题号	一	二	三						总分
	1-7	8-14	15	16	17	18	19	20	
得分									
评阅人									

《概率论与数理统计》

注：1. 本试卷共 3 个大题，20 个小题，满分 100 分；

2. 本试卷参考数据：$\Phi(0.8)=0.7881$； $\Phi(0.2)=0.9772$；

$z_{0.025}=1.96$； $t_{0.025}(9)=2.2622$； $t_{0.025}(8)=2.3060$；

$\chi^2_{0.025}(24)=39.36$； $\chi^2_{0.025}(25)=40.65$； $\chi^2_{0.05}(24)=36.42$； $\chi^2_{0.05}(25)=37.65$.

得 分	

一、单项选择题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

1．对于任意两事件 A 和 B，若 $P(AB)=0$，则必有————————（ B ）.

(A) $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$　　(B) $P(A-B)=P(A)$

(C) $P(A)P(B)=0$　　(D) $\overline{A}\,\overline{B}\neq\varnothing$

2．设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为——————————————————————（ A ）.

(A) $F^2(x)$　　(B) $F(x)F(y)$

(C) $1-[1-F(x)]^2$　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

3. 对任意两个随机变量 X 和 Y，以下选项正确的是———————（ B ）.

(A) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$　　(B) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

(C) $E(XY)=E(X)E(Y)$　　(D) $D(XY)=D(X)D(Y)$

4. 设随机变量 $X_i\,(i=1,2\cdots)$ 相互独立，具有同一分布，$E(X_i)=0$，$D(X_i)=\sigma^2$，$k=1$，2，…，则当 n 很大时，$\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的近似分布是————————（ A ）.

(A) $N(0,n\sigma^2)$　　(B) $N(0,\sigma^2)$

(C) $N(0,\frac{\sigma^2}{n})$　　(D) $N(0,\frac{\sigma^2}{n^2})$

5. 设总体 $X\sim P(\lambda)$，X_1，X_2，…，X_n 是 X 的一个样本，$\overline{X},S^2$ 分别是样本均值及样本方差，则 $\boldsymbol{E(\overline{X})}$ 和 $\boldsymbol{E(S^2)}$ 分别为: ——————————（ B ）.

(A) $\lambda, n\lambda$　　(B) λ, λ

(C) $\lambda, \lambda/n$　　(D) $n\lambda, \lambda$

6. 设 X_1,X_2 是取自总体 $N(\mu$，1)的一个样本，$\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2$，$\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$，$\frac{1}{2}(X_1+X_2)$.均为$\mu$的无偏估计量，其中最有效的一个是———————（ C ）.

(A) $\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2$　　(B) $\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$

(C) $\frac{1}{2}(X_1+X_2)$.　　(D) 无法确定

7. 在显著性水平α下的检验结果犯第一类错误的概率—————（ D ）.

(A) $\geq\alpha$　　(B) 1-α　　(C) $>\alpha$　　(D) $\leq\alpha$

得 分	

二、填空题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

8．A，B，C 是三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AC)=1/8$，$P(AB)=P(BC)=0$，则 A，B，C 中至少有一个发生的概率为___5/8______.

9. 设 $X\sim N(1,2),Y\sim N(-2,3)$，且 X 与 Y 独立，则 $X-2Y\sim$ __N(5，14)___.

10. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}kx^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 k = _3__.

11. 设随机变量 X 的期望 $E(X)$为一非负值，且 $E(\frac{X^2}{2}-1)=2, D(\frac{X}{2}-1)=\frac{1}{2}$，则 $E(X)=$ __2______.

12. 设随机变量 X 的数学期望为 $E(X)=\mu$，方差为 $D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X-\mu|\ge 3\sigma\}\le$ ____1/9_____.

13. 设 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$、S^2 分别为样本均值和样本方差，则 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 服从的分布是 __ t(n-1)___.

14. 设总体 X 的分布律为

X	-1	0	1
p_i	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中θ为未知参数，现有一个样本观测值 $x_1=1,x_2=2,x_3=1$，则θ 的矩估计值为___-1/6______.

三、解答题（6 小题，共 58 分）

得　分	

15.（**本题 10 分**）用 A_1，A_2，A_3 三个机床加工同一种零件，出厂时产品混在一起，已知零件由各机床加工的概率分别为 0.5, 0.3, 0.2, 各机床加工的零件为合格品的概率分别等于 0.94, 0.9, 0.95.

