Algebra Vorlesungsmitschrift

nach der 2023S Vorlesung von Michael Pinsker

Ian Hornik, Daniel Mayr, Alexander Zach

Stand vom 28. März 2023

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Allgemeine Algebren

Dieses Kapitel behandelt die Inhalte der Vorlesung, welche auch in Goldstern et al.: *Algebra – Eine grundlagenorientierte Einführunsvorlesung* in den Kapiteln *2. Grundbegriffe, 4.1. Freie Algebren und der Satz von Birkhoff* gefunden werden können.

1.1 Einführung

Zu Beginn wird der Begriff einer allgemeinen (oder auch universellen) Algebra definiert und es werden weiter einige spezielle Algebren gezeigt. 01.03.2023

Definition 1.1.1. Seien A eine beliebige Menge, $\tau = (n_i)_{i\in I}$ eine Familie aus $\mathbb{N}_0$ über eine beliebige Indexmenge I und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen, wobei $f_i : A^{n_i} \to A$ ist. Das Tupel $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i\in I})$ heißt dann *(allgemeine) Algebra* vom *Typ* τ. Die einzelnen Funktionen f_i haben die *Stelligkeit* oder *Arität* n_i.

Bemerkung 1.1.2. Für eine endliche Indexmenge $I = \{1, \ldots, m\}$ wird der Typ auch als m-Tupel $\tau = (n_1, \ldots, n_m)$ geschrieben und die Algebra als $\mathfrak{A} = (A, f_1, \ldots, f_m)$.

Bemerkung 1.1.3. Eine nullstellige Operation f_i bildet von der Menge $A^0 := \{\emptyset\}$ auf A ab. Es ist also f_i konstant mit $f(\emptyset) = a \in A$. Im Folgenden wird bei $n_i = 0$ nicht zwischen der Operation f_i und dem Element a auf das abgebildet wird unterschieden.

Definition 1.1.4. Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +)$ vom Typ $\tau = (2)$ heißt *Halbgruppe*, wenn

– $\forall x, y, z \in A : (x + y) + z = x + (y + z)$. (*Assoziativität* von $+$)

Beispiel 1.1.5. $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot), (\mathbb{N}, +)$ sind Halbgruppen.

Definition 1.1.6. Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +, e)$ vom Typ $\tau = (2, 0)$ heißt *Monoid*, wenn

– $(A, +)$ eine Halbgruppe ist und

– $\forall x \in A : e + x = x + e = x$. ($e$ *neutrales Element* bezüglich $+$)

Beispiel 1.1.7. $(\mathbb{R}, +, 0), (\mathbb{R}, \cdot, 1), (\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot, E_2), (\mathbb{N}, \cdot, 1)$ sind Monoide.

Definition 1.1.8. Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +, e, -)$ vom Typ $\tau = (2, 0, 1)$ heißt *Gruppe*, wenn

– $(A, +, e)$ ein Monoid ist und

– $\forall x \in A : x + (-x) = (-x) + x = e$. ($-$ bildet ab auf *inverse Elemente*)

Beispiel 1.1.9. $(\mathbb{R}, +, 0, -), (\mathbb{Z}, +, 0, -)$ sind Gruppen.

Bemerkung 1.1.10. Manchmal werden Gruppen auch als Algebra $\mathfrak{A} = (A, +)$ vom Typ $\tau = (2)$ definiert, für die

- $\forall x, y, z \in A : (x + y) + z = x + (y + z)$,
- $\exists e \in A \forall x \in A : e + x = x + e = x$ und
- $\forall x \in A \exists - x \in A : x + (-x) = (-x) + x = e$ gilt.

Bei der Definition von Unterstrukturen macht es allerdings einen Unterschied, welche der Definitionen verwendet wird, weshalb im Folgenden mit Gruppe der Begriff aus Definiton 1.1.8 gemeint ist.

Definition 1.1.11. Eine Halbgruppe / Monoid / Gruppe $\mathfrak{A} = (A, +, \cdots)$ heißt *kommutativ* oder *abelsch*, wenn für die zweistellige Operation $+$

- $\forall x, y \in A : x + y = y + x$ gilt.

Definition 1.1.12. Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +, 0, \cdot)$ vom Typ $\tau = (2, 0, 2)$ heißt *Halbring*, wenn

- $(A, +, 0)$ ein kommutatives Monoid,
- $(A, \cdot)$ eine Halbgruppe ist und
- $\forall x, y, z \in A : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ ($\cdot$ ist *rechtsdistributiv* über $+$)
  $\wedge\ z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y.$ ($\cdot$ ist *linksdistributiv* über $+$)

Beispiel 1.1.13. $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0), (\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot, 0^1)$ sind Halbringe.

