Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng
những người yêu toán

“Lực Coriolis sẽ cho chúng ta biết được lịch sử hình thành các gò đất để khớp với các quyết định chọn Kinh Thành của các vương triều Việt Nam trong lịch sử”
Nguyễn Lê Anh - Lực Coriolis và lịch sử dòng chảy sông Hồng

“Để trở thành nhà Toán học chuyên nghiệp, và có thể sống tốt, sống tự do bằng nghề, đòi hỏi tài năng, sự đam mê dài hạn, và khá nhiều may mắn nữa. Cũng như nhiều ngành nghề khác. Đó là một đặc ân hiếm hoi của cuộc đời.”
Đào Hải Long - Tự Do

ỨNG DỤNG CỦA TRƯỜNG HỮU HẠN VÀO GIẢI BÀI TOÁN DÃY SỐ
Dương Thái Bảo

GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG NHỜ PHÉP QUAY VÀ GEOGEBRA
Nguyễn Hoàng Vũ và cộng sự

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

No. 22
13.08

Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

MỤC LỤC

Alexander Alexandrovich Razborov
Lý thuyết độ phức tạp **4**

Nguyễn Ngọc Giang - Lê Viết Ân - Nguyễn Duy Phước
Về bài hình học IMO 2022 . . . . **16**

Trần Quang Hùng
Về bài toán đường thẳng song song với đường thẳng Euler sinh ra từ tâm đường tròn nội tiếp **30**

Nguyễn Song Thiên Long
Định lý Van Aubel - Một định lý đẹp **37**

Dương Thái Bảo
Ứng dụng của trường hữu hạn vào giải bài toán dãy số **72**

Trương Ngọc Đắc
Hai dãy số sinh bởi các đại lượng trung bình **84**

Lê Phúc Lữ
Về hai bài toán tổ hợp trong đề kiểm tra trường hè 2022 . . . . **95**

Nguyễn Duy Liên
Bài toán hay - Lời giải đẹp **105**

LÝ THUYẾT ĐỘ PHỨC TẠP

Alexander Alexandrovich Razborov

GIỚI THIỆU

Các thuật toán khác nhau để giải quyết nhiều vấn đề khác nhau phổ biến cả trong khoa học và công nghệ và trong cuộc sống hàng ngày (mặc dù trong trường hợp cuối, chúng ngày càng thường xuyên bị "*che đậy*" và ít được người dùng bình thường nhìn thấy). Trong bài viết này, chúng ta sẽ nói về lĩnh vực chung nghiên cứu tính hiệu quả, hay nói khác đi, chất lượng của thuật toán bất kể loại và nguồn gốc của chúng.

Trước hết, cần phải thống nhất về lớp đối tượng đang nghiên cứu, tức là bản thân các thuật toán. Không có sự đồng thuận về vấn đề này. Bản thân từ "*thuật toán*" bắt nguồn từ tên của nhà khoa học Ba Tư vĩ đại al-Khorezmi, người vào thế kỷ thứ IX đã mô tả các quy tắc xử lý hệ thống số vị trí (thật kỳ lạ là từ "*đại số*" cũng xuất phát từ cùng một công trình đó). Sau đó, trong một thời gian dài, thuật toán được hiểu là nghệ thuật và quy tắc đếm, các thuật toán hoạt động trên số nguyên hoặc số hữu tỉ sẽ được gọi là *thuật toán số*.

Mức độ tổng quát tiếp theo là các thuật toán làm việc với dữ liệu rời rạc tùy ý: Đồ thị, mảng, văn bản, lịch trình,... Đây là *các thuật toán theo nghĩa toán học nghiêm ngặt của từ này*. Chúng được định nghĩa và lần đầu tiên được nghiên cứu trong các công trình của các nhà logic toán học vĩ đại của thế kỷ trước, chẳng hạn như K. Gödel, A. A. Markov, P.S. Novikov, A.Turing, A.Church, những người đã tạo ra cơ sở chặt chẽ của *lý thuyết tính được*, và đây là chính xác là lớp thuật toán được sử dụng trong các thiết bị hiện đại.

Cuối cùng, thuật toán có thể được hiểu theo nghĩa rộng nhất, là một tập hợp các quy tắc cụ thể và được xác định đầy đủ, mà việc thực hiện các quy tắc đó sẽ cho phép bạn đạt được mục tiêu trong một thời gian hữu hạn.

Quan điểm chính của lý thuyết về độ phức tạp của các thuật toán, nói một cách đại khái, là không phải tất cả các thuật toán đều bình đẳng theo quan điểm về tính phù hợp thực tế của chúng, và những khác biệt này có thể không chỉ liên quan đến các thuật toán đứng ở các nấc thang khác nhau được nêu trong đoạn trước, nhưng ngay cả với các thuật toán của cùng một bài toán. Hơn nữa, "*chất lượng*" của các thuật toán có thể được *đo lường* bằng một "*hàm phức tạp*", mà trên thực tế sẽ dẫn đến một lý thuyết toán học chặt chẽ.

Chúng ta sẽ thử minh họa các ý tưởng chính của nó bằng một ví dụ mô hình đơn giản. Xét bài toán tìm ước chung lớn nhất (a, b) của các số tự nhiên a và b, nghĩa là số d lớn nhất có thể sao cho cả hai đều chia hết cho d. Bài toán phổ thông này sự tổng quát hóa của nó (ví dụ, đối với trường hợp đa thức) nảy sinh ở bất cứ nơi nào lý thuyết số được áp dụng, chủ yếu trong lý thuyết mật mã. Làm thế nào để giải quyết nó? Có thể có một số cách tiếp cận.

Thuật toán đầu tiên (khá thô sơ). Chúng ta chọn từ các số từ a đến 1 theo thứ tự giảm dần (tức là bắt đầu bằng a) cho đến khi chúng ta gặp số mong muốn.

Thuật toán thứ hai (sau một chút suy nghĩ). Tốt hơn hãy chia tuần tự a cho $2, 3, 4\dots$ và thử $a/2, a/3, a/4, \dots$ (ở đây được hiểu rằng nếu a/k không nguyên thì ta bỏ qua, còn với nó nguyên thì ta thử chia b cho nó). Nếu chúng ta may mắn (và điều này chắc chắn sẽ xảy ra nếu $(a, b) \geqslant \sqrt{a}$), thì tốt, còn nếu không, thì ta chuyển sang phương pháp đầu tiên, nhưng lần này bắt đầu với $\sqrt{a}$, chứ không phải với a.

Thuật toán thứ ba (cho những độc giả có căn bản tốt về toán). Khai triển a và b ra thừa số nguyên tố: $a = p_1^{d_1} p_1^{d_2} \cdots p_k^{d_k}$ và $b = p_1^{e_1} p_1^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ (một số số mũ có thể bằng 0). Khi đó ước chung lớn nhất có thể tính được theo công thức đơn giản

$$d = p_1^{\min(d_1, e_1)} \cdot p_1^{\min(d_2, e_2)} \cdot p_k^{\min(d_k, e_k)}.$$

Để so sánh các cách tiếp cận khác nhau một cách hợp lý, rõ ràng là cần một "*thước đo*" chung. Bạn có thể thử sử dụng số lần thử làm thước đo, sau đó bạn có thể thấy ngay rằng trong trường hợp xấu nhất, thuật toán đầu tiên sẽ cần khoảng a lần thử, trong khi thuật toán thứ hai – cần khoảng $2\sqrt{a}$ lần thử, và đó là một tiến bộ đáng kể. Nhưng làm thế nào để bạn so sánh chúng với thuật toán thứ ba, thuật toán sử dụng những ý tưởng hoàn toàn khác (và nâng cao hơn)?

Các tình huống trong đó các thuật toán tốt đi đến mục tiêu theo đường vòng là rất phổ biến, trên thực tế, lý thuyết thuật toán tồn tại là để phân tích chúng. Do đó, rõ ràng là thước đo mong muốn phải phổ biến và phù hợp với bất kỳ thuật toán nào, không phụ thuộc vào cách chọn hướng giải quyết bài toán. Hóa ra là ngay cả khi chúng ta chỉ quan tâm đến các vấn đề lý thuyết - số như ví dụ mô hình của chúng tôi, rất khó để đưa ra một định nghĩa khả thi về độ phức tạp của chúng hoàn toàn về mặt số. Có quá nhiều ý tưởng khác nhau và toán học đẹp mắt liên quan đến các thuật toán đã có. Nhiều thuật toán thậm chí không phải là thuật toán số theo nghĩa của chúng tôi, tức là các thuật toán đó sử dụng các đối tượng có bản chất khác.

Vì lý do này, một thước đo phổ quát chỉ có thể được đưa ra ở cấp độ tổng quát trong khuôn khổ của lý thuyết tính toán cổ điển, và một cách khoa học nó được gọi là *số bước của máy Turing* - một thiết bị tính toán trừu tượng do nhà toán học vĩ đại người Anh A.Turing đề xuất năm 1936. Ở mức độ trực quan, đây là số bước cơ bản (tức là không thể phân chia được nữa) cần phải thực hiện để đạt được mục tiêu. Trong trường hợp của máy Turing cổ điển, các hoạt động này khá nguyên thủy: Di chuyển dọc theo băng tính toán một vị trí sang trái hoặc phải, đọc hoặc ghi đè ký hiệu được quan sát,... Nhưng một độc giả am hiểu một chút về lập trình có thể giả sử rằng chúng ta đang đếm số lần thực thi các lệnh có trong chương trình trong toàn bộ thời gian hoạt động của nó. Đó là *số lần thực thi*, không phải số lượng lệnh – nếu đếm số lượng lệnh thì đó sẽ là *độ phức tạp Kolmogorov*, mà chúng ta không xem xét ở đây.

Bây giờ chúng ta hãy nói một chút về vai trò của ngẫu nhiên. Nếu chúng ta áp dụng các thuật toán của mình cho $a = 54284452$, $b = 67855565$, nó sẽ ảnh hưởng đến hoạt động của các thuật toán này theo những cách khác nhau. Thuật toán đầu tiên và thứ ba sẽ không chú ý đến đặc thù của a và b và sẽ hoạt động với hiệu suất thông thường của chúng, còn thuật toán thứ hai sẽ đưa ra câu trả lời chính xác $(a, b) = 13571113$ sau lần thử thứ ba. Điều này có nghĩa là thuật toán này chắc chắn tốt hơn?

Không thể đưa ra một câu trả lời chính xác về mặt toán học cho câu hỏi này. Tất cả phụ thuộc vào tần suất các ví dụ đặc biệt tốt hoặc đặc biệt xấu được tìm thấy trong ứng dụng cụ thể mà chúng ta quan tâm vào lúc này. Một ví dụ trong sách giáo khoa là phương pháp simplex được sử dụng (theo như tác giả biết) trong tất cả các gói quy hoạch tuyến tính hiện đại để giải các bài toán tối ưu hóa. Ở đây tình huống hoàn toàn ngược lại (so với ví dụ được đưa ra cho thuật toán thứ hai): Các ví dụ rất xấu cho phương pháp simplex đã được biết đến, nhưng để xây dựng chúng bạn cần rất cố gắng, và trong thực tế, chẳng ai chú ý đến chúng.

Tất nhiên, cách tiếp cận toán học nhất để phân tích các thuật toán là không dựa vào sự may rủi và đơn giản là bỏ qua sự hiện diện của các ví dụ đặc biệt tốt. Nó được gọi là *lý thuyết độ phức tạp trường hợp xấu nhất* (hoặc đôi khi *độ phức tạp được đảm bảo*). Với tất cả những điều đã trao đổi ở trên, cách tiếp cận này hóa ra là một mô hình hoàn toàn định tính và đầy đủ trong hầu hết các tình huống thú vị - các lỗ hổng như phương pháp simplex (nghĩa là khi độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất được xác định bởi các ví dụ cực kỳ xấu) có thể đếm được trên đầu ngón tay. Yêu cầu nhiều hơn từ một mô hình toán học đơn giản là không hợp lý.

Để hiểu cách tiếp cận này là gì, hãy lưu ý rằng thông tin quan trọng và phổ biến nhất về một số là số ký tự trong cách viết của nó (n). Ví dụ, trong ví dụ của chúng ta $n = 8$, nếu viết trong hệ thập phân và $n \approx 25$ nếu là số nhị phân - sự khác biệt là hơn ba lần một chút. Mục tiêu cuối cùng của các nhà phát triển thuật toán là xây dựng một thuật toán được đảm bảo để giải quyết bài toán trong $f(n)$ bước cơ bản, bất kể số $n-$bit nào được cung cấp cho anh ta (trong đó $f(n)$ là một hàm số nào đó, mong muốn là tăng chậm).

Chúng ta nhấn mạnh rằng - đó là số ký tự trong cách viết của số, chứ không phải chính số đó, để cảm nhận sự khác biệt, chỉ cần thấy rằng con số biểu thị số nguyên tử trong phần nhìn thấy được của Vũ trụ có thể viết gọn trên một dòng, dù là bằng một nét chữ nhỏ.

Chúng ta hãy phân tích một lần nữa từ quan điểm thuật toán cho ví dụ mô hình của chúng ta. Trong trường hợp xấu nhất, thuật toán đầu tiên sẽ cần khoảng $f(n) \approx 10^n$ các phép toán cơ bản. Đây là tích số của số lần thử với số phép toán cần thiết cho mỗi phép toán, nhưng vì để làm điều này chỉ cần các phép toán số học đơn giản (tuy nhiên, như rút ra từ bài báo "*Số học nhanh*", ngay cả đối với các phép toán số học này, vấn đề cũng không đơn giản như ta tưởng), thừa số thứ hai là một đa thức nhỏ của n, và so với các hàm mũ, nó hoàn toàn có thể được bỏ qua. Dấu gần đúng được dùng chính là vì điều này. Thuật toán thứ hai trong trường hợp xấu nhất (một bài tập hay cho bạn đọc – tìm hiểu xem trường hợp nào là trường hợp xấu nhất) sẽ cần đến $f(n) \approx 10^{n/2}$ các phép toán, vì vậy nó thực sự tốt hơn một chút so với thuật toán đầu tiên. Tình huống với thuật toán thứ ba đem lại nhiều bài học hơn. Rõ ràng là sự thành công của nó chủ yếu phụ thuộc vào câu hỏi sau: Chúng ta có thể phân tích các số thành thừa số nguyên tố nhanh chậm như thế nào?

Câu hỏi này đã dành được sự quan tâm của các nhà toán học từ thời cổ đại, hàng thiên niên kỷ trước khi có giả thuyết cho rằng không có cách nào hiệu quả để giải quyết vấn đề phân tích ra thừa số nguyên tố, là cơ sở của hầu hết các hệ mật mã được sử dụng trong thế giới hiện đại. Thật không may, chúng ta không có cơ hội đi sâu vào vấn đề này (chủ đề này xứng đáng có một bài viết riêng), vì vậy chúng ta chỉ lưu ý rằng thuật toán tốt nhất được biết đến hiện nay trong trường hợp xấu nhất hoạt động trong thời gian $f(n) = 10^{Cn^{1/3}(\log_2 n)^{2/3}}$, trong đó C là một hằng số không quá lớn. Điều này đã tốt hơn đáng kể so với thuật toán thứ nhất và thứ hai, nhưng hàm vẫn tăng mũ.

Hãy nghĩ thêm một chút về thuật toán thứ ba. Về hình thức, nó là một cách đưa một bài toán về một bài toán khác, cụ thể là đưa bài toán tìm ước chung lớn nhất về bài toán phân tích một số thành thừa số nguyên tố. Điều này có nghĩa là bất kỳ tiến bộ nào trong việc giải quyết vấn đề thứ hai đều tự động kéo theo một tiến bộ tương đương trong việc giải quyết vấn đề đầu tiên. Như chúng ta sẽ thấy bên dưới, khái niệm chung về khả năng đưa bài toán này về một bài toán khác đóng một vai trò cực kỳ quan trọng trong lý thuyết độ phức tạp của thuật toán.

Trong thuật ngữ lập trình, nó tương ứng với khái niệm thủ tục hoặc chương trình con, Tuy nhiên, điều cần thiết là phải đảm bảo rằng thủ tục được gọi một cách "*không quá thường xuyên*" (trong trường hợp của thuật toán thứ ba - hai lần) và đối với các giá trị "*không quá*" lớn của tham số (trong trường hợp của chúng ta, nghĩa là là dữ liệu đầu vào). Liên quan đến việc tìm ước số chung lớn nhất, đã đến lúc chuyển sang một giải pháp mà nhiều độc giả dường như đã mong đợi từ lâu. "*Cơ sở*" của nhà toán học Hy Lạp cổ đại vĩ đại Euclid (khoảng 300 năm trước Công nguyên) được coi là một trong những cuốn sách vĩ đại nhất trong lịch sử nhân loại, trong đó đặt nền móng cho hình học hiện đại (các thuật ngữ "*không gian Euclid*", "*hệ metric Euclid*",... được khởi nguồn từ các trang của "*Cơ sở*"), và trong nhiều khía cạnh cho toàn bộ nền toán học hiện đại nói chung. Ít được biết đến hơn là Quyển VII có mô tả về các thuật toán lâu đời nhất còn tồn tại, và đang vẫn được sử dụng một cách tích cực cho đến ngày nay.

Thuật toán thứ tư và cuối cùng (thuật toán Euclid). Ta chia b cho a có dư $b = aq + r$, trong đó $0 \leqslant r \leqslant a - 1$ ở đâu. Sau đó, ta áp dụng đệ quy thuật toán cho cặp (r, a). Chia a cho r, $a = u \cdot r + s$ và thay thế cặp (r, a) bằng (s, r). Ta tiếp tiếp tục thực hiện cho đến khi đạt được một cặp có dạng $(0, d)$. Số thứ hai trong cặp kết quả sẽ là câu trả lời cần tìm.

Tại sao thuật toán này đúng? Và ngay cả khi nó đúng, tại sao nó lại nhanh? Câu trả lời cho những câu hỏi dạng này (tất nhiên là khi chúng không hoàn toàn hiển nhiên) được giải quyết trong một phần đặc biệt của lý thuyết độ phức tạp được gọi là phân tích thuật toán. Thuật toán Euclid hoạt động chính xác, bởi vì $(a, b) = (r, a) = (s, r) = \cdots$ như vậy, ước số chung lớn nhất, như các nhà toán học vẫn nói, là một bất biến của thủ tục này (so sánh với bài báo "*Trò chơi của* 15"), và đối với cặp cuối cùng, nó đúng bằng d. Nó hoạt động nhanh vì luôn có đánh giá $(a + r) \leqslant \frac{2}{3}(a + b)$. Do đó, tổng các số trong một cặp giảm theo cấp số nhân và đặc biệt, thuật toán chắc chắn sẽ hội tụ sau $f(n) \approx 10n$ phép lặp, đây là một hàm tuyến tính của số ký tự n trong cách viết của a và b. Kết quả thật ấn tượng nếu so với các phương pháp tiếp cận trước đây, và không thể ngờ là thuật toán Euclide đã có khoảng 2500 năm tuổi... Với tính đơn giản và hiệu quả của nó, ngày nay thuật toán Euclid và các tổng quát hóa của nó được sử dụng rộng rãi, cả trong toán lý thuyết và các ứng dụng, chủ yếu là trong mật mã.

Sự khác biệt cơ bản của hàm $10n$ so với tất cả những hàm mà chúng ta đã gặp trước đó là nó là hàm đa thức (nghĩa là nó có dạng $C \cdot n^d$ với $C, d > 0$ chứ không phải là hàm số mũ. Trong lý thuyết độ phức tạp hiện đại, các thuật toán có ước lượng độ phức tạp như vậy (trong trường hợp xấu nhất) được gọi là thuật toán đa thức và lớp của tất cả các bài toán có ít nhất một thuật toán đa thức được gọi là "P". Theo các thuật ngữ này, thuật toán Euclid thiết lập rằng bài toán tìm ước chung lớn nhất của hai số nằm trong lớp P.

Lớp P thường được đồng nhất với lớp của tất cả các bài toán có giải pháp hiệu quả theo nghĩa thực tế của từ này. Ta nhấn mạnh rằng chúng ta đang nói về một sự trừu tượng toán học, không cố gắng (và chưa bao giờ cố gắng) để mô tả thực tại một cách hoàn toàn chính xác.

