Tạp Chí online của cộng đồng những người yêu toán

EPSILON

No 24
13 DEC 2023

LỜI NGỎ

Quý độc giả Epsilon thân mến,

Trong không khí tràn ngập sắc màu và âm nhạc của mùa lễ hội, chúng tôi rất hân hạnh giới thiệu đến quý vị độc giả tạp chí Toán Học Epsilon số 24 - món quà đặc biệt của chúng tôi dành cho mùa Giáng Sinh năm nay.

"Đi nhiều người ta sẽ đi rất xa" luôn là động lực để chúng tôi không ngừng khám phá, học hỏi và đối mặt với những thách thức mới. Chúng tôi hy vọng rằng số 24 của Tạp Chí Toán Học Epsilon sẽ là nguồn cảm hứng không ngừng cho quý độc giả, kích thích tò mò và sự sáng tạo. Chúng tôi chân thành cảm ơn sự đóng góp của các tác giả và hy vọng rằng quý độc giả sẽ tận hưởng việc đọc và khám phá thế giới phong phú của toán học.

Chúc quý độc giả một mùa lễ hội an lành, ấm áp và tràn đầy niềm vui!

Trân trọng,

Ban Biên tập Epsilon

Mục lục

ĐỊNH LÝ BẤT TOÀN CỦA GÖDEL

NGUYỄN LÊ ANH

Giới thiệu. *Để tìm được chứng minh định lý bất toàn của Gödel, độc giả ngày nay có thể tìm trong tích tắc với Google, nhưng để hiểu được chứng minh này, thật sự là một thử thách không hề đơn giản. Và để hiểu một cách sâu sắc định lý này, có lẽ phần lớn chúng ta sẽ bỏ cuộc!*

Như Isaac Newton đã từng nói: "Nếu tôi nhìn thấy được xa hơn bởi vì tôi đứng trên vai những người khổng lồ", thì để đi xa hơn, hiểu được những định lý phức tạp như định lý bất toàn của Gödel, chúng ta có những người hùng thầm lặng đã bỏ công nghiên cứu và giảng lại cho chúng ta: tác giả Nguyễn Lê Anh.

Trong số Epsilon 24 này, chúng tôi trân trọng gửi đến độc giả bài viết về định lý bất toàn của Gödel. Và hơn thế nữa, đây không phải chỉ là một bài viết về chứng minh định lý, mà còn là một bài giảng về thế nào là chứng minh toán học, chứng minh vật lý và chứng minh khoa học.

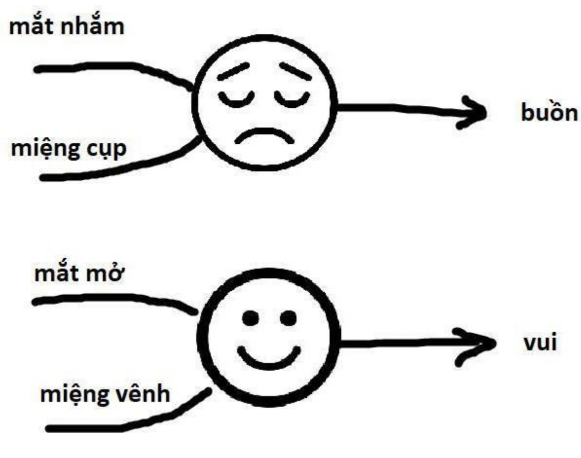
Còn gì tuyệt vời hơn để đọc cho những ngày giáng sinh và năm mới?

Trước khi bắt đầu, chúng ta cần phải giải thích thế nào là một chứng minh toán học, thế nào là một chứng minh vật lý, thế nào là một chứng minh khoa học. Các chứng minh trên thực tế là quá trình thuyết phục, và với mỗi lĩnh vực khác nhau quá trình thuyết phục này có khác nhau.

Chúng ta sống trong xã hội, điều này hàm ý cuộc sống của mỗi người là phụ thuộc vào sự phát triển của tổng thể xã hội. Xã hội tự vận hành theo các quy luật, trong đó trí thông minh xã hội đóng vai trò quyết định. Trí thông minh xã hội được hiểu là các lập luận và suy diễn mà phải được cả xã hội công nhận là đúng, và dựa trên những cái đúng đó mà đưa ra kết luận cũng như việc phải làm và mục tiêu phải đạt được. Nguyên lý tư duy của Xã Hội bắt đầu từ các chứng cứ được cả xã hội công nhận, tức chứng cứ khách quan. Tiếp theo là các lập luận được cả xã hội cho là đúng, và kết quả suy diễn ra phải được kiểm nghiệm là đúng. Vật chất được hiểu là sự tồn tại và tự vận động, mà không phụ thuộc vào ý thức (tức ý muốn của cá nhân!). Vì thế mà nó được đồng nhất với đặc tính khách quan của thế giới. Tư duy xã hội được hiểu là phép duy vật biện chứng. Duy vật là hàm ý khách quan, và biện chứng là suy diễn được công nhận là đúng.

Duy vật biện chứng là khung tư duy cho mọi thứ tư duy khách quan, tức là tư duy khoa học. Khoa học là từ được dùng để nói về quá trình nhận biết về các thứ có thật trong tự nhiên. Lấy ví dụ như chúng ta nhìn trời thấy trên trời có mây xám hạ thấp và gió lạnh thì sẽ đưa ra kết luận là sẽ có mưa. Như vậy "mây xám hạ thấp + gió lạnh → có mưa" là quy tắc được dùng để dự đoán mưa. Mỗi bước suy diễn khoa học sử dụng một quy tắc mà được mọi người công nhận là đúng. Việc mọi người công nhận là đúng thì cũng chưa hẳn là đã đúng tuyệt đối, vì thế kết luận cuối cùng phải được kiểm nghiệm lại.

Nhiều người không nhận ra là những gì mà xã hội đồng thuận đều có tính khách quan khoa học của nó. Lấy ví dụ như biểu hiện vui thì miệng vểnh lên mà biểu hiện buồn là miệng quặp xuống.



Đây là một dạng "*tiên đề*" và tập hợp tất cả các tiên đề như vậy làm thành văn hóa. Như vậy văn hóa là các nguyên lý tư duy, tức hệ các tiên đề, đã có sẵn trong mỗi thành viên. Đối với những người có cùng văn hóa, họ sẽ có cùng cảm xúc sinh ra khi nhận một lượng tin. Như thế các nhà văn hay họa sĩ, nhạc sĩ,... cần phải hiểu được cấu trúc văn hóa để tạo ra hiệu ứng khi sáng tác.

Tất cả các tác phẩm nghệ thuật như hội họa, điêu khắc, vũ kịch, thơ ca, văn học,... đều tác động vào con người nhằm thay đổi đổi trạng thái tâm sinh lý. Quá trình thay đổi trạng thái tâm sinh lý này được thực hiện qua nhiều bước, mỗi bước là từ một "*tiên đề*" nào đó. Các bước này liên kết với nhau cũng như việc chúng ta chứng minh một định lý toán học mà sử dụng các lập luận từ tiên đề. Không phải mọi liên kết lập luận đều là chứng minh đúng cho một định lý, cũng như thế không phải mọi bài viết đều có giá trị văn học, không phải mọi tổ hợp âm thanh có giá trị âm nhạc... Chúng ta sẽ còn quay lại vấn đề về phjam trù tư duy, cấu trúc, và tính nội dung trong các tác phẩm của văn học, nghệ thuật, hội họa, điêu khắc, âm nhạc,...

Tư duy toán học thì không phải là tư duy khoa học. Điều này có thể hơi khó hiểu với các bạn học sinh phổ thông, tuy nhiên nếu các bạn tĩnh tâm mà tự vấn thì sẽ thấy.

Ví dụ như trước câu nói "*Cho tam giác ABC ...*" là trên thực tế không cho cái gì, bởi không rõ các đỉnh của tam giác ABC ở đâu trong số các địa danh Hà Nội, Hải Phòng, hay Nghệ An,...

Chuyện kể rằng:

Có một người bán thịt lợn đến tòa kiện một nhà toán học vì ông ta sử dụng định lý 3 đường trung tuyến của một tam giác nhưng chúng lại không cắt nhau tại một điểm.

Tòa hỏi:

- Nhà toán học, ngươi bị quy tội lừa đảo vì thực tế cho thấy kết luận sai.
- Thưa tòa cho tôi được hỏi cái tam giác của ông bán thịt lợn ở đâu?
- Tôi lấy đỉnh của nó là các gốc chuối. Người bán thịt lợn trả lời.
- Thưa tòa tòa cho giở lại định nghĩa điểm hình học mà tôi coi là đỉnh của tam giác.

Tòa đọc to "*Điểm là một thứ không có chiều dài không có chiều rộng*" (sách giáo khoa do bộ Giáo Dục biên soạn)

- Vậy xin hỏi cái gốc chuối của ông bán thịt lợn có phải là điểm không? - Nhà toán học hỏi.
- Nếu không có chiều dài không có chiều rộng thì xác định thế nào được một điểm? - Ông bán thịt lợn nói.
- Vâng thưa ông bán thịt lợn. Việc làm toán là của tôi, việc áp dụng và được cái gì là của ông. Ông có dám khẳng định gốc chuối của ông là một điểm thì hẵng kiện tôi sai vì thí nghiệm của ông. Ông hãy tự chịu trách nhiệm về các yếu tố đầu vào thì tôi sẽ chịu trách nhiệm về các khẳng định đầu ra.

- Vậy toán học chẳng là gì cả.

- Vâng sức mạnh của nó là ở chỗ ấy, một phương trình có thể được dùng để tính dòng chảy của một cống nước ngầm, và cũng có thể dùng để tính thời gian của vụ nổ Bigbang. Khi đã trở thành toán học người ta có thiên hướng tách nó ra khỏi mọi thứ đời thường, khi ấy nó mang tính phổ quát.

Trong hình học người ta nói tới điểm và đường trên mặt phẳng, và không hề giải thích cái điểm ấy là gì. Chúng được gọi là khái niệm. Giữa điểm và đường thì có "*quan hệ*". Ví dụ như cứ qua 2 điểm không trùng nhau chúng ta có và chỉ có thể kẻ được một đường thẳng đi qua hai điểm ấy. Cũng thế, "*từ một điểm ngoài đường thẳng ta chỉ có thể kẻ được duy nhất một đường thẳng song song (không cắt) đường thẳng đã cho*". Những "*quan hệ*" này được gọi là tiên đề. Chúng là những mệnh đề, tức các khẳng định về mối quan hệ giữa các khái niệm, được chấp thuận là đúng đầu tiên.

Khác với các khẳng định trong thực tế, tức khẳng định khoa học, mỗi khẳng định (còn gọi là mệnh đề) toán học chỉ có thể hoặc là đúng hoặc là sai. Từ các khái niệm và tiên đề này người ta chứng minh được các định lý, tức khẳng định được một mệnh đề là đúng hoặc là sai. Người ta sử dụng toán học để mô phỏng lại thực tế, chứ toán học không có liên quan trực tiếp gì tới thực tế cuộc sống. Học toán và làm các bài tập về toán không thật sự khó, mà sử dụng toán học để kiếm sống mới là khó. Đây là một nghệ thuật mà không phải ai cũng có được.

Đặc điểm quan trọng nhất của toán học là tính đúng sai phân tách. Một mệnh đề thì chỉ có thể hoặc là đúng hoặc là sai. Định lý Gödel khẳng định trong một hệ tiên đề không tự mâu thuẫn thì có những mệnh đề không thể chứng minh được là đúng hay là sai. Định lý Gödel cho thấy triết lý toán học hóa triệt để là không thể. Tuy nhiên cũng không phải vì thế mà người ta cần phải lưu tâm tới giới hạn của toán học. Nếu có một cái gì đó không thể chứng minh được mà có xảy ra thì chúng ta công nhận, một trong hai khả năng của nó làm tiên đề. Chúng ta sẽ có hai lý thuyết toán học mới. Và định lý Gödel lại khẳng định trong các hệ tiên đề mới ấy vẫn có những mệnh đề không thể chứng minh được là đúng hay là sai. Rồi chúng ta lại công nhận thêm tiên đề và có thêm các lý thuyết mới. Cứ như thế nền văn minh của loài người phát triển. Hơn thế định lý Gödel không hàm ý nền văn minh loài người bị giới hạn, bởi tư duy toán học chỉ là một phần của tư duy nói chung, và là phần tư duy không liên quan trực tiếp đến thế giới thực quanh chúng ta.

Tiếp theo chúng ta tìm cách nêu ra chứng minh của định lý này. Chứng minh Gödel có thể đọc được ở bài báo sau: https://web.yonsei.ac.kr/bkim/goedel.pdf

Để cho dễ hiểu chúng ta bắt đầu từ một vấn đề tương tự về bản chất. Chúng ta xét các tập con của một tập hợp.

Lấy ví dụ như tập có 3 phần tử là $\{1, 2, 3\}$ có 8 tập con như sau:

$$\{\} \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \{3\} \quad \{1,2\} \quad \{1,3\} \quad \{2,3\} \quad \{1,2,3\}.$$

Chúng ta có thể ký hiệu và đánh số các tập con này

$$A_0 = \{\} \quad A_1 = \{1\} \quad A_2 = \{2\} \quad A_3 = \{3\},$$

$$A_5 = \{1,2\} \quad A_6 = \{1,3\} \quad A_7 = \{2,3\} \quad A_8 = \{1,2,3\}.$$

Bây giờ xét tập các số tự nhiên $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Tập các số tự nhiên là vô hạn, vậy số, lượng tập con cũng vô hạn. Câu hỏi đặt ra là có thể ký hiệu và "*Liệt kê tất cả các tập con của số tự nhiên, kiểu như $B_1, B_2, B_3, \ldots$ mà tập con nào của số tự nhiên cũng đều được tìm thấy ở trong liệt kê này hay không?*"

Sự việc hoàn toàn không đơn giản. Trước hết chúng ta nhận xét thế này. Lấy ví dụ như B_3 là tập con chứa những số tự nhiên nào đó. Rất có thể số 3 là thuộc tập con B_3 và cũng có thể là không thuộc B_3. Chúng ta xét C là tập tất cả các số tự nhiên không thuộc tập con nó là chỉ số.

$$C = \{m \,|\, m \notin B_m\}.$$

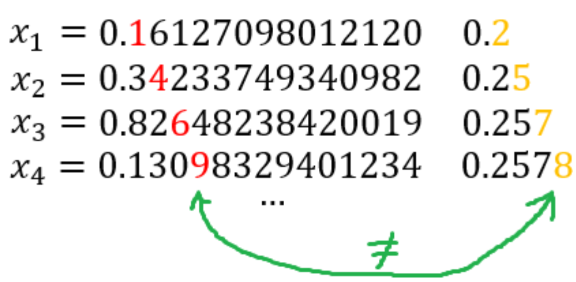
Do $B_1, B_2, B_3, \ldots$ là liệt kê của tất cả các tập con thì C phải đứng trong đội ngũ, tức là $C = B_k$ nào đó. Bây giờ là lúc chúng ta tự hỏi liệu k có thuộc tập C hay không?

Nếu $k \in C$ thì $k \in B_k$ vì $C = B_k$. Tuy nhiên do tập $C = \{m \,|\, m \notin B_m\}$ nên $k \notin B_k$. Chúng ta nhận thấy cùng lúc $k \in B_k$ và $k \notin B_k$, điều mâu thuẫn này là không thể. Vậy thì chúng ta đã phạm sai lầm. Sai lầm ở chỗ nào?

Phân tích kỹ chứng minh trên chúng ta nhận thấy sai lầm bắt đầu từ việc chúng ta cho rằng có thể đánh số và liệt kê tất cả các tập con của tập số tự nhiên. Vậy là "*chúng ta không thể đếm được hết tất cả các tập con của tập các số tự nhiên!*".

Trên thực tế có nhiều thứ vô hạn tới mức "*không thể đếm được*". Lấy ví dụ như Các số thực nằm trong đoạn từ 0 tới 1 cũng không thể đếm được.

Nếu chúng ta có thể đếm hết được các số thực trong đoạn từ 0 tới 1. Vậy thì chúng ta ký hiệu chúng là $x_1, x_2, x_3, \ldots$ chúng ta liệt kê tất cả các số thực theo thứ tự đếm.



Chúng ta xây dựng một số, số "*đường chéo*", mà chữ số ở vị trí thứ n thì khác với chữ số ở vị trí n của x_n. Như ở hình trên nó là số $y = 0.2578\ldots$ Số y này cứ dài ra nhưng vẫn nằm trong đoạn từ 0 tới 1. Vậy thì nó phải được liệt kê trong dãy $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Giả sử $y = x_k$. Nhưng do cách chúng ta xây dựng số y thì chữ số ở vị trí thứ k của nó phải khác với chữ số ở vị trí thứ k của x_k. Vậy thì không thể có chuyện $y = x_k$. Vậy đây là mâu thuẫn. Mâu thuẫn này xuất hiện là bởi chúng ta cho rằng có thể đếm được hết tất cả các số thực trong đoạn từ 0 tới 1.

Số y được xây dựng ra với tính chất "*tôi không phải là số*". Mà nếu muốn tôi là số thì phải công nhận thêm một điều. Đây là lập luận của Georg Cantor về sự tồn tại của khái niệm vô hạn không đếm được mà ông đã tìm ra vào năm 1874.

Chúng ta quay lại với định lý Bất Toàn của Gödel. Gödel cho rằng đang có một loài người và có khả năng được gọi là tư duy. Ông ta nhận thấy loài người sử dụng các ngón tay để đếm. Nếu có ai đó giơ 2 ngón tay thì tức là anh ta vừa nhìn thấy 2 con bò. Nếu có thêm một con bò nữa thì sẽ giơ thêm 1 ngón nữa, vậy là có 3 ngón tay. Cứ thế con người biết cách biểu thị số lượng của mọi vật qua các ngón tay. Việc bỏ qua sự khác biệt của sự vật mà chỉ chú ý tới số các ngón tay là khái niệm về con số.

Mọi số lượng được hình dung qua các con số, và các con số thì cứ số sau thì hơn số trước nó 1. Loài người sử dụng một khái niệm là con số, không phân biệt khi nói về số lượng bò hay số lượng giáo sư tiến sĩ.

Gödel nhận thấy khi con người cần kiểm tra xem có phải số 5 là lớn hơn 3 hay không, họ phải giơ ra cho đủ 5 ngón tay, và 3 ngón tay. Lấy ví dụ trên một bàn tay thì 5 ngón là cả bàn tay, và 3 ngón thì phải thêm 2 ngón nữa mới đủ cả bàn tay. Do phải thêm 2 ngón tay nữa nên họ nhận ra là 5 thì lớn hơn 3.

Điều này thật bất tiện! Chúng ta sẽ nhanh chóng nhận thấy loài người giải quyết sự bất tiện này thông qua khái niệm biến.

Gödel đề nghị loài người công nhận số "$x + 1$" thì lớn hơn "x". Cái này rất tiện vì loài người không cần phải thò tay ra mỗi khi cần kiểm tra xem, ví dụ 3 có lớn hơn 2 hay không. Hơn thế sự công nhận "$x + 1$" thì lớn hơn "x" là hàm ý cho mọi số "x", điều này mang lại sự thích thú cho loài người vì cái giống người không còn cần phải thò tay ra liên tục để mỗi khi khẳng định, ví dụ như $7 > 6$. Mà nói cho đúng loài người cũng chả thể thò thụt mãi được bởi khẳng định "$x + 1 > x$" là hàm ý cho mọi số "x". Sự công nhận này được gọi là tiên đề. Trong cái tiên đề "$x + 1 > x$" thì x không còn là một con số cụ thể nữa mà có thể là bất luận một con số nào. Cái này được gọi là biến. Biến thì là con số nhưng chưa rõ giá trị. Vì x chưa rõ giá trị nên chả thể dùng ngón tay mà biểu diễn thò với thụt. Vậy mọi khẳng định có chứa x đều phải sử dụng biện pháp suy diễn dựa trên tiên đề. Lấy ví dụ như "$x + 2$ *lớn hơn* $x + 1$" và "$x + 1$ *lớn hơn* x" nên "$x + 2$" thì lớn hơn "x". Vậy là từ niềm tin "$x + 1$ *thì lớn hơn* x" mà Gödel dạy cho loài người sử dụng suy diễn để nhận ra là "$x + 2$ *cũng lớn hơn* x".

Trên thực tế chúng ta dùng nhiều tiên đề. Ví dụ như cộng thêm cùng một số vào hai vế của một đẳng thức thì chúng ta vẫn có đẳng thức, nhân cùng một số khác 0 vào cả hai vế của một đẳng thức thì chúng ta cũng có đẳng thức. Hóa ra ở phổ thông chúng ta được học để biết suy diễn, tức không cần phải thò ra thụt vào.

Lấy ví dụ như việc tìm nghiệm của phương trình

$$ax + b = 0. \tag{1}$$

Cộng cả hai vế với $-b$ ta có

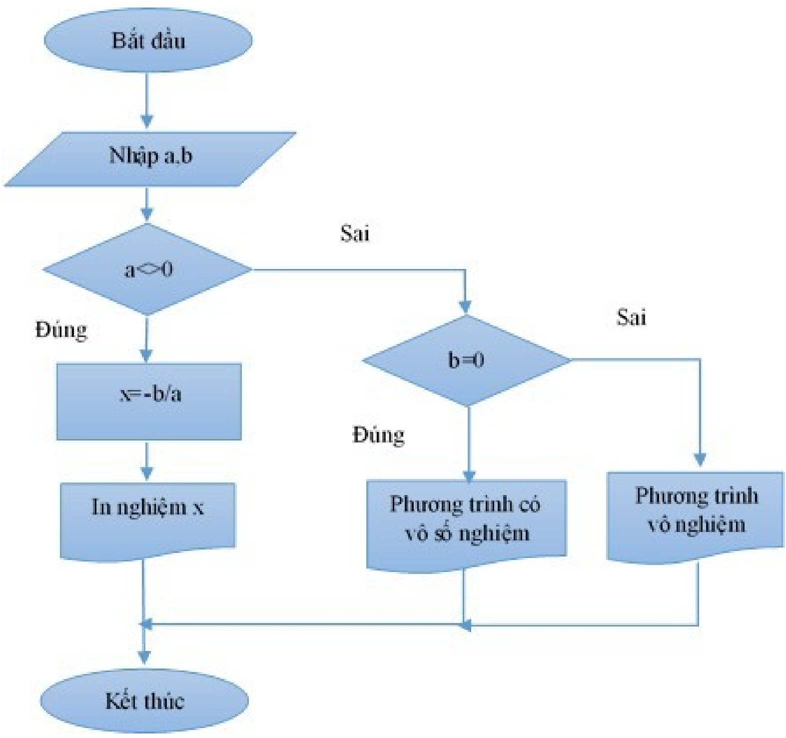
$$ax = -b.$$

- Trường hợp $a \neq 0$: Nhân cả hai vế với $\frac{1}{a}$ ta có nghiệm của phương trình (1) như sau.
$$x = -\frac{b}{a}.$$

- Trường hợp $a = 0$ và $b = 0$: Bất luận giá trị nào của x cũng là nghiệm của phương trình (1).

- Trường hợp $a = 0$ và $b \neq 0$: Không có một giá trị nào cho x để nó là nghiệm của phương trình (1).

Quá trình lập luận trên có thể được mô tả thông qua sơ đồ khối như sau.



Như vậy, việc giải phương trình là tiến hành biến đổi từng bước từ trên xuống dưới. Cứ mỗi lần biến đổi là một lần khẳng định cho tất cả các giá trị của "a, b", tức cho biến "a, b". Không thể có chuyện thò với thụt, bởi ở đây "a, b"là đại diện cho "tất cả mọi số sẽ thay vào vị trí của chúng".

Vậy chúng ta kết luận như sau: Do suy diễn là một quá trình thực hiện cùng một lúc với mọi giá trị số, vì thế mà suy diễn phải đi từ các tiên đề, với các biến chứ không phải các con số cụ thể. Đó là một sơ đồ khối mà mỗi bước biến đổi là sử dụng tiên đề nào đó. Chúng *ta* hiểu một chứng minh một mệnh đề cũng là sơ đồ khối như vậy. Sức mạnh của suy diễn là như vậy "làm một lần cho mọi trường hợp, cho mọi thời gian".

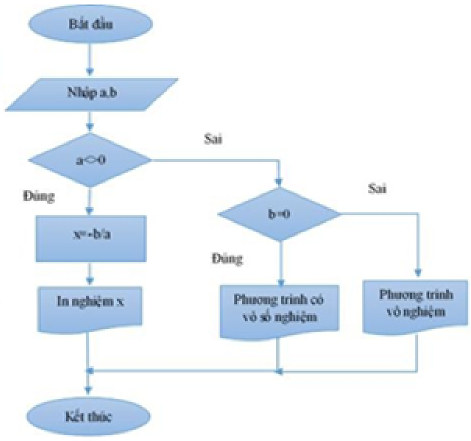
Trong câu truyện "Người bán thịt lợn đến tòa kiện một nhà toán học"thì nhà toán học thực hiện suy diễn dựa trên khái niệm điểm và đường thẳng. Ở trong đầu nhà toán học thì điểm và đường là các biến, nhưng không phải là biến số. Nhà toán học sử dụng hệ tiên đề Euclit để thực hiện suy diễn.

Việc chứng minh "Trong một tam giác, các đường trung tuyến cắt nhau tại một điểm"cũng được thực hiện qua các bước giống như việc khẳng định phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sự khác nhau chỉ là việc sử dụng các hệ tiên đề khác nhau.

Đối với trẻ nhỏ, công cụ để tự rèn luyện khả năng tưởng tượng và tư duy chính là các trò chơi xếp hình.



Mỗi hình khối là một bước trong việc hình thành ra ý định của trẻ. Trong chứng minh toán học, mỗi hình khối có thể được hiểu như một tiên đề suy diễn. Như thế chúng ta cũng cần phải để công sức tạo ra bộ công cụ xếp hình đáp ứng với nhu cầu dạy trẻ tư duy.

Thông thường thì trẻ được xem ảnh và tìm cách ghép các khối cơ bản để có được hình cần có. Trường hợp trẻ ghép được xong và kết quả đúng như ảnh thì cô giáo sẽ cho nhận xét là "*đúng*". Nếu hình ghép không phải thì cô giáo sẽ cho nhận xét là "*sai*".

Tương ứng với bên toán học thì chúng ta được đọc đề bài và cần phải đưa ra lời giải. Bộ xếp hình của trẻ có một số nào đó chủng loại mảnh ghép, điều này cũng tương tự như các nhà toán học có một số nào đó tiên đề. Nếu hình cần ghép mà phức tạp thì trẻ phải dùng nhiều chủng loại mảnh ghép và mỗi chủng loại thì dùng nhiều mảnh. Trẻ có thể tường thuật lại cho chúng ta quá trình chúng ghép, kiểu như miếng màu xanh phải nối về bên trái, miếng màu đỏ phải gắn vào giữa... Việc gắn kết này mang tính domino, tức các mảnh phải ghép theo một trình tự nhất định. Cái này cũng tương tự như thuyết minh cái sơ đồ khối ở trên khi giải hệ phương trình $ax + b = 0$. Những thuyết minh như vậy được gọi là thuật toán. Thuật toán được lập trình hóa để cho máy tính thực hiện.

Loại bỏ tất cả các từ không cần thiết thì độ dài của thuyết minh có thể được dùng như tiêu chuẩn nói lên độ phức tạp của thuật toán. Người ta dùng nó để xếp thứ tự tất cả các "*sơ đồ khối*" được tạo ra từ thuật toán.

Hàm số biến nguyên $f(x)$ mà giá trị tại mỗi x được lập trình ra từ sơ đồ khối có hữu hạn phần tử, được gọi là thuật toán hóa được hay khả tính.

Định nghĩa. Hàm biến số nguyên $f(x)$ với giá trị là 0 hoặc 1 được gọi là khả tính nếu có một chương trình máy tính có kích thước hữu hạn (ví dụ bằng Python) thực thi trên máy tính (ví dụ: MacBook Pro) để tính ra giá trị của f mỗi khi cho giá trị x. Nghĩa là, với bất kỳ số nguyên dương x nào, chương trình sẽ kết thúc trong thời gian hữu hạn và đưa ra giá trị $f(x)$ một cách chính xác.

Xét tập hợp tất cả các hàm khả tính với biến số nguyên x cho ra kết quả là 1 hoặc 0. Các hàm này có thể được xếp thứ tự từ điển theo code của chúng.

Chúng ta ký hiệu dãy tất cả các hàm khả tính ấy là $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$

	1	2	3	4	5	.	x	.	i	$\ldots$
f_1	1	1	0	0	0		$f_1(x)$			
f_2	0	0	1	0	0		$f_2(x)$			
f_3	1	1	0	0	1		$f_3(x)$			
f_4	0	0	1	1	0		$f_4(x)$			
f_5	0	1	0	0	0		$f_5(x)$			
.						.				
.							.			
.								.		
f_i									$f_i(i)$	
$\vdots$										$\ddots$

Xây dựng hàm $g(x)$ có giá trị là 0 hoặc 1, với x là biến số nguyên. Như sau:

- Nếu dãy các hàm khả tính mà hữu hạn $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots f_k(x)$, thì chúng ta lấy $g(i) = 1 - f_i(i)$ khi $n \leq k$ và lấy $g(n) = 1$ khi $n > k$. Với định nghĩa này thì hàm $g(x)$ được sinh ra từ thuật toán với sơ đồ khối với hữu hạn phần tử; hay nói một cách khác giá trị $g(x)$ sẽ tính ra được trên máy tính trong khoảng thời gian hữu hạn. Như vậy $g(x)$ là hàm khả tính, tức nó phải nằm trong số các hàm $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots f_k(x)$. Từ đây suy ra sẽ phải có một chỉ số $n \leq k$ mà

  $$g(x) = f_n(x).$$

  Từ định nghĩa hàm ta có $g(x) = f_n(x)$. Vậy

  $$g(n) = 1 - f_n(n), \quad f(n) = 1 - f_n(n).$$

  Do $f_n(n)$ chỉ có thể có giá trị là 0 hoặc 1 nên không thể có

  $$f_n(n) = 1 - f_n(n).$$

  Điều mâu thuẫn này cho thấy $g(x)$ không thể nằm trong dãy các hàm $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x), \ldots f_k(x)$. Tức $g(x)$ không thể là hàm khả tính. Tuy nhiên theo định nghĩa hàm $g(x)$ thì nó là hàm được sinh ra theo thuật toán, tức sơ đồ khối. Điều mâu thuẫn cho thấy dãy các hàm hàm khả tính là vô hạn.

- Do dãy các hàm thuật toán hóa được là vô hạn $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ thì với mọi số nguyên i, chúng ta lấy $g(i) = 1 - f_i(i)$. Như thế $g(i)$ là hàm có giá trị là 0 hoặc 1 với biến số nguyên. Nếu hàm $g(i)$ mà hàm khả tính, thì nó sẽ phải ở trong dãy $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ Như vậy sẽ tồn tại một chỉ số n mà $g(x) = f_n(x)$. Từ định nghĩa hàm này ta có $g(n) = 1 - f_n(n)$. Từ đây suy ra $f(n) = 1 - f_n(n)$. Do $f_n(n)$ chỉ có thể có giá trị là 0 hoặc 1 nên không thể có $f_n(n) = 1 - f_n(n)$. Điều mâu thuẫn này cho thấy $g(x)$ không nằm trong dãy các hàm $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ tức $g(x)$ không khả tính.

Để chứng minh định lý Bất Toàn của Gödel chúng ta xét mệnh đề, ví dụ như "$g(5) = 1$"và "$g(5) = 0$". Do giá trị của $g(5)$ là 0 hoặc 1 cho nên một trong hai mệnh đề này là đúng và mệnh đề còn lại là sai. Giả sử hệ tiên đề có tính chất mọi mệnh đề đúng thì chứng minh được, tức nó thuật toán hóa được. Vậy thì hoặc là chúng ta có được chứng minh "$g(5) = 1$"là đúng, hoặc là có được chứng minh "$g(5) = 0$"là đúng.

Độ dài văn bản hữu hạn thì số lượng văn bản được sinh ra cũng hữu hạn. Nếu hoặc "$g(5) = 1$"là đúng, hoặc "$g(5) = 0$"là đúng, thì với độ dài văn bản tăng dần sẽ đến một lúc nào đó có một trong số các văn bản là chứng minh cho một trong hai mệnh đề trên. Quá trình tính giá trị của $g(5)$ dừng lại sau một khoảng thời gian hữu hạn. Như thế giá trị $g(5)$ là tính được từ thuật toán.

Có thể lập luận như trên cho mọi $g(n)$, và nó chứng tỏ mệnh đề "Với mọi n thì giá trị $g(n)$ là tính được"là đúng. Vậy hàm $g(n)$ là khả tính. Điều này thì mâu thuẫn với chứng minh ở trên về việc $g(x)$ không khả tính. Vậy sẽ có mệnh đề dạng $g(n) = 1$ hay $g(n) = 0$, với n nào đó, là không thể khẳng định được đúng hay sai.

Định lý Bất Toàn của Gödel đã được chứng minh. Bản chất của chứng minh là xây dựng hàm $g(x)$ có sẵn tính chất "tôi không phải là hàm"tức khác với tất cả các hàm có thể tính giá trị ra được.

Điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta công nhận việc tính được giá trị $g(n)$ làm tiên đề mới. Do có thêm tiên đề nên chuỗi $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ các hàm tính được theo thuật toán có dạng mới $f_1'(x), f_2'(x), f_3'(x), \ldots$ Tuy nhiên hàm có dạng $1 - f_n'(n)$ sẽ lại không thể tính được.

Định lý Bất Toàn của Gödel là phản bác nội dung bài toán số 2 trong số 23 bài toán mà David Hilbert nêu ra ở hội nghị toán học quốc tế Paris - năm 1900. Nội dung bài toán số 2 của David Hilbert là "Chứng minh các tiên đề của số học là nhất quán", tức là không có một khẳng định nào lại vừa đúng và vừa sai. Do mọi lý thuyết toán học được xây dựng ra từ lý thuyết số học nên bài toán số 2 của Hilbert là nói về tính nhất quán của toàn bộ toán học. Tức là không thể có một khẳng định nào của toán học lại vừa đúng và vừa sai.

Cả hai chứng minh, chứng minh định lý Bất Toàn của Gödel và chứng minh tập các số thực là vô hạn không thể đếm được đều sử dụng thủ thuật xây dựng ra nghịch lý có cấu trúc tự quy chiếu "tôi là kẻ nói dối".

Nghịch lý "tôi là kẻ nói dối"vô tình xuất hiện khi Epimenides trình bày quan điểm thần học của mình về đức chúa Zeus. Epimenides không tin đức chúa Zeus đã được sinh ra cũng như đã bị chết đi. Epimenides là triết gia và là nhà tiên tri tôn giáo. Ông là người ở Cretan thuộc Hylap (sống vào khoảng năm 600 trước Công nguyên).

Ông viết:

Người Cretan đã xây dựng ngôi một mộ cho ngươi để tôn vinh sự thánh thiện và cao cả. Nhưng Cretan luôn là những kẻ dối trá, họ là những con thú độc ác, và là hạng lười biếng!

Chúa không chết: Chúa sống và tồn tại mãi mãi, vì trong Chúa chúng ta sống, cử động và hiện hữu.

Epimenides, Cretica

Trong thánh ca gửi Zeus, Callimachus cho biết ra có hai vùng cùng xác nhận là nơi Zeus đã được sinh ra, một ở Ida và một ở Arcadia. Vậy thì đích thị "Người Crete luôn nói dối". Callimachus là nhà triết học sinh ra vào năm 310 trước Công Nguyên, ở vùng Cyrene thuộc Aicap.

Hỡi Zeus, một số nói ngươi sinh ra trên những ngọn đồi ở Ida; một số khác, thì nói nói là ở Arcadia.

Ồ Zeus, hoặc là ở Ida hoặc là ở Arcadia. Bọn "người Crete luôn nói dối".

Vâng lạy hồn, cũng đã có một ngôi mộ người Crete dựng ra cho Ngài.

Nhưng mà ngươi đâu có chết, vì ngươi tồn tại mãi mãi.

Callimachus, thánh ca gửi đến Zeus

Epimenides, cũng như với Callimachus, sử dụng cụm từ "*Tất cả người Cretan đều là kẻ nói dối*" chỉ để nhấn mạnh quan điểm của mình khi nói về sự bất tử của Zeus, mà không hề mỉa mai cho là tất cả người Crete đều nói dối thường xuyên. Xét dưới quan điểm logich toán học thì câu nói của Epimenides "*Tất cả người Cretan đều là kẻ nói dối*" tự tạo ra mâu thuẫn bởi bản thân Epimenides cũng là người Cretan. Đó có lẽ là nguyên nhân dẫn tới Epimenides "*Tôi là kẻ nói dối*".

Nghịch lý "*Tôi là kẻ nói dối*" có lẽ không được ai biết đến nếu không có các sự kiện sau: Vào thế kỷ thứ nhất sau Công Nguyên, trong thư gửi cho đức cha Titus, Phaolô trích câu "*Tất cả người Cretan đều là kẻ nói dối*" của Epimenides với ý đồ cảnh báo Titus rằng: "*Người Crete không tin vào một chân lý duy nhất của Cơ đốc giáo, bởi vì người Crete luôn là những kẻ nói dối*". Phaolô muốn Titus "*phải nghiêm khắc sửa dạy người Cretan, để họ có thể có đức tin đúng đắn thay vì chế áp người Do Thái*". Vào đầu thế kỷ thứ 4, Thánh Augustine có nhắc tới câu trích "*Tất cả người Cretan đều là kẻ nói dối*" nhưng không đề cập đến ai là người đầu tiên đã nói ra. Vào năm 1740, trong tập hai của "*Dictionnaire Historique et Critique*", Pierre Bayle đã xác định rõ ràng câu nói "*Tất cả người Cretan đều là kẻ nói dối*" là của Epimenides, tuy nhiên nó được đưa ra với dụng ý minh họa cho sự "*ngụy biện*" trong lập luận.

Như vậy, do ác ý của Paolo mà câu nói "*Tất cả người Cretan đều là kẻ nói dối*" được người đời biết đến là của Epimenides. Epimenides "*tôi là kẻ nói dối*" trong việc chứng minh định lý Bất Toàn của Gödel nằm ở chỗ chúng ta dựng ra hàm $g(x)$ mà giá trị của nó không thể là của hàm. Sau đây chúng ta trình bày một phương án khác về chứng minh định lý Bất Toàn.

Chúng ta tìm cách số hóa toàn bộ toán học, hiểu theo nghĩa là sẽ gán cho mỗi chứng minh toán học một con số, và lẽ dĩ nhiên mỗi mệnh đề một con số.

Trước hết chúng ta đánh mã cho thất cả các chữ cái và ký hiệu toán học. Lấy ví dụ bảng mã như sau:

Mã số	**Ký hiệu**	**Ý nghĩa**
1	$\neg$	phủ định
2	$\vee$	hoặc
3	$\supset$	nếu... thì...
4	$\exists$	tồn tại
5	$=$	bằng
6	$>$	lớn hơn
7	$-$	trừ
8	(	dấu mở ngoặc
9	)	dấu đóng ngoặc
10	/	chia
11	$+$	cộng
12	$*$	nhân
13	x	biến x
14	y	biến y
15	z	biến z
16	0	số 0
17	1	số 1
18	2	số 2
19	3	số 3
20	4	số 4
21	5	số 5
22	$\neq$	khác
23	n	biến n
24	$\forall$	với mọi

Đây là bảng gồm ký hiệu và mã số. Mã số chỉ dùng các số nguyên không có chữ số 0. Các ký hiệu trong chứng minh được chuyển qua các mã số. Giữa hai mã số được cách nhau bởi số 0. Chúng ta sử dụng hai số 00 liên tiếp để ký hiệu kết thúc một công thức, tức một mệnh đề. Lấy ví dụ như công thức $x + 3 = y$ thì được ký mã là 140120210501500.

Không chỉ các mệnh đề mà cả một chứng minh cũng được chuyển về con số. Lấy ví dụ việc chứng minh $x = 2$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

được thực hiện như sau:

$$x + y = 3$$
$$x - y = 1$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

và được chuyển về con số sau

1401201505021001407015050180019014050220014050220110190014050 1900

Khi giả mã ngược số này ra các ký hiệu, ta sẽ thu được chứng minh nói trên. Như vậy:

1401201505021001407015050180019014050220014050220110190014050 1900

là chứng minh đẳng thức 140501900

$$x = 2$$

là nghiệm của hệ phương trình 14012015050210014070150501800

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Chúng ta có thể sử dụng bảng chữ cái lớn hơn để có thể số hóa được nhiều hơn. Việc sử dụng bảng mã như vậy được gọi là "số hóa"toán học. Kết quả của việc số hóa toán học là "tất cả các chứng minh toán học được quy về những con số".

Theo cách số hóa như vậy thì "Nếu số N mà là chứng minh cho con số M, thì có nghĩa là công thức cuối cùng của N là công thức M".

Chúng ta sử dụng ký hiệu $\mathrm{End}(N)$ để ký hiệu công thức cuối cùng của N. Như thế việc M có chứng minh là N được hiểu là M chính là $\mathrm{End}(N)$, hay viết là $M = \mathrm{End}(N)$. Nếu như N không phải là chứng minh của M thì có nghĩa là $\mathrm{End}(N)$ không phải M. Chúng ta viết $\mathrm{End}(N) \neq M$.

Trong toán học có nhiều biểu thức có chứa biến tự do. Lấy ví dụ như trong biểu thức tổng n số nguyên đầu tiên $P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, thì n là biến tự do của công thức $P(n)$. Chúng ta có thể thay biến tự do n trong $P(n)$ bằng một giá trị cụ thể nào đó. Chúng ta có thể kiểm tra với vài số $n = 1$, hay $n = 2$, hay $n = 3$,.. để nhận thấy $P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Đây có thể là mệnh đề đúng nhưng nó cần phải được chứng minh. Chúng ta nói $P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ là mệnh đề có chứa biến tự do là số nguyên n.

Xét tất cả các mệnh đề x mà không có bất kể một chứng minh nào cho nó là đúng. Biến x được hình dung như số nguyên. Như vậy chúng ta có mệnh đề $G(x)$ với biến x với mọi $y(\text{End}(y) \neq x)$.

Ký hiệu mã số của $G(x)$ là α. Khi ấy

$$G(\alpha) = \forall z(\text{End}(z) \neq \alpha).$$

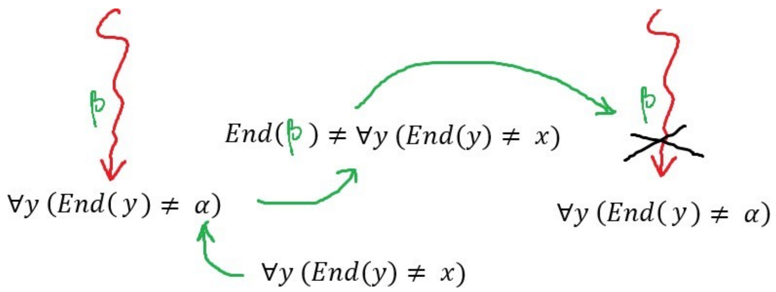
Tính đúng của mệnh đề $G(\alpha)$ có nghĩa "Không có bất cứ một chứng minh nào cho mệnh đề tương ứng với mã số α là đúng". Mã số α lại chính là mệnh đề $G(x)$, sự khác biệt về tên gọi biến là không ảnh hưởng. Chúng ta chứng minh không thể xác định được mệnh đề $\forall z(\text{End}(z) \neq \forall y(\text{End}(y) \neq x))$ là đúng hay sai.

Giả sử $G(\alpha)$ đúng, tức có một chứng minh β cho nó là đúng

$$\text{End}(\beta) = \forall z(\text{End}(z) \neq \alpha).$$

Do $\forall z(\text{End}(z) \neq \alpha)$ nên thay β vào z ta có $\text{End}(\beta) \neq \alpha$.

Điều viết ở trên nghĩa là mệnh đề cuối cùng trong chứng minh β, tức $\text{End}(\beta)$, không phải là mệnh đề có mã số là α.



Mệnh đề có mã số là α là $\forall y(\text{End}(y) \neq x)$. Như thế β không phải là chứng minh cho $\forall y(\text{End}(y) \neq x)$. Do x là biến nên β không thể là chứng minh cho $\forall y(\text{End}(y) \neq \alpha)$. Vậy β không phải là một chứng minh cho $G(\alpha)$. Điều này thì mâu thuẫn với việc chúng ta vừa ký hiệu ở trên "có một chứng minh β cho $G(\alpha)$ là đúng". Như vậy $G(\alpha)$ là sai.

Giả sử $G(\alpha)$ sai, tức $G(\alpha) = \forall y(\text{End}(y) \neq \alpha)$ là sai. Chúng ta suy nghĩ "Nếu như lúc nào cũng có $\text{End}(y) \neq \alpha$, tức là cho dù y là thế nào cũng chẳng bao giờ có chuyện khẳng định $\text{End}(y) \neq \alpha$ là sai". Như thế $\forall y(\text{End}(y) \neq \alpha)$ sai là không thể xảy ra. Vậy $G(\alpha)$ mà sai thì cho thấy phải có một giá trị y nào đó, ví dụ như γ, để $\text{End}(\gamma) = \alpha$. Nói một cách rõ hơn thì γ là chứng minh cho công thức có mã số α là đúng.

Công thức ấy là

$$G(x) = \forall y(\text{End}(y) \neq x).$$

Như thế mọi chứng minh y đều không thể chứng minh được công thức tương ứng với mã số x. Do x là biến nên nó có thể là một con số nào, tức là mã số của bất kể mệnh đề nào. Như thế mọi mệnh đề đều không thể chứng minh được. Từ đây suy ra không thể xác định được $G(\alpha)$ là đúng hay sai.

Chúng ta có thể tóm tắt lại: Mệnh đề $\forall y(\text{End}(y) \neq \forall z(\text{End}(z) \neq x))$ không là là đúng và cũng không là sai.

Mệnh đề $\forall y(\text{End}(y) \neq \forall z(\text{End}(z) \neq x))$ tương tự như "Có hay không một chương trình có hữu hạn dòng lệnh cho phép xác định đặc tính không bị chết (tức bị chạy không dừng) của tất cả các chương trình dựa trên bản mã lệnh của nó không?"

Như đã nói ở phần đầu, chúng ta đưa ra chứng minh định lý Bất Toàn của Gödel với mục đích hiểu đặc tính Epimenides, tức nghịch lý trong lập luận. Đúng là trong mọi hệ tiên đề luôn có mệnh đề mà chúng ta không thể chứng minh được nó là đúng hay sai. Chúng ta cố gắng giải thích rõ hơn cơ chế xây dựng mệnh đề của Gödel.

