# Algebra Vorlesungsmitschrift

**nach der 2023S Vorlesung von Michael Pinsker**

Ian Hornik, Daniel Mayr, Alexander Zach

Stand vom 30. März 2023

Wir bedanken uns bei allen Mitstudierenden, die uns ihre Mitschriften zur Vervollständigung dieses Skriptums zur Verfügung gestellt haben.

Bei Fehlern, Fragen oder Feedback wird um eine Mail an `ian.hornik@tuwien.ac.at`, `daniel.mayr@tuwien.ac.at` oder `alexander.zach@tuwien.ac.at` gebeten.

Wir bemühen uns das Skriptum stets auf dem aktuellsten Stand zu halten und etwaige Fehler auszubessern. Die neueste Version ist stets auf `eps0.link/algebra` zu finden.

Ian Hornik, Daniel Mayr, Alexander Zach

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Allgemeine Algebren

Dieses Kapitel behandelt die Inhalte der Vorlesung, welche auch in Goldstern et al.: *Algebra – Eine grundlagenorientierte Einführunsvorlesung* in den Kapiteln *2. Grundbegriffe* und *4.1. Freie Algebren und der Satz von Birkhoff* gefunden werden können.

## 1.1 Einführung

Zu Beginn wird der Begriff einer allgemeinen (oder auch universellen) Algebra definiert und es werden weiter einige spezielle Algebren vorgestellt. 01.03.2023

**Definition 1.1.1.** Seien $A$ eine beliebige Menge, $\tau = (n_i)_{i\in I}$ eine Familie aus $\mathbb{N}_0$ über eine beliebige Indexmenge $I$ und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen, wobei $f_i : A^{n_i} \to A$ ist. Das Tupel $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i\in I})$ heißt dann *(allgemeine) Algebra* vom *Typ* $\tau$. Die einzelnen Funktionen $f_i$ nennt man *fundamentale Operationen* und haben *Stelligkeit* oder auch *Arität* $n_i$.

*Bemerkung* 1.1.2. Für eine endliche Indexmenge $I = \{1, \dots, m\}$ wird der Typ auch als $m$-Tupel $\tau = (n_1, \dots, n_m)$ geschrieben und die Algebra als $\mathfrak{A} = (A, f_1, \dots, f_m)$.

*Bemerkung* 1.1.3. Eine nullstellige Operation $f_i$ bildet von der Menge $A^0 := \{\emptyset\}$ auf $A$ ab. Es ist also $f_i$ konstant mit $f(\emptyset) = a \in A$. Im Folgenden wird bei $n_i = 0$ nicht zwischen der Operation $f_i$ und dem Element $a$, auf das abgebildet wird, unterschieden.

**Definition 1.1.4.** Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +)$ vom Typ $\tau = (2)$ heißt *Halbgruppe*, wenn

– $\forall x, y, z \in A : (x + y) + z = x + (y + z)$ (*Assoziativität* von $+$)

gilt.

*Beispiel* 1.1.5. $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot), (\mathbb{N}, +)$ sind Halbgruppen.

**Definition 1.1.6.** Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +, e)$ vom Typ $\tau = (2, 0)$ heißt *Monoid*, wenn

– $(A, +)$ eine Halbgruppe ist und

– $\forall x \in A : e + x = x + e = x$ ($e$ ist *neutrales Element* bezüglich $+$)

gilt.

*Beispiel* 1.1.7. $(\mathbb{R}, +, 0), (\mathbb{R}, \cdot, 1), (\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot, E_2), (\mathbb{N}, \cdot, 1)$ sind Monoide.

**Definition 1.1.8.** Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +, e, -)$ vom Typ $\tau = (2, 0, 1)$ heißt *Gruppe*, wenn

– $(A, +, e)$ ein Monoid ist und

– $\forall x \in A : x + (-x) = (-x) + x = e$ (− bildet ab auf *inverse Elemente*)

gilt.

*Beispiel* 1.1.9. $(\mathbb{R}, +, 0, -), (\mathbb{Z}, +, 0, -)$ sind Gruppen.

*Bemerkung* 1.1.10. Manchmal werden Gruppen auch als Algebra $\mathfrak{A} = (A, +)$ vom Typ $\tau = (2)$ definiert, für die

– $\forall x, y, z \in A : (x + y) + z = x + (y + z)$,

– $\exists e \in A \forall x \in A : e + x = x + e = x$ und

– $\forall x \in A \exists (-x) \in A : x + (-x) = (-x) + x = e$

gilt. Bei der Definition von Unterstrukturen macht es allerdings einen Unterschied, welche der Definitionen verwendet wird, weshalb im Folgenden Gruppen im Sinne von Definition 1.1.8 zu verstehen sind.

**Definition 1.1.11.** Eine Halbgruppe / Monoid / Gruppe $\mathfrak{A} = (A, +, \cdots)$ heißt *kommutativ* oder *abelsch*, wenn für die zweistellige Operation +

– $\forall x, y \in A : x + y = y + x$

gilt.

**Definition 1.1.12.** Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +, 0, \cdot)$ vom Typ $\tau = (2, 0, 2)$ heißt *Halbring*, wenn

– $(A, +, 0)$ ein kommutatives Monoid,

– $(A, \cdot)$ eine Halbgruppe ist und

– $\forall x, y, z \in A : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (· ist *rechtsdistributiv* über +)
$\wedge\ z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$ (· ist *linksdistributiv* über +)

gilt.

*Beispiel* 1.1.13. $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0), (\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot, 0$[1]$)$ sind Halbringe.

**Definition 1.1.14.** Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +, 0, -, \cdot)$ vom Typ $\tau = (2, 0, 1, 2)$ heißt *Ring*, wenn

– $(A, +, -, 0)$ eine kommutative Gruppe,

– $(A, \cdot)$ eine Halbgruppe und

– $\cdot$ links- und rechtsdistributiv über + ist.

Gibt es eine weitere nullstellige Operation 1, sodass $(A, \cdot, 1)$ ein (kommutatives) Monoid ist, so spricht man von einem *(kommutativen) Ring mit 1*.

*Beispiel* 1.1.15. $(\mathbb{Z}, +, 0, -.\cdot), (\mathbb{R}[x], +, 0, -, \cdot)$ sind Ringe.

**Definition 1.1.16.** Ein kommutativer Ring mit 1 $\mathfrak{A} = (A, +, 0, -, \cdot)$ heißt *Körper*, wenn

– $\forall x \in A \backslash \{0\} \exists y \in A : x \cdot y = 1$

[1] 0 steht hier für $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ist $\cdot$ nicht kommutativ, so nennen wir $\mathfrak{A}$ *Schiefkörper* oder *Divisionsring*.

*Bemerkung* 1.1.17. Im Vergleich zu allen anderen bis jetzt definierten speziellen Algebren ist ein Körper nicht durch Allaussagen für alle Elemente (Gesetze) und Operationen definiert.

**Definition 1.1.18.** Seien $\mathfrak{R} = (R, +, 0, -, \cdot)$ ein Ring, $\mathfrak{G} = (G, \widetilde{+}, \widetilde{0}, \widetilde{-})$ eine abelsche Gruppe und $\odot : R \times G \to G, (a, v) \mapsto a \odot v$ und gelte

- $\forall a, b \in R \forall u \in G : (a \cdot b) \odot u = a \odot (b \odot u)$,
- $\forall a, b \in R \forall u \in G : (a + b) \cdot u = (a \cdot u) \mathbin{\widetilde{+}} (b \cdot u)$,
- $\forall a \in R \forall u, v \in G : a \odot (u \mathbin{\widetilde{+}} v) = (a \odot u) \mathbin{\widetilde{+}} (a \odot v)$,

so heißt $\mathfrak{G}$ mit $\odot$ *Modul über* $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{R}$*-Modul*.

Ein $\mathfrak{R}$-Modul kann auch als allgemeine Algebra nach Definition 1.1.1 definiert werden, nämlich als $\mathfrak{G}^{\mathfrak{R}} := (G, \widetilde{+}, \widetilde{0}, \widetilde{-}, (m_r)_{r \in \mathfrak{R}})$, wobei $m_r : G \to G, g \mapsto r \odot g$ unäre Operationen sind.

*Bemerkung* 1.1.19. Ein $\mathfrak{R}$-Modul ist ein Vektorraum, wenn $\mathfrak{R}$ ein Körper ist.

*Beispiel* 1.1.20. $(\mathbb{Z}_9, +, 0, -), (\mathbb{Z}_9^{2\times 2}, +, 0, -)$ sind Moduln über $\mathbb{Z}_9$.

**Definition 1.1.21.** Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, \wedge)$ vom Typ $\tau = (2)$ heißt *Halbverband*, wenn

- $\mathfrak{A}$ eine kommutative Halbgruppe ist und
- $\forall x \in A : x \wedge x = x$. ($\wedge$ ist *idempotent*)

gilt.

*Bemerkung* 1.1.22. $(\mathbb{Z}, \min), (\mathbb{Z}, \max)$ sind Halbverbände.