Definition 1.1.14. Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +, 0, -, \cdot)$ vom Typ $\tau = (2, 0, 1, 2)$ heißt *Ring*, wenn

- $(A, +, -, 0)$ eine kommutative Gruppe,
- $(A, \cdot)$ eine Halbgruppe ist und
- $\cdot$ ist links- und rechtsdistributiv über $+$.

Gibt es eine weitere nullstellige Operation 1, sodass $(A, \cdot, 1)$ ein (kommutatives) Monoid ist, so spricht man von einem *(kommutativen) Ring mit 1*.

Beispiel 1.1.15. $(\mathbb{Z}, +, 0, -.\cdot), (\mathbb{R}[x], +, 0, -, \cdot)$ sind Ringe.

Definition 1.1.16. Ein kommutativer Ring mit 1 $\mathfrak{A}$ heißt *Körper*, wenn

- $\forall x \in A\backslash\{0\} \exists y \in A : x \cdot y = 1$

Ist $\cdot$ nicht kommutativ, dann nennen wir $\mathfrak{A}$ *Schiefkörper* oder *Divisionsring*.

Bemerkung 1.1.17. Im Vergleich zu allen anderen bis jetzt definierten speziellen Algebren ist ein Körper nicht durch Allaussagen für alle Elemente (Gesetze) und Operationen definiert.

Definition 1.1.18. Seien $\mathfrak{R} = (R, +, 0, -, \cdot)$ ein Ring, $\mathfrak{G} = (G, \widetilde{+}, \widetilde{0}, \widetilde{-})$ eine abelsche Gruppe und $\odot : R \times G \to G, (a, v) \mapsto a \odot v$ und gilt

---

[1] 0 steht hier für $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

– $\forall a, b \in R \forall u \in G : (a \cdot b) \odot u = a \odot (b \odot u)$

– $\forall a, b \in R \forall u \in G : (a + b) \cdot u = (a \cdot u) \mathbin{\widetilde{+}} (b \cdot u)$

– $\forall a \in R \forall u, v \in G : a \odot (u \mathbin{\widetilde{+}} v) = (a \odot u) \mathbin{\widetilde{+}} (a \odot v)$

so heißt $\mathfrak{G}$ mit $\odot$ *Modul über* $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{R}$-*Modul*.

Ein $\mathfrak{R}$-Modul kann auch als allgemeine Algebra nach Definiton 1.1.1 definiert werden. Wir erhalten die Algebra $\mathfrak{G}^{\mathfrak{R}} := (G, \widetilde{+}, \widetilde{0}, \widetilde{-}, (m_r)_{r \in \mathfrak{R}})$, wobei $m_r : G \to G, g \mapsto r \odot g$ unäre Operationen sind.

Bemerkung 1.1.19. Ein $\mathfrak{R}$-Modul ist ein Vektorraum, wenn $\mathfrak{R}$ ein Körper ist.

Beispiel 1.1.20. $(\mathbb{Z}_9, +, 0, -), (\mathbb{Z}_9^{2\times 2}, +, 0, -)$ sind Moduln über $\mathbb{Z}_9$.

Definition 1.1.21. Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, \wedge)$ vom Typ $\tau = (2)$ heißt *Halbverband*, wenn

– $\mathfrak{A}$ eine kommutative Halbgruppe ist,

– $\forall x \in A : x \wedge x = x.$ ($\wedge$ ist *idempotent*)

Bemerkung 1.1.22. $(\mathbb{Z}, \min), (\mathbb{Z}, \max)$ sind Halbverbände.

Definition 1.1.23. Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee)$ vom Typ $\tau = (2, 2)$ heißt *Verband*, wenn

– $(A, \wedge)$, $(A, \vee)$ Halbverbände sind,

– $\forall a, b \in A : a \wedge (a \vee b) = a$ und

– $\forall a, b \in A : a \vee (a \wedge b) = a$

gilt, wobei die letzten zwei Gesetze *Verschmelzungsgesetze* genannt werden. 01.03.2023

Ein Verband heißt *distributiv*, wenn $\wedge$ distributiv[2] über $\vee$ und $\vee$ distributiv über $\wedge$ ist. 02.03.2023

Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, 0, 1)$ vom Typ $\tau = (2, 2, 0, 0)$ heißt *beschränkter Verband*, wenn

– $(A, \wedge, \vee)$ ein Verband ist,

– $\forall a \in A : a \wedge 0 = 0$ und

– $\forall a \in A : a \vee 1 = 1.$

Beispiel 1.1.24. Mit einer beliebigen Menge M, einen $\mathfrak{K}$-Vektorraum $\mathfrak{V}$ und einer linearen Ordnung $(L, \leq)$ sind $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$, $(\mathrm{Sub}(\mathfrak{V}), \cap, \langle U_1 \cup U_2 \rangle)$, $(L, \min, \max)$ Verbände.