Khi nói về khả năng lập luận của mỗi người trong chúng ta. Cho dù là các bạn không phản ứng ra ngoài, nhưng các bạn vẫn luôn đánh giá về nội dung của các dòng thông tin mà các bạn nhận được. Chúng ta gọi đó là nhận thức. Nhận thức là phản ánh của thế giới bên ngoài. Nhận thức là yếu tố cần thiết để duy trì cuộc sống. Như thế sự tồn tại của mỗi con người được xác định thông qua nhận thức của anh ta.

Lẽ thường mệnh đề được tạo ra để đánh giá đúng sai. Chính vì thế mà nó được xây dựng dựa trên nội dung của thông tin về một sự vật nào đấy. Trong mệnh đề “tôi là kẻ nói dối” thì có hai yếu tố liên quan tới nhau. Yếu tố thứ nhất là nhận thức của người nói. Yếu tố thứ hai là thực tế khách quan. Sự kiện “tôi là kẻ nói dối” là hàm ý “nhận thức bên trong của tôi không phản ánh đúng thế giới bên ngoài”. Do không rõ ngầm định là nói dối ai và nói dối về vấn đề gì nên mệnh đề “tôi là kẻ nói dối” dẫn đến sự phá vỡ cấu trúc nhận thức luận về bản thân. Một khi khả năng tự bảo vệ không còn con người dễ bị cấy ghép các suy diễn để trở thành kẻ bị lệ thuộc. Đây là bản chất giáo lý của mọi tôn giáo.

Cũng giống như việc khi chúng ta xét một tập bao gồm tất cả các tập hợp. Tức hình dung tất cả mọi tập hợp đều là phần tử của một khái niệm mà chúng ta ký hiệu là A nào đó. Nếu A là tập hợp thì nó phải thuộc A. Vậy A là “phần tử của chính nó”. Điều này dẫn đến sự khó hiểu. Vậy liệu chúng ta có mệnh đề dễ hiểu hơn về “Tập hợp B bao gồm tất cả các tập ‘không phải là phần tử của chính nó’ hay không?” Nếu B là phần tử của chính nó thì cái phần tử ấy, tức tập B, phải có tính chất ‘không phải là phần tử của chính nó’. Còn nếu B ‘không phải là phần tử của chính nó’ thì B là phần tử của tập B. Chúng ta luôn đi tới điều tự mâu thuẫn. Như vậy việc sử dụng khái niệm về sự bao gồm một cách chung chung là không thể được.

Nguyên nhân sâu xa của tất cả các Epimenides nằm ở việc phân định ranh giới của các khái niệm và phạm vi áp dụng của mệnh đề. Đây là vấn đề phạm trù và phạm vi áp dụng của luật suy diễn được đề cập tới trong Đạo Đức Kinh của Lão Tử. Đạo Đức Kinh là học thuyết bàn về phương pháp luận. Chúng ta sẽ còn quay về vấn đề này.

Nghịch lý "tập hợp của tất cả các tập hợp" do Russell phát biểu vào năm 1901. Định lý bất toàn được Gödel chứng minh vào năm 1931. Vai trò của định lý Gödel trong toán học tất nhiên là ít hơn nghịch lý Russell. Vấn đề không quá nghiêm trọng như giới tinh hoa Việt mang ra dọa dẫm. Bản chất của nó chỉ là việc sử dụng khái niệm mệnh đề không rõ ràng. Tuy nhiên có rất nhiều tinh hoa Việt nhìn nhận định lý bất toàn của Gödel và nâng lên thành quan điểm cực đoan kiểu như:

- Liệu có thể có một "Lý thuyết về mọi thứ" của vật lý không?
- Robots có thể thông minh như con người không?
- Bản chất vật chất của tinh thần là gì?
- Máy móc có thể thay thế con người trong dịch thuật không?
- Vũ trụ trước Big Bang là gì?
- Tồn tại chăng một lý thuyết dự báo tương lai chính xác?

Cần phải nói ngay, bản thân chứng minh định lý bất toàn không liên quan gì tới các quan điểm này.

Những câu hỏi như "Vũ trụ trước Big Bang là gì?" chỉ là sự ngỡ ngẩn nếu không hiểu được khái niệm Big Bang. Big Bang chỉ là một khái niệm, nó không phải là thực tế vật chất. Câu hỏi "Tồn tại chăng một lý thuyết dự báo tương lai chính xác?" cũng ngớ ngẩn như vậy bởi khái niệm chính xác là không có.

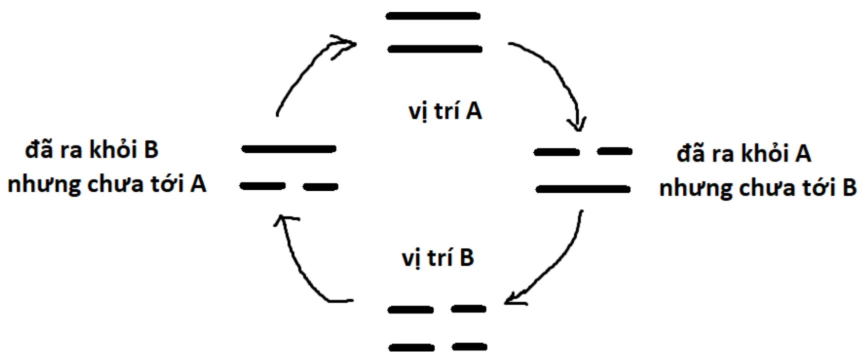
Trong câu hỏi "Robots có thể thông minh như con người không?", thì khái niệm Robots và "thông minh" là chưa rõ. Do không có định nghĩa khái niệm "thông minh" nên việc trả lời câu hỏi này là rất khó. Không nên quan niệm Robots chỉ là một số lệnh máy tính hữu hạn nào đó. Bản thân Robots có khả năng truy cập CSDL, tức kho tri thức của con người. Hơn thế Robots cũng có thể nhận tư vấn từ con người.

Cũng rất khó trả lời câu hỏi "Máy móc có thể thay thế con người trong dịch thuật không?" bởi khái niệm "Máy móc" và "con người" không được định nghĩa. Nếu "máy móc" được hiểu là hệ thống có thể truy cập vào CSDL và sử dụng tri thức của con người, ít nhất là tần suất xuất hiện của các cụm từ, thì câu trả lời là có. Điều này được giải thích như sau. Bản thân ngôn ngữ chỉ là sự hướng dẫn mà không có nghĩa, bởi nghĩa được hình thành ở trong não người. Con người tạo ra nghĩa từ sự hướng dẫn của ngôn ngữ nhận được. Chúng ta không nhất thiết, và cũng không thể kể lại toàn bộ mọi chi tiết của một sự kiện đã xảy ra. Những gì người này kể có thể khác với người khác, nhưng nội dung thì chỉ có một. Như thế vẫn có một sự tự do trong việc ngôn ngữ hóa một sự kiện. Điều này là giải thích vì sao máy có thể dịch được ngôn ngữ tự nhiên. Chúng ta đi sâu một chút vào câu Liệu có thể có một "Lý thuyết (vật lý) về mọi thứ" của vật lý không?

Vật lý là một trong số các môn khoa học về thế giới vật chất. Nếu ai đấy có suy nghĩ "Liệu có thể có một lý thuyết về mọi thứ của vật lý không?" là đã ám chỉ tới việc hiểu như thế nào là khoa học và như thế nào là thế giới vật chất. Thế giới vật chất được hiểu là sự tồn tại khách quan. Còn khoa học được hiểu là các nhận thức thực tế khách quan. Nhận thức là sự mô phỏng lại thực tế khách quan dưới dạng các khái niệm. Như vậy nhận thức không thể đồng nhất với chủ thể. Do đó khoa học không bao giờ là tuyệt đối đúng để mà nói về "Liệu có thể có một lý thuyết về mọi thứ của vật lý không?".

Nhiều bạn suy nghĩ tới những điều to lớn "khái quát" về vật lý nhưng lại quên mất "không có chuyển động thì lấy đâu ra vật lý!". Từ những ngày đầu của nền văn minh, nhân loại đã vấp phải những câu hỏi học búa như "chuyển động là gì". Chúng ta vẫn thường hình dung chuyển động là sự di chuyển từ vị trí A sang vị trí B. Vậy xin hỏi "Trước khi tới vị trí B thì vật ở đâu?" Phải chăng các bạn hình dung vật ở vị trí C nào đấy ở giữa A và B. Như thế các bạn lại phải đi trả lời tiếp câu hỏi "Trước khi tới vị trí C thì vật ở đâu?". Liệu chúng ta có thể tin là vật đã có lúc nào đó rời khỏi điểm A hay chưa? Nếu sự thật vật đã rời khỏi A thì nó tới cái điểm B' mới ở chỗ nào? Và trước khi tới được cái điểm B' ấy thì nó phải tới điểm C' thế nào... cứ như vậy mà câu hỏi lặp lại. Cứ như vậy mà sinh ra sự vô hạn. Vậy là xuất hiện các câu hỏi, kiểu như

- Sự vô hạn là có hay không?
- Có thật sự là vật đã ra khỏi điểm A khi di chuyển tới B hay không?



Giới tinh hoa Phương Đông đưa ra khái niệm về chuyển động và ký hiệu trạng thái ban đầu A là và đọc là hào "Dương 阳", và ký hiệu trạng thái B là và đọc là hào "Âm 阴". Ký hiệu được hiểu là đã có sự dịch chuyển ra khỏi vị trí A và ký hiệu được hiểu là từ A di chuyển tới gần B. Âm dương thực chất là khái niệm số thời kỳ 3000 năm về trước dùng để mô tả sự dịch chuyển của vật thể. Người ta dùng ký hiệu, ví dụ như để nói về sự dịch chuyển về hướng có x dương, y âm, và z âm. Có tất cả 8 hướng như vậy ứng với 8 quẻ.

Giới tinh hoa Phương Đông đưa ra khái niệm về chuyển động và ký hiệu trạng thái ban đầu A là ⚊ và đọc là hào "Dương 阳", và ký hiệu trạng thái B là ⚋ và đọc là hào "Âm 阴". Ký hiệu ⚍ được hiểu là đã có sự dịch chuyển ra khỏi vị trí A và ký hiệu ⚎ được hiểu là từ A di chuyển tới gần B.

Âm dương thực chất là khái niệm số thời kỳ 3000 năm về trước dùng để mô tả sự dịch chuyển của vật thể. Người ta dùng ký hiệu, ví dụ như ☶ để nói về sự dịch chuyển về hướng có x dương, y âm, và z âm.

Có tất cả 8 hướng như vậy ứng với 8 quẻ.

Chuyển động thì chịu sự tác động của lực bên ngoài. Để mô tả vector lực người ta cũng dùng hướng của nó. Có 8 hướng tất cả. Như vậy chuyển động dưới tác động của lực bên ngoài được mô tả bởi 64 quẻ, mỗi quẻ có 6 hào.

Ngày nay, để nói tới vị trí thì không dùng cảm tính âm dương, tức phía sau hay phía trước, mà dùng tọa độ là con số. Để nghiên cứu sự vận động trong không gian người ta dùng quỹ đạo dựa trên hệ tọa độ Decart với các trục số. Tọa độ của một điểm được cho bởi 3 số xyz chứ không phải 3 hào như 3000 năm về trước. Người ta sử dụng định luật Newton để tính ra quỹ đạo chuyển động của một vật khi chuyển động trong trường ngoại lực, mà không dùng cách lý giải dựa trên kinh nghiệm về quẻ chồng lên quẻ. Như vậy quẻ là công cụ toán học thô sơ từ hơn 3000 năm về trước, dùng để nghiên cứu sự vận động, tức kinh dịch.

Trong một số trường hợp Kinh Dịch cũng là công cụ để tích lũy kinh nghiệm. Do Kinh Dịch được hiểu là mọi sự vận động mà không chỉ là chuyển động của vật thể nên người ta có thể hình dung đó là sự vận động của sức khỏe tâm sinh lý một con người. Người ta cũng tìm cách lý giải sự biến thiên của sức khỏe tâm sinh lý, tức số mệnh, một con người thông qua hệ thống quẻ. Tuy nhiên sự mô tả này chỉ mang tính kinh nghiệm. Ngày nay quẻ biến thành công cụ bói toán phục vụ cho các mê tín dị đoan.

Quay lại chuyển động từ A tới B. Mặc dù bằng lập luận chúng ta không thể khẳng định được vật đã ra khỏi A, nhưng trong thực tế là có chuyển động và vật đi tới được từ A tới B. Như thế chúng ta buộc phải công nhận có sự vô hạn. Vật trước khi đi tới B nó phải đi qua một nửa đoạn đường từ A tới B, tiếp theo là phải đi qua nửa đoạn đường còn lại. Cứ như thế chúng ta có tổng vô hạn $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ và tổng này phải bằng 1, vì chúng ta công nhận vật chuyển động được từ A tới B. Như vậy cùng với nhận thức về có sự chuyển động là sự công nhận có tổng vô hạn, tức có khái niệm giới hạn. Tổng vô hạn là bản chất của tích phân. Còn nhận thức về có sự chuyển động ra khỏi A mà chưa tới được một điểm cụ thể nào là sự công nhận có sự vô cùng bé, tức vi phân. Lẽ dĩ nhiên khái niệm tích phân và vi phân chỉ có thể xuất hiện được khi có khái niệm số thực. Số thực là gì chúng ta sẽ làm rõ sau.

Hình dạng của các dụng cụ bằng đá khai quật được cho thấy hiểu biết của người tiền sử về khối lượng và lực đã xuất hiện từ rất sớm.

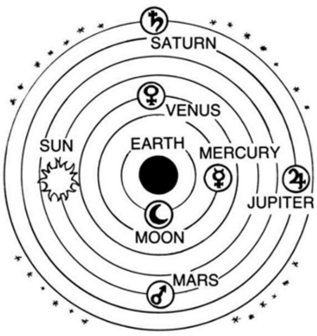
Rìu Lanceolate. 1.4 - 1.2 triệu năm tuổi. Được tìm thấy ở Hẻm núi Olduvai, Tanzania

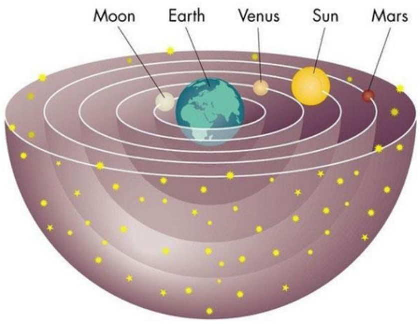
Khả năng cao hiểu biết về sự khác nhau giữa ma sát lăn với ma sát trượt, và hệ thống ròng rọc cũng đã được sử dụng trong quá trình xây dựng các kim tự tháp từ 6000 năm về trước. Như thế rất khó phân định được thời điểm xuất hiện các hiểu biết về vật lý, bởi nó song hành với lịch sử hình thành nhân loại.

Có lẽ khối lượng kiến thức về vật lý hiện đại bắt đầu từ chiêm tinh học. Ngày trước triều đình luôn duy trì hệ thống chiêm tinh để phục vụ cho mục đích bói toán. Tính toán thì được tính ra trên giấy, nhưng cái cần là vị trí của các thiên thể. Như vậy các nhà chiêm tinh phải tương ứng được các số liệu tính toán với vị trí thật của chúng. Sự tương ứng giữa vị trí thật của mỗi thiên thể với các con số này được gọi là tọa độ hóa. Dựa theo hệ tọa độ và quy luật chuyển động của các hành tinh mà các nhà chiêm tinh tính ra các tọa độ. Ngoài ra các nhà chiêm tinh phải có phương tiện quan trắc để xác định vị trí của thiên thể theo các con số tọa độ.

Vào đầu Công Nguyên các nhà chiêm tinh học hình dung các hành tinh và kể cả mặt trời đều chuyển động đều quanh trái đất. Mô hình này do Claudius Ptolemaeus đưa ra vào thế kỷ thứ 2 sau Công Nguyên và được gọi là địa tâm.

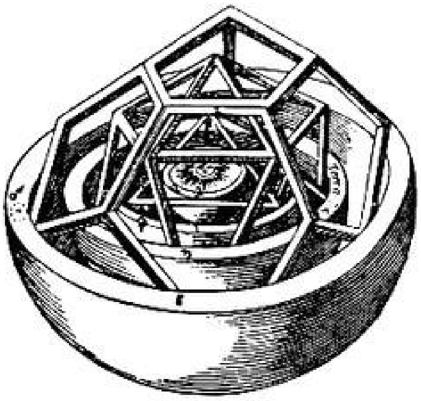
Trong mô hình địa tâm thì trái đất ở giữa và bầu trời có các ngôi sao sáng cố định bao quanh. Bầu trời với các sao cố định được gọi là mặt cầu định tinh. Các thiên thể di chuyển từ chòm sao này qua chòm sao khác trên mặt cầu định tinh.





Như vậy vị trí của thiên thể được xác định bởi góc quan sát tương đối của nó so với các sao trên mặt cầu định tinh. Điều bất ngờ với các nhà chiêm tinh là vận tốc chuyển động của một hành tinh lại không đều theo quỹ đạo lòng vòng, nhiều khi chạy ngược và thắt nút (retrograde orbit, chuyển động nghịch hành biểu kiến). Các nhà chiêm tinh buộc phải đưa ra các hiệu chỉnh. Các tính toán hiệu chỉnh dựa trên mô hình hành tinh vừa chuyển động theo quỹ đạo quanh trái đất lại vừa chuyển động quanh chính cái quỹ đạo ấy. Quá trình tính toán hiệu chỉnh rất phức tạp. Copernicus là người đầu tiên lý giải hiện tượng retrograde orbit là do việc quan trắc hành tinh từ trái đất, mà bản thân trái đất lại không đứng yên. Vào năm 1543 Copernicus đưa ra mô hình chuyển động của các hành tình trong hệ mặt trời. Theo đó mặt trời thì đứng yên và tất cả các hành tinh, kể cả trái đất, đều chuyển động quanh nó.

Johannes Kepler là người sùng bái toán học. Ông tin sự hoàn mỹ của toán học là do Chúa Trời sinh ra. Trong hình học Euclid chỉ có 5 đa diện đều. Vào năm 1596 Kepler đã đưa ra bức tranh Mysterium, theo đó quỹ đạo của các hành tinh tương ứng với các đa diện đều nội tiếp nhau.



Vào năm 1600, dựa vào các số liệu từ đài thiên văn của Tycho Brahe, Johannes Kepler đã tính toán và đưa ra 3 định luật về sự chuyển động của thiên thể.

Các định luật Kepler là:

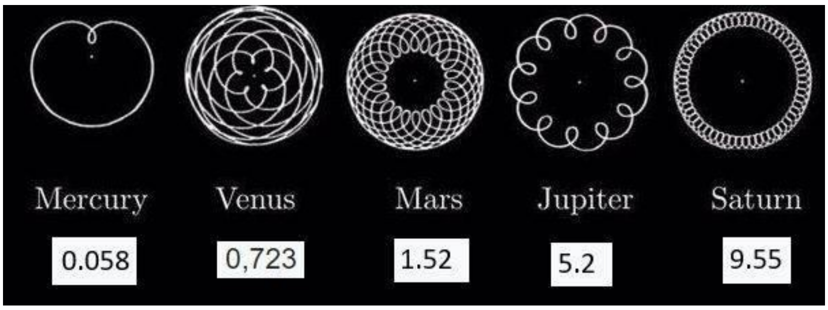
1. Các hành tinh chuyển động quanh Mặt trời theo các quỹ đạo hình elíp với Mặt trời nằm ở một tiêu điểm.

2. Đường nối một hành tinh với Mặt trời quét qua những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau.

3. Bình phương chu kỳ quỹ đạo của một hành tinh tỷ lệ với lập phương bán trục lớn của quỹ đạo elip của hành tinh đó.

Dựa trên các định luật này người ta có thể nhanh chóng tính ra vị trí của các thiên thể trong hệ mặt trời.

Lấy ví dụ như: Dựa vào định luật Kepler và các quan sát retrograde orbit của hành tinh chúng ta có thể tính ra được khoảng cách của nó tới mặt trời.



1. Theo dõi quỹ đạo chúng ta thấy sao Kim chạy được hơn 1 vòng. Cụ thể, khi trái đất chuyển động được 1 vòng thì sao Kim thực hiện được $1 + \frac{3}{5}$ vòng. Như thế "5 năm ở trái đất thì trên sao kim là 8 năm"tức là trái đất quay quanh mặt trời trong vòng 5 năm thì sao kim là 8 năm. Định luật Kepler khẳng định bình phương của chu kỳ thì tỷ lệ với lập phương của khoảng cách tới mặt trời. Như thế khoảng cách tới mặt trời của sao Kim bằng $\left(\frac{5}{8}\right)^{2/3} = 0.73$ của trái đất.

2. Cũng thế sao Hỏa thực hiện 22 lần quay quanh mặt trời thì trái đất thực hiện được 41 lần. Từ đây suy ra sao Hỏa xa mặt trời hơn trái đất khoảng 1.5 lần.

3. Trái đất thực hiện 11 lần quay quanh mặt trời thì sao Mộc (Jupiter) mới thực hiện được một vòng quay quanh mặt trời. Như vậy sao Mộc ở xa mặt trời hơn trái đất khoảng 5 lần.

4. Sao Thổ (Saturn) thực hiện 2 vòng quay quanh mặt trời thì trái đất thực hiện 59 vòng. Như vậy sao Thổ ở xa mặt trời hơn trái đất khoảng 9.54 lần.

Trước khi kể tiếp câu truyện về vật lý chúng ta lưu ý các định luật của Kepler được tìm thấy với mong muốn có được một quy trình tính toán đơn giản từ các dữ liệu thực nghiệm. Các định luật thực nghiệm này của Kepler cho phép tính toán chính xác quỹ đạo của các hành tinh. Tuy nhiên nguyên nhân nào gây ra chuyển động của các hành tinh thì chưa rõ.

Newton là người đặt vấn đề về tìm hiểu nguyên nhân gây ra chuyển động. Nhiều người cho thành công của Newton là do ông coi chuyển động là hệ lụy của tác động lực. Điều này thì không phải. Người xưa cũng hiểu như vậy, họ cũng hiểu về lực hút của trái đất. Bản chất sâu xa các suy nghĩ của Newton cũng đi theo một lộ trình giống như của Kepler. Tức là tìm cách mô tả các hiện tượng vật lý nhờ vào công cụ toán học. Kepler đi từ mô hình chuyển động và cố gắng mò quy luật để mô tả.

Sự khác nhau giữa Newton và Kepler ở chỗ Kepler nhìn nhận sự vận động một cách tổng thể, còn Newton nhìn nhận sự vận động trong một khoảng thời gian rất nhỏ. Do Newton hình dung khi không có lực tác động thì vật đứng yên hoặc chuyển động đều, vậy lực như là yếu tố thay đổi chuyển động. Newton cho rằng trong khoảng thời gian rất nhỏ thì lực tỷ lệ thuận với sự thay đổi của vận tốc, tức tỷ lệ thuận với gia tốc. Viết dưới dạng công thức là $F = -ma$. Tư tưởng này được gọi là vi phân hóa. Vi phân hóa hệ thống là đóng góp vĩ đại của Newton. Tất cả các phát minh tìm hiểu quy luật vận động của tự nhiên, kể cả các phát minh của Einstein, đều đi từ tư tưởng này. Mối quan hệ giữa các đại lượng tuyến tính, tức mối quan hệ giữa các vi phân được gọi là phương trình vi phân.

Ở dạng vi phân có 3 định luật về chuyển động của Newton:

1. Định luật I (Định luật quán tính): Một vật không chịu tác dụng của một lực nào hoặc chịu tác dụng của các lực có hợp lực bằng 0 (nghĩa là các lực cân bằng) thì nó vẫn giữ nguyên trạng thái đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

2. Định luật II: Vector gia tốc của một vật luôn cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của vector gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của vector lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật. Định luật này thường được phát biểu dưới dạng phương trình $F = -ma$, với F là lực tác dụng lên vật, m là khối lượng của vật và a là gia tốc của vật đó.

3. Định luật III: Khi một vật tác dụng lực lên vật thể thứ hai, vật thứ hai sẽ tác dụng một lực cùng độ lớn và ngược chiều về phía vật thứ nhất.

Newton cho là lực sinh ra do vật thể hút lẫn nhau. Lực hút giữa hai vật tỷ lệ thuận với khối lượng mỗi vật và tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách. Lực hút giảm khi khoảng cách giữa hai vật tăng, tuy nhiên vì sao giảm theo bình phương thì Newton không giải thích. Ở đây việc Newton việc chọn giảm theo bình phương cho lực hấp dẫn cũng đại khái như Kepler chọn đường cong Ellip làm quỹ đạo chuyển động của các hành tinh. Dựa vào việc chọn này Newton chứng minh được tất cả các định luật của Kepler. Như thế, cũng như các định luật Kepler, cơ học Newton cũng là đi tìm cách mô phỏng chuyển động diễn ra trong thế giới thực.

Cơ học Newton được tiên đề hóa. Hệ tiên đề hình dung vũ trụ là không gian Euclid với các hệ trục tọa độ xyz và có một chiếc đồng hồ dùng chung cho cả vũ

trụ để xác định thời gian. Trong không gian này có các vật thể có khối lượng chuyển động dưới tác dụng của lực hấp dẫn lẫn nhau. Nếu chúng ta đi với vận tốc v trên một con tàu đang chuyển động với vận tốc u, thì vận tốc tuyệt đối của ta là $u + v$. Hệ tiên đề Newton, hay bất luận hệ tiên đề vật lý nào khác cũng chỉ mô phỏng chuyển động chứ không phải là yếu tố tất định cho các quá trình vật lý đang diễn ra trong thế giới vật chất. Như vậy nguyên nhân dẫn tới việc thay đổi hệ tiên đề cơ học Newton là sự không phù hợp với những gì đang diễn ra trong thực tế, chứ không phải đi từ nguyên lý Bất Toàn.

Vào năm 1760, Joseph-Louis Lagrange đã trình bày trước Viện Hàn lâm Khoa học Turin về nguyên lý tác động tối thiểu. Lagrange cho rằng sự vận động trong thế giới xảy ra sao cho tổng năng lượng chuyển đổi từ thế năng sang động năng và ngược lại là nhỏ nhất có thể.

$$\delta \int (T - V) dv = 0.$$

Từ nguyên lý tác động tối thiểu này suy ra được các định luật của Newton.

Thí nghiệm của Michelson-Morley vào năm 1887 cho thấy vận tốc ánh sáng trong chân không thì không phụ thuộc vào vận tốc của nguồn phát ra nó. Nếu chúng ta đi với vận tốc v và cho đèn pha chiếu một nguồn sáng sáng về phía trước thì vận tốc ánh sáng ấy vẫn chỉ là c, không phụ thuộc vào v.

Vào năm 1892, trong nỗ lực giải thích "Làm thế nào mà tốc độ ánh sáng đo được lại độc lập với hệ quy chiếu", Hendrik Lorentz đã tách không gian vật lý ra khỏi không gian hình học. Khác với cơ học Newton chỉ có duy nhất một hệ quy chiếu đồng nhất với không gian hình học, trong cơ học Lorentz một không gian hình học có thể có nhiều hệ quy chiếu. Mỗi hệ quy chiếu có một đơn vị đo chiều dài và thời gian của riêng mình. Nếu chúng ta đi với vận tốc v trên sàn của một con tàu đang chuyển động với vận tốc u thì vận tốc của chúng ta không phải là $u + v$ mà là $\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$. Các số liệu quan sát thực tế từ hai hệ quy chiếu được chuyển đổi sang nhau bằng biến đổi Lorentz phụ thuộc vào vận tốc tương đối giữa chúng.

Tại mỗi hệ quy chiếu, chúng ta lấy các đơn vị đo độ dài và thời gian để giá trị vận tốc ánh sáng bằng 1. Tức đối với ánh sáng thì $dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$. Trong cơ học Einstein, một khi hạt đã là ánh sáng thì quan sát ở nơi nào nó cũng là ánh sáng, vậy ở bất kỳ một hệ quy chiếu khác thì chúng ta vẫn có $dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = 0$. Từ đây suy ra độ dài $dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ của sự kiện (dt, dx, dy, dz) là bảo toàn. Như vậy ở mỗi hệ quy chiếu xác định một metric, metric Lorenz, với tích vector có dạng toàn phương là $dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

Trong metric Lorenz vector vận tốc ánh sáng luôn có độ dài bằng 0. Do vận tốc của các chuyển động có thật đều nhỏ hơn 1 nên độ dài của vector trong không gian Lorenz là dương.

Tại điểm gốc tọa độ của hệ quy chiếu chuyển động với vận tốc v theo trục x thì $dt'^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2 - v^2dt^2$. Như vậy $\frac{dt^t}{dt} = \sqrt{1 - v^2}$. Điều này cho thấy khi phòng thí nghiệm chuyển động càng nhanh thì thời gian càng co lại.

Biến đổi Lorenz cho hệ quy chiếu chuyển động không đều được coi là biến đổi Lorenz giữa các hệ quy chiếu chuyển động theo tiếp tuyến. Điều này thì không được chứng minh và cũng không thật sự đúng.

Einstein đi tìm mô hình tổng quát mà giữ nguyên sự bất biến của vận tốc ánh sáng. Lực hấp dẫn được Einstein đồng nhất với gia tốc. Để bảo đảm cho tính bất biến của vận tốc ánh sáng, vũ trụ trong khoảng vô cùng nhỏ của mỗi điểm là không gian có tích vector được cho bởi một ma trận Lorenz g_{ac}.

$$\begin{aligned} g_{av}\Gamma^v_{bc} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{cb}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial x^b}\right) \quad R_{abji} \\ &= g_{av}\left(\Gamma^v_{bi,j} - \Gamma^v_{bj,i} + \Gamma^c_{bi}\Gamma^v_{cj} - \Gamma^c_{bj}\Gamma^v_{ci}\right) \quad R_{bc} \\ &= R^a_{bca}. \end{aligned}$$

Einstein cho rằng việc không gian bị biến dạng là do các dòng năng lượng tác động vào gây ra. Sự biến dạng của không gian là thế năng như vậy theo nguyên lý tác động tối thiểu thì

$$\int \left(R + \frac{16\pi G}{c^4}\mathcal{L}\right)\sqrt{-g}d^4x = 0.$$

Từ đây suy ra phương trình trường hấp dẫn của Einstein.

$$\begin{aligned}
\int \left(R+\frac{16\pi G}{c^4}\right)\mathcal{L})\sqrt{-g}d^4x &= \int \left(R+\frac{16\pi G}{c^4}\mathcal{L}\right)\delta\sqrt{-g}+\sqrt{-g}\delta\left(R+\frac{16\pi G}{c^4}\mathcal{L}\right)d^4x \\
&= \int \left(R+\frac{16\pi G}{c^4}\mathcal{L}\right)\frac{-g_{\mu\upsilon}\sqrt{-g}}{2}\delta g^{\mu\nu} \\
&+ \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+\nabla_\sigma\left(g^{\mu\upsilon}\delta\Gamma^\sigma_{\upsilon\mu}-g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}\right)+\frac{16\pi G}{c^4}\delta\mathcal{L}\right)d^4x \\
&= \int \left(R+\frac{16\pi G}{c^4}\mathcal{L}\right)\frac{-g_{\mu\upsilon}\sqrt{-g}}{2}\delta g^{\mu\nu}+\sqrt{-g}\nabla_\sigma\left(g^{\mu\upsilon}\delta\Gamma^\sigma_{\upsilon\mu}-g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}\right) \\
&+ \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+\frac{16\pi G}{c^4}\delta\mathcal{L}\right)d^4x \\
&= \int \left(R+\frac{16\pi G}{c^4}\mathcal{L}\right)\frac{-g_{\mu\upsilon}\sqrt{-g}}{2}\delta g^{\mu\nu}+\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}+\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\delta g^{\mu\nu}d^4x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(R+\frac{16\pi G}{c^4}\mathcal{L}\right)\frac{-g_{\mu\nu}\sqrt{-g}}{2}+\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}+\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}\right) &= 0, \\
\left(R+\frac{16\pi G}{c^4}\mathcal{L}\right)\frac{-g_{\mu\nu}}{2}+R_{\mu\nu}+\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} &= 0, \\
R_{\mu\nu}-R\frac{g_{\mu\nu}}{2} &= \frac{16\pi G}{c^4}\mathcal{L}g_{\mu\nu}-\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}, \\
T_{\mu\nu} &= -2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}+g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \\
R_{\mu\nu}-\frac{R}{2}g_{\mu\nu} &= \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Chúng ta trình bày sơ qua vài ví dụ để các bạn nhận ra phương pháp luận vật lý. Đây là phương pháp luận khoa học. Khoa học là tìm cách mô phỏng các sự kiện xảy ra trong thế giới vật chất bằng các hệ thống các tiên đề. Mỗi hệ tiên đề chỉ tiệm cận được tới một mức nào đó các sự kiện của tự nhiên. Vì thế chúng ta không nên đặt vấn đề công cụ "hệ tiên đề"là tốt hay không khi mô tả thế giới vật chất. Hệ tiên đề thì không phải là thế giới vật chất. Cái chúng ta cần là các sự kiện diễn ra trong thế giới vật chất, vậy nói về định lý Gödel trong hệ tiên đề vật lý là "vớ vẩn".

Xét hai điểm p, q cùng tồn tại song hành, tức là chúng cùng tôn tại trong cùng một lát thời gian tại mọi thời điểm. Sự song hành được thiết lập dựa trền nguyên lý vận tốc ánh sáng là bất biến, tức chúng là các đường trắc địa trên đa tạp Rieman. Điểm q là p được tịnh tiến đi trong khoảng thời gian ε và vector w được tịnh tiến song song từ p tới q.

Sau một khoảng thời gian ε điểm p di chuyển tới p', và q di chuyển tới q'. Đường trắc địa nối p với q thì di chuyển tới một đường cong nối p' với q' nhưng có thể không phải là đường trắc địa. Từ p' vector w được tịnh tiến song song theo đường tắc địa tới q' và được w_1. Vector w tịnh tiến song song tới q' qua q được ký hiệu là w_2.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{w_2-w_1}{\varepsilon^2}=R(u;v)w=R^\alpha_{\beta\gamma\delta}u^\beta v^\gamma w^{\hat{\delta}}=-R^\alpha_{\beta\gamma\delta}u^\gamma v^\beta w^\delta.$$

Chow $= v$ thì giá trị $R^{\alpha}_{\gamma\beta\delta}u^{\beta}v^{\gamma}w^{\delta}$ là đạo hàm bậc hai của đoạn pq trong quá trình di chuyển. Xét hình khối hộp lập bởi các vector cơ sở. Thể tích V của nó không thay đổi nếu một vector dịch chuyển bởi tổ hợp tuyến tính các vector còn lại. Do p và q là cùng tồn tại song hành nên các vector trong không gian thì sẽ vẫn ở trong không gian.

$$\lim_{V\to 0} \frac{\ddot{V}}{V}\bigg|_{t=0} = -R^{\alpha}_{\beta a\delta}v^{\beta}v^{\delta}.$$

Trong hệ tọa độ quán tính $v = (1, 0, 0, 0)$ thì

$$\lim_{V\to 0} \frac{\ddot{V}}{V}\bigg|_{t=0} = -R^{\alpha}_{t\alpha t},$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R^{\gamma}_{\gamma} = T_{\alpha\beta}.$$

Vì $R^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2}g^{\beta}_{\alpha}R^{\gamma}_{\gamma} = T^{\beta}_{\alpha}$, cho nên $R^{\alpha}_{\alpha} - \frac{1}{2}g^{\alpha}_{\alpha}R^{\gamma}_{\gamma} = T^{\alpha}_{\alpha}$. Kết hợp với $g^{\alpha}_{\alpha} = 4$ ta được $-R^{\alpha}_{\alpha} = T^{\alpha}_{\alpha}$.

Vậy

$$R_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T^{\gamma}_{\gamma}$$

Trong hệ tọa độ chuẩn $(-1, 1, 1, 1)$ thì

$$\lim_{V\to 0} \frac{\ddot{V}}{V}\bigg|_{t=0} = -R_{tt} = T_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}T^{\gamma}_{\gamma} = -\frac{1}{2}\left(T_{tt} + T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}\right).$$

HIROSI OOGURI
CẬU HỌC SINH TÌM BÁN KÍNH TRÁI ĐẤT

ĐÀM THANH SƠN
Dịch và giới thiệu

Lời dẫn của GS Đàm Thanh Sơn: Hirosi Ooguri là một nhà vật lý lý thuyết người Nhật Bản, làm việc ở Mỹ và Nhật. Ông nổi tiếng là "*thần đồng*", được bổ nhiệm làm giáo sư ở Đại học Chicago khi mới 23 tuổi. Đoạn sau tôi phỏng dịch từ cuốn sách "*Tinh Thần Tìm Tòi*" (探究する精神) của ông. Vì tiếng Nhật còn hạn chế, nên bản dịch có nhiều chỗ không chính xác, thậm chí sai, mong các bạn thông cảm.

Từ nhà hàng xoay xác định kích thước Trái đất

Tôi sinh ra và lớn lên ở Gifu. Lúc bé tôi hay đi cùng với bố mẹ đến thành phố Nagoya. Chúng tôi thường gửi xe ở tầng hầm của tòa nhà Chunichi, đi ăn trưa ở một hàng ăn, rồi đi mua sắm ở cửa hàng Maruei nằm về phía tây của tòa nhà này.

Tòa nhà Chunichi cao 12 tầng. Trên tầng cao nhất tòa nhà có một nhà hàng xoay. Phong cảnh thành phố trải rộng trước mắt khách hàng trong lúc nhà hàng chầm chậm xoay. Ở đây mắt ta có thể nhìn đến tận đường chân trời không bị vật gì cản.

"*Từ đây đến đường chân trời không biết là bao nhiêu kilomet nhỉ?*" – Bỗng dưng câu hỏi này xuất hiện trong đầu tôi, lúc đó là một cậu bé học sinh lớp năm.

Vào thời gia đó trong giờ học toán chúng tôi dùng lượng giác để xác định độ cao của một cái cột vô tuyến gần trường. Tôi băn khoăn không hiểu những kiến thức về lượng giác học được ở trường có áp dụng được vào bài toán này không. Liệu có xác định được khoảng cách từ nhà hàng đến đường chân trời bằng các tính chất của hình tam giác hay không? [1]

Để xác định độ dài của đường thẳng nối nhà hàng với chân trời, ta có thể coi đường này là một cạnh của một tam giác. Nhưng để có một hình tam giác ta cần chọn thêm một đỉnh nữa. Về việc chọn đỉnh này tôi có hai ý tưởng: Ta hoặc có thể chọn tầng một của tòa nhà Chunichi (nơi có một quán cafe bán bánh baumkuchen rất ngon), hoặc chọn tâm trái đất.

Trong lúc ăn với gia đình, tôi cứ nghĩ về hai tam giác: Tam giác (quán cafe tầng một – nhà hàng xoay – chân trời) và tam giác (tâm trái đất – nhà hàng xoay – chân trời). Và tôi chợt nhận ra là hai tam giác này đồng dạng với nhau. Và sử dụng những kiến thức tôi học được trên lớp, tôi tìm ra công thức:

$$\text{Độ cao của tòa nhà} \times \text{Bán kính của Trái đất} = (\text{Khoảng cách đến đường chân trời})^2.$$

Nếu ta biết độ cao của tòa nhà và bán kính của trái đất, dùng công thức này ta có thể tính được khoảng cách đến đường chân trời.

Độ cao của ngôi nhà Chunichi thì tôi tìm được ngay. Từ thời học tiểu học tôi đã biết nhân vật Ultraman ("*Siêu nhân điện quang*") cao 40 mét. Ultraman đánh nhau với quái vật và làm đổ ngôi nhà có độ cao cũng khoảng như vậy. Tòa nhà Chunichi cao hơn các tòa nhà xung quanh một chút, tôi đánh giá độ cao của nó khoảng 50 mét.

Tuy nhiên tôi lại không biết bán kính của Trái đất là bao nhiêu. Không biết cái này thì không thể biết được khoảng cách đến đường chân trời là bao nhiêu. Trong lúc đang nghĩ ngợi về điều này, nhìn ra ngoài tôi chợt nhận ra ở đường chân trời là nơi quê hương của bố tôi. Quê bố tôi nằm ở bên kia dòng sông Kiso chảy ở ranh giới giữa tỉnh Gifu và tỉnh Aichi. Tôi hỏi bố là từ đây đến quê bố khoảng cách là bao nhiêu, bố tôi bảo là khoảng 20 km.

Như thế là câu hỏi nguyên thủy của tôi "*Từ nhà hàng xoay đến chân trời là bao nhiêu kilomet?*", đã được bố trả lời. Tôi lại nghĩ tiếp xem có thể đảo ngược được câu hỏi để sử dụng giá trị đã biết của khoảng cách từ nhà hàng đến đường chân trời để tìm được

[1] Tiếng Nhật lượng giác là "*Tam giác pháp*"

bán kính của trái đất hay không. Công thức ở trên tôi biến đổi thành

$$\text{Bán kính Trái đất} = \frac{(\text{Khoảng cách đến đường chân trời})^2}{\text{Độ cao của toà nhà}}$$

Dùng công thức này, nếu biết khoảng cách đến đường chân trời có thể tính ra được bán kính trái đất. Làm phép tính tôi tìm ra được giá trị 8000 km. Lúc về nhà tôi mở bách khoa toàn thư ra xem và thấy bán kính trái đất là khoảng 6000 km. Giá trị của tôi hơi lớn hơn giá trị thật một chút, nhưng không tồi.

Sự kiện này trong đời tôi, khi tôi nhìn phong cảnh ngoài cửa sổ và tính ra được bán kính của Trái đất, để lại một ấn tượng rất sâu sắc trong kí ức của tôi: chỉ bằng quan sát và suy nghĩ ta có thể xác định được kích thước của trái đất, mà ngoài ra việc này bản thân tôi cũng làm được bằng sức mình!

Cũng khoảng thời gian đó tôi đọc được những câu chuyện về Hideki Yukawa và biết là một môn học gọi là "*Vật lý lý thuyết*" tồn tại. Tôi quyết định lớn lên sẽ trở thành một nhà Vật lý lý thuyết.

Trong vật lý, người ta xem xét những hiện tượng vượt qua kinh nghiệm hàng ngày của con người rất nhiều: Từ lỗ đen nặng hơn mặt trời 4 triệu lần nằm ở tâm Thiên hà, và những thiên hà xa chúng ta hàng tỷ năm ánh sáng đến những hiện tượng kỳ lạ trong thế giới lượng tử vi mô. Trải nghiệm trong nhà hàng xoay đã cho tôi thêm lòng dũng cảm để giải quyết, bằng quan sát và suy nghĩ, các vấn đề từ thế giới lượng tử đến sự sinh ra của của vũ trụ $13,8$ tỷ năm trước.

Công thức mà tôi tìm ra thời học tiểu học thực ra có một lỗi nhỏ. Phải thêm một thừa số 2 vào vế trái thì mới đúng. Công thức đúng phải là

$$\begin{aligned} 2 \times (\text{Độ cao của tòa nhà}) &\times (\text{Bán kính của Trái đất}) \\ &= (\text{Khoảng cách đến đường chân trời})^2. \end{aligned}$$

Nhớ được công thức này có lúc rất có lợi.

Lúc tôi tuổi giữa tứ tuần, James Simons, người sáng lập ra quỹ phòng hộ (hedge fund) Renaissance Technologies đầu tư một khoảng tiền lớn vào trường đại học Stony Brook ở bang New York ở Mỹ để lập ra một trung tâm nghiên cứu về Toán và Vật lý lý thuyết. Ông mời tôi làm giám đốc đầu tiên của trung tâm này.

James Simons là một nhà toán học lớn của Mỹ. Ông được giải Veblen về những nghiên cứu về hình học và topo của mình, và ông đã từng là trưởng khoa toán của Đại học Stony Brook. Sau ông chuyển sang làm kinh doanh. Ông dùng dữ liệu lớn để nghiên cứu thị trường một cách toán học và và đã thành công lớn trong việc quản lý quỹ đầu tư chứng khoán. Tác giả Gregory Zuckerman đã mô tả chi tiết nửa cuộc đời và quỹ phòng hộ của ông trong cuốn sách "*Người giải mã thị trường tài chính*".

Để biết thêm về kế hoạch của trung tâm nghiên cứu, tôi đến thăm James Simons ở nơi làm việc của ông. Phòng làm việc của ông nằm ở một ngôi nhà cao tầng ở Manhattan, từ cửa sổ có thể nhìn qua Đại bản doanh Liên Hiệp Quốc, sông East, rồi phía bên kia sông là Brooklyn và Long Island, phong cảnh tuyệt đẹp.

Lúc chúng tôi bàn đến Đại học Stony Brook, James Simons chỉ tay sang phía đông và hỏi:

– Đại học Stony Brook có phải là ở chỗ kia không?

Tôi bảo "*Không hiểu có phải thế không nhỉ?*" rồi nói luôn:

– Từ độ cao này đường chân trời cách ta 35 km. Tầm nhìn của ta may ra chỉ đến được Oyster Bay thôi (tức là chưa đến được Stony Brook).

James Simons hỏi:

– Làm sao mà biết được?

Tôi vẽ hình lên một tờ giấy ăn và giải thích "*Hai tam giác này đồng dạng với nhau*". Nhà toán học thốt lên "*Thế à!*" và được lý lẽ của tôi thuyết phục ngay lập tức. "*Như vậy lúc bay trên máy bay ta có thể xác định được khoảng cách đến chân trời là bao nhiêu. Hay quá!*" - Ông trở nên rất vui vẻ và câu chuyện trở nên rất rôm rả.

GIỚI THIỆU TRÒ CHƠI THÁP HÀ NỘI

Tạ Duy Phượng (Cộng tác viên Viện Toán học)
Vũ Hoàng Đạo (Trường Trung học Phổ thông Xuân Huy, Tuyên Quang)
Mao Thị Thu Hiền (Cao đẳng Sư phạm Hà Tây)
Trần Thị Hồng Nhung (Trường Trung học Phổ thông Hòn Gai, Thành phố Hạ Long)
Vũ Thu Trang (Trường Trung học Phổ thông Hòn Gai, Thành phố Hạ Long)

Giới thiệu. *Trò chơi (Bài toán) Tháp Hà Nội được nhà toán học Edouard Lucas phát minh và phổ biến rộng rãi ở Paris năm 1883, là một trò chơi, cũng là bài toán, nổi tiếng thế giới, hiện đang được nghiên cứu và phát triển bởi rất nhiều nhà toán học và khoa học máy tính, các chuyên gia giáo dục và y học, được đưa vào nhiều sách về trò chơi toán học, sách toán học giải trí và các giáo trình tin học như một ví dụ điển hình về thuật giải đệ qui và độ phức tạp tính toán.*

Trò chơi Tháp Hà Nội không chỉ thú vị ở chỗ nó mang tên Hà Nội, thủ đô của Việt Nam. Bài toán Tháp Hà Nội hấp dẫn các nhà nghiên cứu Toán học và Tin học bởi nó liên quan đến nhiều vấn đề của Toán-Tin học như giải thuật đệ qui, hệ đếm, tam giác Pascal, thảm Sierpinski, lý thuyết đồ thị và chu trình Hamilton, ôtômát hữu hạn, độ phức tạp tính toán, ... Bài toán Tháp Hà Nội gợi ý cho nhiều nghiên cứu mới trong toán học và khoa học máy tính.