**Definition 1.1.23.** Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee)$ vom Typ $\tau = (2, 2)$ heißt *Verband (im algebraischen Sinn)*, wenn

- $(A, \wedge)$, $(A, \vee)$ Halbverbände sind,
- $\forall a, b \in A : a \wedge (a \vee b) = a$ und
- $\forall a, b \in A : a \vee (a \wedge b) = a$

gilt, wobei die letzten zwei Gesetze *Verschmelzungsgesetze* genannt werden. 01.03.2023

Ein Verband heißt *distributiv*, wenn $\wedge$ distributiv[2] über $\vee$ und $\vee$ distributiv über $\wedge$ ist. 02.03.2023

Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, 0, 1)$ vom Typ $\tau = (2, 2, 0, 0)$ heißt *beschränkter Verband*, wenn

- $(A, \wedge, \vee)$ ein Verband ist,
- $\forall a \in A : a \wedge 0 = 0$ und
- $\forall a \in A : a \vee 1 = 1$

gilt.

[2] Es ist ausreichend Rechts- bzw. Linksdistributivität zu fordern, da die jeweilig andere Distributivität aus der Kommutativität folgt.

*Beispiel* 1.1.24. Mit einer beliebigen Menge $M$, einem $\mathfrak{K}$-Vektorraum $\mathfrak{V}$ und einer linearen Ordnung[3] $(L, \leq)$ sind $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$, $(\mathrm{Sub}(\mathfrak{V}), \cap, \langle U_1 \cup U_2 \rangle)$, $(L, \min, \max)$ Verbände.

$(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ ist sogar ein distributiver Verband.

Betrachtet man die Abbildung rechts und definiert eine Ordnungsrelation, wobei die höher stehenden Elemente größer als die niedrigeren sind, und sei $\wedge, \vee$ das Supremum bzw. Infimum zweier Elemente, so ist $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, \wedge, \vee)$ ein nicht distributiver Verband, da

$$1 \wedge (2 \vee 3) = 1 \wedge 4 = 1 \neq 0 = (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3).$$

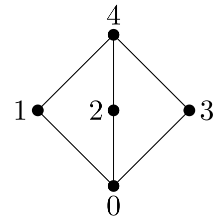

Abbildung 1.1: Hasse-Diagramm einer Ordnungsrelation

$(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M)$ ist ein beschränkter Verband. $(\mathbb{Q}, \min, \max)$ kann hingegen nicht zu einem beschränkten Verband gemacht werden.

**Lemma 1.1.25.** *Jeder Verband $\mathfrak{V} = (V, \wedge, \vee)$ mit endlicher Trägermenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ kann zu einem beschränkten Verband gemacht werden.*

*Beweis.* Sei $1 := v_1 \vee \dots \vee v_n$, dann gilt für beliebiges $j \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$v_j \vee 1 = v_j \vee v_1 \vee \dots \vee v_n = v_1 \vee \dots \vee v_j \vee v_j \vee \dots \vee v_n = v_1 \vee \dots \vee v_n = 1.$$

Analoges gilt für $0 := v_1 \vee \dots \vee v_n$. Damit ist $(V, \wedge, \vee, 0, 1)$ ein beschränkter Verband. $\square$

**Definition 1.1.26.** Eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ vom Typ $\tau = (2, 2, 0, 0, 1)$ heißt *Boole'sche Algebra*, wenn

- $(A, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ ein beschränkter distributiver Verband ist,
- $\forall x \in A : x \wedge x' = 0$ und
- $\forall x \in A : x \vee x' = 1$

gilt.

*Beispiel* 1.1.27. Für eine Menge $M$ ist $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M, ')$ mit $'(X) := M \setminus X$ eine Boole'sche Algebra.

*Bemerkung* 1.1.28. Alle Boole'schen Algebren werden durch den Darstellungssatz von Stone bis auf Isomorphie beschrieben.

**Definition 1.1.29.** Seien $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I}), \mathfrak{B} = (B, (f_i^{\mathfrak{B}})_{i \in I})$ zwei Algebren vom selben Typ $\tau = (n_i)_{i \in I}$. Eine Abbildung $\varphi : A \to B$ heißt *Homomorphismus*, wenn

$$\forall i \in I \forall a_1, \dots, a_{n_i} \in A : \varphi(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_{n_i})).$$

Wir schreiben dann auch $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Wenn $\varphi$ bijektiv ist, dann heißt die Funktion *Isomorphismus*. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, dann heißt $\varphi$ *Endomorphismus*. Ein bijektiver Endomorphismus heißt *Automorphismus*.

[3] Eine lineare Ordnung nennt man auch *Totalordnung*.

*Beispiel* 1.1.30. Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra. Definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(\mathfrak{A}) &:= \{f : A \to A \mid f \text{ ist Endomorphismus}\} \text{ und}\\ \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) &:= \{f : A \to A \mid f \text{ ist Automorphismus}\}.\end{aligned}$$

$(\mathrm{End}(\mathfrak{A}), \circ, \mathrm{id}_A)$ ist dann ein Monoid, das *Endomorphismenmonoid von* $\mathfrak{A}$. Jedes Monoid ist isomorph zu einem Endomorphismenmonoid.

$(\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}), \circ, \mathrm{id}_A, \cdot^{-1})$ ist eine Gruppe, die *Automorphismengruppe von* $\mathfrak{A}$. Nach dem Satz von Cayley ist jede endliche Gruppe isomorph zu einer Automorphismengruppe.

## 1.2 Terme und Termalgebra

**Definition 1.2.1.** Sei $X$ eine beliebige Menge und seien $(f_i)_{i\in I}$ Funktionssymbole mit Aritäten $(n_i)_{i\in I}$. Die Menge $T(X) := T$ ist rekursiv definiert durch

$$T_0 := X, \quad T_{k+1} := T_k \cup \{f_i(t_1, \dots t_{n_i}) \mid i \in I \wedge t_1, \dots, t_{n_i} \in T_k\}, \quad T := \bigcup_{i\geq 0} T_i.$$

Ein Element $t \in T$ heißt *Term*, die Elemente aus $X$ *Variablen*, $(f_i)_{i\in I}$ *Sprache* und die Menge $T$ beschreibt alle *Terme über* $(X, (f_i)_{i\in I})$. Für einen Term $t \in T$ heißt $\mathrm{lvl}(t) := \min\{k \mid t \in T_k\}$ die *Stufe von* $t$.

Weiter werden die *Variablen eines Terms* rekursiv definiert. Für $x \in X$ ist $\mathrm{var}(x) := \{x\}$ und für $t = f_i(t_1, \dots, t_n)$ ist $\mathrm{var}(t) := \bigcup_{j\in\{1,\dots,n_i\}} \mathrm{var}(t_j)$.

*Beispiel* 1.2.2. Seien $X = \{x, y, z\}$ und $(f_1, f_2, f_3) = (+, \cdot, -)$ mit Aritäten $(2, 2, 1)$. Damit erhält man $x, y, z$ als Terme 0-ter Stufe, $-x, x + x, x \cdot z, z + x, \dots$ als Terme 1-ter Stufe, $(-x) + y, (x \cdot z) - y, \dots$ als Terme 2-ter Stufe etc.

**Definition 1.2.3.** Sei $T$ die Menge aller Terme über $(X, (f_i)_{i\in I})$. Es ist dann $\mathfrak{T}(X, (f_i)_{i\in I}) := (T, (f_i^{\mathfrak{T}}))$ die *(erzeugte) Termalgebra* eine Algebra vom Typ $\tau = (n_i)_{i\in I}$, wobei $f_i^{\mathfrak{T}} : T^{n_i} \to T, (t_1, \dots, t_{n_i}) \mapsto f_i(t_1, \dots, t_n)$.

**Satz 1.2.4.** *Seien $X$ eine Variablenmenge, $(f_i)_{i\in I}$ Funktionssymbole mit Aritäten $\tau = (n_i)_{i\in I}$, $\mathfrak{T} := \mathfrak{T}(X, (f_i)_{i\in I})$ die induzierte Termalgebra und $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine beliebige Algebra vom Typ $\tau$. Dann kann jede Abbildung $\varphi : X \to A$ eindeutig zu einem Homomorphismus $\overline{\varphi} : T \to A$ fortgesetzt werden. $\overline{\varphi}$ ist also ein Homomorphismus von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{A}$ mit $\overline{\varphi}|_X = \varphi$.*

*Beweis.* Sei $\varphi : X \to A$ beliebig. Es wird dazu $\overline{\varphi} : T \to A$ rekursiv nach der Stufe von Termen definiert. Für $t \in X$ wird $\overline{\varphi}(t) := \varphi(t)$ gewählt und für $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in T$ definiere $\overline{\varphi}(t) := f_i^{\mathfrak{A}}(\overline{\varphi}(t_1), \dots, \overline{\varphi}(t_{n_i}))$. Diese Definition ergibt Sinn, da für einen Term $t$, der als $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ geschrieben werden kann, die Terme $t_1, \dots, t_{n_i}$ von niedrigerer Stufe als $t$ sind.