Lớp P cũng cực kỳ thuận tiện theo quan điểm toán học, và điều này xuất phát từ quan sát đơn giản rằng nhân hai đa thức hoặc thay một đa thức vào một đa thức khác vẫn sẽ tạo ra một đa thức. Ví dụ, khi phân tích các thuật toán trước đây, ta đã viết $f(n) \approx$ để phân biệt giữa số lần "*thử*" (hoặc lần lặp) và số "*phép toán cơ bản*". Tuy nhiên, tất cả các phép toán số học được biết là được thực hiện trong thời gian đa thức (xem "*Số học nhanh*"), do đó, khi nghiên cứu sự thuộc vào lớp P, sự khác biệt này có thể bị bỏ qua và tập trung vào điều thực sự quan trọng, tức là số phép lặp. Những tình huống như vậy là phổ biến.

Một biểu hiện khác của sự bất biến đáng chú ý này là thực tế rằng lớp P không phụ thuộc vào sự lựa chọn của mô hình tính toán. Những người sử dụng C++ và Basic (và thậm chí cả những người thích FORTRAN hoặc, hoàn toàn kinh điển, máy Turing) là lớp P có một cho tất cả. Giả định rằng điều này sẽ luôn như vậy đối với bất kỳ thiết bị máy tính thông minh nào được gọi là *luận điểm Turing - Church mở rộng*.

Các thuật toán đa thức (trong nhiều trường hợp rất không tầm thường) tồn tại cho nhiều bài toán tự nhiên. Các phép toán số học cơ bản đã được nhắc tới trước đó, sự phân cấp tốt hơn của chúng bên trong lớp P có thể được tìm thấy trong bài "*Số học nhanh*". Thuật toán Euclid đưa ra một thuật toán đa thức để tìm ước chung lớn nhất của hai số (nhân tiện, làm thế nào để tính bội chung nhỏ nhất?). Các ví dụ "*đặc biệt xấu*" cho một phương thức simplex có nghĩa là: Các ví dụ mà trên đó nó chạy với thời gian mũ. Thuật toán đa thức thực sự đầu tiên cho quy hoạch tuyến tính được xây dựng bởi nhà toán học Liên Xô L.Khachiyan vào năm 1979.

Ta hãy cùng giở xem tuyển tập này.

Nhiều vấn đề quan trọng đối với các luồng vận tải "*Toán học của các luồng vận tải*" có các thuật toán đa thức. Các thuật toán liên quan đến Internet "*Toán học của Internet*" là các thuật toán chỉ theo nghĩa rộng, vì bản thân các bài toán vốn có tính động và phân tán. Chúng ta sẽ nói về chúng sau một chút, còn bây giờ chúng ta chỉ lưu ý rằng đa thức ở đây là một yêu cầu chắc chắn là cần thiết, nhưng không phải là đủ. Những người xử lý dữ liệu lớn thường nhấn mạnh vào các thuật toán *tuyến tính*, tức là những thuật toán mà $f(n) \leqslant Cn$.

Tất cả các thuật toán được sử dụng trong mật mã "*Về Ứng dụng của Toán học trong Mật mã*" đều là đa thức. Tuy nhiên, đây là một ví dụ khá hiếm khi dựa trên cả sự tồn tại của các thuật toán hiệu quả (đối với người dùng hợp pháp) và giả định rằng các thuật toán đó không tồn tại (trong trường hợp là đối thủ).

Các thuật toán được sử dụng để nén thông tin cũng là đa thức. Cuộc đấu tranh để cải thiện tốc độ mã hóa và giải mã trong lớp P - như trong trường hợp "*dữ liệu lớn*", sự khác biệt giữa thuật toán tuyến tính và thuật toán bậc hai là khá đáng chú ý.

Một thuật toán đơn giản cho sự tồn tại của chu trình Euler từ bài báo "*Từ những chuyến đi dạo ở Königsberg đến giải mã bộ gen*" là đa thức. Chút nữa chúng ta sẽ nói về bài toán đi cặp với nó là bài toán tìm chu trình Hamilton.

"*Trò chơi của* 15" có thể dễ dàng được tổng quát hóa thành "trò chơi của $n^2 - 1$ với số nguyên dương n tùy ý. Có (tác giả đã không xác minh chính xác tuyên bố này!) một thuật toán đa thức đối với n cho phép hai trạng tháng chẵn chỉ ra một đường dẫn biến đổi trạng thái này thành trạng thái kia. Nhân tiện, vấn đề này dễ dàng được đưa về (theo nghĩa của chúng ta) về một trường hợp riêng, khi một trong các trạng thái được sắp xếp hoàn toàn.

Một vấn đề khác đã nhận được sự quan tâm của các nhà toán học trong nhiều thiên niên kỷ là vấn đề xác định số nguyên tố. Mặc dù thuật toán "*gần như đa thức*" (ví dụ, thuật toán xác suất trong đó được phép tung đồng xu và mắc lỗi với xác suất thấp) đã được biết đến từ khá lâu, nhưng thuật toán đa thức theo nghĩa chặt chẽ của từ này đến mại năm 2002 mới được xây dựng. Khám phá này đã gây ra một tiếng vang lớn cả trong cộng đồng toán học và hơn thế nữa.

Rõ ràng, một số độc giả tại thời điểm này sẽ có một chút hoang mang: Sự khác biệt thực sự giữa kiểm tra nguyên tố và phân tích ra thừa số nguyên tố là gì? Có phải nó chỉ là một?

Hóa ra là không, và điều này tạo ra sự khác biệt đáng kể và khá tinh tế giữa *chứng minh xây dựng* và *chứng minh tồn tại* thuần túy. Ví dụ nhiều thuật toán "*gần như đa thức*" (với thuật toán cuối cùng để kiểm tra nguyên tố, tình huống phức tạp hơn một chút, nhưng nguyên tắc thì giống nhau), để chứng minh rằng số m là hợp số, sẽ đưa ra một phản ví dụ cho định lý nhỏ Fermat, nghĩa là, số a, sao cho $a^{m-1} \neq 1$ trong số học theo môđun m. Bạn có thể trích xuất phân tích *thực tế* của m ra thừa số nguyên tố từ chứng minh này không? Câu trả lời cho câu hỏi này là không rõ, một câu trả lời khẳng định dưới dạng một thuật toán đa thức sẽ dẫn đến những thay đổi rất đáng kể trong nền văn minh hiện đại, phần lớn dựa trên niềm tin rằng các hệ thống mật mã như RSA là an toàn.

Bây giờ chúng ta hãy cùng thử sức mạnh khiêm tốn của mình trong vấn đề phân tích ra thừa số nguyên tố. Như chúng ta đã lưu ý (thuật toán thứ ba), bài toán tìm ước chung lớn nhất của hai số được đưa về bài toán thừa số (phân tích thành thừa số nguyên tố), và thuật toán Euclide làm cho việc đưa về trở nên không cần thiết theo quan điểm thực tế. Toán học, tuy nhiên, phát triển theo các quy luật riêng của nó, và thực tế là một số cách tiếp cận hoặc kết quả hóa ra là "*lỗi thời*" (với tuổi đời của thuật toán Euclid, từ này ở đây, tất nhiên, là khá tương đối) hoàn toàn không có nghĩa là những ý tưởng được lồng vào đó cũng trở thành vô ích.

Trong trường hợp này, điều tự nhiên là cố gắng làm ngược lại và sử dụng thuật toán Euclid để phân tích các số ra thừa số. Thật vậy, để tìm một ước số không tầm thường của hợp số m (nhân tiện, bạn có rõ tại sao bài toán phân tích thừa số một cách hoàn toàn được rút gọn thành bài toán này không?), "*chỉ cần*" tìm một số n, với $1 < (m, n) < m$ sau đó có thể sử dụng thuật toán Euclide (hiệu quả!).

Tất nhiên, chúng ta không thể giải quyết một vấn đề như vậy trong điều kiện chung. Tuy nhiên, hóa ra ý tưởng này không phải là không thuyết phục như thoạt nhìn. Cụ thể, cách tiếp cận phân tích nhân tử là cơ sở của:

(1) Một số thuật toán "*phân tích mật mã*" quan trọng (tức là các thuật toán tìm kiếm lỗ hổng trong hệ thống mật mã khóa công khai).

(2) Một thuật toán lượng tử đa thức để phân tích các số, được phát minh bởi nhà toán học người Mỹ P. Shor vào năm 1995.

Ta dừng lại chi tiết hơn ở kết quả cuối cùng, vì nó đã tạo động lực mạnh mẽ cho sự phát triển của một lĩnh vực hiện đại khổng lồ được gọi là *tính toán lượng tử*, nơi đó các nhà toán học, chuyên gia về khoa học máy tính và các nhà vật lý làm việc cùng nhau. Không có gì khó hiểu ở đây: Một máy tính có thể sử dụng các định luật của cơ học lượng tử trên thực tế có thể phân tích các số $n-$bit thành các thừa số nguyên tố trong thời gian nhiều hơn Cn^2 một chút. Nhân tiện, bản thân thuật toán sử dụng một phép toán rất đẹp và bất ngờ: Ứng dụng thuật toán Euclide ở cuối hóa ra chỉ là phần nổi của tảng băng.

Một độc giả tập trung, dường như, tại thời điểm này sẽ hơi ngạc nhiên: Ở trên vừa nói rằng lớp P không phụ thuộc vào việc lựa chọn mô hình tính toán, và đột nhiên bây giờ đưa ra một thiết bị, ngay cả khi nó là mới là giả định, và đột nhiên ta có thể làm được những điều tuyệt vời đó. Không có lỗi gì ở đây cả. Cụ thể, thế giới mà chúng ta đang sống được sắp xếp theo một trong ba cách sau:

(1) Việc xây dựng một máy tính lượng tử thực tế là không thể (và do đó, mô hình này được coi là "*không hợp lý*").

(2) Luận điểm Turing - Church mở rộng là không chính xác (và rõ ràng là có thể có sai lệch so với luận điểm này, sử dụng các quy luật vật lý hoặc sinh học khác).

(3) Có một thuật toán đa thức *cổ điển* để phân tích các số (với tất cả các hệ quả sau đó). Chúng ta chỉ không biết chính xác nó hoạt động như thế nào. Về điều này, chúng ta chỉ có thể nói thêm rằng ở thế giới theo cách 1, việc không thể chế tạo được máy tính lượng tử rất có thể sẽ được xác định bởi những trở ngại cơ bản không thể hiểu được chứ không phải do trở ngại công nghệ: Kinh nghiệm phát triển của loài người cho thấy, nếu có đủ ý chí

(và đã có rất nhiều nguồn lực được đầu tư vào việc xây dựng máy tính lượng tử ở nhiều nước phát triển), thì sớm muộn gì cũng khắc phục được. Vì vậy, luận điểm phổ biến về sự bất bại của hoạt động này (ở đầu ra – hoặc là máy tính lượng tử hoặc là các định luật vật lý mới giải thích tính bất khả thi của nó) ít nhất không phải là không có cơ sở.

Bây giờ chúng ta sẽ nói một chút về vấn đề giới hạn dưới trong lý thuyết về độ phức tạp tính toán, cụ thể là, chứng minh với các bài toán thú vị cụ thể, bất kỳ thuật toán nào cũng phải có độ phức tạp $f(n) \geqslant \varepsilon \cdot b(n)$, trong đó $b(n)$ là một hàm cố định nào đó. Đỉnh cao ở đây là phép chứng minh rằng một bài toán thú vị không thuộc về lớp P, tức là nó không thừa nhận bất kỳ thuật toán nào có giới hạn trên về độ phức tạp $f(n) \leqslant C \cdot n^k$ (chúng ta sẽ nói về các ứng cử viên triển vọng sau). Lấy bài toán phân tích ra thừa số làm ví dụ.

Một sợi chỉ xuyên suốt bài viết của chúng ta là luận điểm rằng vấn đề phân tích ra thừa số không nằm trong P, và, khác với luận điểm Turing - Church, đây là một giả định toán học. Số giờ lao động để bác bỏ nó (bao gồm cả giờ của các nhà lý thuyết số và thuật toán số giỏi nhất) là không thể tính được. Điều này có nghĩa là chúng ta chỉ nên chấp nhận nó như một loại quy luật vật lý nào đó và làm điều gì đó khác?

Tất nhiên, đối với bất kỳ nhà toán học nào đang làm việc, câu hỏi này hoàn toàn là tu từ và tốt nhất có thể gây ra một nụ cười nhẹ. Việc trong một thời gian rất dài không ai có thể đưa một nghiệm không tầm thường của phương trình $x^n + y^n = z^n$ hoặc một đa tạp ba chiều với các đặc tính "*hoang dã*" (phản ví dụ cho giả thuyết Poincaré), chỉ khiến các nhà toán học thêm hăng máu để tìm kiếm chứng minh các khẳng định tương ứng, và điều này không vô ích. Trong quá trình giải quyết chúng, mà đỉnh cao là các công trình của A. Wiles và G. Perelman, cả một lý thuyết hài hòa đã được xây dựng, chiếm được vị trí xứng đáng của chúng trong tòa nhà toán học hiện đại.

Tương tự là trường hợp của vấn đề cận dưới của độ phức tạp, với sự khác biệt là nó vẫn còn bỏ ngỏ vào thời điểm hiện tại, mặc dù một số kết quả đáng khích lệ đã thu được trong những năm 1980 và 1990. Rõ ràng, để có lời giải hoàn chỉnh của nó sẽ cần đến một số ý tưởng mới (tuy nhiên, so với định lý Fermat hoặc phỏng đoán của Poincaré, vấn đề đánh giá cận dưới của độ phức tạp còn ở giai đoạn sơ khai). Lý do của tình trạng này là dễ hiểu. Bất kỳ sự chứng minh không tồn tại một thuật toán hiệu quả (giả sử, đa thức) cho một bài toán nhất định chắc chắn phải tính đến không chỉ tất cả các ý tưởng hiện có để xây dựng một thuật toán như vậy, mà còn tất cả các ý tưởng tiềm năng có thể xuất hiện trong tương lai: điều này, trên thực tế, chính là ý nghĩa của lý thuyết về độ phức tạp... Lớp ý tưởng này rất rộng, và hầu hết các kết quả cụ thể đã biết về vấn đề cận dưới đều thu được bằng cách thu hẹp nó lại.

Ở phần cuối của bài viết ngắn này, ta sẽ nói về tính đầy đủ NP: Đây chính xác là phần mà những thành công của lý thuyết về độ phức tạp tính toán đã trở nên rất ấn tượng. Cơ sở của lý thuyết NP-đầy đủ đã được đặt nền móng trong các công trình của các nhà toán học Mỹ S. Cook, R. Karp và nhà toán học Liên Xô L. Levin vào đầu những năm 70.

Hãy cùng xem xét vấn đề tìm ước số thực sự của một hợp số và so sánh nó với hai bài toán khác từ tuyển tập này: Tìm chu trình Hamilton "*Từ những chuyến đi dạo ở Königsberg đến giải mã bộ gen*" và giải Sudoku "*Giải Sudoku*", cái thứ hai, tất nhiên, phải được tổng quát hóa thành trường hợp của một bảng $n^2 \times n^2$. Có gì chung giữa chúng?

Ở cấp độ "*triết học*", rõ ràng là lời giải của tất cả các bài toán như vậy được chia thành hai giai đoạn hoàn toàn không cân bằng: Tìm kiếm hoặc đoán câu trả lời chính xác và kiểm tra nó. Giai đoạn sau dễ dàng thực hiện trong mọi trường hợp và có thể được giao cho máy tính hoặc thậm chí là cho học sinh phổ thông. Làm sao để tìm ra câu trả lời chính xác, chúng ta không có công thức chung, và trong trường hợp tốt nhất chúng ta chỉ có những lời khuyên hợp lý, đôi khi được gọi là phương pháp *heuristic* (xem, ví dụ "*Giải Sudoku*").

Tuy nhiên, điều tốt là câu trả lời đúng ít nhất là *ngắn*, hay một cách toán học, độ dài bit m của nó không vượt quá một đa thức độ dài bit n của chính bài toán. Do đó, luôn có một thuật toán *tìm kiếm vét cạn* tầm thường, thay vì một tìm kiếm có tổ chức, chỉ cần xét tất cả các khả năng một cách tuần tự cho đến khi tìm thấy điều mong muốn. Độ phức tạp của nó trong trường hợp xấu nhất khoảng $2^m \sim 2^{Cn^k}$. Nếu xét về độ tăng của hàm số mũ thì điều này dĩ nhiên không tốt cho lắm, nhưng chú ý là có những tình huống còn tệ hơn nhiều.

Từ mô tả được đưa ra trong đoạn trước, tương đối dễ dàng để xây dựng một định nghĩa toán học: Lớp các bài toán mà ở đó việc kiểm câu trả lời là đa thức, tức là, nằm trong lớp P. Ta sẽ thu được một định nghĩa tương đương, nếu như trong định nghĩa máy Turing đã đưa ra ở đầu bài bổ sung thêm tính không xác định, tức là cho phép máy theo ý mình chọn một hành vi từ danh sách những hành vi được đề xuất. Lớp các bài toán thu được theo cách này được gọi là NP, trong đó "N" gợi nhớ đến tính không xác định.

Hầu hết các bài toán mà chúng ta đã thảo luận trước đó thuộc về lớp này hoặc có thể dễ dàng đưa về dạng này. Tất nhiên, sự phổ biến này không phải là ngẫu nhiên. Nó phản ánh thực tế rằng NP là một mô hình toán học tốt cho bất kỳ hoạt động sáng tạo có tổ chức nào, bao gồm hành động sáng tạo thực tế là tìm lời giải và (thường là nhanh chóng và quen thuộc) để kiểm tra nó. Với sự đa dạng các bài toán như vậy trong NP, người ta mong đợi sự tồn tại của một cấu trúc phân cấp phong phú trong lớp này, cố gắng sắp xếp bài toán theo độ phức tạp nội tại của chúng, và các giả định bài toán này hay bài toán kia được xếp vào đâu...

Thực tế không có điều này xảy ra. Với rất ít ngoại lệ, lớp NP thực sự chỉ chia thành hai phần lớn. Phần đầu tiên là lớp P mà chúng ta đã biết, bao gồm tất cả các bài toán thuật toán có ít nhất một thuật toán hiệu quả (đa thức). Nói cách khác, đây là những bài toán trong đó việc liệt kê các lựa chọn có thể được thay thế bằng một thủ tục hiệu quả, mà chúng ta đã thấy ở ví dụ thuật toán Euclide (một ví dụ giáo khoa khác là bài toán về chu trình Euler từ bài báo "*Từ những chuyến đi dạo ở Königsberg đến giải mã bộ gen*").

Ở cực đối diện là cái gọi là các bài toán NP-đầy đủ, có tính chất mọi bài toán khác từ lớp NP có thể đưa về nó trong thời gian đa thức. Hóa ra là cả bài toán giải Sudoku và bài toán tìm chu trình Hamilton từ bài báo "*Từ những chuyến đi dạo ở Königsberg đến giải mã bộ gen*") và hơn một nghìn bài toán thuật toán (nếu tính đến cả các biến thể thì cỡ khoảng 10000) từ các lĩnh vực khác nhau của toán học, khoa học máy tính, khoa học tự nhiên, sinh học, xã hội học,... là NP-đầy đủ.

Do đó, bất kỳ thuật toán hiệu quả nào để giải Sudoku đều có thể được xây dựng lại thành một thuật toán hiệu quả để phân tích các số thành thừa số nguyên tố, xây dựng chu trình Hamilton và rất nhiều thứ hữu ích khác. Tất cả các đưa về như vậy đều có một "*đặc tính mô-đun*" rõ rệt: Chẳng hạn, việc đưa bài toán chu trình Hamilton về bài toán Sudoku trong thời gian đa thức được chia thành nhiều lần chuyển đổi tương đối ngắn từ bài toán trung gian tự nhiên này sang bài toán trung gian tự nhiên khác. Tất cả các bài toán mà chúng tôi gặp trên đường đi cũng có thể được tính vào NP-đầy đủ.

Nhưng giữa hai cực này thực tế không có gì cả. Một bài toán NP mà chúng ta không biết cách phân loại là phân tích ra thừa số nguyên tố, có một số ví dụ khác về loại này, được thúc đẩy bởi các giả định mật mã. Tất cả đều có tính chất là chỉ có một câu trả lời đúng. Một ví dụ trong đó tính chất cuối cùng không được thỏa mãn là bài toán đẳng cấu đồ thị (hai đồ thị được vẽ, liệu chúng có thể được "*xếp chồng*" lên nhau đến mức trùng hợp không) và các biến thể của nó.