Chỉ tính riêng số bài báo nghiên cứu về bài toán Tháp Hà Nội trong lĩnh vực Toán học và Tin học đã có đến gần 500 bài với khoảng 250 bài có đầu đề với cụm từ "The Tower of Hanoi"(Tháp Hà Nội), đăng trên gần 200 tạp chí khoa học uy tín (xem Tài liệu trích dẫn [34], [6-10]). Đó là chưa kể đến những bài viết về sử dụng bài toán Tháp Hà Nội trong khoa học giáo dục và y học hoặc những cuốn sách về tin học và toán học giải trí, trong đó có trình bày về trò chơi Tháp Hà Nội.

Trò chơi Tháp Hà Nội thú vị và có ý nghĩa nên nó đã được dùng làm đề tài của một số luận văn Thạc sĩ, xem, thí dụ, [37], [6-10] và được viết thành hai quyển sách [21], [26]. Hai hội thảo khoa học quốc tế với tên gọi Workshop on the Tower of Hanoi and Related Problems, Slovenia, 2005, [39] và Symposium La "Tour d'Hanoi"-un casse-tete mathématique d'E'duard Lucas (1842-1891), Institute Henri Poicaré, Pháp, 2009 [36] đã được tổ chức.

Mặc dù trò chơi Tháp Hà Nội có mặt trên khá nhiều trang WEB và giáo trình tin học tiếng Việt, số lượng bài viết tiếng Việt giới thiệu về trò chơi và bài toán Tháp Hà Nội trên các tạp chí là rất ít và còn rất sơ lược (xem [1]-[5]). Hình như chưa có bài nghiên cứu tiếng Việt nào về bài toán Tháp Hà Nội, ngoại trừ một số luận văn cao học [6-10].

Nhân kỉ niệm 140 năm trò chơi Tháp Hà Nội ra đời, chúng tôi viết bài này với mục đích trình bày tổng quan về bài toán Tháp Hà Nội cùng một số vấn đề toán học liên quan. Bài viết gồm hai phần. Phần 1 giới thiệu tổng quan về lịch sử phát triển trò chơi Tháp Hà Nội. Phần 2 trình bày Lời giải bài toán Tháp Hà Nội cho ba cọc bằng các công cụ khác nhau (thuật giải đệ qui, hệ đếm cơ số 2, đồ thị).

Sau hơn 100 năm, trò chơi Tháp Hà Nội đã có những cải biên và tổng quát hóa (trò chơi Tháp Hà Nội với nhiều cọc, trò chơi Tháp Hà Nội với các đĩa màu, trò chơi Tháp Hà Nội với hạn chế hướng chuyển đĩa, trò chơi Tháp Hà Nội xoay vòng, trò chơi Tháp Hà Nội song song,...). Những cải biên và tổng quát hóa này dẫn đến những vấn đề toán học thú vị, thậm chí dẫn tới nhiều bài toán chưa có lời giải. Bài viết cũng sơ lược giới thiệu các mở rộng và cải biên khác nhau này của bài toán Tháp Hà Nội.

PHẦN II

Các công cụ và phương pháp giải bài toán Tháp Hà Nội

2.1. Trò chơi tháp Hà Nội và thuật giải đệ qui

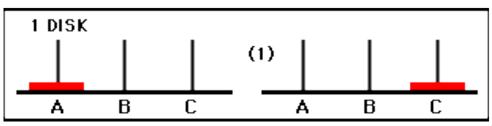
Luật chơi của trò chơi Tháp Hà Nội đã được qui định rõ trong tờ hướng dẫn thứ hai khi trò chơi Tháp Hà Nội được phổ biến lần đầu tại Paris năm 1883 với 8 đĩa (xem Phần 1, [10]). Trong cuốn sách của minh, E. Lucas cũng mô tả trò chơi gồm 8 đĩa ([5], trang 180-181). Lời giải đầu tiên của bài toán tháp Hà Nội đã được đăng trên tạp chí toán học trong bài báo của Allardice và Fraser (xem [1]). Bài toán tháp Hà Nội và bài toán tháp Hà Nội mở rộng với số đĩa bất kì và số cọc là 3 hoặc 4 thường xuyên xuất hiện như là một bài tập cơ bản trong các sách về toán rời rạc (xem, thí dụ, [2], [8]). Dưới đây trình bày thuật giải đệ qui của bài toán Tháp Hà Nội với ba cọc và số đĩa bất kì.

Bài toán 2.1.1 Có n đĩa kích thước nhỏ dần xếp chồng lên nhau trên một cọc (thường được gọi là *cọc nguồn*, cọc A, cọc 0), đĩa lớn ở dưới, đĩa nhỏ ở trên. Các đĩa thường được đánh số từ 1 đến n theo thứ tự từ trên xuống dưới. Ngoài cọc nguồn còn có hai cọc trống khác, được gọi là *cọc trung gian* và *cọc đích* (thường được gán nhãn là cọc B và cọc C, hoặc cọc 1 và cọc 2). Hãy chuyển các đĩa này từ cọc nguồn sang cọc đích (một trong hai cọc B hoặc C) tuân theo hai qui tắc sau:
Qui tắc 1. Mỗi lần chỉ được chuyển một đĩa trên cùng từ cọc này sang cọc khác và được dùng cọc thứ ba làm cọc trung gian.
Qui tắc 2. Không được xếp đĩa lớn nằm trên đĩa nhỏ.

Lời giải Trước tiên ta xét bài toán với 1, 2, 3 đĩa.

Bài toán với 1 đĩa: chỉ cần 1 lần chuyển (Hình 2.1.1)

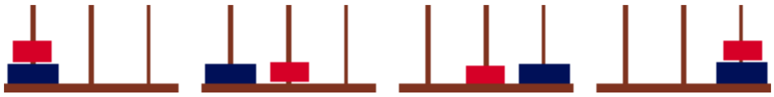
Lần 1: Chuyển đĩa từ cọc A sang cọc C.



Hình 2.1.1. Bài toán với 1 đĩa: Chỉ cần một lần chuyển.

Bài toán với 2 đĩa: chỉ cần 3 lần chuyển **(Hình 2.1.2)**

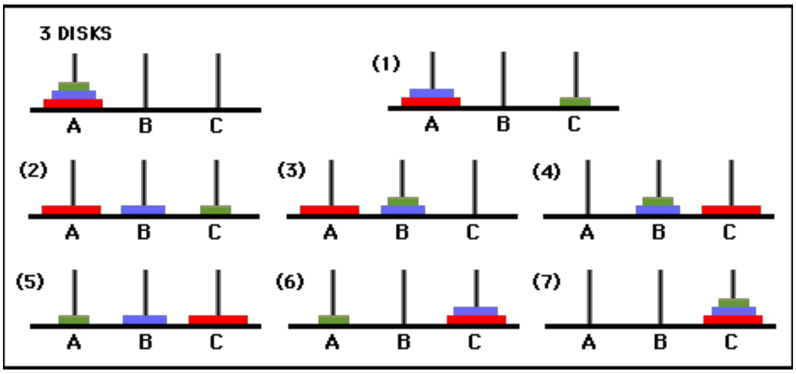
Lần 1: Chuyển đĩa số 1 từ cọc A sang cọc B.
Lần 2: Chuyển đĩa số 2 từ cọc A sang cọc C.
Lần 3: Chuyển đĩa số 1 từ cọc B sang cọc C (lên trên đĩa số 2). Kết thúc.



Hình 2.1.2

Bài toán với 3 đĩa: cần 7 lần chuyển **(Hình 2.1.3)**

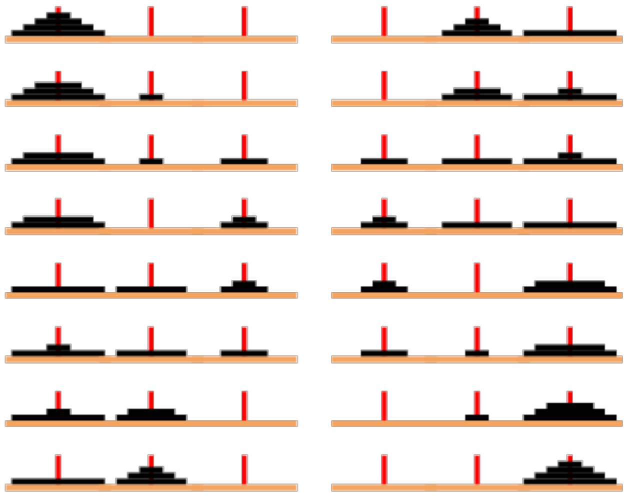
Hai đĩa đầu làm như trường hợp 2 đĩa ở trên (ba lần chuyển):
Lần 1: Chuyển đĩa số 1 từ cọc A sang cọc C.
Lần 2: Chuyển đĩa số 2 từ cọc A sang cọc B.
Lần 3: Chuyển đĩa số 1 từ cọc C sang cọc B (lên trên đĩa số 2). Cọc C trống.
Lần 4: Chuyển đĩa số 3 từ cọc A sang cọc C. Cọc A trống.
Lại chuyển hai đĩa từ cọc B sang cọc C (ba lần chuyển):
Lần 5: Chuyển đĩa số 1 từ cọc B sang cọc A.
Lần 6: Chuyển đĩa số 2 từ cọc B sang cọc C (chồng lên trên đĩa số 3).
Lần 7: Chuyển đĩa số 1 từ cọc B sang cọc C (chồng lên đĩa số 2). Kết thúc.



Hình 2.1.3

Bài toán với 4 đĩa: cần 15 lần chuyển **(Hình 2.1.4)**

Với $n = 4$ ta minh họa các bước chuyển đĩa như Hình 2.1.4 dưới đây.
Dòng 1 cột 1 biểu thị cả bốn đĩa nằm trên cọc A.



Hình 2.1.4

Trước tiên ta giải bài toán ba cọc (mất 7 lần chuyển):

Lần 1 (dòng 2 cột 1): Chuyển đĩa trên cùng (số 1) từ cọc A sang cọc B.
Lần 2 (dòng 3 cột 1): Chuyển đĩa số 2 từ cọc A sang cọc C.
Lần 3 (dòng 4 cột 1): Chuyển đĩa số 1 từ cọc B sang cọc C (cọc B trống).
Lần 4 (dòng 5 cột 1): Chuyển đĩa số 3 từ cọc A sang cọc B.
Lần 5 (dòng 6 cột 1): Chuyển đĩa số 1 từ cọc C sang cọc A.
Lần 6 (dòng 7 cột 1): Chuyển đĩa số 2 từ cọc C sang cọc B (cọc C trống).
Lần 7 (dòng 8 cột 1): Chuyển đĩa số 1 từ cọc A sang cọc B.
Như vậy, sau 7 lần chuyển, bài toán với 3 cọc và 3 đĩa đã giải xong.

Lần 8 (dòng 1 cột 2): Chuyển đĩa số 4 từ cọc A sang cọc C.

Tiếp theo lại giải bài toán ba cọc: Chuyển ba đĩa từ cọc B sang cọc C (mất thêm 7 lần chuyển):

Lần 9 (dòng 2 cột 2): Chuyển đĩa số 1 từ cọc B sang cọc C.
Lần 10 (dòng 3 cột 2): Chuyển đĩa số 2 từ cọc B sang cọc A.
Lần 11 (dòng 4 cột 2): Chuyển đĩa số 1 từ cọc C sang cọc A.
Lần 12 (dòng 5 cột 2): Chuyển đĩa số 3 từ cọc B sang C (cọc B trống).
Lần 13 (dòng 6 cột 2): Chuyển đĩa số 1 từ cọc A sang cọc B.
Lần 14 (dòng 7 cột 2): Chuyển đĩa số 2 từ cọc A sang C (cọc A trống).
Lần 15 (dòng 8 cột 2): Chuyển đĩa 1 từ cọc B sang cọc C (cọc B trống).

Tổng cộng sau 15 lần chuyển các đĩa nằm trên cọc C.

Từ các trường hợp riêng trên, ta đi tới thuật giải tổng quát cho bài toán Tháp Hà Nội với ba cọc và số đĩa n bất kì như sau.

Thuật toán Trước tiên ta giải bài toán Tháp Hà Nội cho ba đĩa:
Chuyển đĩa số 1 từ cọc A sang cọc B; chuyển đĩa số 2 từ cọc A sang cọc C; chuyển đĩa số 1 từ cọc B sang cọc C. Khi ấy đĩa số 1 nằm trên đĩa số 2. Vậy ta đã có hai đĩa nằm

trên cọc C, cọc B hiện thời trống. Chuyển đĩa số 3 từ cọc A sang cọc B. Lặp lại ba bước trên để giải bài toán cho hai đĩa: chuyển đĩa số 1 và đĩa số 2 cho nằm lên trên đĩa số 3 trên cọc B.
Tiếp tục làm như vậy cho bốn, năm, … n đĩa. Mỗi lần dựng xong tháp từ đĩa thứ k đến đĩa thứ 1 (trên cọc B hoặc cọc C, một trong hai cọc đó trống), ta chuyển đĩa thứ $k+1$ từ cọc A sang cọc trống (cọc C hoặc cọc B), rồi lại di chuyển tháp đã dựng lên đĩa thứ $k+1$ để được tháp với $k+1$ đĩa.
Như vậy, khi đã xây dựng xong tháp thứ k thì ta cũng dễ dàng xây dựng được tháp thứ $k+1$ sau khi chuyển đĩa thứ $k+1$ sang cọc trống.

Phương pháp trên trong Tin học được gọi là *thuật giải đệ qui*: Để tiến hành giải bài toán với $k+1$ đĩa, ta áp dụng thuật giải (đã biết) cho bài toán với k đĩa (chuyển k đĩa từ cọc A sang cọc B). Toàn bộ quá trình là một số hữu hạn các bước, vì đến một lúc nào đó thuật giải sẽ được áp dụng cho $k=1$. Bước này chỉ đơn giản là chuyển một đĩa duy nhất từ cọc A sang cọc trống C. Sau đó lại thực hiện thuật giải (đã biết) cho bài toán với k đĩa (chuyển k đĩa từ cọc B sang cọc C). Bài toán cho với $k+1$ đĩa cuối cùng đã được giải.

Thuật giải đệ qui bài toán tháp Hà Nội có thể phát biểu như sau.

Nếu $n=1$ hoặc $n=2$ thì bài toán giải được ngay.
Giả sử đã biết cách giải bài toán với $n-1$ đĩa. Giải bài toán cho n đĩa như sau:
Chuyển $n-1$ đĩa trên cùng từ cọc A sang cọc B (theo giả thiết đã biết cách giải).
Chuyển đĩa thứ n (dưới cùng trên cọc A) từ cọc A sang cọc C (Bài toán 1 đĩa).
Chuyển $n-1$ đĩa từ cọc B sang cọc C (theo giả thiết đã biết cách giải).
Như vậy, lời giải bài toán rất đơn giản: giải bài toán n đĩa được đưa về bài toán $n-1$ đĩa và bài toán một đĩa.

Thuật giải đệ qui (có quan hệ mật thiết với phép qui nạp và công thức truy hồi trong toán học) được áp dụng để giải rất nhiều bài toán. Thí dụ, bài toán Josephus; Bài toán tính số Fibonacci,…

Kí hiệu $L(n)$ là số lần chuyển đĩa tối ưu trong bài toán tháp Hà Nội với n đĩa và ba cọc. Khi ấy, để chuyển n đĩa từ cọc A sang cọc C, trước tiên ta phải chuyển $n-1$ đĩa trên cùng (các đĩa nhỏ) từ cọc A sang cọc B, sau đó chuyển đĩa thứ n từ cọc A sang cọc C. Cuối cùng, lại chuyển $n-1$ đĩa từ cọc B sang cọc C. Ta có:

$$L(1)=1;$$

$$L(2)=3;$$

$$L(n)=L(n-1)+L(1)+L(n-1)=2L(n-1)+1.$$

Theo qui nạp, ta dễ dàng chứng minh được $L(n)=2^n-1$.
Giả sử công thức $L(n)=2^n-1$ đã được chứng minh cho mọi $n<m.$ Ta có

$$L(m)=2L(m-1)+1=2\left(2^{m-1}-1\right)+1=2^m-1.$$

Vậy công thức $L(n) = 2^n - 1$ được chứng minh với mọi n.

Theo công thức trên, thuật toán Hà Nội là thuật toán có *thời gian mũ*.

Một điều thú vị là dãy $L(n) = 2^n - 1$ chính là dãy số Merssen.

Giả sử mỗi lần chuyển 1 đĩa hết thời gian 1 giây. Nếu có 64 đĩa thì thời gian chuyển hết 64 đĩa là

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,703\,551\,615 \text{ giây} \approx 5 \text{ tỉ năm.}$$

Như vậy, thế giới mà thần Brahma sáng tạo ra tồn tại đủ lâu, một thời gian khoảng 5 tỉ năm!

Thuật toán đệ qui giải bài toán Tháp Hà Nội nêu trên là *thuật toán tối ưu* (số lần chuyển đĩa ít nhất). Có lẽ không ai nghĩ đến việc chứng minh "điều hiển nhiên" là số $L(n) = 2^n - 1$ là số bước chuyển tối ưu (ít nhất). Chỉ đến năm 1981, Derick Wood [11] mới chỉ ra rằng $L(n) = 2^n - 1$ thật sự là số bước chuyển tối ưu và qui tắc chuyển tối ưu (như đã trình bày ở trên) là duy nhất.

Nếu sử dụng máy tính thực hiện chương trình đệ qui với tốc độ 1 triệu phép toán/giây thì cũng phải mất thời gian chạy máy là:

$$\left(2^{64} - 1\right) : 1000\,000 \approx 50\,000 \text{ năm.}$$

Như vậy bài toán Tháp Hà Nội, mặc dù có thuật giải đơn giản và tối ưu, nhưng *không giải được trong thời gian thực*.

Ta còn có thể minh họa lời giải bài toán theo cách khác như sau.

Cho ba cọc và n đĩa. Kí hiệu dãy $S_i = \{a_k\}$, $i = 1,...,n$ là chỉ số của các đĩa cần phải chuyển tại bước thứ k. Dãy $S_i = \{a_k\}$ này được xây dựng theo thuật giải đệ qui đơn giản bắt đầu với $S_1 = \{1\}$ cho một đĩa và theo công thức truy hồi $S_n = \{S_{n-1}, n, S_{n-1}\}$.

Bảng dưới đây chỉ ra cách xây dựng dãy S_n cho các giá trị $n = 1,2,3,4$.

n	S_n
1	1
2	1,2,1
3	1,2,1,3,1,2,1
4	1,2,1,3,1,2,1,4,1,2,1,3,1,2,1

Ta thấy dãy số S_n có tính chất đối xứng và lồng nhau. Số ở giữa bao giờ cũng là n, chính là số đĩa. Dãy S_{n-1} lại có số ở giữa chính là $n-1$. Các số a_i (nhận giá trị từ 1 đến n) trong dãy S_n tương ứng với chỉ số của đĩa được chuyển.

§2.2 Giải bài toán tháp Hà Nội bằng biểu diễn trong hệ đếm cơ số 2

Bằng cách chia cho 2, một số tự nhiên bất kì có thể biểu diễn dưới dạng tổng các lũy thừa của 2 với các hệ số bằng 1 hoặc 0. Thí dụ,

$$2023 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2 + 1$$
$$= 1\cdot 2^{10} + 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = (11111100111)_2$$

Như vậy, nếu chọn 2 làm *cơ số* trong *hệ đếm cơ số 2* thì mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn dưới dạng hệ đếm cơ số 2 với các hệ số 1 và 0. Các hệ số trong phân tích số đã cho dưới dạng lũy thừa của 2 được gọi là các *chữ số* của nó và số đã cho được biểu diễn trong hệ đếm theo *vị trí*, tương tự như trong hệ đếm cơ số 10. Thí dụ (chỉ số dưới biểu thị cơ số):

$$2023_{10} = (11111100111)_2.$$

Sau này, để cho gọn, nhiều khi ta sẽ không viết chỉ số cơ số 2 dưới số đã cho.

Ta có thể sử dụng hệ đếm cơ số 2 để giải bài toán Tháp Hà Nội cho ba cọc với n đĩa như sau.

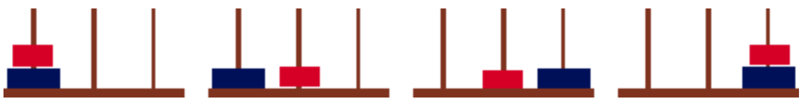
Để dễ hiểu, trước tiên ta xem xét trường hợp bài toán Tháp Hà Nội với ba cọc và hai, ba, bốn đĩa hoặc năm đĩa.

Giải bài toán Tháp Hà Nội với hai đĩa nhờ hệ đếm cơ số 2

Bước 0: Hai đĩa ở cọc A, kí hiệu là $(00)_2$.

Bước 1: Chuyển đĩa số 1 từ cọc A sang cọc trống B, kí hiệu là $(01)_2$.

Chữ số 1 ở cuối biểu thị đĩa trên cùng (đĩa số 1) đã được chuyển, $(01)_2 = 1_{10}$.



Hình 2.2.1

Bước 2: Chuyển đĩa số 2 từ cọc A sang cọc trống C, kí hiệu là $(10)_2$.

Chữ số 1 thứ hai biểu thị đĩa thứ hai đã được chuyển sang cọc C, $(10)_2 = 2_{10}$.

Chữ số 1 khác chữ số 0 biểu thị hai đĩa ở hai cọc khác nhau (cọc B và cọc C).
Để được $(10)_2 = 2_{10}$ ta chỉ cần cộng thêm 1 vào $(01)_2 = 1_{10}$: $(01)_2 + 1_2 = (10)_2 = 2_{10}$.

Bước 3: Chuyển đĩa số 1 từ cọc B sang cọc C, kí hiệu là $(11)_2$. Chữ số 1 thứ hai (bên trái) biểu thị đĩa thứ hai đã được chuyển. Hai chữ số 1 biểu thị hai đĩa ở trên cùng một cọc (đĩa thứ hai chồng lên đĩa thứ nhất, và cần 3 lần chuyển $(10)_2 + 1_2 = (11)_2 = 3_{10}$.).

Giải bài toán Tháp Hà Nội với ba đĩa nhờ hệ đếm cơ số 2

Bước 0: Ba đĩa ở cọc A, kí hiệu là $(000)_2$.

Bước 1: Chuyển đĩa số 1 từ cọc A sang cọc trống C, kí hiệu là $(001)_2$. Chữ số 1 ở vị trí thứ nhất (từ bên phải) biểu thị đĩa trên cùng (đĩa số 1) đã được chuyển từ cọc A sang cọc C, $(001)_2 = 1_{10}$.

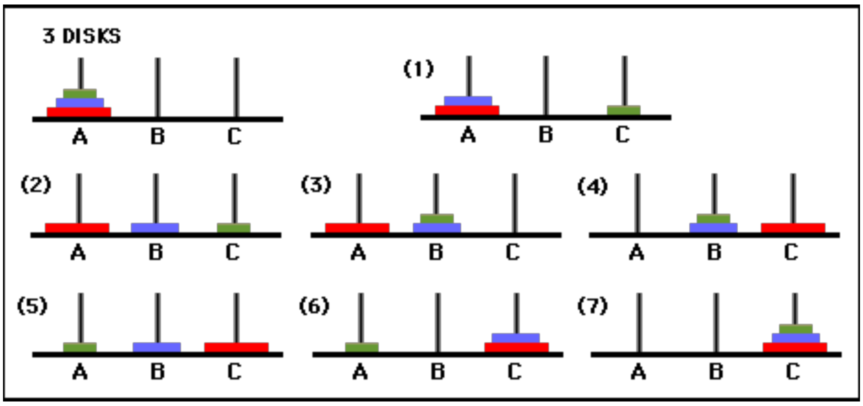
Bước 2: Chuyển đĩa số 2 từ cọc A sang cọc trống B, kí hiệu là $(010)_2$. Để được số $(010)_2$ ta chỉ cần cộng 1 (trong hệ đếm cơ số 2 vào số $(001)_2$: $(001)_2 + 1_2 = (010)_2$.

Chữ số 1 ở vị trí thứ hai biểu thị đĩa thứ hai đã được chuyển từ cọc A sang cọc B, $(010)_2 = 2_{10}$. Ba chữ số 00, 01, 10 (ở bên phải) trong biểu diễn $(000)_2$, $(001)_2 = 1_{10}$, $(010)_2$ biểu thị ba đĩa ở ba cọc khác nhau.

Bước 3: Chuyển đĩa số 1 từ cọc C sang cọc B, kí hiệu là $(011)_2$ (cộng 1 trong hệ đếm cơ số 2 vào số $(010)_2$: $(010)_2 + 1_2 = (011)_2$.

Chữ số 1 ở vị trí thứ nhất (bên phải, khác với chữ số 0 trong $(010)_2$ ở bước 2) biểu thị đĩa số 1 đã được chuyển từ cọc B sang cọc C, Cần 3 bước chuyển: $(011)_2 = 3_{10}$.

Ba chữ số 0, 1, 1 biểu thị hai đĩa nhỏ ở trên cùng cọc B (đĩa thứ hai chồng lên đĩa thứ nhất), đĩa lớn ở cọc khác (cọc A). Cọc C trống.



Hình 2.2.2

Bước 4: Chuyển đĩa số 3 từ cọc A sang cọc C, kí hiệu là $(100)_2$ (cộng 1 trong hệ đếm cơ số 2 vào số $(011)_2$: $(011)_2 + 1_2 = (100)_2$.)

Chữ số 1 ở vị trí thứ ba (từ bên phải, khác với chữ số 0 trong $(011)_2$ ở bước 3) biểu thị đĩa số 3 đã được chuyển. Ba chữ số 1, 0, 0 biểu thị hai đĩa nhỏ ở trên cùng một cọc B và không chuyển, đĩa lớn ở cọc khác (cọc C). Cọc A trống, Số lần chuyển: $(100)_2 = 4_{10}$.

Bước 5: Chuyển đĩa số 1 từ cọc B sang cọc A, kí hiệu là $(101)_2$. (cộng 1 trong hệ đếm cơ số 2 vào số $(100)_2$: $(100)_2 + 1_2 = (101)_2$.)

Chữ số 1 ở vị trí thứ nhất (ngoài cùng bên trái, khác với chữ số 0 trong $(100)_2$ ở bước 4) biểu thị đĩa số 1 đã được chuyển sang cọc thứ nhất, Số lần đĩa đã chuyển là 5: $(101)_2 = 5_{10}$.

Bước 6: Chuyển đĩa số 2 từ cọc B sang cọc C, kí hiệu là $(110)_2$. (cộng 1 trong hệ đếm cơ số 2 vào số $(101)_2$: $(101)_2 + 1_2 = (110)_2$.)

Chữ số 1 ở vị trí giữa (khác số 0 trong $(101)_2$ ở Bước 5) biểu thị đĩa số 2 đã được chuyển. Số lần đĩa đã chuyển là 6: $(110)_2 = 6_{10}$.

Bước 7: Chuyển đĩa 1 từ cọc A sang cọc C (chồng lên đĩa 2):
$(110)_2$: $(110)_2 + 1_2 = (111)_2$. Số lần đĩa đã chuyển là 7: $(111)_2 = 7_{10}$.

Kết thúc. Tháp mới ba tầng đã được xây trên cọc C sau 7 lần chuyển.

Giải bài toán Tháp Hà Nội với bốn đĩa nhờ hệ đếm cơ số 2

Số lần chuyển cần thiết trong bài toán ba cọc với bốn đĩa là $2^4 - 1 = 15$. Kí hiệu các cọc là cọc A (cọc nguồn chứa 4 đĩa), cọc B và cọc C, các đĩa là 1, 2, 3, 4 theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Biểu thị vi trí ban đầu, khi tất cả bốn đĩa ở cọc A là số $(0000)_2$ có bốn chữ số 0.

Bước 1: Chuyển đĩa số 1 từ cọc A sang cọc trống B, kí hiệu là $(0001)_2$.

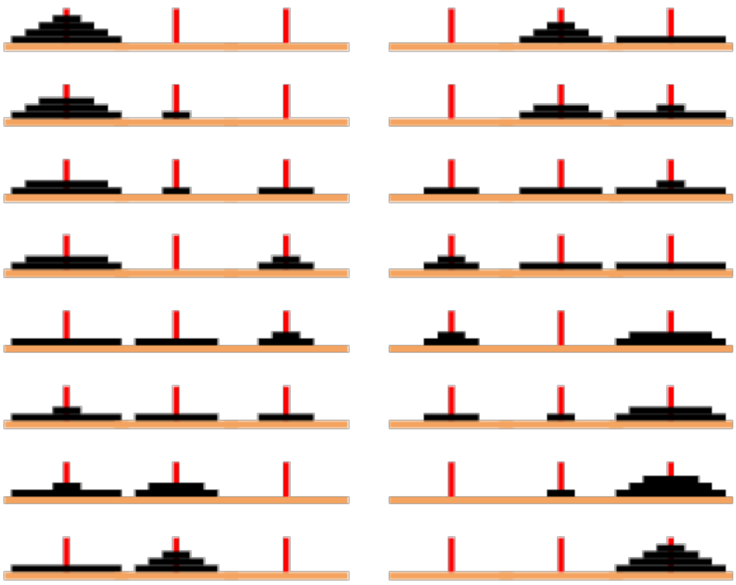
Số 1 bên trái biểu thị đĩa số 1 trên cùng đã được chuyển (sang cọc trống B).

Bước 2: Chuyển đĩa số 2 từ cọc A sang cọc trống C, kí hiệu bởi $(0010)_2$. Số 1 ở vị trí thứ hai (tính từ bên phải) biểu thị đĩa số 2 được chuyển (sang cọc trống C). Hai chữ số 1 và 0 ở vị trí cuối biểu thị hai đĩa được đặt lên hai cọc khác nhau.

Bước 3: Chuyển đĩa số 1 từ cọc B sang cọc C, kí hiệu bởi $(0011)_2$. Cọc B trống.

Số $(0010)_2$ ở bước trên trở thành số $(0011)_2$, biểu thị đĩa số 1 đã được chuyển.

Hai số 11 cuối cùng biểu thị đĩa 1 được đặt chồng lên đĩa số 2 trên cọc C.



Hình 2.2.3

Bước 4: Chuyển đĩa số 3 từ cọc A sang cọc trống B, kí hiệu bởi $(0100)_2$. Số 1 ở vị trí thứ ba (khác với số 0 trong $(0011)_2$ ở bước 2) biểu thị đĩa số 3 đã được chuyển. Ba số 100 ở vị trí cuối cùng biểu thị đĩa số 3 không nằm trên cùng cọc với hai đĩa đầu tiên.

Bước 5: Đưa đĩa số 1 từ cọc C sang cọc A, kí hiệu bởi $(0101)_2$. Từ $(0100)_2$ ở Bước 4 thành $(0101)_2$ biểu thị đĩa số 1 đã được chuyển.

Ba số 101 cuối cùng biểu thị ba đĩa nhỏ nhất ở trên ba cọc khác nhau.

Bước 6: Đưa đĩa số 2 từ cọc C sang cọc B, kí hiệu bởi $(0110)_2$. Cọc C trống.

Ba số 110 cuối cùng biểu thị hai đĩa số ba và số 2 trên cùng một cọc.

Bước 7: Đưa đĩa số 1 từ cọc A sang cọc B, kí hiệu bởi $(0111)_2$.

Ba số 111 ở vị trí cuối cùng biểu thị ba đĩa trên cùng một cọc (cọc B).
Như vậy ta đã giải xong bài toán ba đĩa.
Bước 8: Đưa đĩa số 4 từ cọc A sang cọc C, kí hiệu bởi $(1000)_2$. Cọc A trống.

Số 1000 biểu thị đĩa số 4 không trên cùng cọc với ba đĩa nhỏ.
Bước 9: Đưa đĩa số 1 từ cọc B sang cọc C, kí hiệu bởi $(1001)_2$.

Số 1001 biểu thị đĩa số 1 và đĩa số 4 trên cùng một cọc.
Bước 10: Đưa đĩa số 2 từ cọc B sang cọc A, kí hiệu bởi $(1010)_2$.

Bước 11: Đưa đĩa số 1 từ cọc C sang cọc A, kí hiệu bởi $(1011)_2$.

Bước 12: Đưa đĩa số 3 từ cọc B sang cọc C, kí hiệu bởi $(1100)_2$.

Bước 13: Đưa đĩa số 1 từ cọc A sang cọc B, kí hiệu bởi $(1101)_2$.

Bước 14: Đưa đĩa số 2 từ cọc A sang cọc C, kí hiệu bởi $(1110)_2$.

Bước 15: Đưa đĩa số 1 từ cọc B sang cọc C, kí hiệu bởi $(1111)_2$.

Ba số 111 ở vị trí cuối cùng biểu thị ba đĩa cùng nằm trên một cọc.
Kết thúc trò chơi.

Bước	Cơ số 2	Giải thích
1	0001	Đưa đĩa số 1 từ cọc A sang cọc trống B.
2	0010	Đưa đĩa 2 từ cọc A sang cọc trống C.
3	0011	Đưa đĩa 1 từ cọc B lên trên đĩa 2 trên C, cọc B trống.
4	0100	Đưa đĩa 3 từ cọc A lên cọc trống B.
5	0101	Đĩa 1 từ C sang A (KHÔNG chồng lên đĩa 3 của B)
6	0110	Đĩa 2 từ C lên trên đĩa 3 của cọc B (cọc C trống).
7	0111	Đưa đĩa 1 từ cọc A lên trên đĩa 2 của cọc B.
8	1000	Đưa đĩa 4 từ cọc A sang cọc trống C.
9	1001	Đĩa 1 từ cọc B lên trên đĩa 4 của cọc C.
10	1010	Đĩa 2 từ B sang A (KHÔNG chồng lên đĩa 4 của C).
11	1011	Đưa đĩa 1 từ cọc C lên trên đĩa 2 của cọc A.
12	1100	Đĩa 3 từ cọc B lên trên đĩa 4 của C (cọc B trống).
13	1101	Đĩa 1 từ A sang B (KHÔNG chồng lên đĩa 3 của C).
14	1110	Đưa đĩa 2 từ cọc A lên trên đĩa 3 của cọc C.
15	1111	Đưa đĩa 1 từ cọc B lên trên đĩa 2 của C.

Giải bài toán Tháp Hà Nội với năm đĩa nhờ hệ đếm cơ số 2

Số lần chuyển cần thiết trong bài toán ba cọc với năm đĩa $2^5 - 1 = 31$. Kí hiệu các cọc là cọc A (cọc nguồn chứa 5 đĩa), cọc B và cọc C; các đĩa được kí hiệu là 1, 2, 3, 4, 5 theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Bước	**cơ số 2**	**Giải thích**
1	00001	Đưa đĩa số 1 từ cọc A sang cọc trống B.
2	00010	Đưa đĩa 2 từ cọc A sang cọc trống C.
3	00011	Đưa đĩa 1 từ cọc B lên trên đĩa 2 của C, cọc B trống.
4	00100	Đưa đĩa 3 từ cọc A lên cọc trống B.
5	00101	Đĩa 1 từ C sang A (KHÔNG chồng lên đĩa 3 của B)
6	00110	Đĩa 2 từ C lên trên đĩa 3 của cọc B (cọc C trống).
7	00111	Đưa đĩa 1 từ cọc A lên trên đĩa 2 của cọc B.
8	01000	Đưa đĩa 4 từ cọc A sang cọc trống C.
9	01001	Đĩa 1 từ cọc B lên trên đĩa 4 của cọc C.
10	01010	Đĩa 2 từ B sang A (KHÔNG chồng lên đĩa 4 của C).
11	01011	Đĩa 1 từ cọc C lên trên đĩa 2 của cọc A.
12	01100	Đĩa 3 từ cọc B lên trên đĩa 4 của C (cọc B trống).
13	01101	Đĩa 1 từ A sang B (KHÔNG chồng lên đĩa 3 của C).
14	01110	Đưa đĩa 2 từ cọc A lên trên đĩa 3 của cọc C.
15	01111	Đĩa 1 từ cọc B lên trên đĩa 2 của C (cọc B trống).
16	10000	Đưa đĩa 5 từ cọc A sang cọc trống B (cọc A trống).
17	10001	Đĩa 1 từ cọc C sang A (KHÔNG chồng lên đĩa 5).
18	10010	Đĩa 2 từ cọc C lên trên đĩa 5 của cọc B.
19	10011	Đĩa 1 từ cọc A lên trên đĩa 2 của B (cọc A trống).
20	10100	Đĩa 3 từ cọc C sang A (KHÔNG chồng lên đĩa 5).
21	10101	Đĩa 1 từ cọc B sang C (KHÔNG chồng lên đĩa 3).
22	10110	Đưa đĩa 2 từ cọc B lên trên đĩa 3 của cọc A.
23	10111	Đưa đĩa 1 từ cọc C lên trên đĩa 2 của cọc A.
24	11000	Đĩa 4 từ cọc C lên trên đĩa 5 của cọc B (C trống).
25	11001	Đưa đĩa 1 từ cọc A lên trên đĩa 4 của cọc B.
26	11010	Đĩa 2 từ cọc A sang cọc C (KHÔNG chồng lên 4).
27	11011	Đưa đĩa 1 từ cọc B lên trên đĩa 2 của cọc C.

28	11100	Đưa đĩa 3 từ cọc A lên trên đĩa 4 của B (A trống).
29	11101	Đưa đĩa 1 từ cọc C sang A (KHÔNG chồng lên 3).
30	11110	Đưa đĩa 2 từ cọc C lên trên đĩa 3 của cọc B.
31	11111	Đưa đĩa 1 từ cọc A lên trên đĩa 2 của cọc B. Kết thúc

Tiểu kết

Các ví dụ trên (bài toán ba cọc với bốn hoặc với năm đĩa) cho thấy: Các vị trí đĩa có thể hoàn toàn xác định được trực tiếp từ biểu diễn cơ số 2 của số thứ tự di chuyển (viết trong hệ đếm cơ số 2 với một chữ số cho mỗi đĩa), trong đó các dãy chữ số 1 và các dãy chữ số 0 tượng trưng cho dãy các đĩa liền nhau trên cùng một cọc, và mỗi khi chữ số có thay đổi thì đĩa kế tiếp sẽ dời sang trái hay phải một cọc (hay chuyển sang cọc ngoài cùng phía đối diện). Ta có qui tắc sau:

Dãy bit (dãy chữ số trong cơ số 2) được đọc từ trái sang phải, và mỗi bit (mỗi chữ số) có thể được sử dụng để xác định vị trí của đĩa tương ứng.
Bit với cùng giá trị như bước trước có nghĩa là đĩa tương ứng được xếp chồng lên đỉnh của đĩa trước trên cùng một cọc.
Bit với giá trị khác trước nghĩa là đĩa tương ứng có vị trí bên trái hoặc bên phải của đĩa trước. Để xác định vị trí bên phải hay bên trái ta phải theo qui tắc sau:

1) Giả thiết cọc đích nằm bên trái và cọc nguồn nằm bên phải.
2) Cũng giả thiết "wrapping" (bao bọc): cọc phải được tính như là cọc “trái” của cọc trái và ngược lại.
3) Giả sử k là số đĩa lớn nhất nằm trên cùng một cọc như là đĩa đầu tiên lớn nhất của nó và thêm 1 nếu đĩa lớn nhất trên cọc trái. Nếu n chẵn, đĩa sẽ được đặt trên một cọc bên trái, nếu n lẻ, đĩa được đặt lên một cọc bên phải.

Chữ số ở vị trí đầu (bên trái) đại diện cho đĩa lớn nhất và nếu là chữ số 0 thì có nghĩa là đĩa lớn nhất không dời khỏi cọc xuất phát và ngược lại. Chữ số 1 từ bên phải của số trong cơ số 2 biểu thị đĩa đã được chuyển. Nếu không có chữ số 1 nào khác trong số đã cho trong cơ số 2, tức là số có dạng $0...01_2$, thì nghĩa là đĩa đã được chuyển từ cọc A sang cọc trống. Chữ số 1 thứ hai từ bên phải biểu thị vị trí của cọc mà đĩa được chuyển đến. Nếu không có đĩa nào hoặc có một số chẵn các chữ số 0 giữa hai chữ số 1 (hai chữ số 1 đầu tiên từ bên phải), thì đĩa được đặt lên trên đĩa to hơn nó. Nếu số chữ số 0 giữa hai chữ số 1 là lẻ thì nghĩa là đĩa đang chuyển KHÔNG đặt lên trên đĩa to hơn (mà đặt ở cọc khác).
Các chữ số 1 và 0 luân phiên bên dưới các chữ số của một bước chuyển cho phép biết được di chuyển theo một chiều khi nó hợp với chữ số của bước chuyển tại nơi chữ số thay đổi và theo chiều kia khi nó không hợp với chữ số của bước chuyển.

Thí dụ, với số đĩa là 8:

Bước 0: $(00000000)_2$: Đĩa lớn nhất là 0, do đó nó nằm trên cọc trái (cọc nguồn). Mọi đĩa khác cũng là 0, do đó chúng được đặt lên trên đĩa lớn nhất. Và mọi đĩa đều nằm trên trên cọc nguồn.

Bước 11011000_2: Đĩa lớn nhất là 1, do đó nó nằm trên cọc phải (cọc đích). Đĩa thứ hai cũng là 1, do đó nó nằm trên đĩa lớn nhất, trên cọc phải. Đĩa thứ ba là 0, do đó nó nằm trên cọc khác. Bởi vì 3 là số lẻ nên nó nằm trên một cọc phía bên phải, nghĩa là trên cọc trái. Đĩa thứ tư là 1 nên nó nằm trên cọc khác. Vì 4 là chẵn nên nó nằm trên một cọc về bên trái, nghĩa là cọc phải. Đĩa thứ năm cũng là 1, do đó nó nằm bên trên đĩa thứ tư, trên cọc phải. Đĩa thứ 6 là 0, do đó nó nằm trên cọc khác. Do 6 là chẵn nên đĩa nằm trên cọc về bên trái, nghĩa là cọc giữa. Đĩa thứ 7 và đĩa thứ 8 cũng là 0, do đó nó nằm trên đĩa số 6, trên cọc giữa.

Bước $2^8 - 1 = 11111111_2$: Đĩa lớn nhất là 1, do đó nó nằm trên cọc phải (cọc đích). Mọi đĩa khác cũng là 1, do đó chúng được đặt lên trên đĩa lớn nhất. Vậy mọi đĩa nằm trên cọc đích và trò chơi kết thúc.

Như vậy, ta có thể giải bài toán Tháp Hà Nội nhờ sử dụng hệ đếm cơ số 2.

§2.3 Đồ thị Hà Nội

2.3.1 Đồ thị Hà Nội

Người bắt đầu chơi Trò chơi Tháp Hà Nội thường rất hay bị mắc lỗi trong khi chuyển các đĩa từ cọc nguồn sang cọc đích (bước chuyển sai, lặp lại các bước đã chuyển,...). Điều này dẫn đến lời giải không tối ưu. Quan sát này dẫn đến một loạt những câu hỏi thú vị:

1. *Cấu hình nào của các đĩa có thể nhận được từ cấu hình ban đầu sau một số bước chuyển hợp lệ*?

2. *Có cách nào hữu hiệu để nhận biết cấu hình đang xét là một trong các cấu hình nằm trên con đường tối ưu chuyển các đĩa từ cọc nguồn sang cọc đích*?

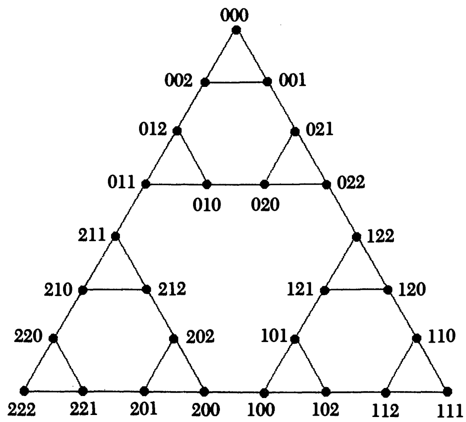
3. *Có thuật toán xác định các bước chuyển tối ưu từ một cấu hình hợp lệ bất kì về cọc đích hoặc về một cấu hình hợp lệ khác*?

Để giải các bài toán này, ta sẽ sử dụng ngôn ngữ đồ thị. Phương pháp đồ thị giải bài toán tháp Hà Nội được nghiên cứu tương đối cơ bản và chi tiết trong [7]. Mục này trình bày nội dung bài báo [7].

Đánh số các cọc là A, B, C và các đĩa, bắt đầu từ đĩa nhỏ nhất, theo thứ tự là 0, 1, 2,..., $n-1$. Một cách sắp xếp các đĩa trên ba cọc được gọi là một *cấu hình* (a configuration). Cấu hình được gọi là *hợp lệ* (legal) nếu không có đĩa to nào nằm trên đĩa nhỏ hơn. Một cấu hình hợp lệ sẽ tương ứng với một chuỗi $n-$bit $a_{n-1}...a_1a_0$ cơ số 3, trong đó $a_i \in \{0,1,2\}$ và $a_i = j$ nếu đĩa i nằm trên cọc j. Đĩa lớn nhất tương ứng với bit bên trái nhất (leftmost).

Bởi vì một tập các đĩa có thể được đặt trên các cọc chỉ bởi một cách nào đó và bởi vì có tất cả 3^n chuỗi cơ số 3 nên ta cũng có tất cả 3^n cấu hình hợp lệ trong bài toán Tháp Hà Nội ba cọc với n đĩa. Tập tất cả các chuỗi $n-$bit cơ số 3 tạo thành một không gian vectơ V_n trên $\mathbb{Z}_3$ với phép toán nhân với số thực và phép cộng bit modulo 3. Ta sẽ khai thác cấu trúc của không gian vectơ n chiều này thông qua đồng phôi của nó với $\mathbb{Z}_3^n$.)