$(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ ist sogar ein distributiver Verband.

Betrachtet man die Abbildung rechts und definiert eine Ordnungsrelation, wobei eine jeweils die höher stehenden Elemente größer als die niedrigeren sind und sei $\wedge, \vee$ das Supremum bzw. Infimum zweier Elemente. Es ist dann $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, \wedge, \vee)$ ein nicht distributiver Verband, da

$$1 \wedge (2 \vee 3) = 1 \wedge 4 = 1 \neq 0 = (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3).$$

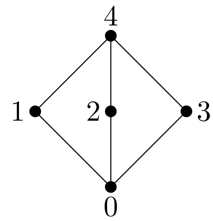

Abbildung 1.1: Hasse-Diagramm einer Ordnungsrelation

[2] Es ist ausreichend Rechts- bzw. Linksdistributivität zu fordern, da die jeweilig andere Distributivität aus der Kommutativität folgt.

Es ist $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M)$ ein beschränkter Verband, $(\mathbb{Q}, \min, \max)$ kann hingegen nicht zu einem beschränkten Verband gemacht werden.

Lemma 1.1.25. *Jeder Verband $\mathfrak{V} = (V, \wedge, \vee)$ mit endlicher Menge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ kann zu einem beschränkten Verband gemacht werden.*

Beweis. Sei $1 := v_1 \vee \ldots \vee v_n$, dann gilt für beliebiges $j \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$v_j \vee 1 = v_j \vee v_1 \vee \ldots \vee v_n = v_1 \vee \ldots \vee v_j \vee v_j \vee \ldots \vee v_n = v_1 \vee \ldots \vee v_n = 1.$$

Analoges gilt für $0 := v_1 \vee \ldots \vee v_n$. Damit ist $(V, \wedge, \vee, 0, 1)$ ein beschränkter Verband. □

Definition 1.1.26. Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ vom Typ $\tau = (2, 2, 0, 0, 1)$ heißt *Boolsche Algebra*, wenn

- $(A, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ ein beschränkter distributiver Verband ist,
- $\forall x \in A : x \wedge x' = 0$ und
- $\forall x \in A : x \vee x' = 1$.

Beispiel 1.1.27. Für eine Menge M ist $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M, ')$ mit $'(X) := M \setminus X$ eine boolsche Algebra.

Bemerkung 1.1.28. Alle boolschen Algebren werden durch den Darstellungssatz von Stone bis auf Isomorphie beschrieben.

Definition 1.1.29. Seien $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I}), \mathfrak{B} = (B, (f_i^{\mathfrak{B}})_{i \in I})$ zwei Algebren vom selben Typ $\tau = (n_i)_{i \in I}$. Eine Abbildung $\varphi : A \to B$ heißt *Homomorphismus*, wenn

$$\forall i \in I \forall a_1, \dots, a_{n_i} \in A : \varphi(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_{n_i})).$$

Wenn φ bijektiv ist, dann heißt die Funktion *Isomorphismus*. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, dann heißt φ *Endomorphismus*. Ein bijektiver Endomorphismus heißt *Automorphismus*.

Beispiel 1.1.30. Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra. Definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(\mathfrak{A}) &:= \{f : A \to A \mid f \text{ ist Endomorphismus}\} \text{ und} \\ \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) &:= \{f : A \to A \mid f \text{ ist Automorphismus}\}. \end{aligned}$$

Es ist dann $(\mathrm{End}(\mathfrak{A}), \circ, \mathrm{id}_A)$ ein Monoid, das *Endomorphismenmonoid von* $\mathfrak{A}$. Jedes Monoid ist isomorph zu einem Endomorphismenmonoid.

$(\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}), \circ, \mathrm{id}_A, \cdot^{-1})$ ist eine Gruppe, die *Automorphismengruppe von* $\mathfrak{A}$. Nach dem Satz von Cayley ist jede endliche Gruppe isomorph zu einer Automorphismengruppe.

1.2 Terme und Termalgebra

Definition 1.2.1. Sei X eine beliebige Menge und seien $(f_i)_{i\in I}$ Funktionssymbole mit Aritäten $(n_i)_{i\in I}$. Die Menge T ist rekursiv definiert durch

$$T_0 := X, \quad T_{k+1} := T_k \cup \{f_i(t_1, \dots t_{n_i}) \mid i \in I \wedge t_1, \dots, t_{n_i} \in T_k\}, \quad T := \bigcup_{i\geq 0} T_i.$$

Ein Element $t \in T$ heißt *Term*, die Elemente aus X *Variablen*, $(f_i)_{i\in I}$ *Sprache* und die Menge T beschreibt alle *Terme über* $(X, (f_i)_{i\in I})$. Für einen Term $t \in T$ heißt $\operatorname{lvl}(t) := \min\{k \mid t \in T_k\}$ *Stufe von* t.