Aus dieser Definition ist klar, dass $\overline{\varphi}|_X = \varphi$. Für $i \in I$ und $t_1, \dots, t_{n_i} \in T$ gilt $\overline{\varphi}(f_i^{\mathfrak{T}}(t_1, \dots, t_{n_i})) = \overline{\varphi}(f_i(t_1, \dots, f_{n_i})) \overset{\text{Def.}}{=} f_i^{\mathfrak{A}}(\overline{\varphi}(t_1), \dots, \overline{\varphi}(t_{n_i}))$, also $\overline{\varphi} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $\widetilde{\varphi} : T \to A$ ein beliebiger Homomorphismus mit $\widetilde{\varphi}|_X = \varphi$, so zeigen wir vermöge vollständiger Induktion nach Termstufe $m$, dass $\widetilde{\varphi} = \overline{\varphi}$:

Induktionsanfang ($m = 0$): Für $t \in T_0 = X$ gilt klarerweise $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t) = \overline{\varphi}(t)$.
Induktionsschritt ($m \to m+1$): Sei nun $t = f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in T_{m+1}$ mit $t_1, \dots, t_{n_i} \in T_m$, dann gilt

$\widetilde{\varphi}(t) = \widetilde{\varphi}(f_i(t_1, \ldots, t_{n_i})) = \widetilde{\varphi}(f_i^{\mathfrak{T}}(t_1, \ldots, t_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{A}}(\widetilde{\varphi}(t_1), \ldots, \widetilde{\varphi}(t_{n_i})) \overset{\text{I.V.}}{=} f_i^{\mathfrak{A}}(\overline{\varphi}(t_1), \ldots, \overline{\varphi}(t_{n_i})) = \overline{\varphi}(t)$. □

02.03.2023 | 08.03.2023

**Definition 1.2.5.** Seien $X^{(k)} = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X$ eine Teilmenge der Variablenmenge, $\mathfrak{T}^{(k)} = \mathfrak{T}(X^{(k)}, (f_i)_{i\in I}) = (T^{(k)}, (f_i^{\mathfrak{T}})_{i\in I})$ die erzeugte Termalgebra und $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra vom selben Typ. Für $a_1, \ldots, a_k$ heißt $\alpha_{a_1,\ldots,a_k} : X^{(k)} \to A, x_j \mapsto a_j$ eine *Variablenbelegung*. Nach Satz 1.2.4 kann diese nun zum *Einsetzungshomomorphismus* $\overline{\alpha}_{a_1,\ldots,a_k} : T^{(k)} \to A$ fortgesetzt werden.

Für einen beliebigen Term $t \in T^{(k)}$ ist die *durch $t$ in $\mathfrak{A}$ induzierte Termoperation* als $t^{\mathfrak{A}} : A^k \to A, (a_1, \ldots, a_k) \mapsto \overline{\alpha}_{a_1,\ldots a_k}(t)$ definiert. Damit wird aus einem abstrakten Term eine Funktion auf $A$.

*Beispiel* 1.2.6. Sei $+$ ein binäres Funktionssymbol und $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Damit erhält man u. a. die abstrakten Terme $t = x_1 + (x_2 + x_3), s = (x_1 + x_2) + x_3 \in T$.

Betrachtet man die Algebra $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}})$, so erhält man die induzierten Termfunktionen

$$t^{\mathfrak{R}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 + (a_2 + a_3) \quad \text{und} \quad s^{\mathfrak{R}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_1 + a_2) + a_3.$$

Da $+_{\mathbb{R}}$ assoziativ ist, gilt $t^{\mathfrak{R}} = s^{\mathfrak{R}}$, obwohl $t \neq s$.

*Beispiel* 1.2.7. Sei $\mathfrak{V} = (V, +, 0, -, (m_k)_{k\in\mathfrak{K}})$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathfrak{K}$. Betrachtet man Terme über der Sprache $(+, -, (m_k)_{k\in\mathfrak{K}})$, also z. B. $x_1 + x_2, m_2(x_1 + x_2), x_1 + m_4(x_2)$, so stellen die davon induzierten Termfunktionen Linearkombinationen dar.

**Definition 1.2.8.** Seien $s, t \in T$ Terme über einer Sprache $(f_i)_{i\in I}$, dann heißt $s \approx t$ *Gesetz*. Ein Gesetz kann auch als Paar $(s, t)$ von zwei Termen gesehen werden.

Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra über derselben Sprache, dann erfüllt $\mathfrak{A}$ *das Gesetz $s \approx t$* oder kurz $\mathfrak{A} \models s \approx t$, wenn

$$\forall(\alpha : \mathrm{var}(s) \cup \mathrm{var}(t) \to A) : \overline{\alpha}(s) = \overline{\alpha}(t),$$

oder anders formuliert, wenn die Termfunktionen $s^{\mathfrak{A}}$ und $t^{\mathfrak{A}}$ übereinstimmen.

## 1.3 Varietäten und Klone

In diesem Kapitel werden die Begriffe *Varietät* und *Klon* definiert und es werden Beispiel dazu gegeben. Aussagen darüber folgen in den nächsten Kapiteln.

**Definition 1.3.1.** Sei $\Sigma$ eine Menge von Gesetzen über eine Sprache $(f_i)_{i\in I}$, dann heißt die Klasse

$$\mathcal{V}(\Sigma) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ ist Algebra über der Sprache } (f_i)_{i\in I} \wedge \forall s \approx t \in \Sigma : A \models s \approx t\}$$

*Varietät*. Es handelt sich dabei also um eine durch Gesetze definierte Klasse von Algebren.

*Beispiel* 1.3.2. Betrachtet man die Sprache $(+, 0, -)$ mit Stelligkeiten $(2, 0, 1)$ und definiert die Gesetzesmenge (mit Variablenmenge $X = \{x, y, z\}$) $\Sigma = \{$

$(x + y) + z \approx x + (y + z)$,

$0 + x \approx x$, $x + 0 \approx x$,

$x + (-x) \approx 0$, $(-x) + x \approx 0$

}, so ist die Varietät $\mathcal{V}(\Sigma)$ die Klasse aller Gruppen.

Betrachtet man hingegen Gruppen über der Sprache $(+)$ wie in Bemerkung 1.1.10, so kann man die Gruppenaxiome nicht über Gesetze definieren.

**Definition 1.3.3.** Sei $M$ eine beliebige Menge. Für $1 \leq i \leq n$ ist die *$n$-dimensionale Projektion auf die $i$-te Komponente* definiert als

$$\pi_i^{(n)} : M^n \to M, (x_1, \ldots, x_n) \to x_i.$$

**Definition 1.3.4.** Sei $M$ eine beliebige Menge. Eine Teilmenge von Funktionen $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \{f : M^n \to M\}$ heißt *Klon*, wenn

- $\mathcal{C}$ alle Projektionen enthält und
- $\mathcal{C}$ unter Komposition abgeschlossen ist.

Die Komposition von $f : M^n \to M$ und $g_1, \ldots, g_n : M^k \to M$ definieren wir hier als

$$f \circ (g_1, \ldots, g_n) : M^k \to M, (x_1, \ldots, x_k) \mapsto f(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_k)).$$

**Definition 1.3.5.** Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$ eine Algebra und sei die Menge $\mathcal{T}^{(n)}(\mathfrak{A}) := \{f : A^n \to A \mid f \text{ ist Termfunktion von } \mathfrak{A}\}$. Dann ist $\mathcal{T}(\mathfrak{A}) := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$ ein Klon und wird *Termklon von $\mathfrak{A}$* genannt.

## 1.4 Konstruktion neuer Algebren

In diesem Kapitel werden drei verschiedene Konstruktionen vorgestellt um aus bereits gegebenen Algebren neue zu gewinnen.

**Definition 1.4.1.** Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$ eine Algebra und $S \subseteq A$. Dann heißt das Tupel $\mathfrak{S} = (S, (f_i^{\mathfrak{A}}|_{S^{n_i}})_{i \in I})$[4] *Subalgebra* oder *Unteralgebra* von $\mathfrak{A}$, wenn

- $\forall i \in I \forall a_1, \ldots, a_{n_i} \in S : f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in S$. *($S$ ist abgeschlossen gegenüber allen $f_i$)*

Wir schreiben in diesem Fall $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{A}$. Ist $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren, so definieren wir die Klasse $S(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{S} \mid \exists \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{S} \leq \mathfrak{A}\}$.

*Beispiel* 1.4.2. Sei $\mathfrak{V} = (V, +, 0, -, (m_k)_{k \in \mathfrak{K}})$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathfrak{K}$. Dann gilt für jeden Untervektorraum $U$ von $V$: $\mathfrak{U} = (U, +, 0, -, (m_k)_{k \in \mathfrak{K}}) \leq \mathfrak{V}$.

Weitere Beispiele für Unteralgebren sind $(\mathbb{N}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathrm{Sl}_n(K), \cdot) \leq (\mathrm{Gl}_n(K), \cdot)$.

**Proposition 1.4.3.** *Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$ eine Algebra, $s \approx t$ ein Gesetz und gelte $\mathfrak{A} \models s \approx t$. Dann gilt für jede Unteralgebra $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{S} \models s \approx t$.*

*Beweis.* Laut Definition gilt für alle Variablenbelegungen $\varphi : \mathrm{var}(s) \cup \mathrm{var}(t) \to A : \bar{\varphi}(s) = \bar{\varphi}(t)$. Wegen $S \subseteq A$ ist diese Bedingung insbesondere für $S$ erfüllt, also gilt $\mathfrak{S} \models s \approx t$. □

[4]Zwecks besserer Lesbarkeit werden wir dafür meist $\mathfrak{S} = (S, (f_i^{\mathfrak{S}})_{i \in I})$ schreiben.