(1) 任取一个零件，问它是合格品的概率多大？

(2) 如果任取一个零件是合格品，那么它是由 A_1 机床生产的概率多大？

解：设 B =“任取一个零件”，根据题意有

$P(A_1)=0.5, P(A_2)=0.3, P(A_4)=0.2,$

$P(B|A_1)=0.94, P(B|A_2)=0.9, P(B|A_3)=0.95,$

(1) 由全概率公式，

$P(B)=\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B|A_k)=0.5\times0.94+0.3\times0.9+0.2\times0.95=0.93$ --------6 分

(2) 由 Bayes 公式，得

$P(A_1|B)=\dfrac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.94\times0.5}{0.93}=\dfrac{0.47}{0.93}=\dfrac{47}{93}=0.5054$ ----------------10 分

得　分	

16.（**本题 10 分**）设随机变量 X 在(2，5)上服从均匀分布，现对 X 进行三次独立观测，试求:

(1) 事件“对 X 的观测值大于 3”的概率;

(2) 至少有两次观测值大于 3 的概率.

解: 因为随机变量 X 在(2，5)上服从均匀分布，所以 X 的概率密度为

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2<x<5,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ --3 分

(1) 事件“对 X 的观测值大于 3”的概率为

$P\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}$. --5 分

(2) 设 Y 表示三次独立观测中观测值大于 3 的次数，则 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，---7 分

于是，至少有两次观测值大于 3 的概率为:

$P\{Y\ge2\}=C_3^2(\frac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{3}+C_3^3(\frac{2}{3})^3=\frac{20}{27}$. ---10 分

得　分	

17.（**本题 10 分**）设随机变量 X 和 Y 的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	a	b

若 X 与 Y 相互独立，求参数 a，b 的值．

解：

X \ Y	1	2	3	$P\{X=x_i\}$
1	1/6	1/9	1/18	1/3
2	1/3	a	b	$1/3+a+b$
$P\{Y=y_j\}$	1/2	$1/9+a$	$1/18+b$	$2/3+a+b=1$

--4 分

因为 X 与 Y 相互独立，所以有 $1/9=1/3\,(1/9+a)$，$a=2/9$.

又 $2/3+a+b=1$，所以 $b=1/9$. --10 分

得　分	

18.（**本题 10 分**）据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布．现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的．求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率．(提示：考虑使用独立同分布的中心极限定理)

解：设 i 个元件寿命为 X_i 小时，$i=1,2,\ldots\ldots,16$，则 X_1，X_2，...，X_{16} 独立同分布，且 $E(X_i)=100$，$D(X_i)=10000$，$i=1,2,\ldots\ldots,16$.

所以 $$E(\sum_{i=1}^{16}X_i)=1600,\ D(\sum_{i=1}^{16}X_i)=1.6\times10^4,$$

由中心极限定理：$\sum_{i=1}^{16}X_i$ 近似服从 $N(1600,1.6\times10000)$,----------------5 分

$$P\left\{\sum_{i=1}^{16}X_i>1920\right\}=1-P\left\{\sum_{i=1}^{16}X_i\le1920\right\}=1-P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{16}X_i-1600}{\sqrt{1.6\times10000}}\le\frac{1920-1600}{\sqrt{160000}}\right\}$$

$=1-\Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119$---10 分

得　分	

19.（**本题 10 分**）为研究某种植物的高度，随机选取 9 颗这种植物进行测量，其高度（分米）分别为 6.0，5.7，5.8，6.5，7.0，6.3，5.6，6.1，5.0，设该植物高度总体服从 $N(\mu,\ \sigma^2)$，且方差 $\sigma^2=0.36$ 已知；求 μ 的置信水平为 95%的置信区间．

解：由于 $\sigma=0.6$，求 μ 的置信区间由公式 $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$ 计算，

--------------------------5 分

其中 $n=9$，$\alpha=0.05$，$\sigma=0.6$，$z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，$\bar{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=6$，

代入计算得 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为（5.608，6.392）. -----10 分

得　分	

20.（**本题 8 分**）某自动车床生产的产品尺寸服从正态分布，按规定产品尺寸的方差 σ^2 不得超过 0.1，为检验该自动车床的工作精度，随机的取 25 件产品，测得样本方差 $s^2=0.1975$，$\bar{x}=3.86$．问该车床生产的产品是否达到所要求的精度（显著性水平 $\alpha=0.05$）？

解：设自动车床生产的产品尺寸 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

按题意需检验　H_0：$\sigma^2\le0.1$　　H_1：$\sigma^2>0.1$-------------------2 分

取统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，H_0 的拒绝域为：

$\left\{\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n-1)\right\}=\left\{\chi^2\ge\chi^2_{0.05}(25-1)\right\}=\left\{\chi^2\ge\chi^2_{0.05}(24)\right\}=\left\{\chi^2\ge36.42\right\}$----4 分

由观测数据 n=25， $s^2=0.1975$， $\bar{x}=3.86$， $\sigma_0^2=0.1$，计算可得

$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{(25-1)\times s^2}{0.1}=47.4$ >36.415 落入 H_0 的拒绝域中，--------7 分

故在 0.05 的显著水平下应拒绝 H_0 ，认为床生产的产品没有达到所要求.--------- --------8 分