{A\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{A}}\,\mathrm{d}x=1$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{A}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{A\pi}$$

□

定义（标准正态分布）： 当 $\mu=0,\sigma^2=1,X\sim N(0,1),x\in\mathbb{R}$时，其为标准正态分布。

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-e^{\frac{x^2}{2}}$$
$$\Phi(x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

定义（标准化）： 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 不满足标准正态分布，则 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

根据标准化，如果我们想要计算一个满足非标准化的正态分布的随机变量在范围 $(a,b]$上的概率，我们可以 X 先将其标准化为 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ 并计算 $\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ 即可。

定义（分位点）： μ_α 表示 $P\{x>\mu_\alpha\}=\alpha.$
并且有 $\mu_{1-\alpha}=\mu(-\alpha).$

2.5 随机变量的分布

对于离散型随机变量，我们可以先求出取值，在分别对对应的取值求出概率。而对于连续性随机变量，重点是求其密度函数：即已知 $X \sim f_X(x), Y=g(X)$，求 $R.V.Y$ 的分布函数 $f_Y(y)$。

首先介绍根据分布函数求 $R.V.Y$ 的 密度函数的方法：

公式 （根据分布函数法）：
1. 首先，找到密度函数 $f_Y(y)$ 的分段点，一般有如下两种情况
   1. $f_X(x)$ 的分段点，带入 $g(x)$ 后得到的 y 的值，和
   2. $y=g(x)$ 的最值
2. 其次，根据以上分段点，求出区间 $(l,r]$ 的 $F_Y(y)$：

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(x)\leq y\}=\int_l^r f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

3. 最后，对求出的分布函数求导即可得到随机变量 y 的密度函数 $f_Y(y)={F_Y}'(y)$。

除此之外，还可以用下方的定理中的公式来进行求解：

公式： 设 $f_X(x)$ 随机变量 X 的密度函数，对于随机变量 Y 有 $Y=g(X)$，且 $g(X)$ 为单调函数，令 $x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数，α,β 分别是 $g(x)$ 的最小值和最大值。则 $Y=g(X)$ 的密度函数 $f_Y(y)$ 为：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

3 多维 $R.V.$

3.1 二维随机变量和联合分布函数

定义 （二维随机变量）： 设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{e\}$，$X=X(e),Y=Y(e)$ 的定义在 Ω 上的随机变量，则 (X,Y) 为定义在 Ω 上的二维随机变量。

定义 （联合分布函数）： 设 $x,y\in\mathbb{R}$，则 x,y 的联合分布函数为事件 $\{X\leq x\}$ 与事件 $\{Y\leq y\}$ 同时发生的概率为二维随机变量的联合分布函数

$$F(x,y)=P\{(X\leq x)\cup(Y\leq y)\}\overset{\text{计作}}{=}P\{X\leq x,Y\leq y\}$$

随机变量的分布函数的几何意义为在二维坐标轴中，$F(x,y)$ 为 $X\leq x$ 与 $Y\leq y$ 所围成的矩形区域的面积。易得，点 (X,Y) 落在 $\{(x,y)\mid x_1<x\leq x_2, y_1<y\leq y_2\}$ 区域的概率为 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$ 。

3.2 连续型随机变量

定义 （密度函数）： 联合概率密度指的是对于二维随机变量 (X, Y)，其概率分布函数为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

其中的非负函数 $f(x,y)$ 即为联合概率密度。

二维随机变量的联合密度函数有如下性质:

性质:

1. 非负性:

$$f(x,y)\geq 0$$

2. 规范性:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = F(\infty,\infty)=1$$

3. 设 G 是平面 xOy 上的闭区域，则点 (X,Y) 落在 G 区域上的概率为

$$F\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3.2.1 常见形式

定义 （均匀分布）：

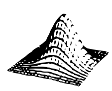
$$f(u,v)=\begin{cases}\frac{1}{S_G},(u,v)\in G\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

定义 （二维正态分布）：

(2) 二维正态分布

若 (X,Y) 的 $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$

其中 $\sigma_1>0,\ \sigma_2>0,\ -1\leq\rho\leq 1 \Rightarrow$ 则称 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$