Có lẽ đây là tất cả (hoặc ít nhất là những vấn đề quan trọng nhất) các bài toán tự nhiên mà ta không biết rõ tình trạng của chúng. Vì vậy, chúng ta có thể tự tin nói rằng việc phân loại các bài toán liệt kê thành đơn giản (P) và khó tối đa (NP-đầy đủ) là một trong những dự án phân loại thành công nhất trong lịch sử khoa học.

Vì tất cả những lý do này, bài toán về sự trùng hợp của các lớp P và NP (còn được gọi là bài toán liệt kê) là một trong những bài toán mở trọng tâm của toán học hiện đại. Hầu hết các chuyên gia tin rằng $P \neq NP$. Nhưng việc chứng minh sự kiện này đưa về bài toán tìm cận dưới của một bài toán NP-đầy đủ được chọn tùy ý, điều mà các nhà toán học chưa thể làm được.

Tính phổ biến của bài toán này được minh chứng cụ thể bởi sự chú ý đến nó của những nhà toán học nghiệp dư. Theo tiêu chí này, có lẽ bài toán liệt kê đã vượt qua cả giả thuyết của Fermat. Tuy nhiên, cả các chuyên gia ngoài logic toán học và khoa học máy tính cũng coi trọng nó. Bài toán liệt kê là một trong bảy bài toán mà Viện Toán học Clay đã đặt ra giải thưởng danh giá. Như đã biết, cho đến nay chỉ có một trong số chúng được giải quyết (giả thuyết của Poincaré - G. Perelman), để giải quyết những vấn đề còn lại, rất có thể, cũng sẽ cần đến những ý tưởng và cách tiếp cận mới, bản chất mà chúng ta thậm chí không có ý tưởng gần đúng như trong trường hợp của bài toán liệt kê.

Bổ sung, bình luận

Người ta đã nói rằng giữa các lớp P và các bài toán hoàn chỉnh NP, những cực kỳ đặc biệt này trong lớp NP thống nhất, có một số vấn đề vẫn chưa được phân loại. Về một trong số đó, bài toán đẳng cấu đồ thị, sau khi phát hành ấn bản đầu tiên của cuốn sách này vào năm 2015, nhà toán học người Mỹ gốc Hungary L. Babai đã chứng minh một kết quả cơ bản: Đối với bài toán này, có một thuật toán "*gần như đa thức*", nó đang chạy. thời gian là. Nó chỉ ra rằng bài toán đẳng cấu đồ thị ít nhất là không xa lớp P.

Tài liệu tham khảo

[1] РазборовА. А. Осложностивычислений. Математическоепросвещение. Третьясерия. 1999. Вып. 3. Стр. 127 – 141

[2] РазборовА. А. Алгебраическаясложность. 2-еизд., испр. М.: МЦНМО, 2019. Fortnow L. The Golden Ticket P, NP, and the Search for the Impossible. Princeton University Press, 2013. http://goldenticket.fortnow.com

[3] Lipton R. J. *The P = NP Question and Gödel's Lost Letter*. Springer, 2010. Theo các tư liệu của Blog http://rjlipton.wordpress.com

VỀ BÀI HÌNH HỌC IMO 2022

Nguyễn Ngọc Giang - Lê Viết Ân - Nguyễn Duy Phước

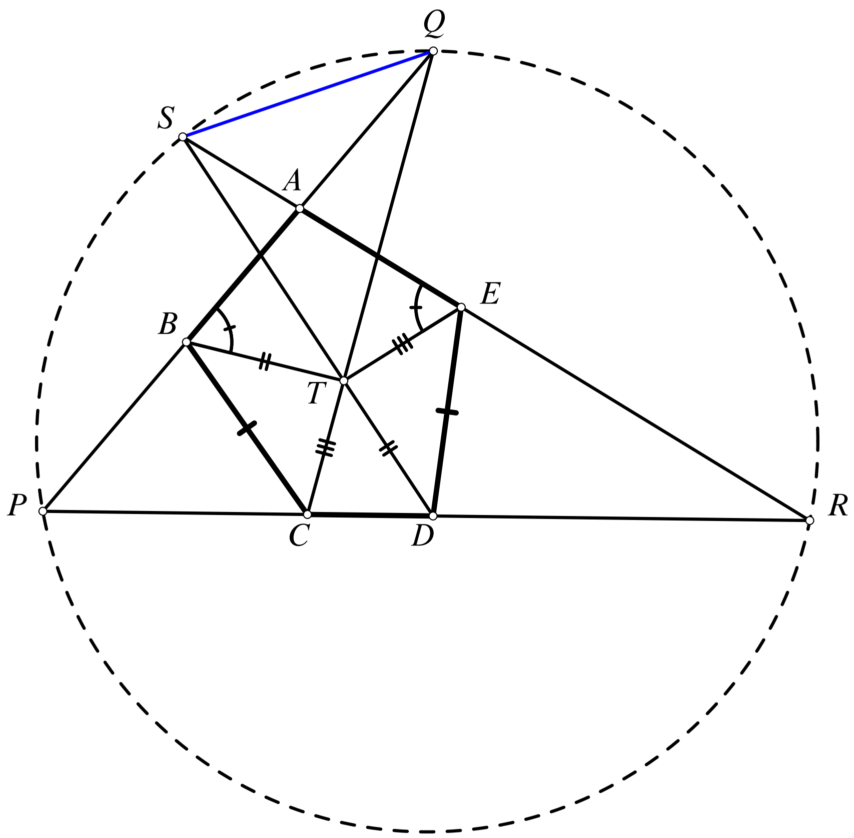
GIỚI THIỆU

Trong kỳ thì học sinh giỏi toán quốc tế năm 2022 vào ngày thi thứ hai có duy nhất một bài toán hình là bài số 4. Trong bài viết này, chúng ta cùng xem xét và tìm hiểu về bài toán này.

1. Bài thi và lời giải

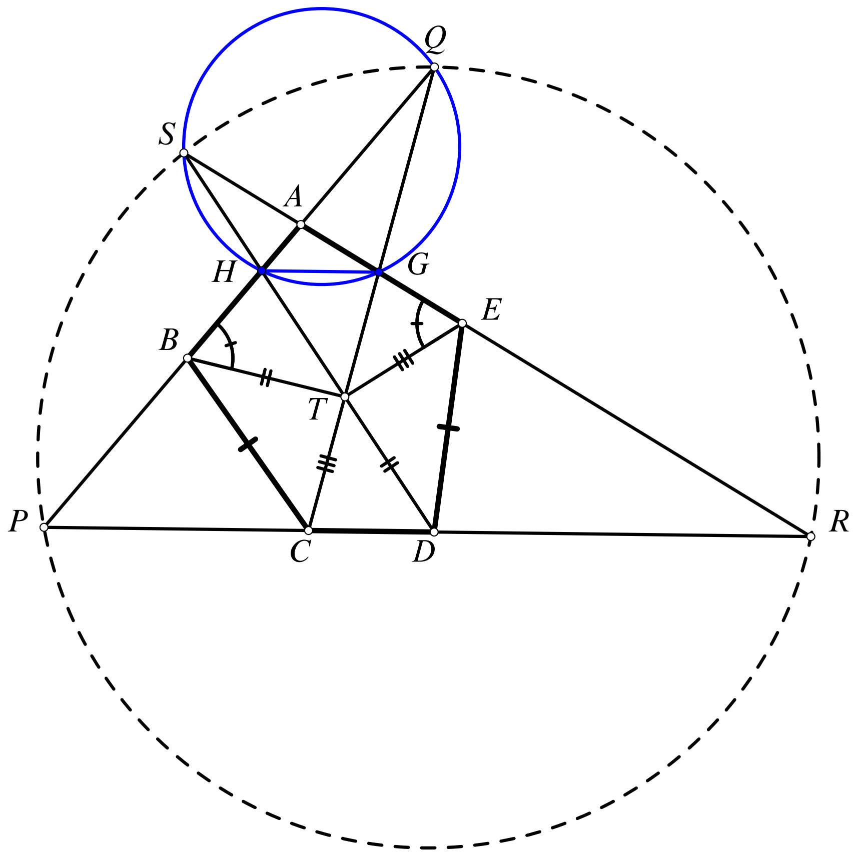
Bài toán 1 (Bài 4, IMO 2022). *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ với $BC = DE$. Giả sử rằng có một điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $TB = TD, TC = TE$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng CD và CT lần lượt tại các điểm P và Q, trong đó các điểm P, B, A, Q nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Đường thẳng AE cắt các đường thẳng CD và DT lần lượt tại các điểm R và S, trong đó các điểm R, E, A, S nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Chứng minh rằng các điểm P, S, Q, R nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. Từ $TB = TD, TC = TE$ và $BD = CE$ thì ta thấy ngay $\triangle TBC = \triangle TDE$ (c-c-c). Suy ra $\angle BTC = \angle DTE$. Do đó $\angle QTB = \angle STE$, kết hợp $\angle TBA = \angle TEA$ có ngay $\triangle QTB \backsim \triangle STE$ (g-g). Suy ra $\dfrac{TQ}{TS} = \dfrac{TB}{TE} = \dfrac{TD}{TC}$. Suy ra $\triangle TQS \backsim \triangle TDC$ (c-g-c). Do đó $\angle TQS = \angle TDC$.



Chú ý $\angle TQB = \angle TSE$ (vì $\triangle QTB \backsim \triangle STE$) nên
$\angle PQS = \angle TQS - \angle TQB = \angle TDC - \angle TSE = \angle SDP - \angle DSR = \angle DSR$ (tính chất góc ngoài tam giác) $= \angle PRS$.
Do đó tứ giác $PSQR$ nội tiếp.

Nhận xét. Ta có thể giải bài toán theo hướng dùng bổ đề Reim như sau:



Gọi $G = TC \cap AE$ và $H = TD \cap AB$. Khi đó dễ dàng có được $\triangle HBT \backsim \triangle GET$ (g-g) để suy ra $\angle BHT = \angle EGT$ và $\dfrac{TH}{TB} = \dfrac{TG}{TE}$. Từ đó suy ra $\angle QHS = \angle BHT = \angle EGT = \angle QGS$ và $\dfrac{TH}{TD} = \dfrac{TH}{TB} = \dfrac{TG}{TE} = \dfrac{TG}{TC}$. Dẫn đến các điểm S, Q, G, H cùng nằm trên một đường tròn và $GH \parallel CD$. Áp dụng bổ đề Reim cho đường tròn $\odot(SQGH)$ với hai cát tuyến $\overline{Q, H, P}$, $\overline{S, G, R}$ với chú ý $GH \parallel PQ$ thì được P, S, Q, R cùng nằm trên một đường tròn.

2. Mở rộng bài toán 1

Nhận xét. Bài toán 1 là bài toán dễ. Tuy nhiên, nếu chỉ để giải xong bài toán này thì chúng ta chưa cảm nhận được cái hay của bài toán. Do đó, việc mở rộng cho bài toán một cũng là cách để chúng ta nắm được bản chất bài toán và là một cách để chúng ta rèn luyện tư duy quan sát. Bằng việc quan sát lại lời giải thứ nhất bài toán này lần nữa thì chúng ta thấy rằng mấu chốt của lời giải thứ nhất là thu được $\angle BTC = \angle DTE$ để từ đó có được quan hệ đồng dạng của hai tam giác QBC và SED và nhận được tỉ số $\dfrac{TS}{TQ} = \dfrac{TB}{TE}$. Từ đó dẫn đến quan hệ đồng dạng hai tam giác TQS và TDC. Nhưng mấu chốt nhận được điều này lại chính là tỉ số $\dfrac{TS}{TQ} = \dfrac{TD}{TC}$. Điều này dẫn đến là ta phải đảm bảo có được $\dfrac{TB}{TE} = \dfrac{TD}{TC}$. Như bài toán 1, đề cho $TB = TD, TC = TE$ là nhận được hai tỉ số này bằng nhau. Do đó ta tổng quát lên là $TB \cdot TC = TD \cdot TE$. Lại đến đây chú ý $\angle BTC = \angle DTE$ tương đương với $\angle BTD = \angle CTE$. Suy ra $S_{TBD} = S_{TCE}$. Do đó giả thiết $TB = TD, TC = TE$ có thể thay bằng giả thiết $S_{TBD} = S_{TCE}$ và giả thiết $BC = DE$ có thể thay bằng giả thiết $\angle BTC = \angle DTE$. Ta đi đến mở rộng đầu tiên cho bài toán này:

Bài toán 2 (Mở rộng bài 4, IMO, 2022). *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ với $BC = DE$. Giả sử rằng có một điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $\angle BTC = \angle DTE$, $\angle ABT = \angle TEA$ và diện tích hai tam giác TBD và TCE bằng nhau. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng CD và CT lần lượt tại các điểm P và Q, trong đó các điểm P, B, A, Q nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Đường thẳng AE cắt các đường thẳng CD và DT lần lượt tại các điểm R và S, trong đó các điểm R, E, A, S nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Chứng minh rằng các điểm P, S, Q, R nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. Việc giải bài toán 2 chỉ là việc thực hiện hoàn toàn tương tự bài toán 1 với chú ý từ $\angle BTC = \angle DTE$, suy ra $\angle BTD = \angle CTE$ nên:
$TB \cdot TD = \dfrac{2S_{TBD}}{\sin \angle BTD} = \dfrac{2S_{CTE}}{\sin \angle CTE} = TC \cdot TE$ và ta thu được $\dfrac{TB}{TE} = \dfrac{TD}{TC}$.

Nhận xét. Bài toán 2 chỉ là một mở rộng đơn giản mà bất cứ bạn đọc có kỹ năng hình học tốt là có thể nghĩ đến. Với kinh nghiệm dạy và học hình nhiều năm, chúng ta còn có thể táo bạo mở rộng hơn bằng cách "tách 1 điểm" thành "nhiều điểm". Cụ thể ở đây, bằng cách kiểm chứng và vẫn đảm bảo được một số yếu tố then chốt của giả thiết, chúng ta có thể tách điểm T thành nhiều điểm hơn như sau:

Bài toán 3 (Mở rộng bài 4, IMO, 2022). *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$. Giả sử có T nằm bên trong $ABCDE$ sao cho diện tích các tam giác TBC và TDE bằng nhau. Lấy các điểm U và V lần lượt nằm trên các đoạn TC và TD thỏa mãn $\angle ABU = \angle VEA$ và $\angle BUC = \angle DVE$. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng CD và CT lần lượt tại các điểm P và Q, trong đó P, B, A, Q nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Đường thẳng AE cắt các đường thẳng CD và DT lần lượt tại các điểm R và S, trong đó các điểm R, E, A, S nằm theo thứ tự trên các đường thẳng. Chứng minh rằng các điểm P, Q, R, S nằm trên một đường tròn khi và chỉ các điểm C, D, U, V nằm trên một đường tròn.*

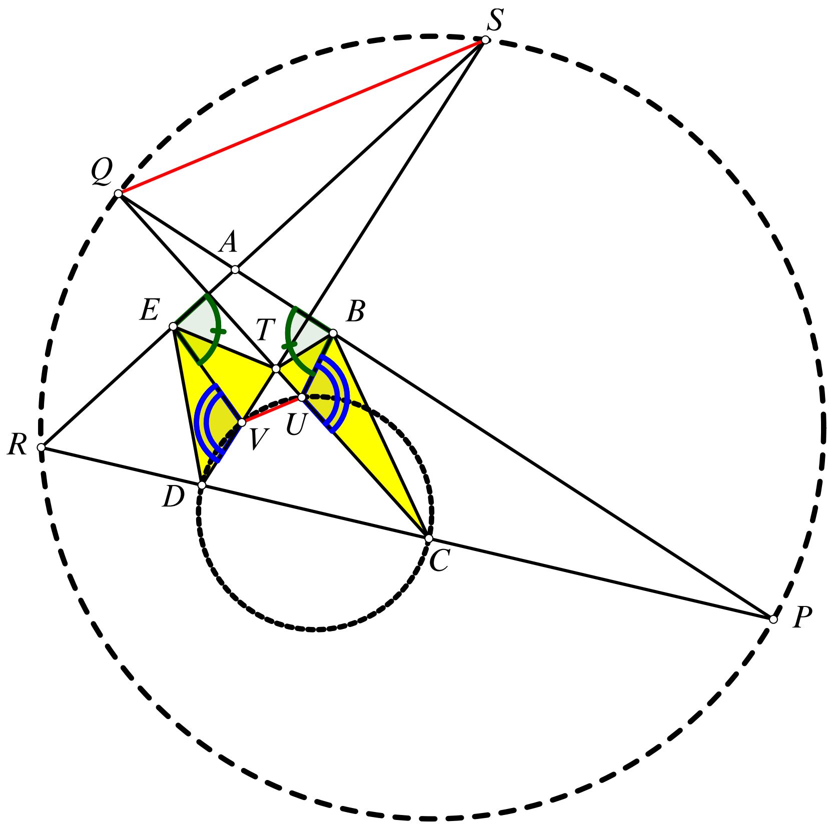
Chứng minh. Ta xây dựng một số tính chất sau đây:

(i) Dễ thấy $\angle BUQ = \angle EVS$ nên $\triangle QBU \backsim \triangle SEV$ (g-g) nên $\dfrac{QU}{BU} = \dfrac{SV}{EV}$.

(ii) Vì $S_{TBC} = S_{TED}$ nên $\frac{1}{2} \cdot BU \cdot TC \cdot \sin \angle BUC = \frac{1}{2} \cdot EV \cdot TD \cdot \sin \angle DVE$.
Suy ra $BU \cdot TC = EV \cdot TD$.
Kết hợp với (i), suy ra $QU \cdot TC = \frac{QU}{BU} \cdot BU \cdot TC = \frac{SV}{EV} \cdot EV \cdot TD = SV \cdot TD$.
Do đó: $\frac{TC}{TD} = \frac{SV}{QU}$.

(iii) Chú ý rằng $\angle CQP = \angle DSR := \alpha$ thì $\angle PQS = \angle CQS - \angle CQP = \angle CQS - \alpha$ và $\angle PRS = \angle DRS = \angle CDS - \angle DSR = \angle CDS - \alpha$.

Từ các tính chất trên ta suy ra:



(⇒) *Nếu P, Q, R, S nằm trên một đường tròn*. Khi đó: $\angle PQS = \angle PRS$. Từ (iii) suy ra $\angle CQS = \angle CDS$, suy ra tứ giác $CDQS$ nội tiếp. Từ đó $TQ \cdot TC = TS \cdot TD$, dẫn đến $\frac{TC}{TD} = \frac{TS}{TQ}$. Kéo theo $\frac{TS}{TQ} = \frac{SV}{QU}$. Do đó theo định lí Thales đảo, có $UV \parallel QS$. Suy ra $\angle TUV = \angle CQS = \angle CDS = \angle CDV$ nên bốn điểm C, D, U, V nằm trên một đường tròn.

(⇐) *Nếu C, D, U, V cùng nằm trên một đường tròn*. Khi đó $TC \cdot TU = TD \cdot TV$ hay $\frac{TC}{TD} = \frac{TV}{TU}$, kết hợp với (ii), suy ra $\frac{SV}{QU} = \frac{TV}{TU}$. Theo định lí Thales đảo có $UV \parallel QS$. Dẫn đến $\angle CQS = \angle TUV = \angle CDV = \angle CDS$. Do đó từ (iii), có ngay $\angle PQS = \angle PRS$, tức là P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

Kết thúc chứng minh!

Nhận xét. Ở bài toán 3, chúng ta tách điểm T thành ba điểm T, U, V và đảm bảo C, D, U, V cùng nằm trên một đường tròn (hiển nhiên qua ba điểm không thẳng hàng xác định cho ta duy nhất đường tròn ngoại tiếp tam giác xác định bởi ba điểm đó). Đây là một sự mở rộng khá lạ với các bạn chưa quen việc tổng quát hóa bài toán từ tam giác sang tứ giác nội tiếp.