*Bemerkung* 1.4.4. Sei $\mathfrak{V} = (V, +, 0, -, (m_k)_{k\in\mathfrak{K}})$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathfrak{K}$. Dann ist $x \approx 0$ ein Gesetz, welches in $(\{0\}, +, 0, -)$ erfüllt ist, jedoch nicht in $\mathfrak{V}$. Wir sehen also, dass die Umkehrung von Proposition 1.4.3 nicht gilt.

**Korollar 1.4.5.** *Varietäten sind abgeschlossen unter der Bildung von Unteralgebren.*

*Bemerkung* 1.4.6. Eine Folgerung ist unmittelbar, dass die Klasse der Körper keine Varietät bildet, denn $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$ ist eine Unteralgebra von $(\mathbb{Q}, +, 0, -, \cdot, 1)$, aber die ganzen Zahlen stellen keinen Körper dar.

*Bemerkung* 1.4.7. An dieser Stelle können wir den Unterschied der gegebenen Definitionen einer Gruppe feststellen, denn $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Unteralgebra von $(\mathbb{Z}, +)$, jedoch keine Gruppe im Sinne von Bemerkung 1.1.10. Das bedeutet, dass in der Sprache $+$ die Klasse der Gruppen keine Varietät bildet.

08.03.2023
09.03.2023

**Proposition 1.4.8.** *Sei* $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ *eine Algebra und* $(\mathfrak{S}_j = (S_j, (f_i^{\mathfrak{S}_j})_{i\in I}))_{j\in J}$ *eine Familie von Unteralgebren von* $\mathfrak{A}$. *Dann ist auch* $\mathfrak{S} = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{S}_j := (\bigcap_{j\in J} S_j, (f_i^{\mathfrak{A}}|_{\bigcap_{j\in J} S_j})_{i\in I})$ *eine Unteralgebra von* $\mathfrak{A}$.

*Beweis.* Für $S := \bigcap_{j\in J} S_j$ gilt offensichtlich $S \subseteq A$, also bleibt lediglich die Abgeschlossenheit bezüglich der Funktionen $f_i^{\mathfrak{S}}$ zu zeigen. Seien $a_1, \ldots, a_{n_i} \in S$ beliebig. Dann gilt für alle $j \in J :$ $a_1, \ldots, a_{n_i} \in S_j$ und da $\mathfrak{S}_j$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ ist auch $f_i^{\mathfrak{S}_j}(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in S_j$. Das ist genau die Definition von $f^{\mathfrak{S}}(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in \bigcap_{j\in J} S_j = S$, also ist $\mathfrak{S} = (S, (f_i^{\mathfrak{S}})_{i\in I})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$. □

**Korollar 1.4.9.** *Sei* $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ *eine Algebra und* $S \subseteq A$. *Dann ist die von* $S$ erzeugte Unteralgebra *von* $\mathfrak{A}$ *definiert durch* $\langle S\rangle := \bigcap\{\mathfrak{U} \mid S \subseteq U \wedge \mathfrak{U} = (U, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I}) \leq \mathfrak{A}\}$ *die kleinste* $S$ *enthaltende Unteralgebra von* $\mathfrak{A}$.

**Definition 1.4.10.** Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra und $S \subseteq A$. Die Menge $S_\infty$ ist rekursiv definiert durch

$$S_0 := S, \quad S_{k+1} := S_k \cup \{f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{n_i} \mid i \in I \wedge a_1, \ldots a_{n_i} \in S_k)\}, \quad S_\infty := \bigcup_{k\geq 0} S_k.$$

*Beispiel* 1.4.11. Diese Skizze zeigt die anschauliche Motiviation der vorhergehenden Definition.

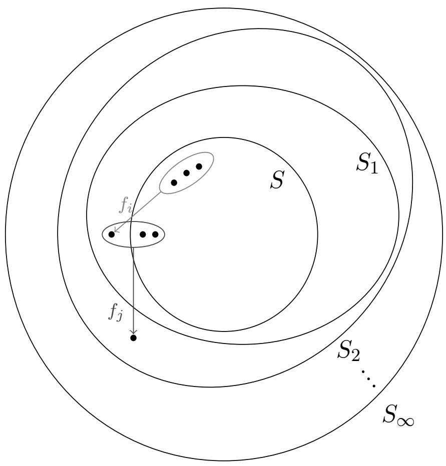


Abbildung 1.2: Subalgebra von unten

**Proposition 1.4.12.** *Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra und $S \subseteq A$. Dann gelten die beiden Identitäten:*

1. $\langle S\rangle = S_\infty$
2. $\langle S\rangle = \{t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in S \wedge t \in T(X)\}$

*Beweis.* In beiden Behauptungen wird die gegenseitige Inklusion von zwei Mengen gezeigt.

1. Da $S_\infty$[5] eine $S$ enthaltende Unteralgebra von $A$ ist, folgt aus der Definition der erzeugten Unteralgebra, dass $\langle S\rangle \subseteq S_\infty$ gilt. Für die andere Inklusion wird mittels Induktion gezeigt, dass für alle $k \in \mathbb{N} : S_k \subseteq \langle S\rangle$ gilt, woraus schließlich auch $S_\infty = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k \subseteq \langle S\rangle$ folgt.

   Induktionsanfang ($k = 0$): Per Definitionem der erzeugten Algebra gilt $S_0 = S \subseteq \langle S\rangle$
   Induktionsschritt ($k \to k + 1$): Sei nun $a \in S_{k+1}$ beliebig. Falls $a \in S_k$ ist, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung dass $a \in \langle S\rangle$ gilt. Andernfalls exisitiert ein $i \in I$ und $a_1, \dots, a_{n_i} \in S_k$, sodass $a = f(a_1, \dots, a_{n_i})$. Auch hier kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden, weshalb $a_1, \dots, a_{n_i} \in \langle S\rangle$ ist. Da $(\langle S\rangle, (f_i)_{i\in I})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ ist, gilt auch $a = f(a_1 \dots, a_{n_i}) \in \langle S\rangle$. Daraus folgt die gewünschte Mengeninklusion $S_{k+1} \subseteq \langle S\rangle$.

2. Definiere $M := \{t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) | a_1, \dots, a_n \in S \wedge t \in T(X)\}$. Es gilt $S \subseteq M$, da die Projektionen $\pi_j^{(n)} : A^n \to A, (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_j$ Termfunktionen sind. Außerdem kann gezeigt werden, dass $(M, (f_i)_{i\in I})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ ist. Sei $i \in I$ beliebig und seien $b_1, \dots, b_{n_i} \in M$, dann können diese Elemente als $b_j = t_j^{\mathfrak{A}}(a_1^{(j)}, \dots, a_{m_j}^{(j)})$ mit $a_1^{(j)}, \dots, a_{m_j}^{(j)} \in S$ für $j \in \{1, \dots, n_i\}$ dargestellt werden. Definiert man nun $a := f_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_{n_i})$ und den Term $t := f_i^{\mathfrak{T}}(t_1(x_1^{(1)}, \dots, x_{m_1}^{(1)}), \dots, t_{n_i}(x_1^{(n_i)}, \dots, x_{m_{n_i}}^{(n_i)}))$, so erhält man eine passende Termfunktion, das heißt es gilt $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{m_1}^{(1)}, \dots, a_1^{(n_i)}, \dots, a_{m_{n_i}}^{(n_i)}) = a$, also insbesondere $a \in M$. Für die andere Mengeninklusion ist erneut eine Induktion nötig. Sei $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \in M$ beliebig. Zu zeigen ist, dass $a \in \langle S\rangle$ gilt, wobei dies mittels Induktion nach der Stufe von $t$ gezeigt wird.

   Induktionsanfang ($k = 0$): Dann ist der Term $t$ eine Variable $x_j$ und die Termfunktion $t^{\mathfrak{A}}$ ist eine Projektion $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = \pi_j^n(a_1, \dots, a_n) = a_j \in S \subseteq \langle S\rangle$.
   Induktionsschritt ($m < k \to k$): Dann ist $t = f_i^{\mathfrak{T}}(t_1, \dots, t_{n_i})$ und $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i}) = f_i^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_{n_i}^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) \in \langle S\rangle$, da die Terme $t_j^{\mathfrak{A}}$ für $j \in \{1, \dots, n_i\}$ kleinere Stufe als $k$ haben. Daher sind die Argumente nach Induktionsvoraussetzung in $\langle S\rangle$ und damit auch der Funktionswert.

□

**Korollar 1.4.13.** *Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra und $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq A$. Dann gilt für die von $S$ erzeugte Unteralgebra $\langle S\rangle = \{t^{\mathfrak{A}}(s_1, \dots, s_n) \mid t(x_1, \dots, x_n) \in T(x)\}$.*

*Beweis.* Es gilt klarerweise $\langle S\rangle \supseteq \{t^{\mathfrak{A}}(s_1, \dots, s_n) \mid t(x_1, \dots, x_n) \in T(x)\}$. Sei $a \in \langle S\rangle$ beliebig. Dann existiert ein Term $t$ und es existieren $a_1, \dots, a_\ell \in S$, sodass $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_\ell)$. Mit dem Term $\tilde{t}(x_1, \dots, x_n) := t(y_1, \dots, y_\ell)$, wobei $y_i := x_j \leftrightarrow a_i = s_j$ erhält man $\tilde{t}^{\mathfrak{A}}(s_1, \dots, s_n) = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_\ell) = a \in \{t^{\mathfrak{A}}(s_1, \dots, s_n) \mid t(x_1, \dots, x_n) \in T(x)\}$. □

*Bemerkung* 1.4.14. Für eine beliebige Algebra ist mit $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A}) := \{\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U} \leq \mathfrak{A}\}$ durch $(\mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \subseteq)$ eine Halbordnung gegeben. Weiter ist $(\mathrm{Sub}(\mathfrak{A}, \wedge, \vee))$, wobei $U_1 \wedge U_2 := U_1 \cap U_2$ und $U_1 \vee U_2 := \langle U_1 \cup U_2\rangle$, ein Verband.