Weiter werden die *Variablen eines Terms* rekursiv definiert. Für $x \in X$ ist $\operatorname{var}(x) := \{x\}$ und für $t = f_i(t_1, \dots, t_n)$ weiter $\operatorname{var}(t) := \bigcup_{j\in\{1,\dots,n_i\}} \operatorname{var}(t_j)$.

Beispiel 1.2.2. Seien $X = \{x, y, z\}$ und $(f_1, f_2, f_3) = (+, \cdot, -)$ mit Aritäten $(2, 2, 1)$. Damit erhälten man die Terme 0-ter Stufe: x, y, z, Terme 1-ter Stufe: $-x, x + x, x \cdot z, z + x, \dots$, Terme 2-ter Stufe: $(-x) + y, (x \cdot z) - y, \dots$.

Definition 1.2.3. Sei T die Menge aller Terme über $(X, (f_i)_{i\in I})$. Es ist dann die *(erzeugte) Termalgebra* $\mathfrak{T}(X, (f_i)_{i\in I}) := (T, (f_i^{\mathfrak{T}}))$, wobei $f_i^{\mathfrak{T}} : T^{n_i} \to T, (t_1, \dots, t_{n_i}) \mapsto f_i(t_1, \dots, t_n)$, eine Algebra vom Typ $\tau = (n_i)_{i\in I}$.

Satz 1.2.4. *Seien X eine Variablenmenge, $(f_i)_{i\in I}$ Funktionssymbole mit Aritäten $\tau = (n_i)_{i\in I}$, $\mathfrak{T} := \mathfrak{T}(\mathfrak{X}, (\mathfrak{f}_i)_{i\in\mathfrak{I}})$ die induzierte Termalgebra und $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine beliebige Algebra vom Typ τ. Es kann jede Abbildung $\varphi : X \to A$ eindeutig zu einem Homomorphismus $\overline{\varphi} : T \to A$ fortgesetzt werden. Es ist also $\overline{\varphi}$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{A}$ ist und $\overline{\varphi}|_X = \varphi$.*

Beweis. Sei $\varphi : X \to A$ beliebig. Es wird dazu $\overline{\varphi} : T \to A$ rekursiv nach der Stufe von Termen definiert. Für $t \ \in X$ wird $\overline{\varphi}(t) := \varphi(t)$ gewählt und für $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in T$ definiere $\overline{\varphi}(t) := f_i^{\mathfrak{A}}(\overline{\varphi}(t_1), \dots, \overline{\varphi}(t_{n_i}))$. Diese Definition ergibt Sinn, da für einen Term t, der als $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_1})$ geschrieben werden kann, die Terme $t_1, \dots, t_{n_i}$ von niedrigerer Stufe als t sind.

Aus dieser Definition ist klar, dass $\overline{\varphi}|_X = \varphi$, es muss die Verträglichkeit von $\overline{\varphi}$ mit den Operationen gezeigt werden. Für $i \in I$ und $t_1, \dots, t_{n_i} \in T$ gilt $\overline{\varphi}(f_i^{\mathfrak{T}}(t_1, \dots, t_{n_i})) = \overline{\varphi}(f_i(t_1, \dots, f_{n_i})) \overset{\text{Def.}}{=} f_i^{\mathfrak{A}}(\overline{\varphi}(t_1), \dots, \overline{\varphi}(t_{n_i}))$.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $\widetilde{\varphi} : T \to A$ ein beliebiger Homomorphismus mit $\widetilde{\varphi}|_X = \varphi$, so zeigt man vermöge vollständiger Induktion nach Termstufe m, dass $\widetilde{\varphi} = \overline{\varphi}$.

Induktionsanfang ($m = 0$): Für $t \in T_0 = X$ gilt klarerweise $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t) = \overline{\varphi}(t)$.
Induktionsschritt ($m \to m+1$): Sei nun $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in T_{m+1}$ mit $t_1, \dots, t_{n_i} \in T_m$, dann gilt $\widetilde{\varphi}(t) = \widetilde{\varphi}(f_i(t_1, \dots, t_{n_i})) = \widetilde{\varphi}(f_i^{\mathfrak{T}}(t_1, \dots, t_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{A}}(\widetilde{\varphi}(t_1), \dots, \widetilde{\varphi}(t_{n_i})) \overset{\text{I.V.}}{=} f_i^{\mathfrak{A}}(\overline{\varphi}(t_1), \dots, \overline{\varphi}(t_{n_i})) = \overline{\varphi}(t)$. □

02.03.2023
08.03.2023

Definition 1.2.5. Seien $X^{(k)} = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq X$ eine Teilmenge der Variablenmenge, $\mathfrak{T}^{(k)} = \mathfrak{T}(X^{(k)}, (f_i)_{i\in I}) = (T^{(k)}, (f_i^{\mathfrak{T}})_{i\in I})$ die erzeugte Termalgebra und $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra vom selben Typ. Für $a_1, \dots, a_k$ heißt $\alpha_{a_1,\dots,a_k} : X^{(k)} \to A, x_j \mapsto a_j$ eine *Variablenbelegung*. Nach Satz 1.2.4 kann diese nun zum *Einsetzungshomomorphismus* $\overline{\alpha}_{a_1,\dots,a_k} : T^{(k)} \to A$ fortgesetzt werden.

