

# Algebra Vorlesungsmitschrift

nach der 2023S Vorlesung von Michael Pinsker

Ian Hornik, Daniel Mayr, Alexander Zach

Stand vom 28. März 2023

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Allgemeine Algebren</b>	<b>3</b>
1.1	Einführung . . . . .	3
1.2	Terme und Termalgebra . . . . .	7
1.3	Varietäten und Klone . . . . .	8
1.4	Konstruktion neuer Algebren . . . . .	9
1.5	Freie Algebren . . . . .	15
	<b>Index</b>	<b>16</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>17</b>

# Kapitel 1

## Allgemeine Algebren

Dieses Kapitel behandelt die Inhalte der Vorlesung, welche auch in Goldstern et al.: *Algebra – Eine grundlagenorientierte Einführungsvorlesung* in den Kapiteln 2. Grundbegriffe, 4.1. Freie Algebren und der Satz von Birkhoff gefunden werden können.

### 1.1 Einführung

Zu Beginn wird der Begriff einer allgemeinen (oder auch universellen) Algebra definiert und es werden weiter einige spezielle Algebren gezeigt.

01.03.2023

**Definition 1.1.1.** Seien  $A$  eine beliebige Menge,  $\tau = (n_i)_{i \in I}$  eine Familie aus  $\mathbb{N}_0$  über eine beliebige Indexmenge  $I$  und  $(f_i)_{i \in I}$  eine Familie von Funktionen, wobei  $f_i : A^{n_i} \rightarrow A$  ist. Das Tupel  $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$  heißt dann (*allgemeine*) *Algebra* vom Typ  $\tau$ . Die einzelnen Funktionen  $f_i$  haben die *Stelligkeit* oder *Arität*  $n_i$ .

*Bemerkung 1.1.2.* Für eine endliche Indexmenge  $I = \{1, \dots, m\}$  wird der Typ auch als  $m$ -Tupel  $\tau = (n_1, \dots, n_m)$  geschrieben und die Algebra als  $\mathfrak{A} = (A, f_1, \dots, f_m)$ .

*Bemerkung 1.1.3.* Eine nullstellige Operation  $f_i$  bildet von der Menge  $A^0 := \{\emptyset\}$  auf  $A$  ab. Es ist also  $f_i$  konstant mit  $f(\emptyset) = a \in A$ . Im Folgenden wird bei  $n_i = 0$  nicht zwischen der Operation  $f_i$  und dem Element  $a$  auf das abgebildet wird unterschieden.

**Definition 1.1.4.** Eine Algebra  $\mathfrak{A} = (A, +)$  vom Typ  $\tau = (2)$  heißt *Halbgruppe*, wenn

$$- \forall x, y, z \in A : (x + y) + z = x + (y + z). \quad (\text{Assoziativität von } +)$$

*Beispiel 1.1.5.*  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{N}, +)$  sind Halbgruppen.

**Definition 1.1.6.** Eine Algebra  $\mathfrak{A} = (A, +, e)$  vom Typ  $\tau = (2, 0)$  heißt *Monoid*, wenn

- $(A, +)$  eine Halbgruppe ist und
- $\forall x \in A : e + x = x + e = x. \quad (e \text{ neutrales Element bezüglich } +)$

*Beispiel 1.1.7.*  $(\mathbb{R}, +, 0)$ ,  $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ ,  $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \cdot, E_2)$ ,  $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$  sind Monoide.

**Definition 1.1.8.** Eine Algebra  $\mathfrak{A} = (A, +, e, -)$  vom Typ  $\tau = (2, 0, 1)$  heißt *Gruppe*, wenn

- $(A, +, e)$  ein Monoid ist und
- $\forall x \in A : x + (-x) = (-x) + x = e. \quad (- \text{ bildet ab auf inverse Elemente})$

**Beispiel 1.1.9.**  $(\mathbb{R}, +, 0, -)$ ,  $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$  sind Gruppen.

**Bemerkung 1.1.10.** Manchmal werden Gruppen auch als Algebra  $\mathfrak{A} = (A, +)$  vom Typ  $\tau = (2)$  definiert, für die

- $\forall x, y, z \in A : (x + y) + z = x + (y + z)$ ,
- $\exists e \in A \forall x \in A : e + x = x + e = x$  und
- $\forall x \in A \exists -x \in A : x + (-x) = (-x) + x = e$  gilt.

Bei der Definition von Unterstrukturen macht es allerdings einen Unterschied, welche der Definitionen verwendet wird, weshalb im Folgenden mit Gruppe der Begriff aus Definition 1.1.8 gemeint ist.

**Definition 1.1.11.** Eine Halbgruppe / Monoid / Gruppe  $\mathfrak{A} = (A, +, \dots)$  heißt *kommutativ* oder *abelsch*, wenn für die zweistellige Operation  $+$

- $\forall x, y \in A : x + y = y + x$  gilt.

**Definition 1.1.12.** Eine Algebra  $\mathfrak{A} = (A, +, 0, \cdot)$  vom Typ  $\tau = (2, 0, 2)$  heißt *Halbring*, wenn

- $(A, +, 0)$  ein kommutatives Monoid,
- $(A, \cdot)$  eine Halbgruppe ist und
- $\forall x, y, z \in A : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$  ( $\cdot$  ist *rechtsdistributiv* über  $+$ )  
 $\wedge z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$  ( $\cdot$  ist *linksdistributiv* über  $+$ )

**Beispiel 1.1.13.**  $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0)$ ,  $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \cdot, 0^1)$  sind Halbringe.

**Definition 1.1.14.** Eine Algebra  $\mathfrak{A} = (A, +, 0, -, \cdot)$  vom Typ  $\tau = (2, 0, 1, 2)$  heißt *Ring*, wenn

- $(A, +, -, 0)$  eine kommutative Gruppe,
- $(A, \cdot)$  eine Halbgruppe ist und
- $\cdot$  ist links- und rechtsdistributiv über  $+$ .

Gibt es eine weitere nullstellige Operation  $1$ , sodass  $(A, \cdot, 1)$  ein (kommutatives) Monoid ist, so spricht man von einem (*kommutativen*) *Ring mit 1*.

**Beispiel 1.1.15.**  $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}[x], +, 0, -, \cdot)$  sind Ringe.

**Definition 1.1.16.** Ein kommutativer Ring mit  $1$   $\mathfrak{A}$  heißt *Körper*, wenn

- $\forall x \in A \setminus \{0\} \exists y \in A : x \cdot y = 1$

Ist  $\cdot$  nicht kommutativ, dann nennen wir  $\mathfrak{A}$  *Schiefkörper* oder *Divisionsring*.

**Bemerkung 1.1.17.** Im Vergleich zu allen anderen bis jetzt definierten speziellen Algebren ist ein Körper nicht durch Allaussagen für alle Elemente (Gesetze) und Operationen definiert.

**Definition 1.1.18.** Seien  $\mathfrak{R} = (R, +, 0, -, \cdot)$  ein Ring,  $\mathfrak{G} = (G, \tilde{+}, \tilde{0}, \tilde{-})$  eine abelsche Gruppe und  $\odot : R \times G \rightarrow G$ ,  $(a, v) \mapsto a \odot v$  und gilt

---

<sup>1</sup>0 steht hier für  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $\forall a, b \in R \forall u \in G : (a \cdot b) \odot u = a \odot (b \odot u)$
- $\forall a, b \in R \forall u \in G : (a + b) \cdot u = (a \cdot u) \tilde{+} (b \cdot u)$
- $\forall a \in R \forall u, v \in G : a \odot (u \tilde{+} v) = (a \odot u) \tilde{+} (a \odot v)$

so heißt  $\mathfrak{G}$  mit  $\odot$  *Modul über  $\mathfrak{R}$*  oder  *$\mathfrak{R}$ -Modul*.

