Một vài tính chất hình học trên một cấu hình về Tỷ số Vàng

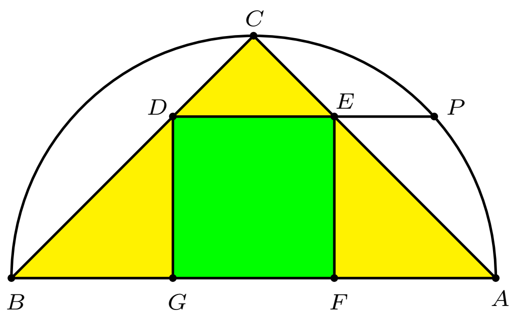
Trần Quang Hùng

Giới thiệu. *Bài viết giới thiệu một tính chất hình học trên một cấu hình về phép dựng Tỷ số Vàng dùng hình vuông nội tiếp trong một tam giác vuông cân.*

1. Mở đầu

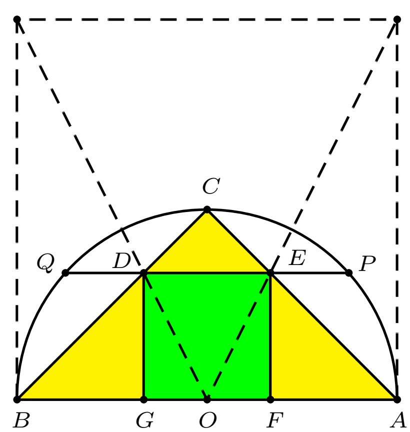
Trong [1], tác giả đã giới thiệu một phép dựng Tỷ số Vàng sử dụng hình vuông nội tiếp tam giác vuông cân như sau

Định lý 1 Cho tam giác vuông cân ABC cùng với đường tròn ngoại tiếp của nó, nội tiếp một hình vuông $DEFG$ với cạnh FG dọc theo cạnh huyền AB. Nếu cạnh DE kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tại P, thì E chia DP theo Tỷ số Vàng $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (xem Hình 1).



Hình 1. Phép dựng Tỷ số Vàng với hình vuông nội tiếp tam giác vuông cân.

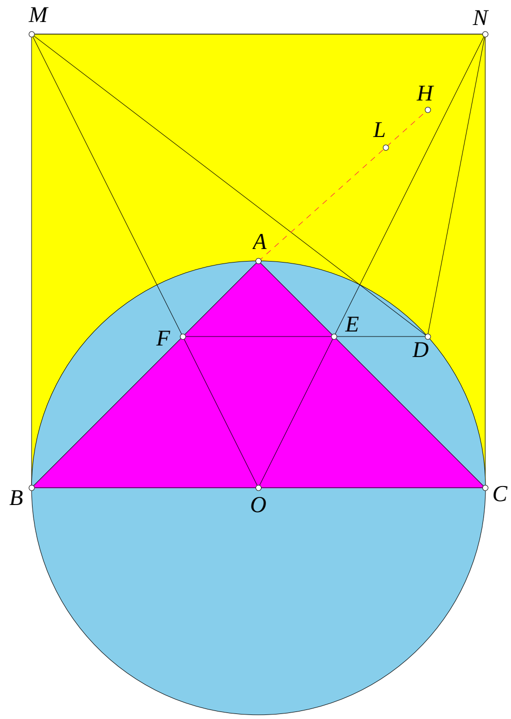
Phép dựng hình vuông $DEFG$ nội tiếp tam giác vuông cân ABC có thể được mô tả đơn giản qua hình vẽ dưới đây (xem Hình 2).



Hình 2. Mô tả phép dựng hình vuông nội tiếp tam giác vuông cân.

Trong việc tìm hiểu cấu hình về Tỷ số Vàng của Định lý 1, chúng tôi nhận thấy đây là một cấu hình thú vị, có thể chứa đựng nhiều bài toán mới. Thông qua một ví dụ là Định lý 2 dưới đây, chúng tôi muốn giới thiệu với bạn đọc cấu hình của Định lý 1. Chúng tôi đề xuất một tính chất hình học như sau

Định lý 2 Cho tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn (O). Dựng hình vuông $BCNM$ vào trong tam giác ABC. Các đường thẳng OM và ON cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại F và E. Tia FE cắt (O) tại D. Khi đó đường thẳng nối trực tâm và điểm Lemoine của tam giác DMN đi qua A (xem Hình 3).



Hình 3. Minh họa cho Định lý 2.

Chú ý. Định lý 2 cũng đã tác giả được giới thiệu như một bài toán trong [2].

2. Một chứng minh cho Định lý 2

Trong mục này chúng tôi giới thiệu lời giải của tác giả **Nguyễn Cung Thành** từ [2] (xem Hình 4).

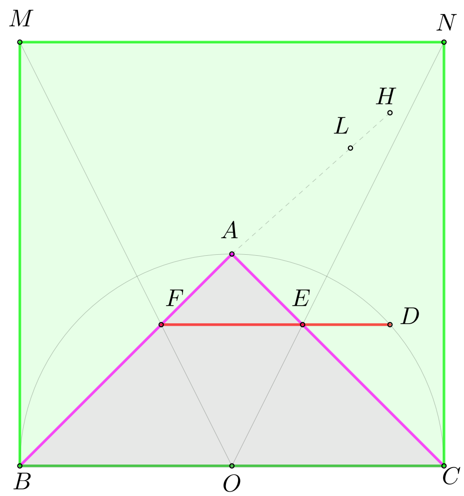
LỜI GIẢI Theo Định lý 1 thì

$$\frac{FD}{FE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Sử dụng hệ tọa độ Đề-các vuông góc (xem [8]), ta cho các điểm có tọa độ như sau

$$B(0,0), C(2,0), N(2,2), M(0,2), A(1,1).$$

Từ $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ta thu được $F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Tương tự thì $E\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.