Tuy nhiên, liệu rằng chỉ có thể tách điểm để mở rộng bài toán từ tam giác sang tứ giác nội tiếp thôi sao! Câu trả lời là vẫn còn hướng mở rộng tách điểm theo hướng khác. Nhớ lại rằng chúng ta đã biết rằng trong tam giác và hình thang đều có đường trung bình. Thì ta cũng có thể xem là việc mở rộng khái niệm đường trung bình tam giác sang đường trung bình hình thang hay nói cách khác đường trung bình tam giác là một trường hợp đặc biệt của tam giác trong đó có một đáy bằng 0 đơn vị. Do đó đối với bài toán 1, chúng ta thử mạnh dạn mở rộng tách điểm T thành hai điểm U, V sao cho $UV \parallel CD$ xem sao. Để việc mở rộng này có thể thực hiện được, chúng ta quan sát lại một chút xíu như sau ở bài toán 1:

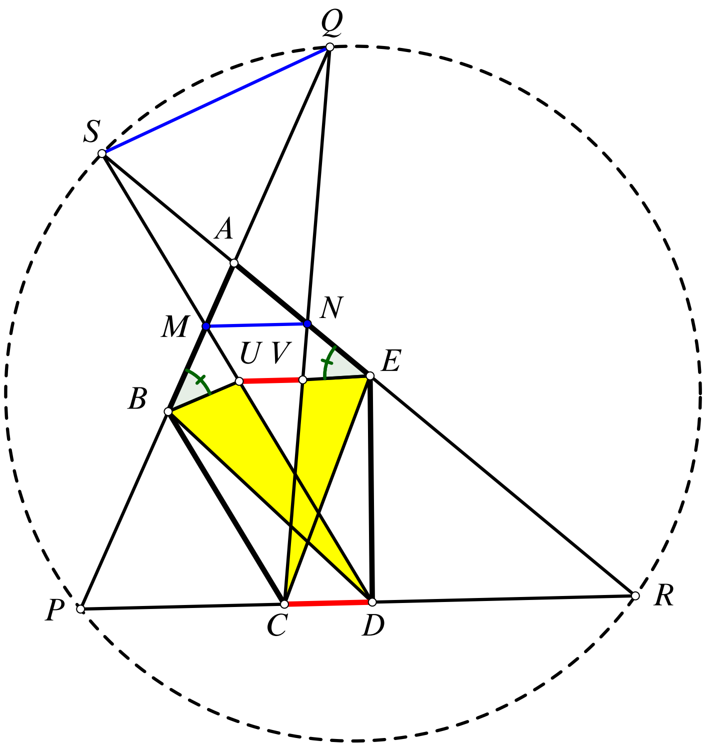
(i) Rõ ràng hai tam giác TBC và TDE đồng dạng cùng hướng, kéo theo hai tam giác TBD và TCE đồng dạng cùng hướng.

(ii) Ta lại cần tỉ số $\dfrac{TB}{TE} = \dfrac{TD}{TC}$.

Làm thế nào để từ (i) để suy ra hai (ii). Liệu tổng quát lên thì cần gì để thu được điều này! Chú ý là hai tam giác TBD và TCE đều cân tại T. Do đó ta có ngay hai tam giác TBD và TEC đồng dạng ngược hướng, điều này thu được ngay (ii). Ta đi đến mở rộng tiếp theo:

Bài toán 4 (Mở rộng bài 4, IMO, 2022). *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$. Giả sử có các điểm U và V nằm bên trong $ABCDE$ sao cho diện tích các tam giác UBD và VEC đồng dạng ngược hướng và $\angle ABU = \angle AEV$. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng CD và CV lần lượt tại các điểm P và Q, trong đó P, B, A, Q nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Đường thẳng AE cắt các đường thẳng CD và DU lần lượt tại các điểm R và S, trong đó các điểm R, E, A, S nằm theo thứ tự trên các đường thẳng. Chứng minh rằng các điểm P, Q, R, S nằm trên một đường tròn khi và chỉ các điểm C, D, U, V nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. Gọi $M = DU \cap AB$ và $N = DU \cap AE$. Từ hai tam giác UBD và VEC đồng dạng ngược hướng và hai góc $\angle UBA$ và $\angle VAE$ bằng nhau ngược hướng, ta nhận được hai tam giác MBD và NEC đồng dạng ngược hướng. Hệ quả là $\frac{\overline{UM}}{\overline{UD}} = \frac{\overline{VN}}{\overline{VC}}$. Mà $UV \parallel CD$ nên theo định lí Thales, có ngay $MN \parallel UV \parallel CD$.



Lại từ hai tam giác MBD và NEC đồng dạng, có ngay $\angle BMD = \angle CNE$. Do đó tứ giác $SQNM$ nội tiếp. Và do đó $\angle SQP = \angle SQM = \angle SNM = \angle SRP$ nên tứ giác $PSQR$ nội tiếp.

Nhận xét. Bài toán 1 tuy dễ nhưng có nhiều hướng mở rộng thú vị, và vẫn còn nhiều hướng mở rộng nữa, tuy nhiên phần việc này chúng tôi xin dành lại cho bạn đọc.

3. Khai thác thêm tính chất

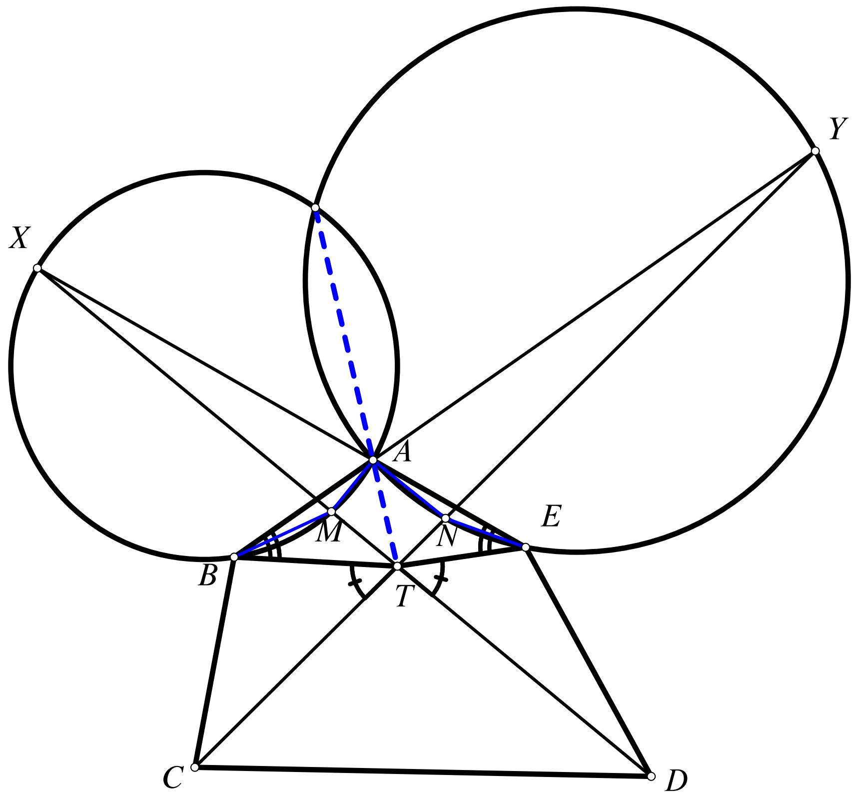
Ngoài những mở rộng ở trên, xung quanh bài 4, IMO 2022 còn có một số tính chất thú vị khác. Chúng ta nhận thấy cấu trúc này được xây dựng từ những giả thiết về góc, vì vậy một hướng tự nhiên đó là chúng ta sẽ khai thác các yếu tố liên quan đến góc, cụ thể đó là đường tròn.

Bài toán 5. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$. Giả sử rằng có một điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $\angle BTC = \angle DTE$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt đường thẳng CT tại Y (trong đó A nằm giữa Y và B), đường thẳng AE cắt đường thẳng DT tại X (trong đó A nằm giữa X và E). Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEY và ABX đi qua điểm T.*

Chứng minh (**Chứng minh**). Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn $\odot(ABX)$ và đường thẳng TX, N là giao điểm thứ hai của đường tròn $\odot(AEY)$ và đường thẳng TY. Ta có

$$\begin{aligned}\angle TNE &= 180^\circ - \angle ENY = 180^\circ - \angle EAY = 180^\circ - \angle BAX \\ &= 180^\circ - \angle BMX = \angle BMT.\end{aligned}$$

Và $\angle ETN = \angle NTD - \angle DTE = \angle MTC - \angle BTC = \angle MTB$. Suy ra hai tam giác BMT và ENT đồng dạng với nhau.



Ngoài ra, dễ thấy $\angle YTB = \angle XTE$ và $\angle YBT = \angle XET$. Do đó hai tam giác BYT và EXT đồng dạng với nhau.

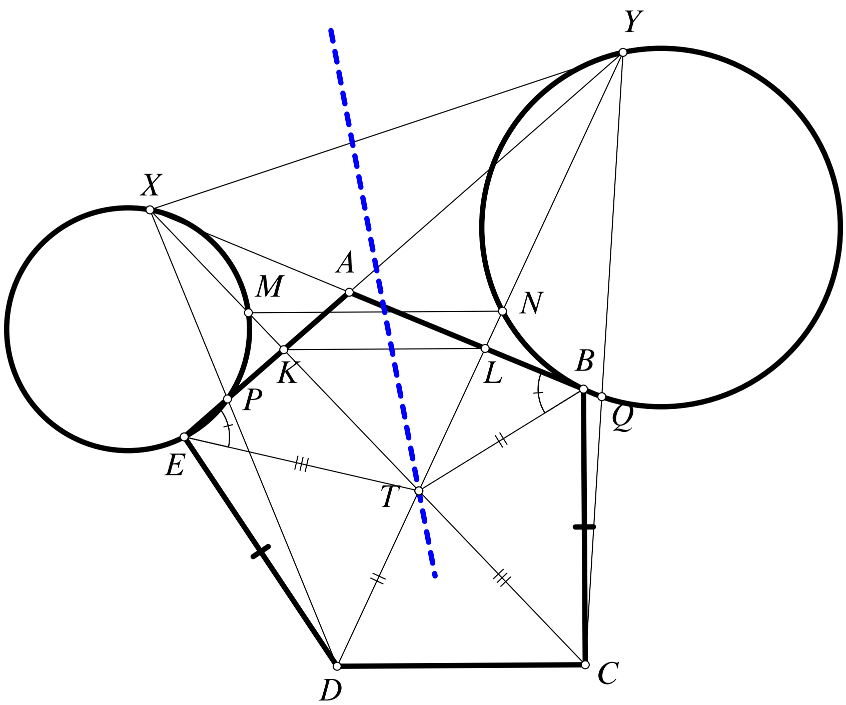
Vì vậy, $\dfrac{TM}{TN} = \dfrac{TB}{TE} = \dfrac{TY}{TX}$ hay $TM \cdot TX = TN \cdot TY$. Suy ra tứ giác $MNYX$ nội tiếp. Từ đó ta thu được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Đây là một bài toán khá dễ. Chúng ta hoàn toàn bỏ đi được giả thiết các cạnh bằng nhau ở bài toán gốc.

Sau đây là một kết quả với hình thức tương tự nhưng khó hơn so với bài toán 5.

Bài toán 6. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ sao cho $BC = DE$. Giả sử có điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $TE = TC$, $TB = TD$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt đường thẳng TC tại X (trong đó A nằm giữa X và B), đường thẳng AE cắt đường thẳng TD tại Y (trong đó A nằm giữa Y và E). Đường thẳng AB cắt đường thẳng CY tại Q, đường thẳng AE cắt đường thẳng DX tại P. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác PEX và QBY đi qua điểm T.*

Chứng minh. Giả sử đường thẳng TC lần lượt cắt AE, $\odot(PEX)$ tại K và M $(M \neq X)$; đường thẳng TD lần lượt cắt AB, $\odot(QBY)$ tại L và N $(N \neq Y)$. Dễ thấy $\angle XTB = \angle YTE$ và $\angle XBT = \angle YET$. Nên hai tam giác XBT và YET đồng dạng với nhau. Suy ra $\angle TXB = \angle TYE$ và $\dfrac{TX}{TY} = \dfrac{TB}{TE} = \dfrac{TD}{TE}$. Điều này chứng tỏ hai tứ giác $DCYX$, $KLYX$ nội tiếp. Nên dễ dàng chứng minh được $KL \parallel CD$.



Ta có $\angle XKP = 180° - \angle XKY = 180° - \angle KLY = \angle YLQ$, $\angle KXP = \angle CXD = \angle CYD = \angle QYL$. Nên hai tam giác XKP và YLQ đồng dạng. Ngoài ra, $\angle KET = \angle LBT$, $\angle EKT = \angle XKY = \angle XLY = \angle TLB$. Nên hai tam giác TKE và TLB cũng đồng dạng.

Mặt khác, dễ thấy $KM = \dfrac{KP \cdot KE}{KX}$, $LN = \dfrac{LB \cdot LQ}{LY}$. Suy ra

$$\frac{KM}{NL} = \frac{KP}{LQ} \cdot \frac{KE}{LB} \cdot \frac{LY}{KX} = \frac{KX}{LY} \cdot \frac{TK}{TL} \cdot \frac{LY}{KX} = \frac{TK}{TL}.$$

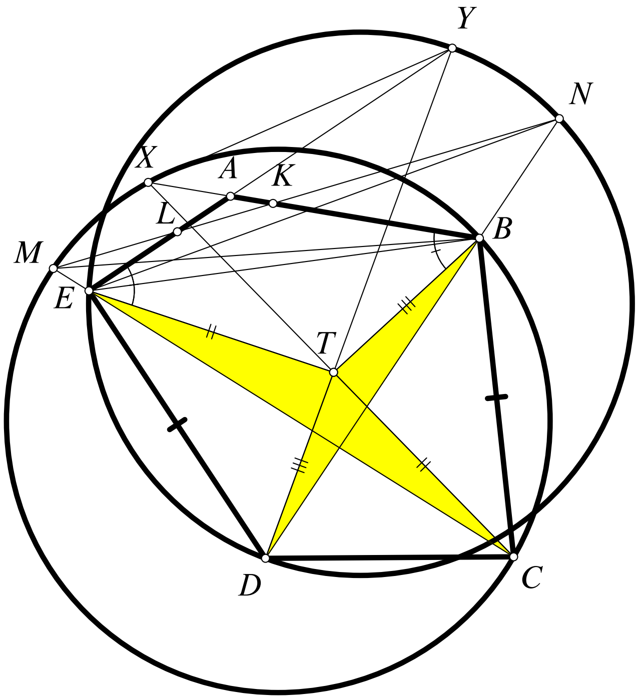
Nên áp dụng định lý Thales đảo, ta có $MN \parallel KL \parallel CD$. Mà tứ giác $DCYX$ nội tiếp. Vì vậy tứ giác $MNYX$ cũng nội tiếp hay $TM \cdot TX = TN \cdot TY$. Từ đây ta thu được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Ý tưởng chứng minh hoàn toàn tương tự như bài toán 5. Cái khó ở đây là chúng ta cần phải thông qua nhiều kết quả trung gian để đi đến đẳng thức chính. Trong lời giải này, chúng ta đã sử dụng lại một số kết quả đặc trưng cho bài toán gốc, mà chủ yếu đó là các cặp tam giác đồng dạng.

Tiếp theo, nếu thay đổi cách nhìn vào bài toán, cụ thể là thay đổi việc thiết lập các đường tròn ngoại tiếp cho các tam giác thì sẽ thu được bài toán sau.

Bài toán 7. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ sao cho $BC = DE$. Giả sử có điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $TE = TC$, $TB = TD$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt đường thẳng TC tại X (trong đó A nằm giữa X và B), đường thẳng AE cắt đường thẳng TD tại Y (trong đó A nằm giữa Y và E). Đường thẳng CE cắt $\odot(CBX)$ tại điểm thứ hai là M. Đường thẳng BD cắt $\odot(DEY)$ tại điểm thứ hai là N. Đường thẳng MN lần lượt cắt các đường thẳng AB, AE tại K, L. Chứng minh rằng bốn điểm B, E, K, L cùng nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. Dễ thấy $\angle BTX = \angle ETY$ và $\angle XBT = \angle YET$. Nên $\angle BXT = \angle EYT$. Suy ra $\angle ENB = \angle END = \angle EYD = \angle CXB = \angle CMB = \angle EMB$. Do đó tứ giác $BEMN$ nội tiếp.



Ta có $TB = TD, TC = TE$ và $\angle DTB = \angle DTC + \angle BTC = \angle DTC + \angle DTE = \angle ETC$. Nên hai tam giác cân TDB và TEC đồng dạng. Do đó $\angle TBD = \angle TEC$. Suy ra $\angle ABD = \angle AEC$. Vì vậy $\angle KBN = \angle LEM$. Đến đây, ta có biến đổi góc

$$\angle ALK = 180^\circ - \angle LEM - \angle LME = \angle EBN - \angle KBN = \angle KBE.$$

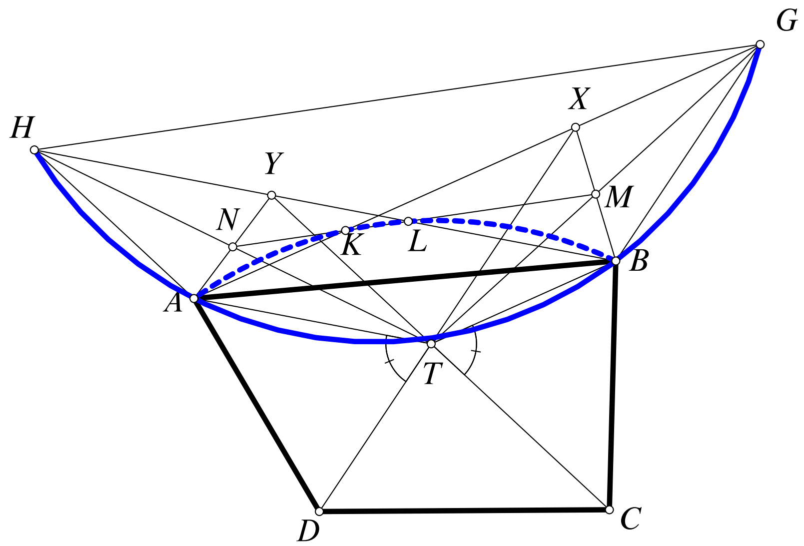
Vậy tứ giác $BELK$ nội tiếp.

Cuối cùng, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp đặc biệt hóa để khai thác cấu hình này. Nhìn chung, cấu hình này khá tổng quát, nên chúng ta có thể đặc biệt hóa được. Đầu tiên, ta cần quan sát bài toán gốc và cần chú ý đến các giả thiết mang tính tổng quát. Chẳng hạn, ta thấy trong bài toán 1 có giả thiết hai góc đối bằng nhau ($\angle ABT = \angle TEA$). Điều này làm ta liên tưởng đến hình bình hành, từ đó thu được bài toán sau.

Bài toán 8. *Cho tứ giác lồi $ABCD$. Giả sử rằng có điểm T nằm trong $ABCD$ sao cho $\angle BTC = \angle ATD$. Đường thẳng qua A và song song với TB cắt đường thẳng TD tại X (trong đó T nằm giữa X và D), đường thẳng qua B và song song với TA cắt đường thẳng TC tại Y (trong đó T nằm giữa Y và C). Đường thẳng nối trung điểm của hai đoạn thẳng BX và AY lần lượt cắt các đường thẳng AX, BY tại K, L. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, K, L cùng nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. (Đỗ Đại Phong, học sinh 11T1, trường THPT Chuyên Quốc Học - Huế) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BX, AY; G, H lần lượt là điểm đối xứng của T qua M, N. Khi đó

$BGXT$ và $AHYT$ là các hình bình hành. Lại có $AX \parallel TB$ và $BY \parallel TA$ nên $G \in AX$ và $H \in BY$.