Für einen beliebigen Term $t \in T^{(k)}$ ist die *durch t in $\mathfrak{A}$ induzierte Termoperation* als $t^{\mathfrak{A}} : A^k \to A, (a_1, \dots, a_k) \mapsto \overline{\alpha}_{a_1,\dots a_k}(t)$ definiert. Damit wird aus einem abstrakten Term eine Funktion auf A.

Beispiel 1.2.6. Sei $+$ ein binäres Funktionssymbol und $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Damit erhält man u.a. die abstrakten Terme $t = x_1 + (x_2 + x_3), s = (x_1 + x_2) + x_3 \in T$.

Betrachtet man die Algebra $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}})$, so erhält man die induzierten Termfunktionen

$$t^{\mathfrak{R}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 + (a_2 + a_3) \quad \text{und} \quad s^{\mathfrak{R}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_1 + a_2) + a_3.$$

Da $+_{\mathbb{R}}$ assoziativ ist, gilt $t^{\mathfrak{R}} = s^{\mathfrak{R}}$, obwohl im Allgemeinen $t \neq s$.

Beispiel 1.2.7. Sei $\mathfrak{V} = (V, +, 0, -, (m_k)_{k \in \mathfrak{K}})$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathfrak{K}$. Betrachtet man Terme über die Sprache $(+, -, (m_k)_{k \in \mathfrak{K}})$, also z.B. $x_1 + x_2, m_2(x_1 + x_2), x_1 + m_4(x_2)$. Die davon induzierten Termfunktionen stellen Linearkombinationen dar.

Definition 1.2.8. Sei $t, s \in T$ Terme über eine Sprache $(f_i)_{i \in I}$, dann heißt $t \approx s$ *Gesetz*.

Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$ eine Algebra über dieselbe Sprache, dann sagt man $\mathfrak{A}$ *erfüllt das Gesetz* $t \approx s$ oder kurz $\mathfrak{A} \models t \approx s$, wenn

$$\forall \alpha : \mathrm{var}(t) \cup \mathrm{var}(s) \to A : \overline{\alpha}(t) = \overline{\alpha}(s),$$

oder anders formuliert, wenn die Termfunktionen $t^{\mathfrak{A}}, s^{\mathfrak{A}}$ übereinstimmen.

1.3 Varietäten und Klone

In diesem Kapitel werden die Begriffe *Varietät* und *Klon* definiert und es werden Beispiel dazu gegeben. Aussagen darüber folgen in den nächsten Kapiteln.

Definition 1.3.1. Sei Σ eine Menge von Gesetzen über eine Sprache $(f_i)_{i \in I}$, dann heist die Klasse

$$\mathcal{V}(\Sigma) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ ist Algebra über die Sprache } (f_i)_{i \in I} \wedge \forall t \approx s \in \Sigma : A \models t \approx s\}$$

Varietät. Es handelt sich dabei also um eine durch Gesetze definierte Klasse von Algebren.

Beispiel 1.3.2. Betrachtet man die Sprache $(+, 0, -)$ mit Stelligkeiten $(2, 0, 1)$ und definiert die Gesetze (mit Variablenmenge $X = \{x, y, z\}$) $\Sigma = \{$

$(x + y) + z \approx x + (y + z)$,

$0 + x \approx x$, $x + 0 \approx x$,

$x + (-x) \approx 0$, $(-x) + x \approx 0$

$\}$, so ist die Varietät $\mathcal{V}(\Sigma)$ die Klasse aller Gruppen.

Betrachtet man hingegen Gruppen über die Sprache $(+)$ wie in Bemerkung 1.1.10, so kann man die Gruppenaxiome nicht über Gesetze definieren.

Definition 1.3.3. Sei M eine beliebige Menge. Für $1 \leq i \leq n$ ist die *n-dimensionale Projektion auf die i-te Komponente* definiert als

$$\pi_i^{(n)} : M^n \to M, (x_1, \dots, x_n) \to x_i.$$

Definition 1.3.4. Sei M eine beliebige Menge. Eine Teilmenge von Funktionen $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \{f : M^n \to M\}$ heißt *Klon*, wenn

- $\mathcal{C}$ alle Projektionen enthält und
- $\mathcal{C}$ unter Komposition abgeschlossen ist.

