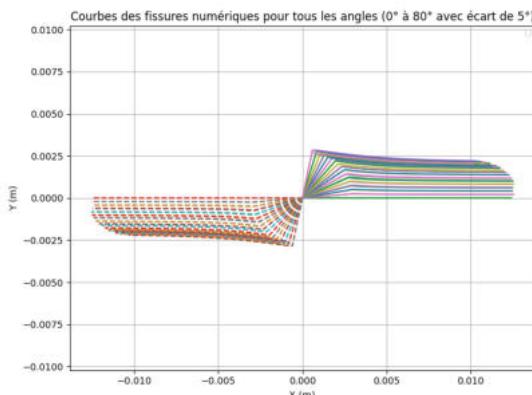


Projet de Recherche (PRe)

Spécialité : MECANIQUE

Année scolaire : 2024/2025

Analyse de la propagation de fissures en mode mixte I+II sur des éprouvettes CCT



Mention de confidentialité :

Non confidentiel

Auteur : Yann Migouel Vivien EPONGUE **Promotion :** 2026

Tuteur ENSTA : Corinne ROUBY

Tuteur organisme d'accueil : Flavien LOISEAU

Stage effectué du 26/05/2025 au 22/08/2025

Organisme d'accueil :

Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles (IMSIA)

Adresse : 828 boulevard des maréchauds 91120 Palaiseau

Résumé

Ce projet de recherche porte sur l'analyse de la propagation de fissures en mode mixte I+II dans des éprouvettes Compact Tension (CCT) en PMMA, un matériau fragile, dans le cadre de la mécanique de la rupture élastique linéaire (LEFM). Inspirée des travaux pionniers d'Erdogan et Sih (1963), l'étude vise à revisiter leurs résultats en utilisant des outils modernes : post-traitement d'expériences existantes pour extraire et réorienter les trajectoires de fissures, simulations numériques par éléments finis avec un code dédié (gcrack) basé sur le critère de maximisation du taux de restitution d'énergie (MERR), et comparaison des trajectoires expérimentales et numériques.

Une attention particulière est accordée à l'effet du T-stress (terme non singulier des contraintes) sur la stabilité et la direction de propagation, en explorant des variations du paramètre s et en modifiant la géométrie de l'éprouvette (angle initial α et courbure latérale ΔW). Des formules analytiques pour K_{II} et T sont dérivées via régression polynomiale avec régularisation LASSO sur plus de 200 simulations, permettant de prédire ces paramètres en fonction de la paramétrisation.

Les résultats montrent un bon accord entre expériences et simulations pour de faibles à moyennes mixités, avec un rôle croissant du T-stress pour de fortes inclinaisons, bien que des écarts persistent en raison de la plasticité locale ou des imperfections expérimentales. Cette étude ouvre des perspectives pour le design d'éprouvettes optimisées en mécanique de la rupture.

Mots-clés : propagation de fissures, mode mixte I+II, T-stress, PMMA, simulations numériques, régression polynomiale.

Abstract

This research project focuses on the analysis of crack propagation in mixed mode I+II in Compact Tension (CCT) specimens made of PMMA, a brittle material, within the framework of linear elastic fracture mechanics (LEFM). Inspired by the pioneering work of Erdogan and Sih (1963), the study aims to revisit their results using modern tools : post-processing of existing experiments to extract and reorient crack trajectories, finite element numerical simulations with a dedicated code (gcrack) based on the maximum energy release rate (MERR) criterion, and comparison of experimental and numerical trajectories. Particular attention is paid to the effect of the T-stress (non-singular stress term) on the stability and direction of propagation, by exploring variations in the parameter s and modifying the specimen geometry (initial angle α and lateral curvature ΔW). Analytical formulas for K_{II} and T are derived via polynomial regression with LASSO regularization on over 200 simulations, enabling prediction of these parameters based on the parametrization. The results show good agreement between experiments and simulations for low to medium mixities, with an increasing role of the T-stress for high inclinations, although discrepancies persist due to local plasticity or experimental imperfections. This study opens perspectives for the design of optimized specimens in fracture mechanics.

Keywords : crack propagation, mixed mode I+II, T-stress, PMMA, numerical simulations, polynomial regression.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à **M. Flavien Loiseau** pour son accompagnement, ses conseils précieux et éclairés et sa disponibilité tout au long de ce travail, ainsi qu'à **Mme Véronique Lazarus**, que je remercie particulièrement de m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce stage. Je remercie également **Mme Corine Rouby** d'avoir veillé au bon déroulement de ce stage.

Je remercie le **Directeur du laboratoire IMSIA** pour m'avoir accueilli dans ses locaux et permis de travailler dans un environnement stimulant et professionnel. Je remercie également **tous les membres du laboratoire IMSIA** pour leur convivialité, le partage d'expérience et les moments agréables passés ensemble.

Enfin, je souhaite adresser une pensée particulière à ma famille et à mes proches pour leur patience, leur soutien moral et leur confiance, qui m'ont permis d'aboutir sereinement à ce travail.

Table des matières

1	Introduction	8
2	Cadre de l'étude : Mécanique de la Rupture Élastique Linéaire (<i>LEFM</i> en anglais)	9
2.1	Modélisation du problème de rupture	9
2.2	Définition des facteurs d'intensité de contrainte et du T-stress	10
2.2.1	Facteurs d'intensité de contrainte (FIC)	10
2.2.2	Définition du T-stress	11
2.3	Définition du taux de restitution d'énergie	11
I	Étude sur CCT classique en matériaux PMMA	13
3	Post-traitement des expériences existantes	14
3.1	Présentation des données expérimentales existantes	14
3.1.1	Brève description de l'éprouvette	14
3.1.2	Brève description du mode opératoire expérimental	15
3.2	Post-traitement des données expérimentales pour une analyse plus approfondie des trajectoires de fissure	17
3.2.1	Présentation de l'état des données	17
3.2.2	Réorientation et remise à l'échelle réelle des données expérimentales	17
4	Analyse et comparaisons de trajectoires de fissure expérimentales aux simulations numériques	20
4.1	Présentation du code de prédiction de la propagation de fissures	20
4.2	Validation des simulations numériques	21
4.2.1	Étude de convergence	21
4.2.2	Comparaison des facteurs d'intensités des contraintes avant propagation de la fissure	22
4.3	Comparaison des trajectoires et effet du T-stress	22
4.3.1	Comparaison simulations / expériences	22

4.3.2	Influence du paramètre s	25
4.4	Synthèse de la première partie	26
II	Modification de l'éprouvette CCT pour faire varier le T-stress	27
5	Paramétrisation de la géométrie de l'éprouvette et adimensionnement du problème	28
5.1	Paramétrisation	28
5.2	Adimensionnement du problème	29
6	Résultats et discussions	31
6.1	Description des résultats	31
6.2	Discussion	32
7	Détermination de formules analytiques de K_{II} et T pour cette de paramétrisation de l'éprouvette CCT en PMMA	33
7.1	Methode	33
7.1.1	Eléments théoriques	33
7.1.2	En pratique	35
7.2	Résultats	36
7.2.1	Visualisation des données originales	36
7.2.2	Application de la régresssion LASSO aux datasets	37
7.2.3	Entraînement sur des polynômes de degré 10	37
7.2.4	Application de l'outil de régression pour des polynômes de degré 3 et comparaison des modèles aux résultats théoriques de la littérature	40
7.3	Ouverture du sujet : conception ou <i>design</i> d'éprouvette	41
8	Conclusion et perspectives	42
Annexes		43

Table des figures

2.1	<i>Process zone</i> , source : Kammer et al. (2024)	9
2.2	Différents modes de sollicitation d'une fissure, source : Besson et al. (2023)	11
3.1	Éprouvette CCT	14
3.2	Machine à essai “Electromécanique Instron” (2024)	15
3.3	Éprouvette CCT en traction (Janssen et al., 2004)	16
3.4	Exemples d'éprouvettes capturées après essais pour récupération des trajectoires de fissure.	17
3.5	Illustration du post-traitement des données existantes	18
4.1	Incrément de fissure de longueur Δa (délimité par le point rouge et le point noir)	20
4.2	Étude de convergence en fonction de h , avec $h_{\min} = \frac{\Delta a}{32}$	21
4.3	Étude de convergence en fonction de h_{\min} , avec $h = \frac{L}{512}$	21
4.4	Facteur d'intensité de contrainte à la rupture adimensionnés en fonction de l'angle de la fissure initiale	22
4.5	Trajectoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 5^\circ$, $s = 0.5\Delta a$	23
4.6	Trajectoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 45^\circ$, $s = 0.5\Delta a$	23
4.7	Trajectoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 70^\circ$, $s = 0.5\Delta a$	23
4.8	Trajectoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 15^\circ$, $s = 10\Delta a$	24
4.9	Trajectoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 45^\circ$, $s = 10\Delta a$	24
4.10	Trajectoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 70^\circ$, $s = 10\Delta a$	24
4.11	Contrainte à la rupture adimensionnée en mode I	25
5.1	Paramétrisation du spécimen CCT	28
6.1	Distribution de K_{II} et T pour les différentes configurations d'éprouvette	31
7.1	Visualisation des données pour la sortie T	36
7.2	Visualisation des données pour la sortie K_{II}	37
7.3	Choix du meilleur paramètre β pour la régression polynomiale de \hat{T}	38

7.4	Choix du meilleur paramètre β pour la régression polynomiale de \widehat{K}_{II}	38
7.5	Visualisation des données pour la sortie T : superposition du modèle aux données originales	38
7.6	Visualisation des données pour la sortie K_{II} : superposition du modèle aux données originales	38
7.7	Évaluation de la précision de \widehat{T}^m sur les données tests	39
7.8	Évaluation de la performance de \widehat{K}_{II}^m sur les données tests	39
1	Distribution de KII et T pour les différentes configurations d'éprouvette	43
2	KII en fonction des paramètres	43
3	T en fonction des paramètres	44

1. Introduction

Irwin (1957) a montré que les contraintes présentes à proximité d'une fissure pouvaient être caractérisées par un paramètre appelé facteur d'intensité des contraintes (FIC). Il a également établi qu'un chargement appliqué à une fissure pouvait être décomposé en trois modes fondamentaux et indépendants (voir fig 2.2). Le mode I, ou mode d'ouverture, correspond à une traction perpendiculaire au plan de la fissure, ce qui provoque l'écartement de ses lèvres. Le mode II, ou mode de glissement en plan, se traduit par un cisaillement où les deux faces de la fissure se déplacent parallèlement à son plan mais perpendiculairement à son front. Enfin, le mode III, ou mode de déchirure, implique un cisaillement hors plan dans lequel les lèvres de la fissure se déplacent parallèlement à son front. Cette découverte d'Irwin a permis à Erdogan et Sih, en 1963, d'explorer de nouvelles pistes, comme la propagation de fissures en mode mixte I+II sur des éprouvettes CCT en PMMA. À l'issue de leur article (Erdogan & Sih, 1963), ils mettent en évidence l'impact de l'angle initial de la fissure sur la mixité du mode I+II lors de la propagation de la fissure. De plus, ils mettent sur pied un critère de propagation appelé *Maximum Tensile Stress criterion*, qui stipule que la fissure se propage dans la direction où la contrainte d'ouverture en traction est maximale : $\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}(\varphi) = 0$. Le but de ce projet de recherche est de revisiter les résultats obtenus par Erdogan et Sih en utilisant des outils plus modernes. Notre démarche a consisté à reproduire les expériences d'essai de propagation de fissures d'Erdogan et Sih, puis à comparer les résultats obtenus aux simulations numériques par éléments finis qui propagent la fissure sous un critère appelé *Maximum Energy Release Rate (MERR)*.

Dans les lignes qui suivront, nous débuterons par les bases théoriques de la mécanique de la rupture élastique linéaire, couvrant les facteurs d'intensité de contraintes, le T-stress et le taux de restitution d'énergie. Ensuite, nous analyserons les éprouvettes CCT en PMMA via le post-traitement des trajectoires expérimentales existantes et leur comparaison avec des simulations numériques, en étudiant l'impact du T-stress. Puis, nous entamerons une partie plus exploratoire où nous modifierons la géométrie des éprouvettes pour faire varier le T-stress et développer de nouveaux outils d'analyse ou de nouvelles idées.

2. Cadre de l'étude : Mécanique de la Rupture Élastique Linéaire (*LEFM* en anglais)

Le but de cette partie est de présenter tous les outils analytique qui constituent les bases et régissent ce projet de recherche.