[5]Hier wird die Algebra für bessere Lesbarkeit mit der Trägermenge identifiziert

*Bemerkung* 1.4.15. Das kartesische Produkt von Mengen $(M_i)_{i\in I}$ ist definiert als

$$\prod_{i\in I} M_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} M_i \mid \forall i \in I : f(i) \in M_i \right\}.$$

Genau genommen sind die Elemente von Produktmengen also Funktionen. Im Folgenden werden statt Funktionsnotation oft Familien (welche nur eine andere Notation für Funktionen sind) und bei endlicher Indexmenge $I$ auch Tupel geschrieben.

**Definition 1.4.16.** Sei $\tau = (n_i)_{i\in I}$ eine Typ und sei $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ eine Familie von Algebren dieses Typs. Dann heißt $\mathfrak{A} := \prod_{j\in J} \mathfrak{A}_j = (\prod_{j\in J} A_j, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ *Produktalgebra*, wobei die Operationen durch $f_i^{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A}^{n_i} \to \mathfrak{A}, ((a_j^{(1)})_{j\in J}, \dots (a_j^{(n_i)})_{j\in J}) \mapsto (f_i^{\mathfrak{A}_j}(a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(n_i)}))_{j\in J}$ definiert werden. Ist $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren, so definieren wir die Klasse $P(\mathcal{K}) := \{\prod_{j\in J} \mathfrak{A}_j \mid \forall j \in J : \mathfrak{A}_j \in K\}$.

*Beispiel* 1.4.17. Abbildung 1.3 visualisiert die Bildung einer Produktalgebra.

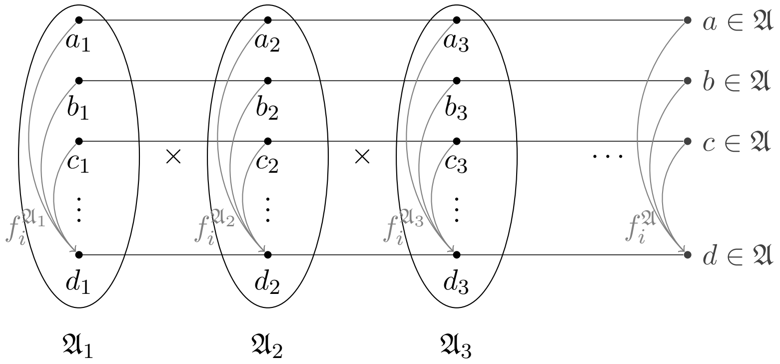


Abbildung 1.3: Visualisierung von Produktalgebren

*Bemerkung* 1.4.18. Ist $\mathfrak{A} = \prod_{j\in J} \mathfrak{A}_j$ eine Produktalgebra und $j \in J$, so ist durch die Projektionsabbildung $\pi_j : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_j, (a_j)_{j\in J} \mapsto a_j$ ein surjektiver Homomorphismus gegeben.

**Proposition 1.4.19.** *Seien $(f_i)_{i\in I}$ eine Signatur, $s \approx t$ ein Gesetz in dieser Sprache, $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ eine Familie von Algebren in der Signatur und es gelte für alle $j \in J : \mathfrak{A}_j \models s \approx t$. Dann gilt auch $\mathfrak{A} := \prod_{j\in J} \mathfrak{A}_j \models s \approx t$.*

*Beweis.* Es ist hinreichend zu zeigen, dass $s^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}$ gilt. Seien $\mathbf{a}^{(1)} = (a_j^{(1)})_{j\in J}, \dots, \mathbf{a}^{(n)} \in A$ beliebig. Dann gilt laut Voraussetzung für alle $j \in J : s^{\mathfrak{A}_j}(a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(n)})) = t^{\mathfrak{A}_j}(a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(n)}))$. Daher folgt $s^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)})_j = s^{\mathfrak{A}_j}(a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(n)})) = t^{\mathfrak{A}_j}(a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(n)})) = t^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)})_j$ für alle $j \in J$, also insbesondere $s^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)}) = t^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)})$ und damit $s^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}$. □

**Korollar 1.4.20.** *Varietäten sind abgeschlossen unter der Bildung von Produkten.*

*Bemerkung* 1.4.21. Auch an dieser Stelle wird deutlich, dass die Klasse der Körper keine Varietät ist. Für einen Körper $\mathfrak{K}$ und den Produktraum $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$ gilt $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$. Da Körper immer nullteilerfrei sind, kann dieser Produktraum folglich kein Körper sein. 09.03.2023

15.03.2023

**Definition 1.4.22.** Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra, $m \in \mathbb{N}$ und $R \subseteq A^m$ eine $m$-stellige Relation auf $A$. Dann heißt $R$ *invariant unter* $\mathfrak{A}$, wenn

- $\forall i \in I : \forall r^{(1)}, \dots, r^{(n_i)} \in R : (f_i(r_1^{(1)}, \dots, r_1^{(n_i)}), \dots, f_i(r_m^{(1)}, \dots, r_m^{(n_i)})) \in R.$

**Definition 1.4.23.** Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra und $\sim \subseteq A^2$ eine Äquivalenzrelation. Wenn $\sim$ invariant unter $\mathfrak{A}$ ist, dann heißt $\sim$ *Kongruenzrelation*. Außerdem wird damit die Menge $\mathrm{Con}(\mathfrak{A}) := \{\sim \subseteq A^2 \mid \sim \text{ ist Kongruenzrelation auf } \mathfrak{A}\}$ definiert.

*Beispiel* 1.4.24. Sei $X$ eine Menge, $(f_i)_{i\in I}$ eine Signatur und $\mathfrak{T} = (T, (f_i^{\mathfrak{T}})_{i\in I})$ die Termalgebra über $X$. Sei außerdem $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra in derselben Signatur. Dann ist durch $t \sim s :\leftrightarrow t^{\mathfrak{A}} = s^{\mathfrak{A}}$ auf $\mathfrak{T}$ eine Kongruenzrelation gegeben.

*Beispiel* 1.4.25. Für jede beliebige Algebra $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ sind durch die beiden Relationen $\sim_1 = A^2$ und $\sim_2 = \{(a,a) \mid a \in A\}$ Kongruenzrelationen auf $\mathfrak{A}$ gegeben. Diese nennet man daher auch *triviale Kongruenzrelationen*.

*Bemerkung* 1.4.26. Für eine beliebige Algebra $\mathfrak{A}$ ist durch $(\mathrm{Con}(A), \subseteq)$ eine Halbordnung gegeben. Da es zu zwei Kongruenzrelationen bezüglich der Mengeninklusion immer ein Supremum und Infimum gibt, entsteht sogar ein Verband.

**Definition 1.4.27.** Eine Algebra $\mathfrak{A}$ heißt *einfach*, wenn es keine nicht-trivialen Kongruenzrelationen gibt.

**Definition 1.4.28.** Sei $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ eine Algebra und sei $\sim \subseteq A^2$ eine Kongruenzrelation. Dann heißt $\mathfrak{A}/_\sim := (A/_\sim, (f_i^{\mathfrak{A}/\sim})_{i\in I})$ *Faktoralgebra* von $\mathfrak{A}$, wobei $A/_\sim = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$ die Menge der Äquivalenzklassen[6] ist und die Funktionen definiert[7] sind durch $f^{\mathfrak{A}/\sim}([a_1]_\sim, \dots, [a_{n_i}]_\sim) := [f_i(a_1, \dots, a_{n_i})]_\sim$. Für eine Klasse $\mathcal{K}$ von Algebren wird die Klasse der Faktoralgebren definiert als $H(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{A}/_\sim \mid \mathfrak{A} \in K \wedge \sim \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})\}$.

*Beispiel* 1.4.29. Betrachten wir die Algebra $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und definieren darauf die Kongruenzrelation $a \sim b :\leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}(a - b = k \cdot m)$, so stellt $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot) = (\mathbb{Z}, +, \cdot)/_\sim$ eine Faktoralgebra dar. Man bemerke außerdem, dass in $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ beispielsweise das Gesetz $\forall x(\overbrace{x + \ldots + x}^{m+1 \text{ mal}} = x)$ gilt, während dieses in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nicht gilt. Es können also in einer Faktoralgebra mehr Gesetze erfüllt sein, als in der ursprünglichen Algebra.

*Bemerkung* 1.4.30. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Faktoralgebra und $\sim$ eine Kongruenzrelation. Dann ist die *kanonische Faktorabbildung* oder *kanonische Projektion* $\varphi : A \to A/_\sim, a \mapsto [a]_\sim$ ein surjektiver Homomorphismus, das heißt Faktoralgebren sind homomorphe Bilder von Algebren. Der folgende Satz liefert in einem gewissen Sinn die Umkehrung.