Ein  $\mathfrak{R}$ -Modul kann auch als allgemeine Algebra nach Definition 1.1.1 definiert werden. Wir erhalten die Algebra  $\mathfrak{G}^{\mathfrak{R}} := (G, \tilde{+}, \tilde{0}, \tilde{-}, (m_r)_{r \in \mathfrak{R}})$ , wobei  $m_r : G \rightarrow G, g \mapsto r \odot g$  unäre Operationen sind.

**Bemerkung 1.1.19.** Ein  $\mathfrak{R}$ -Modul ist ein Vektorraum, wenn  $\mathfrak{R}$  ein Körper ist.

**Beispiel 1.1.20.**  $(\mathbb{Z}_9, +, 0, -), (\mathbb{Z}_9^{2 \times 2}, +, 0, -)$  sind Moduln über  $\mathbb{Z}_9$ .

**Definition 1.1.21.** Eine Algebra  $\mathfrak{A} = (A, \wedge)$  vom Typ  $\tau = (2)$  heißt *Halbverband*, wenn

- $\mathfrak{A}$  eine kommutative Halbgruppe ist,
- $\forall x \in A : x \wedge x = x.$  ( $\wedge$  ist *idempotent*)

**Bemerkung 1.1.22.**  $(\mathbb{Z}, \min), (\mathbb{Z}, \max)$  sind Halbverbände.

**Definition 1.1.23.** Eine Algebra  $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee)$  vom Typ  $\tau = (2, 2)$  heißt *Verband*, wenn

- $(A, \wedge), (A, \vee)$  Halbverbände sind,
- $\forall a, b \in A : a \wedge (a \vee b) = a$  und
- $\forall a, b \in A : a \vee (a \wedge b) = a$

gilt, wobei die letzten zwei Gesetze *Verschmelzungsgesetze* genannt werden.

Ein Verband heißt *distributiv*, wenn  $\wedge$  distributiv<sup>2</sup> über  $\vee$  und  $\vee$  distributiv über  $\wedge$  ist.

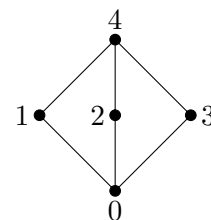
Eine Algebra  $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, 0, 1)$  vom Typ  $\tau = (2, 2, 0, 0)$  heißt *beschränkter Verband*, wenn

- $(A, \wedge, \vee)$  ein Verband ist,
- $\forall a \in A : a \wedge 0 = 0$  und
- $\forall a \in A : a \vee 1 = 1.$

**Beispiel 1.1.24.** Mit einer beliebigen Menge  $M$ , einen  $\mathfrak{K}$ -Vektorraum  $\mathfrak{V}$  und einer linearen Ordnung  $(L, \leq)$  sind  $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup), (\text{Sub}(\mathfrak{V}), \cap, \langle U_1 \cup U_2 \rangle), (L, \min, \max)$  Verbände.

$(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$  ist sogar ein distributiver Verband.

Betrachtet man die Abbildung rechts und definiert eine Ordnungsrelation, wobei eine jeweils die höher stehenden Elemente größer als die niedrigeren sind und sei  $\wedge, \vee$  das Supremum bzw. Infimum zweier Elemente. Es ist dann  $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, \wedge, \vee)$  ein nicht distributiver Verband, da



$$1 \wedge (2 \vee 3) = 1 \wedge 4 = 1 \neq 0 = (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3).$$

Abbildung 1.1: Hasse-Diagramm einer Ordnungsrelation

<sup>2</sup>Es ist ausreichend Rechts- bzw. Linksdistributivität zu fordern, da die jeweilig andere Distributivität aus der Kommutativität folgt.

Es ist  $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M)$  ein beschränkter Verband,  $(\mathbb{Q}, \min, \max)$  kann hingegen nicht zu einem beschränkten Verband gemacht werden.

**Lemma 1.1.25.** *Jeder Verband  $\mathfrak{V} = (V, \wedge, \vee)$  mit endlicher Menge  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  kann zu einem beschränkten Verband gemacht werden.*

*Beweis.* Sei  $1 := v_1 \vee \dots \vee v_n$ , dann gilt für beliebiges  $j \in \{1, \dots, n\}$ , dass

$$v_j \vee 1 = v_j \vee v_1 \vee \dots \vee v_n = v_1 \vee \dots \vee v_j \vee v_j \vee \dots \vee v_n = v_1 \vee \dots \vee v_n = 1.$$

Analoges gilt für  $0 := v_1 \vee \dots \vee v_n$ . Damit ist  $(V, \wedge, \vee, 0, 1)$  ein beschränkter Verband.  $\square$

**Definition 1.1.26.** Eine Algebra  $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, 0, 1, ')$  vom Typ  $\tau = (2, 2, 0, 0, 1)$  heißt *Boolsche Algebra*, wenn

- $(A, \wedge, \vee, 0, 1, ')$  ein beschränkter distributiver Verband ist,
- $\forall x \in A : x \wedge x' = 0$  und
- $\forall x \in A : x \vee x' = 1$ .

*Beispiel 1.1.27.* Für eine Menge  $M$  ist  $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M, ')$  mit  $'(X) := M \setminus X$  eine boolsche Algebra.

*Bemerkung 1.1.28.* Alle boolschen Algebren werden durch den Darstellungssatz von Stone bis auf Isomorphie beschrieben.

**Definition 1.1.29.** Seien  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$ ,  $\mathfrak{B} = (B, (f_i^{\mathfrak{B}})_{i \in I})$  zwei Algebren vom selben Typ  $\tau = (n_i)_{i \in I}$ . Eine Abbildung  $\varphi : A \rightarrow B$  heißt *Homomorphismus*, wenn

$$\forall i \in I \forall a_1, \dots, a_{n_i} \in A : \varphi(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_{n_i})).$$

Wenn  $\varphi$  bijektiv ist, dann heißt die Funktion *Isomorphismus*. Ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ , dann heißt  $\varphi$  *Endomorphismus*. Ein bijektiver Endomorphismus heißt *Automorphismus*.

*Beispiel 1.1.30.* Sei  $\mathfrak{A}$  eine Algebra. Definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned} \text{End}(\mathfrak{A}) &:= \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ ist Endomorphismus}\} \text{ und} \\ \text{Aut}(\mathfrak{A}) &:= \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ ist Automorphismus}\}. \end{aligned}$$

Es ist dann  $(\text{End}(\mathfrak{A}), \circ, \text{id}_A)$  ein Monoid, das *Endomorphismenmonoid von  $\mathfrak{A}$* . Jedes Monoid ist isomorph zu einem Endomorphismenmonoid.

$(\text{Aut}(\mathfrak{A}), \circ, \text{id}_A, \cdot^{-1})$  ist eine Gruppe, die *Automorphismengruppe von  $\mathfrak{A}$* . Nach dem Satz von Cayley ist jede endliche Gruppe isomorph zu einer Automorphismengruppe.

## 1.2 Terme und Termalgebra

**Definition 1.2.1.** Sei  $X$  eine beliebige Menge und seien  $(f_i)_{i \in I}$  Funktionssymbole mit Aritäten  $(n_i)_{i \in I}$ . Die Menge  $T$  ist rekursiv definiert durch

$$T_0 := X, \quad T_{k+1} := T_k \cup \{f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \mid i \in I \wedge t_1, \dots, t_{n_i} \in T_k\}, \quad T := \bigcup_{i \geq 0} T_i.$$

Ein Element  $t \in T$  heißt *Term*, die Elemente aus  $X$  *Variablen*,  $(f_i)_{i \in I}$  *Sprache* und die Menge  $T$  beschreibt alle *Terme über*  $(X, (f_i)_{i \in I})$ . Für einen Term  $t \in T$  heißt  $\text{lvl}(t) := \min\{k \mid t \in T_k\}$  *Stufe von*  $t$ .