La mécanique de la rupture élastique linéaire (MREL) est applicable lorsque la zone plastique à la pointe de la fissure est petite par rapport à la longueur de la fissure (Irwin, 1957). L'état de contrainte à la pointe résulte des forces élastiques à l'intérieur du matériau. Les matériaux par excellence vérifiant cette hypothèse sont, entre autres, les **matériaux fragiles**. Le PMMA, qui est le matériau au cœur de notre étude, est un matériau fragile, donc la MREL est applicable. La figure 2.1 illustre bien la zone plastique en pointe de fissure, appelée aussi *process zone*.

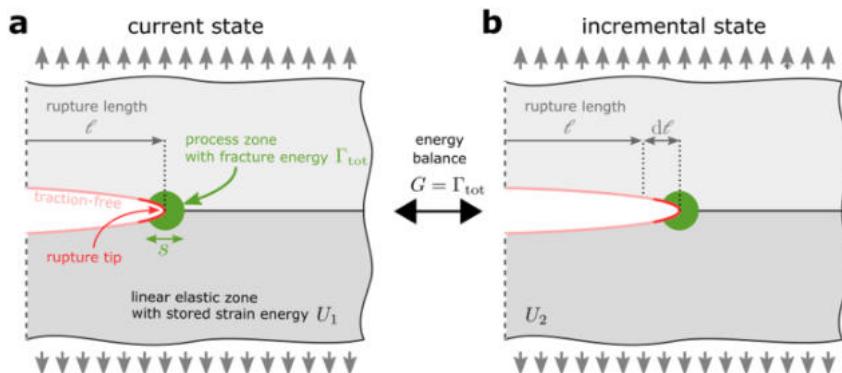


FIGURE 2.1 – *Process zone*, source : Kammer et al. (2024)

Le contenu de cette partie est fortement inspiré du travail de Véronique Lazarus dans le chapitre V du livre MEALOR II (Besson et al., 2023).

2.1 Modélisation du problème de rupture

Notons Ω le corps élastique linéaire isotrope que nous étudions. On note $\partial\Omega$ le bord de Ω . Définissons $\partial\Omega$ comme partitionné en trois parties : $\partial\Omega = \partial\Omega_f \cup \partial\Omega_d \cup \partial\Omega_l$. $\partial\Omega_f$ est la partie sur laquelle s'appliquent les forces de surface extérieures \vec{T}^d , $\partial\Omega_d$ est la partie où des déplacements \vec{u}^d sont imposés, et la partie $\partial\Omega_l$ est libre de contrainte.

Le domaine Ω contient une fissure L , représentant une surface de discontinuité du champ

de déplacement. Autrement dit, L est formée de deux faces, appelées lèvres de fissure, qui coïncident géométriquement dans la configuration initiale non chargée (voir la figure qui représente le spécimen avec un chargement quelconque), mais qui se séparent dès l'application d'une charge.

Les caractéristiques physiques du corps étudié sont : E et ν désignant le module de Young et le coefficient de Poisson, tandis que λ et μ représentent les coefficients de Lamé.

Les équations qui régissent le problème sont données par :

- Équations volumiques dans Ω :

$$\begin{cases} \vec{\text{Div}}(\boldsymbol{\sigma}) = \vec{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\text{grad}(\vec{u}) + {}^T \text{grad}(\vec{u})) , \end{cases} \quad (2.1)$$

- Conditions aux limites ($\partial\Omega = \partial\Omega_f \cup \partial\Omega_d \cup \partial\Omega_l$) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d & \text{sur } \partial\Omega_f \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \partial\Omega_l \\ \vec{u} = \vec{u}^d & \text{sur } \partial\Omega_d \end{cases} \quad (2.2)$$

2.2 Définition des facteurs d'intensité de contrainte et du T-stress

L'étude de la propagation des fissures en mécanique linéaire de la rupture élastique (LEFM) repose sur la caractérisation du champ de contraintes au voisinage de la pointe de fissure. Comme montré initialement par Williams (**williams_stress_1957**) et formalisé par Irwin (**1957**), ce champ présente une singularité en $1/\sqrt{r}$ et peut être décrit à l'aide des *facteurs d'intensité de contrainte* (FIC), notés K_I , K_{II} et K_{III} .

2.2.1 Facteurs d'intensité de contrainte (FIC)

Les FIC quantifient l'intensité des champs de contrainte singuliers associés aux trois modes fondamentaux de sollicitation d'une fissure :

- K_I : facteur associé au **mode I** (ouverture), dû à une traction perpendiculaire au plan de la fissure ;
- K_{II} : facteur associé au **mode II** (cisialement en plan), dû à un glissement parallèle au plan de la fissure et perpendiculaire à son front ;
- K_{III} : facteur associé au **mode III** (cisialement hors plan), correspondant à une déformation de type torsion.

Le champ de contraintes au voisinage de la fissure peut alors s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) + O(1), \quad (2.3)$$

où $f_{ij}^p(\theta)$ ($p = I, II, III$) sont des fonctions universelles, indépendantes des conditions aux limites, et dépendant uniquement de l'angle polaire θ (bui_fracture_2006).

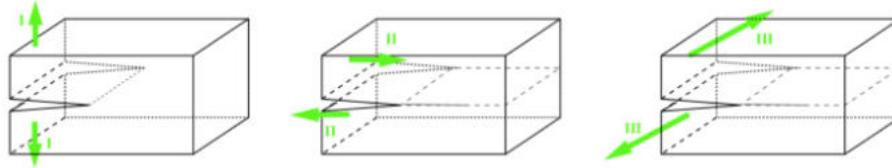


FIGURE 2.2 – Différents modes de sollicitation d'une fissure, source : Besson et al. (2023)

La figure 2.2 illustre les différents modes de sollicitation d'une fissure. Les paramètres K_I , K_{II} et K_{III} jouent un rôle clé, car ils déterminent l'énergie de rupture disponible pour la propagation de la fissure. Cette dernière avance lorsque l'énergie libérée dépasse la ténacité du matériau.

2.2.2 Définition du T-stress

Outre les termes singuliers gouvernés par les FIC, le champ de contraintes comporte également un terme non singulier, d'ordre constant, appelé **T-stress**. Ce dernier correspond à la composante uniforme de contrainte parallèle au plan de la fissure.

En continuant à développer la formule de Williams (eq :2.3, le T-stress s'écrit typiquement en coordonnées cylindriques par :

$$\sigma_{xx}(r, 0) \sim \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + T + O(\sqrt{r}), \quad (2.4)$$

où T désigne le T-stress.

Bien que ce terme ne soit pas singulier, il influence significativement la stabilité et la direction de propagation d'une fissure. En effet, dans leur article *Slightly curved or kinked cracks* (Cotterell & Rice, 1980), les auteurs ont montré que le T-stress joue un rôle déterminant dans la stabilité directionnelle des fissures. Un T-stress positif (traction) favorise une propagation rectiligne de la fissure, tandis qu'un T-stress négatif (compression) peut entraîner une instabilité, conduisant à une déviation ou à un changement de direction (kinking) de la fissure. Cette observation est cruciale, car elle indique que le T-stress affecte non seulement la magnitude des contraintes, mais aussi la trajectoire de la fissure.

2.3 Définition du taux de restitution d'énergie

Pour un corps spécifique, caractérisé par un matériau et une géométrie donnés, l'énergie potentielle, telle que définie dans l'équation 2.5, est fonction uniquement de la longueur de la fissure l et de la charge appliquée (\vec{T}_d, \vec{u}_d). Lorsque la fissure s'allonge sous une charge constante (\vec{T}_d, \vec{u}_d), l'énergie élastique emmagasinée est relâchée par la formation de nouvelles surfaces libres, ce qui conduit à un taux de restitution d'énergie, noté G , défini par :

$$G \equiv - \left. \frac{\partial P}{\partial l} \right|_{\vec{T}_d, \vec{u}_d \text{ constant}} , \quad (2.5)$$

où G est une quantité positive. Le taux de restitution d'énergie, ainsi que les facteurs d'intensité de contrainte (FIC), permettent de quantifier l'état de contrainte à la pointe de la fissure. Ces deux paramètres sont reliés par la relation Irwin (1957) :

$$G = \frac{1}{E'} \left(K_I^2 + K_{II}^2 \right) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2, \quad (2.6)$$

où $E' = E$ en condition de contrainte plane, et $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ en condition de déformation plane.

Première partie

Étude sur CCT classique en matériaux PMMA

3. Post-traitement des expériences existantes

Dans cette partie, la sous-section 3.1 présente les données existantes et mes contributions apparaissent à partir de la sous-section 3.2 avec le post-traitement puis l'analyse et la comparaison des trajectoires numériques et expérimentaux dans la partie 4.

3.1 Présentation des données expérimentales existantes

3.1.1 Brève description de l'éprouvette

L'éprouvette Compact Tension (CCT) est une géométrie normalisée, largement utilisée en mécanique de la rupture pour caractériser les propriétés de résistance à la propagation de fissures d'un matériau. Elle est conçue pour que la fissure soit sollicitée en mode I quand l'angle alpha est nul, mais peut également être adaptée à des configurations en mode mixte I+II par modification des conditions de chargement. La figure 3.1 illustre bien l'éprouvette CCT qui a fait l'objet de notre étude.

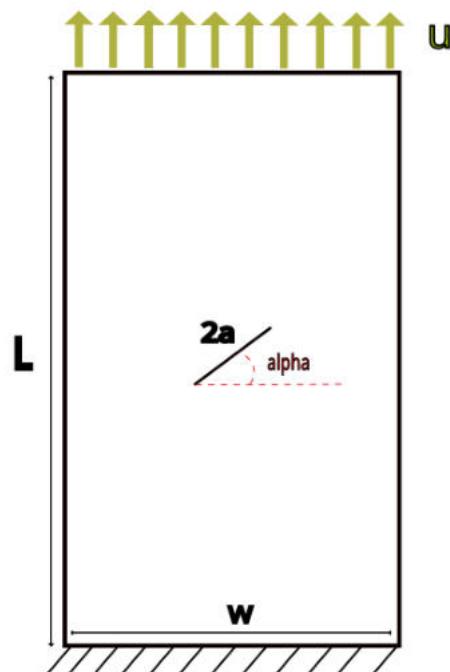


FIGURE 3.1 – Éprouvette CCT

Géométrie : L'éprouvette CCT est constituée d'une plaque rectangulaire d'épaisseur B , dans laquelle est pratiquée une entaille initiale de longueur a_0 , prolongée par une fissure nette (souvent réalisée par pré-fissuration en fatigue).

Les dimensions principales sont :

- Largeur totale : $W = 25 \text{ mm}$
- Longueur : $L = 2 \cdot W$
- Épaisseur : $B = 3 \text{ mm}$ (constante sur toute la section)
- Longueur initiale de fissure : $a_0 \approx 0,12 W$

Sollicitation en mode mixte Pour générer le mode mixte I+II, l'éprouvette reste sollicité en traction pendant que l'angle de la fissure initiale est modifier pour un essai donné. c'est donc cet angle qui caractérise le mode mixte I+II.

3.1.2 Brève description du mode opératoire expérimental

Les expériences effectuées par David Roucou au laboratoire de mécanique de l'ENSTA, site de Paris-Saclay, consistaient en des essais de traction sur des éprouvettes CCT en PMMA pré-fissuré (en fatigue). La figure 3.2 montre un exemple de machine sur laquelle ces essais ont pu être effectués.



FIGURE 3.2 – Machine à essai “Electromécanique | Instron” (2024)

Le but de ces essais était d'observer l'impact de l'angle de la fissure (qui symbolise ici la mixité des modes I+II) sur la propagation de la fissure. Toutes les données de ces essais ont été soigneusement conservées dans des fichiers .csv. Le procédé opératoire d'obtention des données expérimentales est décrit par les deux étapes suivantes :

Étape 1 : Propagation de la fissure et détermination des FIC par corrélation d'images numériques

Tout d'abord, l'éprouvette pré-fissurée est placée sur la machine d'essai comme le montre la figure 3.3. Les mors qui jouent ici le rôle de chargement empêchent également l'effet de Poisson durant la traction de l'éprouvette.