**Lemma 1.4.31.** *Seien* $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I})$ *und* $\mathfrak{B} = (B, (f_i^{\mathfrak{B}})_{i\in I})$ *Algebren vom selben Typ und sei* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *ein Homomorphismus. Dann ist* $\ker h := \{(a,b) \in A^2 \mid h(a) = h(b)\}$ *eine Kongruenzrelation auf* $\mathfrak{A}$.

[6] Für die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation wird häufig $[a]$ statt $[a]_\sim$ geschrieben.

[7] Dass diese Funktionen tatsächlich wohldefiniert sind, folgt direkt aus der Definition der Invaranz einer Kongruenzrelation unter der Algebra.

*Beweis.* Es sei $i \in I$ beliebig und $a_1 \dots, a_{n_i}, b_1 \dots, b_{n_i} \in A$ mit $(a_j, b_j) \in \ker h$ für alle $j \in \{1, \dots, n_i\}$. Laut Definition gilt also $h(a_j) = h(b_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, n_i\}$ und daher auch $h(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(h(b_1), \dots, h(b_{n_i})) = h(f_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_{n_i}))$, also ist $(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i}), f_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_{n_i})) \in \ker h$. Damit ist $\ker h$ invariant unter $\mathfrak{A}$ und da es sich offensichtlich um eine Äquivalenzrelation handelt, ist $\ker h$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$. □

**Satz 1.4.32** (Homomorphiesatz)**.** *Seien $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$ und $\mathfrak{B} = (B, (f_i^{\mathfrak{B}})_{i \in I})$ zwei Algebren in derselben Signatur, $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/_{\ker h}$ die kanonische Faktorabbildung und sei $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus. Dann existiert genau ein Homomorphismus $\tilde{h} : \mathfrak{A}/_{\ker h} \to \mathfrak{B}$ mit $h = \tilde{h} \circ \varphi$. Dieser Homomorphismus ist injektiv und, falls $h$ surjektiv ist, auch surjektiv.*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{A}/_{\ker h} \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Abbildung 1.4: Visualisierung der Aussage des Homomorphiesatzes

*Beweis.* Für die Surjektivität von $\tilde{h}$ ist nichts zu zeigen. Der übrige Beweis ist in vier Schritte gegliedert.

Eindeutigkeit: Seien $\tilde{h}$ und $\hat{h}$ zwei Homomorphismen von $\mathfrak{A}/_{\ker h}$ nach $\mathfrak{B}$ mit den geforderten Eigenschaften. Dann gilt für $a \in A$ beliebig $\hat{h}([a]) = h(a) = \tilde{h}([a])$, also $\hat{h} = \tilde{h}$.

Existenz: Sei $[a] \in A/_{\ker h}$ beliebig und definiere $\tilde{h}([a]) := h(a)$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da aus $[a] = [b]$ laut Definition $h(a) = h(b)$ folgt, das heißt die Definition ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

Homomorphismus: Sei $i \in I$ und seien $[a_1], \dots, [a_{n_i}] \in A/_{\ker h}$ beliebig. Dann gilt laut Definition $\tilde{h}(f_i^{\mathfrak{A}/_{\ker h}}([a_1], \dots, [a_{n_i}])) = \tilde{h}([f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})]) = h(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(\tilde{h}([a_1]), \dots, \tilde{h}([a_{n_i}]))$, also ist $\tilde{h}$ ein Homomorphismus.

Injektivität: Seien $[a], [b] \in A/_{\ker h}$ beliebig mit $\tilde{h}([a]) = \tilde{h}([b])$. Dann folgt laut Definition $h(a) = h(b)$, also $(a, b) \in \ker h$ und damit $[a] = [b]$. □

**Proposition 1.4.33.** *Seien $\mathfrak{A} = (A, (f_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I})$ eine Algebra, $s \approx t$ ein Gesetz und gelte $\mathfrak{A} \models s \approx t$. Dann gilt für jede Faktoralgebra $\mathfrak{A}/_{\sim} \models s \approx t$.*

*Beweis.* Seien $x_1, \dots, x_n$ Variablen mit $\operatorname{var}(s) \cup \operatorname{var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ und seien $[a_1], \dots, [a_n] \in A/_{\sim}$. Laut Voraussetzung gilt $s^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$, woraus $s^{\mathfrak{A}/\sim}([a_1], \dots, [a_n]) = [s^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)] = [t^{\mathfrak{A}}(a,1 \dots, a_n)] = t^{\mathfrak{A}/\sim}([a_1], \dots, [a_n])$ folgt. Inbesondere ist also $\mathfrak{A}/_{\sim} \models s \approx t$ erfüllt. □

**Korollar 1.4.34.** *Varietäten sind abgeschlossen unter der Bildung von Faktoralgebren.*

15.03.2023

16.03.2023

**Satz 1.4.35** (Birkhoff)**.** *Sei $\tau = (f_i)_{i \in I}$ eine Signatur und $\mathcal{K}$ eine Klasse von $\tau$-Algebren. Dann gilt:*

$$\mathcal{K} \text{ ist abgeschlossen unter H,S,P} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{K} \text{ ist eine Varietät}$$

**Definition 1.4.36.** Für eine Klasse $\mathcal{K}$ von Algebren sei die Menge aller Gesetze von $\mathcal{K}$ $\Sigma(\mathcal{K}) := \{s \approx t \mid \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models s \approx t\}$.

Für eine Menge von Gesetzen $\Sigma$ definiere die Klasse $\mathcal{V}(\Sigma) := \{\mathfrak{A} \mid \forall s \approx t \in \Sigma : \mathfrak{A} \models s \approx t\}$.

*Beweis.* Ist $\mathcal{K}$ eine Varietät, so ist $\mathcal{K}$ laut 1.4.5, 1.4.20 und 1.4.34 unter $H, S, P$ abgeschlossen. Es bleibt die andere Implikation zu zeigen. Dazu definiere $\Sigma := \Sigma(\mathcal{K})$ und $\mathcal{V} := \mathcal{V}(\Sigma)$, womit $\mathcal{V} = \mathcal{K}$ zu zeigen ist. Trivialerweise ist $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{K}$ erfüllt. Für die andere Inklusion sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}$ beliebig, das heißt es gilt $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ zu zeigen.

Für jedes Gesetz $s \approx t$, welches nicht in $\Sigma$ liegt, wähle eine Algebra $\mathfrak{A}_{s\approx t} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{A}_{s\approx t} \not\models s \approx t$. Es sei $\mathfrak{B} := \prod_{s\approx t \notin \Sigma} \mathfrak{A}_{s\approx t}$, wobei $\mathfrak{A}_{s\approx t} \in K$ mit $\mathfrak{A}_{s\approx t} \not\models s \approx t$. Da $\mathcal{K}$ unter Produktbildung abgeschlossen ist, gilt $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Da eine Produktalgebra ein Gesetz genau dann erfüllt, wenn es komponentenweise erfüllt ist, folgt $\Sigma(\mathfrak{B}) = \Sigma \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$. Zu zeigen ist nun, dass $\mathfrak{A} \in HSP(\mathfrak{B})$ gilt.

Bilde die Produktalgebra $\mathfrak{B}^{B^A} = \prod_{i\in B^A} \mathfrak{B}$ und betrachte für alle $a \in A$ die Funktion $\pi_a : B^A \to B, \alpha \mapsto \alpha(a)$ sowie die erzeugte Unteralgebra $\mathfrak{S} := \langle\{\pi_a \mid a \in A\}\rangle \leq \mathfrak{B}^{B^A}$. Dann kann ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : S \to A$ mit $\varphi(\pi_a) = a$ folgendermaßen definiert werden. Jedes Element aus $S$ besitzt eine Darstellung der Form $t^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n})$ mit $a_1 \dots, a_n \in A$ dargestellt werden. Daher wird $\varphi(t^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n})) := t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$ definiert.

Wohldefiniertheit: Es ist zu zeigen, dass die Definition von $\varphi$ unabhängig von der Wahl der Darstellung ist. Das heißt, wenn $u, v$ beliebige Terme und $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \in A$ sind, sodass $u^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n}) = v^{\mathfrak{S}}(\pi_{a'_1}, \dots, \pi_{a'_m})$ gilt, dann soll auch $u^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = v^{\mathfrak{A}}(a'_1, \dots, a'_m)$ gelten. Dafür werden $x_i := a_i$ und $x'_i := a_i$ als Variablen eingeführt. Es ist nun hinreichend zu zeigen, dass $\mathfrak{B} \models u(x_1, \dots, x_n) \approx v(x'_1, \dots, x'_m)$ gilt, da dieses Gesetz wegen $\Sigma(\mathfrak{B}) \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ dann auch in $\mathfrak{A}$ gilt, was insbesondere $u^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = v^{\mathfrak{A}}(a'_1, \dots, a'_m)$ bedingen würde. Sind $b_i, b'_i \in B$ beliebige Werte für die Variablen $x_i$ respektive $x'_i$, so muss $u^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n) = v^{\mathfrak{B}}(b'_1, \dots, b'_m)$ gezeigt werden. Nun kann $\alpha \in B^A$ mit $\alpha(a_i) = b_i$ und $\alpha(a'_i) = b'_i$ gewählt werden, da aus $x_i a_i = a_j = x_j$ folgen würde, dass $b_i = b_j$ gelten muss. Das analoge Argument gilt auch in den Fällen $a_i = a'_j$ und $a'_i = a'_j$. Da voraussetzungsgemäß $u^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n}) = v^{\mathfrak{S}}(\pi_{a'_1}, \dots, \pi_{a'_m})$ erfüllt ist, gilt diese Gleichheit insbesondere wenn $\alpha$ als Argument eingesetzt wird. Dies liefert $u^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n) = u^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1}, \dots, \pi_{a_n})(\alpha) = v^{\mathfrak{S}}(\pi_{a'_1}, \dots, \pi_{a'_m})(\alpha) = v^{\mathfrak{B}}(b'_1, \dots, b'_m)$, also was zu zeigen war.