Definition 1.3.5. Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i\in I})$ eine Algebra und sei die Menge $\mathcal{T}^{(n)}(\mathfrak{A}) := \{f : A^n \to A \mid f \text{ ist Termfunktion von } \mathfrak{A}\}$. Es ist dann $\mathcal{T}(\mathfrak{A}) := \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$ ein Klon und wird *Termklon von* $\mathfrak{A}$ genannt.

1.4 Konstruktion neuer Algebren

In diesem Kapitel werden drei verschiedene Konstruktionen vorgestellt um aus bereits gegebenen Algebren neue Algebren zu gewinnen.

Definition 1.4.1. Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra und $S \subseteq A$. Dann heißt das Tupel $\mathfrak{S} = (S, (f_i^{\mathfrak{A}}|_{S^{n_i}})_{i\in I})$[3] *Subalgebra* oder *Unteralgebra* von $\mathfrak{A}$, wenn

- $\forall i \in I \forall a_1, \ldots, a_{n_i} \in S : f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in S$. (*$S$ ist abgeschlossen gegenüber allen f_i*)

Wir schreiben in diesem Fall $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{A}$. Ist $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren, so definieren wir die Klasse $S(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{S} \mid \exists \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{S} \leq \mathfrak{A}\}$.

Beispiel 1.4.2. Sei $\mathfrak{V} = (V, +, 0, -, (m_k)_{k\in\mathfrak{K}})$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathfrak{K}$. Dann gilt für jeden Untervektorraum $U : \mathfrak{U} = (U, +, 0, -, (m_k)_{k\in\mathfrak{K}}) \leq \mathfrak{V}$. Weitere Beispiele für Unteralgebren sind $(\mathbb{N}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathrm{Sl}_n(K), \cdot) \leq (\mathrm{Gl}_n(K), \cdot)$.

Proposition 1.4.3. *Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra, $s \approx t$ ein Gesetz und $\mathfrak{A} \models s \approx t$. Dann gilt für jede Unteralgebra $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{S} \models s \approx t$.*

Beweis. Laut Definition gilt für alle Variablenbelegungen $\varphi : \mathrm{var}(s) \cup \mathrm{var}(t) \to A : \bar{\varphi}(s) = \bar{\varphi}(t)$. Wegen $S \subseteq A$ ist diese Bedingung isbesondere für S erfüllt, also gilt $\mathfrak{S} \models s \approx t$. □

Bemerkung 1.4.4. Sei $\mathfrak{V} = (V, +, 0, -, (m_k)_{k\in\mathfrak{K}})$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathfrak{K}$. Dann ist $x \approx 0$ ein Gesetz, welches in $(\{0\}, +, 0, -)$ erfüllt ist, jedoch nicht in $\mathfrak{V}$. Wir sehen also, dass die Umkehrung von Proposition 1.4.3 nicht gilt.

Korollar 1.4.5. *Varietäten sind abgeschlossen unter der Bildung von Unteralgebren.*

Bemerkung 1.4.6. Eine Folgerung ist unmittelbar, dass die Klasse der Körper keine Varietät bilden, denn $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$ ist eine Unteralgebra von $(\mathbb{Q}, +, 0, -, \cdot, 1)$. Allerdings stellen die Ganzen Zahlen keinen Körper dar.

Bemerkung 1.4.7. An dieser Stelle können wir den Unterschied der gegeben Definitionen einer Gruppe feststellen, denn $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Unteralgebra von $(\mathbb{Z}, +)$, jedoch keine Gruppe im Sinne von Bemerkung 1.1.10. Das bedeutet, dass in der Sprache $+$ die Klasse der Gruppen keine Varietät bildet.

08.03.2023
09.03.2023

Proposition 1.4.8. *Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra und $(\mathfrak{S}_j = (S_j, (f_i^{\mathfrak{S}_j})_{i\in I}))_{j\in J}$ eine Familie von Unteralgebren von $\mathfrak{A}$. Dann ist auch $\mathfrak{S} = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{S}_j := (\bigcap_{j\in J} S_j, (f_i^{\mathfrak{A}}|_{\bigcap_{j\in J} S_j})_{i\in I})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$.*

[3]Zwecks besserer Lesbarkeit werden wir dafür meist $\mathfrak{S} = (S, (f_i^{\mathfrak{S}})_{i\in I})$ schreiben.