Weiter werden die *Variablen eines Terms* rekursiv definiert. Für  $x \in X$  ist  $\text{var}(x) := \{x\}$  und für  $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$  weiter  $\text{var}(t) := \bigcup_{j \in \{1, \dots, n_i\}} \text{var}(t_j)$ .

**Beispiel 1.2.2.** Seien  $X = \{x, y, z\}$  und  $(f_1, f_2, f_3) = (+, \cdot, -)$  mit Aritäten  $(2, 2, 1)$ . Damit erhält man die Terme 0-ter Stufe:  $x, y, z$ , Terme 1-ter Stufe:  $-x, x + x, x \cdot z, z + x, \dots$ , Terme 2-ter Stufe:  $(-x) + y, (x \cdot z) - y, \dots$

**Definition 1.2.3.** Sei  $T$  die Menge aller Terme über  $(X, (f_i)_{i \in I})$ . Es ist dann die (*erzeugte*) *Termalgebra*  $\mathfrak{T}(X, (f_i)_{i \in I}) := (T, (f_i^{\mathfrak{T}}))$ , wobei  $f_i^{\mathfrak{T}} : T^{n_i} \rightarrow T, (t_1, \dots, t_{n_i}) \mapsto f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ , eine Algebra vom Typ  $\tau = (n_i)_{i \in I}$ .

**Satz 1.2.4.** Seien  $X$  eine Variablenmenge,  $(f_i)_{i \in I}$  Funktionssymbole mit Aritäten  $\tau = (n_i)_{i \in I}$ ,  $\mathfrak{T} := \mathfrak{T}(X, (f_i)_{i \in I})$  die induzierte Termalgebra und  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine beliebige Algebra vom Typ  $\tau$ . Es kann jede Abbildung  $\varphi : X \rightarrow A$  eindeutig zu einem Homomorphismus  $\bar{\varphi} : T \rightarrow A$  fortgesetzt werden. Es ist also  $\bar{\varphi}$  ein Homomorphismus von  $\mathfrak{T}$  nach  $\mathfrak{A}$  ist und  $\bar{\varphi}|_X = \varphi$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi : X \rightarrow A$  beliebig. Es wird dazu  $\bar{\varphi} : T \rightarrow A$  rekursiv nach der Stufe von Termen definiert. Für  $t \in X$  wird  $\bar{\varphi}(t) := \varphi(t)$  gewählt und für  $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in T$  definiere  $\bar{\varphi}(t) := f_i^{\mathfrak{A}}(\bar{\varphi}(t_1), \dots, \bar{\varphi}(t_{n_i}))$ . Diese Definition ergibt Sinn, da für einen Term  $t$ , der als  $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$  geschrieben werden kann, die Terme  $t_1, \dots, t_{n_i}$  von niedrigerer Stufe als  $t$  sind.

Aus dieser Definition ist klar, dass  $\bar{\varphi}|_X = \varphi$ , es muss die Verträglichkeit von  $\bar{\varphi}$  mit den Operationen gezeigt werden. Für  $i \in I$  und  $t_1, \dots, t_{n_i} \in T$  gilt  $\bar{\varphi}(f_i^{\mathfrak{T}}(t_1, \dots, t_{n_i})) = \bar{\varphi}(f_i(t_1, \dots, t_{n_i})) \stackrel{\text{Def.}}{=} f_i^{\mathfrak{A}}(\bar{\varphi}(t_1), \dots, \bar{\varphi}(t_{n_i}))$ .

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei  $\tilde{\varphi} : T \rightarrow A$  ein beliebiger Homomorphismus mit  $\tilde{\varphi}|_X = \varphi$ , so zeigt man vermöge vollständiger Induktion nach Termstufe  $m$ , dass  $\tilde{\varphi} = \bar{\varphi}$ .

Induktionsanfang ( $m = 0$ ): Für  $t \in T_0 = X$  gilt klarerweise  $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) = \bar{\varphi}(t)$ .

Induktionsschritt ( $m \rightarrow m+1$ ): Sei nun  $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in T_{m+1}$  mit  $t_1, \dots, t_{n_i} \in T_m$ , dann gilt  $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(f_i(t_1, \dots, t_{n_i})) = \tilde{\varphi}(f_i^{\mathfrak{T}}(t_1, \dots, t_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{A}}(\tilde{\varphi}(t_1), \dots, \tilde{\varphi}(t_{n_i})) \stackrel{\text{I.V.}}{=} f_i^{\mathfrak{A}}(\bar{\varphi}(t_1), \dots, \bar{\varphi}(t_{n_i})) = \bar{\varphi}(t)$ .  $\square$

**Definition 1.2.5.** Seien  $X^{(k)} = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq X$  eine Teilmenge der Variablenmenge,  $\mathfrak{T}^{(k)} = \mathfrak{T}(X^{(k)}, (f_i)_{i \in I}) = (T^{(k)}, (f_i^{\mathfrak{T}^{(k)}})_{i \in I})$  die erzeugte Termalgebra und  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra vom selben Typ. Für  $a_1, \dots, a_k$  heißt  $\alpha_{a_1, \dots, a_k} : X^{(k)} \rightarrow A, x_j \mapsto a_j$  eine *Variablenbelegung*. Nach Satz 1.2.4 kann diese nun zum *Einsetzungshomomorphismus*  $\bar{\alpha}_{a_1, \dots, a_k} : T^{(k)} \rightarrow A$  fortgesetzt werden.

Für einen beliebigen Term  $t \in T^{(k)}$  ist die *durch*  $t$  *in*  $\mathfrak{A}$  *induzierte Termoperation* als  $t^{\mathfrak{A}} : A^k \rightarrow A, (a_1, \dots, a_k) \mapsto \bar{\alpha}_{a_1, \dots, a_k}(t)$  definiert. Damit wird aus einem abstrakten Term eine Funktion auf  $A$ .

*Beispiel 1.2.6.* Sei  $+$  ein binäres Funktionssymbol und  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Damit erhält man u.a. die abstrakten Terme  $t = x_1 + (x_2 + x_3)$ ,  $s = (x_1 + x_2) + x_3 \in T$ .

Betrachtet man die Algebra  $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}})$ , so erhält man die induzierten Termfunktionen

$$t^{\mathfrak{R}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 + (a_2 + a_3) \quad \text{und} \quad s^{\mathfrak{R}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_1 + a_2) + a_3.$$

Da  $+_{\mathbb{R}}$  assoziativ ist, gilt  $t^{\mathfrak{R}} = s^{\mathfrak{R}}$ , obwohl im Allgemeinen  $t \neq s$ .

*Beispiel 1.2.7.* Sei  $\mathfrak{V} = (V, +, 0, -, (m_k)_{k \in \mathbb{R}})$  ein Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Betrachtet man Terme über die Sprache  $(+, -, (m_k)_{k \in \mathbb{R}})$ , also z.B.  $x_1 + x_2$ ,  $m_2(x_1 + x_2)$ ,  $x_1 + m_4(x_2)$ . Die davon induzierten Termfunktionen stellen Linearkombinationen dar.

**Definition 1.2.8.** Sei  $t, s \in T$  Terme über eine Sprache  $(f_i)_{i \in I}$ , dann heißt  $t \approx s$  *Gesetz*.

Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra über dieselbe Sprache, dann sagt man  $\mathfrak{A}$  *erfüllt das Gesetz*  $t \approx s$  oder kurz  $\mathfrak{A} \models t \approx s$ , wenn

$$\forall \alpha : \text{var}(t) \cup \text{var}(s) \rightarrow A : \bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(s),$$

oder anders formuliert, wenn die Termfunktionen  $t^{\mathfrak{A}}, s^{\mathfrak{A}}$  übereinstimmen.

### 1.3 Varietäten und Klone

In diesem Kapitel werden die Begriffe *Varietät* und *Klon* definiert und es werden Beispiele dazu gegeben. Aussagen darüber folgen in den nächsten Kapiteln.