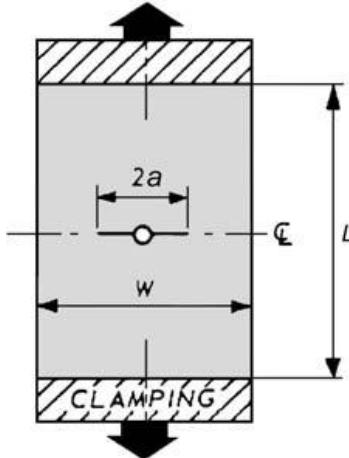


FIGURE 3.3 – Éprouvette CCT en traction (Janssen et al., 2004)

Pendant la propagation de la fissure sur l'éprouvette, une caméra a été montée pour suivre, via la prise de plusieurs photographies, l'évolution de l'entaille sur l'éprouvette préalablement préparée. L'ensemble des images, appelées film, sera introduit dans un logiciel qui se chargera de mesurer le champ de déplacement \mathbf{u} au voisinage de la pointe de fissure, cette méthode est appelée corrélation d'image numérique. Le logiciel utilisé par David Roucou pour effectuer cette mesure est Ufreckles, développé par Julien (2018). En quelques mots, le logiciel exploite le champ de déplacement autour de la pointe de fissure, en veillant à exclure les zones trop proches où la plasticité pourrait intervenir. Ce champ \mathbf{u} est ensuite projeté sur une série de fonctions de Williams, dont les coefficients servent à déterminer les valeurs de K_I et K_{II} :

$$u(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_I^m \sqrt{r} \phi_I(\theta) + a_{II}^m \sqrt{r} \phi_{II}(\theta) \quad (3.1)$$

Pour déterminer K_I et K_{II} , le logiciel utilise ensuite les formules suivantes :

$$K_I = 2\mu\sqrt{2\pi}a_I^1 \quad \text{et} \quad K_{II} = 2\mu\sqrt{2\pi}a_{II}^1$$

avec μ le coefficient de Lamé du matériau.

Étape 2 : Numérisation des trajectoires de fissures

Une fois les essais de traction terminés, les éprouvettes complètement fissurées sont prises une fois de plus en photo dans les mêmes conditions à chaque fois, David récupère ainsi numériquement les trajectoires de fissures dans le repère des pixels et qu'il stocke dans des fichiers appelés `funambuleB.mat` et `funambuleH.mat` sous Matlab.



FIGURE 3.4 – Exemples d'éprouvettes capturées après essais pour récupération des trajectoires de fissure.

Les données présentées ci-dessus font partie de celles qui m'ont été transmises au début de mon stage. Les sections qui suivent traiteront donc des nouveautés que j'ai apportées au cours de ce stage.

3.2 Post-traitement des données expérimentales pour une analyse plus approfondie des trajectoires de fissure

3.2.1 Présentation de l'état des données

Le but de cette première partie est de comparer les trajectoires de fissures expérimentales aux trajectoires numériques. Il est impératif que les points des trajectoires expérimentales, extraits des fichiers `funambuleB.mat` et `funambuleH.mat`, soient à l'échelle du mètre et dans la même orientation que les trajectoires numériques issues des simulations. Voici comment les données reçues étaient regroupées :

- Images d'éprouvettes fissurées, comme le montre la figure 3.4.
- Fichiers Funambules (extension `.mat`) : ils contiennent les points en pixels des trajectoires de fissures de chaque éprouvette.
- Fichiers `.csv` et `.xlsx` : contenant les autres données expérimentales telles que l'évolution de la force et le déplacement au cours des essais, les FIC expérimentaux et les dimensions précises des éprouvettes.

3.2.2 Réorientation et remise à l'échelle réelle des données expérimentales

Afin de comparer au mieux les trajectoires expérimentales et numériques, il est important de s'assurer qu'elles sont toutes deux à la même échelle et dans la même orientation.

Voici à quoi ressemble une trajectoire de fissure numérique pour un angle donné :

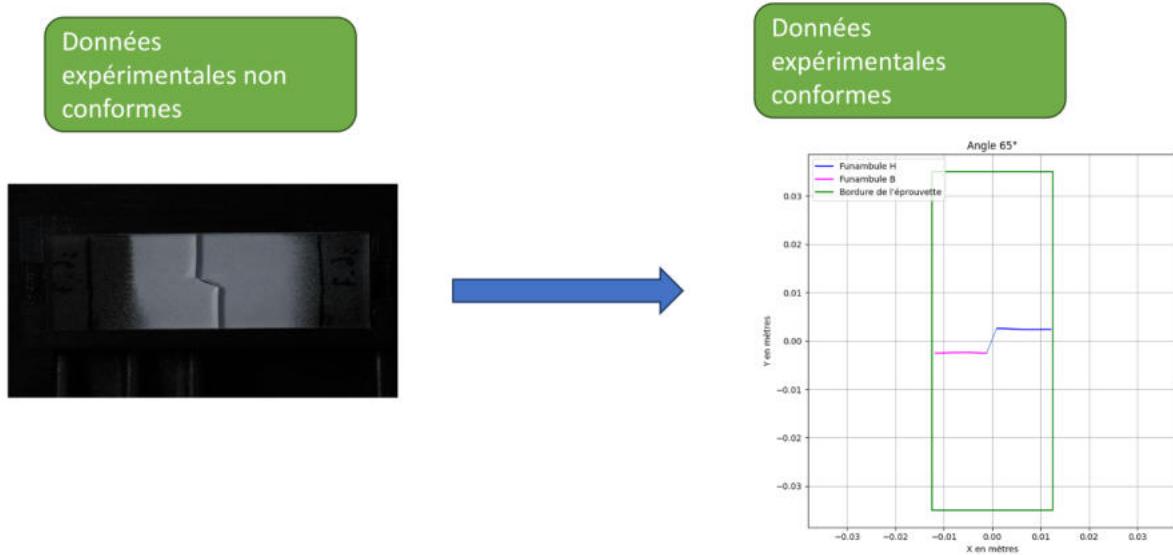


FIGURE 3.5 – Illustration du post-traitement des données existantes

Le but de cette sous-section est de mettre en place la transformation observée sur la figure 3.5. Pour parvenir à cela, j'ai observé les données puis mis en place deux transformations géométriques pour chaque point des fichiers Funambules :

- **Transformation 1** : où \underline{R} est la matrice de rotation d'angle -90 et s le coefficient d'échelle

$$E_p = \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_R = \mathbb{R}^2$$

$$\underline{x_{pixel}} \longmapsto \underline{x_{réel}} = s \cdot \underline{R} \cdot (\underline{x_{pixel}} - \underline{x_{centre}})$$

- **Transformation 2** : où \underline{sym} est obtenu par réflexion d'axe (oy)

$$E_p = \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_R = \mathbb{R}^2$$

$$\underline{x_{pixel}} \longmapsto \underline{x_{réel}} = s \cdot \underline{R} \cdot \underline{sym}(\underline{x_{pixel}} - \underline{x_{centre}})$$

Explications des transformations

- La **Transformation 1** convertit les coordonnées d'un point de fissure de l'image (en pixels) vers le repère réel de l'éprouvette (en mètres) :

$$\underline{x_{réel}} = \frac{W_{réel}}{W_{pixels}} \underline{R} (\underline{x_{pixel}} - \underline{x_{centre}})$$

où :

- $\underline{x_{pixel}}$: coordonnées dans l'image (pixels),
- $\underline{x_{centre}}$: centre du repère dans l'image (pixels),

- $\underline{\underline{R}}$: matrice de rotation de -90° :

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

- $s = \frac{W_{\text{réel}}}{W_{\text{pixels}}}$: facteur de mise à l'échelle (m/pixel).

Cette transformation effectue successivement : **translation** pour centrer, **rotation** pour réorienter, et **mise à l'échelle** pour passer en mètres. Les coordonnées résultantes sont dans le repère réel de l'éprouvette.

- La **Transformation 2** ajoute une **symétrie par rapport à l'axe y** à la transformation 1. Elle convertit les coordonnées d'un point de fissure de l'image (en pixels) vers le repère réel de l'éprouvette (en mètres) :

$$x_{\text{réel}} = s \underline{\underline{R}} \underline{\text{sym}}(x_{\text{pixel}} - \underline{x_{\text{centre}}})$$

où :

- x_{pixel} : coordonnées dans l'image (pixels),
- x_{centre} : centre du repère dans l'image (pixels),
- $\underline{\underline{R}}$: matrice de rotation de -90° :

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

- $\underline{\text{sym}}(\cdot)$: symétrie par rapport à l'axe y ($x \mapsto -x, y \mapsto y$),

- $s = \frac{W_{\text{réel}}}{W_{\text{pixels}}}$: facteur de mise à l'échelle (m/pixel).

Cette transformation effectue successivement : **translation** pour centrer, **symétrie par rapport à l'axe y** , **rotation** pour réorienter, et **mise à l'échelle** pour passer en mètres. Les coordonnées résultantes sont dans le repère réel de l'éprouvette.

4. Analyse et comparaisons de trajectoires de fissure expérimentales aux simulations numériques

4.1 Présentation du code de prédiction de la propagation de fissures

Pour reproduire une propagation de fissure réelle via le numérique, Flavien LOISEAU a développé un code Python que j'appellerai ici le code **gcrack**.

Définissons l'angle de bifurcation de la fissure comme étant l'angle ϕ que fait l'incrément de fissure Δa (suffisamment petit) avec l'horizontale. Comme le montre la figure 4.1.

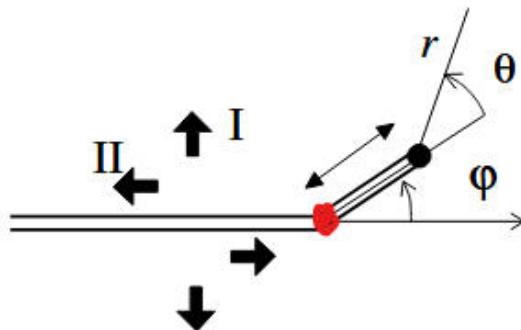


FIGURE 4.1 – Incrément de fissure de longueur Δa (délimité par le point rouge et le point noir)

Le processus numérique pour prédire la direction de propagation de la fissure est succinctement décrit comme suit :

- **Résolution du problème élastique** posé dans le cadre de la MREL : Détermination du champ de déplacement par éléments finis.
- Détermination par éléments finis des FICs (KI, KII) en pointe de fissure initiale via la méthode I-intégrale (**stern_contour_1976**).
- **Propagation de la fissure** :
 - Détermination des facteurs d'intensité de contraintes Pour une fissure avec un incrément Δa et un angle ϕ , notés ici K_p^* , en fonction de ϕ grâce à la formule suivante démontrée par Amestoy et Leblond (1992) :

$$K_i^* = F_{ij}(\phi) K_j + T \sqrt{s} G_i(\phi) + \mathcal{O}(s^{1/2}), \quad i = I, II \quad (4.1)$$

où s est de l'ordre de l'incrément de fissure Δa et T est le T-stress.

- Détermination du taux de restitution d'énergie à l'étape $n + 1$, noté ici G^* , à partir de la formule d'Irwin :

$$G^*(\phi) = \frac{K_I^{*2}(\phi) + K_{II}^{*2}(\phi)}{E'} \quad (\text{déformation plane}) \quad (4.2)$$

avec

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (4.3)$$

- Enfin, la détermination de l'angle de bifurcation via le critère de maximisation du taux de restitution d'énergie.

Le code `gcrack` répètera cet algorithme autant de fois que l'on souhaite propager la fissure.

4.2 Validation des simulations numériques

4.2.1 Étude de convergence

Pour cette étude de convergence, j'ai commencé par comparer les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte théoriques aux valeurs numériques pour différentes précisions des maillages. La longueur h_{\min} correspond à la taille caractéristique d'un élément du maillage au niveau de la pointe de fissure. La longueur h correspond à la taille caractéristique d'un élément du maillage hors de la zone de fissure.