Hình 4. Minh họa cho chứng minh Định lý 2.

Do đó $\overrightarrow{FE}\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Kết hợp với Tỷ số Vàng từ Tỷ số Vàng $\frac{FD}{FE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta thu được

$$\overrightarrow{FD}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}, 0\right)$$

và vì thế nên

$$D\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Mặt khác, không khó để tính được $MN^2 = 4$. Đồng thời từ tọa độ của D, ta dễ tính được

$$DM^2 = \frac{2(5+\sqrt{5})}{3}, DN^2 = \frac{2(5-\sqrt{5})}{3},$$

vì thế nên

$$MN^2 + DM^2 + DN^2 = \frac{32}{3}.$$

Gọi L là điểm Lemoine của tam giác $\triangle DMN$ thì ta có đẳng thức vector (thu được từ tính chất tâm tỷ cự của điểm Lemoine [6]):

$$MN^2.\overrightarrow{LD} + DN^2 \cdot \overrightarrow{LM} + DM^2 \cdot \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{0}.$$

Từ đây ta dễ tính được hoành độ của L là

$$x_L = \frac{MN^2 \cdot x_D + DM^2 \cdot x_N + DN^2 \cdot x_M}{MN^2 + DM^2 + DN^2} = \frac{\sqrt{5}+4}{4}.$$

Và tương tự với tung độ của L là

$$y_L = \frac{3}{2}.$$

Ta thu được

$$L\left(\frac{\sqrt{5}+4}{4}, \frac{3}{2}\right).$$

Gọi $H\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, a\right)$ là trực tâm của tam giác $\triangle DMN$. Dễ thấy $DH \perp BC$ nên hoành độ của H và của D bằng nhau. Vậy ta giả sử

$$\overrightarrow{MH} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, a-2\right).$$

Từ $\overrightarrow{DN} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$ và $DN \perp MH$, ta thu được $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ hay $\frac{4}{9} + \frac{4(a-2)}{3} = 0$. Ta suy ra $a = \frac{5}{3}$. Như vậy ta có tọa độ các điểm

$$A(1,1), L\left(\frac{\sqrt{5}+4}{4}, \frac{3}{2}\right), H\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Từ đó ta thấy phương trình tổng quát (xem [8]) của đường thẳng AL là

$$x - \frac{\sqrt{5}}{2}y + \frac{\sqrt{5}-2}{2} = 0.$$

Không khó để thấy tọa độ của H thỏa mãn phương trình tổng quát của đường thẳng AL. Do đó HL đi qua A. Ta kết thúc chứng minh. □

Chú ý. Trong [2] cũng có một lời giải thuần túy hình học cho Định lý 2.

3. Kết luận

Tác giả coi bài viết trong [1] là công trình về hình học đầu tiên được tác giả công bố quốc tế. Tác giả rất tâm đắc với phép dựng Tỷ số Vàng này. Như trong [1] cũng đã nói, phép dựng này đã gợi nhớ lại phép dựng Tỷ số Vàng kinh điển của nghệ sĩ người Mỹ George Phillips Odom Jr, xem [5]. Trên cấu hình này (bao gồm cả phép dựng hình vuông nội tiếp) còn có nhiều bài toán mới và thú vị để khai thác, các bạn có thể tham khảo một vài bài toán như vậy ở trong [3, 4, 7]. Lời cuối cùng, tác giả muốn nói lời cảm ơn chân thành tới Giáo Sư **Paul Yiu** từ đại học Florida Atlantic của Mỹ. Ông như người bạn lớn, người thầy của tác giả, người đã giúp tác giả đặt những viên gạch đầu tiên để đưa những ý tưởng hình học của mình ra thế giới.

Tài liệu

[1] T. Q. Hung, The golden section in the inscribed square of an isosceles right triangle, *Forum Geom.*, **15**(2015), 91–92.

[2] T. Q. Hung, BMoEG–II Mock Geometry Olympiad, *Forum AoPS* (2022), available at https://artofproblemsolving.com/community/c594864t1273694f594864h2948721.

[3] T. Q. Hung, Concurrent lines with a side of a square, *Forum AoPS* (2023), available at https://artofproblemsolving.com/community/c374081h3049737.

[4] T. Q. Hung, Radical axis with the Lester circle, *Forum AoPS* (2023), available at https://artofproblemsolving.com/community/c374081h3051195.

[5] T. Q. Hung and F. V. Lamoen , Odom's Triangle, *Int. J. Comput. Discov. Math.* (2021), 68–77.

[6] Trần Quang Hùng, Đề thi Olympic toán cho học sinh phần hình học, Hội Toán học Việt Nam (VMS) (2023).

[7] Trần Quang Hùng, Ứng dụng của một số định lý hình học kinh điển, Kỷ yếu Trường Đông cho học sinh THPT chuyên, Khoa Toan–Cơ–Tin học ĐHKHTN–ĐHQGHN, Hà Nội 2022.

[8] Trần Nam Dũng (chủ biên), Sách giáo khoa Toán 10 tập 2 (bộ sách chân trời sáng tạo), NXBGD 2023.