**Definition 1.3.1.** Sei  $\Sigma$  eine Menge von Gesetzen über eine Sprache  $(f_i)_{i \in I}$ , dann heißt die Klasse

$$\mathcal{V}(\Sigma) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ ist Algebra über die Sprache } (f_i)_{i \in I} \wedge \forall t \approx s \in \Sigma : \mathfrak{A} \models t \approx s\}$$

*Varietät.* Es handelt sich dabei also um eine durch Gesetze definierte Klasse von Algebren.

*Beispiel 1.3.2.* Betrachtet man die Sprache  $(+, 0, -)$  mit Stelligkeiten  $(2, 0, 1)$  und definiert die Gesetze (mit Variablenmenge  $X = \{x, y, z\}$ )  $\Sigma = \{$

$$(x + y) + z \approx x + (y + z),$$

$$0 + x \approx x, x + 0 \approx x,$$

$$x + (-x) \approx 0, (-x) + x \approx 0$$

$\}$ , so ist die Varietät  $\mathcal{V}(\Sigma)$  die Klasse aller Gruppen.

Betrachtet man hingegen Gruppen über die Sprache  $(+)$  wie in Bemerkung 1.1.10, so kann man die Gruppenaxiome nicht über Gesetze definieren.

**Definition 1.3.3.** Sei  $M$  eine beliebige Menge. Für  $1 \leq i \leq n$  ist die *n-dimensionale Projektion auf die i-te Komponente* definiert als

$$\pi_i^{(n)} : M^n \rightarrow M, (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_i.$$

**Definition 1.3.4.** Sei  $M$  eine beliebige Menge. Eine Teilmenge von Funktionen  $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \{f : M^n \rightarrow M\}$  heißt *Klon*, wenn



- $\mathcal{C}$  alle Projektionen enthält und
- $\mathcal{C}$  unter Komposition abgeschlossen ist.

**Definition 1.3.5.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$  eine Algebra und sei die Menge  $\mathcal{T}^{(n)}(\mathfrak{A}) := \{f : A^n \rightarrow A \mid f \text{ ist Termfunktion von } \mathfrak{A}\}$ . Es ist dann  $\mathcal{T}(\mathfrak{A}) := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$  ein Klon und wird *Termklon* von  $\mathfrak{A}$  genannt.

## 1.4 Konstruktion neuer Algebren

In diesem Kapitel werden drei verschiedene Konstruktionen vorgestellt um aus bereits gegebenen Algebren neue Algebren zu gewinnen.

**Definition 1.4.1.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$  eine Algebra und  $S \subseteq A$ . Dann heißt das Tupel  $\mathfrak{S} = (S, (f_i^{\mathfrak{A}}|_{S^{n_i}})_{i \in I})$ <sup>3</sup> *Subalgebra* oder *Unteralgebra* von  $\mathfrak{A}$ , wenn

- $\forall i \in I \forall a_1, \dots, a_{n_i} \in S : f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i}) \in S$ . ( $S$  ist abgeschlossen gegenüber allen  $f_i$ )

Wir schreiben in diesem Fall  $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{A}$ . Ist  $\mathcal{K}$  eine Klasse von Algebren, so definieren wir die Klasse  $S(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{S} \mid \exists \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{S} \leq \mathfrak{A}\}$ .

*Beispiel 1.4.2.* Sei  $\mathfrak{V} = (V, +, 0, -, (m_k)_{k \in \mathfrak{K}})$  ein Vektorraum über einem Körper  $\mathfrak{K}$ . Dann gilt für jeden Untervektorraum  $U : \mathfrak{U} = (U, +, 0, -, (m_k)_{k \in \mathfrak{K}}) \leq \mathfrak{V}$ . Weitere Beispiele für Unteralgebren sind  $(\mathbb{N}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$  und  $(\text{Sl}_n(K), \cdot) \leq (\text{Gl}_n(K), \cdot)$ .

**Proposition 1.4.3.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$  eine Algebra,  $s \approx t$  ein Gesetz und  $\mathfrak{A} \models s \approx t$ . Dann gilt für jede Unteralgebra  $\mathfrak{S}$  von  $\mathfrak{A}$  auch  $\mathfrak{S} \models s \approx t$ .

*Beweis.* Laut Definition gilt für alle Variablenbelegungen  $\varphi : \text{var}(s) \cup \text{var}(t) \rightarrow A : \bar{\varphi}(s) = \bar{\varphi}(t)$ . Wegen  $S \subseteq A$  ist diese Bedingung insbesondere für  $S$  erfüllt, also gilt  $\mathfrak{S} \models s \approx t$ .  $\square$

*Bemerkung 1.4.4.* Sei  $\mathfrak{V} = (V, +, 0, -, (m_k)_{k \in \mathfrak{K}})$  ein Vektorraum über einem Körper  $\mathfrak{K}$ . Dann ist  $x \approx 0$  ein Gesetz, welches in  $(\{0\}, +, 0, -)$  erfüllt ist, jedoch nicht in  $\mathfrak{V}$ . Wir sehen also, dass die Umkehrung von Proposition 1.4.3 nicht gilt.

**Korollar 1.4.5.** Varietäten sind abgeschlossen unter der Bildung von Unteralgebren.

*Bemerkung 1.4.6.* Eine Folgerung ist unmittelbar, dass die Klasse der Körper keine Varietät bilden, denn  $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$  ist eine Unteralgebra von  $(\mathbb{Q}, +, 0, -, \cdot, 1)$ . Allerdings stellen die Ganzen Zahlen keinen Körper dar.

*Bemerkung 1.4.7.* An dieser Stelle können wir den Unterschied der gegebenen Definitionen einer Gruppe feststellen, denn  $(\mathbb{N}, +)$  ist eine Unteralgebra von  $(\mathbb{Z}, +)$ , jedoch keine Gruppe im Sinne von Bemerkung 1.1.10. Das bedeutet, dass in der Sprache  $+$  die Klasse der Gruppen keine Varietät bildet.

**Proposition 1.4.8.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$  eine Algebra und  $(\mathfrak{S}_j = (S_j, (f_i^{\mathfrak{S}_j})_{i \in I}))_{j \in J}$  eine Familie von Unteralgebren von  $\mathfrak{A}$ . Dann ist auch  $\mathfrak{S} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{S}_j := (\bigcap_{j \in J} S_j, (f_i^{\mathfrak{A}}|_{\bigcap_{j \in J} S_j})_{i \in I})$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{A}$ .

<sup>3</sup>Zwecks besserer Lesbarkeit werden wir dafür meist  $\mathfrak{S} = (S, (f_i^{\mathfrak{S}})_{i \in I})$  schreiben.

*Beweis.* Für  $S := \bigcap_{j \in J} S_j$  gilt offensichtlich  $S \subseteq A$ , also bleibt lediglich die Abgeschlossenheit bezüglich der Funktionen  $f_i^{\mathfrak{S}}$  zu zeigen. Seien  $a_1, \dots, a_{n_i} \in S$  beliebig. Dann gilt für alle  $j \in J$ :  $a_1, \dots, a_{n_i} \in S_j$  und da  $\mathfrak{S}_j$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{A}$  ist auch  $f_i^{\mathfrak{S}_j}(a_1, \dots, a_{n_i}) \in S_j$ . Das ist genau die Definition von  $f_i^{\mathfrak{S}}(a_1, \dots, a_{n_i}) \in \bigcap_{j \in J} S_j = S$ , also ist  $\mathfrak{S} = (S, (f_i^{\mathfrak{S}})_{i \in I})$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

**Korollar 1.4.9.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra und  $S \subseteq A$ . Dann ist die von  $S$  erzeugte Unteralgebra von  $\mathfrak{A}$  definiert durch  $\langle S \rangle := \bigcap \{ \mathfrak{U} \mid S \subseteq \mathfrak{U} \wedge \mathfrak{U} = (U, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I}) \leq \mathfrak{A} \}$  die kleinste  $S$  enthaltende Unteralgebra von  $\mathfrak{A}$ .