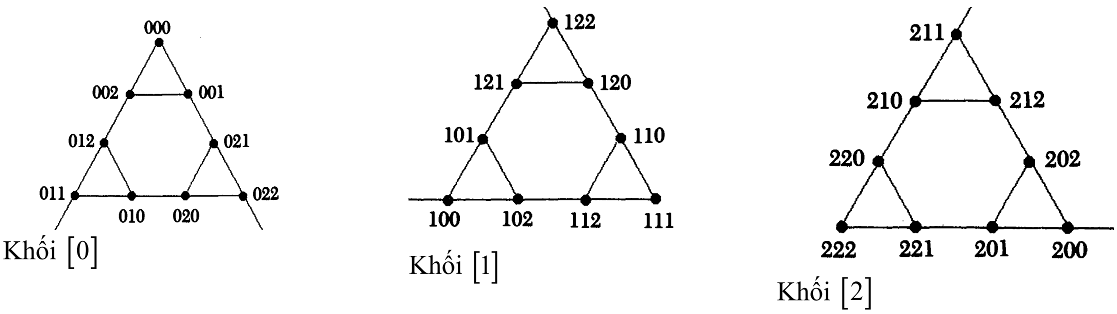
Bây giờ, ta xây dựng đồ thị H_n với các đỉnh được đánh số bởi chuỗi $n-$bit cơ số 3 ứng với các cấu hình hợp lệ trong Tháp Hà Nội với n đĩa mà hai đỉnh được gọi là *kề nhau* nếu một đỉnh có thể nhận được từ một đỉnh khác bởi một phép chuyển hợp lệ. Đồ thị H_n (lần đầu tiên nghiên cứu trong [9]) còn được gọi là *đồ thị không gian trạng thái*. Ta sẽ gọi đồ thị này là *Đồ thị Hà Nội* (Hanoi graph, [7]).



Hình 2.3.1 Đồ thị Hà Nội H_3

Trước khi khảo sát một số tính chất của đồ thị H_n, ta cần một số kí hiệu và thỏa thuận. Ta sẽ đồng nhất đỉnh với nhãn (label) của nó. Các chuỗi hằng 00…0, 11...1, và 22...2 với k bit đồng nhất sẽ được kí hiệu tương ứng là $\mathbf{0}_k, \mathbf{1}_k$ và $\mathbf{2}_k$. Nếu $k=n$ thì ta viết đơn giản là **0**, **1**, **2**. Ta cũng sẽ gọi các đỉnh này là các *đỉnh góc* (corner vertices). Mỗi đỉnh này tương ứng với một *cấu hình hoàn hảo* (perfect configuration) của Tháp Hà Nội: Tất cả các đĩa đều nằm trên một cọc theo đúng thứ tự đĩa bé ở trên. Để cho tiện, thỉnh thoảng ta cũng bỏ đi những số 0 đứng đằng trước trong chuỗi. Thí dụ, 00012 ta sẽ viết đơn giản là 12 nếu ta biết $n=5$. Với $i \in \{1,2,3\}$ ta sẽ kí hiệu $[i]$ là tập tất cả các đỉnh/các chuỗi mà bit đầu tiên (bit ở vị trí trái nhất) là i. Nghĩa là, $[i]$ là tập tất cả các đỉnh mà cấu hình tương ứng của Tháp Hà Nội có đĩa lớn nhất nằm trên cọc thứ i.

Ta cũng sẽ kí hiệu $[0],[1],[2]$ như là những *khối* (blocks) của H_n và để cho tiện, ta sẽ vẽ các khối này theo chiều kim đồng hồ (xem Hình 2.3.1 và Hình 2.3.2).



Khối $[0]$ Khối $[1]$ Khối $[2]$

Hình 2.3.2

Ta thấy rằng, mỗi khối của đồ thị H_n đồng phôi với H_{n-1} (Hình 2.3.2) và chỉ có duy nhất một cạnh nối các khối phân biệt. Thí dụ, cạnh duy nhất nối khối $[1]$ và khối $[2]$ là cạnh nối đỉnh $1\mathbf{0}_{n-1}$ với đỉnh $2\mathbf{0}_{n-1}$ (xem Hình 2.3.1 cho $n=3$). Điều này có nghĩa là chỉ có một con đường duy nhất chuyển đĩa lớn nhất khi tất cả các đĩa nhỏ hơn đã nằm trên một cọc khác. Điều quan sát này chỉ ra rằng H_n có thể được xây dựng theo thuật toán hồi qui và cho phép chúng ta chứng minh rất nhiều tính chất cơ bản của Trò chơi Tháp Hà Nội nhờ phép qui nạp toán học.

Trước tiên ta sẽ xem xét một số tính chất của đồ thị Hà Nội *không dán nhãn* (unlabelled version).

Ta nhắc lại rằng một đồ thị là *2-liên thông* (biconnected) nếu tồn tại tối thiểu hai đường khác nhau nối hai đỉnh khác nhau. Đường kính của đồ thị là khoảng cách lớn nhất giữa hai đỉnh.

Mệnh đề 2.3.1 *Với mọi số nguyên dương n, H_n là đồ thị Hamilton phẳng, 2-liên thông bậc 3^n và đường kính $d_n = 2^n - 1$ với đúng ba đỉnh bậc hai và mọi đỉnh khác bậc ba.*

Do mỗi khối của đồ thị H_n đồng phôi với H_{n-1} nên nhiều tính chất của đồ thị H_n được chứng minh nhờ qui nạp. Thí dụ, vì H_{n-1} là đồ thị phẳng 2-liên thông nên mỗi khối của H_n cũng là đồ thị phẳng 2-liên thông. Các khối này được nối với nhau bởi một cạnh duy nhất nên H_n là đồ thị phẳng, 2-liên thông.

Nhận xét rằng đường kính của H_n bằng số lần chuyển lớn nhất trong dãy chuyển tối thiểu giữa hai cấu hình hợp lệ bất kì trong Tháp Hà Nội với n đĩa. Đánh giá trên $2^n - 1$ đã được chứng minh trong [7]. Công thức $L(n) = 2^n - 1$ cho thấy đánh giá trên $2^n - 1$ là đạt được. Do đó đường kính của đồ thị là $d_n = 2^n - 1$.

Để chứng minh H_n là đồ thị Hamilton, ta cần Bổ đề sau.

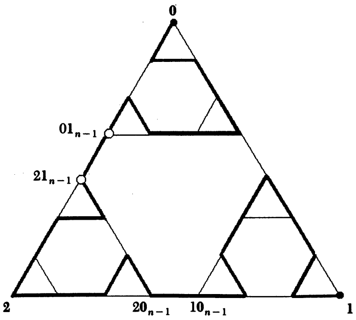
Bổ đề 2.3.1 *Với mọi số nguyên dương n, tồn tại đường đi Hamilton trong H_n giữa các cặp đỉnh góc phân biệt.*

Chứng minh Không hạn chế tổng quát, ta có thể xét hai cặp đỉnh góc phân biệt là đỉnh **0** và đỉnh **1**.

Với $n=1$, kết quả là hiển nhiên.

Giả sử kết quả đúng cho H_{n-1}, ta xét đồ thị H_n. Do mỗi khối của H_n là một bản copy (đồng phôi) với H_{n-1}, nên theo qui nạp, trong khối $[0]$, ta có thể tìm được đường Hamilton nối **0**=0**0**$_{n-1}$ với 0**1**$_{n-1}$. Trong khối $[2]$, ta có thể tìm được đường Hamilton nối 2**1**$_{n-1}$ với 2**0**$_{n-1}$ và đường Hamilton nối 1**0**$_{n-1}$ với 11$_{n-1}$=**1**. trong khối $[1]$. Ghép ba đường này lại với nhau, ta được đường Hamilton cần tìm trong đồ thị H_n nối đỉnh với đỉnh **0** và đỉnh **1** (xem Hình 2.3.3).

Hoàn toàn tương tự Bổ đề, ta có thể chứng minh đồ thị H_n là đồ thị Hamilton: Theo Bổ đề, trong khối $[0]$, ta có thể xây dựng được đường Hamilton nối 0=0**0**$_{n-1}$ với 0**2**$_{n-1}$. Trong khối $[1]$, ta có thể tìm được đường Hamilton nối 1**2**$_{n-1}$ với 1**0**$_{n-1}$ và đường Hamilton nối 2**0**$_{n-1}$ với 2**1**$_{n-1}$ trong khối $[2]$.



Hình 2.3.3

Ghép ba đường này lại với nhau, ta được đường Hamilton cần tìm trong đồ thị H_n (Hình 2.3.3).

2.3.2 Tự đẳng cấu và đối xứng

Đồ thị Hà Nội H_n có tính chất đối xứng bậc cao (mà ta có thể vẽ và mô tả được). Hơn nữa, nó cũng có tính đối xứng bậc cao như là một đối tượng hình học. Ta có thể mô tả những điều này một cách hiển qua ngôn ngữ các đỉnh dán nhãn của đồ thị.

Các tự đẳng cấu của H_n là các song ánh bảo toàn tính liền kề (adjacency-preserving) của đồ thị vào chính nó. Dễ dàng thấy rằng ánh xạ này hoàn toàn được xác định bởi tác động của nó lên các đỉnh **0** và $\mathbf{1} = \mathbf{0}_{n-1}1$. Bởi vì có ba ảnh của **0** là **0**, **1** và **2**, và có hai khả năng ảnh của 1 cho mỗi ảnh này, nên ta có tất cả 6 tự đẳng cấu phân biệt của H_n. Xác định các đẳng cấu R với R(**0**)=**1**, R(**0** $_{n-1}$1)=**1** $_{n-1}$2 và F với F(**0**)=**0**, F(**1**)=**2**, dễ dàng kiểm tra được $FR \neq RF$. Thật vậy, ta có $FR(\mathbf{0}) = F(\mathbf{1}) = \mathbf{2}$, trong khi đó $RF(\mathbf{0}) = R(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$. Do đó nhóm các tự đẳng cấu $A(H_n)$ của H_n không phải là nhóm Abel và do đó $A(H_n) \cong D_6$, trong đó D_6 là nhóm bậc 6 gồm 6 đỉnh.

Nếu ta ánh xạ H_n lên mặt phẳng bằng cách vẽ lưới các tam giác đều, thì D_6 tác động trên H_n như là nhóm đối xứng với R là phép quay và F là phép phản xạ. Rõ ràng hơn, nếu x là đỉnh của H_n và ta đồng nhất x với nhãn của nó, ta thấy rằng $R(x) = \mathbf{1} + x$ và $F(x) = 2x$ (kết quả của mọi phép toán được lấy theo phép tính bit modulo 3, hoặc tương đương, là các phép toán vectơ trên $\mathbb{Z}_3$).

Nhận xét rằng, theo ngôn ngữ cấu hình trong bài toán Tháp Hà Nội, R tương ứng với cách dán nhãn quay vòng của ba cọc, trong khi đó F tương ứng với thay đổi bên trong các nhãn trên cọc cuối và cọc trung gian.

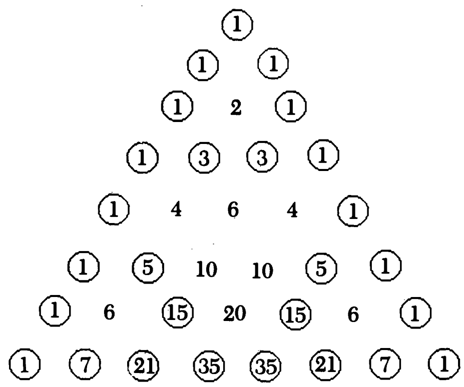
Đồ thị Hà Nội là đồ thị dạng "đối xứng một phần", tức là chuyển động đối xứng trên từng khối. Bởi vì mỗi khối của H_n là một bản copy của H_{n-1}, nên ta có thể ánh xạ một khối vào một khối khác nhờ phép dịch chuyển. Phép dịch chuyển theo chiều kim đồng hồ nhận được nhờ ánh xạ $T(x) = x +$ **12**$_{n-1}$, trong khi đó ánh xạ ngược $T^{-1}(x) = x +$ **21**$_{n-1}$ cho chuyển động ngược kim đồng hồ. Ta sẽ chứng minh rằng T (và do đó T^{-1}) là phép bảo toàn tính gần kề trên các khối (xem Bổ đề 2 dưới đây).

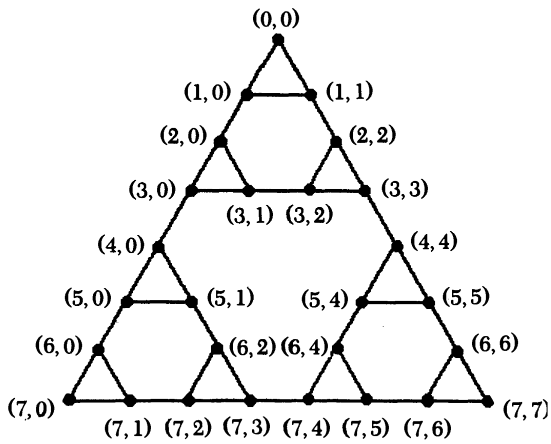
Như vậy, ta đã có công cụ đồ thị biểu diễn bài toán Tháp Hà Nội. Nhưng làm cách nào để giải các bài toán Tháp Hà Nội nhờ công cụ đồ thị một cách hiển?

2.3.3 Tương ứng Lucas

Khi n lớn, có thể thấy rằng H_n trở thành một fractal với sự tương tự một cách đáng kinh ngạc với thảm Sierpinski (Sierpiński gasket) và tam giác Pascal modulo 2, tất cả chúng đều có số đo fractal $\log_2 3$.

Ta sẽ xác định một họ đồ thị khác như sau: Đồ thị P_n có các đỉnh tương ứng với hệ số lẻ của nhị thức C_r^k, $0 \le r < 2^n, 0 \le k \le r$ với đỉnh kề được xác định bởi số kề (hàng ngang hoặc đường chéo) trong tam giác Pascal. Đánh dấu các đỉnh với cặp sắp thứ tự: (r,k) là đỉnh nếu $C_r^k \equiv 1 \pmod 2$ (xem Hình 2.3.4).





Hình 2.3.4

Đồ thị P_n được xây dựng một cách kiến thiết từ ba bản copy của P_{n-1}. Chúng ta sẽ gọi ba bản copy này là những *khối* (blocks) của P_n. Một cách hình thức, ba khối này là các đồ thị con của P_n được tạo ra bởi tập các đỉnh sau:

$$\{(r,k) | 0 \le r < 2^{n-1}, 0 \le k \le r\}, \{(r,k) | 2^{n-1} \le r < 2^n, 2^{n-1} \le k \le r\}$$

và

$$\{(r,k) | 2^{n-1} \le r < 2^n, 2^{n-1} \le k \le r - 2^{n-1}\}.$$

Tương tự như H_n, ta sẽ kí hiệu ba khối này tương ứng là $[0], [1], [2]$. Mặc dù ta sử dụng cùng một kí hiệu này cho các khối của cả hai đồ thị, nhưng ý nghĩa của mỗi kí hiệu sẽ rõ ràng trong từng trường hợp cụ thể.

Ta cũng có thể xác định ánh xạ chuyển $\hat{T}$ trên các khối của P_n. Ánh xạ chuyển đỉnh tới đỉnh tương ứng trong khối tiếp sau theo hướng cùng chiều kim đồng hồ. Nó được xác định bởi

$$\hat{T}\left((r,k)\right)=\begin{cases}\left(r+2^{n-1},k+2^{n-1}\right), & (r,k)\in[0];\\ \left(r,k-2^{n-1}\right), & (r,k)\in[1];\\ \left(r-2^{n-1},k\right), & (r,k)\in[2].\end{cases} \tag{2.3.1}$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng, $\hat{T}$ có ánh xạ ngược là $\hat{T}^{-1}=\hat{T}^{2}$ và $\hat{T}$ là ánh xạ bảo toàn tính gần kề.

Từ các đồ thị của H_n và P_n cho những giá trị nhỏ của n và từ nhận xét rằng, với mọi số nguyên dương n, H_n và P_n có 3^n đỉnh, gợi ý ta đi đến giả thuyết rằng H_n và P_n là những đồ thị đồng phôi. Ta sẽ chứng minh điều này. Tuy nhiên, trước tiên ta đưa vào một số kí hiệu sau.

Với $i\ge 0$, kí hiệu α_i là chuỗi $1\mathbf{2}_i$ trong cơ số 3. Như vậy, $\left\{\alpha_i \middle| i\ge 0\right\}=\{1,12,122,1222,...\}$. Với mỗi số nguyên dương cố định n, đặt $\beta_i=2^{n+i}\alpha_i\left(\bmod 3\right)$ và $\beta=\left\{\beta_i \middle| 0\le i<n\right\}$, , tức là $\beta=\{1,21,122,...,21...1\}$ khi n chẵn và $\beta=\{2,12,211,...,21...1\}$ khi n lẻ.

Nhận xét rằng β là cơ sở của không gian vectơ V_n.

Bây giờ chúng ta xác định các ánh xạ ρ và δ từ V_n vào $\left\{0,1,2,...,2^n-1\right\}$ và ánh xạ $\lambda:V_n\to V_n$. Bằng cách đồng nhất đỉnh của H_n với nhãn của nó trong V_n, ta có thể coi những ánh xạ này là ánh xạ của $V\left(H_n\right)$, tập các đỉnh của H_n. Đúng ra ta phải viết ρ_n, δ_n và λ_n, nhưng để cho gọn, ta sẽ chỉ viết ρ, δ và λ.

Đặt $a=a_{n-1}\beta_{n-1}+...+a_1\beta_1+a_0\beta_0,\ a_i\in\mathbb{Z}_3$. Xác định

$$\rho(a)=a_{n-1}^2 2^{n-1}+...+a_1^2.2+a_0^2.$$

Ta nhận thấy rằng $a_i^2\equiv 0\left(\bmod 3\right)$ khi và chỉ khi $a_i=0$ và trong các trường hợp khác ($a_i\in\{1,2\}$) thì $a_i^2\equiv 1\left(\bmod 3\right)$. Do đó hiệu quả của việc sử dụng ρ chính là ở chỗ: ta có thể thay thế các chuỗi trong cơ số 3 bởi chuỗi trong cơ số 2 (1 và 2 được thay bởi 1, 12 và 21 được thay bởi 10, 122 và 211 được thay bởi 100, v. v.,...) và khi ấy giá trị của kết quả sẽ là các số nguyên trong cơ số 10. Nhớ lại rằng, $\rho(a)$ cho số *dòng* của đỉnh a trong H_n và tính được từ dòng 0 chứa đỉnh góc $\mathbf{0}$. Kí hiệu

$$\lambda(a)=a_{n-1}^2\beta_{n-1}+...+a_1^2\beta_1+a_0^2\beta_0.$$

Nhận xét rằng $\lambda(a)$ chuyển đỉnh trái nhất (leftmost) thành dòng chứa a.

Bây giờ ta xác định $\delta(a)=\rho\left(a-\lambda(a)\right)$, trong đó phép thay thế, để cho tiện, được biến đổi trong V_n. Nếu ta chất H_n lên lưới tam giác thì $\delta(a)$ sẽ biểu diễn sự *đổi chỗ* (displacement) của a từ đỉnh trái nhất thành dòng của nó.

Cuối cùng ta xác định $\varphi(a)=\left(\rho(a),\delta(a)\right)$. Ta có thể chứng minh rằng φ là song ánh, bảo toàn tình gần kề từ H_n vào P_n. Nói cách khác, ta có Định lí sau.

Định lí 2.3.1 *Với mọi số nguyên dương* n, $\varphi: H_n \to P_n$ *là đồng phôi giữa hai đồ thị.*

Ta sẽ kiến giải φ (cùng với nghịch đảo của nó) như là *tương ứng Lucas* (Lucas Correspondence). Để giải quyết P_n, ta sẽ sử dụng Định lí Lucas về các hệ số nhị thức được modulo theo số nguyên tố.

Bổ đề 2.3.2 (Định lí Lucas) *Giả sử* p *là số nguyên tố và giả sử*

$$r = r_m p^m + \ldots + r_1 p + r_0 \quad \left(0 \le r_i < p\right),$$
$$k = k_m p^m + \ldots + k_1 p + k_0 \quad \left(0 \le k_i < p\right).$$

Khi ấy $C_r^k = \prod_{i=0}^{m} C_{r_i}^{k_i} \left(\operatorname{mod} p\right)$.

Chúng ta chỉ quan tâm trường hợp $p = 2$, do đó $r_i, k_i \in \{0,1\}$ với mọi i. Như một hệ quả trực tiếp, ta thấy rằng $C_r^k \equiv 1\left(\operatorname{mod} 2\right)$ nếu và chỉ nếu $k_i \le r_i$ với mọi i. Như vậy, ta có một kết quả quen thuộc là, với mỗi r cố định, số các hệ số lẻ của hệ thức C_r^k bằng $2^{b(r)}$, với $b(r)$ là số các số 1 trong biểu diễn cơ số 2 của r.

Ta cần ba Bổ đề phụ sau. Nhắc lại là T là ánh xạ chuyển các đỉnh của H_n thành một khối theo chiều kim đồng hồ.

Bổ đề 2.3.3 T *là ánh xạ bảo toàn tính liền kề trên các khối.*

Chứng minh Xét $a = a_{n-1}a_1a_0 \in V\left(H_n\right)$. Bit đầu tiên a_{n-1} tương ứng với đĩa lớn nhất và xác định khối chứa a. Bởi vì $T(a) = a + 1\mathbf{2}_{n-1}$ nên T tác động như một phép quay R^{-1} trên $a_{n-2}\ldots a_1a_0$. Nhưng R^{-1} là ánh xạ bảo toàn tính liền kề trên H_n và trong phạm vi khối trong H_n, các đỉnh kề cùng có các bit đầu tiên như nhau. (Trong ngôn ngữ cấu hình của Tháp Hà Nội, T chuyển đĩa lớn nhất trên một cọc theo chiều kim đồng hồ và tất cả các đĩa khác trên một cọc khác ngược chiều kim đồng hồ. Do đó một cấu hình có thể nhận được từ một cấu hình khác bằng cách chuyển các đĩa, khác với đĩa lớn nhất, nếu và chỉ nếu, điều tương tự cũng đúng cho các cấu hình kết quả khi ta áp dụng ánh xạ T). Do đó T là ánh xạ bảo toàn tính liền kề trên các khối.

Ta xác định ánh xạ $\sigma: H_n \to P_n$ *bảo toàn khối* (block-preserving) nếu $a \in [i]$ với mọi $i \in \{0,1,2\}$ trong H_n nếu và chỉ nếu $\sigma(a) \in [i]$ trong P_n.

Bổ đề 2.3.4 φ *là ánh xạ bảo toàn khối.*

Chứng minh Giả sử $a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \beta_i \in V\left(H_n\right)$.

Trường hợp 1. $a \in [0]$ nếu và chỉ nếu $a_{n-1} = 0$. Trong trường hợp này

$$\rho(a) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 2^i \le 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1.$$

Do đó theo định nghĩa $\varphi(a) = \left(\rho(a), \delta(a)\right) \in [0]$.

Trường hợp 2. $a \in [1]$ nếu và chỉ nếu $a_{n-1} = 2$, do đó $2^{n-1} \le \rho(a) \le 2^n - 1$.

Ta cũng có $\lambda(a)_{n-1} = 2^2 \equiv 1\left(\operatorname{mod} 3\right)$ và do đó $\left(a - \lambda(a)\right)_{n-1} = 2 - 1 = 1$.

Suy ra $\delta(a)=\rho(a-\lambda(a))\geq 2^{n-1}$ và do đó $\varphi(a)\in[1]$.

Trường hợp 3. $a\in[2]$ nếu và chỉ nếu $a_{n-1}=1$, do đó một lần nữa chúng ta có $2^{n-1}\leq\rho(a)\leq 2^n-1$. Nhưng ở đây $\lambda(a)_{n-1}=1^2\equiv 1(\text{mod}\,3)$ và do đó $(a-\lambda(a))_{n-1}=1-1=0$.

Suy ra $\delta(a)=\rho(a-\lambda(a))<2^{n-1}$ và do đó $\varphi(a)\in[2]$.

Ba khẳng định ngược lại dễ dàng suy ra ngay.

Kết quả này sẽ được làm mạnh lên một cách đáng kể trong Định lí dưới đây, trong đó ta sẽ chứng minh rằng thật ra φ là ánh xạ bảo toàn tính liền kề. Bổ đề sau đây chỉ ra rằng tương ứng Lucas φ là tương hợp với ánh xạ chuyển T và $\hat{T}$ của H_n và P_n, tương ứng. Định nghĩa hình thức của $\hat{T}$ đã được cho trong (2.3.1).

Bổ đề 2.3.5 $\varphi\circ T=\hat{T}\circ\varphi$.

Chứng minh Giả sử $a=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\beta_i\in V(H_n), a_i\in\mathbb{Z}_3$ và giả sử $a\in[0]$. Khi ấy, theo Bổ đề 2.3.4, $\varphi(a)\in[0]$ trong P_n và ta có

$$\hat{T}\circ\varphi(a)=\hat{T}((\rho(a),\delta(a)))=((\rho(a)+2^{n-1},\delta(a)+2^{n-1})).$$

Mặt khác, $a_{n-1}=0$ nên $a+1\mathbf{2}_{n-1}=a+2\beta_{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\beta_i+2\beta_{n-1}$. Do đó

$$\rho(a+1\mathbf{2}_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1}a_i^2 2^i=\sum_{i=0}^{n-2}a_i^2 2^i+2^{n-1}=\rho(a)+2^{n-1}.$$

Ta cũng có

$$\lambda(a+1\mathbf{2}_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1}a_i^2\beta_i=\sum_{i=0}^{n-2}a_i^2\beta_i+\beta_{n-1}=\lambda(a)+\beta_{n-1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\delta(a+1\mathbf{2}_{n-1})&=\rho((a+1\mathbf{2}_{n-1})-\lambda(a+1\mathbf{2}_{n-1}))=\rho((a+2\beta_{n-1})-(\lambda(a)+\beta_{n-1}))\\&=\rho((a)-\lambda(a))+2^{n-1}=\delta(a)+2^{n-1}.\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}\varphi\circ T(a)&=\varphi(a+1\mathbf{2}_{n-1})=(\rho(a+1\mathbf{2}_{n-1}),\delta(a+1\mathbf{2}_{n-1}))\\&=(\rho(a)+2^{n-1},\delta(a)+2^{n-1})=\hat{T}\circ\varphi(a).\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự cho trường hợp $a\in[1]$ hoặc $a\in[2]$.

Chứng minh Định lí 2.3.1 Giả sử β là cơ sở của V_n được xác định như trên, và $a\in V(H_n)$. Ta viết

$$a=a_{n-1}\beta_{n-1}+\ldots+a_1\beta_1+a_0\beta_0,\ a_i\in\mathbb{Z}_3.$$

Đầu tiên chúng ta phải chứng minh rằng $\varphi(a)\in V(P_n)$.

Từ định nghĩa λ ta có

$$\lambda(a)_i = a_i^2 \equiv \begin{cases} 0, \\ 1, \\ 1 \end{cases} \pmod 3 \text{ nếu } a_i = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ 2. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Do đó

$$(a - \lambda(a))_i = a_i - \lambda(a)_i = \begin{cases} 0, \\ 0, \\ 1 \end{cases} \text{ nếu } a_i = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ 2. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Bây giờ, do

$$\rho(a) = a_{n-1}^2 2^{n-1} + \ldots + a_1^2 2 + a_0^2$$

và

$$\delta(a) = \rho(a - \lambda(a)) = \left(a_{n-1} - a_{n-1}^2\right)^2 2^{n-1} + \ldots + \left(a_1 - a_1^2\right)^2 2 + \left(a_0 - a_0^2\right)$$

nên theo Định lí Lucas, sử dụng (2.3.2) và (2.3.3) ta có

$$\binom{\rho(a)}{\delta(a)} \equiv \prod_{i=0}^{n-1} \binom{a_i^2}{\left(a_i - a_i^2\right)} \pmod 2 \equiv 1 \pmod 2.$$

Như vậy, $\varphi(a) = (\rho(a), \delta(a)) \in V(P_n)$.

Để chỉ ra rằng φ là ánh xạ 1-1, ta lấy $a, b \in V(H_n), a \neq b$. Giả sử $a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \beta_i$ và $b = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \beta_i$. Nếu $\rho(a) \neq \rho(b)$ thì $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ và ta có điều phải chứng minh. Giả thiết rằng $\rho(a) = \rho(b)$. Khi ấy $\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 2^i$ hay, trong biểu diễn cơ số 2 của $\rho(a)$ và $\rho(b)$, ta có

$$\left(a_{n-1}^2 \ldots a_1^2 a_0^2\right) = \left(b_{n-1}^2 \ldots b_1^2 b_0^2\right).$$

Từ đây suy ra $a_i^2 = b_i^2$ với mọi $1 \leq i \leq n-1$. Như vậy, với mỗi i hoặc $a_i = b_i$ hoặc $a_i = 2b_i$ trong $\mathbb{Z}_3$. Vì $a \neq b$ nên tồn tại một chỉ số j sao cho $a_j \neq b_j$. Do đó, đổi chỗ a và b, nếu cần thiết, ta có thể giả thiết rằng $a_j = 1$ và $b_j = 2$.

Vì $\lambda(a)_j = a_j^2 = 1$ và $\lambda(b)_j = b_j^2 = 1$ nên $(a - \lambda(a))_j = a_j - a_j^2 = 0$, trong khi đó $(b - \lambda(b))_j = b_j - b_j^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Nhưng $(a - \lambda(a))_j^2 = 0$ và $(b - \lambda(b))_j^2 = 1$ tương ứng chính là các bit thứ j trong biểu diễn cơ số 2 của $\delta(a)$ và $\delta(b)$ nên $\delta(a) \neq \delta(b)$. Vậy $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ hay φ là ánh xạ 1-1.

Do $|V(H_n)| = |V(P_n)| = 3^n$ theo nhận xét ở trên nên φ là ánh xạ tràn. Nhưng ta cũng có thể chứng minh trực tiếp φ là ánh xạ tràn và do đó ta lại nhận được đẳng thức $|V(H_n)| = |V(P_n)| = 3^n$ như một hệ quả. Giả sử $(r, k) \in P_n$ (nghĩa là $C_r^k \equiv 1 \pmod 2$) và giả sử

$$r = \sum_{i=0}^{n-1} r_i 2^i, \quad k = \sum_{i=0}^{n-1} k_i 2^i,$$

trong đó $r_i, k_i \in \{0,1\}$ với $0 \le i \le n-1$ và, theo Định lí Lucas, $C_{r_i}^{k_i} \equiv 1 \pmod 2$, $0 \le i \le n-1$.

Với số nguyên không âm m với biểu diễn $(m_t \ldots m_1 m_0)$ trong cơ số 2 ta xác định

$$\tau(m) = \sum_{i=0}^{t} m_i \beta_i.$$

Đặt

$$a = \tau(r) + \tau(k) = \sum_{i=0}^{n-1} (r_i + k_i) \beta_i,$$

trong đó, như thường lệ, phép cộng được hiểu theo nghĩa cộng bit modulo 3.

Ta khẳng định rằng, $\varphi(a) = (r,k)$. Đầu tiên ta nhận thấy rằng, theo Định lí Lucas,

$$k_i = 0 \text{ nếu } r_i = 0;\ k_i = 0 \text{ hoặc } 1 \text{ nếu } r_i = 1.$$

Do đó,

$$a_i = (r_i + k_i) \pmod 3 = 0 \text{ nếu } r_i = 0;\ a_i = 0 \text{ hoặc } 2 \text{ nếu } r_i = 1.$$

Suy ra

$$a_i^2 = 0 \text{ nếu } r_i = 0;\ a_i^2 = 1 \text{ nếu } r_i = 1. \text{ Vậy } a_i^2 = r_i.$$

Chứng tỏ

$$\rho(a) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} r_i 2^i = r.$$

Tiếp theo, ta nhận thấy,

$$\lambda(a) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \beta_i = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \beta_i = \tau(r).$$

Do đó, sử dụng định nghĩa của a ta có,

$$\rho(a - \lambda(a)) = \rho(a - \tau(r)) = \rho(\tau(k)) = k.$$

Đẳng thức cuối suy ra từ nhận xét rằng ánh xạ hợp $\rho \circ \tau$ là ánh xạ đồng nhất trên tập $\{0,1,2,\ldots,2^n - 1\}$. Từ đây ta có,

$$\varphi(a) = (\rho(a), \delta(a)) = (\rho(a), \rho(a - \lambda(a))) = (r,k).$$

Chứng tỏ φ là ánh xạ tràn.

Cuối cùng, chúng ta cần phải chứng minh rằng φ là ánh xạ bảo toàn tính liền kề. nghĩa là a liền kề với b trong H_n nếu và chỉ nếu $\varphi(a)$ liền kề với $\varphi(b)$ trong P_n. Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp theo n. Với $n = 1$ khẳng định là hiển nhiên. Giả thiết rằng khẳng định đúng với mọi $n < m$. Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n = m$. Giả sử a liền kề với b trong H_m. Nếu a và b nằm trong cùng một khối thì chúng là các đỉnh liền kề trong bản copy đồng phôi của H_{m-1}. Cụ thể hơn, ta có $T^i(a)$ liền kề với $T^i(b)$ với $i \in \{0,1,2\}$ nào đó. Theo giả thiết qui nạp, $\varphi(T^i(a))$ là liền kề với $\varphi(T^i(b))$ trong P_{m-1}. Nhưng o $\hat{T}$ là ánh xạ bảo toàn tính liền kề nên theo Bổ đề 4, $\hat{T}^i \varphi(a)$ liền kề với $\hat{T}^i \varphi(b)$. Từ đây ta suy ra $\varphi(a)$ liền kề với $\varphi(b)$.

Nếu a và b nằm trong hai khối khác nhau nhưng chúng liền kề, thì chỉ có thể có ba khả năng sau đây: (a,b) là $\{0\mathbf{1}_{m-1}, 2\mathbf{1}_{m-1}\}$, $\{0\mathbf{2}_{m-1}, 1\mathbf{2}_{m-1}\}$ hoặc $\{1\mathbf{0}_{m-1}, 2\mathbf{0}_{m-1}\}$. Nhưng dễ dàng tính trực tiếp được rằng $\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ tương ứng là

$$\{(2^{m-1}-1,0),(2^{m-1},0)\},\ \{(2^{m-1}-1,2^{m-1}-1),(2^{m-1},2^{m-1})\},$$

hoặc

$$\{(2^{m}-1,2^{m-1}-1),(2^{m},2^{m-1})\}.$$

Như vậy, rõ ràng, $\varphi(a)$ liền kề với $\varphi(b)$ trong mọi trường hợp.

Bây giờ ta giả sử rằng a và b không liền kề. Nếu chúng nằm trên cùng một khối thì, theo qui nạp, tương tự như ở trên, $\varphi(a)$ không liền kề với $\varphi(b)$. Mặt khác, nếu a và b nằm trên các khối khác nhau của H_m, thì theo Bổ đề 3, $\varphi(a)$ và $\varphi(b)$ nằm trên các khối khác nhau của P_m. Vì φ là ánh xạ 1-1 nên $\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ không thể là một trong ba cặp tương ứng với các cạnh nối các khối. Do đó $\varphi(a)$ và $\varphi(b)$ cũng không thể liền kề trong trường hợp này.

Định lí được chứng minh hoàn toàn.

Tương ứng Lucas cho phép chúng ta có các thông tin liên quan giữa H_n và P_n. Dưới đây là các hệ quả trực tiếp từ chứng minh Định lí trên.

Hệ quả 2.3.1 *Với mọi số nguyên dương n, $|V(P_n)| = 3^n$.*

Hệ quả 2.3.2 *Số cấu hình hợp lệ trong bài toán Tháp Hà Nội với khoảng cách từ trạng thái hoàn hảo bằng r là $2^{b(r)}$, trong đó $b(r)$ là số các chữ số 1 trong biểu diễn cơ số 2 của r.*

Chứng minh Điều này suy ra trực tiếp từ các bình luận sau Định lí Lucas và từ tính chất đối xứng (xem thêm Bài toán 2.3.1 dưới đây).

Ta có thể xác định, khi nào thì một cấu hình đã cho nằm trên dãy các bước chuyển duy nhất giữa các trạng thái hoàn hảo. Điều này cũng chính là bài toán xác định khi nào đỉnh đã cho nằm trên "biên" của H_n. Sử dụng tương ứng Lucas, bài toán này gần như là hiển nhiên.

Hệ quả 2.3.3 *Trong H_n, đỉnh nằm trên đường ngắn nhất giữa* **0** *và* **2**, **0** *và* **1**, *hoặc* **1** *và* **2** *khi và chỉ khi, $\delta(a) = 0$, $\delta(a) = \rho(a)$ hoặc $\rho(a) = 2^n - 1$, tương ứng.*

2.3.4 Giải bài toán Tháp Hà Nội nhờ đồ thị

Rất nhiều bài toán trong Trò chơi Tháp Hà Nội có thể phát biểu như là các bài toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị H_n. Các bài toán này có thể giải hiệu quả bằng cách sử dụng tương ứng Lucas. Ta cũng có thể sử dụng tính đối xứng của đồ thị Hà Nội. Trong các bài toán dưới đây, nếu a và b là các đỉnh của đồ thị G, $d(a,b)$ là khoảng cách từ a tới b (độ dài đường ngắn nhất từ a tới b trong G).

Bài toán 2.3.1 ***Bài toán Tháp Hà Nội với cấu hình bất kì***

Bài toán tìm số bước chuyển ít nhất cần thiết để chuyển các đĩa từ một cấu hình hợp lệ bất kì sang cọc đích nhờ sử dụng các qui tắc đã cho. Trong mô hình của chúng ta, điều này dẫn tới bài toán tìm các khoảng cách $d(a,\mathbf{0})$, $d(a,\mathbf{1})$, và/hoặc $d(a,\mathbf{2})$ với a là một đỉnh bất kì của H_n.

Bằng qui nạp, dễ dàng chỉ ra rằng, trong P_n, mọi đỉnh khác đỉnh $(0,0)$ là đỉnh kề với đỉnh trong hàng phía trên. Từ đây suy ra rằng khoảng cách đến $(0,0)$ từ một đỉnh bất kì trong hàng r bằng chính r. Do đó, sử dụng tương ứng Lucas, ta có $d(a,\mathbf{0}) = \rho(a)$ với mọi đỉnh a của H_n và, sử dụng tính đối xứng, ta có

$$d(a,\mathbf{1}) = d(a+\mathbf{2},\mathbf{0}) = \rho(a+\mathbf{2}) \text{ và } d(a,\mathbf{2}) = d(a+\mathbf{1},\mathbf{0}) = \rho(a+\mathbf{1}).$$

Ta cũng nhận được đường ngắn nhất tương ứng trong mỗi trường hợp (nghĩa là, dãy các vị trí trung gian của Tháp Hà Nội giữa cấu hình ban đầu và cấu hình đích). Ta bắt đầu từ **0** **t**rên đồ thị H_n. Giả sử i thay đổi từ $n-1$ đến 0. Ta kiểm tra biểu diễn cơ số 2 của $\rho(a)$ và $\delta(a)$. Nếu chữ số thứ i của $\rho(a)$ là 1, thì ta biết rằng, theo Định lí Lucas, chữ số tương ứng của $\delta(a)$ là 0 hoặc là 1. Nếu chữ số thứ i của $\rho(a)$ là 0 thì chuyển 2^i đỉnh sang trái, và nếu chữ số thứ i của $\rho(a)$ là 1 thì chuyển 2^i đỉnh sang phải (các cạnh nằm ngang không sử dụng). Điều này cho đường ngắn nhất từ **0** đến a; Đường ngược nó cho nghiệm của bài toán Tháp Hà Nội tổng quát.

Thí dụ 2.3.1 Xét trường hợp $n=5$ và $a=20201$. Ta tính

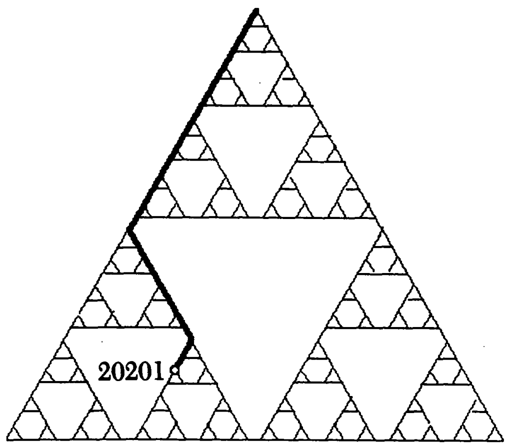
$$20201 = 21111 + 2111 + 12 \pmod 3.$$

Do đó, $20201 = \beta_4 + 2\beta_3 + \beta_1$.

Vì vậy biểu diễn cơ số 2 của $\rho(20201)$ là 11010. Chuyển sang hệ đếm cơ số 10, ta có $\rho(20201) = 26$, chính là khoảng cách từ 20201 đến 00000.

Biểu diễn cơ số 2 của $\delta(20201)$ nhận được bằng cách đặt chữ số thứ i trong cơ số 2 của $\rho(20201)$ từ hệ số β_i (và sau đó bình phương, điều này không thay đổi kết quả vì $0^2=0$ và $1^2=1$). Do đó biểu diễn cơ số hai của $\delta(20201)$ là 01000 sao cho $\delta(20201)=8$.

Đường ngắn nhất từ **0** đến a lần lượt đi qua 16 đỉnh trái, 8 đỉnh phải và 2 đỉnh trái (Hình 2.3.5).



Hình 2.3.5

Thí dụ 2.3.2 Thí dụ dưới đây tổng quát hóa trò chơi Tháp Hà Nội thành trò chơi Tháp Hà Nội với các đĩa màu. Xét tập $3n$ đĩa màu đỏ, trắng, xanh với n đĩa mỗi màu. Lúc đầu tất cả các đĩa đều nằm trên cọc 0. Bắt đầu từ ba đĩa nhỏ nhất. Các đĩa được tô màu thứ tự là: đỏ, trắng, xanh, đỏ, trắng, xanh,…, cho tới đĩa cuối cùng màu xanh. Ta phải tìm số bước chuyển ít nhất để các đĩa màu đỏ nằm hợp lệ trên đĩa 0, màu trắng trên đĩa 1 và màu xanh trên đĩa 2.
Đây cũng chính là bài toán xác định $d(\mathbf{0},a)$ theo $n,$ trong đó $a = 210210...$

Ta tính:

Nếu n chẵn thì
$$\begin{array}{r} 210210...210 \\ = \ 211111...111 \\ +2111...111 \\ +21...111 \\ .... \\ +21 \end{array}$$

Nếu n lẻ thì
$$\begin{array}{r} 210210...210 \\ = \ 211111...111 \\ +2111...111 \\ +21...111 \\ .... \\ +2. \end{array}$$

Do đó $\rho(a)$ có biểu diễn trong hệ cơ số 2 là 1010…10 trong trường hợp n chẵn và 1010…101 trong trường hợp n lẻ. Chuyển về cơ số 10 ta được:

$$\rho(a) = 2 + 8 + ... + 2^{3n-1} = \frac{2}{3}\left(2^{3n} - 1\right) \text{ khi } n \text{ chẵn và}$$

$$\rho(a) = 1 + 4 + ... + 2^{3n-1} = \frac{1}{3}\left(2^{3n+1} - 1\right) \text{ khi } n \text{ lẻ.}$$

Đây chính là lời giải. Ta có thể chứng minh được rằng tồn tại cấu hình với các đĩa đỏ trên một cọc, các đĩa trắng trên cọc khác và các đĩa xanh trên cọc thứ ba, khoảng cách của chúng đến cấu hình ban đầu là $2^{3n} - 1$ lần chuyển, và điều này không phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của n.

Bài toán 2.3.2 Đánh giá trung bình số bước chuyển

Kí hiệu E_n là khoảng cách trung bình từ **0** tới đỉnh và $S_n = \sum\left\{d\left(a,\mathbf{0}\right) \middle| a \in H_n\right\}$, ta nhận được công thức truy hồi sau đây:

$$S_n = 3S_{n-1} + 2.3^{n-1}.2^{n-1}$$

(Ở đây số hạng cuối xuất hiện từ việc chuyển mỗi đỉnh trong khối $[1]$ và $[2]$ 2^{n-1} đỉnh hướng lên trên và do đó nó tương ứng với đỉnh trong khối $[0]$. Ta có

$$E_n = \frac{S_n}{3^n} = \frac{S_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3}2^{n-1} = E_{n-1} + \frac{2}{3}2^{n-1}.$$

Với điều kiện ban đầu $E_0 = 0,$ dễ dàng chứng minh được $E_n = \frac{2}{3}\left(2^n - 1\right).$

Thật vậy,

$$E_{n+1} = E_n + \frac{2}{3}2^n = \frac{2}{3}\left(2^n - 1\right) + \frac{2}{3}2^n = \frac{2}{3}2^{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(2^{n+1} - 1\right).$$

Nói cách khác, số trung bình các chuyển động đòi hỏi chuyển (tối ưu) các đĩa từ một cấu hình chọn ngẫu nhiên ban đầu đến cấu hình hoàn hảo trên cọc đích bằng $\frac{2}{3}$ số chuyển động đòi hỏi theo nghiệm tối ưu $L_n = 2^n - 1$ trong bài toán Tháp Hà Nội cổ điển.

Cố định đỉnh/cấu hình a và tính khoảng cách trung bình/số chuyển động $A_n(a)$ đến đỉnh góc/cấu hình hoàn hảo chọn ngẫu nhiên. Rõ ràng

$$\begin{aligned} A_n(a) &= \frac{1}{3}\left(d(a,\mathbf{0}) + d(a,\mathbf{1}) + d(a,\mathbf{2})\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(d(a,\mathbf{0}) + d(a+\mathbf{2},\mathbf{0}) + d(a+\mathbf{1},\mathbf{0})\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\rho(a) + \rho(a+\mathbf{2},\mathbf{0}) + \rho(a+\mathbf{1})\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Bây giờ, vì $\mathbf{1} = 2\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i$ và $2 = \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i$ trong V_n nên (3.4) bằng

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_i^2 2^i + \sum_{i=0}^{n-1}\left(a_i+1\right)^2 2^i + \sum_{i=0}^{n-1}\left(a_i+2\right)^2 2^i\right).$$

Nhưng $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 2$ với mọi $x \in \mathbb{Z}_3$. Điều này cho

$$A_n(a) = \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{n-1}2^i = \frac{2}{3}\left(2^n - 1\right).$$

Như vậy, $A_n(a)$ không phụ thuộc vào a, có thể được tính không cần giải phương trình sai phân và bằng E_n.