Beweis. Für $S := \bigcap_{j\in J} S_j$ gilt offensichtlich $S \subseteq A$, also bleibt lediglich die Abgeschlossenheit bezüglich der Funktionen $f_i^{\mathfrak{S}}$ zu zeigen. Seien $a_1, \ldots, a_{n_i} \in S$ beliebig. Dann gilt für alle $j \in J$: $a_1, \ldots, a_{n_i} \in S_j$ und da $\mathfrak{S}_j$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ ist auch $f_i^{\mathfrak{S}_j}(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in S_j$. Das ist genau die Definition von $f^{\mathfrak{S}}(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in \bigcap_{j\in J} S_j = S$, also ist $\mathfrak{S} = (S, (f_i^{\mathfrak{S}})_{i\in I})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$. □

Korollar 1.4.9. *Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra und $S \subseteq A$. Dann ist die von S* erzeugte Unteralgebra *von $\mathfrak{A}$ definiert durch $\langle S\rangle := \bigcap\{\mathfrak{U} \mid S \subseteq U \wedge \mathfrak{U} = (U, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I}) \leq \mathfrak{A}\}$ die kleinste S enthaltende Unteralgebra von $\mathfrak{A}$.*

Definition 1.4.10. Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra und $S \subseteq A$. Die Menge S_∞ ist rekursiv definiert durch

$$S_0 := S, \quad S_{k+1} := S_k \cup \{f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{n_i} \mid i \in I \wedge a_1, \ldots a_{n_i} \in S_k)\}, \quad S_\infty := \bigcup_{k\geq 0} S_k.$$

Proposition 1.4.11. *Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra und $S \subseteq A$. Dann gelten die beiden Identitäten:*

1. $\langle S\rangle = S_\infty$
2. $\langle S\rangle = \{t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in S \wedge t \in T(X)\}$

Beweis. In beiden Behauptungen wird die gegenseitige Inklusion von zwei Mengen gezeigt.

1. Da S_∞[4] eine S enthaltende Unteralgebra von A ist, folgt aus der Definition der erzeugten Unteralgebra, dass $\langle S\rangle \subseteq S_\infty$ gilt. Für die andere Inklusion wird mittels Induktion gezeigt, dass für alle $k \in \mathbb{N} : S_k \subseteq \langle S\rangle$ gilt, woraus schließlich auch $S_\infty = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k \subseteq \langle S\rangle$ folgt.

   Induktionsanfang ($k = 0$): Per Definitionem der erzeugten Algebra gilt $S_0 = S \subseteq \langle S\rangle$
   Induktionsschritt ($k \to k + 1$): Sei nun $a \in S_{k+1}$ beliebig. Falls $a \in S_k$ ist, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung dass $a \in \langle S\rangle$ gilt. Andernfalls exisitiert ein $i \in I$ und es existieren $a_1, \ldots, a_{n_i} \in S_k$, sodass $a = f(a_1, \ldots, a_{n_i})$. Auch hier kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden, weshalb $a_1, \ldots, a_{n_i} \in \langle S\rangle$ gilt und da $(\langle S\rangle, (f_i)_{i\in I})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ ist gilt auch $a = f(a_1 \ldots, a_{n_i}) \in \langle S\rangle$. Daraus folgt die gewünschte Mengeninklusion $S_{k+1} \subseteq \langle S\rangle$.

2. Definiere $M := \{t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) | a_1, \ldots, a_n \in S \wedge t \in T(X)\}$. Es gilt $S \subseteq M$, da die Projektionen $\pi_j^{(n)} : A^n \to A, (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_j$ Termfunktionen sind. Außerdem kann gezeigt werden, dass $(M, (f_i)_{i\in I})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ ist. Sei $i \in I$ beliebig und seien $b_1, \ldots, b_{n_i} \in M$, dann können diese Elemente als $b_j = t_j^{\mathfrak{A}}(a_1^{(j)}, \ldots, a_{m_j}^{(j)})$ mit $a_1^{(j)}, \ldots, a_{m_j}^{(j)} \in S$ für $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ dargestellt werden. Definiert man nun $a := f_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_{n_i})$ und den Term $t := f_i^{\mathfrak{T}}(t_1(x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}), \ldots, t_{n_i}(x_1^{(n_i)}, \ldots, x_{m_{n_i}}^{(n_i)}))$, so erhält man eine passende Termfunktion, das heißt es gilt $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{m_1}^{(1)}, \ldots, a_1^{(n_i)}, \ldots, a_{m_{n_i}}^{(n_i)}) = a$, also insbesondere $a \in M$. Für die andere Mengeninklusion ist erneut eine Induktion nötig. Sei $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in M$ beliebig. Zu zeigen ist, dass $a \in \langle S\rangle$ gilt, wobei dies mittels Induktion nach der Stufe von t gezeit wird.