**Definition 1.4.10.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra und  $S \subseteq A$ . Die Menge  $S_\infty$  ist rekursiv definiert durch

$$S_0 := S, \quad S_{k+1} := S_k \cup \{f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i}) \mid i \in I \wedge a_1, \dots, a_{n_i} \in S_k\}, \quad S_\infty := \bigcup_{k \geq 0} S_k.$$

*Beispiel 1.4.11.* Diese Skizze zeigt die anschauliche Motiviation der vorhergehenden Definition.

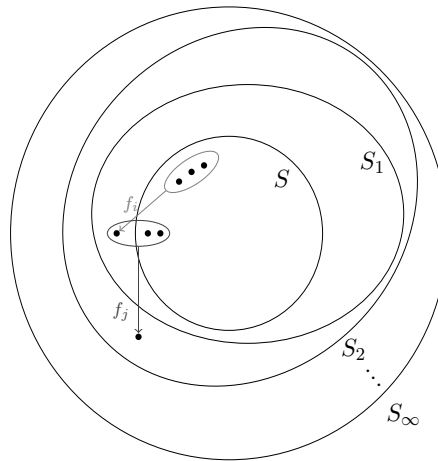


Abbildung 1.2: Subalgebra von unten

**Proposition 1.4.12.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra und  $S \subseteq A$ . Dann gelten die beiden Identitäten:

1.  $\langle S \rangle = S_\infty$
2.  $\langle S \rangle = \{t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in S \wedge t \in T(X)\}$

*Beweis.* In beiden Behauptungen wird die gegenseitige Inklusion von zwei Mengen gezeigt.

1. Da  $S_\infty$ <sup>4</sup> eine  $S$  enthaltende Unteralgebra von  $A$  ist, folgt aus der Definition der erzeugten Unteralgebra, dass  $\langle S \rangle \subseteq S_\infty$  gilt. Für die andere Inklusion wird mittels Induktion gezeigt, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$ :  $S_k \subseteq \langle S \rangle$  gilt, woraus schließlich auch  $S_\infty = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \subseteq \langle S \rangle$  folgt.

Induktionsanfang ( $k = 0$ ): Per Definitionem der erzeugten Algebra gilt  $S_0 = S \subseteq \langle S \rangle$

Induktionsschritt ( $k \rightarrow k + 1$ ): Sei nun  $a \in S_{k+1}$  beliebig. Falls  $a \in S_k$  ist, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung dass  $a \in \langle S \rangle$  gilt. Andernfalls existiert ein  $i \in I$  und es existieren  $a_1, \dots, a_{n_i} \in S_k$ , sodass  $a = f_i(a_1, \dots, a_{n_i})$ . Auch hier kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden, weshalb  $a_1, \dots, a_{n_i} \in \langle S \rangle$  gilt und da  $(\langle S \rangle, (f_i)_{i \in I})$  eine Unteralgebra

<sup>4</sup>Hier wird die Algebra für bessere Lesbarkeit mit der Trägermenge identifiziert

von  $\mathfrak{A}$  ist gilt auch  $a = f(a_1, \dots, a_{n_i}) \in \langle S \rangle$ . Daraus folgt die gewünschte Mengeninklusion  $S_{k+1} \subseteq \langle S \rangle$ .

2. Definiere  $M := \{t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in S \wedge t \in T(X)\}$ . Es gilt  $S \subseteq M$ , da die Projektionen  $\pi_j^{(n)} : A^n \rightarrow A, (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_j$  Termfunktionen sind. Außerdem kann gezeigt werden, dass  $(M, (f_i)_{i \in I})$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{A}$  ist. Sei  $i \in I$  beliebig und seien  $b_1, \dots, b_{n_i} \in M$ , dann können diese Elemente als  $b_j = t_j^{\mathfrak{A}}(a_1^{(j)}, \dots, a_{m_j}^{(j)})$  mit  $a_1^{(j)}, \dots, a_{m_j}^{(j)} \in S$  für  $j \in \{1, \dots, n_i\}$  dargestellt werden. Definiert man nun  $a := f_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_{n_i})$  und den Term  $t := f_i^{\mathfrak{T}}(t_1(x_1^{(1)}, \dots, x_{m_1}^{(1)}), \dots, t_{n_i}(x_1^{(n_i)}, \dots, x_{m_{n_i}}^{(n_i)}))$ , so erhält man eine passende Termfunktion, das heißt es gilt  $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{m_1}^{(1)}, \dots, a_1^{(n_i)}, \dots, a_{m_{n_i}}^{(n_i)}) = a$ , also insbesondere  $a \in M$ . Für die andere Mengeninklusion ist erneut eine Induktion nötig. Sei  $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \in M$  beliebig. Zu zeigen ist, dass  $a \in \langle S \rangle$  gilt, wobei dies mittels Induktion nach der Stufe von  $t$  gezeigt wird.

Induktionsanfang ( $k = 0$ ): Dann ist der Term  $t$  eine Variable  $x_j$  und die Termfunktion  $t^{\mathfrak{A}}$  ist eine Projektion  $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = \pi_j^n(a_1, \dots, a_n) = a_j \in S \subseteq \langle S \rangle$ .

Induktionsschritt ( $m < k \rightarrow k$ ): Dann ist  $t = f_i^{\mathfrak{T}}(t_1, \dots, t_{n_i})$  und  $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f_i^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_{n_i}^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) \in \langle S \rangle$ , da die Terme  $t_j^{\mathfrak{A}}$  für  $j \in \{1, \dots, n_i\}$  kleinere Stufe als  $k$  haben. Daher sind die Argumente nach Induktionsvoraussetzung in  $\langle S \rangle$  und damit auch der Funktionswert.

□

**Korollar 1.4.13.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra und  $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq A$ . Dann gilt für die von  $S$  erzeugte Unteralgebra  $\langle S \rangle = \{t^{\mathfrak{A}}(s_1, \dots, s_n) \mid t(x_1, \dots, x_n) \in T(x)\}$ .

*Beweis.* Es gilt klarerweise  $\langle S \rangle \supseteq \{t^{\mathfrak{A}}(s_1, \dots, s_n) \mid t(x_1, \dots, x_n) \in T(x)\}$ . Sei  $a \in \langle S \rangle$  beliebig. Dann existiert ein Term  $t$  und es existieren  $a_1, \dots, a_\ell \in S$ , sodass  $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_\ell)$ . Mit dem Term  $\tilde{t}(x_1, \dots, x_n) := t(y_1, \dots, y_\ell)$ , wobei  $y_i := x_j \leftrightarrow a_i = s_j$  erhält man  $\tilde{t}^{\mathfrak{A}}(s_1, \dots, s_n) = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_\ell) = a \in \{t^{\mathfrak{A}}(s_1, \dots, s_n) \mid t(x_1, \dots, x_n) \in T(x)\}$ . □

*Bemerkung 1.4.14.* Für eine beliebige Algebra stellt  $\text{Sub}(\mathfrak{A}) := \{\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U} \leq \mathfrak{A}\}$  durch  $(\text{Sub}(\mathfrak{A}), \subseteq)$  eine Halbordnung dar. Genauer ist durch  $(\text{Sub}(\mathfrak{A}), \wedge, \vee)$ , wobei  $U_1 \wedge U_2 := U_1 \cap U_2$  und  $U_1 \vee U_2 := \langle U_1 \cup U_2 \rangle$ , ein Verband gegeben.