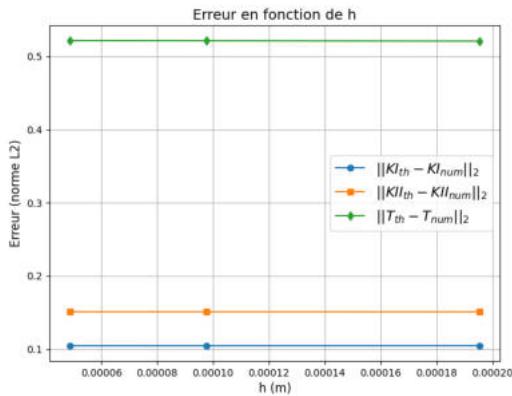


FIGURE 4.2 – Étude de convergence en fonction de h , avec $h_{\min} = \frac{\Delta a}{32}$

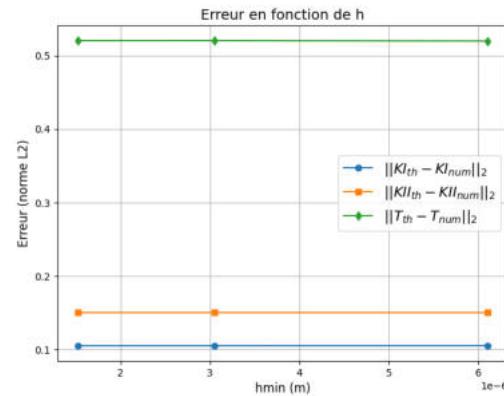


FIGURE 4.3 – Étude de convergence en fonction de h_{\min} , avec $h = \frac{L}{512}$

On observe que, pour les gammes de tailles étudiées, l'erreur reste quasi constante, ce qui indique que le raffinement supplémentaire du maillage n'améliore pas significativement la précision. Cela peut traduire un régime où l'erreur est dominée par d'autres sources (par exemple, la formulation de l'élément fini ou les conditions aux limites) plutôt que par la taille de maille. Par ailleurs, l'erreur est la plus faible pour K_I , légèrement plus élevée pour K_{II} , et significativement plus importante pour le T-stress, ce qui reflète la plus grande sensibilité de ce dernier aux imprécisions dans le champ de contrainte numérique.

4.2.2 Comparaison des facteurs d'intensités des contraintes avant propagation de la fissure

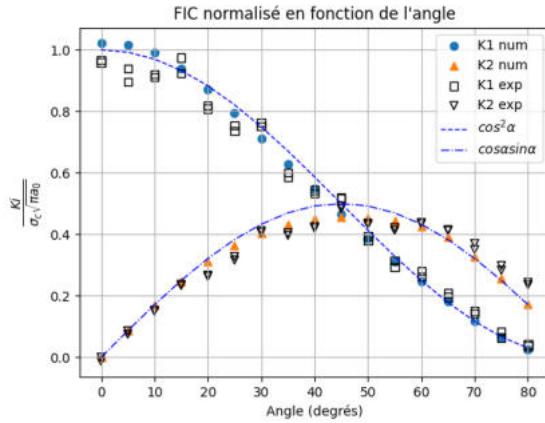


FIGURE 4.4 – Facteur d'intensité de contrainte à la rupture adimensionnés en fonction de l'angle de la fissure initiale

On compare maintenant les résultats numériques aux résultats théoriques de (Erdogan & Sih, 1963) et aux résultats expérimentaux. Pour les résultats théoriques, on considère la longueur de fissure nominale ($a_0 = 3mm$). Pour les résultats numériques, les longueurs de fissure sont celles fissures réelles mesurées pour chaque expérience.

Voilà pourquoi nous observons une très bonne correspondance entre les résultats numériques et expérimentaux. Tandis que les FICs théoriques qui sont calculés avec la longueur de fissure nominale collent un peu moins avec les FICS numériques.

4.3 Comparaison des trajectoires et effet du T-stress

4.3.1 Comparaison simulations / expériences

Résultats :

J'ai effectué des simulations numériques des trajectoires de fissures pour $s = 0$, $s = 0.5\Delta a$ et $s = 10\Delta a$. Cette dernière valeur a été choisie pour amplifier l'effet du T-stress afin qu'il soit clairement visible.

— Comparaison $s = 0$ vs $s = 0.5\Delta a$

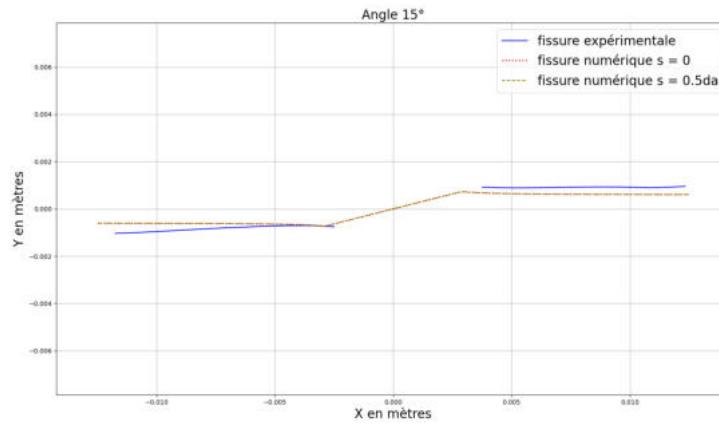


FIGURE 4.5 – Trajectoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 5^\circ$, $s = 0.5\Delta a$

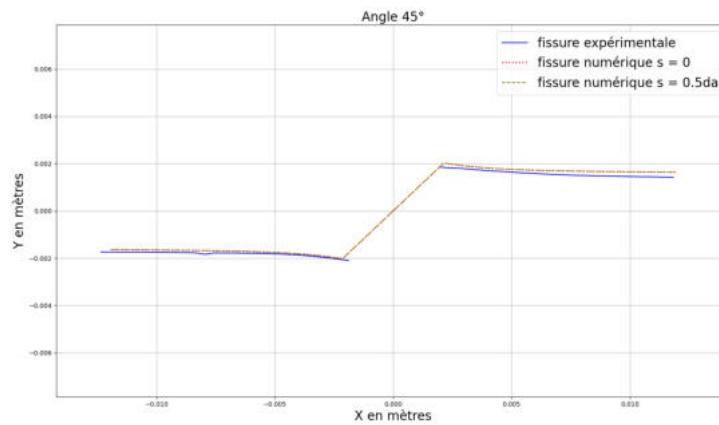


FIGURE 4.6 – Trajettoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 45^\circ$, $s = 0.5\Delta a$

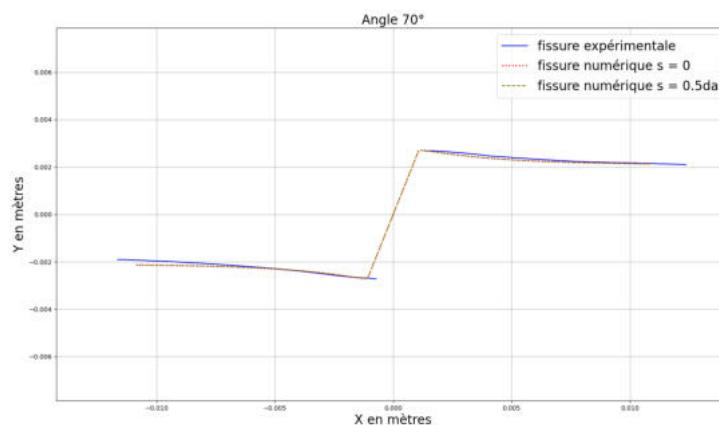


FIGURE 4.7 – Trajettoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 70^\circ$, $s = 0.5\Delta a$

— Comparaison $s = 0$ vs $s = 10\Delta a$

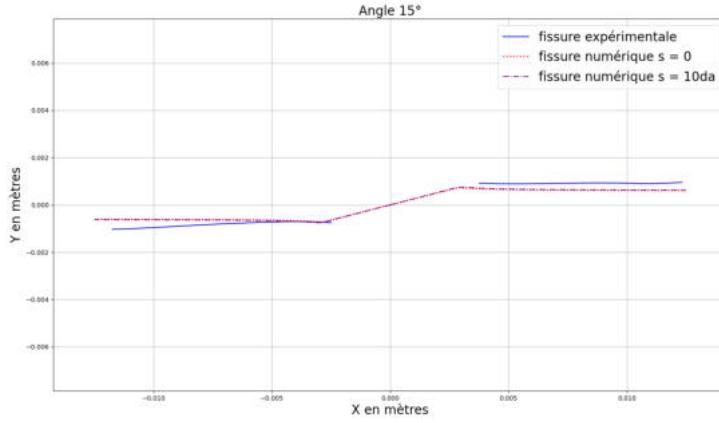


FIGURE 4.8 – Trajectoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 15^\circ$, $s = 10\Delta a$

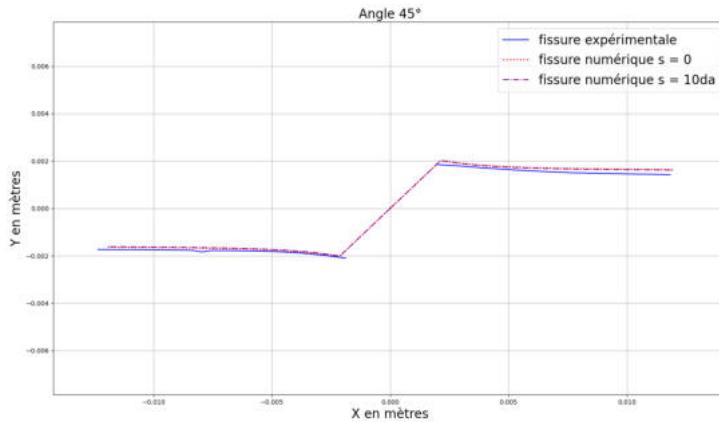


FIGURE 4.9 – Trajettoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 45^\circ$, $s = 10\Delta a$

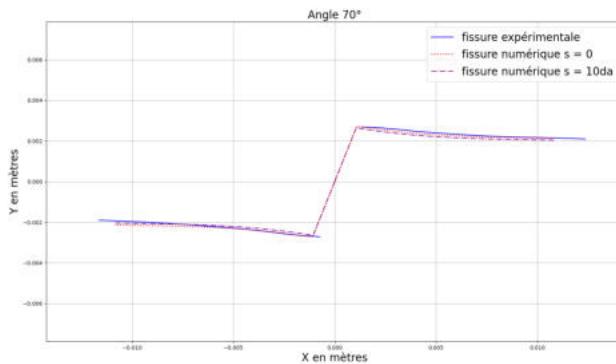


FIGURE 4.10 – Trajettoires de fissure numérique/expérimentale pour $\alpha = 70^\circ$, $s = 10\Delta a$

Discussion :

Les trajectoires obtenues numériquement ont été comparées aux mesures expérimentales pour différentes inclinaisons initiales α de la fissure. Les cas étudiés couvrent un éventail allant de $\alpha = 0^\circ$ (mode I pur) à $\alpha = 80^\circ$ (forte composante en mode II).

- **Faibles inclinaisons ($\alpha \leq 15^\circ$)** : Les trajectoires simulées reproduisent fidèlement la courbure globale observée expérimentalement. Toutefois, un léger décalage initial apparaît sur les 1 à 2 mm de propagation, probablement lié à la différence entre l'état de contrainte idéal du modèle et celui mesuré dans l'éprouvette réelle.
- **Inclinaisons intermédiaires ($30^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$)** : Nous constatons également que les simulations s'accordent très bien avec les trajectoires expérimentales. Sur la figure 4.9, nous voyons que la présence du T-stress n'est toujours pas flagrante au niveau des trajectoires : les courbes avec et sans T-stress se superposent.
- **Forts angles ($\alpha \geq 70^\circ$)** : Nous constatons que la trajectoire simulée sans T-stress colle mieux au chemin de fissure expérimentale, contrairement à celle avec T-stress qui s'en écarte. L'ajout du T-stress dans les calculs conduit à une tendance plus marquée à la déviation initiale vers le bas de la fissure. Ainsi, le T-stress est un facteur influençant la bifurcation dans les configurations fortement chargées en mode II.

4.3.2 Influence du paramètre s

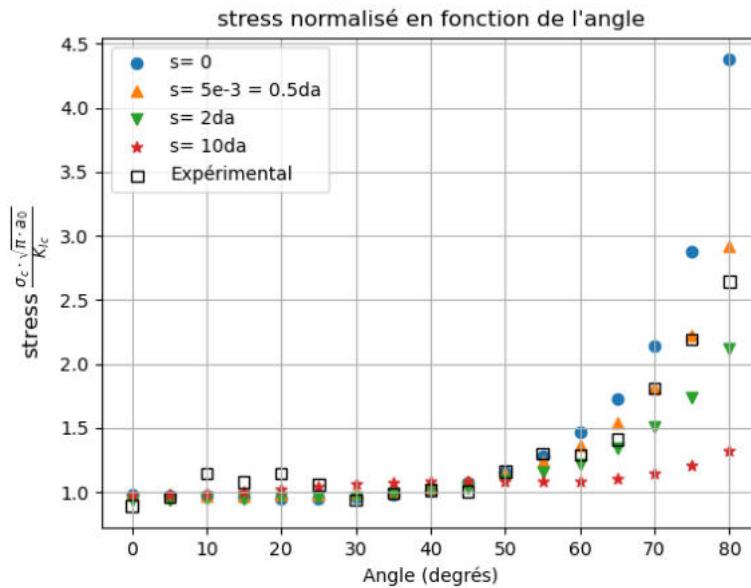


FIGURE 4.11 – Contrainte à la rupture adimensionnée en mode I

La figure 4.11 représente la contrainte à la rupture normalisée pour chaque angle de fissure initial.