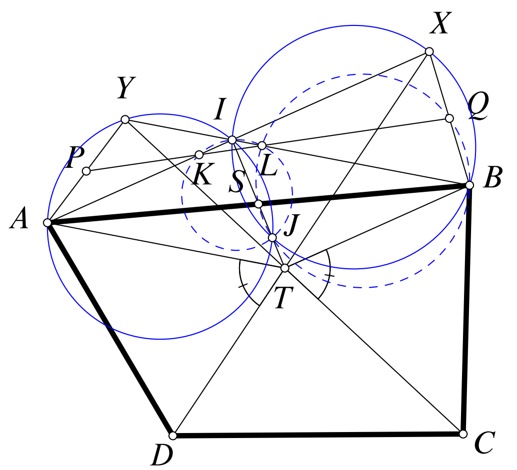


Vì $AX \parallel TB$ và $BY \parallel TA$ nên $\angle TAX = \angle TBY$. Mặt khác, dễ dàng chứng minh được $\angle ATX = \angle BTY$. Do đó $\Delta AXT \backsim \Delta BYT$. Suy ra $\angle AXT = \angle BYT$. Vì vậy

$$\angle AGB = \angle AXT = \angle BYT = \angle BHA.$$

Nên tứ giác $AGHB$ nội tiếp. Mặt khác, do $MN \parallel GH$ nên $KL \parallel GH$. Từ đó, áp dụng bổ đề Reim, ta thu được bốn điểm A, B, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh. Gọi I là giao điểm của AX và BY; P, Q, S lần lượt là trung điểm của AY, BX, AB; J là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $\odot(AYI)$ và $\odot(BXI)$.



Dễ thấy $ATBI$ là hình bình hành nên S là trung điểm của AB và $\angle TAI = \angle IBT$. Từ đó, áp dụng bài toán 5, ta có ba điểm T, I, J thẳng hàng. Hay bốn điểm I, J, S, T thẳng hàng.
Ta nhận thấy hai tam giác JAY và JXB đồng dạng cùng hướng. Nên hai tam giác JYP và JBQ đồng dạng cùng hướng. Vì thế hai tam giác JPQ và JYB cũng đồng dạng cùng hướng. Suy ra $\angle LQJ = \angle LBJ$. Nên bốn điểm J, B, Q, L cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó, ta được J là điểm Miquel của tứ giác toàn phần tạo bởi bốn đường thẳng (AX, BY, BX, PQ). Nên $J \in \odot(IKL)$.
Chú ý $IX \parallel TB$ nên $SQ \parallel IX$. Do đó, ta dễ dàng chứng minh được bốn điểm J, S, Q, B cùng nằm trên một đường tròn. Khi đó, năm điểm J, S, L, Q, B cùng nằm trên một đường tròn.
Suy ra, $\angle IKL = \angle IJL = \angle SJL = \angle SBL = \angle ABL$. Vậy bốn điểm A, B, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Nhận xét. Lời giải ở cách 1 là một lời giải đẹp. Các yếu tố như song song và trung điểm đã gợi cho việc dựng các điểm phụ ở cách 1. Trong khi đó, lời giải ở cách 2 xuất phát từ một kết quả liên quan tới mô hình vị tự quay và điểm Miquel.

4. Lời kết

Chúng ta vừa có một số khám phá xoay quanh bài toán IMO 2022. Các bài toán IMO luôn là các bài toán được nhiều người quan tâm và nghiên cứu. Bằng các thao tác tư duy như khái quát hóa, khai thác các tính chất, đặc điểm của bài toán, chúng ta đã thu được nhiều kết quả hay và bổ ích. Ngoài ra, chúng tôi còn sử dụng thao tác tư duy tìm nhiều cách giải. Đây là cách thức quen thuộc và quan trọng trong sáng tạo các bài toán IMO nói riêng và toán học nói chung. Hi vọng với các tìm tòi mà chúng tôi đã đưa ra ở trên đã mang đến cho các bạn nhiều điều bổ ích. Bài viết này cần trao đổi gì thêm? Mong được sự chia sẻ của các bạn.

5. Bài tập tự luyện

Bài toán 9. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ sao cho $BC = DE$. Giả sử rằng có điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $TE = TC$, $TB = TD$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt đường thẳng TC tại X (trong đó A nằm giữa X và B), đường thẳng AE cắt đường thẳng TD tại Y (trong đó A nằm giữa Y và E). Đường thẳng BD lần lượt cắt $\odot(CBX), \odot(DEY)$ tại các điểm thứ hai là P, Q. Đường thẳng CE lần lượt cắt $\odot(CBX), \odot(DEY)$ tại các điểm thứ hai là R, S.*

a) Chứng minh rằng tứ giác $XYSP$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng XY, PS, QR thẳng hàng.

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi X, Y lần lượt là các điểm đối xứng của B, C theo thứ tự qua CA, AB. Đường thẳng qua X và song song với AY cắt AC tại M, đường thẳng qua Y và song song với AX cắt AB tại N. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng nối hai trực tâm của tam giác AMX và ANY là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.*

VỀ BÀI TOÁN ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG EULER SINH RA TỪ TÂM ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Trần Quang Hùng

Ngày 13 tháng 8 năm 2022

TÓM TẮT

Bài viết này giới thiệu hai lời giải cho bài toán đường thẳng song song với đường thẳng Euler sinh ra từ tâm nội tiếp đề nghị bởi tác giả trên diễn đàn aops. Cùng với đó là một số phân tích, bình luận và đôi lời tản mạn.

1. Mở đầu

Trong cùng một tam giác thì khái niệm đường thẳng Euler và tâm nội tiếp "dường như" không mấy liên quan. Thường thì đường thẳng Euler chỉ liên quan tới các điểm như trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn Euler, hoặc xa hơn là một số điểm như de Longchamps, điểm exeter v.v... Điều này khá dễ hiểu bởi đường thẳng Euler hầu như không liên quan tới tia phân giác của các góc tam giác. Tuy vậy ít không có nghĩa là không "tồn tại". Bài viết này giới thiệu với các bạn một bài toán dựng một đường thẳng song song với đường thẳng Euler từ tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Cuối bài viết này, tác giả cũng có đôi lời bàn về tọa độ trong hình học.

2. Bài toán và lời giải

Trong [3], tác giả Trần Quang Hùng đề nghị bài toán sau

Bài toán. Cho tam giác ABC với tâm đường tròn nội tiếp I. N là tâm đường tròn Euler của tam giác IBC. K là tâm ngoại tiếp của tam giác NBC. L là điểm đối xứng của K qua BC. Chứng minh rằng NL song song với đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Thoạt nhìn bài toán này trông có vẻ khá "dễ" khi đề bài ngắn gọn với toán các "nguyên liệu" quen thuộc đó là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn Euler, tâm đường tròn ngoại tiếp, đối xứng trục v.v... Tuy vậy khi thực hành phân tích kỹ để giải thì bài toán trên không phải "dễ".

Chúng tôi xin giới thiệu ở đây hai lời giải, lời giải thứ nhất dùng tọa độ phức của tác giả bài toán, lời giải thứ hai dùng hình học thuần túy của tác giả Nguyễn Cung Thành. (Thành hiện là học sinh lớp 11A1 Toán trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN).

Lời giải thứ nhất tham khảo từ [3]

Lời giải thứ nhất. Trong mặt phẳng phức, chọn hệ trục sao cho đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC là đường tròn đơn vị với tọa độ các điểm $A(a^2)$, $B(b^2)$, $C(c^2)$. Khi đó theo [4] tâm đường tròn nội tiếp có tọa độ $I(-ab-bc-ca)$. Giao điểm của AI và (O) là điểm có tọa độ $J(-bc)$. J cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC. Tâm đường tròn Euler N của tam giác IBC là trung điểm của đoạn IJ' với J' có tọa độ $j' = b^2 + c^2 - b^2c^2 \cdot \frac{-1}{bc} = b^2 + c^2 + bc$ (chính là đối xứng của J qua BC). Như vậy, tọa độ N là

$$n = \frac{i + j'}{2} = \frac{b^2 + c^2 - ab - ac}{2}$$

và liên hợp của n là

$$\bar{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac}\right).$$

Tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC được cho bởi công thức ([4])

$$k = \frac{\begin{vmatrix} b^2 & 1 & 1 \\ c^2 & 1 & 1 \\ n & n\bar{n} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^2 & \frac{1}{b^2} & 1 \\ c^2 & \frac{1}{c^2} & 1 \\ n & \bar{n} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 - ab^3 - ac^3 + b^3c + bc^3}{2(bc + a^2)},$$

và khi đó liên hợp của k là

$$\bar{k} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 - ab^3 - ac^3 + b^3c + bc^3}{2b^2c^2(bc + a^2)}.$$

Điểm L đối xứng K qua BC thì tọa độ của L là (xem công thức đối xứng trục trong [4])

$$l = b^2 + c^2 - b^2c^2\bar{k} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + ab^3 + ac^3 + b^3c + c^3b}{2(bc + a^2)},$$

và liên hợp của l là

$$\bar{l} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + ab^3 + ac^3 + b^3c + c^3b}{2b^2c^2(bc + a^2)}.$$

Gọi H là trực tâm tam giác ABC thì $h = a^2 + b^2 + c^2$ và liên hợp của h là $\bar{h} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Vậy ta xét

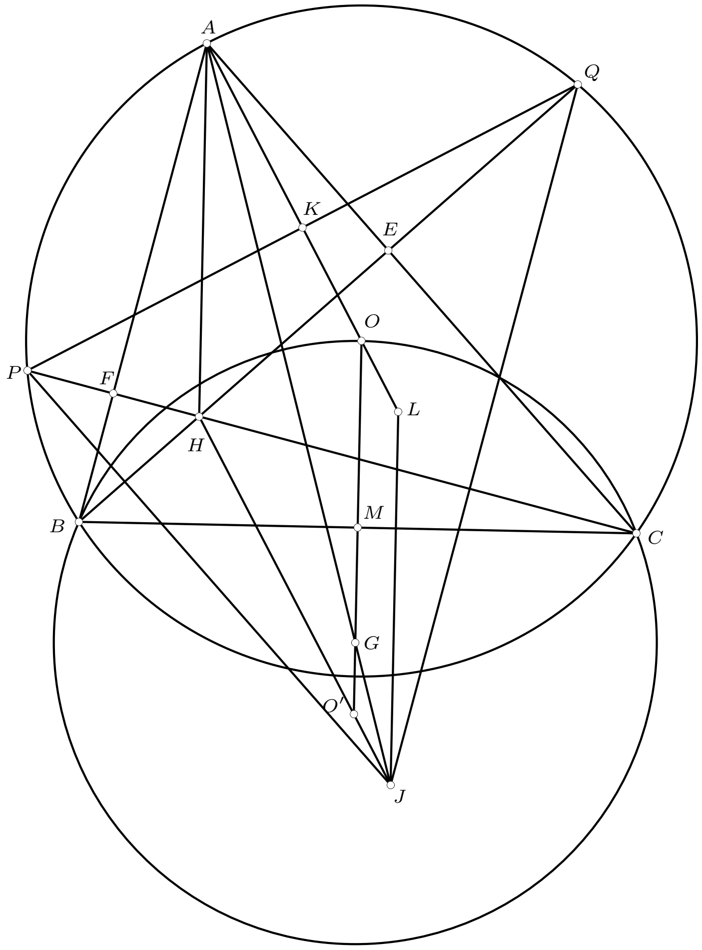
$$\frac{l-n}{h} = \frac{a(b+c)}{2(bc+a^2)} = \frac{\bar{l}-\bar{n}}{\bar{h}}.$$

Từ đẳng thức trên dễ thấy $\frac{l-n}{h}$ là một số thực k, nói cách khác $\overrightarrow{NL} = k\overrightarrow{OH}$ hay hai đường thẳng NL và OH song song. $\square$

Lời giải thứ hai đến từ trao đổi email trực tiếp của tác giả bài báo này và tác giả Nguyễn Cung Thành.

Lời giải thứ hai. Trước tiên, chúng ta chứng minh 3 bổ đề sau

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), với các đường cao BE, CF giao nhau tại H. CH, BH cắt lại (O) lần thứ hai tại P, Q. J là trực tâm tam giác HPQ. Khi đó AJ đi qua tâm (BOC).



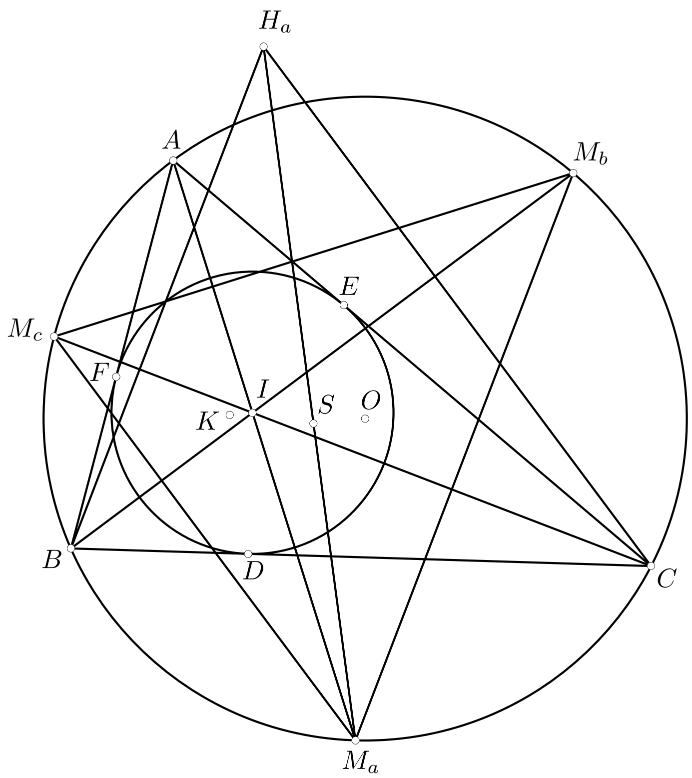
Chứng minh. Gọi G là tâm (OBC), O' đối xứng O qua BC. L là tâm (JPQ),K là trực tâm tam giác AEF, M là trung điểm BC. Vì P, Q đối xứng H qua AB, AC nên A là tâm (HPQ), kết hợp với H là trực tâm tam giác JPQ nên $AHJL$ là hình bình hành và L, A đối xứng nhau qua PQ. $AHO'O$ cũng là hình bình hành nên $OLJO'$ là hình bình hành. Lại vì P, Q đối xứng H qua AB, AC nên PQ đi qua K (PQ là đường thẳng $Steiner$ của H ứng với tam giác AEF),

PQ là trung trực AL nên K là trung điểm AL. Để chứng minh A, G, J thẳng hàng thì ta chứng minh:

$$\begin{aligned}
&\frac{AO}{AL} = \frac{OG}{LJ}\\
&\Leftrightarrow \frac{AO}{AL} = \frac{OG}{OO'}\\
&\Leftrightarrow \frac{AO}{AK} = \frac{OG}{OM}\\
&\Leftrightarrow \frac{R}{AK} = \frac{R}{AH \cdot \sin \angle OBC}\\
&\Leftrightarrow \frac{AK}{AH} = \sin \angle OBC\\
&\Leftrightarrow \frac{AK}{AH} = \sin \angle ABE\\
&\Leftrightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{AE}{AB}
\end{aligned}$$

Điều này đúng do $\triangle AEF \cup \{K\} \sim \triangle ABC \cup \{H\}$. □

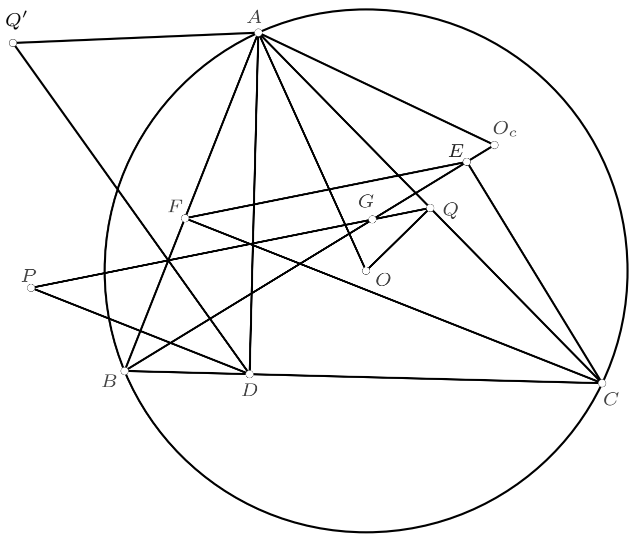
Bổ đề 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) ngoại tiếp (I). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. K là điểm $Kosnita$ của tam giác DEF. Khi đó IK song song đường thẳng $Euler$ tam giác ABC.



Chứng minh. Gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là các điểm chính giữa cung BC, CA, AB của tam giác ABC. H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm các tam giác IBC, ICA, IAB. Với chú ý rằng M_a, M_b, M_c là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB nên M_aH_a, M_bH_b, M_cH_c đồng quy tại S nằm trên đường thẳng $Euler$ của tam giác ABC (S là điểm $Schiffler$ của tam giác ABC). Mặt khác thì áp dụng bổ đề 1 cho tam giác $M_aM_bM_c$ với chú ý rằng I là trực tâm tam giác $M_aM_bM_c$ ta cũng có M_aH_a, M_bH_b, M_cH_c đồng quy tại điểm $Kosnita$ của tam giác $M_aM_bM_c$. Từ đây S là điểm $Kosnita$ của tam giác $M_aM_bM_c$.

Hai tam giác DEF và $M_aM_bM_c$ vị tự nhau lần lượt nhận I, K và O, S là tâm đường tròn ngoại tiếp và điểm $Kosnita$ nên $IK \parallel OS$ hay IK song song đường thẳng $Euler$ tam giác ABC. □

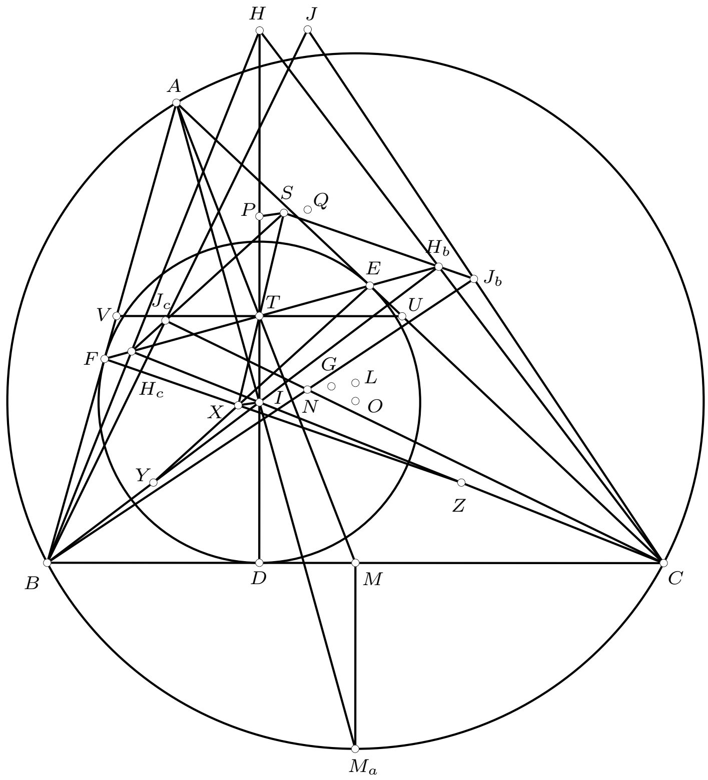
Bổ đề 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) đường cao AD, CF. Đối xứng O qua AC là O_c. E là hình chiếu của C lên BO_c, đối xứng D qua AB là P, Q là trung điểm AC. Khi đó $PQ \parallel EF$.



Chứng minh. Gọi Q' đối xứng Q qua AB và G là giao của BO_c và PQ. Dễ thấy $\triangle ABD \sim \triangle AOQ$ nên $\frac{AQ'}{AD} = \frac{AQ}{AD} = \frac{AO}{AB} = \frac{AO_c}{AB}$, từ đó $\triangle AQ'D \sim \triangle AO_cB$. Điều này cho ta $\angle ABG = \angle ABO_c = \angle ADQ' = \angle APQ = \angle APG$ hay $APBG$ nội tiếp. Từ đây 5 điểm A, G, D, B, P thuộc cùng một đường tròn nên $\angle DPG = \angle DBG = \angle CFE$ mà $DP \parallel CF$ nên $PQ \parallel EF$. □

Trở lại bài toán.