**Definition 1.4.15.** Sei  $\tau = (n_i)_{i \in I}$  eine Typ und sei  $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$  eine Familie von Algebren in dieses Typs. Dann heißt  $\mathfrak{A} := \prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j = (\prod_{j \in J} A_j, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  Produktalgebra, wobei die Funktionssymbole durch  $f_i^{\mathfrak{A}}(g_1, \dots, g_{n_i})(j) := f_i^{\mathfrak{A}_j}(g_1(j), \dots, g_{n_i}(j))$  definiert werden. Ist  $\mathcal{K}$  eine Klasse von Algebren, so definieren wir die Klasse  $P(\mathcal{K}) := \{\prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j \mid \forall j \in J : \mathfrak{A}_j \in \mathcal{K}\}$ .

*Beispiel 1.4.16.* Folgende Abbildung visualisiert die Bildung einer Produktalgebra.

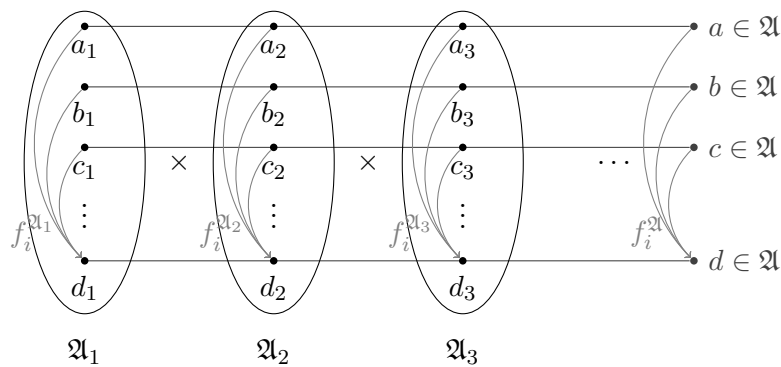


Abbildung 1.3: Visualisierung von Produktalgebren

**Bemerkung 1.4.17.** Ist  $\mathfrak{A} = \prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j$  eine Produktalgebra und ist  $j \in J$ , so ist durch die Projektionsabbildung  $\pi_j : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_j, g \mapsto g(j)$  ein surjektiver Homomorphismus gegeben.

**Proposition 1.4.18.** Sei  $(f_i)_{i \in I}$  eine Signatur,  $s \approx t$  ein Gesetz über dieser Sprache,  $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$  eine Familie von Algebren in der Signatur und es gelte für alle  $j \in J : \mathfrak{A}_j \models s \approx t$ . Dann gilt auch  $\mathfrak{A} := \prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j \models s \approx t$ .

**Beweis.** Es ist hinreichend zu zeigen, dass  $s^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}$  gilt. Seien  $g_1, \dots, g_n \in A$  beliebig. Dann gilt laut Voraussetzung für alle  $j \in J : s^{\mathfrak{A}_j}(g_1(j), \dots, g_n(j)) \approx t^{\mathfrak{A}_j}(g_1(j), \dots, g_n(j))$ . Daher folgt  $j \in J : s^{\mathfrak{A}}(g_1, \dots, g_n)(j) = s^{\mathfrak{A}_j}(g_1(j), \dots, g_n(j)) \approx t^{\mathfrak{A}_j}(g_1(j), \dots, g_n(j)) = t^{\mathfrak{A}}(g_1, \dots, g_n)(j)$  für alle  $j \in J$ , also insbesondere  $s^{\mathfrak{A}}(g_1, \dots, g_n) = t^{\mathfrak{A}}(g_1, \dots, g_n)$  und  $s^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}$ .  $\square$

**Korollar 1.4.19.** Varietäten sind abgeschlossen unter der Bildung von Produkten.

**Bemerkung 1.4.20.** Auch an dieser Stelle wird deutlich, dass die Klasse der Körper keine Varietät ist. Für einen Körper  $\mathfrak{K}$  und den Produktraum  $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$  gilt  $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$ . Da Körper immer nullteilerfrei sind, kann dieser Produktraum folglich kein Körper sein.

09.03.2023

15.03.2023

**Definition 1.4.21.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra,  $m \in \mathbb{N}$  und  $R \subseteq A^m$  eine  $m$ -stellige Relation auf  $A$ . Dann heißt  $R$  *invariant unter  $\mathfrak{A}$* , wenn

$$- \forall i \in I : \forall r^{(1)}, \dots, r^{(n_i)} \in R : (f_i(r_1^{(1)}, \dots, r_1^{(n_i)}), \dots, f_i(r_m^{(1)}, \dots, r_m^{(n_i)})) \in R.$$

**Definition 1.4.22.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra und  $\sim \subseteq A^2$  eine Äquivalenzrelation. Wenn  $\sim$  invariant unter  $\mathfrak{A}$  ist, dann heißt  $\sim$  *Kongruenzrelation*. Außerdem wird damit die Menge  $\text{Con}(\mathfrak{A}) := \{\sim \subseteq A^2 \mid \sim \text{ ist Kongruenzrelation auf } \mathfrak{A}\}$  definiert.

**Beispiel 1.4.23.** Sei  $X$  eine Menge,  $(f_i)_{i \in I}$  eine Signatur und  $\mathfrak{T} = (T, (f_i^{\mathfrak{T}})_{i \in I})$  die Termalgebra über  $X$ . Sei außerdem  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra in der selben Signatur. Dann ist durch  $t \sim s \Leftrightarrow t^{\mathfrak{A}} = s^{\mathfrak{A}}$  auf  $\mathfrak{T}$  eine Kongruenzrelation gegeben.

**Beispiel 1.4.24.** Für jede beliebige Algebra  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  sind durch die beiden Relationen  $\sim_1 = A^2$  und  $\sim_2 = \{(a, a) \mid a \in A\}$  Kongruenzrelationen auf  $\mathfrak{A}$  gegeben. Diese nennet man daher auch *triviale Kongruenzrelationen*.

**Bemerkung 1.4.25.** Für eine beliebige Algebra  $\mathfrak{A}$  ist durch  $(\text{Con}(\mathfrak{A}), \subseteq)$  eine Halbordnung gegeben. Da es zu zwei Kongruenzrelationen bezüglich der Mengeninklusion immer ein Supremum und Infimum gibt, entsteht sogar ein Verband.

**Definition 1.4.26.** Eine Algebra  $\mathfrak{A}$  heißt *einfach*, wenn es keine nicht-trivialen Kongruenzrelationen gibt.

**Definition 1.4.27.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra und sei  $\sim \subseteq A^2$  eine Kongruenzrelation. Dann heißt  $\mathfrak{A}/\sim := (A/\sim, (f_i^{\mathfrak{A}/\sim})_{i \in I})$  *Faktoralgebra* von  $\mathfrak{A}$ , wobei  $A/\sim = \{[a]_{\sim} \mid a \in A\}$  die Menge der Äquivalenzklassen<sup>5</sup> ist und die Funktionen definiert<sup>6</sup> sind durch  $f_i^{\mathfrak{A}/\sim}([a_1]_{\sim}, \dots, [a_{n_i}]_{\sim}) := [f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})]_{\sim}$ . Für eine Klasse  $\mathcal{K}$  von Algebren wird die Klasse der Faktoralgebren definiert  $H(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{A}/\sim \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{K} \wedge \sim \in \text{Con}(\mathfrak{A})\}$ .

**Beispiel 1.4.28.** Betrachten wir die Algebra  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  und definieren darauf die Kongruenzrelation  $a \sim b :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} (a - b = k \cdot m)$ , so stellt  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot) = (\mathbb{Z}, +, \cdot)/\sim$  eine Faktoralgebra dar. Man bemerke außerdem, dass in  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  beispielsweise das Gesetz  $\forall x (\overbrace{x + \dots + x}^{m+1} = x)$  gilt, während dieses in  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  nicht gilt. Es können also in Faktoralgebra möglicherweise mehr Gesetze erfüllt sein, als in der ursprünglichen Algebra.