3.3 边缘分布

定义（分布函数）： 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(X,Y)$，Ω 为完备事件组，则 $F_X(x)=P\{X\leq x,\Omega\},F_Y(y)=P\{\Omega,Y\leq y\}$ 分别为 二维随机变量关于 X 或 Y 的边缘分布函数。

定义（分布律 / 质量函数）： 已知 二维随机变量 (X,Y) 的分布律为 $P\{X,Y\}=P\{X=x_i\cap Y=y_i\}$ 则关于 X 的边缘分布律为

$$P_X(x)=\sum^{i}P(x,y_i)$$

定义（密度函数）： 设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$ 则关于 X 的边缘密度函数和关于 Y 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

3.4 条件分布

定义（分布律）： 有二维随机变量 (X,Y)

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P_Y\{Y=y_j\}}$$

即为随机变量 X 在 $Y=y_j$ 下的条件分布律

定义（密度函数）： 有二维随机变量 (X,Y) 及其联合概率密度$f(x,y)$，固定 $Y=y$，则随机变量 X 在 $Y=y$ 条件下的概率密度函数为 $f_{X\mid Y}=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

3.5 独立性

定义： 有二维随机变量 (X,Y)，$F(x,y)=F_X(y)F_Y(x)$ 满足独立。对于离散型随机变量，独立性在于是否满足 $P(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$。对于连续性随机变量，在于其密度函数是否满足 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 。

3.6 二维连续型随机变量的分布

对于离散型随机变量，依旧是先求取值，再求概率。而对于两个连续型随机变量，我们有如下方法:

公式（分布函数法）： 有二维随机变量 (X,Y) 及其联合概率分布 $f(x,y)$，已知 $Z=g(X,Y)$，则 Z 的概率分布为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X,Y) \leq z\} = P\{(X,Y) \mid g(X,Y) \leq z\} = \iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

或使用卷积公式:

公式 （卷积公式）： 若随机变量 X, Z, Y 存在 $Z = X + Y$ 关系，则

X, Y 不独立	X, Y 独立
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x$	$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$

证明： 对于 $Z = X + Y$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

令 $y + x = t$ 将二重积分中对 y 的积分换为对 t 的积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z} f(x, t-x)\,\mathrm{d}t$$

改变积分次序后得

$$\int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t$$

要求 Z 的密度函数，对变上限积分求导可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x$$

若 (X,Y) 独立，又有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

□

4 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

定义 （离散型）： 对于离散型随机变量 X，设 x_i 为其分布律的第 i 个取值，相应概率为 p_i，则其数学期望（均值）为:

$$E(X) = \sum^{i} x_i p_i$$

定义（连续型）： 若连续型随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$ 则它的均值为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

若要求 $Y = g(X)$ 的均值，则

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $Z = g(X, Y)$ 且二维随机变量 (X, Y) 有联合概率密度 $f(x, y)$ 则

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

性质： 有常数 C，随机变量 X 与 Y：
1. $E(C) = C$
2. $E(C + X) = C + E(X)$
3. $E(CX) = CE(X)$
4. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
5. 若 X, Y 独立，则 $E(XY) = E(X)E(Y)$

4.2 方差

定义： 方差为随机变量与其均值的距离的平方的均值即 $D(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$，其用来表示 X 偏离其均值 $E(X)$ 的程度大小。且方差 $D(X) \geq 0$。

公式（方差计算公式）： $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

性质： C 为常数
1. $D(C) = 0$
2. $D(X + C) + D(X)$
3. $D(CX) = C^2 D(X)$
4. $D(X + Y) = D(X) + D(Y) - 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$

4.3 常见形式

定理（0 - 1 分布）： 若随机变量 X 服从 $0 - 1$ 分布，则

$$E(X) = p, D(X) = p(1 - p)$$

定理（二项分布）： 若随机变量 X 服从二项分布即 $X \sim B(n, p)$ 则

$$E(X) = np, D(X) = np(1 - p)$$

证明： 若随机变量 $X \sim B(n,p)$ 则其含义为 n 重伯努利实验中成功的次数即 $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$，其中 X_i 表示第 i 次伯努利实验，每次伯努利实验独立且都有相同的 p，即 $E(X_i) = p$，则

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = np \\ D(X) &= D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = np(1-p) \end{aligned}$$