Surjektivität: $\varphi$ ist trivialerweise surjektiv, da für $a \in A$ stets $\pi_a \in S$ gilt und $\varphi(\pi_a) = a$ ist.

Homomorphismus: Es bleibt noch zu zeigen, dass $\varphi$ ein Homomorphismus ist. Sei $i \in I$ beliebig und seien $g_1, \dots, g_{n_i} \in S$ beliebig. Zu zeigen ist $\varphi(f_i^{\mathfrak{S}}(g_1, \dots, g_{n_i})) = f_i^{\mathfrak{A}}(\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_{n_i}))$. Für jedes $j \in 1, \dots, n$ können ein Term $t_j$ sowie $a_1^{(j)}, \dots, a_{m_j}^{(j)} \in A$ gewählt werden, sodass $g_j = t_j^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1^{(j)}}, \dots, \pi_{a_{m_j}^{(j)}})$ gilt. Nun wird $t := f_i^{\mathfrak{T}}(t_1, \dots, t_{n_i})$ als neuer Term definiert und es folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(f_i^{\mathfrak{S}}(g_1, \dots, g_{n_i})) &= \varphi(f_i^{\mathfrak{S}}(t_1^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1^{(1)}}, \dots, \pi_{a_{m_1}^{(1)}}), \dots, t_{n_i}^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1^{(n_i)}}, \dots, \pi_{a_{mn_i}^{(n_i)}}))) = \\
&= \varphi(t^{\mathfrak{S}}(\pi_{a_1^{(1)}}, \dots, \pi_{a_{mn_i}^{(n_i)}})) \overset{(*)}{=} t^{\mathfrak{A}}(a_1^{(1)}, \dots, a_{m_{n_i}}^{(n_i)}) = \\
&= f_i^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1^{(1)}, \dots, a_{m_1}^{(1)}), \dots, t^{\mathfrak{A}}(a_1^{n_i}, \dots, a_{m_{n_i}}^{(n_i)})) \overset{(*)}{=} f_i^{\mathfrak{A}}(\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_{n_i})).
\end{aligned}$$

An den Stellen die mit $(*)$ markiert sind, wurde die Definition von $\varphi$ verwendet. □

**Korollar 1.4.37.** *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren und $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ die erzeugte Varietät. Dann gilt für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}(\mathcal{K}) : \mathfrak{A} \in HSP(\mathcal{K})$.*

*Beweis.* Es gilt $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}(\mathcal{K}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \Sigma(\mathcal{K})$. Die Implikation von links nach rechts ist trivialerweise erfüllt. Die Implikation von rechts nach links folgt aus der Tatsache, dass man $B \in P(\mathcal{K})$ mit $\Sigma(A) \supseteq \Sigma(B)$ finden kann und dann wie im Beweis für den Satz von Birkhoff auf $A \in HSP(\mathfrak{B}) \subseteq HSP(\mathcal{K})$ schließt. □

## 1.5 Freie Algebren

**Definition 1.5.1.** Sei $\tau = (n_i)_{i \in I}$, $\mathcal{K}$ eine Klasse von $\tau$-Algebren, $\mathfrak{F} \in K$ und $X \subseteq F$. Dann heißt $\mathfrak{F}$ *frei über $X$ in $\mathcal{K}$*, wenn es für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und alle $\varphi : X \to A$ genau einen Homomorphismus $\overline{\varphi} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{A}$ mit $\overline{\varphi}|_X = \varphi$ gibt.

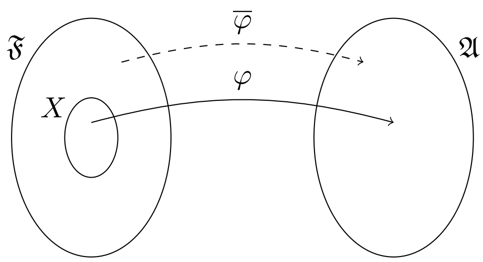


Abbildung 1.5: $\mathfrak{F}$ frei über $X$

*Beispiel* 1.5.2. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse der Vektorräume über den Körper $\mathbb{C}$, $\mathfrak{V} \in \mathcal{K}$ beliebig und $X \subseteq V$ eine Basis von $\mathfrak{V}$, d. h. $\mathfrak{B}$ ist frei über $X$ in $\mathcal{K}$.

Mit einer Variablenmenge $X$ ist die Termalgebra $\mathfrak{T}(X, (f_i)_{i \in I})$ frei über $X$ in der Klasse aller $\tau$-Algebren.

*Beispiel* 1.5.3. Sei $\mathcal{K}$ eine Varietät definiert durch Gesetze $\Sigma$, also $\mathcal{K} = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models \Sigma\}$. Sei $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ so, dass $\Sigma(\mathfrak{B}) = \Sigma$ – nach dem Beweis des Satzes von Birkhoff wissen wir, dass ein solches $\mathfrak{B}$ existiert! Sei

$$\mathfrak{S} \leq \mathfrak{B}^{B^X}, \quad S := \langle \{\pi_x \mid x \in X\} \rangle,$$

so ist $\mathfrak{S}$ frei über $\{\pi_x \mid x \in X\}$ in $\mathcal{K}$.

**Proposition 1.5.4.** *Sei $\mathcal{K}$ eine Varietät, $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathcal{K}$ frei über $X$ in $\mathcal{K}$, dann ist $\mathfrak{F}_1 \cong \mathfrak{F}_2$.*

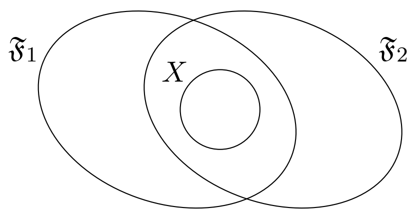


Abbildung 1.6: $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ frei über $X$

*Beweis.* Betrachten wir $\mathrm{id}_X : X \to X$, so gibt es eindeutige Homomorphismen $\varphi : \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{F}_2, \psi : \mathfrak{F}_2 \to \mathfrak{F}_1$ mit $\varphi|_X = \mathrm{id}_X, \psi|_X = \mathrm{id}_X$. Es ist dann $\psi \circ \varphi : \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{F}_1$ ein Homomorphismus mit $(\psi \circ \varphi)|_X = \mathrm{id}_X$. Da $\mathfrak{F}_1$ frei über $X$ ist gilt $\phi \circ \varphi = \mathrm{id}_{F_1}$, womit $\psi$ surjektiv und $\varphi$ injektiv ist. Analog folgt, dass $\psi$ injektiv und $\varphi$ surjektiv ist, womit $\varphi, \psi$ Isomorphismen mit $\varphi = \psi^{-1}$ sind. □

16.03.2023

22.03.2022

**Proposition 1.5.5.** *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren mit Typ $(n_i)_{i\in I} =: \tau$. Sei*

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{A} \mid \exists \mathfrak{B} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}\} \subseteq \mathcal{K},$$

*was insbesondere der Fall ist, falls $\mathcal{K}$ eine Varietät ist. Sei $\mathfrak{F}$ in $\mathcal{K}$ frei über $X \subseteq F$, so ist $\mathfrak{F} = \langle X \rangle$.*

*Beweis.* Zunächst gilt $\langle X \rangle \leq \mathfrak{F} \in \mathcal{K}$, und damit auch $\langle X \rangle \in \mathcal{K}$.

Nun ist $\langle X \rangle$ frei über $X$ in $\mathcal{K}$. Um dies einzusehen, seien $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}, \varphi : X \to A$ beliebig. Zu zeigen ist, dass es eine eindeutigen, $\varphi$ fortsetzenden Homomorphismen $\overline{\varphi} : \langle X \rangle \to \mathfrak{A}$ gibt mit $\overline{\varphi}|_X = \varphi$. Wir wissen es gibt einen eindeutigen Homomorphismus $\overline{\overline{\varphi}} : F \to A$ mit $\overline{\overline{\varphi}}|_X = \varphi$. Definiere $\overline{\varphi} := \overline{\overline{\varphi}}|_{\langle X \rangle}$, so erfüllt dieser Homomorphismus die geforderte Eigenschaft. Die Eindeutigkeit folgt aus Bemerkung 1.5.6.

Betrachte $\mathrm{id}_X : (X \subseteq \langle X \rangle) \to (X \subseteq F)$, so gibt es eindeutige Fortsetzungen

$$\varphi : \langle X \rangle \to \mathfrak{F}, \quad \varphi|_X = \mathrm{id}_X, \qquad \psi : \mathfrak{F} \to \langle X \rangle, \quad \psi|_X = \mathrm{id}_X,$$

womit auch $\psi \circ \varphi : \langle X \rangle \to \langle X \rangle$ ein Homomorphismus mit $(\psi \circ \varphi)|_X = \mathrm{id}_X$ ist. Mit der Eindeutigkeit folgt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\langle X \rangle}$ und analog damit auch $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_F$.