**Bemerkung 1.4.29.** Sei  $\mathfrak{A}$  eine beliebige Faktoralgebra und  $\sim$  eine Kongruenzrelation. Dann ist die *kanonische Faktorabbildung*  $\varphi : A \rightarrow A/\sim, a \mapsto [a]_{\sim}$  ein surjektiver Homomorphismus, das heißt Faktoralgebren sind homomorphe Bilder von Algebren. Der folgende Satz liefert in gewissem Sinn die Umkehrung.

**Lemma 1.4.30.** Seien  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  und  $\mathfrak{B} = (B, (f_i^{\mathfrak{B}})_{i \in I})$  Algebren vom selben Typ und sei  $h : A \rightarrow B$  ein Homomorphismus. Dann ist  $\ker h := \{(a, b) \in A^2 \mid h(a) = h(b)\}$  eine Kongruenzrelation auf  $\mathfrak{A}$ .

**Beweis.** Es sei  $i \in I$  beliebig und  $a_1, \dots, a_{n_i}, b_1, \dots, b_{n_i} \in A$  mit  $(a_j, b_j) \in \ker h$  für alle  $j \in \{1, \dots, n_i\}$ . Laut Definition gilt also  $h(a_j) = h(b_j)$  für alle  $j \in \{1, \dots, n_i\}$  und daher auch  $h(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(h(b_1), \dots, h(b_{n_i})) = h(f_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_{n_i}))$ , also genau die Definition von  $(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i}), f_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_{n_i})) \in \ker h$ . Damit ist  $\ker h$  invariant unter  $\mathfrak{A}$  und da es sich offensichtlich um eine Äquivalenzrelation handelt ist  $\ker h$  eine Kongruenzrelation auf  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

**Satz 1.4.31** (Homomorphiesatz). Seien  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  und  $\mathfrak{B} = (B, (f_i^{\mathfrak{B}})_{i \in I})$  zwei Algebren in derselben Signatur,  $\varphi : A \rightarrow A/\ker h$  die kanonische Faktorabbildung und sei  $h : A \rightarrow B$  ein Homomorphismus. Dann existiert genau ein Homomorphismus  $\tilde{h} : A/\ker h \rightarrow B$  mit  $h = \tilde{h} \circ \varphi$ . Dieser Homomorphismus ist injektiv und, falls  $h$  surjektiv ist, auch surjektiv.

**Beweis.** Für die Surjektivität von  $\tilde{h}$  ist nichts zu zeigen. Der übrige Beweis ist in vier Schritte gegliedert.

Eindeutigkeit: Seien  $\tilde{h}$  und  $\hat{h}$  zwei Homomorphismen von  $A/\ker h$  nach  $B$  mit den geforderten Eigenschaften. Dann gilt für  $a \in A$  beliebig  $\hat{h}([a]) = h(a) = \tilde{h}([a])$ , also  $\hat{h} = \tilde{h}$ .

<sup>5</sup>Für die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation wird häufig  $[a]$  statt  $[a]_{\sim}$  geschrieben.

<sup>6</sup>Dass diese Funktionen tatsächlich wohldefiniert sind, folgt direkt aus der Definition der Invarianz einer Kongruenzrelation unter der Algebra.

Existenz: Sei  $[a] \in A/\ker h$  beliebig und definiere  $\tilde{h}([a]) := h(a)$ . Diese Abbildung ist wohldefiniert, da aus  $[a] = [b]$  laut Definition  $h(a) = h(b)$  folgt, das heißt die Definition ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

Homomorphismus: Sei  $i \in I$  und seien  $[a_1], \dots, [a_{n_i}] \in A/\ker h$  beliebig. Dann gilt laut Definition  $\tilde{h}(f_i^{\mathfrak{A}/\ker h}([a_1], \dots, [a_{n_i}])) = \tilde{h}([f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})]) = h(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(\tilde{h}([a_1]), \dots, \tilde{h}([a_{n_i}]))$ , also ist  $\tilde{h}$  ein Homomorphismus.

Injektivität: Seien  $[a], [b] \in A/\ker h$  beliebig mit  $\tilde{h}([a]) = \tilde{h}([b])$ . Dann folgt laut Definition  $h(a) = h(b)$ , also  $(a, b) \in \ker h$  und damit  $[a] = [b]$ .  $\square$

**Proposition 1.4.32.** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$  eine Algebra,  $s \approx t$  ein Gesetz und  $\mathfrak{A} \models s \approx t$ . Dann gilt für jede Faktoralgebra  $\mathfrak{A}/\sim \models s \approx t$ .

*Beweis.* Seien  $x_1, \dots, x_n$  Variablen mit  $\text{var}(s) \cup \text{var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$  und seien  $[a_1], \dots, [a_n]$  beliebige Werte aus  $A/\sim$  der Variablen. Laut Voraussetzung gilt  $s^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$ , woraus  $s^{\mathfrak{A}/\sim}([a_1], \dots, [a_n]) = [s^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)] = [t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)] = t^{\mathfrak{A}/\sim}([a_1], \dots, [a_n])$  folgt. Insbesondere ist also  $\mathfrak{A}/\sim \models s \approx t$  erfüllt.  $\square$

**Korollar 1.4.33.** Varietäten sind abgeschlossen unter der Bildung von Faktoralgebren.

15.03.2023

16.03.2023

**Satz 1.4.34** (Birkhoff). Sei  $\tau = (f_i)_{i \in I}$  eine Signatur und  $\mathcal{K}$  eine Klasse von  $\tau$ -Algebren. Dann gilt:

$$\mathcal{K} \text{ ist abgeschlossen unter } H, S, P \iff \mathcal{K} \text{ ist eine Varietät}$$

**Definition 1.4.35.** Für eine Klasse  $\mathcal{K}$  von Algebren definiere die Menge aller Gesetze von  $\mathcal{K}$  als  $\Sigma(\mathcal{K}) := \{s \approx t \mid \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models s \approx t\}$ . Für eine Menge von Gesetzen  $\Sigma$  definiere die Klasse  $\mathcal{V}(\Sigma) := \{\mathfrak{A} \mid \forall s \approx t \in \Sigma : \mathfrak{A} \models s \approx t\}$ .

*Beweis.* Ist  $\mathcal{K}$  eine Varietät, so ist  $\mathcal{K}$  laut 1.4.5, 1.4.19 und 1.4.33 unter  $H, S, P$  abgeschlossen. Es bleibt die andere Implikation zu zeigen. Dazu definiere  $\Sigma := \Sigma(\mathcal{K})$  und  $\mathcal{V} := \mathcal{V}(\Sigma)$ , womit  $\mathcal{V} = \mathcal{K}$  zu zeigen ist. Trivialerweise ist  $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{K}$  erfüllt. Für die andere Inklusion sei  $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}$  beliebig, aber fest, das heißt es gilt  $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$  zu zeigen.

Für jedes Gesetz  $s \approx t$ , welches nicht in  $\Sigma$  liegt, wähle eine Algebra  $\mathfrak{A}_{s \approx t} \in \mathcal{K}$  mit  $\mathfrak{A}_{s \approx t} \not\models s \approx t$ . Es sei  $\mathfrak{B} := \prod_{s \approx t \notin \Sigma} \mathfrak{A}_{s \approx t}$ , wobei  $\mathfrak{A}_{s \approx t} \in \mathcal{K}$  mit  $\mathfrak{A}_{s \approx t} \not\models s \approx t$ . Da  $\mathcal{K}$  unter Produktbildung abgeschlossen ist, gilt  $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ . Da eine Produktalgebra ein Gesetz genau dann erfüllt, wenn es komponentenweise erfüllt ist, folgt  $\Sigma(\mathfrak{B}) = \Sigma \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ . Zu zeigen ist nun, dass  $\mathfrak{A} \in HSP(\mathfrak{B})$  gilt.