Le paramètre s , introduit dans la formulation (équation 4.1) d'Amestoy-Leblond, que nous avons fait varier ici, contrôle en partie l'amplitude du T-stress dans la zone proche de la pointe de fissure.

- Nous remarquons que pour $s = 5 \times 10^{-3} = 0.5\Delta a$, les résultats issus des simulations numériques se rapprochent le plus des résultats expérimentaux.
- À $s \geq 2\Delta a$, les simulations ne reflètent plus l'expérience.
- Globalement, nous remarquons que pour $\alpha \geq 55^\circ$, la contrainte critique en mode

I diminue notablement avec l'augmentation de l'amplitude du T-stress. Physiquement, cela traduirait le fait que le T-stress faciliterait la propagation de la fissure.

Ces tendances laissent supposer que s influe sur la taille et la forme de la *process zone* initiale, c'est-à-dire la zone de non-linéarité localisée à l'avant de la fissure, qui joue un rôle clé dans la bifurcation initiale. Ou encore que s est lié à une sorte de paramètre matériaux

4.4 Synthèse de la première partie

Dans cette partie, j'ai post-traité les résultats expérimentaux pour les rendre conformes afin de les comparer aux simulations numériques que j'ai réalisé à travers le code développé par Flavien Loiseau basé sur la mécanique de la rupture élastique linéaire (MREL).

De ce travail, j'ai pu montrer que les simulations numériques permettent de retrouver les FICs avec une bonne précision. De plus, le MERR permet de prédire des trajectoires de fissures proches des trajectoires expérimentales. Ainsi, avec nos simulations numériques, nous retrouvons bien les résultats observés par Erdogan et Sih : l'impact du mode mixte I+II sur la propagation de la fissure et l'utilisation du MERR pour prédire la trajectoire.

Enfin, pour notre éprouvette CCT en PMMA, l'effet du T-stress ne s'observe que pour les angles $\alpha \geq 70^\circ$ au niveau des trajectoires, c'est ce que nous avons constaté avec les trajectoires (figures 4.5, 4.8, 4.6, 4.9, 4.7 et 4.10). En ce qui concerne la contrainte à la rupture en mode I (figure 4.11), l'impact de l'augmentation de l'amplitude du *T*-stress (contrôlée ici par s) commence à apparaître notablement à partir de 55° . De plus, nous voyons que c'est une valeur bien précise de s qui se rapproche le plus de l'expérience.

Deuxième partie

**Modification de l'éprouvette CCT
pour faire varier le T-stress**

5. Paramétrisation de la géométrie de l'éprouvette et adimensionnement du problème

Nous avons vu précédemment que le T-stress est une composante importante dans l'analyse de la propagation des fissures en mécanique de la rupture, car il est la contrainte agissant parallèlement à la pointe de la fissure dans la direction (ox), en plus du champ de contraintes singulier classique décrit par les facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} , etc. Contrairement à ces derniers, le T-stress n'est pas singulier en $r^{-1/2}$ près de la pointe de fissure, mais contribue à modifier la distribution locale des contraintes et la forme du champ de déformations.

Dans cette partie, nous essaierons de paramétriser de nouvelles formes d'éprouvette afin d'obtenir une nouvelle gamme de valeurs de T-stress que nous n'aurions peut-être pu atteindre avec notre spécimen CCT de départ pour une même gamme de K_I et K_{II} .

5.1 Paramétrisation

Dans cette partie, j'ai joué sur deux paramètres : l'angle de la fissure initial α et la courbure des côtés latéraux du spécimen, qui est ici contrôlée par le paramètre ΔW , conformément à la figure 3.1.

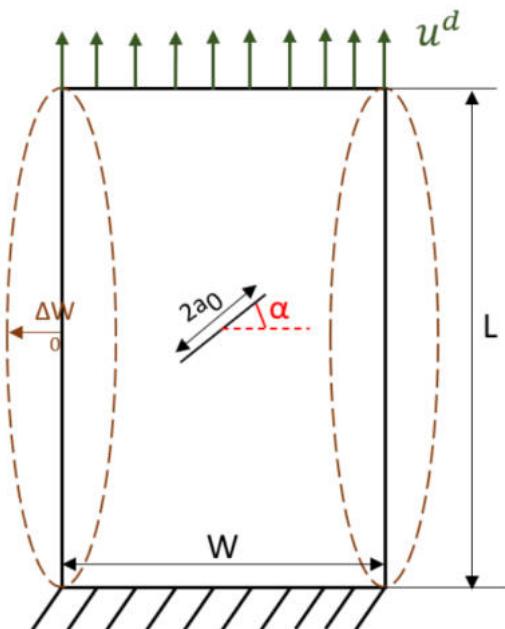


FIGURE 5.1 – Paramétrisation du spécimen CCT

Sur la figure 5.1, les bords latéraux de l'éprouvette sont désormais courbés en arc de cercle (soit concave, soit convexe) de rayon fixé indirectement quantifié par la donnée de ΔW . Nous avons α qui varie entre 0° et 80° (écart de 5°), tandis que ΔW prend 18 valeurs dans $[-25, 7.57]$. Cette intervalle de valeurs a été choisie conformément aux limites liées au maillage de l'éprouvette dans le code gcrack.

5.2 Adimensionnement du problème

Les variables liées à notre problème de rupture sont : K_I , K_{II} , T , a_0 , ΔW , L , α , E , u^d , ν , W .

Les variables liées à notre problème de rupture sont : K_I , K_{II} , T , ΔW , L , α , E , u^d , ν , W , a_0

Où :

- K_I , K_{II} sont les FICs
- L est la longueur de l'éprouvette, W sa largeur et a_0 la demi-largeur de la fissure
- α , ΔW sont les paramètres de notre paramétrisation
- E , ν : module et coefficient de Poisson, fixés par le matériau
- u^d est le chargement (noté λu dans la figure ci-contre)

Nous allons chercher une relation mathématique liant ces variables, c'est pourquoi nous commençons par poser :

$$\Gamma(K_I, K_{II}, T, a_0, \nu, E, L, W, \Delta W, \alpha) = 0 \quad (5.1)$$

Remarquons que nous avons a_0 et L qui sont fixés en fonction de W et par linéarité les FICs sont proportionnels au chargement u^d (et inversement). De plus le choix du matériau est fixé alors nous ne pourrons pas jouer sur E et ν . Donc nous pouvons supposer constantes et admettre implicitement l'existence de ν , E , L et W dans l'expression Γ :

$$\Gamma(K_I, K_{II}, T, \Delta W, a_0, \alpha) = 0 \quad (5.2)$$

En appliquant le théorème de Vaschy-Buckingham, on obtient :

$$\Pi\left(\frac{K_{II}}{K_{eq}}, \frac{T\sqrt{a_0}}{K_{eq}}, \frac{a_0}{a_0}, \frac{\Delta W}{a_0}, \alpha\right) = 0 \quad (5.3)$$

Et donc

$$\Pi\left(\frac{K_{II}}{K_{eq}}, \frac{T\sqrt{a_0}}{K_{eq}}, \frac{\Delta W}{a_0}, \alpha\right) = 0 \quad (5.4)$$

Avec

$$K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (5.5)$$

On pose

$$\widehat{K}_{II} = \frac{K_{II}}{K_{\text{eq}}}, \quad \widehat{T} = \frac{T\sqrt{a_0}}{K_{\text{eq}}} \quad \text{et} \quad \widehat{\Delta W} = \frac{\Delta W}{a_0}$$

L'équation (5.4) nous permet de conclure que la sollicitation en pointe de fissure caractérisée par \widehat{K}_{II} et \widehat{T} et Ainsi, pour différentes géométries de l'éprouvette, caractérisées par différentes sollicitations. on va pouvoir atteindre

En observant l'équation (5.4), nous pouvons alors chercher deux fonctions f et g telles que :

$$\widehat{K}_{II} = f(\alpha, \widehat{\Delta W}) \quad (5.6)$$

$$\widehat{T} = g(\alpha, \widehat{\Delta W}) \quad (5.7)$$

Ayant cette idée en tête, dans la section suivante, nous allons commencer par visualiser et interpréter les données $(\widehat{T}, \widehat{K}_{II})$ obtenues après simulation pour les différents couples de paramètres $(\alpha, \widehat{\Delta W})$.

6. Résultats et discussions

6.1 Description des résultats

Les données obtenues après les simulations sont représentées dans la figure suivante :

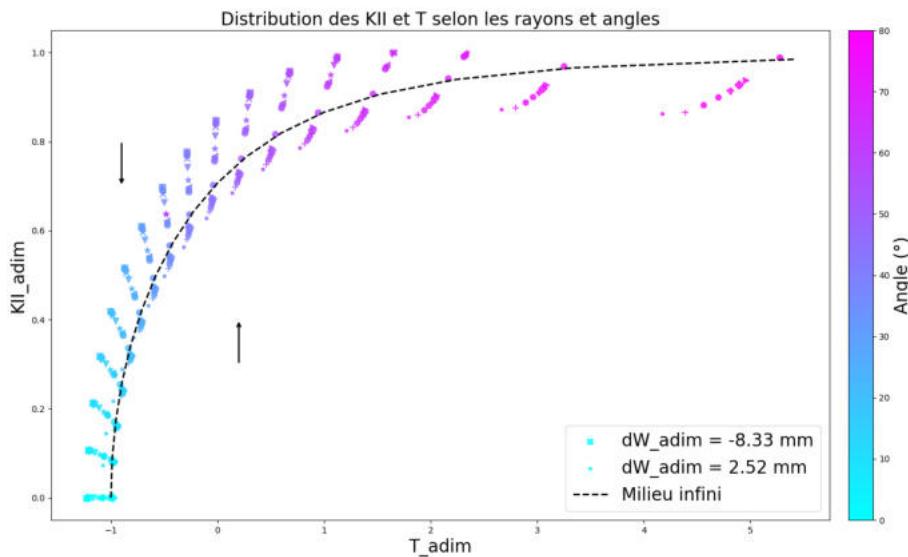


FIGURE 6.1 – Distribution de KII et T pour les différentes configurations d'éprouvette

La figure 6.1 présente les valeurs du facteur d'intensité en mode II adimensionné, \widehat{K}_{II} , ainsi que du T -stress adimensionné, \widehat{T} , obtenues lors de la rupture précédant la propagation de la fissure simulée, pour le cas $K_I > 0$ (les points correspondant à $K_I < 0$ sont reportés en annexe car ils correspondent à une intépénétration des surfaces de la fissures qui n'est pas prise en compte dans les simulations.). Ces valeurs correspondent aux différentes éprouvettes définies par le couple de paramètres $(\alpha, \widehat{\Delta W})$.

La distribution en fonction de $\widehat{\Delta W}$ est distinguée par la forme des points ; les flèches indiquent le sens de convergence vers $\widehat{\Delta W} = 0$. On observe que les configurations **concaves** se situent au-dessus de la courbe de référence en milieu infini ($\widehat{\Delta W} = 0$, c'est le cas des bords droits ou cas de l'éprouvette CCT classique), tandis que les configurations **convexes** apparaissent en dessous.

Enfin, la distribution en fonction de l'angle initial de la fissure α est différenciée par un code couleur, tel qu'indiqué sur la barre de couleurs.

6.2 Discussion

La figure 6.1 nous permet de voir jusqu'où nous sommes capables de couvrir un sous-espace de \mathbb{R}^2 avec notre jeu de données $(\widehat{T}, \widehat{K}_{II})$ obtenu par la paramétrisation choisie.

Le point positif est que nous avons atteint une bonne plage de valeurs de K_{II} et T . Nous voyons par exemple que nous avons presque atteint le mode II pur (K_{II} proche de 1).

Un autre constat est la grande corrélation de \widehat{T} par rapport à \widehat{K}_{II} : pour un angle donné, nous voyons que les données suivent une courbe particulière et concave. Globalement, les valeurs de α ont une forte influence sur \widehat{K}_{II} . Pour un α donné, changé $\widehat{\Delta W}$ permet de faire varier légèrement le T-stress. En somme, notre jeu de données est fortement lié à notre paramétrisation.