Bài toán 2.3.3 Bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai cấu hình/hai cặp đỉnh

Bài toán sau đây mở rộng Bài toán 2.3.1: Tìm số bước chuyển tối thiểu cần thiết để đi từ một cấu hình hợp lệ sang một cấu hình hợp lệ khác trong bài toán Tháp Hà Nội. Trong ngôn ngữ của đồ thị Hà Nội, đây chính là bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai cặp đỉnh có thể bất kì-được gọi là *bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai cặp đỉnh bất kì* cho bài toán H_n.

Tất nhiên, đã có những thuật toán hữu hiệu giải bài toán này cho đồ thị bất kì, thí dụ, thuật toán Dijkstra hay thuật toán Floyd, nhưng H_n là một đồ thị khá đặc thù, vì vậy có thể chỉ ra các thuật toán hữu hiệu hơn cho Bài toán 2.3.3.

Ta có thể sử dụng tương ứng Lucas để giải bài toán 3. Giả sử a_1 và a_2 là các đỉnh phân biệt của H_n. Không hạn chế tổng quát, ta có thể chọn chúng nằm trong các khối khác nhau, thí dụ, $a_1 \in [0]$ và $a_2 \in [1]$.
Giả sử $\varphi(a_1) = \varphi(a_1) = (r_1, k_1)$ và $\varphi(a_2) = (r_2, k_2)$. Kí hiệu $d_1 = d_1(a_1, a_2)$ là độ dài của đường ngắn nhất từ a_1 tới a_2 không đi qua $[2]$ và $d_2 = d_2(a_1, a_2)$ là độ dài đường ngắn nhất từ a_1 đến a_2 đi qua $[2]$. Ta có

$$\begin{aligned} d_1 &= d\left((r_1,k_1),\left(2^{n-1}-1,2^{n-1}-1\right)\right) + d\left((r_2,k_2),\left(2^{n-1},2^{n-1}\right)\right) + 1 \\ &= \left(\left(2^{n-1}-1-r_1\right) + \left(r_1 - k_1\right)\right) + \left(r_2 - 2^{n-1}\right) + 1 = r_2 - k_1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

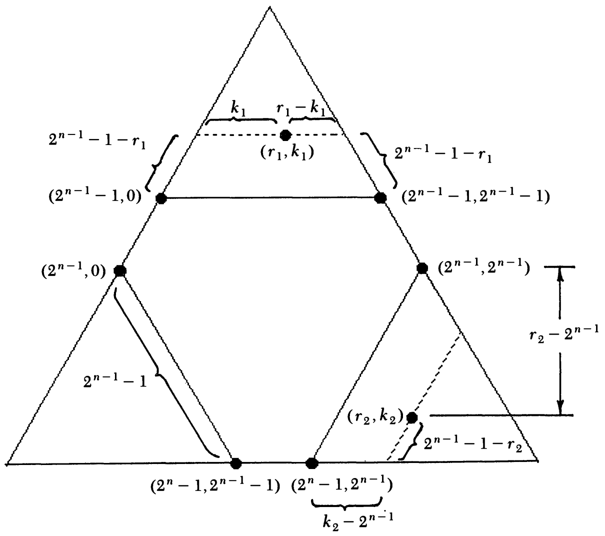
và

$$\begin{aligned} d_2 &= d\left((r_1,k_1),\left(2^{n-1}-1,0\right)\right) + d\left((r_2,k_2),\left(2^{n}-1,2^{n-1}\right)\right) + 2^{n-1} + 1 \\ &= \left(\left(2^{n-1}-1-r_1\right) + k_1\right) + \left(\left(2^{n}-1-r_2\right) + \left(k_2 - 2^{n-1}\right)\right) + 2^{n-1} + 1 \\ &= 3.2^{n-1} - 1 - r_1 - r_2 + k_1 + k_2. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Nhận xét rằng ở đây ta đã tính số các đỉnh nằm ngang và đường chéo mỗi đỉnh hai lần (xem Hình 2.3.6). Như vậy, ta thấy rằng

$$d_2 \le d_1 \text{ nếu và chỉ nếu } r_1 + 2r_2 \ge 2k_1 + k_2 + 3.2^{n-1} - 1.$$

Sử dụng tính đối xứng hoặc tính trực tiếp, ta cũng có thể nhận được kết quả tương tự cho a_1 và a_2 trong $[0]$ và $[2]$ hoặc trong $[1]$ và $[2]$.



Hình 2.3.6

Thí dụ 2.3.3 Tìm $d(011,102)$ trong H_3. Tương ứng Lucas cho $\varphi(011) = (3,0)$ và $\varphi(102) = (7,5)$. Từ đây, sử dụng (3.5) và (3.6), ta tính

$$d_1(011,102) = 7 - 0 = 7 \text{ và } d_2(011,102) = 11 - 3 - 7 + 0 + 5 = 6.$$

Vậy $d(011,102) = 6$ và đường ngắn nhất đi qua tất cả ba khối của H_3 (xem Hình 2.3.6).

Như vậy, đồ thị Hà Nội tỏ ra rất hữu hiệu trong nghiên cứu không chỉ bài toán Tháp Hà Nội cổ điển, mà còn trong nghiên cứu các bài toán Tháp Hà Nội suy rộng và cải biên. Rất nhiều nhà toán học sử dụng công cụ này trong nghiên cứu bài toán Tháp Hà Nội tổng quát.

KẾT LUẬN

Phần 1 trình bày khá chi tiết lịch sử phát triển của bài toán Tháp Hà Nội. Phần 2 trình bày các lời giải bài toán tháp Hà Nội với ba cọc (thuật giải đệ qui, sử dụng hệ đếm cơ số 2, sử dụng đồ thị Hà Nội).

Mặc dù còn rất sơ lược và chưa bao quát hết được số lượng lớn các bài viết chỉ riêng về công cụ đồ thị giải bài toán Tháp Hà Nội, hy vọng bài viết cũng đã cho một trình bày sơ lược về phương pháp đồ thị giải bài toán Tháp Hà Nội.

Tài liệu trích dẫn

[1] Phạm Trà Ân, Bài toán Tháp Hà Nội, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 280, tháng 10-2000.

[2] Phạm Trà Ân, Bài toán Tháp Hà Nội-Cái nhìn từ lý thuyết Độ phức tạp tính toán, Tạp chí Thông tin Toán học, Tập 6, Số 2, tháng 8 năm 2002, trang 10-13.

[3] Vũ Đình Hòa, Bài toán Tháp Hà Nội, Tạp chí Toán Tuổi thơ 2, Số 68, tháng 10-2008.

[4] Nguyễn Xuân Tấn, Bài toán "Tháp Hà Nội"-một bài toán hóc búa hơn một trăm năm nay, Tạp chí Thông tin Toán học, Tập 6 Số 1, tháng 3, 2002, trang 2-4.

[5] Tạ Duy Phượng, Trò chơi Tháp Hà Nội-Lịch sử và bài toán tổng quát, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 280, tháng 1-2010.

[6] Nguyễn Thị Hồng Phượng, Thuật toán Frame-Stewart giải bài toán Tháp Hà Nội tổng quát, Luận văn Cao học, Đại học Sư phạm Thái Nguyên, 2010.

[7] Mao Thị Hiền, Trò chơi Tháp Hà Nội và một số vấn đề liên quan, Luận văn Cao học, Đại học Quốc gia Hà Nội, 2013.

[8] Vũ Hoàng Đạo, Bài toán Tháp Hà Nội với đĩa màu, Luận văn Cao học, Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, 2015.

[9] Trần Thị Hồng Nhung, Bài toán Tháp Hà Nội với chuyển động xoay vòng, Luận văn Cao học, Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, 2015.

[10] Vũ Thu Trang, Một số công thức truy hồi trong bài toán Tháp Hà Nội tổng quát, Luận văn Cao học, Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, 2015.

[11] R. E. Allardie and A. Y. Fraser, La Tour d'Hanoi, Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society 2 (1884), 50-53.

[12] M. Atkinson, The cyclic Towers of Hanoi problem, Information Processing Letters, Vol. 13, No 3 (1981), 118-119. MR0645457 (83f:68004)

[13] W. W. Rouse Ball, Mathematical Recreations and Essays, Macmillan and Co., London, Sixth Edition, (1914).

[14] Henry Ernest Dudeney, The Canterbury Puzzles (and other curious problems), Thomas Nelson and Sons, Ltd., London, 1907; New York, E. P. Dutton and Company, 1908.

[15] Otto Dunkel, Editorial note concerning advanced problem 3918, Amer. Math. Monthly 48 (1941), 219.

[16] M. C. Er, The Colour Towers of Hanoi: A Generalization, The Computer Journal, Vol. 27 (1984), No. 1, 80-82.

[17] J. S. Frame, Solution to advanced problem 3918, Amer. Math. Monthly 48 (1941), 216-217.

[18] Ronal L. Graham, Donal E. Knuth, and Oren Patashnik, Concrete mathematics: A foundation for computer sciences, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989. Second Edition, 1994.

[19] Andreas M. Hinz, The Tower of Hanoi, Enseign. Math. (2) 35 (1989), 289-321.

[20] Andreas M. Hinz, Pascal's Triangle and the Tower of Hanoi, American Mathematical Monthly, Vol. 99 No. 6, p. 538-544, June-July 1992.

[21] Andreas M. Hinz, Sandi Klavžar, Uroš Milutinović, and Ciril Petr, The Tower of Hanoi – Myths and Maths, Birkhäuser, 2013, 2018.

[22] Zoltán Kátai, Lehel István Kovács, Tower of Hanoi-where programming techniques blend, Acta Univ. Sapientiae, Informatica 1, 1 (2009), pp. 89-108.

[23] Sandi Klavžar, Uroš Milutinović, and Ciril Petr, On the Frame-Stewart algorithm for the multi-peg Tower of Hanoi problem, Discrete Appl. Math. 120 (2002), no. 1-3, 141-157.

[24] Édouard Lucas, Nouveaux jeux scientifiques de M. Édouard Lucas, La Nature, 17th year, 2nd semester (1889), no. 855 (October 5), 301-303.

[25] Édouard Lucas, L'Arithméique Amusante: Introduction aux Récréations Mathematicques, Gauthier-Villars, Paris, 1895, pp. 179-183.

[26] A.A.K. Majumdar, The Classical Tower of Hanoi Problem and Its Generalizations, Vol. 1: Multi-Peg Generalization, LAMBERT Academic Publishing, 2012.

[27] Henri de Parville, Récréations mathématiques: La tour d'Hanoi et la question du Tonkin, La Nature, 12th year, 1st semester, no. 565 (March 29, 1884), 285-286.

[28] David G. Poole, The towers and triangles of Professor Claus (or, Pascal knows Hanoi), Mathematics Magazine, 67 (1994), 323-344.

[29] A. Sapir, The Towers of Hanoi with Forbidden Moves, The Computer Journal, 47 (1) (2004), 20-24.

[30] R. S. Scorer, P. M. Grundy, and C. A, B. Smith, Some Binary games, Mathematics Magazine, 28 (1944), No 280 (July), 96-103.

[31] B. M. Stewart, Advanced problem 3918, Amer. Math. Monthly 46 (1939), 363.

[32] B. M. Stewart, Solution to advanced problem 3918, Amer. Math. Monthly 48 (1941), 217-219.

[33] Paul K. Stockmeyer, Variations on the four-post Tower of Hanoi puzzle, Congr. Numer. 102 (1994), 3-12.

[34] Paul K. Stockmeyer, The Tower of Hanoi: A Bibliography, http://w.w.w.cs.wm.edu/~pkstoc/hpapers.html, Version 2.2, 22/10/2005.

[35] P.K. Stockmeyer, Fred Lunnon, New Variations on the Tower of Hanoi,

Thirteenth International Conference on Fibonaci Numbers and Their Applications, July 7-11, 2008, Patras, Greece.

[36] Symposium La "Tour d'Hanoi"-un casse-tete mathématique d'E'duard Lucas (1842-1891), Institute Henri Poicaré, Paris V, 5-8 février 2009.

[37] Yu-Kuo Wang, Analysis on an Iterative algorithm of "The Tower of Hanoi problem" with Parallel Moves, M. Sc. Thesis, Institute of Computer Science and Information Engineering, Chung Hoa University, 1999.

[38] Derick Wood, Towers of Brahma and Hanoi Revisited, J. Recr. Math. 14 (1981), No 1, 17-24.

[39] Workshop on the Tower of Hanoi and Related Problems, September 18–22, 2005, Maribor, Slovenia.

[40] E. I. Igratiev, Trong vương quốc sáng tạo hay Số học cho mọi người, Quyển 1, S.-Peterburg, 1914 (Tái bản lần thứ tư, tiếng Nga).

TRÁCH NHIỆM TÌM HIỂU LỊCH SỬ DÂN TỘC

NGUYỄN LÊ ANH

Giới thiệu. *Đây là số thứ 11 liên tục chúng tôi luôn đăng chuyên mục phám phá lịch sử thông qua tư duy lô-gích và phương pháp suy luận khoa học. Chúng tôi muốn giới thiệu với độc giả chúng ta có thể làm được những gì với tư duy toán học, thông qua những nghiên cứu miệt mài của nhà toán học Nguyễn Lê Anh. Trong số này, chúng tôi tiếp tục đăng những ghi chép của ông, những nổ lực không ngừng nghỉ cùng với những khám phá mới. Đây cũng là lời kêu gọi cộng đồng trong việc cùng chung tay xây dựng một tài liệu lịch sử cho dân tộc chúng ta - dân tộc Việt Nam.*
Tựa đề của bài viết do Ban Biên tập đặt.

Tôi cũng đã đến tuổi cần phải có trách nhiệm về lịch sử dân tộc.

Sự việc cũng tình cờ. Nó bắt đầu từ việc đi thăm các di tích đình đền chùa ở khu vực Hà Nội cùng với anh Công. Thời gian đầu tôi không để ý tới việc tìm hiểu, tôi chỉ làm xế cho anh ấy. Khi tới khu di tích tôi tìm một chỗ có ghế dài và vắng vẻ rồi nằm ngủ, kệ cho anh ấy đi chụp ảnh. Một hôm tôi cùng anh ấy tới đền ở khu vực Cống Mọc, nơi có mộ hai tướng quân của Bà Trưng. Anh Công giải thích "Hai tướng của Bà Trưng bị chết trận và xác trôi tới nơi Cống Mọc. Dân vớt lên chôn rồi lập đền thờ". Vẫn theo lệ, tôi chả nói gì. Tuy nhiên lần này thì tôi cho là anh ấy hơi bị tâm thần.

Số là tôi vẫn nghĩ truyện Bà Trưng là phịa để kích động lòng tự hào dân tộc. Bao nhiêu năm học phổ thông về lịch sử, tôi chả nhớ được một tí gì. Địa lý thì chưa hề biết con sông nào vào với con sông nào. Tên các địa danh thì càng không biết. Thế rồi một hôm anh ấy dẫn tôi tới khu vực có đình và chùa ở quận Hai Bà. Ông thủ từ coi đình có nói với chúng tôi "đình cổ hơn 1000 năm". Tôi cũng chỉ im lặng suy nghĩ. Vì sao ông ấy có thể biết được ngôi đình có tuổi những hơn 1000 năm. Tuổi của đình làng là cái gì thế?

Khi xưa tôi có làm việc với anh Kỷ. Khi ấy nước dùng ở Hà Nội là nước ngầm. Do khai thác nhiều mà mực nước ngầm xuống thấp. Anh Kỷ muốn đánh giá khả năng khai thác tối đa để quy hoạch khai thác. Anh ấy đặt ra bài toán đánh giá trữ lượng nước ngầm ở Hà Nội. Tôi cũng làm mô hình và lập trình. Nhờ vậy mà tôi biết cấu trúc địa chất tầng sâu đồng bằng Bắc Bộ. Tầng dưới cùng ở độ sâu tầm 100m là nền đá cứng. Sau đó là tầng cuội sỏi dày khoảng 50m. Ở dây nước ngầm chảy rất mạnh. Tiếp theo đó là một tầng sét dày khoảng 5m. Rồi tới tầng đất pha cát nơi có nước mặt.

Tôi cũng biết khoảng 6 nghìn năm về trước toàn bộ đồng bằng Bắc Bộ là một vịnh biển nông. Phù sa đã bồi nó thành đồng bằng như ngày nay.

Tôi cần đưa ra phương án kiểm tra độ đúng đắn của ông thủ đình. Nhiều nghìn năm về trước đã có thời điểm Hà Nội là biển. Vậy tôi có thể ước lượng được thời gian để chứng minh 1000 năm về trước khu vực quận Hai Bà còn là nước được không? Tôi cần phải biết độ cao của mặt đất Hà Nội so với mặt nước biển hiện nay và phải biết được tốc độ phù sa bồi. Từ bản đồ địa hình tôi có thể biết được độ cao của Hà Nội so với mực nước biển. Trừ một số gò cao, như gò Đống Đa, còn lại nơi cao nhất khoảng 18m cùng với độ cao với thành Cổ Loa. Đấy là khu vực Xuân La Xuân Đỉnh, khu vực nơi có toà nhà Chính Phủ ở Ba Đình. Dựa theo mặt nước hồ Tây, tôi tiến hành khảo sát độ cao các khu vực quanh hồ và biết được Gò Võng Thị ở Bưởi, Gò Núi Trúc cũng là những nơi tương đối cao. Dựa vào hình dạng của các gò tôi hình dung được hướng dòng nước chảy. Tôi xây dựng mô hình hình thành đồng bằng Bắc Bộ dựa theo quá trình các gò đất lớn dần theo thời gian do được phù sa bồi. Khoảng biển giữa các gò hẹp dần lại mà thành các con sông chảy ngoằn nghèo. Cư dân tiền sử di dời ra sống ở các gò. Cái nhà đầu tiên được xây ở nơi cao nhất của gò, nó là đình làng về sau. Con cháu làm nhà gần đình, vì thế mà mọi con đường trong làng đều dẫn tới đình làng. Nghĩa địa được để ở cuối nguồn nước chảy.

Dựa theo lượng phù sa của sông Hồng là 100 triệu tấn/năm, ứng với khoảng 75 triệu m^3 đất, tôi tính được trung bình 1000 năm thì đồng bằng Bắc Bộ được bồi thêm khoảng 5m. Tôi tới khu vực cát tặc đào ở sông Hồng và tiến hành đo đạc kiểm tra. Quả đúng là mỗi năm có một lớp sa khoáng dày khoảng 5mm. Như vậy tôi có được một sự ước lượng về địa lý khu vực đồng bằng Bắc Bộ. Vào đầu Công Nguyên, nhiều vùng còn là đầm hồ với độ sâu tầm 10m. Theo thời gian do bị phù sa bồi mà các đầm hồ này hẹp lại. Các thửa ruộng vì thế mà dài ra. Theo dõi hình dạng của các thửa ruộng tôi nhận ra nơi trũng nhất của các hồ đầm 2000 năm tuổi xưa.

Có được công cụ để khôi phục môi trường sinh sống 2000 năm về trước của người dân, tôi bắt đầu đi tìm hiểu lịch sử. Như chúng ta đã biết, 6000 năm về trước khu vực Phú Thọ, Vĩnh Yên, Hương Canh... là vịnh biển. Dựa vào vết các thửa ruộng, tôi nhận thấy khu vực di chỉ khảo cổ Đồng Đậu là ở ven con sông Phan. Con sông chảy ngoằn ngheo giữa các gò đống. Do tuổi của di chỉ là 3500 năm nên tôi ước tính được, cứ 1000 năm thì bờ đất phía bên Tam Đảo cũng như bên Ba Vì nống ra được 8km. Như thế eo biển hẹp lại thành dòng sông Hồng, bờ biển lùi dần ra xa. Vận tốc cửa sông Hồng chạy ra biển là khoảng 45km cho 1000 năm. Như vậy tôi ước tính được vị trí của bờ biển theo thời gian. Khoảng 4000 năm về trước bờ biển ở vào khoảng sông Đáy và sông Cà Lồ. Vào đầu Công Nguyên bờ biển ở vào khoảng mà nay là con sông Châu Giang và sông Luộc. Tôi đi tìm các hồ ở phía nam Hà Nội. Tôi nhận thấy dòng chảy xưa của sông Đáy. Và nhận thấy thế trận Tốt Động – Chúc Động của Lê Lợi. Tôi cũng đi tìm hiểu về sông Đỗ Động. Sông Đỗ Động nối từ sông Đáy vào với sông Nhuệ. Cửa sông Đỗ Động chảy vào sông Nhuệ thì vẫn còn. Cửa sông Đỗ Động từ sông Đáy thì bị bồi lấp. Khảo sát hướng của các thửa ruộng chúng ta nhận thấy đình Ngoại Bình Đà ở ven dòng sông Đỗ Động, cửa sông là nơi có đền thờ Cao Công. Tôi hình dung ra thế trận mà Mã Viện đuổi đánh cánh quân Cao Công ở khu vực đầm Cao Viên. Lê Lợi sau khi thắng trận ở Tốt Động và Chúc Động đã tiến quân từ sông Đáy qua sông Đỗ Động vào sông Nhuệ, rồi vào Thăng Long từ phía nam theo sông Tô Lịch. Ngọc Hồi là di tích nơi Lê Lợi đóng quân. Cứ như vậy hình dung ra quá trình tiến quân vào tới tận Đống Đa.

Công cụ dõi theo hướng của các thửa ruộng để tìm ra đầm hồ cho phép tôi tìm thấy hồ Lãng Bạc. Hiển nhiên hồ Lãng Bạc phải rất lớn. Tôi nhận ra vào đầu Công Nguyên, khu vực từ Melinh tới thành cổ Bắc Ninh là một cái hồ rất lớn. Nó có thể là hồ Lãng Bạc mà Mã Viện nói tới trong Hậu Hán Thư. Tôi cần phải giải thích được vì sao lại có cái hồ lớn đến như vậy. Trên bản đồ Google, tôi nhận thấy dòng nước sông Đà chảy thẳng ngay cả sau khi gặp sông Thao. Như thế động năng của dòng nước sông Đà rất lớn. Qua kiểm tra thực địa tôi nhận thấy lượng phù sa của sông Đà mới là chính. Dựa trên thiết diện sông tôi nhận ra lượng nước sông Đà chiếm khoảng hơn một nửa nước sông Hồng, tức nhiều hơn lượng nước của sông Lô và sông Thao cộng lại. Tôi hình dung 6000 năm về trước, khi khu vực ngã ba Việt Trì còn là biển thì dòng nước sông Đà đẩy tất cả phù sa về tới chân núi Tam Đảo. Dòng nước mạnh này đã khoét và để lại dấu vết là hồ Đại Lải. Dòng nước chảy tiếp qua mũi Sóc Sơn, nơi có đền thờ Phù Đổng Thiên Vương, Thánh Gióng. Ra tới vịnh Hạ Long nơi Quảng Yên nó bị dòng Hải Lưu đẩy ngược trở vào mà thành xoáy. Xoáy nước khiến cho phù sa đọng lại mà thành Hải Dương. Vậy là khu vực Chùa Dâu và Luy Lâu xưa là đảo đất ở ngoài biển. Rõ ràng là toàn bộ lượng phù sa rất lớn được sông Đà đẩy về phía hồ Đại Lải. Lượng phù sa này đã bồi lấp toàn bộ khu vực Bình Lệ Nguyên, gồm Vĩnh Yên, Hương Canh, Phúc Yên, Đông Anh. Do bị phù sa bồi lắng mà dòng nước chảy về phía Tam Đảo yếu dần, khiến cho khu vực từ Melinh tới Bắc Ninh là đầm trũng. Đây chính là nguyên nhân hình thành hồ Lãng Bạc. Khu vực thị trấn Chờ nằm trên đường quốc lộ QL18 là đường ven hồ. Địa danh Phong Khê còn lại từ thời Mã Viện phân chia Tây Vu thành Phong Khê và Vọng Hải. Dựa theo độ dài của thước thời Hán, Tôi ước tính độ dài của con đường QL18 khoảng 1000 dặm. Nó chính là con đường mà Hậu Hán Thư có nói là Mã Viện cho đục đá mở đường ven biển.

Hậu Hán Thư ghi rõ, Hán Quang Vũ Đế lệnh cho Mã Viện mang 20 nghìn quân và 2 nghìn chiến thuyền tiến đánh Bà Trưng. Như vậy cuộc chiến được lên kế hoạch kỹ lưỡng, bởi khu vực đồng bằng Bắc Bộ khi ấy phần lớn là đầm nước.

Để khẳng định về cuộc chiến Bà Trưng đánh nhau với Mã Viện là có thật và rằng Mã Viện bị chết quá nửa trong số 20 nghìn quân, tôi cần phải biết được tình hình kinh tế khu vực đồng bằng Bắc Bộ. Tôi nhận thấy, với mô hình gò đống ở đồng bằng Bắc Bộ, mỗi gò (nay là khu vực có cư dân sinh sống) có đường kính không quá 1km, thì khó mà có thể nói đến sự chống đối chứ đừng nói tới việc tiêu diệt quá một nửa trong số 20 nghìn quân của Mã Viện.

Tôi tin là lịch sử dân tộc có giai đoạn Bà Trưng. Tuy nhiên, tôi không tìm thấy một cơ sở lập luận nào cho thấy cư dân đồng bằng Bắc Bộ có được vũ khí đủ để đánh lại Mã Viện. Nghiên cứu các trận chiến trên khắp thế giới vào đầu Công Nguyên, tôi hiểu là hợp kim đồng vẫn là thứ được dùng để chế tác ra vũ khí. Vậy tôi cần phải tìm được khu vực có mỏ đồng tiền sử.

Dựa vào các nghiên cứu của White, của Pryce,... tôi biết được từ Quảng Đông và Quang Tây trở xuống chỉ có 3 khu vực khai thác đồng tiền sử lớn có 3200 năm tuổi. Đó là các khu vực Khau Vong Prachan, Phu Luong, Xepon. Xepon và cánh đồng Chum xưa thuộc Việt Nam. Như vậy Xepon - Thanh - Nghệ đóng vai trò quan trọng bậc nhất trong việc hình thành dân tộc Việt Nam.

Vậy là tôi cần phải hiểu rõ hơn về khái niệm lịch sử dân tộc. Tôi cho là lịch sử thì phải là của dân tộc. Tức là phải có dân tộc trước, và lịch sử là thứ phản ánh quỹ đạo phát triển của dân tộc dưới dạng bút tích. Vậy thì phải có định nghĩa dân tộc.

Tôi không tin các vua Hùng là tổ tiên của người Việt, bởi các vua Hùng là dân di cư. Mấy cái Nha Chương được tìm thấy ở Phùng Nguyên cho thấy dấu vết của dòng người di cư này là từ khu vực Ân Thương tới. Họ tới vào khoảng 3200 năm về trước và có khoảng vài trăm người. Hậu duệ của các vua Hùng là người mang họ Phùng. Mật độ người mang họ Phùng có phân bố chuẩn trong khu vực rất nhỏ, từ chân núi Ba Vì ra tới Sơn Tây. Vào đầu Công Nguyên thì khu vực này là đầm lầy. Khu vực có kinh tế phát triển là vùng Bình Lệ Nguyên. Dựa vào mật độ phân bố người mang họ Phùng, chúng ta còn nhận thấy có một vùng nhỏ ở khu vực đầm Vạc thuộc Vĩnh Yên, đầu sông Phan. Rõ ràng là đã có các trận đánh nhau giữa dân di cư với người bản xứ. Người di cư đã không thể nống xuống khu vực Bình Lệ Nguyên mà phải ở lại khu vực quanh đầm Vạc này. Có lẽ truyền thuyết về Thánh Gióng đánh nhau với giặc Ân Thương là xuất phát từ việc người dân bản xứ đánh lại quan quân hậu duệ của các Vua Hùng. Dọc theo con sông Phan và sông Cà Lồ có nhiều đền thờ Thánh Gióng. Phân bố đền thờ Thánh Gióng tập trung trong khu vực bán kính khoảng 15km cho thấy nó phản ánh một sự kiện về một nhân vật lịch sử có thật. Người dân đương nhiên không thờ giặc. Vì vậy mà đền thờ các vua Hùng thì chẳng những không có ở vùng Bình Lệ Nguyên – khu vực kinh tế phát triển nhất vào trước Công Nguyên, mà cũng chẳng có ở bất cứ nơi nào. Hơn thế, mặc dù dã sử tin là đã có 18 đời vua Hùng, nhưng khảo cổ chưa hề phát hiện ra dấu vết của bất luận kinh thành nào của các vua.

Như vậy thì có lẽ là đã có dòng dân di cư Các Vua Hùng chạy loạn. Tất nhiên là dân tộc Việt Nam thì không thể do dòng người di cư sinh đẻ ra. Trong lịch sử Việt Nam cũng có nhiều dòng dân di cư tới, như nhà Lý, nhà Ngô, nhà Trần, nhà Mạc,... Họ tới và bị đồng hóa bởi văn hóa bản địa. Chúng ta nên coi dân tộc là được xác định bởi bởi văn hóa. Đối với văn hóa thì cộng đồng số đông là quyết định. Cứ nơi nào có điều kiện sống tốt thì dân ở nơi đó đông. Nơi có điều kiện sống tốt là ở châu thổ các con sông lớn, nhất là vùng ven biển. Như vậy cư dân sinh sống ở châu thổ các con sông nơi chúng chảy ra biển là cộng đồng xác định dân tộc.

Khi xưa 23 nghìn năm về trước, mực nước biển thấp hơn ngày nay 130m. Khi ấy sông Hồng và sông Mã chảy ra tới tận gần quần đảo hoàng Sa của Việt Nam. Sông Cửu Long cũng vậy, chảy ra tới tận quần đảo trường Sa của Việt Nam. Thế thì tổ tiên trực tiếp của dân tộc Kinh phải được hiểu là cư dân sinh sống ở khu vực gần quần đảo Hoàng Sa vào 23 nghìn năm về trước. Theo thời gian, khi nước biển dâng thì họ lùi sâu vào đất liền. Khu vực đồng bằng Bắc Bộ có các dãy núi bao quanh nên chỉ có các dòng dân di cư nhỏ lẻ tới được nơi ấy. Các dòng dân di cư này bị đồng hóa bởi văn hóa của cư dân bản địa là người Kinh.

Điều này cũng tương tự như đối với cư dân khi xưa sống ở khu vực gần quần đảo Trường Sa của Việt Nam. Văn hóa Sa Huỳnh là của họ. Tuy nhiên, do không có các dãy núi cao bảo vệ nên cư dân Sa Huỳnh bị Ấn Hóa. Cái tên Champa (Chăm Pa) và tên Kampilya (Căm Pu Chia) thực chất là tên của hai trong số 16 xứ quân của vương quốc Ấn Độ cổ 600 năm trước Công Nguyên. Vậy thì điều gì đã xảy ra với dân tộc Kinh vào thời điểm mà Sa Huỳnh bị Champa hóa.

Vậy là rõ. Đứng trên quan điểm văn hóa thì dân tộc Kinh chả có liên quan gì tới Thục Phán hay cha con vua Hùng chạy loạn từ Ân Thương tới. Vậy thì An Dương Vương là ai? Chúng ta bỏ ra ngoài các giải thích kiểu như "An Dương Vương là con ngoài giá thú của Thục Phán với một người đàn bà Tày"của giáo sư Trần Quốc Vượng. Chúng ta đi tìm các cộng đồng dân cư đông đúc. Do dân tộc Kinh từ dưới biển di cư lên nên họ khi nào cũng chiếm đa số. Vào thời kỳ khoảng 3000 năm về trước, đồng bằng sông Cả và sông Mã đã hình thành như ngày nay, trong khi đồng bằng Bắc Bộ còn là đầm lầy. Khoảng thời gian 3000 năm về trước khu vực Thanh Nghệ Xepon là nơi có mỏ đồng tiền sử rất lớn.

Như vậy đây là nơi hội tụ các loại anh tài từ mọi nơi, có loại thì là nô lệ khai mỏ, có loại là tướng cướp. Theo thời gian những người dân di cư khai mỏ này bị đồng hóa bởi người Kinh bản xứ. Những gì còn lại của cộng đồng này là các đồ đồng Đông Sơn. Họ còn được biết ở nhà Chu dưới tên gọi "Việt Thường Thị".

Rõ ràng là vào thời kỳ Đông Sơn, khu vực luyện kim ở Thanh Nghệ Sepon và đồng bằng sông Mã, sông Cả là trung tâm kinh tế lớn. Nơi đây chẳng những chế tác ra công cụ sản xuất mà còn vũ khí đánh nhau. Vậy thì khả năng cao An Dương Vương phải có liên quan tới vùng Thanh Nghệ Sepon này.

Vậy An Dương Vương là ai? Nếu quả thật là đã có những trận đánh nhau giữa An Dương Vương với Triệu Đà thì chắc chúng không thể là những trận chiến nhỏ. Vậy thì An Dương Vương không thể là con hoang của một người đàn bà Tày. Ông ta chẳng những có quyền lực kinh tế mà còn có khả năng đánh nhau.

Thủy Kinh Chú có ghi, Ashoka cho xây thành Nê Lê (thành Cổ Loa). Vậy thì rất có thể Ashoka chính là An Dương Vương. Điều này cũng hợp lý vì sau bao nhiêu năm chính quyền Ấn Độ tìm kiếm như vẫn không thấy lăng mộ của Ashoka đại đế.

Cho dù là thế nào thì các đồ đồng Đông Sơn, đặc biệt là trống đồng Ngọc Lũ được tìm thấy ở Xepon - Thanh - Nghệ cho thấy nơi đây là khu vực có nền công nghiệp khai mỏ và luyện kim đồng rất phát triển. Nó có lẽ là câu trả lời có câu hỏi vì sao Mã Viện bị chết quá nửa trong số 20 nghìn quân. Hậu Hán Thư ghi rõ, sau khi đánh bại Bà Trưng ở Cấm Khê (sông Cà Lồ), Mã Viện mang 20 nghìn quân và 2 nghìn chiến thuyền vào Cửu Chân đánh nhau với Đô Dương. Như vậy Mã Viện đã không bị tổn thất về quân lính khi đánh nhau với Bà Trưng ở khu vực Bắc Ninh. Theo dõi dấu vết chúng ta có thể nhận thấy cửa Thần Phù là nơi Mã Viện đã cho phá đá làm thành con sông nhỏ để không phải vượt biển qua mũi Mai An Tiêm. Chúng ta cũng đã tìm thấy khu vực thôn Thanh Lãng xã Nga Thạch có gần như 100% dân mang họ Mã. Đây chính là hậu duệ của vài chục binh lính quân lính của Mã Viện đã ở lại quanh khu vực cây cột Đồng Trụ. Hậu Hán Thư có ghi, sau khi đánh Đô Dương, Mã Viện cho đưa về Linh Lang (Hồ Nam) hơn 300 cừ xúy, tức là các nghệ nhân đúc đồng. Bằng việc tiêu diệt khu vực luyện kim và đúc đồng, Mã Viện đã triệt thoái sức mạnh quân sự của người Kinh.

Như vậy thời đại Bà Trưng là có thật. Các trống đồng Đông Sơn được đúc tại khu vực Việt Thường Thị (khu vực Xepon, Nghệ An, Thanh Hóa).

Trong lịch sử dân tộc Kinh thì chỉ có An Dương Vương là chạy ra biển. 2200 năm về trước Nga Sơn vẫn còn là biển. Rõ ràng là con đường An Dương Dương chạy từ Cổ Loa vào tới đền Cuông là phải qua Lương Sơn thuộc Hòa Bình. Tiếp theo là tới khu vực thành Nhà Hồ, rồi theo sông Mã chạy ra tới Sầm Sơn. Khu vực đền Cuong 2250 năm về trước là vịnh biển. Người ta tìm thấy nhiều trống đồng Đông Sơn thuộc định dạng Ngọc Lũ ở Malaysia. Như thế khu vực Đông Sơn xưa là cảng biển lớn. Có thể cảng biển là ở khu vực đền Cuong.

Theo thần thoại, tổ tiên của người Minangkabau đã tới đỉnh núi lửa Marapi bằng tàu trong một trận lụt lớn. Marapi khi đó là đảo nhỏ nhô ra khỏi vùng nước xung quanh. Người điều khiển con tàu được cho là con trai của một Đại Đế.

Ashoka là một đại đế còn hùng mạnh hơn cả Alecxander đại đế.

Người Minangkabau ở nhà sàn có chòi nhỏ phía trước dùng để chứa thóc. Nhà và chòi đều có chái hình sừng trâu cong và nhọn vút lên trời. Mẫu này được tìm thấy trên mặt trống đồng Ngọc Lũ và Cổ Loa. Người Minangkabau sử dụng lông chim gắn vào các ngón tay để múa trong lễ hội. Hình ảnh này cũng được tìm thấy trên mặt trống đồng Ngọc Lũ và Cổ Loa.

Minangkabau có nghĩa menang là "chiến thắng"và kerbau là "trâu". Theo truyền thuyết, trong một trận đấu trâu được tổ chức thay cho trận chiến với kẻ xâm lược, người Minangkabau sử dụng một con trâu nhỏ khát sữa để đánh bại con trâu lớn của quân xâm lược. Câu truyện giống với chuyện Chọi Trâu của Trạng Quỳnh. Truyện kể rằng sứ Tàu đem theo một con trâu rất to lớn và hung dữ rồi thách vua ta đưa trâu ra chọi thi, nếu bị thua phải triều cống nước Tàu. Vua ta thấy trâu Tàu khỏe quá nên rất lo ngại, bèn triệu Trạng Quỳnh vào cung vấn kế. Trạng Quỳnh chỉ xin vua một con nghé nhỏ, gầy đói ốm yếu để chọi với trâu Tàu. Đến ngày thi đấu, Trạng Quỳnh bỏ đói con nghé không cho bú sữa nên khi gặp trâu Tàu, con nghé xông vào bụng con trâu lớn để tìm vú mẹ. Trâu Tàu tuy to lớn nhưng chỉ quen chọi với trâu lớn, nay gặp con nghé nhỏ khát sữa cứ lủi đầu vào hai chân sau nên bỏ chạy. Trạng Quỳnh còn dọa sứ Tàu: "Trâu Tàu to lớn như vậy mà còn bị thua một con nghé nhỏ của Việt Nam, nếu đưa trâu Việt ra, chắc trâu Tàu chết mất xác".

Khảo sát truyện cổ tích của các nước trong khu vực, chúng ta không nhận thấy sự tích cùng nội dung với chuyện Chọi Trâu. Sự thật thì không có chuyện trâu đực tha nghé con. Vậy sự đồng dạng của cốt truyện Chọi Trâu cho thấy khả năng cao An Dương Vương đã chạy thoát ra biển và tới khu vực Miangkabau. Ước lượng theo tỷ lệ tăng dân số thì số người di cư vào thời điểm An Dương Vương chạy ra biển là khoảng vài trăm người.

Các phân tích về gen cho thấy có dấu vết của người tiền sử hơn 2200 năm về trước được tìm thấy ở khu vực Mimangkabau, có bộ gen tương đồng với người Kinh. Như thế chúng ta có thể nhận thấy khu vực Xepon, Thanh Hóa, Nghệ An là trung tâm của người Kinh tiền sử. Các hình dung về cuội nguồn dân tộc Kinh là ở Phương Bắc di cư tới đều không phù hợp.

Trong thời gian qua có rất nhiều bạn giúp tôi. Người tìm kiếm tài liệu, người phản biện, người hỗ trợ kinh tế. Tôi không thể kể ra hết. Xin cảm ơn các bạn. Tôi dự định nghỉ một thời gian rồi tìm cách viết lại tất cả. Tôi cũng không dám khẳng định các suy diễn trên là đúng hoàn toàn. Nếu đúng thì chúng ta, tôi và các bạn, cũng có một đóng góp nhỏ cho lịch sử dân tộc.

Kiểm chứng nội dung trên mạng xã hội Một vài bài học từ cuộc chiến Nga - Ukraine

Sohail Ahmed Khan
Jan Gunnar Furuly
Henrik Brattli Vold
Rano Tahseen
Đặng Nguyễn Đức Tiến

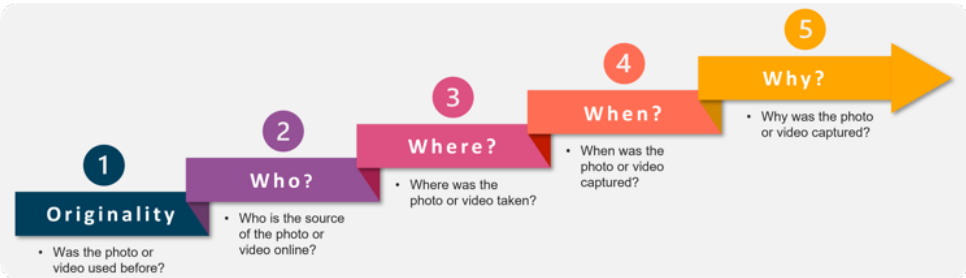
Giới thiệu. *Trong số này, Epsilon trân trọng chia sẻ với độc giả một số phương pháp xác định tính chính xác và độ tin cậy của ảnh và video trên mạng xã hội từ bài báo "Online Multimedia Verification with Computational Tools and OSINT: Russia-Ukraine Conflict Case Studies"(có thể tải tại: https://arxiv.org/pdf/2310.01978.pdf). Bài báo này giới thiệu các quy trình xác minh, các công cụ, và nghiên cứu thực tế liên quan đến xung đột Nga-Ukraine trong khoảng thời gian từ tháng 4 đến tháng 12 năm 2022.*

Chúng tôi chọn lọc và dịch lại một phần từ nội dung của bài báo để mang đến cho quý độc giả cái nhìn tổng quan về cách sử dụng các công cụ tính toán hiện đại trong quá trình xác minh thông tin trực tuyến. Chúng tôi hy vọng rằng thông tin này sẽ giúp làm rõ vai trò quan trọng của các công cụ mới cũng như phương pháp sử dụng chúng trong việc duy trì thông tin chính xác và chống lại thông tin sai lệch.

1. Quy trình xác minh

Một trong những quy trình kiểm tra ảnh và video trực tuyến được các tổ chức lớn hay sử dụng là mô hình 5 bước. Mô hình này được đề xuất bởi Bellingcat[1] [2, 4] và trong cuộc chiến giữa Nga và Ukraine, FAKTISK VERIFISERBAR cũng đã sử dụng cùng một quy trình 5 bước tương tự như vậy. Quy trình này được tóm tắt trong Hình 1 như sau:

[1] www.bellingcat.com



Hình 1. Mô hình kiểm tra thông tin được sử dụng bởi các tổ chức truyền thông, bao gồm Bellingcat, First Draft News, FAKTISK và nhiều tổ chức khác.

Faktisk và Faktisk Verifiserbar là ai?

FAKTISK[a] là tổ chức kiểm chứng sự thật được thành lập trên sự hợp tác giữa một số công ty truyền thông lớn tại NA UY, bao gồm công ty truyền thông quốc gia NRK[b], tập đoàn truyền thông Schibsted[c] và báo tự do Dagbladet[d]. FAKTISK là một thành viên của Mạng lưới Kiểm chứng Sự thật Quốc tế và được thành lập vào năm 2017. Năm 2018, FAKTISK thông báo hợp tác với Facebook để kiểm chứng nội dung trên nền tảng này.

Năm 2022, FAKTISK thành lập một đội đặc biệt có tên là FAKTISK VERIFISERBAR. Đội này bao gồm các phóng viên, nghiên cứu viên và người kiểm chứng sự thật từ nhiều công ty truyền thông khác nhau trên toàn Na Uy, họ cùng nhau làm việc để xác minh nội dung hình ảnh và tin tức từ xung đột Ukraine.

[a] https://www.faktisk.no/
[b] https://www.nrk.no/
[c] https://schibsted.com/
[d] https://www.dagbladet.no/

1.1. Năm bước kiểm tra cơ bản

- **Nguồn.** xác định nguồn thông tin (nó đã đăng ở đâu?) là một trong những thao tác cơ bản và quan trọng nhất. Nếu nguồn không được kiểm tra, các bước xác minh tiếp theo như xác định địa điểm, thời gian và động cơ có thể sẽ không còn ý nghĩa, ảnh hưởng đến tính toàn vẹn của quá trình xác minh. Do đó, bước quan trọng và quyết định đầu tiên là xác định đâu là nguồn gốc của nội dung, đảm bảo rằng nó chưa được chia sẻ trước đó trong ngữ cảnh khác.

- **Ai?** Quá trình xác minh ai đứng sau hình ảnh/video bao gồm việc xác định cá nhân hoặc tổ chức có trách nhiệm tạo ra hoặc chụp nội dung gốc. Thông qua một cuộc điều tra toàn diện về nội dung họ đã chia sẻ trong quá khứ cũng như hoạt động trên mạng xã hội của họ, ta có thể thu được thông tin quan trọng trong kiểm định thông tin. Hiểu một cách đơn giản, các nguồn chính thống được tin cậy nhiều hơn là những nguồn đã có lịch sử đưa tin sai lệch.
- **Ở đâu?** Yếu tố này tập trung vào việc xác định vị trí địa lý nơi hình ảnh hay video được ghi nhận. Thông qua phân tích cẩn thận các dấu hiệu, thông tin về địa danh và yếu tố đặc biệt trong ảnh và video , các nhà điều tra cố gắng xác định vị trí của nội dung với vị trí được tuyên bố. Quá trình này thường liên quan đến việc sử dụng các công cụ định vị địa lý, ảnh vệ tinh và dữ liệu bản đồ để tham chiếu chúng lại với thông tin trong ảnh và video.
- **Khi nào?** Trong quá trình xác minh, việc xác định khoảng thời gian chính xác (còn được gọi là Chronolocation) hoặc ngữ cảnh thời gian nơi ảnh được chụp hoặc nơi sự kiện xảy ra cũng rất quan trọng. Bằng cách phân tích các chỉ số khác nhau như thông tin metadata hoặc các chi tiết trong ảnh/video như bóng nắng, thời tiết, thời gian trong ngày, v.v., các chuyên gia kiểm tra thông tin có thể xác định khoảnh khắc hoặc giai đoạn cụ thể khi sự kiện diễn ra hoặc khi ảnh được chụp. Quá trình xác minh này giúp phát hiện các trường hợp có thể bị biến tấu, thao túng hoặc thông tin lỗi thời.
- **Tại sao?** Việc tìm hiểu "Tại sao"một hình ảnh/video cụ thể được chia sẻ là gần như không thể, vì động cơ chia sẻ nội dung là rất khác nhau. Trong khi một số người chia sẻ nội dung không có mục đích xấu, những người khác có thể có động cơ phức tạp hơn. Hiểu rõ động cơ cơ bản rất quan trọng để đánh giá mức độ đáng tin cậy của chúng.