□

定理（泊松分布）： 若随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布即 $X \sim P(\lambda)$ 则

$$E(X) = D(X) = \lambda$$

定理（均匀分布）： 若 $X \sim U(a,b)$ 则

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

定理（指数分布）： 若 $X \sim e(\lambda)$ 则

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

定理（正态分布）： 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$$

4.4 协方差

定义（协方差）： 有二维随机变量 (X,Y)，称 $E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ 为随机变量 (X,Y) 的协方差，通常计作 $\operatorname{cov}(X,Y)$ 即

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

特别的，相同变量的协方差为其方差 $\operatorname{cov}(X,X) = D(X)$。

已知方差的性质 3：$D(X+Y) = D(X) + D(Y) - 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$，我们将协方差的计算公式带入可得到 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) - 2\operatorname{cov}(X,Y)$。

协方差有以下性质

性质:

1. $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$

2. $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\ \operatorname{cov}(X, Y)$
   a, b 为常数

3. $\operatorname{cov}(X + Y, Z) = \operatorname{cov}(X, Z) + \operatorname{cov}(Y, Z)$

4. 若 X, Y 相互独立，则
   $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$

定义 （相关系数）： 有随机变量 X, Y，则其相关系数为:

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

相关系数有以下性质

性质:

1. $-1 \le \rho_{XY} \le 1$
2. 相关性
   1. 若相关系数 $\rho_{XY} = 0$ 则称 X, Y 不相关
   2. 若 $\rho_{XY} = 1$，则称 X, Y 为正相关，$y = ax + b, a > 0$
   3. 若 $\rho_{XY} = -1$，则称 X, Y 为负相关，$y = ax + b, a < 0$

5 大数定律和中心极限定理

5.1 大数定律

定理 （切比雪夫不等式）： 有随机变量 X 及其均值 $E(X)$ 方差 $D(X)$，存在任意正数 ε 有

$$P\{\mid X - E(X) \mid \ge \varepsilon\} \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

另有

$$P\{\mid X - E(X) \mid < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

定理 （切比雪夫大数定律）： 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是相互独立的随机变量序列，且 $E(X_i), D(X_i)$ 均存在，且 $D(X_i) \le C$，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 则对于任意正数 ε，有

$$\lim_{n \to +\infty} P\left\{\mid \overline{X} - E\left(\overline{X}\right) \mid < \varepsilon\right\} = 1$$

$$\Leftrightarrow \overline{X} \text{ 依概率收敛到 } E\left(\overline{X}\right) \text{ 即: } \overline{X} \xrightarrow{P} E\left(\overline{X}\right)$$

定理（伯努利大数定律）： 设 n_A 为 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，且 $P(A) = p$，则对于任意正数 ε，有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \to +\infty} P\left\{ \mid \frac{n_A}{n} - p \mid < \varepsilon \right\} = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p \end{aligned}$$

定理（辛钦大数定律）： 有随机变量序列 $X_1, X_2, ..., X_n$，随机变量间相互独立且服从同一分布，$E(X_i)$ 存在，则对于任意正数 ε 有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \to +\infty} P\left\{ \mid \overline{X} - E\left(\overline{X}\right) \mid < \varepsilon \right\} = 1 \\ \Leftrightarrow & \overline{X} \xrightarrow{P} E\left(\overline{X}\right) \end{aligned}$$

5.2 中心极限定理

独立随机变量的和的分布当随机变量的个数足够大的时候，近似的服从正态分布。

定理（独立同分布（列维 – 林德伯格）中心极限定理）：
若一随机变量序列 $X_1, X_2, ..., X_n$ 服从同一分布且具有相同的期望 $E(X_i) = \mu$，相同的方差 $D(X_i) = \sigma^2$，将 $\sum_{i=1}^n X_i$ 计作 η_n 则当 n 充分大的时候，有

$$\begin{aligned} \eta_n \text{ 近似服从 } & N(E(\eta_n), D(\eta_n)) \\ & = N\left(n\mu, n\sigma^2\right) \end{aligned}$$

又由正态分布的标准化可得

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ 近似服从 } N(0,1)$$

定理（棣莫弗一拉普拉斯（De Moivre - Laplace）定理）： 若随机变量 $X_n, n = 1, 2, ...$ 服从参数为 n, p 的二项分布，也即随机变量 X 可以分为 n 的相互独立的随机变量 X_i 服从 $0 - 1$ 分布，对于任意的 x 有

$$\lim_{n \to +\infty} P\left\{ \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t = \Phi(x).$$