Pour ce qui est du remplissage d'un sous-espace de \mathbb{R}^2 , comme par exemple $[-2, 6] \times [0, 1]$, nous remarquons que cet objectif est faiblement atteint. En d'autres termes, la paramétrisation choisie ne nous permet pas d'obtenir des K_{II} petits avec des T -stress grands.

Afin d'avoir des données plus décorrélatées et remplissant davantage l'espace $(\widehat{T}, \widehat{K}_{II})$, une solution serait de proposer d'autres formes d'éprouvettes CCT facilement usinables ou de faire des simulations sur d'autres types d'éprouvettes connus, comme les éprouvettes SEN(T) ou EDENT.

7. Détermination de formules analytiques de K_{II} et T pour cette de paramétrisation de l'éprouvette CCT en PMMA

Suite aux simulations effectuées après la paramétrisation, nous avons obtenu un jeu de plus de 200 observations. Rappelons qu'une observation est une valeur du couple $(\hat{T}, \widehat{K}_{II})$ pour un couple $(\alpha, \Delta\bar{W})$. Un couple $(\alpha, \Delta\bar{W})$ sera appelé entrée.

Le but de cette section relève plus de l'exploration. Nous essaierons de trouver des expressions analytiques simples de \hat{T} et \widehat{K}_{II} en fonction de α et $\Delta\bar{W}$, afin d'être capables de prédire le facteur d'intensité de contrainte K_{II} et le T -stress en connaissant un quelconque paramétrage de notre spécimen. Ces formules pourraient aider à produire des manuels de mécanique de la rupture (comme celui de **murakami_stress_1987<empty citation>**).

Une autre idée de cette partie serait de voir si nous sommes capables de faire le schéma inverse, c'est-à-dire, à partir d'une sollicitation donnée, retrouver une éprouvette associée.

7.1 Méthode

7.1.1 Éléments théoriques

Notons \hat{T}^{target} et $\widehat{K}_{II}^{\text{target}}$ les valeurs de \hat{T} et \widehat{K}_{II} que j'ai obtenues après simulation. Un couple $(\hat{T}^{\text{target}}, \widehat{K}_{II}^{\text{target}})$ sera appelé sortie, et l'ensemble des données entrée+sortie sera appelé dataset. Un élément du dataset sera appelé observation. L'observation (i) est définie par la donnée d'une entrée $(\alpha^{(i)}, \Delta\bar{W}^{(i)})$ et d'une sortie $(\hat{T}^{\text{target}(i)}, \widehat{K}_{II}^{\text{target}(i)})$.

Pour prédire \hat{T}^{target} et $\widehat{K}_{II}^{\text{target}}$, j'ai opté pour une régression polynomiale, autrement dit, je cherche deux fonctions appelées modèles :

$$\widehat{K}_{II}^m = f_{\mathbf{p}_1}(\alpha, \Delta\bar{W}) \quad (7.1)$$

$$\hat{T}^m = g_{\mathbf{p}_2}(\alpha, \Delta\bar{W}) \quad (7.2)$$

avec $f_{\mathbf{p}_1}, g_{\mathbf{p}_2} \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ (ensemble des polynômes bivariés) et $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ les vecteurs des coefficients des polynômes (par exemple, $f_{\mathbf{p}_1}(x, y) = \mathbf{p}_1^{(1)} + \mathbf{p}_1^{(2)}x + \mathbf{p}_1^{(3)}y + \mathbf{p}_1^{(4)}x^2 + \mathbf{p}_1^{(5)}xy + \dots$).

Ces polynômes sont tels que, si on considère par exemple le cas de K_{II} uniquement, le minimum de la fonction coût suivante doit être le plus proche possible de 0 :

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}_1) = \left\| \widehat{K}_{II}^{\text{target}} - \widehat{K}_{II}^m \right\|_2 + \beta \sum_i |\mathbf{p}_1^{(i)}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{\text{observations}}} \left(\widehat{K}_{II}^{\text{target}(i)} - \widehat{K}_{II}^{m(i)} \right)^2} + \beta \sum_i |\mathbf{p}_1^{(i)}| \quad (7.3)$$

On a donc $\mathbf{p}_1 = \arg \min_{\mathbf{p}_1} \mathcal{J}(\mathbf{p}_1)$ (où \mathbf{p}_1 est obtenu par minimisation de la fonction coût \mathcal{J}).

La formule (7.3) donne l'expression de la fonction coût avec une régularisation LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*). La régularisation LASSO est une méthode de régression linéaire ou polynomiale qui ajoute une pénalité proportionnelle à la somme des valeurs absolues des coefficients (c'est le terme avec $\beta \in \mathbb{R}$ dans la formule (7.3)), ce qui a pour effet :

- **Réduction (shrinkage)** : les coefficients sont tirés vers zéro pour éviter le surapprentissage.
- **Sélection** : certains coefficients deviennent exactement nuls, ce qui élimine automatiquement des variables ou des termes polynomiaux.

Une régression LASSO permet donc d'ajuster le modèle aux données et de régulariser afin de limiter le surapprentissage et de sélectionner les termes polynomiaux les plus pertinents. Un autre avantage est de limiter le nombre de paramètres non nuls au strict minimum. Ainsi, le modèle a peu de paramètres et il est interprétable.

L'interprétabilité est très importante scientifiquement, car cela permet de comprendre ce qu'il y a dans le modèle et comment les différents paramètres interagissent. C'est également essentiel dans certains contextes pour pouvoir valider le modèle et l'utiliser dans un cadre industriel où il y a besoin de certifications et de normes.

Remarques :

Dans la littérature, Erdogan et Sih (1963) nous donnent les formules de K_I et K_{II} , et Smith et al. (2001) nous donne la formule de T , en milieu infini ($\Delta W = 0$) :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} (\cos \alpha)^2 \quad (7.4)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \cos \alpha \sin \alpha \quad (7.5)$$

$$T = K_{II} = \sigma \cos \left(2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) = \sigma \cos 2\alpha \quad (7.6)$$

En adimensionnant par K_{eq} de les équations 7.5 et 7.6, on obtient :

$$\widehat{K}_{II}^{th} = \sin \alpha \quad (7.7)$$

$$\widehat{T}^{th} = \cos \alpha \left((\tan \alpha)^2 - 1 \right) \quad (7.8)$$

Ayant cette idée de dépendance théorique de \widehat{K}_{II}^{th} en fonction de $\sin \alpha$ et de \widehat{T}^{th} en fonction de $\cos \alpha$ et $\tan \alpha$, j'ai donc décidé de faire la régression polynomiale de \widehat{K}_{II} en fonction de $\widehat{\Delta W}$ et $\sin \alpha$, et de faire la régression polynomiale de \widehat{T} en fonction de $\widehat{\Delta W}$, $\cos \alpha$, et $\tan \alpha$. En effet si la littérature ne renseignait pas sur la dépendance de \widehat{K}_{II}^{th} et \widehat{T}^{th} , j'aurai assurément considéré plus de termes voire d'autres fonction de α ou ΔW comme variables d'entrée.

Mais dans la suite, on notera simplement $\widehat{K}_{II}(\alpha, \widehat{\Delta W})$ et $\widehat{T}(\alpha, \widehat{\Delta W})$, et notons qu'une variable d'entrée dans une régression polynomiale est appelée **caractéristique**.

7.1.2 En pratique

Un code Python que j'ai développé durant le stage m'a permis d'effectuer une régression polynomiale avec régularisation LASSO pour prédire les variables \widehat{T} et \widehat{K}_{II} . Dans les lignes qui suivent, nous allons décrire le cas de la régression polynomiale de \widehat{K}_{II} . Le code complet est dans le dossier du stage et se nomme `RP_Lasso_KII.py`.

- Préparation des données** : Les N_{obs} données d'entrée sont transformées en un polynôme de degré N (choix arbitraire) à l'aide de `PolyomialFeatures` de la bibliothèque scikit-learn, générant des combinaisons de monômes. Les représentations polynomiales des données d'entrée sont stockées dans une matrice comme suit :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \alpha^{(1)} & \widehat{\Delta W}^{(1)} & (\sin \alpha^{(1)})^2 & \sin \alpha^{(1)} \widehat{\Delta W}^{(1)} & (\widehat{\Delta W}^{(1)})^2 & \dots \\ 1 & \sin \alpha^{(2)} & \widehat{\Delta W}^{(2)} & (\sin \alpha^{(2)})^2 & \sin \alpha^{(2)} \widehat{\Delta W}^{(2)} & (\widehat{\Delta W}^{(2)})^2 & \dots \\ 1 & \sin \alpha^{(3)} & \widehat{\Delta W}^{(3)} & (\sin \alpha^{(3)})^2 & \sin \alpha^{(3)} \widehat{\Delta W}^{(3)} & (\widehat{\Delta W}^{(3)})^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & \sin \alpha^{(N)} & \widehat{\Delta W}^{(N)} & (\sin \alpha^{(N)})^2 & \sin \alpha^{(N)} \widehat{\Delta W}^{(N)} & (\widehat{\Delta W}^{(N)})^2 & \dots \end{pmatrix}$$

L'équation 7.1 devient alors :

$$\widehat{K}_{II}^m = \mathbf{X} \cdot \mathbf{p}_1 \quad (7.9)$$

- Normalisation** : Les caractéristiques (ou variables) polynomiales sont normalisées avec `MaxAbsScaler` (“MaxAbsScaler”, [s. d.](#)) pour uniformiser les échelles.
- Séparation des données** : Les données sont divisées en données d'entraînement (80% du dataset) et données test (20% du dataset) pour vérifier la fiabilité du modèle à la fin. Cette division se fait via `train_test_split`.
- Régression LASSO** : Pour différentes valeurs de β (de 10^{-4} à 1, logarithmiquement espacées), un modèle LASSO est entraîné pour minimiser l'erreur quadratique avec une pénalité sur les coefficients. Les coefficients non nuls et l'intercept sont enregistrés.
- Évaluation des performances** : Le score R^2 et l'erreur relative RRMSE (*Relative Root Mean Square Error*) sont calculés sur l'ensemble de test pour évaluer la qualité des prédictions.

6. Sauvegarde des résultats : Les coefficients du modèle et les métriques (R^2 , RRMSE, nombre de coefficients non nuls) sont enregistrés dans des fichiers CSV pour chaque β .

Ces derniers résultats du point 6. permettront de trouver le meilleur β pour un bon compromis entre précision (via R^2 et RRMSE) et simplicité du modèle (nombre de coefficients non nuls).

Notez bien : Les métriques nous permettent d'estimer la précision du modèle. Plus R^2 sera proche de 1 et plus RRMSE sera proche de zéro, plus on dira que le modèle a une bonne fiabilité.

7.2 Résultats

7.2.1 Visualisation des données originales

La figure 7.1 présente à quoi ressemble le dataset de \widehat{T} en visualisation 3D.

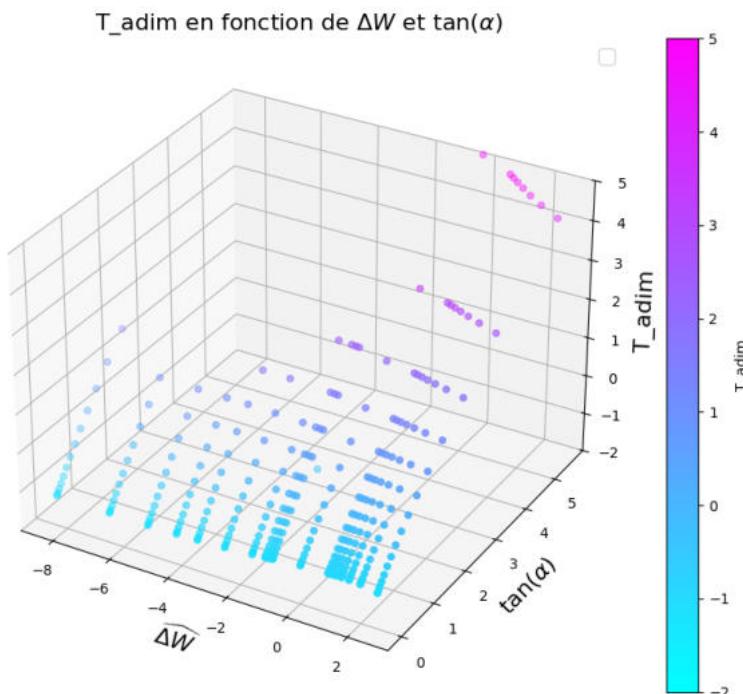


FIGURE 7.1 – Visualisation des données pour la sortie T

Commentaire : Pour notre paramétrisation, nous constatons que pour $\alpha < 70^\circ$, T ne dépend presque pas de ΔW , mais globalement, sa dépendance en α est beaucoup plus marquée.