2. Một số trường hợp từ cuộc chiến Nga-Ukraine

Phần này cung cấp một cái nhìn tổng quan về quy trình của Faktisk Verifiserbar để thực hiện xác minh nội dung đa phương tiện hình ảnh đối với xung đột Ukraine, sử dụng năm yếu tố xác minh được trình bày trước đó.

2.1. Xác định nguồn

Có nhiều phương pháp để xác thực hình ảnh hoặc video. Trong số đó, tìm kiếm hình ảnh ngược là phương pháp phổ biến nhất. Phương pháp này bao gồm việc tải lên hình ảnh (hoặc một khung hình trong trường hợp video) lên các công cụ tìm kiếm như Google, Bing hoặc Yandex[2], hoặc sử dụng các công cụ chuyên dụng như TinEye[3] hoặc Google Lens[4] để tìm kiếm ảnh tương tự. Đối với xác minh video, plugin xác minh InVid-WeVerify[5] [5] thường được sử dụng. Plugin này hỗ trợ trích xuất các khung hình riêng lẻ từ video để thực hiện tìm kiếm hình ảnh ngược. Ngoài ra, các chương trình phần mềm như VLC[6] hoặc Adobe Premiere[7] đôi khi được sử dụng để trích xuất các khung hình chính (keyframe) từ video. Bằng cách thực hiện tìm kiếm hình ảnh ngược, chúng ta có thể phát hiện sự thay đổi hoặc bối cảnh sử dụng không đúng của hình ảnh hoặc video.

[2] yandex.com

[3] tineye.com

[4] lens.google

[5] weverify.eu /verification -plugin

[6] www.videolan.org

[7] www.adobe.com/ products/premiere.html

Một cách thức khác cũng rất phổ biến là phân tích dữ liệu kết xuất (metadata) từ hình ảnh hoặc video. Dữ liệu kết xuất chứa rất nhiều thông tin quan trọng, đặc biết về thời gian và địa điểm. Dựa trên đó, độ tin cậy của ảnh và video sẽ được kiểm tra dễ dàng hơn. Tuy nhiên, cần lưu ý rằng đa phần dữ liệu kết xuất không có trong ảnh hay video được tải lên từ các mạng xã hội. Nguyên nhân là do những hệ thống mạng xã hội thường loại bỏ dữ liệu kết xuất trong quá trình tải lên để tiết kiệm không gian lưu trữ [3]. Hơn nữa, thông tin từ dữ liệu kết xuất có thể bị sửa đổi hoặc làm giả mạo khá đơn giản. Bên cạnh dữ liệu kết xuất, đôi khi việc nhúng các dấu mờ (watermark) hoặc logo trong một số hình ảnh và video đôi khi cũng rất hữu ích trong việc xác định nguồn gốc của nội dung và cung cấp thông tin hữu ích cho các cuộc điều tra tiếp theo.

Bên cạnh các cách thức trên, các nhà báo cũng thường sử dụng phương pháp tìm kiếm theo từ khóa trên nhiều nền tảng khác nhau, như Telegram, Twitter và Discord, bằng cách áp dụng các truy vấn liên quan đến sự kiện được mô tả trong hình ảnh hoặc video. Các chiến lược này giúp họ thu thập thêm thông tin về nguồn gốc của nội dung. Đôi khi, cád phần mềm nhận diện khuôn mặt như PimEyes[8] và Search4faces[9] cũng được sử dụng khi kiểm định thông tin với các nhân vật nổi tiếng.

[8] pimeyes.com

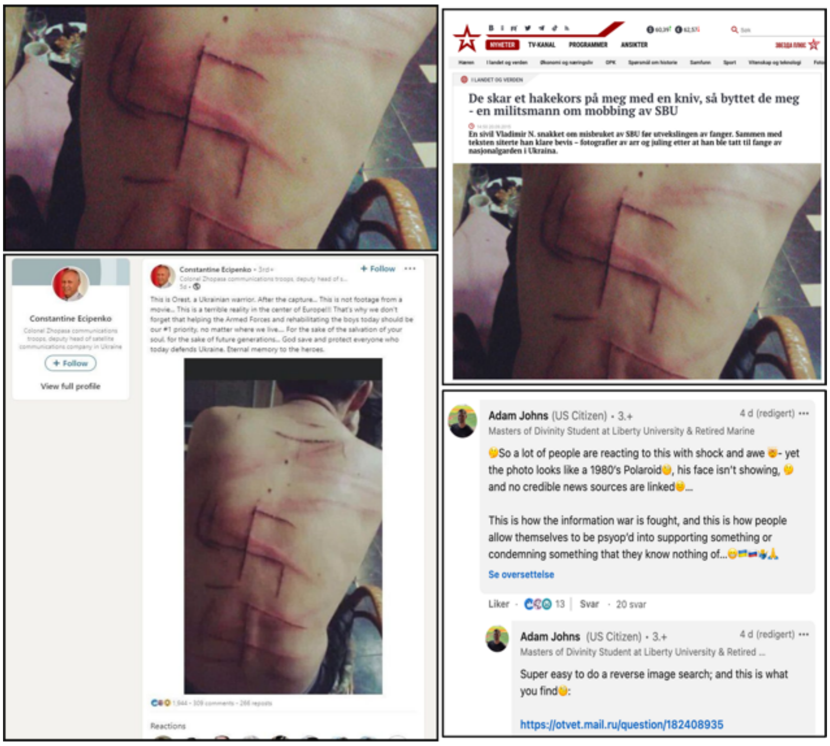
[9] search4faces.com

Một ví dụ về việc sử dụng ảnh cũ để lan truyền thông tin sai lệch là trường hợp của một binh sĩ Ukraina có tên là Orest. Hình ảnh của anh ta với một chữ vạn[10] được khắc trên lưng bởi binh sĩ Nga đã lan truyền trên mạng và được chia sẻ bởi nhiều người dùng, bao gồm cả một cựu binh quân đội Na Uy và một chuyên gia chiến tranh Ukraine nổi tiếng, Arne Bård Dalshaug. Để xác minh tính xác thực của hình ảnh, Faktisk Verifiserbar thực hiện tìm kiếm hình ảnh ngược đơn giản, và họ nhanh chóng xác định ảnh đã được sử dụng trước đó trong một ngữ cảnh không liên quan (xem Hình 2).

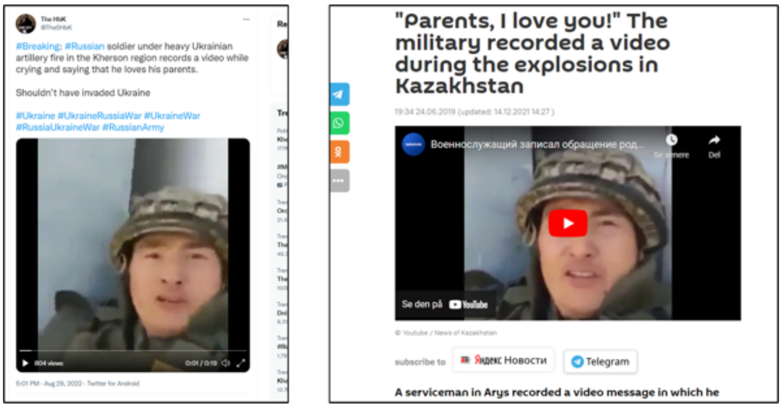
[10] Chữ Vạn hoặc swastika là một hình dạng hình học và nó được sử dụng như một biểu tượng của thần linh và tâm linh trong các tôn giáo Ấn Độ. Ở phương Tây, nó là biểu tượng của điềm lành và may mắn cho đến những năm 1930, khi nó bị lợi dụng thành một biểu tượng đặc trưng của Đức quốc xã như là một biểu tượng của bản sắc Aryan và do đó bị kỳ thị bởi sự phân biệt chủng tộc và chống chủ nghĩa phân biệt chủng tộc. - Theo Wikipedia

Faktisk Verifiserbar cũng đã điều tra một trường hợp khác liên quan đến nội dung sai ngữ cảnh được chia sẻ trên mạng xã hội liên quan đến xung đột ở Ukraine. Vào ngày 29 tháng 8 năm 2022, một video xuất hiện cho thấy một binh sĩ Nga đang gặp khó khăn. Trong đoạn video, binh sĩ này đã khóc trước camera trong khi âm thanh của vũ khí nổ phát ra phía sau. Phụ đề khẳng định rằng binh sĩ này là người Nga và đang chịu áp lực lớn ở vùng Kherson, trong chiến dịch phản công của Ukraine chống lại lực lượng Nga vào thời điểm đó. Hình 3 minh họa cho trường hợp này.

Bằng cách sử dụng công cụ nhận diện khuôn mặt PimEyes và thực hiện tìm kiếm hình ảnh ngược, Faktisk Verifiserbar phát hiện ra rằng cùng một video đã được công bố trước đó vào năm 2019, xuất hiện trên kênh truyền hình



Hình 2. Ảnh bị dùng sai ngữ cảnh trong xung đột Nga-Ukraine được phát hiện thông qua tìm kiếm hình ảnh ngược. ẢNH: Faktisk Verifiserbar.



Hình 3. Ảnh bên trái cho thấy một binh sĩ khóc trước camera với một chú thích đầy hiểu lầm liên quan đến chiến dịch phản công của Ukraine ở vùng Kherson chống lại lực lượng Nga. Ảnh bên phải cho thấy video gốc được đăng trên kênh truyền hình Kazakhstan, KTK, thể hiện một binh sĩ khóc và nói với camera, "Nếu con không sống sót, bố mẹ, con yêu bố mẹ". ẢNH: Faktisk Verifiserbar.

Kazakhstan KTK và cơ quan truyền thông của Nga Sputnik. Trong bản tin của KTK, binh sĩ trong video nói, *"Nếu con không sống sót, bố mẹ, con yêu bố mẹ"*.

2.2. Xác định người đăng nội dung

Yếu tố quan trọng khác của việc kiểm chứng là xác định danh tính của người tạo ra, tải lên hoặc chia sẻ nội dung gốc, và nếu có thể, thiết lập liên lạc với họ. Thông thường, nhà báo sẽ đặt câu hỏi quan trọng cho những người này, như vị trí mà họ đang có mặt khi quay lại đoạn phim, nhận xét của họ về sự kiện và loại thiết bị sử dụng để quay lại nội dung. Phỏng vấn người hoặc tổ chức này giúp phát hiện ra bất kỳ thông tin giả mạo nào đang được phổ biến, có chủ ý hay không chủ ý. Bằng cách đặt câu hỏi trực tiếp, nhà báo thường khiến người đó thừa nhận nếu họ thực sự không quay lại đoạn phim. Hơn nữa, câu trả lời cho những câu hỏi này có thể được kiểm chứng bằng thông tin có sẵn, chẳng hạn như kiểm tra dữ liệu Exif trong một ảnh hoặc so sánh video với Google Street View. Trong trường hợp hình ảnh hoặc video được tải lên một mạng xã hội, thông tin về dữ liệu kết xuất thường bị mất, nhưng nhà báo cũng có thể yêu cầu tập tin gốc, hoặc bằng chứng hỗ trợ bổ sung, chẳng hạn như hình ảnh hoặc video bổ sung, để xác minh vị trí của người đó tại địa điểm.

Trong trường hợp không thể thiết lập liên lạc với người/tổ chức đã tải lên hoặc chia sẻ nội dung trực tuyến, các nhà báo sử dụng các phương pháp thay thế để xác minh nội dung. Một phương pháp là thực hiện phân tích trên mạng xã hội bằng cách tìm kiếm người dùng (bằng cách sử dụng tên người dùng, thông tin liên quan khác) đã chia sẻ nội dung trên các nền tảng mạng xã hội nổi bật khác, diễn đàn trực tuyến và các công cụ tìm kiếm người như PeopleFinder.com[11], Spokeo.com[12], Webmii.com[13], hoặc Pipl.com[14]. Trong trường hợp một trang web đang được điều tra, các công cụ trực tuyến như Who.is[15], DNSChecker.org[16] và các công cụ tìm kiếm tên miền tương tự khác có thể được sử dụng. Một giải pháp khác là phân tích thông tin từ dữ liệu kết xuất liên quan đến nội dung nếu có sẵn. Có nhiều công cụ trực tuyến để trích xuất và phân tích thông tin kiểu này như exifdata.com[17], Forensically[18], FotoForensics[19] hoặc FotoVerifier[20] [6].

Bằng cách tiến hành phân tích kỹ lưỡng về tương tác, bài đăng và sự tương tác với người khác, các nhà báo có thể phát triển một hiểu biết rõ ràng về tính uy tín, nhất quán và động cơ tiềm ẩn của người đăng.

Cuối cùng, phần mềm nhận dạng khuôn mặt như PimEyes cũng có thể được sử dụng để hỗ trợ trong quá trình xác minh. Bằng cách sử dụng ảnh của người tải lên, phần mềm này có thể thực hiện tìm kiếm trên internet để xác định các trường hợp khác nơi cùng một khuôn mặt xuất hiện. Điều này có thể giúp xác minh xem người đằng sau nội dung có sự hiện diện trực tuyến nhất quán hay không, hoặc liệu danh tính của họ có liên quan đến các hoạt động hoặc tài khoản khác không.

[11] www.peoplefinder.com
[12] www.spokeo.com
[13] webmii.com
[14] pipl.com
[15] who.is
[16] dnschecker.org
[17] exifdata.com
[18] 29a.ch/photo-forensics
[19] fotoforensics.com/
[20] fotoverifier.eu/

2.3. Xác định địa điểm

FAKTISK VERIFISERBAR sử dụng rất nhiều công cụ bản đồ trực tuyến để xác định vị trí các sự kiện trong ảnh và video liên quan đến xung đột Nga-Ukraine. Các công cụ quan trọng mà họ tin dùng là Google Maps, Google Earth Pro, Yandex Maps[21], Planet Labs và NASA FIRMS[22]. Dưới đây là minh họa về trường hợp vụ nổ tại căn cứ không quân Engels ở Nga vào ngày 5 tháng 12 năm 2022, sử dụng hình ảnh vệ tinh thu được từ Planet Labs.

[21] yandex.com/maps/

[22] firms.modaps.eosdis.nasa.gov/

Telegram và Twitter chia sẻ vụ nổ do drone tấn công gần căn cứ không quân Engels ở vùng Saratov vào ngày 5 tháng 12 năm 2022, cách biên giới Ukraine khoảng 74 km. Hai video CCTV từ các căn hộ gần đó đã ghi lại vụ nổ, tuy nhiên, vị trí chính xác và liên kết trực tiếp đến căn cứ không quân vẫn chưa được xác nhận vào thời điểm đó.

Để điều tra, FAKTISK VERIFISERBAR bắt đầu thu thập bằng chứng liên quan đến sự kiện này. Họ thu được hình ảnh vệ tinh của căn cứ từ Planet Labs, tập trung đặc biệt vào tuần trước sự kiện được tố cáo. Phân tích hình ảnh này đã chỉ ra sự hiện diện của các máy bay ném bom chiến lược, bao gồm máy bay Tu-160 và Tu-95, đặt tại căn cứ không quân. Đáng chú ý, không có dấu hiệu nào về tổn thất đối với cả căn cứ lẫn máy bay. Hình 4(B) mô tả hình ảnh của căn cứ vào ngày Chủ Nhật, 4 tháng 12 năm 2022, một ngày trước khi vụ nổ được cho là đã xảy ra. Tuy nhiên, hình ảnh thu được từ Planet Labs vào thứ Ba, 6 tháng 12, lúc 08:00 giờ Na Uy, tiết lộ một sự kiện quan trọng tại căn cứ Engels. Hình ảnh vệ tinh thể hiện một máy bay Tu-95 với cánh quạt bao quanh bởi bọt chống cháy, và nhiều nhân viên và xe cứu hỏa, Hình 4 (A).

FAKTISK VERIFISERBAR cũng tiến hành phân tích các video ghi lại vụ nổ từ xa. Hai video được ghi lại bởi camera giám sát và chia sẻ trên Telegram về vụ nổ đã cung cấp bằng chứng quan trọng. Hình 4(C) thể hiện một ảnh chụp từ một đoạn video giám sát. Các địa điểm được mô tả trong video đã được kiểm tra với Google Street View để xác nhận tính chính xác của chúng. Tính toán về tốc độ âm thanh đã xác nhận rằng những địa điểm này gần với sân bay và hướng vụ nổ trong đoạn video giám sát trùng khớp với khu vực của căn cứ không quân. Với thông tin tổng hợp này, rõ ràng có một vụ nổ đã xảy ra tại căn cứ không quân Engels, có thể gây tổn thất cho một máy bay, như thể hiện trong Hình 4 (A).

Trong trường hợp "Rửa xe ở Donetsk,"các công cụ Google Maps, VLC, Google Translate và Yandex Maps đã đóng một vai trò quan trọng trong việc kiểm chứng một video trực tuyến được chia sẻ trên mạng xã hội. Video này quay từ một chiếc xe đang di chuyển, cho thấy một viên đạn pháo trên đường ở Donetsk. FAKTISK VERIFISERBAR đã sử dụng VLC Media Player để trích xuất các khung hình tập trung vào các đặc điểm đặc biệt như mặt tiền nhà và biển hiệu rửa xe. Google Translate đã giúp dịch thuật ngữ tiếng Ukraina cho "rửa xe,"và Yandex Maps đã cung cấp các địa điểm tiềm năng ở Donetsk, sau đó được xác nhận thông qua Google Maps và Yandex Maps, sử dụng Street View

Hình 4. Vào đêm Thứ Hai, ngày 5 tháng 12 năm 2022, một vụ nổ mạnh đã xảy ra tại sân bay Engels, cách Moscow 720 km về phía đông nam. Hình *(A)* hiển thị một máy bay ném bom TU-95 đặt trên mặt đất giữa bọt chống cháy, với hai xe cứu hỏa và nhân viên ở gần máy bay bị ảnh hưởng. Bức ảnh này được chụp vào Thứ Ba, ngày 6 tháng 12 năm 2022, bằng cách sử dụng Planet Labs. Hình *(B)* thể hiện một cảnh trước vụ tấn công được chụp bởi Planet Labs vào sáng Chủ Nhật, ngày 4 tháng 12 năm 2022, cho thấy máy bay ở vị trí tương tự. Không có bất kỳ không bình thường nào được quan sát trên hình ảnh vệ tinh này từ buổi sáng Chủ Nhật. Hình *(C)* là một khung hình được trích xuất từ video camera giám sát, lấy từ Telegram, quay khoảng 3 km xa khỏi căn cứ không quân. HÌNH ẢNH: TELEGRAM, PLANET LABS, Faktisk Verifiserbar.

Hình 5. Trường hợp "Rửa xe ở Donetsk."Hình ảnh bên phải là từ đoạn video, trong khi hình ảnh bên trái là từ Google Street View.

để phù hợp với các mặt tiền nhà (Hình 5). Lưu ý rằng, quá trình kiểm tra khá phức tạp do hình ảnh Yandex lỗi thời từ năm 2010, nên hình ảnh Google Street View (dù cũng đã rất cũ, từ 2011) đã đóng vai trò quan trọng trong việc xác định địa điểm.

2.4. Xác minh thời điểm

Một tin tức có thể được chia sẻ nhiều lần trên các nền tảng khác nhau, mỗi nền tảng lại có một dấu thời gian riêng biệt và điều này tạo ra một thách thức trong việc xác định chính xác thời điểm nội dung được tạo ra.

Đối với các đối tượng chuyên nghiệp, ví dụ với nhà báo, họ thường ghi rõ ngày và giờ chụp khi đăng một ảnh hay video. Điều này cung cấp một tham chiếu đáng tin cậy trong quá trình kiểm chứng thông tin. Tuy nhiên, người dùng thông thường thường không cung cấp ngày chính xác của nội dung họ chia sẻ.

Để xác định thời điểm, cách phổ biến nhất là căn cứ trên thông tin từ dữ liệu kết xuất, phổ biết nhất là từ Exif headers đối với ảnh. Các dữ liệu này giữ thông tin quý giá về ngày, giờ, thiết bị, cài đặt máy ảnh và thậm chí là vị trí GPS. Tuy nhiên, khi nội dung được tải xuống từ mạng xã hội, các Exif headers thường được loại bỏ để tiết kiệm không gian lưu trữ [3]. Để vượt qua hạn chế này, các nhà báo có thể yêu cầu hình ảnh hoặc video gốc trực tiếp từ nhân chứng tại chỗ hoặc người chia sẻ nội dung [4]. Bằng cách thu được tập tin gốc, dữ liệu Exif có thể được kiểm tra để xác minh tính chính xác và thiết lập một dòng thời gian đáng tin cậy hơn. Lưu ý quan trọng là phải thận trọng khi xác minh thông tin được tìm thấy trong Exif, vì nó có thể dễ dàng được sửa đổi.

Khi không có thông tin từ dữ liệu kết xuất, Faktisk Verifiserbar sử dụng các kỹ thuật thay thế như phân tích bóng, và phân tích lịch sử thời tiết. Các phương pháp này cho phép họ đưa ra ước tính xấp xỉ về thời điểm. Dưới đây là một ví dụ về cách Faktisk Verifiserbar suy luận và ước tính về thời điểm bằng cách xem xét chi tiết hình ảnh và nghiên cứu lịch sử thời tiết.

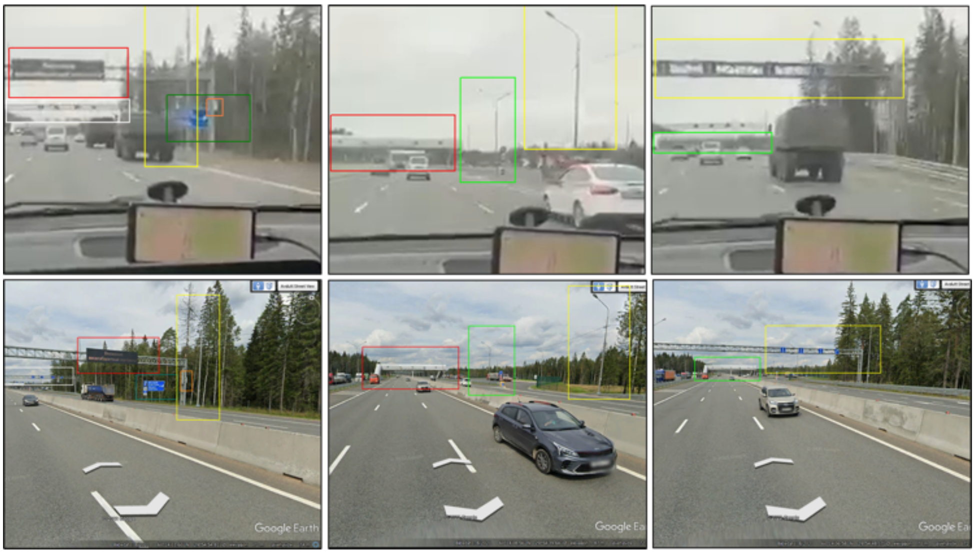
Giữa tháng 5 năm 2022, Faktisk Verifiserbar nhận được một báo cáo về một video cho rằng Nga đang vận chuyển tên lửa về biên giới với Phần Lan. Video được quay từ một chiếc xe ô tô, mô tả một đoàn xe chở tên lửa quân sự di chuyển trên một con đường cao tốc. Phần mô tả đi kèm gợi ý rằng hoạt động này là một phản ứng với việc Phần Lan đang theo đuổi việc gia nhập NATO. Để xác minh tính xác thực của video và xác định vị trí, Faktisk Verifiserbar thực hiện một cuộc điều tra toàn diện. Bằng cách xem xét kỹ lưỡng các chi tiết hình ảnh trong video và phân tích mạng lưới đường cao tốc Nga, Faktisk Verifiserbar đã thành công trong việc xác định địa điểm quay chính xác. Điều này được thực hiện bằng cách xác định các biển hướng cụ thể hiển thị trong đoạn video (xem Hình 6). Địa điểm được xác nhận được tìm thấy cách Vyborg khoảng một giờ mười lăm phút lái xe, cách biên giới Phần Lan 127 kilomet. Qua những nỗ lực xác minh này, Faktisk Verifiserbar đã đưa ra một số thông tin về ngữ cảnh và độ chính xác của video đang được thảo luận.

Tuy nhiên, việc xác định liệu video có được quay sau khi quá trình khởi động của NATO bắt đầu đối mặt với một thách thức khác. Để giải quyết vấn đề này, Faktisk Verifiserbar đối chiếu dữ liệu về thời tiết để xác định khoảng thời gian có thể cho việc quay video. Bằng cách xem xét hình ảnh từ vệ tinh từ Sentinel Hub[23], họ đã được xác nhận rằng tuyết vẫn còn tồn tại trong khu vực ít nhất là đến ngày 23 tháng 4 năm 2022. Vì video không có dấu hiệu của tuyết, thông tin này đóng vai trò quan trọng trong việc thu hẹp khả năng ngày mà video được ghi hình. Đáng chú ý, video cho thấy các cánh gạt kính chắn gió đang hoạt động, cho thấy có mưa vào ngày quay video. Để xác minh điều này, Faktisk Verifiserbar tham khảo dữ liệu thời tiết lịch sử từ Weather.com[24] để xác định những ngày có báo cáo về mưa trong khu vực. Mặc dù không thể xác định một cách tuyệt đối rằng đoạn video là từ ngày 16 tháng 5, sự kết hợp giữa dữ liệu lịch sử thời tiết và hình ảnh từ vệ tinh Sentinel Hub cho thấy video đã được ghi lại vào tháng 5, chứ không phải tháng 4 - tháng mà Phần Lan bắt đầu quá trình gia nhập NATO.

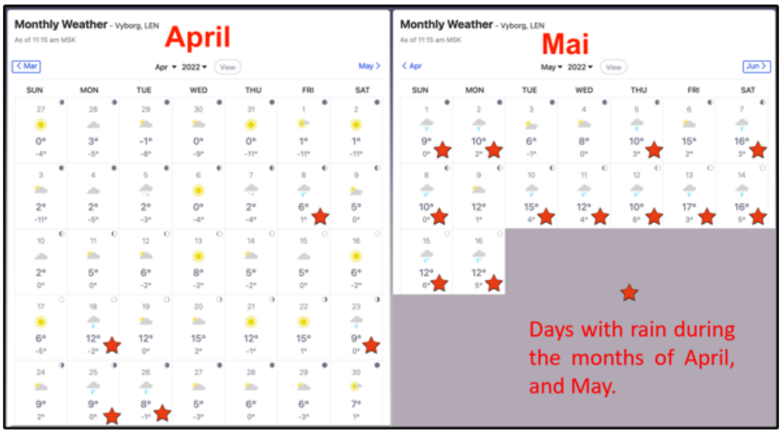
[23] www.sentinel-hub.com

[24] weather.com

Trong một cuộc điều tra khác liên quan đến xung đột Ukraine, Faktisk Ver-

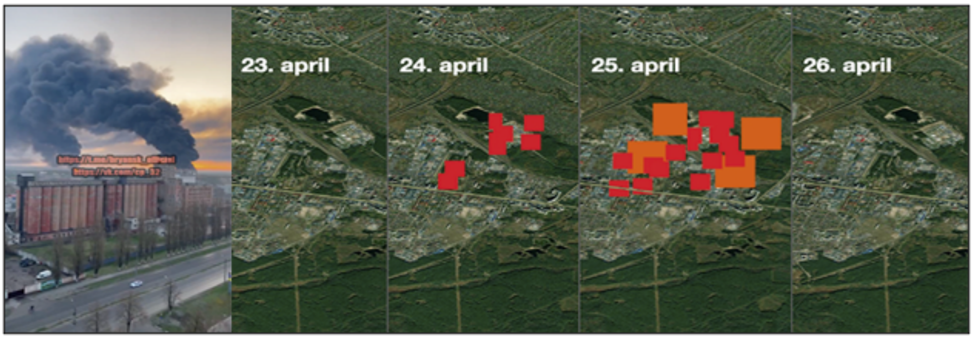


Hình 6. Các hình ảnh ở hàng đầu hiển thị các khung hình từ video, trong khi các hình ảnh ở dưới là hình ảnh từ Google Street View. ẢNH: Faktisk Verifiserbar.



Hình 7. Các hình ảnh hiển thị các bức ảnh chụp từ trang web *Weather.com*. Những ngôi sao đỏ biểu thị các ngày có mưa trong tháng 4 và tháng 5 năm 2022. Bằng cách sử dụng dữ liệu thời tiết này, Faktisk Verifiserbar đã thu hẹp khả năng ngày có thể mà video liên quan đến sự di chuyển tên lửa về biên giới Phần Lan được ghi lại. ẢNH: Faktisk Verifiserbar.

ifiserbar nghiên cứu một vụ cháy lớn tại thành phố Bryansk của Nga. Sự kiện thu hút sự chú ý khi các phương tiện truyền thông nhà nước Nga cáo buộc Ukraine chịu trách nhiệm về việc tấn công hai kho nhiên liệu trong thành phố. Tuy nhiên, việc xác minh các video mô tả vụ việc trở nên khó khăn do điều kiện ánh sáng kém. Tình hình này rất quan trọng vì có thể đánh dấu lần đầu tiên Ukraine tấn công lại lãnh thổ Nga trong xung đột này. Để làm sáng tỏ vấn đề, Faktisk Verifiserbar sử dụng các công cụ bản đồ trực tuyến như Google Maps và NASA FIRMS. Bằng cách sử dụng bản đồ hoả hoạn của NASA, các nhà báo đã xác nhận ngày của các vụ tấn công, cung cấp bằng chứng mạnh mẽ cho việc xác thực sự kiện thật sự xảy ra. Để biết thêm chi tiết, xem Hình 8.



Hình 8. Hình này ở bên trái hiển thị một khung hình từ video cho thấy một kho nhiên liệu đang cháy. Các hình ảnh ở bên phải được lấy từ NASA FIRMS vào 4 ngày khác nhau. Các hình ảnh NASA FIRMS cho thấy nhiệt độ cao ở khu vực nơi kho nhiên liệu nằm giữa ngày 24 và 25 tháng 4. Thông qua phân tích này, Faktisk Verifiserbar đã xác nhận rằng video về việc kho nhiên liệu đang cháy là sự kiện có thật.

2.5. Tại sao nó được chia sẻ trực tuyến?

Hiểu động cơ đằng sau của nội dung được chia sẻ rất quan trọng cho việc xác minh tính xác thực của nó. Sự hiểu biết này giúp đánh giá độ tin cậy, phát hiện sự chỉnh sửa và khám phá ngữ cảnh được thúc đẩy bởi mục tiêu cụ thể. Nó cũng bảo vệ khỏi định kiến cá nhân, đảm bảo báo cáo công bằng và chân thật. Nghiên cứu động cơ của nội dung là một phần quan trọng của quá trình xác minh, thúc đẩy tính chính xác và báo cáo đạo đức.

Chúng tôi trình bày một trường hợp được Faktisk Verifiserbar điều tra, tập trung vào một video tuyên truyền lan truyền trên mạng xã hội vào đầu tháng 9 năm 2022. Video này tuyên bố là sản phẩm của Gazprom, một công ty năng lượng Nga sở hữu cả do nhà nước và tư nhân. Nó trưng bày điều kiện băng giá tại châu Âu do sự ngừng cung cấp khí do các biện pháp trừng phạt. Video đã được nhiều người Nga chia sẻ mạnh mẽ và sau đó được các tài khoản truyền thông xã hội phương Tây chia sẻ, làm tăng cường sự lan truyền của nó. Sau cuộc điều tra, Faktisk Verifiserbar không tìm thấy bất kỳ video chính thức nào được Gazprom chia sẻ phù hợp với nội dung mô tả. Tuy nhiên, bằng chứng trực tuyến tiếp theo đã nảy sinh, chỉ ra rằng video lan truyền không phải do Gazprom sản xuất, mà do một nhà báo Nga tên là Arthur Khodyrev tạo ra. Khi được hỏi về video (không phải bởi Faktisk Verifiserbar), Khodyrev thừa nhận đã tạo nó theo quyết định cá nhân mà không có bất kỳ động cơ về tiền bạc nào. Mục đích video là để cảnh báo cho châu Âu về những hậu quả của việc áp đặt trừng phạt lên Nga và kiên quyết không mua khí của nước này, mà ông gọi là một hình thức "tự tử khí đốt". Sau khi tiến hành cuộc điều tra bổ sung vào nhà báo Arthur Khodyrev, Faktisk Verifiserbar đã khám phá một số chi tiết đáng chú ý. Đầu tiên, phát hiện rằng video nói trên được tạo thành từ nhiều đoạn clip đã tồn tại được ghép lại. Thứ hai, việc bao gồm các đoạn phim với thành phố Krasnoyarsk ở Siberia được coi là không liên quan vì nó không liên quan đến mạng lưới khí đốt Nga. Cuối cùng, âm nhạc nền được sử dụng trong video có chất lượng thấp, vì nó được trích xuất từ một bản thu trực tiếp của một bài hát đã được tải lên YouTube vào năm 2016. Bằng cách xem xét kỹ lưỡng tất cả các chứng cứ có sẵn, mọi thứ trở nên rõ ràng rằng ý định chính đằng sau video là gây ra sự bất ổn trong dư luận châu Âu. Video nhằm mục đích khơi gợi nghi ngờ và đặt câu hỏi về quyết định của chính phủ của họ, đặc biệt là về việc áp đặt trừng phạt lên Nga và lựa chọn không mua khí đốt của Nga.

3. Một số ví dụ khác

Phân tích hình ảnh vệ tinh đóng một vai trò quan trọng trong báo cáo kiểm chứng hiện đại [1]. Bằng cách cung cấp hình ảnh chi tiết và chính xác của bề mặt Trái Đất, hình ảnh vệ tinh có thể mang lại cái nhìn quý báu mà có lẽ sẽ không được chú ý nếu không sử dụng. Những người làm báo chí/kiểm chứng thông tin thường sử dụng hình ảnh vệ tinh để xác minh hoặc thách thức các tuyên bố của cá nhân và/hoặc chính phủ, lực lượng quân đội hoặc các nhóm khác. Ví dụ, nếu một quốc gia phủ nhận rằng họ đã triển khai lực lượng ở một khu vực cụ thể, hình ảnh vệ tinh có thể được sử dụng để xác minh những tuyên bố đó, tức là có hay không có binh sĩ hoặc trang thiết bị tại một vị trí cụ thể. Tương tự, phân tích hình ảnh vệ tinh có thể được sử dụng để theo dõi di chuyển của nhân sự/trang thiết bị quân sự và xác định các khu vực tiềm ẩn xung đột. Phân tích hình ảnh vệ tinh cũng có thể được sử dụng để xem xét các vấn đề môi trường như phá rừng, khai thác mỏ bất hợp pháp và rò rỉ dầu. Nó cũng có thể được sử dụng để theo dõi sự lan truyền của các đợt lây nhiễm và thảm họa tự nhiên, hoặc để giám sát thay đổi trong mô hình thời tiết.

Trong quá trình đưa tin về xung đột giữa Nga và Ukraine, Faktisk Verifiserbar cố gắng có quyền truy cập vào hình ảnh vệ tinh được cập nhật đều đặn ở khu vực xung đột và các địa điểm chính trong Nga, Ukraine và Belarus có vai trò quan trọng trong xung đột. Bên cạnh các dịch vụ miễn phí, họ cũng tận dụng Maxar[25] và Planet Labs[26], hai nhà cung cấp nổi tiếng về hình ảnh vệ tinh độ phân giải cao, cung cấp cập nhật đều đặn. Trong phần này chúng tôi sẽ tóm tắt các trường hợp đáng chú ý mà Faktisk Verifiserbar đã tận dụng đối tác với Planet Labs để phân tích và xem xét hình ảnh vệ tinh độ phân giải cao, làm sáng tỏ các diễn biến quan trọng.

[25] www.maxar.com
[26] www.planet.com

3.1. Máy bay ném bom chiến lược

Việc triển khai các máy bay ném bom Nga tại bán đảo Kola ở phía Tây Bắc của Nga đã thu hút sự chú ý quốc tế vào ngày 30 tháng 9 năm 2022, theo một báo cáo từ **The Jerusalem Post**. Hình ảnh vệ tinh của tờ báo Israel từ tháng

Hình 9. Một hình ảnh vệ tinh chụp vào ngày 7 tháng 10 cho thấy bảy máy bay ném bom chiến lược Tu-160 (đánh dấu bằng màu đỏ) và bốn chiếc máy bay Tu-95 (đánh dấu bằng màu vàng) tại sân bay Olenja trên bán đảo Kola. ẢNH: Planet Labs và Faktisk Verifiserbar.

Hình 10. Một chiếc máy bay ném bom chiến lược Tu-160 Blackjack được xác định bởi các máy bay F-16 Na Uy trong tình trạng báo động QRA vào tháng 10 năm 2021. ẢNH: Forsvaret và Faktisk Verifiserbar.

8 và tháng 9 đã tiết lộ sự hiện diện của bốn chiếc máy bay Tu-160 và ba chiếc Tu-95. Thực hiện một phân tích toàn diện về sân bay không quân Olen'ya nằm ở khu vực Tây Bắc của bán đảo Kola của Nga bằng cách sử dụng hình ảnh vệ tinh từ Planet Labs, Faktisk Verifiserbar đã mang lại cái nhìn chi tiết về sự hiện diện của các máy bay ném bom chiến lược tại khu vực này. Đáng chú ý, những chiếc máy bay này thường đặt tại căn cứ không quân Engels, nằm cách Moskva khoảng 720 kilômét về phía đông nam. Để hiểu rõ hơn, vui lòng xem Hình 9.

Ngày 07 tháng 10 năm 2022, Faktisk Verifiserbar sử dụng hình ảnh vệ tinh từ Planet Labs để ghi lại một diễn biến quan trọng tại một sân bay cách khoảng 200 kilômét từ biên giới Na Uy. Hình ảnh chi tiết của vệ tinh rõ ràng cho thấy sự hiện diện của trang thiết bị không lực Nga tại đây. Cụ thể, hình ảnh đã tiết lộ sự hiện diện của bảy máy bay Tu-160 Blackjack (xem Hình 10) và bốn chiếc máy bay Tu-95 Bear-H đậu trên sân bay. Những hình ảnh chụp sau đó hai ngày đã thể hiện một trong những máy bay Tu-160 chuẩn bị cất cánh trên đường băng. Hình ảnh vệ tinh đã tiết lộ một cuộc tập trung các máy bay ném bom chiến lược có phạm vi xa tại một căn cứ không quân Nga nằm gần biên giới Na Uy. Những chiếc máy bay này có khả năng phóng các tên lửa hạt nhân đến mục tiêu ở cả Hoa Kỳ và châu Âu.

Sau khi tiến hành thêm kiểm tra với hình ảnh vệ tinh từ Planet Labs, FAKTISK VERIFISERBAR đã khám phá ra những phát hiện đáng kể. Được biết rằng nhóm ban đầu bốn chiếc máy bay Tu-160 đã được triển khai tại đây từ ngày 21 tháng 8 năm 2022. Sau đó, vào ngày 25 tháng 9 năm 2022, ba chiếc máy bay Tu-95 cũng được quan sát ở cùng một địa điểm. Nhiều hình ảnh vệ tinh chụp trong giai đoạn này miêu tả những chiếc máy bay đậu trên đường băng, cho thấy sự chuẩn bị cho việc cất cánh.

Theo tình báo quân sự Ukraine, đã có báo cáo cho biết nhiều máy bay ném bom chiến lược triển khai tại bán đảo Kola được sử dụng để tấn công các địa điểm ở Ukraine. Ngày 8 tháng 10, quan sát được rằng bảy máy bay Tu-160 tại sân bay Olen'ya đã được trang bị tên lửa cruise Kh-101, như đã nêu trên trang web chính thức[1].

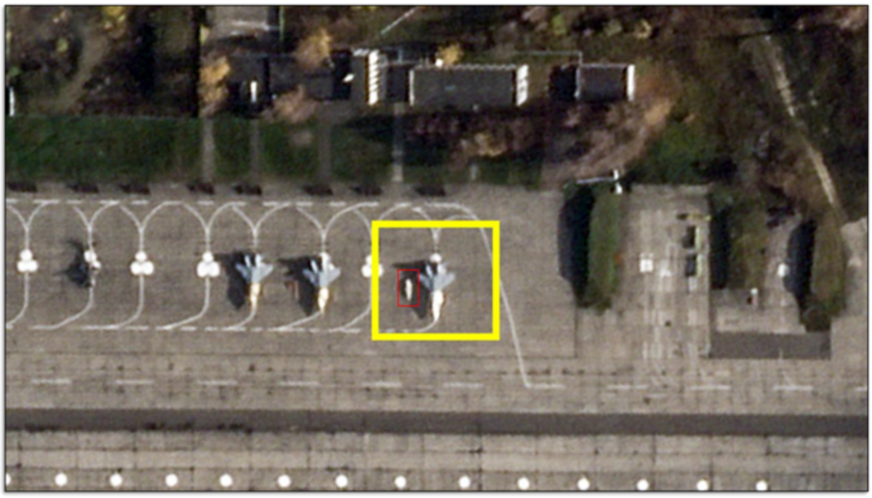
Ngày 12 tháng 10 năm 2022, FAKTISK VERIFISERBAR đã công bố câu chuyện này, nhanh chóng thu hút sự chú ý rộng rãi và trở thành tin đầu trang trên các báo trực tuyến hàng đầu ở các quốc gia Bắc Âu. Nó cũng thu hút sự chú ý của các phương tiện truyền thông quốc tế, bao gồm các tờ báo Anh và đã được đưa ra làm sự kiện kiểm chứng trong Newsweek. Câu chuyện này thậm chí còn lan ra Ukraine, nơi nó nhận được sự chú ý lớn.

3.2. Máy Bay Quân Sự Nga Triển Khai ở Belarus

Ngày 01 tháng 11 năm 2022, Bộ Quốc phòng Anh thông báo rằng Nga đã triển khai quân sự tại Sân bay Machulishchi ở Belarus, gần thành phố Minsk, bao gồm máy bay chiến đấu *MiG-31K FOXHOUND* của Nga và tên lửa siêu âm tiên tiến Kinzjal, còn được biết đến với tên gọi *AS-24 KILLJOY*[2]. Những tên lửa này có khả năng di chuyển với tốc độ gấp 10 lần tốc độ âm thanh và có phạm vi 2000 kilômét.

Để tiếp tục điều tra, FAKTISK VERIFISERBAR đã có được hình ảnh vệ tinh mới nhất từ Planet Labs, như mô tả trong Hình 11. Những hình ảnh này cho thấy sự xuất hiện của ba máy bay *MiG-31K FOXHOUND* Nga đậu trên mặt đất tại Sân bay Machulishchi, nằm phía nam của Minsk, vào thứ Hai, ngày 31 tháng 10 năm 2022, lúc 09:41 sáng. Hình ảnh vệ tinh được chụp bởi các vệ tinh của Planet Labs vào sáng Chủ Nhật trước đó, một ngày trước khi FAKTISK

[1] https://tinyurl.com/mrup5mhc
[2] Báo cáo NATO. Danh sách có thể xem tại: https://tinyurl.com/3fz92c8n



Hình 11. Một trong số máy bay MiG-31K (được đánh dấu bằng hộp màu vàng) được chụp bởi vệ tinh Planet Labs vào buổi sáng Chủ nhật, có một đối tượng màu trắng mà rõ ràng là một tên lửa Kinzjal (được đánh dấu bằng hộp màu đỏ). ẢNH: Planet Labs và Faktisk Verifiserbar.

Hình 12. Máy bay MiG-31K với tên lửa AS-24 KILLJOY được gắn dưới bụng.

Verifiserbar bắt đầu cuộc điều tra của mình. Đáng chú ý, một trong những chiếc máy bay trên hình hiển thị một tên lửa *Kinzjal* rõ ràng đặt bên cạnh nó. Để có tham chiếu hình ảnh, một bức ảnh của một chiếc MiG-31K mang theo tên lửa *Kinzjal* được trình bày trong Hình 12.

Để tiếp tục theo dõi sự xuất hiện của máy bay Nga tại Belarus, Faktisk Verifiserbar đã truy xuất lịch sử hình ảnh vệ tinh của Sân bay Machulishchi từ Planet Labs. Phân tích hình ảnh đã xác nhận rằng các máy bay đã có mặt tại sân bay ít nhất từ ngày 18 tháng 10 năm 2022.

Để kết thúc bài này, chúng tôi giới thiệu với độc giả các công cụ mà Faktisk Verifiserbar đã sử dụng để kiểm chứng thông tin, tóm tắt ở bảng sau:

Ứng dụng	**Công cụ**
Tìm kiếm ảnh ngược	Google Images, Google lens, Yandex Images, Bing Images, Tineye
Nhận diện khuôn mặt	PimEyes (Dịch vụ trả phí), Search4faces.com
Xác minh hình ảnh	ImgOps, InVid-WeVerify, FotoForensics
Mạng xã hội	Facebook, Twitter, Telegram, TikTok, VKontakte
Giám sát mạng xã hội	Dataminr, Tweetdeck
Định vị địa lý	Google Maps/Streetview, Yandex Maps/Streetview, Bing Maps, Apple Maps
Thời gian địa lý	NASA FIRMS, SunCalc, Yr.no, Weather.com
Hình ảnh vệ tinh	NASA FIRMS, Google Earth Pro, Sentinel Hub Playground, Planet.com
Quy trình làm việc	Slack và Google Sheets, Docs, Drive, và Gmail
Nền tảng xuất bản	NTB Mediebank

Tài liệu

[1] Corcoran, M., 2018. Satellite Journalism – The Big Picture. https://tinyurl.com/5n7ucchf.

[2] Khan, S.A., Sheikhi, G., Opdahl, A., Rabbi, F., Stoppel, S., Trattner, C., Dang-Nguyen, D.T., 2023. Visual User-Generated Content Verification in Journalism: An Overview. IEEE Access 11, 6748–6769.

[3] Pasquini, C., Amerini, I., Boato, G., 2021. Media Forensics on Social Media Platforms: A Survey. EURASIP Journal on Information Security 2021, 1 – 19.

[4] Silverman, C.L., 2013. Verification Handbook : An Ultimate Guideline on Digital Age Sourcing for Emergency Coverage.

[5] Teyssou, D., Leung, J.M., Apostolidis, E., Apostolidis, K., Papadopoulos, S., Zampoglou, M., Papadopoulou, O., Mezaris, V., 2017. The InVID Plug-in: Web Video Verification on the Browser. Proceedings of the First International Workshop on Multimedia Verification .

[6] Tran, C.H., Tran, Q.T., Long-Vu, Q.C., Nguyen, H.S., Tran, A.D., Dang-Nguyen, D.T., 2022. Dedigi: a privacy-by-design platform for image forensics, in: Proceedings of the 3rd ACM Workshop on Intelligent Cross-Data Analysis and Retrieval, pp. 58–62.