   Induktionsanfang ($k = 0$): Dann ist der Term t eine Variable x_j und die Termfunktion $t^{\mathfrak{A}}$ ist eine Projektion $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = \pi_j^n(a_1, \ldots, a_n) = a_j \in S \subseteq \langle S\rangle$.
   Induktionsschritt ($m < k \to k$): Dann ist $t = f_i^{\mathfrak{T}}(t_1, \ldots, t_{n_i})$ und $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{n_i}) =$

[4] Hier wird die Algebra für bessere Lesbarkeit mit der Trägermenge identifiziert

$f_i^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_{n_i}^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \in \langle S \rangle$, da die Terme $t_j^{\mathfrak{A}}$ für $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ kleinere Stufe als k haben. Daher sind die Argumente nach Induktionsvoraussetzung in $\langle S \rangle$ und damit auch der Funktionswert.

□

Korollar 1.4.12. *Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$ eine Algebra und $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq A$. Dann gilt für die von S erzeugte Unteralgebra $\langle S \rangle = \{t^{\mathfrak{A}}(s_1, \ldots, s_n) \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in T(x)\}$.*

Beweis. Es gilt klarerweise $\langle S \rangle \supseteq \{t^{\mathfrak{A}}(s_1, \ldots, s_n) \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in T(x)\}$. Sei $a \in \langle S \rangle$ beliebig. Dann existiert ein Term t und es existieren $a_1, \ldots, a_\ell \in S$, sodass $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_\ell)$. Mit dem Term $\tilde{t}(x_1, \ldots, x_n) := t(y_1, \ldots, y_\ell)$, wobei $y_i := x_j \leftrightarrow a_i = s_j$ erhält man $\tilde{t}^{\mathfrak{A}}(s_1, \ldots, s_n) = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_\ell) = a \in \{t^{\mathfrak{A}}(s_1, \ldots, s_n) \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in T(x)\}$. □

Bemerkung 1.4.13. Für eine beliebige Algebra stellt $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A}) := \{\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U} \leq \mathfrak{A}\}$ durch $(\mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \subseteq)$ eine Halbordnung dar. Genauer ist durch $(\mathrm{Sub}(\mathfrak{A}, \wedge, \vee))$, wobei $U_1 \wedge U_2 := U_1 \cap U_2$ und $U_1 \vee U_2 := \langle U_1 \cup U_2 \rangle$, ein Verband gegeben.

Definition 1.4.14. Sei $\tau = (n_i)_{i \in I}$ eine Typ und sei $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$ eine Familie von Algebren in dieses Typs. Dann heißt $\mathfrak{A} := \prod_{j \in J} \mathfrak{A}_\mathrm{j} = (\prod_{j \in J} A_j, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$ *Produktalgebra*, wobei die Funktionssymbole durch $f_i^{\mathfrak{A}}(g_1, \ldots, g_{n_i})(j) := f^{\mathfrak{A}_j}(g_1(j), \ldots, g_{n_i}(j))$ definiert werden. Ist $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren, so definieren wir die Klasse $P(\mathcal{K}) := \{\prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j \mid \forall j \in J : \mathfrak{A}_\mathrm{j} \in K\}$.

Bemerkung 1.4.15. Ist $\mathfrak{A} = \prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j$ eine Produktalgebra und ist $j \in J$, so ist durch die Projektionsabbildung $\pi_j : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_j, g \mapsto g(j)$ ein surjektiver Homomorphismus gegeben.

Proposition 1.4.16. *Sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Signatur, $s \approx t$ ein Gesetz über dieser Sprache, $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$ eine Familie von Algebren in der Signatur und es gelte für alle $j \in J : \mathfrak{A}_j \models s \approx t$. Dann gilt auch $\mathfrak{A} := \prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j \models s \approx t$.*

Beweis. Es ist hinreichend zu zeigen, dass $s^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}$ gilt. Seien $g_1 \ldots, g_n \in A$ beliebig. Dann gilt laut Voraussetzung für alle $j \in J : s^{\mathfrak{A}_j}(g_1(j), \ldots, g_n(j)) \approx t^{\mathfrak{A}_j}(g_1(j), \ldots, g_n(j))$. Daher folgt $j \in J : s^{\mathfrak{A}}(g_1, \ldots, g_n)(j) = s^{\mathfrak{A}_j}(g_1(j), \ldots, g_n(j)) \approx t^{\mathfrak{A}_j}(g_1(j), \ldots, g_n(j)) = t^{\mathfrak{A}}(g_1, \ldots, g_n)(j)$ für alle $j \in J$, also insbesondere $s^{\mathfrak{A}}(g_1, \ldots, g_n) = t^{\mathfrak{A}}(g_1, \ldots, g_n)$ und $s^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}$. □

Korollar 1.4.17. *Varietäten sind abgeschlossen unter der Bildung von Produkten.*

Bemerkung 1.4.18. Auch an dieser Stelle wird deutlich, dass die Klasse der Körper keine Varietät ist. Für einen Körper $\mathfrak{K}$ und den Produktraum $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$ gilt $(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$. Da Körper immer nullteilerfrei sind, kann dieser Produktraum folglich kein Körper sein.

1.5 Freie Algebren

Index