La figure 7.2 présente à quoi ressemble le dataset de \widehat{K}_{II} en visualisation 3D.

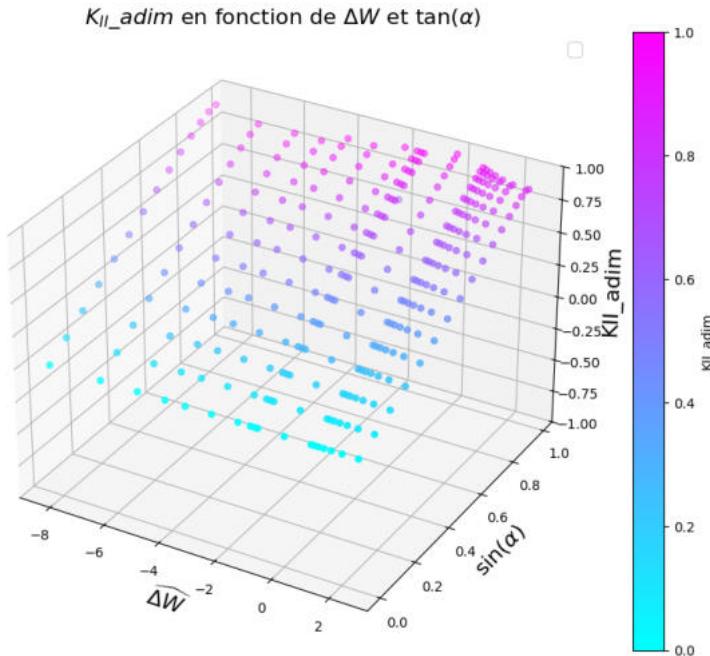


FIGURE 7.2 – Visualisation des données pour la sortie K_{II}

Commentaire : Ici, nous voyons que pour de faibles angles ($\alpha < 15^\circ$), K_{II} dépend très peu de ΔW . Globalement, la dépendance de K_{II} avec α est observée sans difficulté.

7.2.2 Application de la régression LASSO aux datasets

7.2.3 Entraînement sur des polynômes de degré 10

Pour la régression polynomiale, j'ai choisi de trouver des polynômes de degré 10 pour construire les modèles.

Choix du paramètre β :

Le choix du coefficient de pénalité β s'est fait dans le souci de trouver un bon compromis entre précision (via R^2) et simplicité du modèle (nombre de coefficients non nuls). Les figures 7.3 et 7.4 permettent d'illustrer ce compromis et d'identifier le paramètre beta optimal.

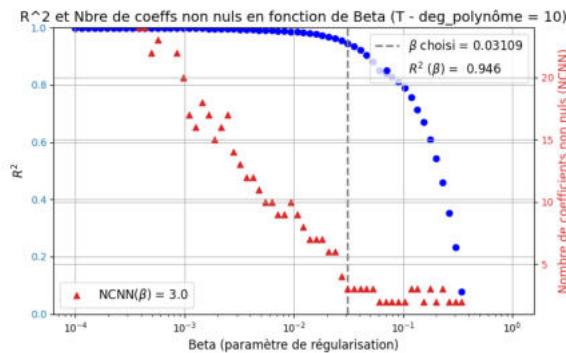


FIGURE 7.3 – Choix du meilleur paramètre β pour la régression polynomiale de \hat{T}

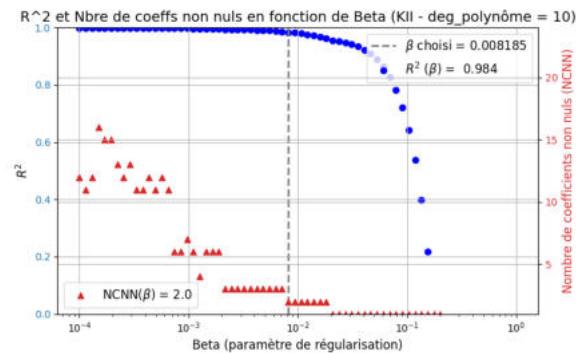


FIGURE 7.4 – Choix du meilleur paramètre β pour la régression polynomiale de \widehat{K}_{II}

Les premiers constats sur ces graphiques sont : la croissance de la métrique R^2 avec le nombre de coefficients non nuls (NCNN) du polynôme, et sa décroissance avec β .

Voici en quelques mots la démarche utilisée pour choisir le coefficient de pénalité β : sur la figure 7.4, pour $\beta = 0.008185$, notre modèle a 2 coefficients non nuls et une précision de 0.984 sur 1. En prenant une autre valeur de β qui augmente le nombre de coefficients non nuls, on constate que la précision s'améliore très peu. Ainsi, $\beta = 0.008185$ est un bon compromis entre la précision du modèle et sa complexité. On fait de même pour \hat{T} et on obtient $\beta = 0.03109$

Superposition du modèle aux données :

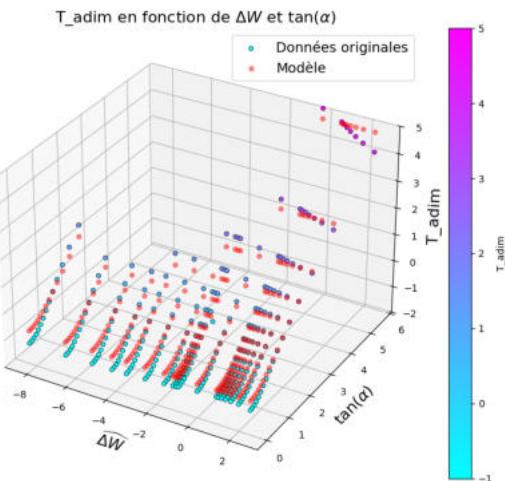


FIGURE 7.5 – Visualisation des données pour la sortie T : superposition du modèle aux données originales

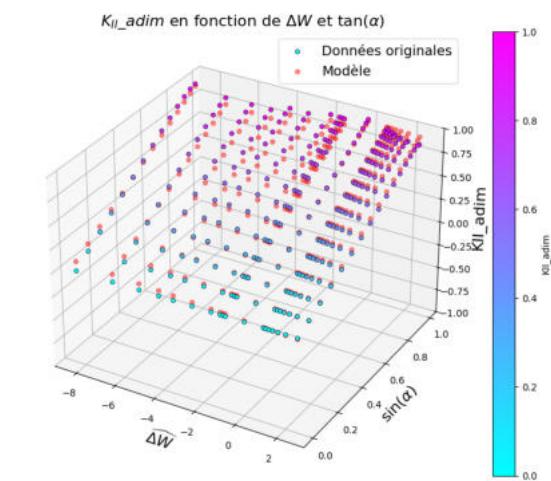


FIGURE 7.6 – Visualisation des données pour la sortie K_{II} : superposition du modèle aux données originales

L'équation du modèle de prédiction de \hat{T} visualisée sur la figure 7.5 est donnée par :

$$\hat{T}^m(\alpha, \widehat{\Delta W}) = -0.964 \cos(\alpha)^2 + 0.312 \cos(\alpha)^4 \tan(\alpha)^5 + 1.99 \cos(\alpha)^5 \tan(\alpha)^5 \quad (7.10)$$

On constate que l'équation 7.10 ne dépend pas de dW ici, cela signifie que nous ne captions pas encore l'influence de ΔW sur le $T - stress$. Ce constat est en accord avec la figure 6.1 pour les angles pas très grands la dépendance en α domine devant ΔW .

L'équation du modèle de prédiction de \widehat{K}_{II}^m visualisée sur la figure 7.6 est donnée par :

$$\widehat{K}_{II}^m(\alpha, \widehat{\Delta W}) = 0.0133 + 0.969 \sin(\alpha) - 0.0103\Delta W \quad (7.11)$$

Vérification du surapprentissage :

La précision de chaque modèle sur les données test (20% du dataset non utilisé pour l'entraînement) est évaluée par les figures suivantes :

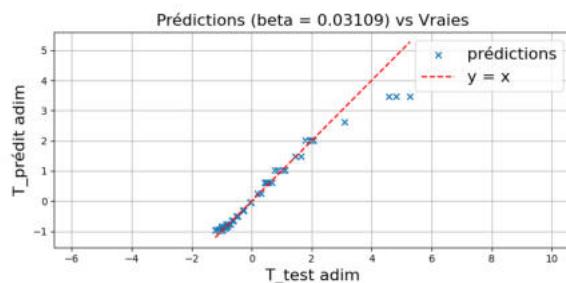


FIGURE 7.7 – Évaluation de la précision de \widehat{T}^m sur les données tests

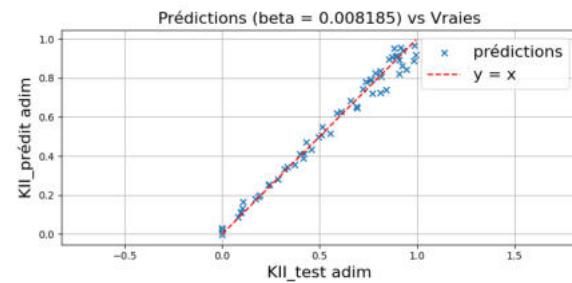


FIGURE 7.8 – Évaluation de la performance de \widehat{K}_{II}^m sur les données tests

Commentaire :

En examinant les courbes de performance pour les modèles de prédiction de \widehat{T} et \widehat{K}_{II} , plusieurs points peuvent être relevés concernant l'outil de régression polynomiale développé :

- **Précision des prédictions** : Pour \widehat{T} (avec $\beta = 0.03109$), les points de prédiction (en bleu) se rapprochent bien de la droite $y = x$ (en rouge), même sur une plage de valeurs négatives et positives (-1 à 6). Cela indique que le modèle capture efficacement les tendances des données malgré leur variabilité.
- **Performance sur \widehat{K}_{II}** : Pour \widehat{K}_{II} (avec $\beta = 0.008185$), les prédictions suivent également de près la droite $y = x$ sur une plage de 0 à 1.5, avec une dispersion minimale. Cela suggère une bonne fiabilité de l'outil, même avec des modèles plus linéaires.
- **Efficacité de la régularisation LASSO** : Le choix de différents paramètres β a permis d'optimiser la régularisation, comme le montre la bonne adéquation des prédictions. L'implémentation de LASSO équilibre efficacement la complexité (polynôme élevé pour \widehat{T} et modèle linéaire pour \widehat{K}_{II}) et la précision, évitant le surapprentissage.
- **Robustesse et flexibilité** : L'outil démontre une robustesse et une adaptabilité aux comportements non linéaires complexes (pour \widehat{T}) et linéaires (pour \widehat{K}_{II}), tout en gérant correctement la standardisation et la séparation train/test.
- **Visualisation claire** : Les graphiques générés offrent une visualisation intuitive, facilitant l'interprétation et la validation des résultats, ce qui constitue un atout

pour évaluer les performances.

En conclusion, l'outil de régression polynomiale développé présente une capacité solide à modéliser des relations complexes avec une régularisation efficace, produisant des prédictions précises pour \widehat{T} et \widehat{K}_{II} .

7.2.4 Application de l'outil de régression pour des polynômes de degré 3 et comparaison des modèles aux résultats théoriques de la littérature

Rappelons ici les équations 7.12 et 7.13 en "milieu infini" ($\widehat{\Delta W} = 0$) obtenues dans la littérature :

$$\widehat{K}_{II}^{th} = \sin \alpha \quad (7.12)$$

$$\widehat{T}^{th} = \cos \alpha \left((\tan \alpha)^2 - 1 \right) \quad (7.13)$$

Connaissant l'efficacité de notre outil prédictif de \widehat{T} et \widehat{K}_{II} , nous pouvons l'appliquer à nouveau pour la détermination de modèles polynomiaux de degré plus faible ; nous obtenons alors les modèles suivants qui sont de bons compromis :

$$\widehat{T}_2^m(\alpha, \widehat{\Delta W}) = -1.10 \times 10^0 \cdot \cos^2(\alpha) + 7.92 \times 10^{-1} \cdot \cos(\alpha) \tan^2(\alpha) \quad (7.14)$$

$$\widehat{K}_{II}^m(\alpha, \widehat{\Delta W}) = 0.0133 + 0.969 \sin(\alpha) - 0.0103 \widehat{\Delta W} \quad (7.15)$$

Pour $\widehat{\Delta W} = 0$, nos modèles donnent :

$$\widehat{T}_2^m(\alpha, 0) = \cos(\alpha) \left(0.792 \tan^2(\alpha) - 1.10 \cos(\alpha) \right). \quad (7.16)$$

$$\widehat{K}_{II}^m(\alpha, 0) = 0.0133 + 0.969 \sin(\alpha) \quad (7.17)$$

Comparaison des modèles prédictifs avec les résultats théoriques

Nous comparons ici les expressions théoriques en milieu infini ($\widehat{\Delta W} = 0$, équations 7.12–7.13) avec les modèles polynomiaux de degré plus faible évalués en $\widehat{\Delta W} = 0$ (équations 7.16–7.17).