Nun sind $\varphi, \psi$ bijektiv, also Isomorphismen. Betrachte nochmals $\varphi : \langle X \rangle \to F, \varphi|_X = \mathrm{id}_X$ und sei $c \in \langle X \rangle$ beliebig, so gilt $c = t^{\langle X \rangle}(x_1, ..., x_n)$ mit $x_1, ..., x_n \in X$. Es folgt

$$\varphi(c) = \varphi(t^{\langle X \rangle}(x_1, ..., x_n)) = t^{\langle X \rangle}(\varphi(x_1), ..., \varphi(x_n)) = t^{\langle X \rangle}(x_1, ..., x_n) = c,$$

also $\varphi = \mathrm{id}_{\langle X \rangle}$. Da $\varphi$ surjektiv ist folgt damit $\langle X \rangle = F$. □

*Bemerkung* 1.5.6. Allgemein gilt, dass zwei Homomorphismen übereinstimmen, wenn sie das auf einem Erzeuger tun. Sind also $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ Algebren, $C = \langle S \rangle$ und $\varphi, \psi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ Homomorphismen mit $\varphi|_S = \psi|_S$, so folgt $\varphi = \psi$.

*Bemerkung* 1.5.7. Wir wollen die freie Algebra als Faktoralgebra der Termalgebra darstellen. Sei dazu $\tau := (n_i)_{i\in I}$ eine Signatur und $X$ eine Menge, so ist

$$\mathfrak{T}^X := \mathfrak{T}(X, (f_i^{\mathfrak{T}})_{i\in I})$$

frei über $X$ in der Klasse der $\tau$-Algebren.

Sei $\mathcal{K}$ eine Varietät von $\tau$-Algebren, so stellt sich die Frage ob $\mathfrak{T}^X$ frei über $X$ in $\mathcal{K}$ ist. Allgemein ist dies nicht der Fall, da $\mathfrak{T}^X$ nicht in $\mathcal{K}$ enthalten sein muss.

**Proposition 1.5.8.** *Sei $\mathcal{K}$ eine Varietät und definiere*

$$\Sigma_X := \{(s, t) \mid s, t \in T(X), \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models s \approx t\} \subseteq T(X)^2,$$

*so ist $\Sigma_X$ eine Kongruenzrelation auf $T(X)$.*

*Beweis.* $\Sigma_X$ ist Äquivalenzrelation:

- reflexiv: Ist $t \in T(X)$ beliebig, so gilt $\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models t \approx t$.

- symmetrisch: Sind $s, t \in T(X), (s,t) \in \Sigma_X$, so gilt

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models s \approx t \quad \Longrightarrow \quad \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models t \approx s,$$

  also $(t,s) \in \Sigma_X$.

- transitiv: Sind $s, t, u \in T(X), (s,t), (t,u) \in \Sigma_X$, so gilt

$$(\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models s \approx t \quad \wedge \quad \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models t \approx u) \quad \Longrightarrow \quad \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models s \approx u,$$

  also $(s,u) \in \Sigma_X$.

Um zu sehen, dass $\Sigma_X$ auch eine Kongruenzrelation ist, seien $i \in I, (s_1, t_1), ..., (s_{n_i}, t_{n_i}) \in \Sigma_X$. Zu zeigen ist $(f_i(s_1, ..., s_{n_i}), f_i(t_1, ..., t_{n_i})) \in \Sigma_X$. Es gilt

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models s_1 \approx t_1 \wedge ... \wedge s_{n_i} \approx t_{n_i},$$

insbesondere folgt also

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models f_i(s_1, ..., s_{n_i}) \approx f_i(t_1, ..., t_{n_i})$$

und damit $(f_i(s_1, ..., s_{n_i}), f_i(t_1, ..., t_{n_i})) \in \Sigma_X$. □

**Definition 1.5.9.** Wir definieren $\mathfrak{T}^{X,\Sigma_X} := \mathfrak{T}^X/_{\Sigma_X}$.

**Satz 1.5.10.** *$\mathfrak{T}^{X,\Sigma_X}$ ist frei über $X$ in $\mathcal{K}$.*

*Beweis.* Sei $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ mit

$$\Sigma(\mathfrak{B}) := \{s \approx t \mid \mathfrak{B} \models s \approx t\} = \Sigma(\mathcal{K}) := \{s \approx t \mid \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models s \approx t\},$$

wobei wir die Existenz aus dem Beweis des Satzes von Birkhoff wissen.

Sei $\langle\{\pi_x \mid x \in X\}\rangle =: \mathfrak{S} \leq \mathfrak{B}^{B^X}$, wobei $\pi_x : B^X \to B, \alpha \mapsto \alpha(x)$ (wie im Beweis des Satzes von Birkhoff), so wissen wir, dass $\mathfrak{S}$ frei über $\{\pi_x \mid x \in X\}$ in $\mathcal{K}$.

Betrachte

$$\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}^{X,\Sigma_X}, t^{\mathfrak{S}}(\pi_{x_1}, ..., \pi_{x_n}) \mapsto [t(x_1, ..., x_n)]_{\Sigma_X}.$$

Zunächst ist $\varphi$ wohldefiniert: Seien dazu $u, v \in T(X)$ mit $u^{\mathfrak{S}}(\pi_{x_1}, ..., \pi_{x_n}) = v^{\mathfrak{S}}(\pi_{x'_1}, ..., \pi_{x'_m})$, so gilt für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, dass $\mathfrak{A} \models u(x_1, ..., x_n) \approx v(x'_1, ..., x'_m)$, womit $(u(x_1, ..., x_n), v(x'_1, ..., x'_m)) \in \Sigma_X$ und damit $[u(x_1, ..., x_n)]_{\Sigma_X} = [v(x'_1, ..., x'_m)]_{\Sigma_X}$ folgt.

Weiters ist $\varphi$ surjektiv, da mit beliebigem $[t(x_1, ..., x_n)]_{\Sigma_X} \in \mathfrak{T}^{X,\Sigma_X}$ sofort $t^{\mathfrak{S}}(\pi_{x_1}, ..., \pi_{x_n}) \overset{\varphi}{\mapsto} [t(x_1, ..., x_n)]_{\Sigma_X}$ gilt.

Um einzusehen, dass $\varphi$ injektiv ist seien $u, v \in T(X)$ mit $[u(x_1, ..., x_n)]_{\Sigma_X} = [v(x'_1, ..., x'_m)]_{\Sigma_X}$ beliebig, so gilt für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, dass $\mathfrak{A} \models u(x_1, ..., x_n) \approx v(x'_1, ..., x'_m)$. Inbesondere gilt $\mathfrak{S} \models u(x_1, ..., x_n) \approx v(x'_1, ..., x'_m)$ und damit $u^{\mathfrak{S}}(\pi_{x_1}, ..., \pi_{x_n}) = v^{\mathfrak{S}}(\pi_{x'_1}, ..., \pi_{x'_m})$.

Dass $\varphi$ ein Homomorphismus ist verifiziert man unmittelbar in Analogie zum Beweis des Satzes von Birkhoff. Damit ist $\varphi$ insgesamt also ein Isomorphismus, $\mathfrak{S} \cong \mathfrak{T}^{X,\Sigma_X}$, womit $\mathfrak{T}^{X,\Sigma_X}$ frei über $\{[x]_{\Sigma_X} \mid x \in X\}$ ist. □

*Beispiel* 1.5.11. Bezeichne $(\cdot, e, ^{-1})$ vom Typ $\tau = (2, 0, 1)$ die Sprache der Gruppen. Sei $X = \{x_1, x_2, ...\}$ eine Variablenmenge so sind

$$\left.\begin{array}{c} x_1, x_2, x_3, ... \\ e, x_1 \cdot x_2, x_2 \cdot x_1, x_1^{-1}, ... \\ e \cdot x_1, x_1 \cdot e, (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3, x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), ... \\ \vdots \end{array}\right\} \begin{array}{c} (T(X), \cdot^{\mathfrak{T}}, e^{\mathfrak{T}}, {-1}^{\mathfrak{T}}) \text{ ist frei über} \\ X \text{ in der Klasse aller } \tau\text{-Algebren.} \end{array}$$

Beispiele für Terme respektiver 1., 2. und 3. Stufe. Bezeichne nun

$$\Sigma_X = \{(e \cdot x_1, x_1), ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3, x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)), (e, x_1 \cdot x_1^{-1}), ...\}$$

als die Menge aller Gesetze welche in allen Gruppen gelten. Faktorisieren wir nun nach Termäquivalenz, so erhalten wir

$$T(X)/_{\Sigma_X} = \{[x_1], [x_2], ..., [x_1, x_2], [x_2, x_1], ...\}.$$

Jedes Element $t$ von $T(X)/_{\Sigma_X}$ (außer $e$) hat also einen Repräsentanten der Form $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$, wobei $a_i = x_j$ oder $a_i = x_j^{-1}$ für ein $j$, aber nie $x_j$ und $x_j^{-1}$ aufeinanderfolgen oder umgekehrt.

# Index

# Abbildungsverzeichnis