Bilde die Produktalgebra  $\mathfrak{B}^{B^A} = \prod_{i \in B^A} \mathfrak{B}$  und betrachte für alle  $a \in A$  die Funktion  $\pi_a : B^A \rightarrow B, \alpha \mapsto \alpha(a)$  sowie die erzeugte Unter algebra  $\mathfrak{S} := \langle \{\pi_a \mid a \in A\} \rangle \leq \mathfrak{B}^{B^A}$ . Dann kann ein surjektiver Homomorphismus  $\varphi : S \rightarrow A$  mit  $\varphi(\pi_a) = a$  folgendermaßen definiert werden. Jedes Element aus  $S$  besitzt eine Darstellung der Form  $t^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n})$  mit  $a_1, \dots, a_n \in A$  dargestellt werden. Daher wird  $\varphi(t^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n})) := t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$  definiert.

Wohldefiniertheit: Es ist zu zeigen, dass die Definition von  $\varphi$  unabhängig von der Wahl der Darstellung ist. Das heißt wenn  $u, v$  Terme sind und  $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \in A$  sind, sodass  $u^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n}) = v^{\mathfrak{S}}(\pi_{a'_1}, \dots, \pi_{a'_m})$  gilt, dann soll auch  $u^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = v^{\mathfrak{A}}(a'_1, \dots, a'_m)$  gelten. Dafür werden  $x_i := a_i$  und  $x'_i := a'_i$  als Variablen eingeführt. Es ist nun hinreichend zu zeigen, dass  $\mathfrak{B} \models u(x_1, \dots, x_n) \approx v(x'_1, \dots, x'_m)$  gilt, da dieses Gesetz wegen  $\Sigma(\mathfrak{B}) \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$  dann auch

in  $\mathfrak{A}$  gilt, was insbesondere  $u^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = v^{\mathfrak{A}}(a'_1, \dots, a'_m)$  bedingen würde. Sind  $b_i, b'_i \in B$  beliebige Werte für die Variablen  $x_i$  respektive  $x'_i$ , so muss  $u^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n) = v^{\mathfrak{B}}(b'_1, \dots, b'_m)$  gezeigt werden. Nun kann  $\alpha \in B^A$  mit  $\alpha(a_i) = b_i$  und  $\alpha(a'_i) = b'_i$  gewählt werden, da aus  $x_i a_i = a_j = x_j$  folgen würde, dass  $b_i = b_j$  gelten muss. Das analoge Argument gilt auch in den Fällen  $a_i = a'_j$  und  $a'_i = a'_j$ . Da voraussetzungsgemäß  $u^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n}) = v^{\mathfrak{S}}(\pi_{a'_1}, \dots, \pi_{a'_m})$  identisch erfüllt ist, gilt diese Gleichheit insbesondere wenn  $\alpha$  als Argument eingesetzt wird. Dies liefert  $u^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n) = u^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n})(\alpha) = v^{\mathfrak{S}}(\pi_{a'_1}, \dots, \pi_{a'_m})(\alpha) = v^{\mathfrak{B}}(b'_1, \dots, b'_m)$ , also was zu zeigen war.

Surjektivität:  $\varphi$  ist trivialerweise surjektiv, da für  $a \in A$  stets  $\pi_a \in S$  gilt und  $\varphi(\pi_a) = a$  ist.

Homomorphismus: Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\varphi$  ein Homomorphismus ist. Sei  $i \in I$  beliebig und seien  $g_1, \dots, g_{n_i} \in S$  beliebig. Zu zeigen ist  $\varphi(f_i^{\mathfrak{S}}(g_1, \dots, g_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{A}}(\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_{n_i}))$ . Für jedes  $j \in 1, \dots, n$  können ein Term  $t_j$  sowie  $a_1^{(j)}, \dots, a_{m_j}^{(j)} \in A$  gewählt werden, sodass  $g_j = t_j^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1^{(j)}}, \dots, \pi_{a_{m_j}^{(j)}})$  gilt. Nun wird  $t := f_i^{\mathfrak{S}}(t_1, \dots, t_{n_i})$  als neuer Term definiert und es folgt

$$\begin{aligned} \varphi(f_i^{\mathfrak{S}}(g_1, \dots, g_{n_i})) &= \varphi(f_i^{\mathfrak{S}}(t_1^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1^{(1)}}), \dots, t_{n_i}^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1^{(n_i)}}), \dots, \pi_{a_{m_{n_i}}^{(n_i)}}))) = \\ &= \varphi(t^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1^{(1)}}), \dots, \pi_{a_{m_{n_i}}^{(n_i)}})) \stackrel{(*)}{=} t^{\mathfrak{A}}(a_1^{(1)}, \dots, a_{m_{n_i}}^{(n_i)}) = \\ &= f_i^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1^{(1)}, \dots, a_{m_1}^{(1)}), \dots, t_{n_i}^{\mathfrak{A}}(a_1^{(n_i)}, \dots, a_{m_{n_i}}^{(n_i)})) \stackrel{(*)}{=} f_i^{\mathfrak{A}}(\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_{n_i})). \end{aligned}$$

An den Stellen die mit  $(*)$  markiert sind, wurde die Definition von  $\varphi$  verwendet.  $\square$

**Korollar 1.4.36.** Sei  $\mathcal{K}$  eine Klasse von Algebren und  $\mathcal{V}(\mathcal{K})$  die erzeugte Varietät. Dann gilt für alle  $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}(\mathcal{K}) : \mathfrak{A} \in HSP(\mathcal{K})$ .

*Beweis.* Es gilt  $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}(\mathcal{K}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \Sigma(\mathcal{K})$ . Die Implikation von links nach rechts ist trivialerweise erfüllt. Die Implikation von rechts nach links folgt aus der Tatsache, dass man  $B \in P(\mathcal{K})$  mit  $\Sigma(A) \supseteq \Sigma(B)$  finden kann und dann wie im Beweis für den Satz von Birkhoff auf  $A \in HSP(\mathfrak{B}) \subseteq HSP(\mathcal{K})$  schließt.  $\square$

## 1.5 Freie Algebren

# Index

- abelsch, 4
- allgemeine Algebra, 3
  - einfach, 13
  - Typ, 3
- Arität, 3
- Assoziativität, 3
- Automorphismengruppe, 6
- Automorphismus, 6
- Boolsche Algebra, 6
- distributiv
  - links-, 4
  - rechts-, 4
- Divisionsring, 4
- einfache Algebra, 13
- Einsetzungshomomorphismus, 7
- Endomorphismenmonoid, 6
- Endomorphismus, 6
- erzeugte Unteralgebra, 10
- Faktoralgebra, 13
- Gesetz, 8
- Gruppe, 3
  - abelsch, 4
  - kommutativ, 4
- Halbgruppe, 3
- Halbring, 4
- Halverband, 5
- Homomorphiesatz, 13
- Homomorphismus, 6
- idempotent, 5
- invariante Relation, 12
- inverses Element, 3
- Isomorphismus, 6
- kanonische Faktorabbildung, 13
- Klon, 8
  - kommutativ, 4
- Kongruenzrelation, 12
  - trivial, 12
- Körper, 4
- Modul, 5
- Monoid, 3
- neutrales Element, 3
- Produktalgebra, 11
- Projektion, 8
- Relation
  - invariant, 12
- Ring, 4
  - mit 1, 4
- Satz
  - von Birkhoff, 14
- Schiefkörper, 4
- Sprache, 7
- Stelligkeit, 3
- Subalgebra, 9
- Term, 7
  - Stufe, 7
  - Variablen, 7
- Termalgebra, 7
- Termklon, 9
- Termoperation, 7
- Unteralgebra, 9
  - erzeugte, 10
- Variable, 7
- Variablenbelegung, 7
- Varietät, 8
- Verband, 5
  - beschränkt, 5
- Verschmelzungsgesetze, 5



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Hasse-Diagramm einer Ordnungsrelation . . . . .	5
1.2	Subalgebra von unten . . . . .	10
1.3	Visualisierung von Produktalgebren . . . . .	12