1) \widehat{K}_{II} : très bon accord quantitatif.

- Théorie : $\widehat{K}_{II}^{th}(\alpha) = \sin \alpha$.
- Modèle : $\widehat{K}_{II}^m(\alpha, 0) = 0.0133 + 0.969 \sin \alpha$.

Le modèle reproduit fidèlement la dépendance en $\sin \alpha$, avec un léger biais constant ($+0.0133$ à $\alpha = 0^\circ$) et une amplitude réduite d'environ 3,1%. L'écart absolu reste inférieur à 2×10^{-2} sur tout l'intervalle $\alpha \in [0^\circ, 80^\circ]$.

Évaluons le Root Mean Square Error (RMSE) (**noauthor_root_nodate**) :

$$\text{RMSE} \approx 1.06 \times 10^{-2}, \quad \text{erreur max} \approx 1.72 \times 10^{-2}.$$

Ainsi, l'accord est excellent.

2) \hat{T} : bonne tendance, sous-estimation aux grands angles.

- Théorie : $\hat{T}^{th}(\alpha) = \cos \alpha ((\tan \alpha)^2 - 1)$.
- Modèle : $\hat{T}_2^m(\alpha, 0) = -1.10 \cos^2 \alpha + 0.792 \cos \alpha \tan^2 \alpha$.

Le modèle capture correctement le signe et la tendance (valeur négative pour petits angles, passage par zéro vers 45° , puis croissance positive). Cependant, il sous-estime la croissance aux grands angles :

α	\hat{T}^{th}	\hat{T}_2^m	Erreur relative
0°	-1.00	-1.10	+10%
60°	1.00	0.913	-8.7%
70°	2.240	1.916	-14.5%
80°	5.411	4.390	-18.9%

L'erreur quadratique moyenne est $\text{RMSE} \approx 0.25$, avec un écart maximum d'environ 1.0 à 80° . L'accord est donc satisfaisant jusqu'à 60 – 70° , mais le modèle polynômial lisse l'asymptote théorique et sous-estime la croissance de \hat{T} .

3) Synthèse. \widehat{K}_{II}^m montre un excellent accord (écart < 0.02) avec \widehat{K}_{II}^{th} . Pour \hat{T} , le compromis est bon jusqu'à 70° , mais une sous-estimation de 10–20% apparaît pour les grands angles. Cela reste cohérent avec la nature polynomiale (faible degré) du modèle, qui ne peut reproduire parfaitement le comportement asymptotique de la solution théorique.

7.3 Ouverture du sujet : conception ou *design* d'éprouvette

À partir de l'étude précédente, nous avons été capables de prédire convenablement le T -stress T et le FIC en mode II K_{II} en fonction de la géométrie de l'éprouvette, contrôlée ici par l'angle α de la fissure initiale et par la différence de largeur ΔW , qui rendait la géométrie de l'éprouvette soit convexe, soit concave. Nous pouvons étendre nos simulations à d'autres géométries, plus simples ou plus complexes et facilement usinables, voire même à d'autres matériaux, afin d'élargir la base de données d'apprentissage (par exemple un jeu de 10 000 données).

Dès lors, dans une étude ultérieure, nous pourrons entreprendre l'approche inverse : à partir de valeurs données de T et de K_{II} , tenter de retrouver la géométrie d'éprouvette et le matériau correspondants. Une telle démarche présente de grandes perspectives d'application industrielle en mécanique de la rupture, notamment pour déterminer l'éprouvette la plus adaptée afin d'obtenir une gamme précise de T -stress et de K_{II} .

8. Conclusion et perspectives

En somme, ce projet a permis de revisiter avec succès les expériences classiques d'Erdo-gan et Sih sur la propagation de fissures en mode mixte I+II dans des éprouvettes CCT en PMMA, en intégrant des outils numériques avancés pour analyser les trajectoires et examiner l'impact du T-stress. Les comparaisons des trajectoires expérimentales aux simulations ont révélé une très bonne précision du code de simulation dans la prédiction de la propagation de la fissure. Elles ont également révélé l'influence déterminante du T-stress sur la direction de bifurcation initiale de la fissure, particulièrement pour de fortes mixités où il favorise des déviations plus marquées.

La paramétrisation géométrique (via α et ΔW) a étendu la gamme de valeurs de K_{II} et T , bien que limitée pour les T-stress positifs élevés, et a conduit à des modèles analytiques fiables via régression polynomiale.

Parmi les perspectives, il serait pertinent d'étendre les simulations à d'autres paramétrisations de spécimens, à d'autres géométries d'éprouvettes (par exemple le SEN(T) ou EDENT) et à d'autres matériaux fragiles ou semi-fragiles pour enrichir la base de données (visant par exemple 100 000 observations). Une approche inverse pourrait alors être développée : à partir de valeurs cibles de T et K_{II} , optimiser la géométrie et le matériau de l'éprouvette via l'apprentissage automatique. Cela présenterait un fort potentiel industriel en mécanique de la rupture, pour concevoir des essais à petite échelle adaptés à des gammes précises de sollicitation et améliorer la prédiction de la durée de vie des structures.

Ce stage m'a apporté beaucoup sur le plan personnel. J'ai pu approfondir les notions clés en mécanique de la rupture en milieu isotrope, qui m'ont permis d'évoluer sur le sujet du PRe et ensuite de faire des analyses pertinentes et de tirer des courbes utiles. De plus, ce stage m'a permis de développer l'aptitude à voir les données sous plusieurs angles afin d'en extraire des informations valorisables. Enfin, j'ai pu constater la dimension exploratoire du monde de la recherche, et j'ai appris que l'expérience et la composante temps sont des facteurs essentiels pour réussir dans le domaine de la recherche.

Annexes

Données avec K_I négatif

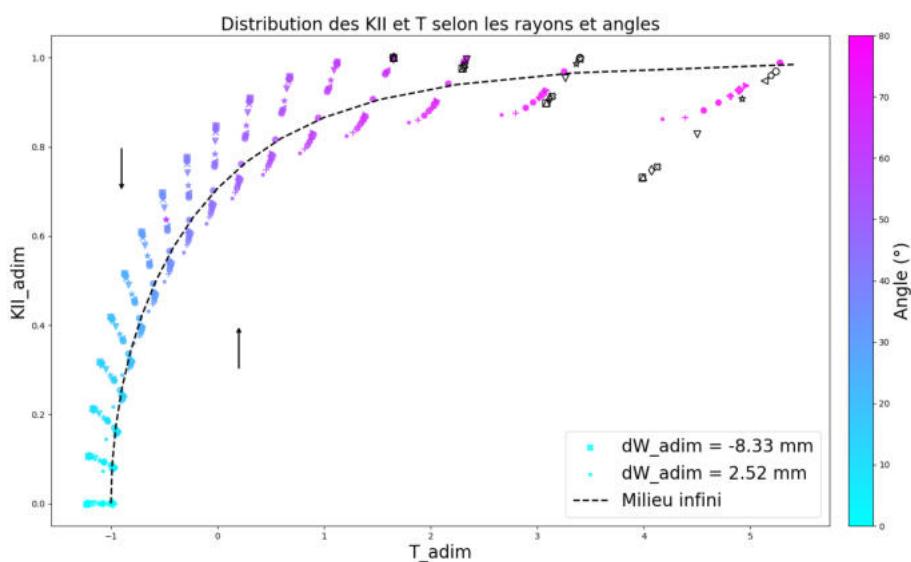


FIGURE 1 – Distribution de KII et T pour les différentes configurations d'éprouvette

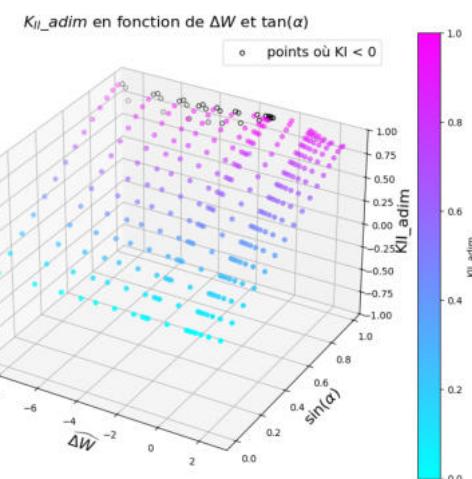


FIGURE 2 – KII en fonction des paramètres

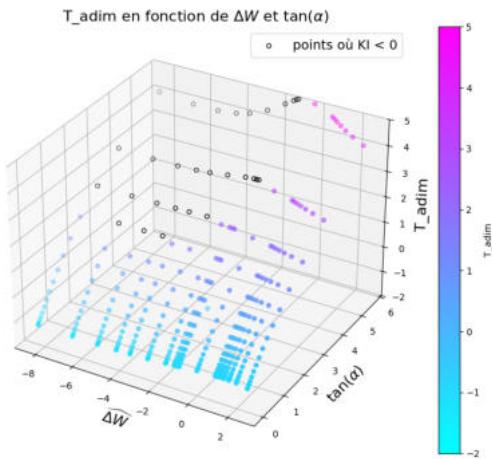


FIGURE 3 – T en fonction des paramètres

valeurs de ΔW

$\Delta W \in \{-25, -19.45, -15.45, -12.5, -10.35, -7.57, -4.8, -3.5, -3.08, -2.74, 0, 2.75, 3.08, 3.5, 4.06, 4.81, 5.9, 7.57\}$

Bibliographie

- Amestoy, M., & Leblond, J. B. (1992). Crack paths in plane situations—II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 29(4), 465-501. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90210-K](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90210-K)
- Besson, J., Bleyer, J., Feld-Payet, S., Gourgues-Lorenzon, A.-F., Hannard, F., Helfer, T., Hure, J., Kondo, D., Lazarus, V., Bourlot, C. L., Maitournam, H., Maurini, C., Moes, N., Morgeneyer, T., Morin, L., Petit, T., & Simar, A. (2023, août). *MEALOR II Damage Mechanics and Local Approach to Fracture* [Pages : 441 p.]. CERN - European Organization for Nuclear Research. <https://doi.org/10.5281/zenodo.10125170>
- Cotterell, B., & Rice, J. (1980). Slightly curved or kinked cracks. *International Journal of Fracture*, 16(2), 155-169. <https://doi.org/10.1007/BF00012619>
- Electromécanique | Instron. (2024, août). Consulté le 13 août 2025 à <https://www.instron.com/fr/products/testing-systems/out-of-production-systems/electromechanical/>
- Erdogan, F., & Sih, G. C. (1963). On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*, 85(4), 519-525. <https://doi.org/10.1115/1.3656897>
- Irwin, G. R. (1957). Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24(3), 361-364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>
- Janssen, M., Zuidema, J., & Wanhill, R. (2004, août). *Fracture Mechanics : Fundamentals and Applications*. <https://doi.org/10.1201/9781482265583>
- Julien, R. (2018, octobre). UFreckles [Language : eng]. <https://doi.org/10.5281/zenodo.1433776>
- Kammer, D. S., McLaskey, G. C., Abercrombie, R. E., Ampuero, J.-P., Cattania, C., Cocco, M., Dal Zilio, L., Dresen, G., Gabriel, A.-A., Ke, C.-Y., Marone, C., Selvadurai, P. A., & Tinti, E. (2024). Earthquake energy dissipation in a fracture mechanics framework [Publisher : Nature Publishing Group]. *Nature Communications*, 15(1), 4736. <https://doi.org/10.1038/s41467-024-47970-6>
- MaxAbsScaler. (s. d.). Consulté le 17 août 2025 à <https://scikit-learn/stable/modules/generated/sklearn.preprocessing.MaxAbsScaler.html>
- Smith, D. J., Ayatollahi, M. R., & Pavier, M. J. (2001). The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading [eprint : https://onlinelibrary.wiley.com/2695.2001.00377.x]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 24(2), 137-150. <https://doi.org/10.1046/j.1460-2695.2001.00377.x>