Gọi G là tâm đường tròn $Euler$ của tam giác BNC thì G là trung điểm NL. Gọi Y, Z là trung điểm IB, IC và EY cắt FZ tại X thì X là điểm $Kosnita$ của tam giác DEF. Như vậy theo bổ đề 2 ta có IX song song với đường thẳng $Euler$ của tam giác ABC. Ta chỉ cần chứng minh $IX \parallel NG$. Gọi EF cắt IB, IC tại H_b, H_c thì $\angle BH_cC = \angle BH_bC = 90°$. Từ đó gọi CH_b cắt BH_c tại H thì H là trực tâm tam giác BIC. Gọi J là trực tâm tam giác BNC và BJ_b, CJ_c là đường cao của tam giác BNC. Gọi P, Q là trung điểm IH, NJ và H_cJ_c giao H_bJ_b tại S. Xét cực và đối cực đường tròn đường kính BC thì chú ý rằng PH_c, PH_b, QJ_b, QJ_c tiếp xúc (BC) nên P, S, Q thẳng hàng vì cùng nằm trên đường đối cực của điểm W là giao của H_bH_c và J_bJ_c. Mặt khác áp dụng bổ đề 3 cho tam giác BIC thì XE, XF song song SH_c, SH_b. Như vậy hai tam giác SH_bH_c và XFE vị tự nhau nên gọi XS cắt EF tại T thì T là tâm vị tự hai tam giác. Từ đây $\frac{\overline{TF}}{\overline{TH_b}} = \frac{\overline{TE}}{\overline{TH_c}}$. Điều này cho ta $\overline{TE} \cdot \overline{TH_b} = \overline{TF} \cdot \overline{TH_c}$ hay $\mathcal{P}_{T/(IB)} = \mathcal{P}_{T/(IC)}$. Qua đó T nằm trên ID.



Đường thẳng qua T song song BC cắt AC, AB tại U, V. Khi đó vì $ITVF$ và $ITEU$ nội tiếp nên $\angle IVT = \angle IFT = \angle IET = \angle IUT$ hay tam giác IVU cân tại I. Từ bổ đề hình thang ta suy ra AT đi qua trung điểm M của BC. Vì H_b nằm trên đường trung bình ứng với đỉnh C của tam giác ABC nên $H_bM \parallel AB$. Gọi M_a là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O) thì M_a là tâm (BIC). Như vậy, ta sẽ có $M_aM = \frac{1}{2}IH = IP$. Từ đây, áp dụng định lí $Thales$ thì $\frac{IT}{IP} = \frac{IT}{M_aM} = \frac{AT}{AM} = \frac{FT}{FH_b} = \frac{XT}{XS}$. Như vậy $XI \parallel PS \equiv PQ$ mà qua phép vị tự tâm M tỉ số 2 thì NG biến thành PQ. Như vậy $XI \parallel NG$ nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

3. Đôi lời bàn

Tác giả bài báo cũng lưu ý rằng tác giả còn có một lời giải khác dùng tọa độ Barycentric khá ngắn gọn, tuy nhiên bạn đọc có thể tự khám phá lời giải này. Một ý tưởng giải khác dùng "điểm động" có thể xem ở [3]. Một lời giải khác dùng bổ đề của Telv Cohl đối với tâm đường tròn Euler của tam giác IBC cũng có thể xem trong [3].

Bài toán này được tác giả dùng trong quá trình tập huấn đội dự tuyển lớp 10 trường THPT chuyên KHTN. Trong quá trình làm việc, tôi đã nhận được hai lời giải khác nhau, một trong số đó là của bạn Thành như trên. Nhân việc này thì tôi cũng có một vài cảm nhận riêng. Trước tiên tôi mừng vì các em học sinh THPT chuyên KHTN đã chịu khó tìm tòi sau giờ học, kết quả là đã thực hiện được lời giải trên với ba bổ đề. Việc tích lũy kiến thức để tạo ra ba bổ đề đòi hỏi tác giả lời giải phải đọc nhiều. Tuy nhiên, lời giải cũng có thể còn đôi chỗ chưa được quá chặt chẽ, nhưng tác giả bài viết mong bạn đọc hãy châm trước một số "lỗi" này vì tác giả của lời giải còn trẻ tuổi và đã rất cố gắng.

Nếu so sánh về mặt câu chữ thì cảm giác như lời giải tọa độ ngắn gọn hơn. Nhưng thực chất trong lời giải tọa độ, đã sử dụng nhiều bổ đề phối hợp mà có thể khi đọc ta không để ý, vậy nếu diễn giải rõ các bổ đề này thì hàm lượng kiến thức sử dụng của lời giải tọa độ không ngắn hơn. Bạn đọc cũng không vội đưa ra thêm nhiều so sánh hơn giữa hai lời giải vì tác giả bài báo khi đưa ra cả hai lời giải chỉ muốn nói một điều, đó là các cách tiếp cận cho một bài toán rất phong phú. Chúng ta có thể đi hai con đường hoàn toàn khác hẳn nhau nhưng vẫn tới cùng một đích.

Qua bài toán này tác giả cũng nhấn mạnh một điều, việc đưa ra một vài bài toán thách thức "đủ tốt" cho các em học sinh chuyên toán là một việc làm quan trọng trong việc giảng dạy học sinh chuyên Toán. Tuy nhiên tôi xin phép bàn về chủ đề "giảng dạy học sinh chuyên toán" ở một bài viết khác.

Ngày trước, tôi đã có dịp được đọc hai cuốn sách về số phức trong hình học phẳng viết bằng tiếng Việt, một cuốn của **GS Đoàn Quỳnh** và một cuốn của **TS Nguyễn Hữu Điển**. Phải nói rằng tác giả ấn tượng và thích thú hai cuốn sách này. Đây cũng là hai cuốn sách mà tác giả khuyên các bạn học sinh chuyên toán nên đọc để có kiến thức về tọa độ phức. Gần đây nhiều tài liệu số phức trong hình học phẳng viết bằng tiếng Việt tràn lan. Tôi có từng nhìn qua một tài liệu thì cảm nhận người viết đó không hiểu lắm về tọa độ và chủ yếu đi dịch và chép lại y nguyên tài liệu nước ngoài. Trong suốt bài viết này, tôi chỉ tham khảo tài liệu [4] cho phương pháp tọa độ phức.

Bài toán trên được sáng tác trong lúc tác giả có dịp được đồng hành với đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán quốc tế (IMO) năm 2022 ở Na Uy. Tác giả xin bày tỏ sự biết ơn chân thành tới thầy **Lê Anh Vinh** và thầy **Lê Bá Khánh Trình**, hai người thầy lớn đã đồng hành với Olympic của Việt Nam suốt nhiều năm qua.

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, Nguyễn Tiến Dũng, Đào Thị Hoa Mai, Nguyễn Đăng Quả, Đỗ Xuân Long, Tuyển chọn các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán 9 hình học, NXBĐHQG năm 2021.

[2] Trần Quang Hùng, Mỗi tuần một bài toán hình học, NXBĐHQG năm 2017.

[3] Trần Quang Hùng, Topic: Line is parallel to the Euler generating from the incenter, từ diễn đàn AoPS, https://artofproblemsolving.com/community/q1h2883440p25768960.

[4] Evan Chen, Bashing Geometry with Complex Numbers, https://web.evanchen.cc/handouts/cmplx/en-cmplx.pdf.

ĐỊNH LÝ VAN AUBEL
MỘT ĐỊNH LÝ ĐẸP

Nguyễn Song Thiên Long
Lớp 11T, Trường THPT Chuyên Bến Tre

Các bài toán liên quan đến đa giác không thường xuất hiện trong các đề thi Olympic. Hầu như các bài toán chứng minh liên quan đến đa giác (hoặc tập hợp nhiều điểm) thường khai thác các tính chất đơn giản nhưng rất đẹp, không yêu cầu quá nhiều kiến thức chuyên sâu nhưng lại cần một tư duy tốt. Trong bài viết này, tôi xin giới thiệu lại một bài toán chứng minh định lý *Van Aubel* vô cùng đẹp và các mở rộng định lý mà thầy *Nguyễn Văn Lợi* và thầy *Trần Việt Hùng* đã từng đăng trên nhóm *BÀI TOÁN HAY - LỜI GIẢI ĐẸP - ĐAM MÊ TOÁN HỌC*. Qua đó đưa ra một số bài toán liên quan được chứng minh bằng định lý *Van Aubel*.

1. Phát biểu và chứng minh bài toán

Sau đây là nguyên văn bài toán được đăng bởi thầy *Nguyễn Văn Lợi*

Bài toán 1. *Về phía ngoài tứ giác $ABCD$, ta dựng các hình vuông $ABUI$, $BCQP$, $CDJW$, $DAFE$ với các tâm tương ứng là T, N, V, M. Khi đó ta có TV và MN vuông góc với nhau.*

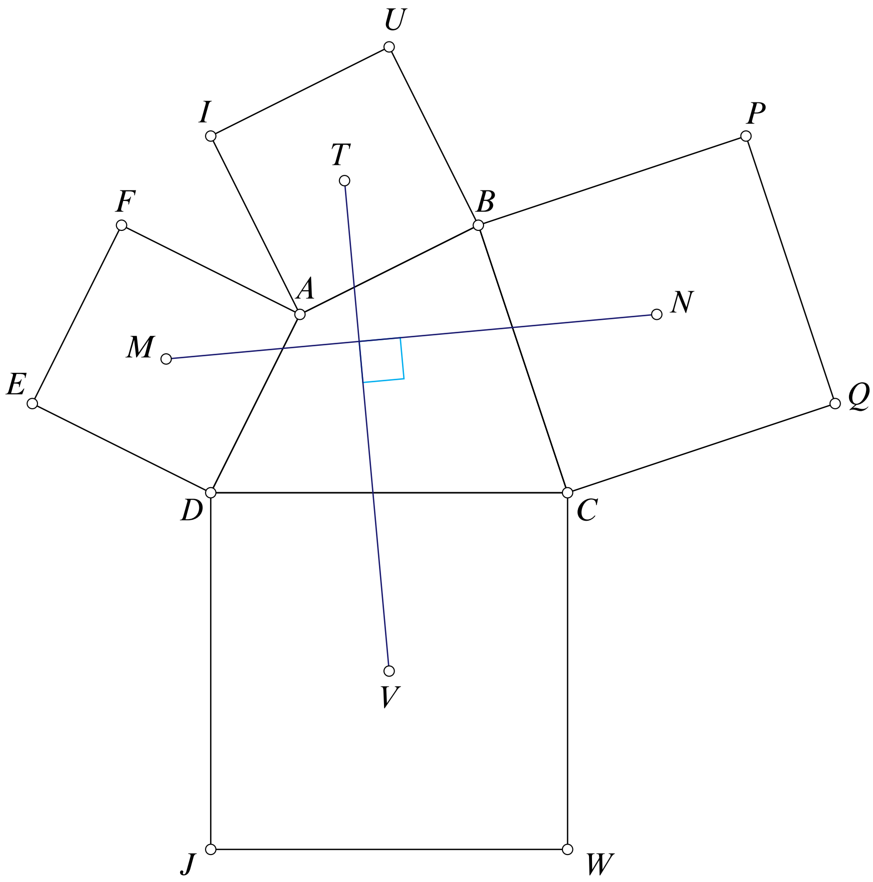
Lời giải 1. Lời giải này dùng hoàn toàn các kiến thức lớp 8, 9 như tam giác đồng dạng, tứ giác nội tiếp, kĩ thuật biến đổi góc, có thể dễ dàng tiếp cận.

Xét trường hợp tam giác ABC nhọn.

Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của AC, AB, BC; M là giao điểm của TV và MN.

Trong tam giác BTA vuông tại T có TY là trung tuyến nên suy ra $TY = \dfrac{AB}{2}$.

Tương tự, ta có $NZ = \dfrac{BC}{2}$.



Dễ dàng chứng minh được XY, XZ là hai đường trung bình của tam giác ABC.

Mặt khác, $\angle TYX = 90° + \angle AYX = 90° + \angle XZC = \angle XZN$ (do $XY \parallel BC$, $XZ \parallel AB$, định lý *Thales*).

Xét $\triangle TYX$ và $\triangle XZN$ có $\begin{cases} TY = XZ = \left(\frac{AB}{2}\right) \\ \angle TYX = \angle XZN \\ YX = ZN = \left(\frac{BC}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \triangle TYX = \triangle XZN$ (c.g.c).

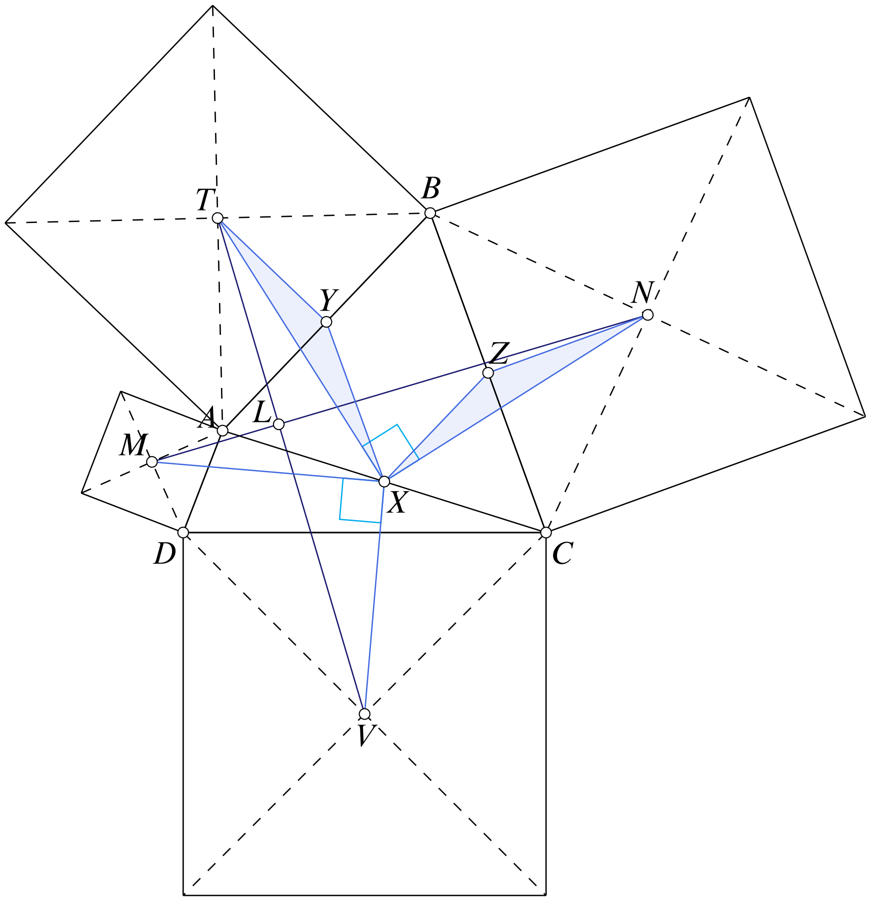
$\Rightarrow TX = XN;\ \angle TXY = \angle XNZ.$

Ta thấy $\angle TXY = \angle TXY + \angle ZXN + \angle YXZ = (\angle XNZ + \angle ZXN) + \angle XZC = (180° - \angle XZN) + \angle XZC = 180° - \angle NZC = 90°$ nên $TX \perp XN$.

Tương tự ta có $XM \perp XV$; $XM = XV$.

Xét $\triangle MXN$ và $\triangle VXT$ có $\begin{cases} MX = VX \\ \angle MXN = \angle VXT = (\angle TXM + 90°) \\ XN = XT \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle MXN = \triangle VXT$ (c.g.c).



$\Rightarrow \angle LMX = \angle LVX.$

$\Rightarrow$ Tứ giác $LMVX$ nội tiếp.

$\Rightarrow \angle MLV = \angle MXV = 90°.$

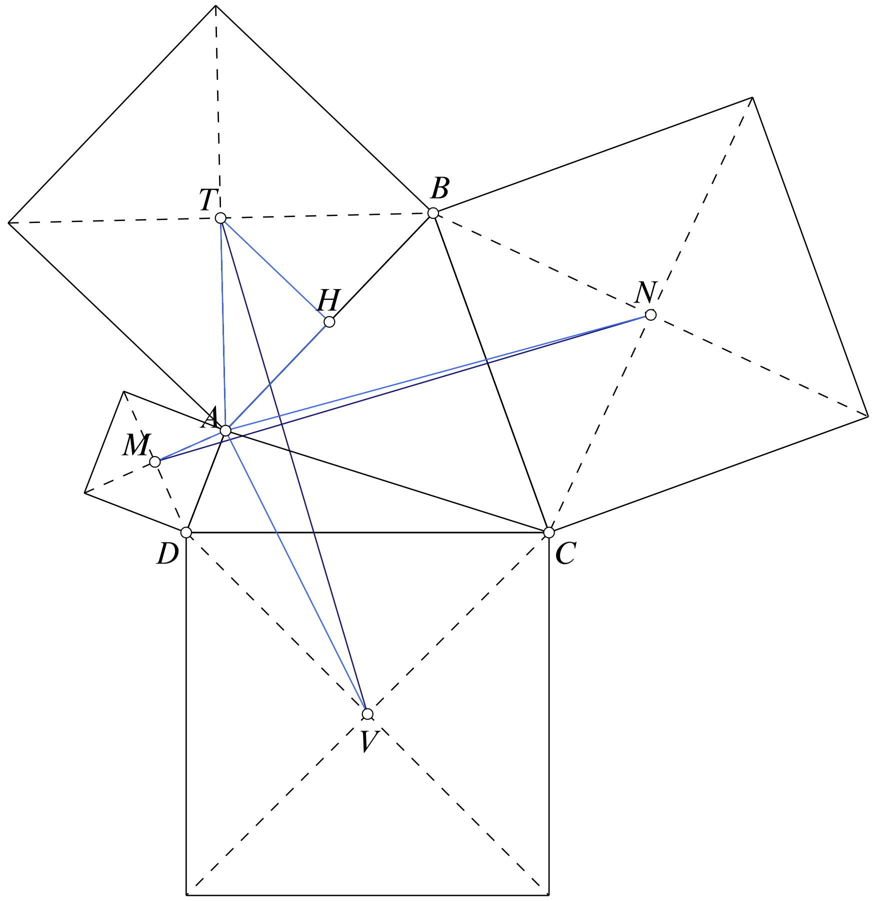
Trường hợp tam giác ABC tù chứng minh tương tự.

Phép chứng minh được hoàn tất. □

Lời giải 2. Lời giải này dùng kiến thức liên quan đến số phức và phương pháp tọa độ hóa trên mặt phẳng số phức. Từ đây, ta có thể thấy được một ứng dụng tuyệt vời của số phức trong việc chứng minh hình học phẳng.

Không mất tính tổng quát, ta biểu diễn các điểm trên mặt phẳng tọa độ phức như sau

$$A = 0; \quad B = 2x_b + 2y_b.i; \quad C = 2x_c + 2y_c.i; \quad D = 2x_d + 2y_d.i$$



Do đó ta có

$$\overrightarrow{AB} = 2x_b + 2y_b i = 2a; \quad \overrightarrow{BC} = 2(x_c - x_b) + 2(y_c - y_b)i = 2b;$$
$$\overrightarrow{CD} = 2(x_d - x_c) + 2(y_d - y_c)i = 2c; \quad \overrightarrow{DA} = -2x_d - 2y_d i = 2d.$$

Gọi H là trung điểm AB.

Ta có

$$TH \perp AB \text{ và } TP = \frac{AB}{2} \text{ nên } \overrightarrow{TH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}i = ai \Rightarrow \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HT} = (1+i)a.$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\overrightarrow{AN} = 2a + (1+i)b; \quad \overrightarrow{AV} = 2a + 2b + (1+i)c; \quad \overrightarrow{AM} = (-1+i)d.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TV} &= a + 2b + c + (c-a)\,i \\
&= (-x_b + x_c + x_d + y_b + y_c - y_d) + (-y_b + y_c + y_d - x_b - x_c + x_d)i \\
&= X_1 + Y_1 i. \\
\overrightarrow{MN} &= 2a + b + d + (b-d)i \\
&= (x_b + x_c - x_d + y_b - y_c - y_d) + (y_b + y_c - y_d - x_b + x_c + x_d)i \\
&= X_2 + Y_2 i.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& TV \perp MN \Leftrightarrow X_1.Y_2 + Y_1.X_2 = 0 \\
\Leftrightarrow & (-x_b + x_c + x_d + y_b + y_c - y_d)(y_b + y_c - y_d - x_b + x_c + x_d) \\
& + (-y_b + y_c + y_d - x_b - x_c + x_d)(x_b + x_c - x_d + y_b - y_c - y_d) = 0. \text{ (đúng)}
\end{aligned}$$

Phép chứng minh được hoàn tất. □

Lời giải 3. Đây chính là lời giải mà thầy *Nguyễn Văn Lợi* đã đề xuất cho bài toán này. Cách làm này yêu cầu kiến thức về phép vị tự quay, cần một tư duy quan sát tốt và đổi lại sẽ giúp lời giải trở nên ngắn gọn nhưng vẫn đảm bảo được yêu cầu của bài toán.