MỘT ỨNG DỤNG CỦA ÁNH XẠ CO TRONG CHỨNG MINH TÍNH HỘI TỤ CỦA THUẬT TOÁN VALUE-ITERATION

Trần Quốc Đệ, Nguyễn Chí Long

SV Đại học Bách khoa Hà Nội

Giới thiệu. *Học tăng cường (Reinforcement Learning) là một lĩnh vực nghiên cứu cách thức một tác nhân (Agent) trong một môi trường (Environment) đang ở một trạng thái (State) thực hiện một hành động (Action) để tối ưu hoá tổng các phần thưởng (Reward).*

Sự phát triển của học tăng cường đã mang lại những bước tiến đáng kể trong lĩnh vực trí tuệ nhân tạo (AI). Một ví dụ điển hình là AlphaGo, phần mềm máy tính đầu tiên có thể đánh bại được một người chơi cờ vây chuyên nghiệp. Ngoài ra học tăng cường còn được sử dụng rộng rãi trong các ứng dụng thực tế.

Bài viết này nhằm giới thiệu ứng dụng của toán học trong thuật toán Value-Iteration (một trong những thuật toán cơ bản nhất trong học tăng cường).

1. Các khái niệm cơ bản

Ta xét bài toán tổng quát: tại thời điểm t, tác nhân có trạng thái là $s_t \in S$ (S là tập các trạng thái có thể có trong môi trường) thực hiện hành động $a \in A$ (A là tập các hành động mà tác nhân có thể thực hiện (tại trạng thái s_t)) với xác suất $P_{s_t,a_t}(s_{t+1})$. Sau đó, dưới sự tác động của môi trường, tác nhân có trạng thái mới s_{n+1} và nhận phần thưởng r_{n+1}, được xác định bởi s_t và a_t từ môi trường. Xác suất $P_{s_t,a_t}(s_{t+1})$ và phần thưởng r_{n+1} được xác định dựa trên phân phối xác suất P và tập phần thưởng R.

1.1. Quá trình quyết định Markov

Quá trình quyết định Markov *(Markov Decision Process - MDP)* được xác định dựa trên tập (S, A, P, R, γ), trong đó:

- S: tập các trạng thái.
- A: tập các hành động.
- P: tập các phân phối xác suất $P_{s,a}$. Mỗi phân phối này là phân phối xác suất của trạng thái tiếp theo sau khi tác nhân có trạng thái s thực hiện hành động a.
- R: hàm xác định giá trị phần thưởng của hành động a khi tác nhân thực hiện nó có trạng thái s.
- γ là hệ số chiết khấu, sẽ đại diện cho sự khác biệt quan trọng giữa các phần thưởng tương lai và các phần thưởng hiện tại.

Để phục vụ cho việc thể hiện các thuật toán ở phía sau, chúng ta giả sử S, A là các tập hữu hạn.

Một ví dụ phổ biến cho mô hình này là mô hình tên cướp đa vũ trang. Giả sử bạn là một tên cướp trong sòng bạc, và bạn chiếm được một khu có K máy đánh bạc. Do bạn đã chiếm cả khu này nên bạn có thể chơi ở bất kỳ máy nào, tuy nhiên, để đảm bảo lợi nhuận cho sòng bạc, bạn không thể biết được giá trị kì vọng cụ thể của từng máy và các máy có thể có giá trị kì vọng khác nhau. Chúng ta sẽ xác định tập hợp gồm đặc trưng của một quá trình quyết định Markov như sau:

- S: Chỉ có 1 trạng thái (hay có thể nói chỉ có 1 người chơi), đó là tên cướp

- A: Tập hợp các hành động của tên cướp. Ở đây, tên cướp có thể chơi bất kỳ máy nào trong K máy này (do anh ta đã chiếm cả khu này), do đó hành động i ở đây được hiểu là tên cướp chơi 1 lượt ở máy i, và từ đó suy ra $|A| = K$.
- P: Xác suất để lựa chọn hành động tiếp theo dựa trên hành động của lượt này. Cách duy nhất để tính giá trị này là đọc suy nghĩ của tên cướp, nội dung này vượt quá khuôn khổ của bài viết nên chúng ta sẽ bỏ qua câu chuyện này.
- R: Phần thưởng của tên cướp nhận được từ máy dánh bạc. Vì tên cướp có thể chơi bất kỳ máy nào trong K máy này (do anh ta đã chiếm cả khu này), nên phần thưởng i ở đây được hiểu là phần thưởng tên cướp nhận được sau 1 lượt chơi ở máy i, và từ đó suy ra $|R| = K$
- γ: hệ số chiết khấu, là một hệ số có thể thay đổi để quá trình thực hiện các thuật toán phía sau trở nên hiệu quả hơn.
- Chiến lược: Là 1 ánh xạ $\pi : S \to A$ chiếu từ tập các trạng thái sang tập các hành động, cho biết tại trạng thái này thì tác nhân sẽ lựa chọn hành động nào.

  Chiến lược có thể là một hành động hoặc phân phối xác suất của các hành động. Để phục vụ cho việc thể hiện các thuật toán ở phía sau, chúng ta giả sử chiến lược của mỗi trạng thái là 1 hành động.
- Hàm giá trị : Hàm giá trị $V^\pi(s)$ tại trạng thái s là giá trị trả về nếu xuất phát từ trạng thái s. Trong việc tính toán hàm giá trị, γ sẽ được sử dụng và chúng ta sẽ thấy cách nó được dùng để thể hiện rằng các phần thưởng trong tương lai sẽ bớt quan trọng hơn, đảm bảo rằng giá trị trả về tại mỗi trạng thái là một giá trị hữu hạn. Để phục vụ cho việc thể hiện các thuật toán ở phía sau, chúng ta giả sử $V \in \mathbb{R}$.

1.2. Thuật toán Value-Iteration

Phương trình Bellman:

$$V^\mu(s) = \max_{a \in A} R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s,a) V^\mu(s')$$

trong đó V^μ là hàm giá trị tối ưu ứng với chiến lược tối ưu μ.

Khi một quá trình quyết định Markov được thực hiện, chúng ta còn phải quan tâm tới yếu tố thời gian. Ở đây, chúng ta giả sử thời gian được chia thành các khoảng thời gian k.

Algorithm 1 Thuật toán Value-Iteration

$V_0(s) \leftarrow 0 \, \forall \, s \in S$
for $k = 0$ cho đến khi hội tụ **do**
  for mỗi trạng thái s **do**
    $V_{k+1}(s) = \max_a R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s,a) V_k(s')$
  end for
  $\pi_{k+1}(s) = \arg\max_a R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s|s,a) V_k(s')$ {cập nhật chiến lược}
end for

2. Toán tử Bellman

Toán tử Bellman của hàm giá trị V, kí hiệu BV, là một toán tử có thể chiếu từ một hàm giá trị này sang một hàm giá trị khác, và ánh xạ này thể hiện về giá trị kì vọng của việc thực hiện một hành động tại một trạng thái cụ thể trong quá trình quyết định Markov. Sau đây, chúng ta sẽ nói về 2 loại toán tử Bellman như sau:

- Toán tử backup Bellman: với hàm giá trị V, toán tử backup Bellman B^π cho một chiến lược π tại trạng thái s được định nghĩa như sau:

$$B^\pi V(s) = R^\pi(s) + \gamma \sum_{s' \in S} P^\pi(s'|s) V(s), \forall s \in S$$

- Toán tử backup Bellman dành cho chiến lược tối ưu: với hàm giá trị V, toán tử backup tối ưu Bellman B^* cho một chiến lược π tại trạng thái s được định nghĩa như sau:

$$B^* V(s) = \max_{a \in A} R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s,a) V(s'), \forall s \in S$$

Nếu để ý phía trên, chúng ta có thể thấy rằng công thức của toán tử backup tối ưu Bellman giống với công thức tính hàm giá trị của thuật toán Value-Iteration. Do đó, chúng ta có thể thay toán tử này vào công thức trên và ta có:

$$V_{k+1} = B^* V_k$$

- **Ánh xạ co**: Một toán tử B được gọi là ánh xạ co nếu B là một ánh xạ $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, trong đó

$$\|BU - BV\| \leq \|U - V\| \; \forall U, V : S \to \mathbb{R}.$$

Ở đây, $\|U - V\|$ được gọi là norm của $U - V$.

- **Ánh xạ co ngặt**: Một toán tử B được gọi là ánh xạ co ngặt nếu B là một ánh xạ $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ và tồn tại số thực $0 \leq \gamma < 1$ sao cho

$$\|BU - BV\| \leq \|\gamma(U - V)\| \ \forall U, V : S \to \mathbb{R}.$$

Ở đây, $\|U - V\|$ được gọi là norm của $U - V$. Ta nói γ là hệ số co của ánh xạ co B.

- Xét ánh xạ $T : V \to V$. Ta nói $v \in V$ là một **điểm bất động** của T nếu $Tv = v$.

- Một số tính chất của ánh xạ co:

Định lý 1 Giả sử T là một ánh xạ co ngặt trong không gian V có hệ số co γ. Khi đó với mọi $v \in V$, $\{v, Tv, T^2v, ...\}$ là dãy Cauchy.

CHỨNG MINH Đặt $\alpha = \|Tv - v\|$. Do định nghĩa của ánh xạ co a có:

$$\left\|T^{n+1}v - T^n v\right\| \leq \gamma \left\|T^n v - T^{n-1}v\right\| \leq ... \leq \gamma^n \|Tv - v\| = \gamma^n \alpha$$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$$\|T^m v - T^n v\| = \left\|\sum_{k=n}^{m-1}(T^{k+1}v - T^k v)\right\| \leq \sum_{k=n}^{m-1}\gamma^k\alpha = \alpha\left(\frac{\gamma^n - \gamma^m}{1-\gamma}\right) < \frac{\alpha\gamma^n}{1-\gamma}$$

Với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, chọn $N = \max\left(1, \left\lceil \frac{\log\left(\frac{\epsilon(1-\gamma)}{\alpha}\right)}{\log\gamma}\right\rceil\right)$. Khi đó với mọi $m \geq n > N$ ta có:

$$\|T^m v - T^n v\| \leq \frac{\alpha\gamma^n}{1-\gamma} < \frac{\alpha\gamma^N}{1-\gamma} \leq \epsilon$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Định lý 2 Giả sử T là một ánh xạ co ngặt trong không gian V. Khi đó T có một và chỉ một điểm cố định trong V. Hơn nữa, với mọi $v \in V$, dãy $\{v, Tv, T^2v, ...\}$ là dãy Cauchy và hội tụ tới điểm bất động của T.

CHỨNG MINH Giả sử $0 < \gamma < 1$ là hệ số co của T. Trước hết, ta chứng minh tính duy nhất bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $v, w \in V$ là 2 điểm bất động của T ($v \neq w$). Do đó $\|v - w\| > 0$. Ta có do v, w là điểm bất động nên $\|Tv - Tw\| = \|v - w\|$ mà theo tính chất của ánh xạ co gặt thì

$$\|Tv - Tw\| \leq \gamma \|v - w\| < \|v - w\|.$$

Từ đó suy ra giả sử là sai. Vậy ta đã chứng minh được tính duy nhất của điểm bất động cho T.

Bây giờ ta chứng minh tính tồn tại của điểm bất động. Xét phần tử bất kì

$v \in V$ và xét dãy số $\{v_k\}_{k\geq 1}$ như sau:

$$v_k = \begin{cases} v & \text{nếu } k = 1 \\ Tv_{k-1} & \text{nếu } k > 1 \end{cases}$$

Theo định lý 1, dãy $\{v_k\}_{k\geq 1}$ là dãy Cauchy là hội tụ đến $v^* \in V$.Ta chứng minh v^* là điểm bất động. Chọn $\epsilon > 0$ tuỳ ý, đặt $\delta = \frac{\epsilon}{1+\gamma}$. Khi $v_k \to v^*$, tồn tại $N \geq 1$ sao cho $\|v_k - v^*\| < \delta$, $\forall k \geq N$. Theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$\begin{aligned} \|Tv^* - v^*\| &\leq \|Tv^* - v_{N+1}\| + \|v_{N+1} - v^*\| \\ &= \|Tv^* - Tv_N\| + \|v_{N+1} - v^*\| \\ &\leq \gamma \|v^* - v_N\| + \|v_{N+1} - v^*\| \\ &< \gamma\delta + \delta = \epsilon \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\|Tv^* - v^*\| < \epsilon$ với mọi $\epsilon > 0$, suy ra $\|Tv^* - v^*\| = 0$ hay $Tv^* = v^*$, tức v^* là điểm bất động của T. Chứng minh hoàn tất. $\square$

3. Bài toán

Ở đây, chúng ta đặt ra một bài toán: Chứng minh rằng chiến lược tối ưu π^* là điểm bất động của B^*.

Đầu tiên, ta sẽ chứng minh B^* là một ánh xạ co. Sau đó, chúng ta sẽ chứng minh một số tính chất liên quan tới ánh xạ co để từ đó suy ra được kết quả. Lưu ý, trong chứng minh bên dưới, chúng ta sẽ sử dụng norm vô cực:

$$\|U - V\| = \max_s \|U(s) - V(s)\|.$$

CHỨNG MINH Chứng minh B^* là một ánh xạ co:

Ta cần chứng minh, với 2 hàm giá trị bất kỳ U, V, ta có bất đẳng thức: $\|B^*U - B^*V\| \leq \|U - V\|$. Ta thấy:

$$\|B^*U - B^*V\| = \left\| \max_{a\in A} \left(R(s,a) + \gamma \sum_{s'\in S} P(s'|s,a)U(s') \right) - \max_{a'\in A} \left(R(s,a') + \gamma \sum_{s'\in S} P(s'|s,a')V(s') \right) \right\| \quad (1)$$

Đặt $a_m = \arg\max_{a\in A} R(s,a) + \gamma \sum_{s'\in S} P(s'|s,a)U(s')$, ta thấy:

$$\begin{cases} \max_{a\in A} R(s,a) + \gamma \sum_{s'\in S} P(s'|s,a)U(s') & = R(s,a_m) + \gamma \sum_{s'\in S} P(s'|s,a_m)U(s') \\ \max_{a'\in A} R(s,a') + \gamma \sum_{s'\in S} P(s'|s,a')V(s') & \geq R(s,a_m) + \gamma \sum_{s'\in S} P(s'|s,a_m)V(s') \end{cases}$$

Thay vào (1), ta có:

$$\begin{aligned}
\|B^*U - B^*V\| &\leq \left\| R(s,a_m) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s,a_m)U(s') - R(s,a_m) - \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s,a_m)V(s') \right\| \\
&= \left\| \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s,a_m)(U(s') - V(s')) \right\| \\
&\leq \left\| \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s,a_m) \|U - V\| \right\| \\
&= \gamma \|U - V\| \text{ (do } \sum_{s' \in S} P(s'|s,a_m) = 1)
\end{aligned}$$

Do đó, B^* là một ánh xạ co.

Tiếp theo, ta chỉ ra nếu μ là một chiến lược tối ưu thì $(B^*V^\mu)(s) = V^\mu(s),\ \forall s \in S$. Từ đó suy ra V^μ là điểm bất động của B^*.

Sử dụng định lý 2 của ánh xạ co suy ra thuật toán Value-Iteration hội tụ tại điểm bất động V^μ của B^* , và chiến thuật π_i hội tụ tới chiến thuật tối ưu μ. Kết quả được chứng minh. □

Tài liệu

[1] Emma Brunskill Rahul Sarkar. Lecture 2: Making good decisions given a model of the world. CS234, Stanford, 2019

Tạp chí Epsilon, Số 24, 12/2023

Hàm đặc trưng của tập hợp và ứng dụng

Trần Nam Dũng
GV trường PTNK - ĐHQG TP Hồ Chí Minh.

Giới thiệu. *Hàm đặc trưng là một khái niệm quan trọng của Toán học với nhiều ứng dụng trong lý thuyết Tập hợp, lý thuyết Nhóm, lý thuyết Độ đo và Tích phân, lý thuyết Xác suất. Trong bài viết này, chúng ta đề cập đến hàm đặc trưng của tập hợp và những ứng dụng của nó trong lý thuyết Tập hợp và các bài toán đếm. Cách tiếp cận hàm đặc trưng sẽ giúp học sinh làm việc dễ dàng hơn với các bài toán về tập hợp và giúp chúng ta giải thích một cách dễ hiểu phương pháp đếm theo phần tử – một kỹ thuật đếm hiệu quả.*

1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Ta xét một tập hợp E và tập hợp tất cả các tập con của E (ký hiệu là $P(E)$, hay 2^E). Tập hợp E được gọi là tập hợp vũ trụ, chứa tất cả các tập hợp mà ta quan tâm đến. Chú ý là E và $\varnothing$ cũng là tập con của E, tức là phần tử của $P(E)$.

Định nghĩa 1 Với mỗi tập con A của E, hàm đặc trưng χ_A (đọc là chi-A) của A là hàm số xác định trên E và nhận giá trị trong $\{0, 1\}$, được xác định như sau:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \notin A \end{cases}$$

Như vậy, hàm đặc trưng chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1, và $\chi_A(x)$ nhận giá trị 1 khi và chỉ khi x thuộc A. Vì thế hàm đặc trưng của tập hợp còn được gọi là *hàm thuộc* hay *hàm chỉ*.

Một tập hợp sẽ hoàn toàn được xác định nếu ta biết hàm đặc trưng của nó. Hai tập hợp bằng nhau khi và chỉ khi hai hàm đặc trưng của nó bằng nhau (tức là chúng bằng nhau tại mọi điểm x thuộc E). Đây chính là cơ sở để ta vận dụng hàm đặc trưng trong việc chứng minh các tính chất liên quan đến các phép toán trên tập hợp. Trước hết, ta có các định nghĩa cơ bản sau:

Định nghĩa 2 Xét hai hàm số χ_1 và χ_2 xác định trên E và nhận giá trị trong $\mathbb{R}$. Ta viết:

(i) $\chi_1 = \chi_2$ khi và chỉ khi $\chi_1(x) = \chi_2(x)$, $\forall x \in E$;

(ii) $\chi_1 \le \chi_2$ khi và chỉ khi $\chi_1(x) \le \chi_2(x)$, $\forall x \in E$;

(iii) $\chi_1 + \chi_2$ là một hàm số từ E vào $\mathbb{R}$, xác định bởi $(\chi_1 + \chi_2)(x) = \chi_1(x) + \chi_2(x)$;

(iv) $\chi_1\chi_2$ là một hàm số từ E vào $\mathbb{R}$, xác định bởi $(\chi_1\chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$.

Ngoài ra, ta cũng sẽ sử dụng 0 và 1 để ký hiệu các hàm đồng nhất 0 trên E và đồng nhất 1 trên E (nói cách khác $0 = \chi_\varnothing, 1 = \chi_E$).

Các tính chất cơ bản của hàm đặc trưng được tóm tắt trong định lý sau:

Định lý 1 Nếu A, B là các tập con bất kỳ của tập vũ trụ E thì ta có

(1) $(\chi_A)^2 = \chi_A$;

(2) $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$;

(3) $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$;

(4) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$;

(5) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A\chi_B$;

(6) $\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B \mod 2$.

Phép chứng minh định lý sử dụng định nghĩa của hàm đặc trưng, cũng như định nghĩa các phép toán trên tập hợp. Ở đây chú ý là ta chọn tập ảnh của hàm đặc trưng là $\{0, 1\}$ có một thuận lợi là $0^2 = 0$ và $1^2 = 1$ do đó mà có tính chất (1). Cuối cùng, cũng cần nhắc lại là ký hiệu $A\triangle B$ biểu thị cho hiệu đối xứng của hai tập hợp, tức là tập các phần tử thuộc đúng vào một trong hai tập hợp:

$$A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

2. Ứng dụng hàm đặc trưng để chứng minh các đẳng thức, bao hàm thức về tập hợp

Với các tính chất cơ bản đã nêu ở phần 2, hàm đặc trưng có thể được sử dụng một cách hiệu quả để chứng minh các đẳng thức tập hợp. Chúng ta bắt đầu bằng các ví dụ đơn giản sau:

Định lý 2 (Quy tắc De Morgan) Nếu A, B là các tập con bất kỳ thuộc E thì ta có

(a) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$;

(b) $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.

Lời giải **(a)** Ta có

$$\chi_{\overline{A\cup B}} = 1-\chi_{A\cup B} = 1-(\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B) = (1-\chi_A)(1-\chi_B) = \chi_{\overline{A}}\chi_{\overline{B}} = \chi_{\overline{A}\cap\overline{B}}.$$

Từ đó suy ra

$$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}.$$

(b) Sử dụng các tính chất cơ bản của hàm đặc trưng, ta có

$$\chi_{\overline{A\cap B}} = 1 - \chi_{A\cap B} = 1 - \chi_A\chi_B.$$

Mặt khác, lại thấy

$$\chi_{\overline{A}\cup\overline{B}} = \chi_{\overline{A}} + \chi_{\overline{B}} - \chi_{\overline{A}}\chi_{\overline{B}} = 1-\chi_A+1-\chi_B-(1-\chi_A)(1-\chi_B) = 1-\chi_A\chi_B,$$

nên ta suy ra hàm đặc trưng của $\overline{A\cap B}$ và $\overline{A}\cup\overline{B}$ bằng nhau, do đó chúng bằng nhau. □

Định lý 3 (Tính phân phối giữa phép hợp và phép giao) Nếu A, B, C là các tập con bất kỳ thuộc E thì ta có

(a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Lời giải. Ta chỉ chứng minh phần (a), phần (b) có thể chứng minh tương tự. Ta có

$$\chi_{(A\cup B)\cap C} = \chi_{A\cup B}\chi_C = (\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B)\chi_C.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\chi_{(A\cap C)\cup(B\cap C)} &= \chi_{A\cap C} + \chi_{B\cap C} - \chi_{A\cap C}\chi_{B\cap C} = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_C\chi_B\chi_C \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C = (\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B)\chi_C.\end{aligned}$$

Hai hàm đặc trưng bằng nhau do đó hai tập hợp ở hai vế bằng nhau. □

Bài toán 1.

1. Chứng minh rằng phép hiệu đối xứng có tính kết hợp, tức là với mọi tập hợp A, B, C,
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

2. Chứng minh rằng nếu $A \cap B = A \cap C$ và $A \cup B = A \cup C$ thì $B = C$.

3. Chứng minh nếu A, B, C là các tập con bất kỳ của E thì ta có

   (a) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$;

   (b) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.

Hàm đặc trưng còn có thể làm việc hiệu quả với các bao hàm thức, với chú ý là $A \subset B$ khi và chỉ khi $\chi_A \le \chi_B$. Sau đây là một số ví dụ:

Định lý 4 Chứng minh rằng nếu $A \cap C \subset B \cap C$ và $A \setminus C \subset B \setminus C$ thì $A \subset B$.

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra

$$\chi_A\chi_C \le \chi_B\chi_C$$

và

$$\chi_A - \chi_A\chi_C \le \chi_B - \chi_B\chi_C.$$

Cộng các bất đẳng thức vế theo vế, ta được $\chi_A \le \chi_B$, tức là $A \subset B$. □

Định lý 5 Chứng minh rằng nếu $A \cap B = C \cap D$, $C \cup D = E$, $C \subset A$ và $D \subset B$ thì

$$C = A, \quad D = B.$$

Lời giải. Theo giả thiết ta có

(1) $\chi_A\chi_B = \chi_C\chi_D$;

(2) $\chi_C + \chi_D - \chi_C\chi_D = 1$;

(3) $\chi_C \le \chi_A$, $\chi_D \le \chi_B$.

Ta cần chứng minh các bất đẳng thức ở (3) phải là các đẳng thức. Giả sử ngược lại, tồn tại một điểm x mà ở đó một trong hai bất đẳng thức ở (3) là bất đẳng thức thực sự. Không mất tính tổng quát, giả sử $\chi_C(x) < \chi_A(x)$. Khi đó

$$\chi_C(x) = 0, \quad \chi_A(x) = 1.$$

Lúc này, do (1) nên $\chi_B(x) = 0$. Từ kết quả này và bất đẳng thức $\chi_D \le \chi_B$, ta suy ra $\chi_D(x) = 0$. Nhưng điều này mâu thuẫn với (2). □

Bài toán 2. Cho E là một tập hợp và X, Y, Z, X', Y', $Z' \in P(E)$. Giả sử

$$X \cup Y \cup Z = E, \quad X \cap Y = X' \cap Y', \quad X \cap Z = X' \cap Z', \quad Y \cap Z = Y' \cap Z'$$

và

$$X \subset X', \quad Y \subset Y', \quad Z \subset Z'.$$

Chứng minh rằng $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$.

3. 4 Ứng dụng hàm đặc trưng trong các bài toán đếm

Một trong những ứng dụng đẹp đẽ và có chiều sâu nhất của hàm đặc trưng là ứng dụng trong các bài toán đếm. Và cơ sở của ứng dụng này là công thức hiển nhiên sau:

$$|A| = \sum_{x \in E} \chi_A(x). \tag{1}$$

Trước hết, ta sẽ sử dụng công thức này để chứng minh lại các nguyên lý cơ bản của phép đếm.

Định lý 6 Cho hai tập hợp A và B. Khi đó ta có

(1) *(Nguyên lý cộng)* Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $|A \cup B| = |A| + |B|$.

(2) *(Nguyên lý nhân)* $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

(3) *(Nguyên lý trừ)* $|\overline{A}| = |E| - |A|$.

(4) *(Nguyên lý bù trừ)* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

LỜI GIẢI Rõ ràng nguyên lý cộng và nguyên lý trừ là hệ quả của nguyên lý bù trừ, do đó ta chỉ cần chứng minh nguyên lý bù trừ là suy ra hai nguyên lý còn lại.

Ta có

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}.$$

Từ đó suy ra

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x).$$

Cho x chạy qua khắp E rồi cộng lại, ta được

$$\sum_{x\in E} \chi_{A\cup B}(x) = \sum_{x\in E} \chi_A(x) + \sum_{x\in E} \chi_B(x) - \sum_{x\in E} \chi_{A\cap B}(x)$$

Nhưng điều này, theo công thức cơ bản ở trên, có nghĩa là $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$. Nguyên lý bù trừ được chứng minh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh nguyên lý nhân. Theo định nghĩa thì $\chi_{A\times B}(x,\, y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$. Từ đây, ta có

$$|A\times B| = \sum_{(x,\,y)\in E\times F} \chi_{A\times B}(x,\, y) = \sum_{(x,\,y)\in E\times F} \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{x\in E} \chi_A(x) \sum_{y\in B} \chi_B(y) = |A|\cdot|B|.$$

Như vậy quy tắc nhân đã được chứng minh. □

Bài toán 3. d

1. Cho A, B, C là các tập hợp bất kỳ. Chứng minh rằng

   $$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) + |A\cap B\cap C|.$$

2. Chứng minh công thức bao hàm và loại trừ (nguyên lý bù trừ) tổng quát:

   $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i\cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

Tiếp theo, ta sẽ ứng dụng công thức (1) để giải thích phương pháp đếm theo phần tử. Ta minh họa phương pháp này qua bài toán sau.

Định lý 7 Cho $E = \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ và $F = P(E)$. Hãy tính

$$S = \sum_{(A,\,B)\in F^2} |A\cap B|.$$

LỜI GIẢI (**Lời giải**) Bài này có thể giải bằng hai cách, cách 1 là đếm theo tập hợp và cách 2 là đếm theo phần tử. Với cách 1, ta gọi $s(k)$ là số tất cả các bộ $(A,\, B)\in F^2$ sao cho

$$|A\cap B| = k.$$

Thế thì rõ ràng

$$S = \sum_{k=0}^{n} k\cdot s(k).$$

Như vậy ta chỉ cần đi tìm $s(k)$. Với mỗi k cố định, có C_n^k cách chọn ra một tập con gồm k phần tử. Giả sử đó là C. Nếu ta cho $A \cap B = C$ thì $|A \cap B| = k$. Để đảm bảo điều này, sau đó mỗi phần tử thuộc $E \setminus C$ có thể:

(a) Không thuộc A, không thuộc B;

(b) Thuộc A, không thuộc B;

(c) Thuộc B, không thuộc A.

Tức là có 3 cách chọn. Từ đó suy ra

$$s(k) = C_n^k 3^{n-k}.$$

Cuối cùng, ta được $S = \sum_{k=0}^n k \cdot s(k) = \sum_{k=0}^n k C_n^k 3^{n-k} = n \cdot 4^{n-1}$ (tại sao?).

Lời giải trên là khá phức tạp, bao gồm 2 bước lý luận khó:

(1) Tính được $s(k)$;

(2) Rút gọn tổng $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k 3^{n-k}$.

Tuy nhiên, đáp số bài toán lại khá đơn giản: $n \cdot 4^{n-1}$. Ta thử tìm một cách tiếp cận khác cho ra thẳng đáp số này. Và thừa số n ở đáp số gợi cho chúng ta đến phương pháp đếm theo phần tử, tức là đếm số lần một phần tử x xuất hiện trong các tập hợp $A \cap B$. Cụ thể ta có

$$S = \sum_{(A,\, B) \in F^2} |A \cap B| = \sum_{(A,\, B) \in F^2} \sum_{x \in E} \chi_{A \cap B}(x) = \sum_{x \in E} \sum_{(A,\, B) \in F^2} \chi_{A \cap B}(x),$$

ở đây ta đã đảo thứ tự lấy tổng.

Với một phần tử $x \in E = \{1, 2, \ldots, n\}$ cố định, xét tổng $\sum_{(A,\, B) \in F^2} \chi_{A \cap B}(x)$. Ta thấy $\chi_{A \cap B}(x) = 1$ khi và chỉ khi $A \cap B$ chứa x. Như vậy

$$\sum_{(A,\, B) \in F^2} \chi_{A \cap B}(x) = \Big| \{(A,\, B) \in F^2 \mid x \in A \cap B\} \Big|,$$

tức là tổng trên bằng số bộ $(A,\, B)$ sao cho cả A và B đều chứa x. Có 2^{n-1} tập con của E chứa x. Do đó, theo quy tắc nhân, số bộ $(A,\, B)$ để $A \cap B$ chứa x bằng $2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 4^{n-1}$. Từ đó

$$S = \sum_{x \in E} \sum_{(A,\, B) \in F^2} \chi_{A \cap B}(x) = \sum_{x \in E} 4^{n-1} = n \cdot 4^{n-1}. \qquad \square$$

Nhận xét. Từ kết quả bài toán này ta suy ra kết luận sau: *Nếu lấy ngẫu nhiên hai tập con A, B thuộc $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ thì giá trị kỳ vọng của $|A \cap B|$ là $\frac{n}{4}$.*

Định lý 8 (APMO, 1998) Xét tập hợp $E = \{1, 2, \ldots, 1998\}$ và F là tập hợp tất cả các tập con của E. Hãy tính tổng

$$S = \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F^n} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

LỜI GIẢI (**Lời giải**) Nếu giải bài này bằng phương pháp đếm theo tập hợp sẽ gặp khá nhiều khó khăn. Tuy nhiên, phương pháp đếm theo phần tử cho ta kết quả một cách nhanh chóng

$$\begin{aligned}\sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F^n} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F^n} \sum_{x \in E} \chi_{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}(x) \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F^n} \chi_{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}(x).\end{aligned}$$

Tổng bên trong đúng bằng số các bộ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ mà $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ chứa x. Ta có tổng số các bộ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ bằng $(2^{1998})^n$ (2^{1998} là số các tập con của E). Tổng số các bộ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ mà $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ không chứa x bằng $(2^{1997})^n$ (2^{1997} là số các tập con của E không chứa x). Suy ra, số các bộ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ mà $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ chứa x là

$$(2^{1998})^n - (2^{1997})^n.$$

Từ đây, ta tính được $S = 1998\left[(2^{1998})^n - (2^{1997})^n\right] = 1998(2^n - 1)2^{1997n}$. $\square$

Bài toán 4.

1. Cho $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Với mỗi $k = 0, 1, 2, \dots, n$, đặt $F_k = \{A \subset E \,|\, |A| = k\}$ (tức là tập hợp tất cả các tập con có k phần tử của E). Hãy tính tổng $\sum_{(A, B) \in F_p \times F_q} |A \cap B|$.

2. (Việt Nam, 2002) Cho tập hợp S gồm tất cả các số nguyên trong đoạn $[1, 2002]$. Gọi T là tập hợp tất cả các tập hợp con không rỗng của S. Với mỗi tập con X thuộc T, ký hiệu $m(X)$ là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X. Đặt $m = \frac{1}{|T|} \sum m(X)$, ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T. Hãy tính giá trị của m.

4. Các ứng dụng khác của phương pháp đếm theo phần tử

Phương pháp đếm theo phần tử được trình bày ở mục 4 có thể được tổng quát hóa như sau: Cho F là họ các tập con của X. Với x thuộc X, ta gọi $d(x)$ là số phần tử của F chứa x.

Định lý 9 Cho F là họ các tập con của tập hợp X. Khi đó

$$\sum_{x\in X} d(x) = \sum_{A\in F} |A|.$$

LỜI GIẢI Xét *ma trận kề* $M = (m_{x,A})$ của F, nghĩa là M là ma trận $0-1$ với $|X|$ dòng đánh số bởi các điểm $x \in X$ và $|F|$ cột đánh số bởi tập $A \in F$ sao cho $m_{x,A} = 1$ khi và chỉ khi $x \in A$. Để ý rằng $d(x)$ bằng số số 1 trên dòng thứ x còn $|A|$ là số số 1 trên cột thứ A. Như vậy cả vế trái và vế phải đều biểu diễn số số 1 của M. □

Nếu ta xét đồ thị $G = (V, E)$ trên tập đỉnh V như một họ các tập con 2 phần tử của V thì ta có định lý Euler.

Định lý 10 (Euler) Trong mọi đồ thị, tổng bậc các đỉnh của nó bằng hai lần số cạnh của nó và như thế, luôn là một số chẵn.

Định lý sau có thể được chứng minh bằng cách tương tự:

Định lý 11 Với mọi $Y \subseteq X$, ta có

(a) $\sum_{x\in Y} d(x) = \sum_{A\in F} |Y \cap A|$;

(b) $\sum_{x\in Y} d(x)^2 = \sum_{A\in F}\sum_{x\in A} d(x) = \sum_{A\in F}\sum_{B\in F} |A \cap B|$.

(Hai tổng ở đẳng thức đầu ứng với số số 1 trên các hàng Y. Các tổng ở đẳng thức thứ hai đếm số lần xuất hiện của x trong các tập có dạng $A \cap B$).

Trường hợp đặc biệt khi $F = E$ là tập con 2 phần tử, ta có

Định lý 12 Với đồ thị $G = (V, E)$, ta có

$$\sum_{x\in V} d(x)^2 = \sum_{x,\, y\in E} [d(x) + d(y)].$$

Định lý sau đây của hình học tổ hợp có nhiều ứng dụng hiệu quả trong các bài toán đánh giá diện tích và được chứng minh dựa trên ý tưởng của công thức bao hàm và loại trừ, cũng như phương pháp đếm theo phần tử (dù ở đây chúng ta không làm việc với tập hợp hữu hạn).

Định lý 13 Trên mặt phẳng cho n hình. Gọi $S_{i_1\ldots i_k}$ là diện tích phần giao của các hình với chỉ số $i_1, \ldots, i_k$. S là diện tích phần mặt phẳng được phủ bởi các hình trên, M_k là tổng tất cả các $S_{i_1\ldots i_k}$. Khi đó ta có

(a) $S = M_1 - M_2 + \cdots + (-1)^{n+1} M_n$;

(b) $S \geq \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} M_i$ khi m chẵn và $S \leq \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} M_i$ khi m lẻ.

Lời giải **(a)** Gọi W_m là diện tích phần mặt phẳng được phủ bởi đúng m hình. Phần mặt phẳng này tạo thành từ các mẩu, mỗi một mẩu được phủ bởi m hình xác định nào đó. Diện tích mỗi một mẩu như vậy khi tính M_k được tính C_m^k lần, vì từ m hình có thể thiết lập được C_m^k phần giao của k hình. Vì vậy

$$M_k = C_k^k W_k + C_k + 1^k W_{k+1} + \cdots + C_n^k W_n.$$

Từ đây, ta suy ra

$$\begin{aligned} M_1 - M_2 + \cdots + (-1)^{n+1} M_n &= C_1^1 W_1 + (C_2^1 - C_2^2) W_2 + \cdots + (C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \cdots) W_n \\ &= W_1 + W_2 + \cdots + W_n, \end{aligned}$$

vì $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \cdots - (-1)^m C_m^m = (-1 + C_m^1 - C_m^2 + \cdots) + 1 = -(1-1)^m + 1 = 1$.

Cuối cùng, với chú ý rằng $S = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$, ta thu được điều phải chứng minh.

(b) Chứng minh phần này xin được dành cho bạn đọc. □

Ta xem xét một ứng dụng trực tiếp của định lý 7.

Định lý 14 d

(*a*) Trong hình vuông diện tích 6 có 3 hình đa giác có diện tích mỗi hình bằng 3. Chứng minh rằng trong chúng tồn tại 2 hình đa giác có diện tích phần chung không nhỏ hơn 1.

(*b*) Trong hình vuông diện tích 5 có 9 hình đa giác có diện tích mỗi hình bằng 1. Chứng minh rằng trong chúng tồn tại 2 đa giác có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{9}$.

Lời giải **(a)** Theo định lý 7, phần (a) thì ta có

$$6 = 9 - (S_{12} + S_{23} + S_{13}) + S_{123}.$$

Từ đó suy ra

$$S_{12} + S_{23} + S_{13} = 3 + S_{123} \geq 3.$$

Điều này chứng tỏ một trong các số S_{12}, S_{23}, S_{13} có giá trị không nhỏ hơn 1.

(b) Theo định lý 7, phần (b) thì $5 \geq 9 - M_2$, tức là

$$M_2 \geq 4.$$

Vì từ 9 hình đa giác có thể tạo ra $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ cặp, nên diện tích phần trong của một trong các cặp như vậy không nhỏ hơn $\frac{M_2}{36} \geq \frac{1}{9}$. □

Bài toán 5. d

1. Trong hình chữ nhật diện tích 1 có 5 hình có diện tích mỗi hình bằng $\frac{1}{2}$.

(a) Chứng minh rằng tồn tại hai hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{3}{20}$;

(b) Chứng minh rằng tồn tại hai hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{5}$;

(c) Chứng minh rằng tồn tại ba hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{20}$.

2. (Nga, 1996) Trong Duma có 1600 đại biểu, tạo thành 16000 ủy ban, mỗi ủy ban có 80 người. Chứng minh rằng tồn tại hai ủy ban có chung ít nhất 4 thành viên.

Tài liệu tham khảo

[1] Đoàn Quỳnh (chủ biên), Doãn Minh Cường, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu giáo khoa chuyên Toán*, Đại số 10, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2009.

[2] Nguyễn Hữu Anh, *Toán rời rạc*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1999.

[3] Jean-Marie Monier, *Giáo trình Toán*, Tập 5, Đại số 1, Nhà xuất bản Giáo dục, 1999.

[4] Trần Nam Dũng, *Kỹ thuật đếm bằng hai cách ứng dụng trong giải Toán*, Kỷ yếu Hội nghị Khoa học, Các chuyên đề chuyên Toán – Bồi dưỡng học sinh giỏi THPT, Nam Định, tháng 11/2010.

[5] Alfutova N. B., Ustinov A. V., *Đại số và Lý thuyết số*, Nhà xuất bản MCCME, 2002.

[6] Prasolov V. V., *Các bài toán Hình học*, Nhà xuất bản MCCME, 2001.

Cơ sở nhỏ nhất của họ $k-$set

Lê Phúc Lữ, Nguyễn Đình Song Ân

ĐH Khoa học tự nhiên - ĐHQG TPHCM

Saint John's University

Giới thiệu. *Bài viết này mô tả việc tìm kích thước nhỏ nhất của cơ sở liên quan đến họ tập con của một tập cho trước. Trên cơ sở đánh giá số lượt xuất hiện của mỗi phần tử trong các tập hợp, ta có thể thiết lập được chặn dưới và xây dựng bằng mô hình lý thuyết đồ thị. Bước xây dựng chỉ thành công với những dữ liệu thích hợp, trường hợp tổng quát đang được nghiên cứu thêm. Với đặc điểm của bài toán, khả năng ứng dụng của nó vào các bài toán lưu trữ là hoàn toàn khả thi.*

1. Giới thiệu

Cho tập n phần tử $[n] = 1, 2, \ldots, n$ và k là số nguyên với $1 \leq k \leq n$. Bên cạnh việc tìm ra các hoán vị cố định một $k-$set, tập con có k phần tử [1], [2], thì bài toán tìm cơ sở nhỏ nhất của các tâp con $k-$sets, của nhóm đối xứng $Sym(n)$ là bài toán có ý nghĩa trong khoa học máy tính. Bài toán tìm cơ sở là bài toán tìm tập các tập con k-sets nhỏ nhất sao cho chỉ có hoán vị đơn vị tác động trên các tập con $k-$sets của cơ sở "cố định" được nó [1]. Chẳng hạn, xem một trường hợp đặc biệt 3-sets với $n = 5$ với $k = 3$. Ta có tất cả 10 tập con 3 phần tử. Các $3-$sets đó gồm

$$\{1,2,3\}; \{1,2,4\}; \{1,2,5\}; \{1,3,4\}; \{1,3,5\}; \{1,4,5\};$$
$$\{2,3,4\}; \{2,3,5\}; \{2,4,5\}; \{3,4,5\}.$$

Bây giờ ta có thể hoán vị các số $S = [5]$. Ví dụ, hoán vị

$$\sigma = (2,3,1)(4)(5)$$

mà biến

$$1 \to 2,\ 2 \to 3,\ 3 \to 1,\ 4 \to 4,\ 5 \to 5.$$

Hoán vị σ này sẽ tác động và sắp xếp lại các $3-$sets. Chẳng hạn σ biến tập con $\{1,2,5\}$ thành $\{2,3,5\}$. Như thế, σ sẽ làm xáo trộn 10 $3-$sets trên. Tuy nhiên, không phải mọi 3-sets đều "chuyển động". Trong ví dụ này, σ sẽ biến tập con $\{1,2,3\}$ thành tập $\{2,3,1\} = \{1,2,3\}$ do trong tập hợp, thứ tự các phần tử không quan trọng. Tập $\{1,2,3\}$ như thế được gọi là điểm cố định. Một cách tổng quát ta định nghĩa hình thức điểm cố định như sau

Định nghĩa 1 (điểm cố định) Cho n và k là những số nguyên với $1 \leq k \leq n$ và một hoán vị $\sigma \in Sym(n)$. Một $k-$set A là một điểm cố định của σ nếu σ tác động lên A không làm thay đổi A, cụ thể là $\sigma(A) = A$.

Từ định nghĩa điểm cố định trên, tập cơ sở được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2 (tập cơ sở): Cho n và k là những số nguyên với $1 \leq k \leq n$. Tập các $k-$sets S được gọi là cơ sở của $Sym(n)$ nếu chỉ có hoán vị đơn vị cố định được tất cả k-sets trong tập con cơ sở S này.

Trong bài viết này, chúng tôi trả lời câu hỏi "số $k-$sets nhỏ nhất là bao nhiêu để chỉ có hoán vị đơn vị cố định được tất cả $k-$sets trong tập con cơ sở này?" Qua đó chúng tôi cũng xây dựng được 1 cơ sở. Bài toán này có thể được dùng như cơ sở để xây dựng các mã lô tổ hợp [3], [4] được áp dụng cho lưu trữ phi tập trung [5].

2. Bài toán mở đầu

2.1. Bài toán và các tính chất

Trước hết, ta khảo sát bài toán với kích thước nhỏ với $n = 3$ và $k = 5$.

Đầu tiên, ta sẽ khảo sát qua một số tính chất của các tập con trong họ thỏa mãn bài toán đặt ra trong phần 1 ở trên. Xét một họ S gồm các tập 3-set và giả sử đó là cơ sở ứng với $n = 5$. Ta có các nhận xét sau đây:

Mệnh đề 1 Với mọi cặp hai phần tử a, b nào đó lấy từ

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

thì phải tồn tại một tập con trong S chứa đúng 1 trong 2 phần tử này.

Chứng minh Thật vậy, giả sử mọi tập trong S đều có chứa cả a, b hoặc không chứa cả a, b. Khi đó, vai trò của a, b là bình đẳng nhau trong mọi tập con của S. Vì thế, nếu hoán vị có dạng $(...a...b...)$ là cố định toàn bộ tập con của S thì hoán vị $(...b...a...)$ cũng thế, tức là có nhiều hơn 1 hoán vị thỏa mãn, mâu thuẫn. □

Mệnh đề 2 Nếu trong S có 2 tập con có chung nhau đúng 1 phần tử thì phần tử đó phải cố định với mọi hoán vị fix S.

Chứng minh Thật vậy, giả sử có $\{a_1, b_1, c\}$ và $\{a_2, b_2, c\}$ trong S. Xét hoán vị f cố định toàn bộ tập con của S, khi đó, $f(c) \in \{a_1, b_1, c\}$ và $f(c) \in \{a_2, b_2, c\}$ nên $f(c)$ phải thuộc giao của 2 tập đó, tức là $f(c) = c$. □

2.2. Chứng minh chi tiết

Đây là trường hợp số liệu nhỏ nên ta có thể thực hiện tương đối thủ công như sau: trước hết, ta chỉ ra tồn tại S là cơ sở với $|S| = 3$. Cụ thể là

$$S = \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 4, 5\}.$$

Xét một hoán vị f cố định cả 3 tập trên. Theo Mệnh đề (2) thì vì $\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}$ có chung nhau số 1 nên $f(1) = 1$. Tiếp theo, $\{1, 2, 3\}$ và $\{1, 2, 4\}$ có chung nhau $1, 2$ nên cũng phải có $f(2) = 2$. Lại có $\{1, 2, 4\}$ và $\{1, 4, 5\}$ có chung nhau $1, 4$ nên $f(4) = 4$. Từ đây xét tập $\{1, 2, 3\}$ ta thấy phải có $f(3) = 3$, kéo theo $f(5) = 5$. Do đó, S thỏa mãn. Tiếp theo, giả sử tồn tại S là cơ sở mà $|S| \leq 2$.

Nếu $|S| = 1$ thì chỉ có đúng 1 tập con 3 phần tử, nhưng rõ ràng có ít nhất 6 hoán vị cố định nó (cũng chính là số hoán vị của 3 phần tử) nên rõ ràng không thỏa mãn.