也即：当 n 充分大时，$\sum_{i=1}^n X_i$ 近似服从参数为 np 与 $np(1-p)$ 的正态分布，进而 $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从标准正态分布。

6 样本与抽样分布

6.1 基本概念

定义（样本）： 设随机变量 X 服从分布 F，若随机变量序列 $X_1, X_2, ..., X_n$ 具有同一分布 F 且相互独立，则称这一随机变量序列为从总体 F 或总体 X 得到的容量为 n 的样本，$x_1, x_2, ..., x_n$ 为 X 的 n 个独立观测值。

反之，若一随机变量序列是总体 F 的一个样本，则序列中的随机变量同分布为 F，且相互独立。

定义（经验分布函数）： 有 样本 $x_1, x_2, ..., x_n$，用$S(x)$，$-\infty < z < \infty$ 表示 $x_1, x_2, ..., x_n$ 中不大于 x 的随机变量的个数，定义经验分布函数 $F(z)$ 为

$$F_{n(x)} = \frac{1}{n}S(x), \quad -\infty < x < \infty$$

6.1.1 统计量

定义（统计量与统计量的观测值）： 若有一随机变量序列 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是总体 F 的一个容量为 n 的样本，则称不含有位置参数的函数函数 $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ 为统计量。

由定义可知，$g(X_1, X_2, ..., X_n)$ 也是一个随机变量，若有 $x_1, x_2, ..., x_n$ 是样本的观测值，则 $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ 是随机变量 $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的观测值。

有总体 $X, E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$，下方为常见的统计量:

定义（样本平均值）： $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

根据定义可得 $E\left(\overline{X}\right) = \mu, D\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$

定义（样本方差）： $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$

根据定义可得，$E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

定义（样本标准差）： $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$

定义（样本 k 阶原点矩）： $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, ...$

定义（样本 k 阶中心矩）： $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k, \quad k = 2, 3, ...$

6.2 抽样分布

抽样分布即为统计量为 $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的分布，在做题时题目一般会给出提示数据，可以查表求解。

6.2.1 χ^2 分布，t 分布和 F 分布

定义（ χ^2 分布）： 设样本 $X_1, X_2, ..., X_n$ 相互独立，且均服从 $N(0,1)$ 分布，则有 $X = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，即 $X \sim \chi^2(n)$。

χ^2 分布有如下几条性质:

性质:

1. 可加性

若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ 则 $X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

2. 均值与方差

若 $X \sim \chi^2(n)$，则 $E(X) = n, D(X) = 2n.$

3. 上 α 分位点

在 χ^2 分布的密度图形中，当 $x = x_\alpha$ 时，$x > x_\alpha$ 的面积为 α，称此点为上 α 分位点。此时有 $P\{X > x_\alpha\} = \alpha$.

定义（t 分布）： 若有 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ 且相互独立，则

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = t \sim t(n)$$

定义（F 分布）： 若有 $X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2)$ 且相互独立，则

$$\frac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}} = F \sim F(n_1, n_2)$$

与 χ^2 分布类似的，t 分布及 F 分布都具有上 α 分位点。

定义（正态总体的样本均值与样本方差的分布）： 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, ..., X_n$ 为总体的一个样本，则

1. $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$　　2. $\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$　　3. $\overline{X}$ 与 S^2 独立

定理四 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且这两个样本相互独立①. 设 $\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}Y_i$ 分别是这两个样本的样本均值；$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$ 分别是这两个样本的样本方差，则有

1° $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$；

2° 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},\quad S_w=\sqrt{S_w^2}.$$

7 参数估计

7.1 点估计

定义： 已知总体 X 的分布，含有未知参数 θ，用样本做参数来构造统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,...,X_n)$ 来估计 θ。

由一阶矩估计（点估计）推广到 k 阶矩估计，由大数定理可得，当数量足够大时，样本矩趋近于总体矩，根据矩估计中用样本矩代替总体矩的思想，由总体的分布可以得到总体矩，接着用样本矩代替总体矩，也即构造未知参数 θ 与样本矩的等价关系。最后解得 $\hat{\theta}$ 即为矩估计量。