Gọi L là trung điểm AC.

Ta kí hiệu phép vị tự quay tâm X, co dãn k, quay góc φ là $S_{(X,k,\varphi)}$.

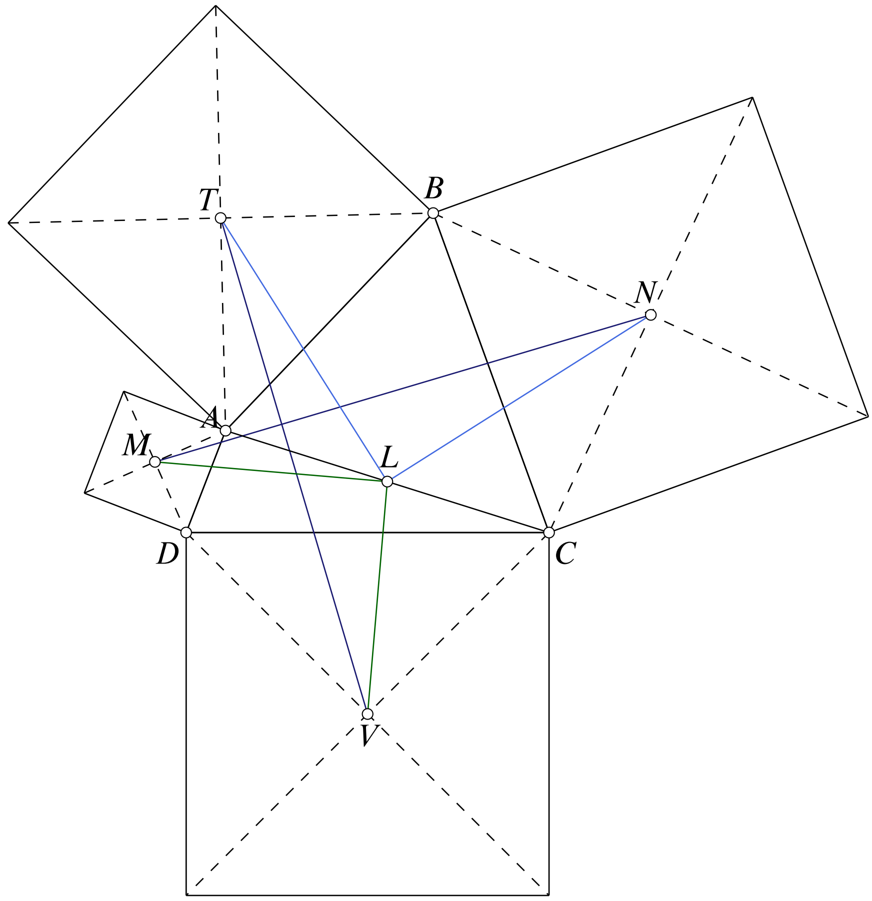
Ta có

$$\begin{cases} S_{\left(A,\frac{1}{\sqrt{2}},45^\circ\right)} : B \to T; \\ S_{\left(C,\sqrt{2},45^\circ\right)} : N \to B. \end{cases} \Rightarrow S = S_{\left(C,\sqrt{2},45^\circ\right)} \circ S_{\left(A,\frac{1}{\sqrt{2}},45^\circ\right)} : N \to T$$

Ta thấy S là phép quay góc 90° với tỉ số là 1, mà điểm L cố định nên S là phép quay tâm L góc 90°.

Chứng minh tương tự, ta được $S : M \to V$.

Từ đó suy ra $TV \perp MN$. □

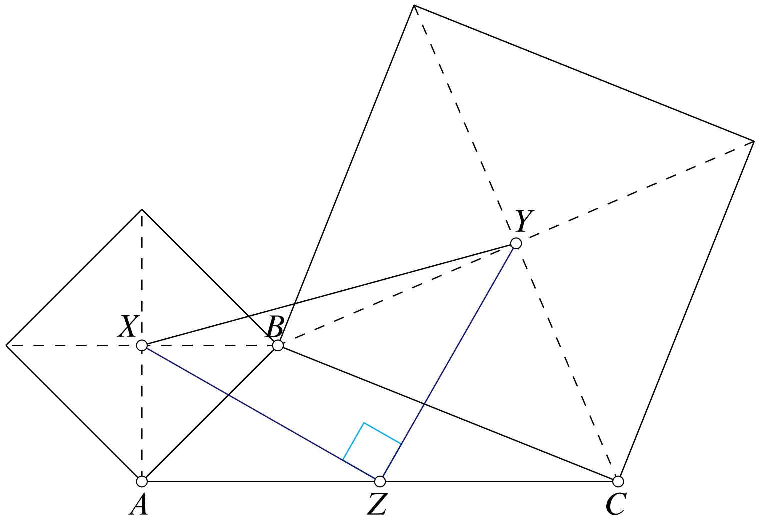


Bình luận

Bài toán trên tuy yêu cầu rất đơn giản nhưng có nhiều cách tiếp cận khác nhau, sử dụng kiến thức từ cơ bản đến nâng cao. Và việc quyết định dùng phương pháp nào để chứng minh còn phụ thuộc vào từng đối tượng cũng như quan điểm nhìn nhận trong cách chứng minh học học phẳng. Nhưng nhìn chung, dù là cách làm nào thì đây vẫn là một bài toán (định lý) thể hiện được vẻ đẹp của hình học phẳng.

Trong bài toán trên, ta thấy được sự xuất hiện của rất nhiều tam giác vuông cân thông qua việc gọi thêm các trung điểm và việc sử dụng các tam giác này chính là ý tưởng dẫn đến lời giải cho bài toán. Theo thầy *Nguyễn Văn Lợi*, bài toán tam giác vuông cân được phát biểu như sau là linh hồn của bài toán.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC, về phía ngoài của tam giác dựng hình vuông cạnh BC tâm Y và hình vuông cạnh AB tâm X. Khi đó, XZY là tam giác vuông cân với Z là trung điểm BC.*

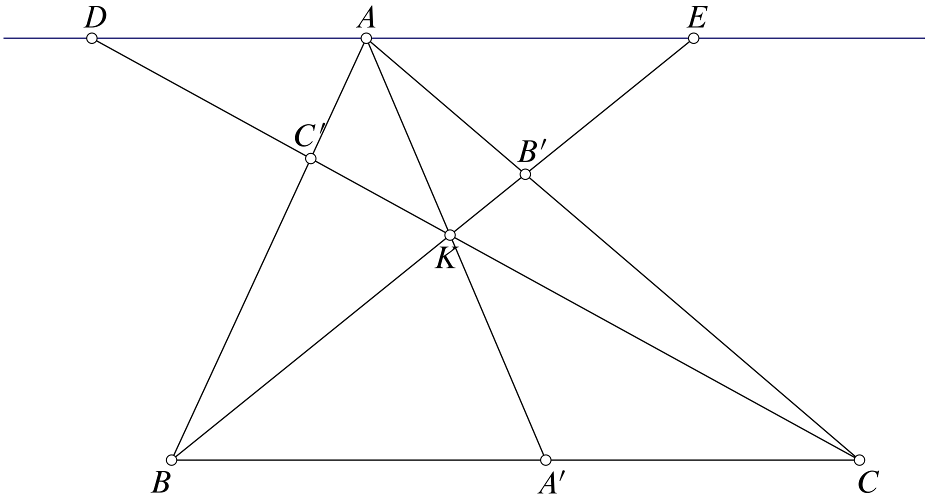


2. Định lý Van Aubel

2.1. Định lý Van Aubel cho tam giác

Định lý 1. *Trong tam giác ABC, nếu có ba đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại một điểm K nằm trong tam giác thì*

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}.$$



Chứng minh 1. Gọi E, D lần lượt là giao điểm của BB', CC' với đường thẳng qua A song song với BC.

Theo định lý *Thales*, ta có

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{DA}{A'C} = \frac{AE}{BA'} = \frac{DA + AE}{BC} = \frac{DA}{BC} + \frac{AE}{BC} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Chứng minh 2. Áp dụng định lý *Menelaus* cho tam giác ABA' và cát tuyến $C'KC$, ta có

$$\frac{AC'}{C'B}.\frac{BC}{CA'}.\frac{A'K}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} = \frac{CA'}{BC}.\frac{KA}{A'K}. \tag{1}$$

Áp dụng định lý *Menelaus* cho tam giác ACA' và cát tuyến $B'KB$, ta có

$$\frac{AB'}{B'C}.\frac{BC}{BA'}.\frac{A'K}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{AB'}{B'C} = \frac{BA'}{BC}.\frac{KA}{A'K}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{AK}{A'K}\left(\frac{CA'}{BC} + \frac{BA'}{BC}\right) = \frac{AK}{A'K}.$$

□

Chứng minh 3. Theo bổ đề quen thuộc, ta có

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_{AC'K}}{S_{BC'K}} = \frac{S_{AKC}}{S_{BKC}};$$
$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AB'K}}{S_{CKB'}} = \frac{S_{AKB}}{S_{BKC}}.$$

Suy ra

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AKC} + S_{AKB}}{S_{BKC}}. \tag{3}$$

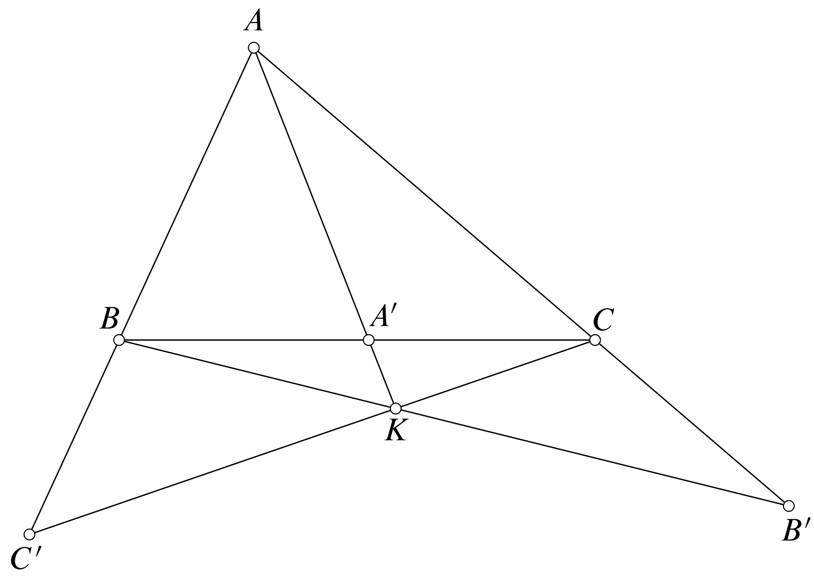
Lại có

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{S_{AKB}}{S_{BKA'}} = \frac{S_{AKC}}{S_{CKA'}} = \frac{S_{AKB} + S_{AKC}}{S_{BKA'} + S_{CKA'}} = \frac{S_{AKB} + S_{AKC}}{S_{BKC}}. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{AK}{A'K} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$

□



Nhận xét

Định lý *Van Aubel* vẫn còn đúng trong trường hợp điểm A' nằm trên cạnh BC còn hai điểm B', C' lần lượt nằm trên tia đối của hai tia CA, BA.

Thật vậy, ta có

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{S_{ABK}}{S_{BKA'}} = \frac{S_{ACK}}{S_{CKA'}} = \frac{S_{ABK} + S_{ACK}}{S_{BKA'} + S_{CKA'}} = \frac{S_{ABKC}}{S_{BKC}}.$$

Lại có

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_{AC'C}}{S_{BC'C}} = \frac{S_{AC'K}}{S_{BC'K}} = \frac{S_{AC'C} + S_{AC'K}}{S_{BC'C} + S_{BC'K}} = \frac{S_{AKC}}{S_{BKC}}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AKB}}{S_{BKC}}.$$

Hay

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AKC}}{S_{BKC}} + \frac{S_{AKB}}{S_{BKC}} = \frac{S_{ABKC}}{S_{BKC}}.$$

Suy ra

$$\frac{AK}{A'K} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$

2.2. Định lý Van Aubel cho tứ giác

Định lý 2. *Về phía ngoài tứ giác $ABCD$, ta dựng các hình vuông. Gọi P, Q, R, S là tâm các hình vuông đó. Khi đó, ta có đường thẳng $PR = QS$ và $PR \perp QS$.*

Đây chính là bài toán đã trình bày ở phần 1.

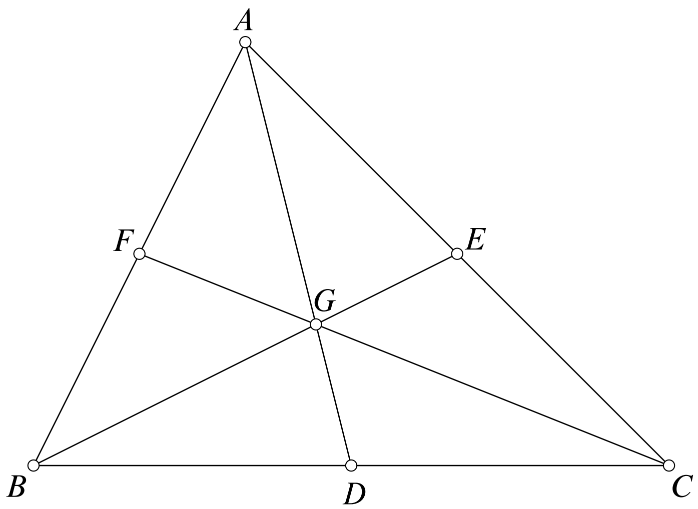
Theo nhận xét của Giáo sư *Yutaka Nishiyama*[1], định lý *Van Aubel* là một định lý đẹp trong cách phát biểu lẫn trong cách chứng minh nó! *("The beauty of this theorem lies both in the theorem itself and also in its proofs.")*.

2.3. Một số tính chất, hệ quả của định lý Van Aubel

Với S là diện tích, p là nửa chu vi và a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC.

Hệ quả 1. *Cho $\triangle ABC$ có ba đường trung tuyến AD, BE, CF đồng quy tại điểm G. Khi đó*

$$\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}.$$



Chứng minh. Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

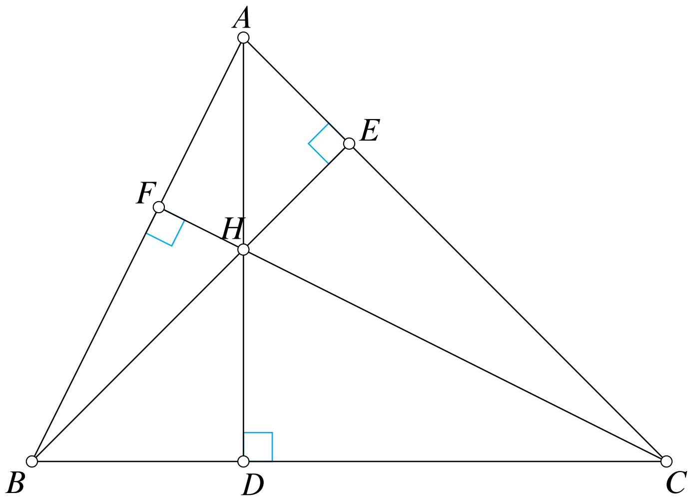
$$\frac{AG}{GD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = 2.$$

Vậy $\frac{AG}{AD} = \frac{AG}{AG+GD} = \frac{2}{3}$. □

[1]Yutaka Nishiyama (sinh ngày 21 tháng 10 năm 1948) là một nhà toán học Nhật Bản và giáo sư tại Đại học Kinh tế Osaka. Độc giả có thể tìm hiểu thêm về toán học trong đời sống hằng ngày, được ông chia sẻ tại `http://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/`.

Hệ quả 2. *Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Khi đó,*

$$\frac{AH}{HD} = \sqrt{\frac{(bc)^2 - 4S^2}{(ab)^2 - 4S^2}} + \sqrt{\frac{(bc)^2 - 4S^2}{(ac)^2 - 4S^2}}.$$



Chứng minh. Ta có

$$S = \frac{1}{2}AD \cdot a = \frac{1}{2}BE \cdot b = \frac{1}{2}CF \cdot c.$$

Suy ra $BE = \frac{2S}{b}$, $CF = \frac{2S}{c}$.

Mặt khác,

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = c^2 - \frac{4S^2}{b^2} \Rightarrow AE = \frac{1}{b}\sqrt{(bc)^2 - 4S^2};$$
$$EC^2 = BC^2 - BE^2 = a^2 - \frac{4S^2}{b^2} \Rightarrow EC = \frac{1}{b}\sqrt{(ab)^2 - 4S^2}.$$

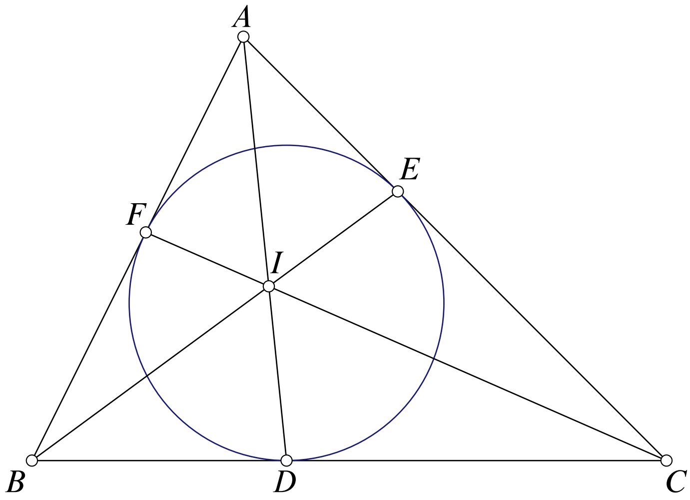
Tương tự, ta cũng có

$$AF = \frac{1}{c}\sqrt{(bc)^2 - 4S^2}; \quad FB = \frac{1}{c}\sqrt{(ac)^2 - 4S^2}.$$

Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AH}{HD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \sqrt{\frac{(bc)^2 - 4S^2}{(ab)^2 - 4S^2}} + \sqrt{\frac{(bc)^2 - 4S^2}{(ac)^2 - 4S^2}}.$$

□



Hệ quả 3. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn có các tiếp điểm với các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Các cevian AD, BE, CF đồng quy tại điểm I gọi là điểm Gergonne. Khi đó,*

$$\frac{AI}{ID} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

Chứng minh. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $AE = AF,\ BF = BD,\ DC = CE$. Suy ra

$$AE + DC + BF = BD + AF + EC = \frac{a+b+c}{2} = p.$$

Vì $BF = BD$ nên $AE + BC = p$ hay $AE = p - a$.

Tương tự, $EC = p - c$ và $BF = p - b$.

Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{p-a}{p-c} + \frac{p-a}{p-b} = (p-a)\left(\frac{p-b+p-c}{(p-b)(p-c)}\right) = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

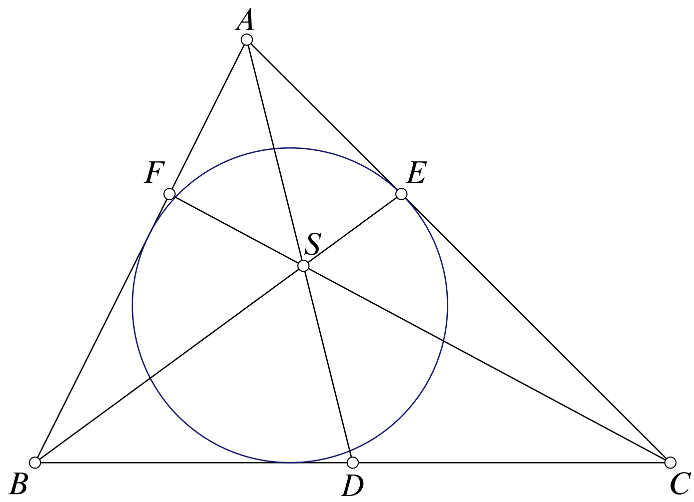
□

Hệ quả 4. *Cho tam giác ABC. Gọi AD, BE lần lượt là trung tuyến và cevian Gergonne của tam giác ABC. S là giao điểm của AD và BE. Khi đó,*

$$\frac{AS}{SD} = \frac{2(p-a)}{p-c}.$$

Chứng minh. Gọi F là giao điểm của CS và AB.