Nếu $|S| = 2$. Không mất tính tổng quát, giả sử S chứa $\{1, 2, 3\}$. Khi đó, các cặp hai số sau đây vẫn còn bình đẳng $(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5)$ là chưa đúng theo nhận xét (1) nên phải còn 1 tập hợp chứa đúng 1 trong 2 số của mỗi cặp trên. Trước hết, sẽ có một tập hợp chỉ chứa 1 mà không chứa 2 (trường hợp chỉ chứa 2 mà không chứa 1 tương tự). Xét tiếp hai trường hợp:

- Nếu tập đó không chứa 3 thì nó phải là $\{1, 4, 5\}$. Khi đó, hai số $2, 3$ với $4, 5$ vẫn còn bình đẳng nên phải thêm ít nhất 1 tập nữa, không thỏa mãn.
- Nếu tập đó có chứa số 3 thì nó phải là $\{1, 3, 4\}$ hoặc $\{1, 3, 5\}$. Khi đó, hai số $(1, 3)$ vẫn còn bình đẳng nên cũng không thỏa mãn.

Vậy nên $\min |S| = 3$, ứng với 3 tập ở trên.

2.3. Nhận xét

Ta thấy rằng rõ ràng cách chọn trên là không duy nhất, có thể lấy 3 tập $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}$ để có một basic S' khác. Ta xét thêm cho một số giá trị n nữa.

- Với $n = 3$ thì không tồn tại S nào, vì chỉ có đúng 1 tập là $\{1, 2, 3\}$ sẽ không thỏa theo nhận xét (1).
- Với $n = 4$ thì tương tự lập luận trên, ta có $\min |S| = 3$.
- Với $n = 6$ thì $\min |S| = 3$ với ví dụ là 3 tập như đã chọn ở trên. Vì đã chỉ ra được họ này fix cả 5 phần tử $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ nên cho dù số 6 không xuất hiện thì ta vẫn phải có $f(6) = 6$. Chú ý rằng ở đây nếu chọn ba tập $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}$ thì lại không thỏa mãn, vì $5, 6$ vẫn còn bình đẳng (cùng không xuất hiện).

3. Bài toán tổng quát và chặn dưới

3.1. Bài toán tổng quát

Tiếp theo, ta phát biểu bài toán tổng quát và tìm cách đánh giá chặn dưới. Cụ thể là ở đây, ta thay tập gốc ban đầu có 5 phần tử sang tập bất kỳ có n phần tử; họ tập con 3 phần tử chuyển thành họ tập con k phần tử.

Gọi S là họ các tập con cần sử dụng. Trước hết ta cũng có các điều kiện cần tương tự như trường hợp $k = 3$ như sau:

- Với mọi cặp 2 phần tử a, b nào đó, tồn tại một tập con trong S chứa đúng 1 trong 2 phần tử này.
- Có không quá 1 số không xuất hiện trong tập nào (hệ quả của điều kiện nêu trên).
- Nếu trong S có 2 tập con có chung nhau đúng 1 phần tử thì phần tử đó phải cố định với mọi hoán vị cố định S.

3.2. Đánh giá chặn dưới

Trở lại bài toán, gọi x là số các phần tử xuất hiện trong ít nhất 2 tập, y là số các phần tử xuất hiện trong đúng 1 tập. Khi đó do có không quá 1 phần tử không xuất hiện trong tập nào nên

$$x + y \geq n - 1.$$

Gọi m là số tập con cần sử dụng thì do mỗi tập con có chứa đúng k phần tử nên đếm số mối quan hệ (tập con, phần tử), ta sẽ có được

$$km \geq 2x + y.$$

Mà y là số các phần tử xuất hiện trong đúng 1 tập nên số lượng này sẽ không vượt quá số tập hợp là m (nếu không thì sẽ có phần tử xuất hiện trong nhiều hơn 1 tập). Khi đó $y \leq m$ nên $x \geq n - m - 1$. Từ đây suy ra

$$km \geq n + (n - m - 1) - 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{2(n-1)}{k+1}.$$

Từ đó suy ra chặn dưới của m là $m_0 = \left\lceil \frac{2(n-1)}{k+1} \right\rceil$.

4. Xây dựng mô hình

4.1. Bổ sung ràng buộc

Ta sẽ chỉ ra cách xây dựng các tập hợp cho họ S thỏa mãn đề bài với kích thước đúng bằng m_0 với giả sử bổ sung rằng "không có phần tử nào xuất hiện trong nhiều hơn 2 tập con".

Ta cần có một ước lượng quan trọng là: số phần tử xuất hiện 2 lần sẽ không vượt quá số tổ hợp chập 2 của các tập hợp. Thật vậy, giả sử rằng $x > C_m^2$ thì theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có hai phần tử nào đó cùng xuất hiện trong hai tập hợp (và chúng sẽ không xuất hiện ở vị trí nào khác) nên sẽ bị vi phạm tính chất (1). Tiếp theo, đặt

$$2(n-1) = a(k+1) + r$$

với $a \in \mathbb{N}^*$ và $r \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

- Nếu $r = 0$ thì $m = a$, khi đó tất cả các đánh giá phải xảy ra đẳng thức, tức là
$$\begin{cases} x + y = n - 1 \\ 2x + y = km \\ y = m \end{cases}$$
nên giải ra được $y = m = a$ và $x = n - m - 1 = \frac{a(k+1)}{2} - a = \frac{a(k-1)}{2}$. Đối chiếu với ràng buộc ở trên thì
$$x \le C_m^2 = C_a^2 \Leftrightarrow \frac{a(k-1)}{2} \le \frac{m(m-1)}{2}$$
hay
$$k \le a = \frac{2(n-1)}{k+1} \Leftrightarrow n - 1 \ge \frac{k(k+1)}{2}.$$

- Nếu $r > 0$ thì $m = a + 1$. Khi đó, ta vẫn sẽ có $2x + y = km$ nhưng $x + y \in \{n - 1, n\}$ nên sẽ có $x \in \{km - n + 1, km - n\}$. Đánh giá tương tự trên, ta sẽ có
$$n \ge \frac{k(k+1)}{2} \text{ hoặc } n - 1 \ge \frac{k(k+1)}{2}.$$
(tùy thuộc vào có hay không phần tử không xuất hiện lần nào).

4.2. Xây dựng và chứng minh bằng mô hình đồ thị

Tiếp theo, ta sẽ xây dựng bằng ý tưởng đồ thị. Các bước cụ thể như sau: gọi A, B lần lượt là tập hợp các phần tử xuất hiện 2 lần, 1 lần. Ký hiệu $|A| = x, |B| = y$ và luôn có $2x + y = km$. Dựa vào việc lựa chọn $x + y = n - 1$ hay $x + y = n$ (tương ứng với có hay không có phần tử không xuất hiện), ta sẽ tính được cặp giá trị x, y. Dĩ nhiên ở đây phải có $x \le C_m^2$ và $y \le m$. Để đơn giản, ta chọn A là x số nguyên dương đầu tiên $\{1, 2, \ldots, x\}$.

Ta xây dựng cho $k - 1$ vị trí đầu tiên của mỗi tập hợp bằng các phần tử trong tập A. Các phần tử trong B chỉ điền vào vị trí thứ k của mỗi tập con trong họ S. Việc phân bố các phần tử trong B vào các tập hợp phải thỏa mãn:

- Mỗi phần tử xuất hiện đúng 2 lần ở 2 tập con khác nhau.
- Hai tập bất kỳ có chung nhau đúng 1 phần tử.

Để thực hiện được điều này, ta xét một đồ thị đầy đủ $G = (V, E)$ trong đó V là tập đỉnh đại diện cho m tập con trong họ S, còn E là tập cạnh đại diện cho các phần tử trong tập A. Hai tập có chung phần tử thì sẽ nối nhau bởi một cạnh, và vì điều kiện ở trên nên đây sẽ là graph đơn vô hướng.

Như thế, ta sẽ đánh số các cạnh của đồ thị G bởi các số lấy từ A, mỗi số dùng một lần. Do $|E| \geq |A|$ nên điều này sẽ luôn thực hiện được (và có thể có vài cạnh chưa được dùng đến). Sau đó, số x điền trên cạnh nối cho hai đỉnh đại diện cho tập con V_1, V_2 thì $x \in V_1, V_2$. Chú ý rằng có thể xảy ra tình huống $(k-1)m < 2x$ nên có một số phần tử của A sẽ được chọn làm phần tử thứ k cho hai tập nào đó của S.

Cuối cùng, các tập con của họ S sẽ còn trống vị trí thứ k, ta điền vào đó các phần tử của B sao cho không có hai phần tử nào cùng thuộc một tập hợp. Do $|B| < m$ nên điều này sẽ luôn thực hiện được. Không khó để thấy mô hình xây dựng ở trên là thỏa mãn. Xét hoán vị f cố định tất cả các tập con của họ S được xây dựng như trên.

- Với mỗi phần tử $a \in A$, sẽ có đúng hai tập V_1, V_2 chứa nó (và 2 tập đó giao là a) nên hoán vị f cố định V_1, V_2 cũng sẽ thỏa $f(a) = a$. Vì thế f cố định tất cả phần tử của A.
- Với mỗi phần tử $b \in B$, sẽ có một tập con nào đó chỉ chứa nó và chứa thêm $k-1$ phần tử của A (đã được cố định) nên ta cũng sẽ có $f(b) = b$.
- Cuối cùng, nếu còn một phần tử chưa xuất hiện thì nó cũng sẽ được cố định do $n-1$ phần tử kia đã cố định rồi.

4.3. Ví dụ minh họa

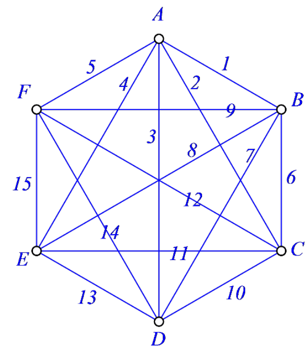
Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Với $n = 22, k = 6$ thì tính được số tập con của họ S là

$$m = \left\lceil \frac{2(n-1)}{k+1} \right\rceil = 6.$$

Do trong trường hợp này có phép chia hết nên bắt buộc phải bỏ đi một phần tử, giả sử là phần tử 22. Đồng thời, ta cũng có

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ 2x + y = 6 \times 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 6 \end{cases}$$



$m = 6$ tập và 15 phần tử

nên có 15 phần tử xuất hiện 2 lần, và 6 phần tử xuất hiện 1 lần. Xét mô đồ thị như sau, các cạnh được đánh số dựa vào thứ tự từ điển của các tên cặp đỉnh mà nó nối.

Từ mô hình trên, ta có 6 tập hợp như sau:

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3, 4, 5\},\\
B &= \{1, 6, 7, 8, 9\},\\
C &= \{2, 6, 10, 11, 12\},\\
D &= \{3, 7, 10, 13, 14\},\\
E &= \{4, 8, 11, 13, 15\},\\
F &= \{5, 9, 12, 14, 15\}.
\end{aligned}$$

Từ đó ta sẽ tiến hành xây dựng được mô hình đầy đủ của cả 6 tập.

Tập	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	×	×	×	×	×											×					
2	×					×	×	×	×	×							×				
3		×				×				×	×	×						×			
4			×				×			×			×	×					×		
5				×				×			×		×		×					×	
6					×				×			×		×	×						×

Mô tả việc phân bố các phần tử vào tập hợp

Ví dụ 2. Xét ví dụ $n = 99, k = 10$ thì số tập con của họ S là $m = \left\lceil \frac{2(n-1)}{k+1} \right\rceil = 18$. Do ở đây không có phép chia hết nên việc xây dựng có phần linh hoạt hơn.

- Nếu không bỏ đi phần tử 99 thì ta có

$$\begin{cases} x + y = 99 \\ 2x + y = 18 \times 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 81 \\ y = 18 \end{cases}$$

  Do vừa có $y = m$ nên mô hình xây dựng tương tự ví dụ 1 ở trên.

- Nếu bỏ đi phần tử 99 thì ta có

$$\begin{cases} x + y = 98 \\ 2x + y = 18 \times 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 82 \\ y = 16 \end{cases}$$

Ở đây ta có $2x = 164 > 162 = (k-1)m$ nên khi dùng 82 phần tử xuất hiện 2 lần để xây dựng cho $k - 1$ phần tử đầu của mỗi tập con, sẽ còn một phần tử xuất hiện ở cả vị trí thứ k của 2 tập con nào đó. Cuối cùng, ta điền nốt phần tử thứ k của mỗi tập con bởi 16 phần tử xuất hiện 1 lần.

5. Kết luận và hướng phát triển

Trong mục trước, ta chỉ xét trường hợp mỗi phần tử xuất hiện không quá 2 lần nên cần phải có ràng buộc $n-1 \geq \frac{k(k+1)}{2}$ hoặc $n \geq \frac{k(k+1)}{2}$. Điều này có nghĩa là cách xây dựng sẽ không dùng được cho mọi trường hợp của (n,k).

Rõ ràng trường hợp $k=n$ thì bài toán không có lời giải, do mỗi tập con đều phải lấy đủ cả n phần tử, nên không thể tạo ra sự khác biệt trong việc xuất hiện của từng phần tử. Ta xét tiếp $k=n-1$ thì xét hết tất cả các tập con có k phần tử của n phần tử, và dễ thấy họ các tập con này sẽ thỏa mãn. Vì thế nên tiếp theo, ta chỉ quan tâm (n,k) thỏa mãn

$$k < n < \frac{k(k+1)}{2}.$$

Như thế, với những bộ (n,k) không thỏa điều kiện trên (rõ ràng vẫn sẽ tồn tại một họ S nào đó) thì để tìm ra $\min|S|$ ta có thể suy ra ngay rằng sẽ có phần tử nào đó xuất hiện ở ít nhất 3 tập hợp trong mô hình cần tìm. Khi đó, ta sẽ có $m \geq \left\lceil \frac{2(n-1)}{k+1} \right\rceil + 1$(do không thể lấy được chặn dưới cũ nữa).

Ví dụ 3. Xét $(n,k)=(14,5)$ thì $m=5$. Gọi x,y lần lượt là số phần tử xuất hiện trong $2,1$ tập và giả sử chỉ có những phần tử như thế thì

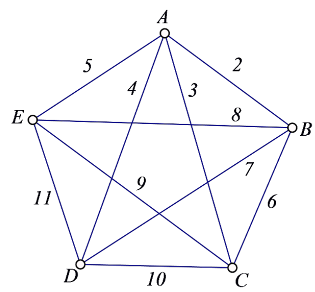
$$\begin{cases} x+y=14 \\ 2x+y=5\times 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=3 \end{cases}$$

không thỏa do $x=11>C_5^2=10$. Ta cho một phần tử 14 không xuất hiện, còn phần tử 1 xuất hiện 3 lần thì ta có hệ

$$\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+y+3=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=2 \end{cases}.$$

Ta xây dựng theo mô hình graph bằng cách điền các số từ $2 \to 11$ vào các cạnh của graph đầy đủ như bên. Từ đó ta có họ S gồm $m=5$ tập như sau

$$\begin{cases} A=\{1,2,3,4,5\}, \\ B=\{1,2,6,7,8\}, \\ C=\{1,3,6,9,10\}, \\ D=\{4,7,10,11,12\}, \\ E=\{5,8,9,11,13\}. \end{cases}$$



$m=5$ tập và 11 phần tử

Ta có nhận xét tổng quát: nếu một phần tử $x \in \{1,2,\ldots,n\}$ xuất hiện trong một nhóm gồm ít nhất 2 tập con thì hoán vị $f(x)$ sẽ thuộc phần giao của các tập đó. Trong trường hợp giao của các tập đó có số phần tử là 1 thì ta sẽ có $f(x)=x$.

Điều này cho phép ta xây dựng một số phần tử xuất hiện trong nhiều hơn 2 tập con. Từ ý tưởng này, ta thấy rằng chỉ cần bố trí các phần tử thích hợp trong m tập thì sẽ đáp ứng được số lượng phần tử là

$$n \leq C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \cdots + C_m^m = 2^m.$$

Kết luận, trên cơ sở đánh giá số lượt xuất hiện của mỗi phần tử trong các tập hợp, chúng tôi đã thiết lập được chặn dưới cho cơ sở và xây dựng được cơ sở bằng mô hình lý thuyết đồ thị. Bước xây dựng chỉ thành công với những dữ liệu thích hợp, trường hợp tổng quát đang được nghiên cứu thêm. Với đặc điểm của bài toán, ta có thể nghiên cứu đến khả năng ứng dụng của nó vào các bài toán lưu trữ nói riêng hay các bài toán trong khoa học máy tính nói chung.

Tài liệu

[1] Sean Eberhard, Kevin Ford, Ben Green. Permutations fixing a k-set. International Mathematics Research Notices, Volume 2016, Issue 21, November 2016, Pages 6713–6731, 2016.

[2] P. Diatonics, J. Fulman, R. Guralnick. On fixed points of permutations. J. Algebraic Combi., 28(1):189-218, 2008.

[3] D. R. Stinson, R. Wei. Cominatorial Batch Codes. Communications in Advanced Mathematical, 2009.

[4] J. Jung, C. Mummert, E. Niese, M. Schroeder. On erasure combinatorial batch codes. Designs, Codes and Cryptography, 2018.

[5] Y. Ishai, E. Kushilevitz, R. Ostrovsky. Batch codes and their applications. Proceedings of STOC 2004, ACM Press, page 262-271, 2004.

THAY ĐỔI GIẢ THIẾT CỦA MỘT BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM

TRẦN NHẬT QUANG
Sinh viên trường ĐH Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

Xuất phát từ một bài toán phương trình hàm có kết cấu đơn giản và lời giải cũng gọn gàng, tác giả cố gắng khai thác điểm mấu chốt của bài toán để tạo ra những bài toán khó hơn. Thông qua đó, tác giả còn muốn chia sẻ một số góc nhìn, cảm nhận của bản thân khi đối diện với một bài toán phương trình hàm.

Nhân đây tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành đến thầy Nguyễn Tài Chung [1] đã truyền niềm đam mê phương trình hàm cho tác giả trong những năm tháng cấp 3 tác giả được học thầy ở trường THPT Chuyên Hùng Vương, Gia Lai. Xin chúc thầy luôn mạnh khỏe và ngày càng thành công hơn nữa với đam mê của mình.

[1]Giáo viên trường THPT Chuyên Trần Phú, Hải Phòng

1. Bài toán ban đầu

Trong quá trình học toán tôi có bắt gặp bài toán phương trình hàm dưới đây:
Bài toán 1: Tìm tất cả các hàm tăng nghiêm ngặt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x)+y) = f(x+y)+1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ý tưởng: Giả thiết hàm f tăng nghiêm ngặt dẫn đến một hệ quả quan trọng: f là đơn ánh. Vì vậy ta sẽ cố gắng biến đổi phương trình (1) về dạng $f(A) = f(B)$ nhằm tận dụng tính chất này. Ta có thể xử lý theo các hướng sau:

Lời giải 1: Trong (1) hoán đổi vị trí của x và y cho nhau thì được:

$$f(f(y)+x) = f(x+y)+1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (1) ta suy ra:

$$f(f(y)+x) = f(f(x)+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do hàm f tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$ nên f cũng là đơn ánh. Vì vậy từ đẳng thức trên ta có ngay:

$$f(y)+x = f(x)+y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chuyển vế, thu được:

$$f(y)-y = f(x)-x, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(x) - x = C, \forall x \in \mathbb{R}$, với C là hằng số. Nói cách khác,

$$f(x) = x + C, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay công thức trên vào (1), ta tìm được: $C = 1$.

Vậy có duy nhất một hàm số f thỏa mãn các yêu cầu của bài toán là $f(x) = x+1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải 2: Trong (1) thay x bởi $x + f(y)$ thì được:

$$f\Big(f(x+f(y))+y\Big) = f(x+y+f(y))+1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng (1) cho cả hai vế của đẳng thức trên ta được:

$$f(f(x+y)+1+y) = f(f(x+y)+f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đến đây sử dụng tính đơn ánh của hàm f ta được:

$$f(x+y)+1+y = f(x+y)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(y) = y + 1, \forall y \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lời giải 3: Trong (1) thay x bởi $y + f(x)$ thì được:

$$f\Big(f(y+f(x))+y\Big) = f(2y+f(x))+1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng (1) cho cả hai vế của đẳng thức trên ta được:

$$f(f(x+y)+1+y) = f\Big(f(f(x))+2y\Big), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đến đây sử dụng tính đơn ánh của hàm f ta được:

$$f(x+y)+1+y = f(f(x))+2y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tiếp tục cho $x = 0$ ta được:

$$\begin{aligned} &f(y)+y+1 = 2y+f(f(0)), \forall y \in \mathbb{R} \\ &\quad \Longrightarrow f(y) = y + C, \forall y \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số).} \end{aligned}$$

Thay công thức trên vào (1), ta tìm được: $C = 1$.

Vậy có duy nhất một hàm số f thỏa mãn các yêu cầu của bài toán là $f(x) = x+1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chú ý. *Cả 3 lời giải tôi trình bày trên đây đều sử dụng tính đơn ánh của hàm f. Câu hỏi được đặt ra bây giờ là: Nếu đề bài không có giả thiết "f đơn ánh" thì sao? Trong phần còn lại của bài viết này, tôi sẽ tạo ra những bài toán mới dựa trên phương trình (1) mà không có giả thiết "hàm f đơn ánh", kèm theo lời giải và nhận xét về những bài toán đó.*

2. Thay đổi giả thiết: Lần 1

Ở **bài toán 1** thay giả thiết "hàm f tăng nghiêm ngặt" bởi giả thiết "hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$", ta thu được bài toán sau:

Bài toán 2: Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$f(f(x)+y) = f(x+y)+1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ý tưởng: Sau khi được tiếp cận với **bài toán 1** thì một suy nghĩ rất tự nhiên để giải quyết **bài toán 2** đó là chứng minh hàm f đơn ánh. Việc này không dễ thực hiện vì đẳng thức (1) không chứa các biến x, y ở bên ngoài. Tuy nhiên chớ vì trở ngại đó mà vội bỏ cuộc, ta sẽ thử dùng phương pháp phản chứng để vượt qua khó khăn trên.

Lời giải 1: Trong (1) thay y bởi $y - x$ thì được:

$$f(y + f(x) - x) = f(y) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Giả sử f không phải là đơn ánh, nghĩa là tồn tại $x_1 > x_2$ sao cho $f(x_1) = f(x_2)$. Đặt $K_1 = f(x_1) - x_1$ và $K_2 = f(x_2) - x_2$ thì $K_1 < K_2$. Trong (2) lần lượt cho $x = x_1$ và $x = x_2$ ta thu được:

$$f(y + K_1) = f(y) + 1 = f(y + K_2), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Đến đây thay y bởi $y - K_1$ và đặt $T = K_2 - K_1 > 0$ thì được:

$$f(y) = f(y + T), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Bằng quy nạp ta thu được:

$$f(y) = f(y + mT), \forall y \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Đẳng thức trên chứng tỏ hàm f tuần hoàn trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với giả thiết f liên tục trên $\mathbb{R}$ khiến ta nghĩ đến một kết quả kinh điển trong giải tích: "Nếu hàm số f liên tục và tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ thì f bị chặn trên $\mathbb{R}$." Để chứng minh được kết quả này, ta cần có bổ đề sau:

Bổ đề 1 *Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì f bị chặn trên đoạn $[a, b]$.*

Chứng minh. Giả sử f không bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Khi đó với mọi số tự nhiên n, tồn tại $x_n \in [a, b]$ sao cho $|f(x_n)| \geqslant n$. Theo định lý Bolzano-Weierstrass, dãy (x_n) có một dãy con (x_{n_k}) hội tụ về x_0.

Rõ ràng $x_0 \in [a, b]$. Vì f liên tục tại x_0 nên dãy $\left(f(x_{n_k})\right)$ hội tụ về $f(x_0)$.
Ta lại có $|f(x_{n_k})| \geqslant n_k \geqslant k, \forall k \in \mathbb{N}$. Từ đây cho $k \to +\infty$ ta được:

$$|f(x_0)| \geqslant +\infty, \text{ vô lý!}$$

Vậy f bị chặn trên đoạn $[a, b]$. □

Trở lại bài toán, ta sẽ chứng minh f bị chặn trên $\mathbb{R}$ như sau:

Do f liên tục trên đoạn $[0, T]$ nên theo **bổ đề 0.1**, tồn tại $M > 0$ để mà:

$$|f(x)| < M, \forall x \in [0, T]. \quad (4)$$

Lấy $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, chọn $m = \left[\dfrac{x}{T}\right] \in \mathbb{Z}$. Lúc này $x - mT \in [0, T]$ và ta có:

$$|f(x)| \overset{(3)}{=} |f(x - mT)| \overset{(4)}{<} M.$$

Do đó $|f(x)| < M, \forall x \in \mathbb{R}$. Nói cách khác, f bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(y + K_1) = f(y) + 1, \forall y \in \mathbb{R}$ nên bằng quy nạp ta thu được:

$$f(y + nK_1) = f(y) + n, \forall y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Đến đây chọn $y = 0$ ta được:

$$f(nK_1) = f(0) + n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Thế nhưng điều này mâu thuẫn với tính bị chặn của hàm f.

Do đó f là đơn ánh. Đến đây giải tiếp như **bài toán 1**.

Chú ý.

✓ *Bạn đọc hãy thử chứng minh kết quả sau dựa vào **bổ đề 0.1** ở trên: "Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì f đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[a, b]$." Đây chính là nội dung của **định lý giá trị cực biên Weierstrass**.*

✓ *Số $m = \left[\dfrac{x}{T}\right]$ trong lời giải trên đã được tìm ra như thế nào? Nhằm tận dụng tính tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ của hàm f, ta mong muốn "dịch chuyển" x về miền $[0, T]$ bằng cách chọn $x_0 \in [0, T]$ và một số nguyên m sao cho:*

$$x = x_0 + mT.$$

Để thực hiện được ý đồ trên, ta chỉ cần chọn số nguyên m thỏa mãn $0 \leqslant x - mT \leqslant T$, hay $\dfrac{x}{T} - 1 \leqslant m \leqslant \dfrac{x}{T}$. Có lẽ không còn số nguyên m nào thích hợp hơn số $\left[\dfrac{x}{T}\right]$ trong tình huống này cả.

✓ *Nếu dự đoán được $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ là nghiệm hàm của bài toán thì ta có thể tìm cách chứng minh: $f(x) - x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (hoặc $f(x) - x$ là hằng số). Kĩ thuật phản chứng một lần nữa tỏ ra hiệu quả và ta có được lời giải thứ 2 sau đây:*

Lời giải 2: Trong (1) cho $x = y = 0$ và đặt $\alpha = f(0)$ thì được: $f(\alpha) = \alpha + 1$.

Trong (2) cho $x = \alpha$ thì được:

$$f(y + 1) = f(y) + 1, \forall y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Bằng quy nạp ta thu được:

$$f(y + n) = f(y) + n, \forall y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) - x_0 = K \neq 1$. Khi đó trong (2) cho $x = x_0$ thì được:

$$f(y + K) = f(y) + 1, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (5) ta được:

$$f(y + K) = f(y + 1), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $T = |K - 1| > 0$ thì được:

$$f(y) = f(y + T), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Đến đây thực hiện tương tự như **lời giải 1** ta cũng thu được điều vô lý. Do vậy $f(x) - x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Thay đổi giả thiết: Lần 2

Vẫn là phương trình (1), nhưng đề bài đã gọn đi rất nhiều:
Bài toán 3: Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(f(x)+y) = f(x+y)+1, \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Ý tưởng: Lời giải 2 của **bài toán 2** bị vô hiệu trong tình huống này vì ta không thể thực hiện phép thay $x = y = 0$ vào (1). Dẫu vậy ý tưởng chứng minh hàm f đơn ánh như **lời giải 1** vẫn còn đó. Cũng tương tự như **lời giải 1**, giả thiết "hàm f bị chặn dưới" (bởi 0) có lẽ sẽ giúp ta tạo ra một điều mâu thuẫn nào đó.
Lời giải 1: Trong (1) thay y bởi $y - x$ thì được:

$$f(y+f(x)-x) = f(y)+1, \forall y > x > 0. \tag{2}$$

Giả sử f không phải là đơn ánh, nghĩa là tồn tại $0 < x_1 < x_2$ sao cho $f(x_1) = f(x_2)$. Đặt $K_1 = f(x_1) - x_1$ và $K_2 = f(x_2) - x_2$ thì $K_1 > K_2$. Trong (2) lần lượt cho $x = x_1$ và $x = x_2$ ta thu được:

$$f(y+K_1) = f(y)+1 = f(y+K_2), \forall y > x_2.$$

Đến đây thay y bởi $y - K_2$ và đặt $T = K_1 - K_2 > 0$ thì được:

$$f(y) = f(y+T), \forall y > \max\{x_2, K_2\}.$$

Bằng quy nạp ta thu được:

$$f(y) = f(y+mT), \forall y > \max\{x_2, K_2\}, m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Ta cũng có $f(y+K_1) = f(y)+1, \forall y > \max\{x_2, K_2\}$, tuy nhiên ta chưa thể vội kết luận điều sau đây bằng quy nạp được:

$$f(y+nK_1) = f(y)+n, \forall y > \max\{x_2, K_2\}, n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Lý do nằm ở việc tập xác định của hàm f trong bài toán này là $\mathbb{R}^+$. Giả sử có tình huống $K_1 < 0$ xảy ra thì do $\lim\limits_{n\to+\infty}(y+nK_1) = -\infty$ nên đến một thời điểm nào đó, $y+nK_1$ sẽ nhỏ hơn 0, và khi đó $f(y+nK_1)$ hiển nhiên không xác định. Chính vì vậy để thực hiện được phép quy nạp trên, ta cần có $K_1 \geqslant 0$. Nhu cầu này thúc đẩy chúng ta chứng minh $f(x) \geqslant x, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Giả sử tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) < x_0$. Đặt $\varepsilon = x_0 - f(x_0) > 0$. Với mọi số tự nhiên n, ta có:

$$f(x_0+n\varepsilon) = f(f(x_0)+(n+1)\varepsilon) \overset{(1)}{=} f(x_0+(n+1)\varepsilon)+1.$$

Dẫn đến: $f(x_0) = f(x_0+n\varepsilon)+n > n, \forall n \in \mathbb{N}$. Điều này là vô lý!

Hơn nữa nếu tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) = x_0$ thì trong (1) cho $x = x_0$ ta được: $0 = 1$, vô lý!

Do đó $f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Và vì vậy đẳng thức (4) được chứng minh hoàn toàn.

Trở lại bài toán, chọn $y_0 = \max\{x_2, K_2\} + 1$. Khi đó với mọi số tự nhiên n ta có:

$$\begin{aligned} f(y_0) &\overset{(3)}{=} f(y_0 + nT) \\ &= f\left(y_0 + \left\{\frac{nT}{K_1}\right\} \cdot K_1 + \left[\frac{nT}{K_1}\right] \cdot K_1\right) \\ &\overset{(4)}{=} f\left(y_0 + \left\{\frac{nT}{K_1}\right\} \cdot K_1\right) + \left[\frac{nT}{K_1}\right] \qquad \left(K_1 > 0 \text{ nên } \left[\frac{nT}{K_1}\right] \in \mathbb{N}\right) \\ &> \left[\frac{nT}{K_1}\right]. \end{aligned}$$

Như vậy $f(y_0) > \left[\frac{nT}{K_1}\right], \forall n \in \mathbb{N}$. Từ đây cho $n \to +\infty$ (chú ý $K_1 > 0$) ta có ngay điều vô lý.

Do đó f là đơn ánh. Đến đây giải tiếp như **bài toán 1**.

Chú ý. *Đối với những bài toán tìm hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ta thường chú ý đến tính đơn điệu, đơn ánh, tuần hoàn, bị chặn, cộng tính,... của hàm f. Đặc biệt, kĩ thuật phản chứng, xây dựng hàm tuần hoàn nhằm chứng minh f là đơn ánh rất thường gặp trong những bài toán dạng này. Bạn đọc có thể tìm thấy một số bài toán có sử dụng kĩ thuật này ở mục bài tập rèn luyện.*

Lời giải 2: Ta có một bổ đề rất mạnh khi giải những bài toán phương trình hàm trên tập hợp các số thực dương sau đây:

Bổ đề 2 *Cho các hàm $f, g, h, q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:*

$$f(g(x) + y) = h(x) + f(y), \forall x > 0, y > q(x). \tag{5}$$

Khi đó $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ là hàm hằng.

Chứng minh. Trong (5) thay y bởi $y - g(x)$ thì được:

$$f(y - g(x)) = f(y) - h(x), \forall x > 0, y > q(x) + g(x).$$

Bằng quy nạp ta thu được:

$$f(y - ng(x)) = f(y) - nh(x), \forall n \in \mathbb{N}^*, x > 0, y > q(x) + ng(x). \tag{6}$$

Từ (5) bằng quy nạp ta cũng có:

$$f(y + mg(x)) = f(y) + mh(x), \forall m \in \mathbb{N}^*, x > 0, y > q(x). \tag{7}$$

Lấy $x, y > 0$ tùy ý. Ta hoàn toàn chọn được $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $mg(x) > ng(y)$. Đặt

$z = q(x) + q(y)$, khi đó với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ thì:

$$\begin{aligned} f(z + kmg(x) - kng(y)) &\overset{(6)}{=} f(z + kmg(x)) - knh(y) \ (\text{do } z + kmg(x) > q(y) + kng(y)) \\ &\overset{(7)}{=} f(z) + kmh(x) - knh(y) \ \ (\text{do } z > q(x)) \\ &= f(z) + k\big[mh(x) - nh(y)\big]. \end{aligned}$$

Nếu $mh(x) - nh(y) < 0$ thì $\lim\limits_{k\to+\infty} k\big[mh(x) - nh(y)\big] = -\infty$. Như vậy khi k đủ lớn thì

$f(z + kmg(x) - kng(y)) < 0$, vô lý! Do đó $mh(x) \geqslant nh(y)$.

Nói tóm lại, ta thu được kết luận sau:

$$\text{“Nếu } \frac{g(x)}{g(y)} > \frac{n}{m} \text{ thì } \frac{h(x)}{h(y)} \geqslant \frac{n}{m}.\text{”}$$

Giả sử $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ không phải hàm hằng, tức là tồn tại $x, y > 0$ sao cho $\dfrac{g(x)}{h(x)} > \dfrac{g(y)}{h(y)}$. Suy ra $\dfrac{g(x)}{g(y)} > \dfrac{h(x)}{h(y)}$.

Mặt khác $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên tồn tại số hữu tỉ dương $\dfrac{n}{m}$ sao cho

$$\frac{g(x)}{g(y)} > \frac{n}{m} > \frac{h(x)}{h(y)}.$$

Điều này mâu thuẫn với kết luận ở trên. Vậy $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ phải là hàm hằng. □

Trở lại bài toán: Ở **lời giải 1** ta đã chứng minh được $f(x) > x, \forall x > 0$. Áp dụng **bổ đề 0.2** ở (2) cho $g(x) = f(x) - x > 0$, $h(x) = 1$, $q(x) = x$ ta được:

$$f(x) - x = C, \forall x > 0 \ (C \text{ là hằng số}).$$

Thay công thức trên vào (1) ta tìm được: $C = 1$.

Vậy có duy nhất một hàm số f thỏa mãn các yêu cầu của bài toán là $f(x) = x + 1, \forall x > 0$.

4. Bài tập rèn luyện

Bài 1: (VMO 2022) Tìm tất cả hàm số $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{f(x)}{x} + y\right) = 1 + f(y), \quad \forall x, y \in (0, +\infty).$$

Bài 2: (IMO Shortlist 2007) Tìm tất cả hàm số $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ thỏa mãn:

$$f(x+f(y))=f(x+y)+f(y),\quad \forall x,y\in(0,+\infty).$$

Bài 3: Tìm tất cả hàm số $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ thỏa mãn:

$$f(x+f(x)+y)=2x+f(y),\quad \forall x,y>0.$$

Bài 4: (Japan 2019) Tìm tất cả hàm số $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{f(y)}{f(x)}+1\right)=f\left(x+\frac{y}{x}+1\right)-f(x),\quad \forall x,y>0.$$

5. Lời kết

Thông qua bài viết này, tôi muốn chia sẻ đến bạn đọc một hướng sáng tác bài toán thuộc chủ đề phương trình hàm nói riêng và toán học nói chung, đó là thay đổi giả thiết của bài toán gốc. Đồng thời giới thiệu một số kỹ thuật cơ bản thường dùng khi giải các bài toán phương trình hàm. Trên hết, tôi muốn nhắn nhủ với bạn đọc rằng: Việc giải được một bài toán đối với nhiều người đã là một chiến thắng, nhưng nếu chịu khó tìm tòi, phân tích kĩ bản chất, đào sâu hơn nữa bài toán đó để phát hiện ra những kết quả mới, những lời giải mới, hay những bài toán mới thì chiến thắng ấy còn vẻ vang hơn gấp vạn lần. Việc sáng tác đề toán đôi khi đơn giản chỉ là điều chỉnh giả thiết của bài toán ban đầu một chút, hoặc nói theo một nghĩa "vui nhộn" hơn là chép nhầm đề bài toán gốc, ta đã thu được một bài toán mới khó hơn rất nhiều. Hi vọng rằng với chút kinh nghiệm nhỏ về việc sáng tác bài toán tôi đã trình bày trong bài viết này sẽ giúp bạn đọc nâng cao khả năng sáng tạo, tự học, tự nghiên cứu của bản thân.

Tài liệu

[1] Nguyễn Tài Chung, Lê Hoành Phò, *Chuyên khảo Phương trình hàm*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội: Hà Nội, 2016.

[2] Trần Trí Dũng, *Giáo trình Giải tích hàm một biến*. Lưu hành nội bộ, 2020.

[3] Nguyễn Nhất Huy, Phạm Hoàng Sơn, "Khai thác một lớp các hệ thức đặc biệt khi giải phương trình hàm" trong *Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic* 2023, Trần Nam Dũng. Vũng Tàu, 2023, tr.93 − 116.

[4] Diễn đàn Art of Problem Solving:
https://artofproblemsolving.com/community

Bài toán hay – Lời giải đẹp

Trần Nam Dũng
GV trường PTNK - ĐHQG TP. HCM.

Giới thiệu. *Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số báo trước về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quanh những bài toán và lời giải đó.*
Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.
Số này chúng tôi giới thiệu bài viết của thầy Ngô Văn Thái về một bài toán bất đẳng thức ở VMO 2011 với nhiều mở rộng thú vị. Trong đề toán thi học sinh giỏi Quốc Gia (VMO) lớp 12 năm 2011, câu đầu tiên của ngày thi thứ nhất là câu chứng minh bất đẳng thức một biến rất gọn, hay. Sau này tôi được biết tác giả đề xuất bài toán đó cùng lời giải đẹp của đáp án là của thầy Trần Nam Dũng, giảng viên trường Đại học KHTN, ĐHQG-HCM. Nội dung bài viết này tôi xin giới thiệu đề bài cùng lời giải của chính tác giả đề toán và một số mở rộng để bạn đọc tham khảo.

Trước hết, ta bắt đầu bằng bài toán sau đây:

Bài toán 1 Cho x là số thực dương và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^n\left(x^{n+1}+1\right)}{x^n+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}. \qquad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải (Cách 1) Với $n=1$ thì $(*)$ có dạng

Sử dụng phương pháp quy nạp Toán học

$$\frac{x\left(x^2+1\right)}{x+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^3$$

hay

$$(x+1)^4 \ge 8x\left(x^2+1\right)$$

Bất đẳng thức này đúng vì

$$(x+1)^4 - 8x\left(x^2+1\right) = (x-1)^4 \ge 0.$$

Dấu bằng của (*) xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Như vậy (*) đã đúng với $n=1$. Giả sử (*) đúng với $n=k,\ k\in\mathbb{N},\ k\ge 2$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Bây giờ ta chứng minh (*) cũng đúng với $n=k+1$, tức là phải chứng minh

$$\frac{x^{k+1}\left(x^{k+2}+1\right)}{x^{k+1}+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2(k+1)+1}$$

Thật vậy theo giả thiết quy nạp thì

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1} \ge \frac{x^k\left(x^{k+1}+1\right)}{x^k+1}$$

Suy ra

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2(k+1)+1} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1} \ge \left(\frac{x+1}{2}\right)^2.\frac{x^k\left(x^{k+1}+1\right)}{x^k+1}$$

Tiếp theo ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2.\frac{x^k\left(x^{k+1}+1\right)}{x^k+1} \ge \frac{x^{k+1}\left(x^{k+2}+1\right)}{x^{k+1}+1}$$

hay

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+1)^2}{4x} \geq \frac{\left(x^{k+2}+1\right)\left(x^k+1\right)}{\left(x^{k+1}+1\right)^2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(x+1)^2}{4x} - 1 \geq \frac{\left(x^{k+2}+1\right)\left(x^k+1\right)}{\left(x^{k+1}+1\right)^2} - 1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(x-1)^2}{4x} \geq \frac{x^k(x-1)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)^2}\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)^2\left[\left(x^{k+1}+1\right)^2 - 4x^{k+1}\right] \geq 0\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)^2\left(x^{k+1}-1\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Bất đẳng thức cuối cùng này hiển nhiên đúng, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Vậy nên ta có

$$
\frac{x^{k+1}\left(x^{k+2}+1\right)}{x^{k+1}+1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2(k+1)+1}.
$$

Đến đây theo nguyên lý quy nạp Toán học, ta có được ngay điều cần phải chứng minh. □

LỜI GIẢI (Cách 2)

Cách giải này của thầy Võ Quốc Bá Cẩn

Thay $x = \frac{a}{b}$ thì bất đẳng thức trở thành

$$
\frac{a^n b^n (a^{n+1}+b^{n+1})}{a^n+b^n} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n+1} \tag{**}
$$

với mọi $a, b > 0$. Vì bất đẳng thức $(**)$ là thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh nó đúng trong điều kiện chuẩn hóa $a + b = 2$. Xét

$$
f_n(a,b) = a^n + b^n - a^n b^n (a^{n+1} + b^{n+1})
$$

Ta sẽ chứng minh $f_n(a,b) \geq 0$ với mọi $a, b > 0, a + b = 2$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$
\begin{aligned}
ab(a^{n-1}+b^{n-1})(a^{n+1}+b^{n+1}) &\leq \left(\frac{(a^n b + ab^n) + (a^{n+1}+b^{n+1})}{2}\right)^2\\
&= \left(\frac{(a+b)(a^n+b^n)}{2}\right)^2 = (a^n+b^n)^2.
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra

$$
a^{n+1} + b^{n+1} \leq \frac{(a^n+b^n)^2}{ab\left(a^{n-1}+b^{n-1}\right)}.
$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f_n(a,b) &\geq a^n + b^n - \frac{a^n b^n (a^n+b^n)^2}{ab(a^{n-1}+b^{n-1})} \\ &= \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}(a^{n-1}+b^{n-1} - a^{n-1}b^{n-1}(a^n+b^n)) \\ &= \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}} f_{n-1}(a,b) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức này nhiều lần liên tiếp ta được

$$f_n(a,b) \geq \frac{a^n+b^n}{2} f_0(a,b) = 2-(a+b) = 0.$$

Đó chính là điều chứng minh. □

Sử dụng phương pháp ở cách 1, ta có thể khái quát bất đẳng thức VMO-2011 thành bất đẳng thức mở rộng sau:

Bài toán 2 Cho x là số thực dương, k là số thực tùy ý và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$x^n.\frac{\left(x^{k-1}+1\right)\left(x^{k+n}+1\right)}{\left(x^k+1\right)\left(x^{k+n-1}+1\right)} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Với giả thiết đã cho, hiển nhiên ta có

$$(x-1)^2\left(x^{k+i}-1\right)^2 \geq 0,\ \forall i \in \mathbb{R}.$$

Nhưng bất đẳng thức này lại tương đương với các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} &(x-1)^2\left[\left(x^{k+i}+1\right)^2 - 4x^{k+i}\right] \geq 0 \\ &\frac{(x-1)^2}{4x} \geq \frac{x^{k+i-1}(x-1)^2}{\left(x^{k+i}+1\right)^2} \\ &\frac{(x-1)^2}{4x} + 1 \geq \frac{x^{k+i-1}(x-1)^2}{\left(x^{k+i}+1\right)^2} + 1 \\ &\frac{(x+1)^2}{4x} \geq \frac{\left(x^{k+i+1}+1\right)\left(x^{k+i-1}+1\right)}{\left(x^{k+i}+1\right)^2} \\ &\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)^2 \geq \frac{\left(x^{k+i+1}+1\right)\left(x^{k+i-1}+1\right)}{\left(x^{k+i}+1\right)^2} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)^2 \geq \prod_{i=0}^{n-1}\frac{\left(x^{k+i-1}+1\right)\left(x^{k+i+1}+1\right)}{\left(x^{k+i}+1\right)^2}$$

hay
$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n} \geq x^n . \frac{\left(x^{k-1}+1\right)\left(x^{k+n}+1\right)}{\left(x^k+1\right)\left(x^{k+n-1}+1\right)}.$$
Dấu đẳng thức của bài toán 2 xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Bài toán 2 được chứng minh. □

Từ bài toán mở rộng 1 cho $k = 1$, hoặc $k = -n$, ta được bài VMO-2011.

Từ bài toán 2, đặt $x = \frac{a}{b}$ ta lại được bài toán tương đương như sau

Bài toán 3 Cho a, b là hai số thực dương, k là số thực tùy ý và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng
$$a^n b^n \frac{\left(a^{k-1}+b^{k-1}\right)\left(a^{k+n}+b^{k+n}\right)}{\left(a^k+b^k\right)\left(a^{k+n-1}+b^{k+n-1}\right)} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n}.$$
Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán này 3, trong trường hợp $k = 1$, có thể dùng để chứng minh kết quả đẹp khác như sau:

Bài toán 4 Cho a, b là các số thực dương có tổng bằng 2 và n là số nguyên dương lớn hơn 1. Khi đó ta có bất đẳng thức
$$(ab)^{n(n-1)/2}(a^n + b^n) \leq 2.$$

Với bài toán 4 này, nảy sinh một câu hỏi: Với số nguyên dương $n > 1$ cho trước, tìm số k nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện
$$(ab)^k(a^n + b^n) \leq 2$$
với mọi $a, b > 0, a + b = 2$.

Cuối cùng, có một bài toán mở rộng được đặt ra theo hướng này:

Bài toán 5 Cho số nguyên dương n lớn hơn 1. Tìm số k nguyên dương nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức
$$(abc)^k \cdot (a^n + b^n + c^n) \leq 3$$
đúng với mọi $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$.

hoặc một bài toán đặc biệt hóa theo hướng này :

Đây là một bài toán trên tạp chí Pi năm 2022

Bài toán 6 Cho $x,\ y$ là hai số thực dương thỏa mãn $x + y = 2$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng
$$x^3 + y^3 + (xy)^k \geq 3.$$