7.1.1 最大似然估计

基本思想是使得样本发生的概率最大的 $\hat{\theta}$ 即为最大似然估计。

在最大似然估计中，用似然函数去刻画样本出现的概率大小，对于离散型随机变量，其最大似然函数即为样本间质量函数的积 Π^1 基本思想是使得样本发生的概率最大的 $\hat{\theta}$ 即为最大似然估计。

在最大似然估计中，用似然函数去刻画样本出现的概率大小，其形式如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}(\theta)=&\prod_{i=0}^{n}P\{X=X_i\}\quad\text{（离散型随机变量）}\\&\prod_{i=0}^{n}f(x_i)\qquad\quad\ \text{（连续型随机变量）}\end{aligned}$$

在求解最大似然估计时，一般通过求导求其导数的驻点来得到 $\hat{\theta}$，对于连乘函数形式的似然函数而言，可以先等式两边同时取 **对数** 使连乘变为连加，再求导求驻点即 $\frac{\mathrm{d}\ln\mathrm{Li}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\triangleq 0$。

7.2 评选标准

1. 无偏性，若 $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$ 则称 $\hat{\theta}$ 为无偏估计，若 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$ 则称为渐进无偏估计。
2. 有效性，若对于未知参数 θ 有两个估计量 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$，两者当中方差较小的估计量更有效。
3. 一致性，若 n 趋于无穷时，估计量以概率趋紧于未知参数，则称估计量与为质量一致，一般的，若估计量的均值等于未知参数及具有无偏性，估计量的方差趋近于零，即具有有效性，则满足估计量与未知参数具有一致性。

7.3 区间估计

定义（置信区间）： 对于总体的一个未知参数 θ，存在一个 α，使得 $P\left\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\right\}=1-\alpha$，则称 $\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$ 为置信区间。

在求解置信区间时，通常先构造一个确定分布的含有参数 θ 的样本统计量 J，根据其分布求出 $P\{a<J<b\}=1-\alpha$，的左右端点 a,b，进而解出 θ 的置信区间。

8 附录 1：常见的分布类型的期望与方差及证明

3. 泊松分布

若 $X\sim P(\lambda)$，即 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,\cdots\cdots$，则 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$

解释、① $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\,P\{X=k\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\cdot\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\cdot\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda\cdot\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\overset{令n=k-1}{=\!=}\lambda \cancel{e^{-\lambda}}\cdot\underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^n}{n!}}_{=\cancel{e^{\lambda}}}=\lambda$

② $E(X^2)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2\,P\{X=k\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2\cdot\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[(k^2-k)+k\right]\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(k-1)\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=E(X)=\lambda$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}+\lambda=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot\lambda^{k-2} e^{-\lambda}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2\cdot\cancel{e^{-\lambda}}\cdot\cancel{e^{\lambda}}+\lambda=\lambda^2+\lambda$

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$，则 $E(X)=\frac{a+b}{2}$ =中点，$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$

解释：① $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}$

② $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $\quad \frac{x^3}{3}\Big|_a^b$

$=\frac{b^3-a^3}{3}\cdot\frac{1}{b-a}-\frac{(a+b)^2}{4}$

$=\frac{(b-a)^2}{12}$ ✓

5 指数分布

设 $X\sim e(\lambda)$，则 $E(X)=\frac{1}{\lambda}$，$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

解释：① $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx$ $\underline{\underline{分部法}}$ $\frac{1}{\lambda}$

② $E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx=-\int_0^{+\infty} \underset{u}{x^2}\,d\,\underset{v}{e^{-\lambda x}}$

$=-\left[x^2\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx^2\right]$

$=2\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-\lambda x}\,dx$

$=2\frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{\frac{1}{\lambda}}=\frac{2}{\lambda^2}$

$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$

6. 正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$　　$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$

解释：① $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal[x=\sigma t+\mu]{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t} \int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\cdot dt$

$=\mu\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{1}+\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma t\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{0}=\mu+0=\mu$

② $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t} \int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu^2+\underbrace{2\mu\sigma t}_{奇}+\sigma^2t^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$　0

$=\mu^2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{1}+\sigma^2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{分部法=1}=\mu^2+\sigma^2$

故 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\mu^2+\sigma^2-\mu^2=\sigma^2$