Vì AD là trung tuyến nên $BD = DC$.



Theo chứng minh *hệ quả 3*, ta được

$$AE = p - a; \quad EC = p - c. \tag{5}$$

Áp dụng định lý *Céva*, ta có

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1. \tag{6}$$

Từ (5) và (6), ta có

$$\frac{AF}{FB} = \frac{p-a}{p-c}.$$

Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AS}{SD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{2(p-a)}{p-c}.$$

□

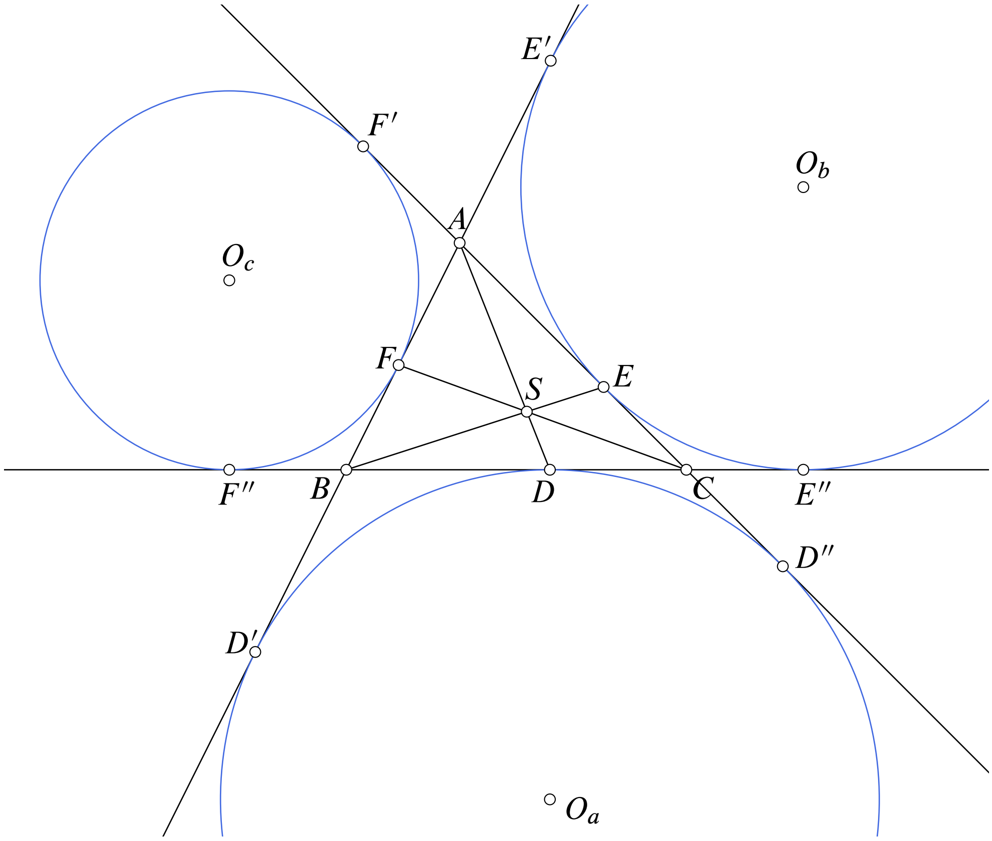
Hệ quả 5. *Cho tam giác ABC, các đoạn thẳng AD, BE, CF lần lượt nối các đỉnh A, B, C với tiếp điểm của các cạnh BC, CA, AB với đường tròn bàng tiếp gọi là các cevian Nagel. Các cevian Nagel đồng quy tại điểm S gọi là điểm Nagle. Khi đó*

$$\frac{AS}{SD} = \frac{a}{p-a}.$$

Chứng minh. Gọi các tiếp điểm như hình vẽ.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có

$$2AD' = AD' + AD'' = AB + BD' + AC + CD'' = AB + BD + AC + CD = 2p.$$



Suy ra $AD' = AD'' = p$.

Tương tự, ta được

$$AD = AD'' = BE' = BE'' = CF' = CF'' = p.$$

Lại có

$$AE = AC - EC = AC - CE'' = AC - \left(BE' - BC\right) = b - (p - a) = p - c.$$

Tương tự, ta suy ra được

$$CE = BF = p - a; \quad AF = CD = p - b; \quad AE = BD = p - c.$$

Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AS}{SD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{p-c}{p-a} + \frac{p-b}{p-a} = \frac{p-c+p-b}{p-a} = \frac{a}{p-a}.$$

$\square$

Nhận xét

Định lý *Van Aubel* cho tam giác cho phép tính tỉ số $\frac{AK}{KA'}$ theo các tỉ số $\frac{AB'}{B'C}$ và $\frac{AC'}{C'B}$ với AA', BB', CC' đồng quy tại K. Ta thấy rằng có rất nhiều bộ ba các đường *cevian* đồng quy trong tam giác chẳng hạn như các *cevian trọng tâm*, các *cevian trực tâm*, các *cevian tâm đường tròn nội tiếp*, các *cevian Gergonne*, các *cevian Nagel*, các *cevian Lemoine*, các *cevian đẳng giác*, ... nên ta có rất nhiều bài toán là hệ quả của định lý *Van Aubel*. Ngoài ra, ta có thể tổ hợp các *cevian* khác nhau trong cùng một bài toán chẳng hạn *cevian trọng tâm* với *cevian Gergonne*, *cevian trọng tâm* với *cevian Nagel*, ... để tạo ra các bài toán mới.

Các hệ quả đã trình bày ở trên chính là ví dụ.

Bài toán luyện tập

Bài tập 1. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF đồng quy tại điểm I. Chứng minh rằng
$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$
Bài tập 2. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H của tam giác và
$$\frac{HA}{HD} = \frac{\cos\angle BAC}{\cos\angle ABC \cos\angle ACB}.$$
Bài tập 3. Cho tam giác ABC. Gọi AD, BE lần lượt là trung tuyến và *cevian Nagel* của tam giác ABC. S là giao điểm của AD và BE. Tính tỉ số $\frac{AS}{SD}$.

3. Một vài mở rộng của định lý Van Aubel

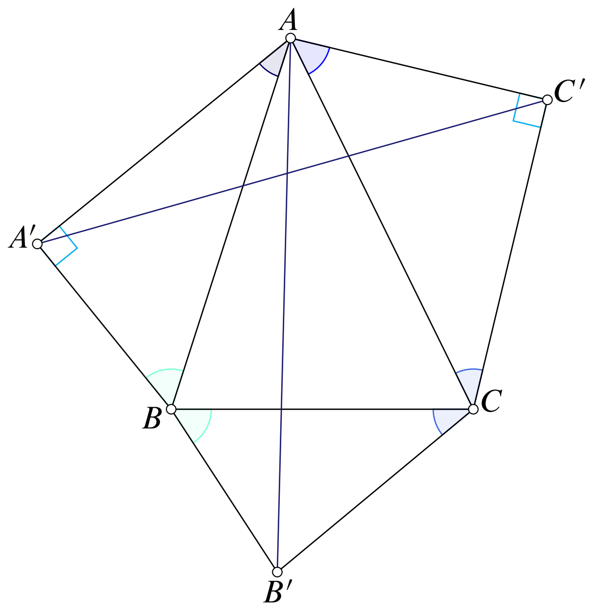
Sau đây các mở rộng của định lý *Van Aubel* mà thầy *Trần Việt Hùng* đã từng giới thiệu ở [1]

Nhìn chung, các bài toán đều rất đẹp và "*có hướng*", độc giả có thể thử chứng minh.

Mở rộng 1. *Bên ngoài tam giác ABC vẽ các tam giác ABA' vuông tại A'; ACC' vuông tại C'; BCB' có $\angle CBB' = \angle A'BA$ và $\angle BCB' = \angle C'CA$. Chứng minh rằng*

a) $\frac{A'C'}{B'A} = \sin(\angle A'AB + \angle CAC')$.

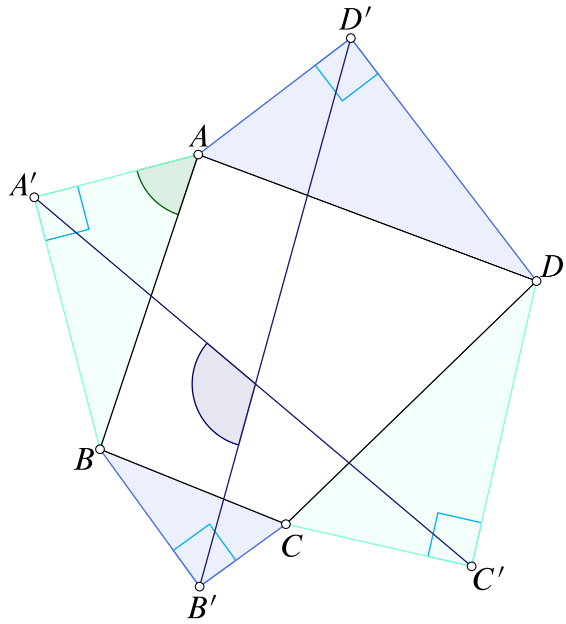
b) $(A'C'; B'A) = (AA'; AB) + (CC'; CA) \pmod{\pi}$.



Mở rộng 2. *Cho A, B, C, D là bốn điểm bất kỳ, ABA' là tam giác vuông tại A'. Vẽ các tam giác CBB', CDC' và ADD' sao cho CBB' và ABA' đồng dạng ngược hướng; CDC' và ABA' đồng dạng cùng hướng; ADD' và ABA' đồng dạng ngược hướng. Chứng minh rằng*

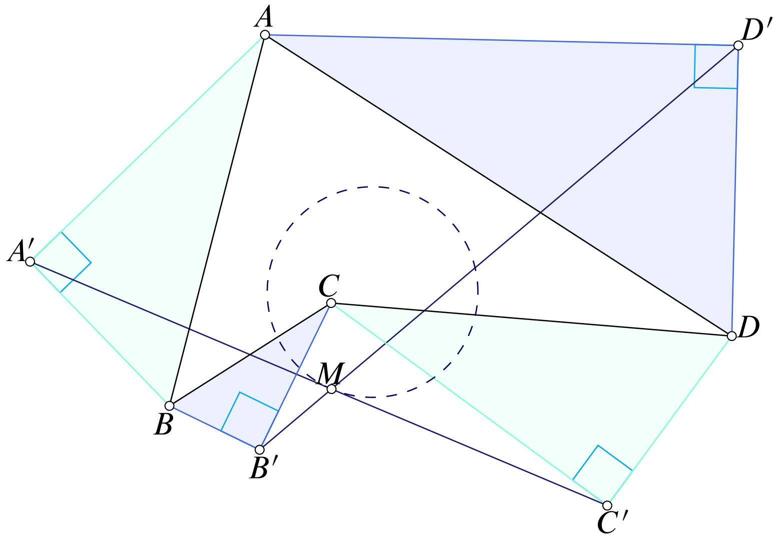
a) $A'C' = B'D'$.

b) $(A'C'; B'D') = 2\,(AA'; AB) \pmod{\pi}$.

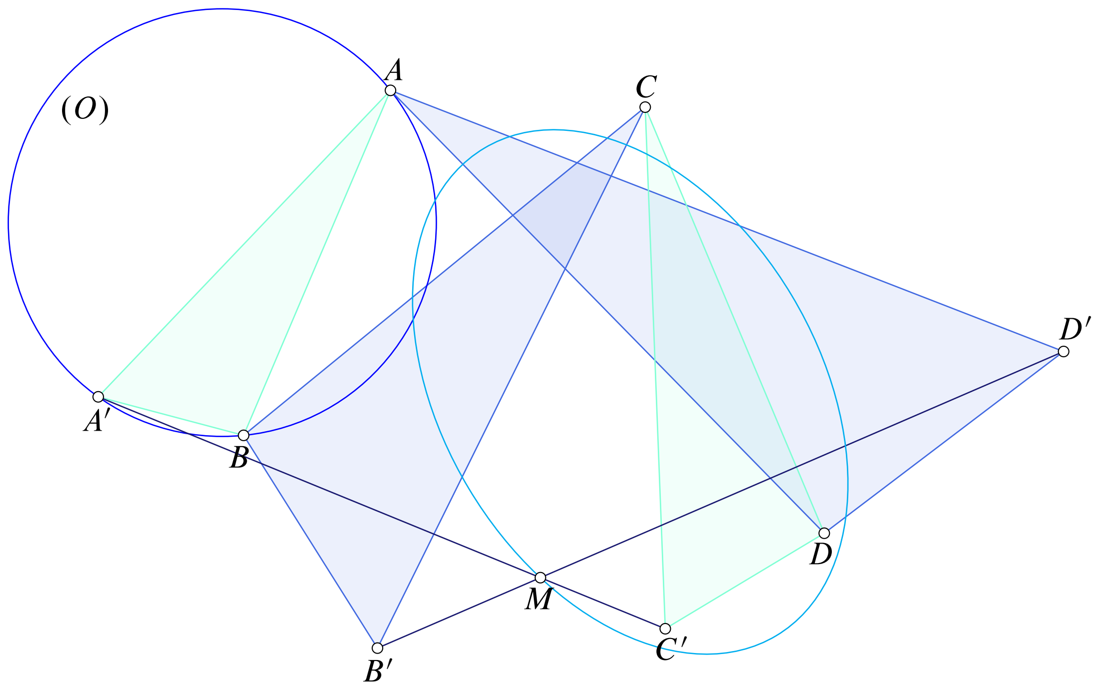


Mở rộng 3. *Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định bất kỳ. Vẽ tam giác ABA' vuông tại A' và các tam giác CBB', CDC' và ADD' sao cho CBB' và ABA' đồng dạng ngược hướng; CDC' và*

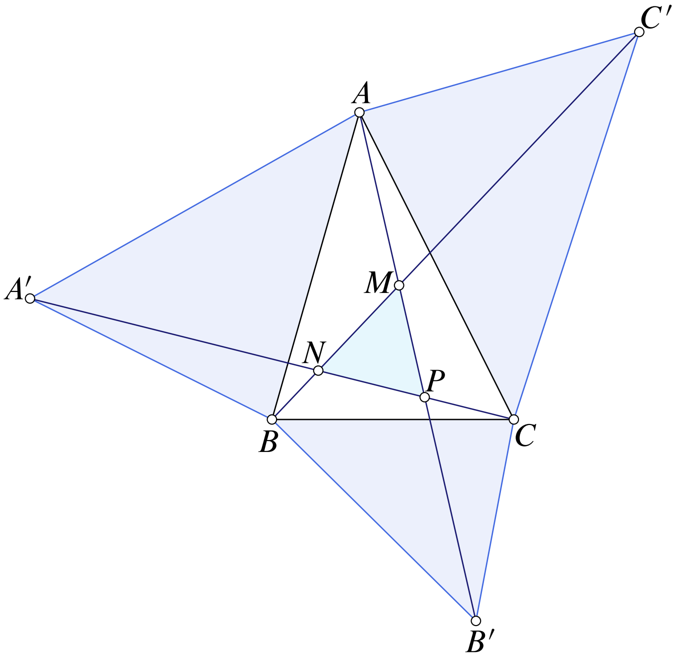
ABA' đồng dạng cùng hướng; ADD' và ABA' đồng dạng ngược hướng. Chứng minh rằng M nằm trên một đường tròn cố định khi A' thay đổi, với M là giao điểm của đường thẳng $A'C'$ và $B'D'$.



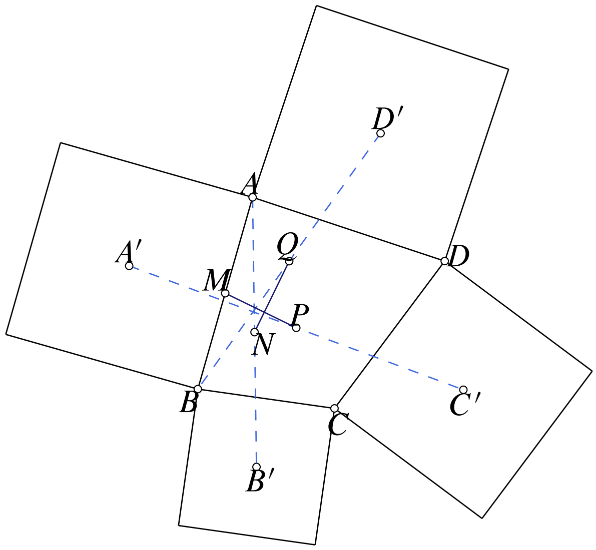
Mở rộng 4. *Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định bất kỳ. Một đường tròn (O) cố định qua A, B, A' là một điểm trên (O) (khác A, B). Vẽ các tam giác CBB', CDC' và ADD' sao cho CBB' và ABA' đồng dạng ngược hướng; CDC' và ABA' đồng dạng cùng hướng; ADD' và ABA' đồng dạng ngược hướng. Chứng minh rằng M nằm trên một đường conic cố định khi A' thay đổi trên (O), với M là giao điểm của đường thẳng $A'C'$ và $B'D'$.*



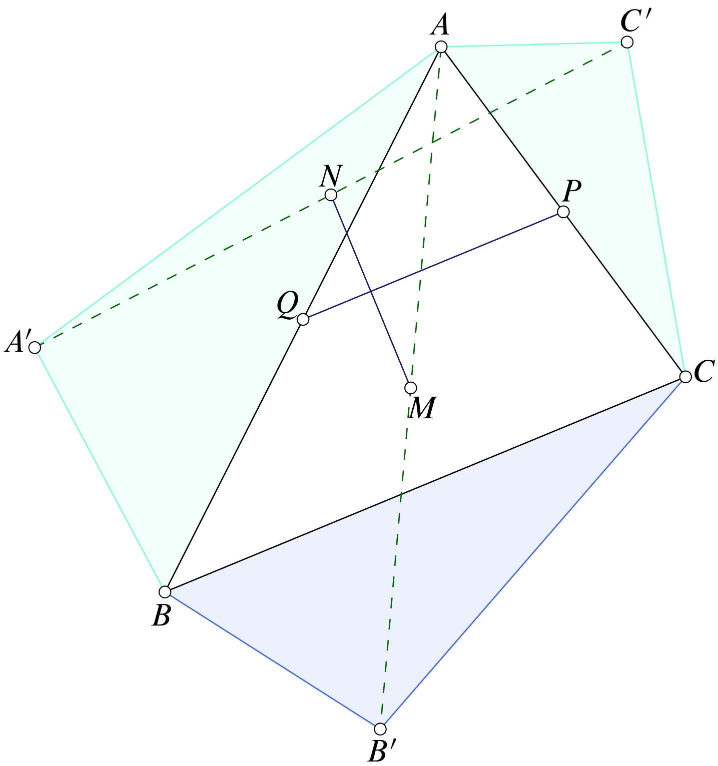
Mở rộng 5. *Tam giác ABA', BCB' và CAC' đồng dạng cùng hướng và M, N, P lần lượt là giao điểm của AB' và BC'; BC' và CA'; CA' và AB'. Chứng minh rằng nếu $AB' = BC' = CA'$ thì MNP là tam giác đều (hoặc M, N, P trùng nhau).*



Mở rộng 6. *Cho tứ giác $ABCD$, vẽ cùng bên ngoài (hoặc cùng bên trong) tứ giác này các hình vuông có các cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA và gọi tâm các hình vuông tương ứng là A', B', C', D'. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, AB', A'C', BD'$. Chứng minh rằng MP và NQ bằng nhau và vuông góc với nhau.*



Mở rộng 7. *Cho các tam giác ABA', CBB' và CAC', trong đó ABA' và CBB' đồng dạng ngược hướng; ABA' và CAC' đồng dạng cùng hướng. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB', A'C', CA$ và AB. Chứng minh rằng M, N đối xứng nhau qua PQ.*



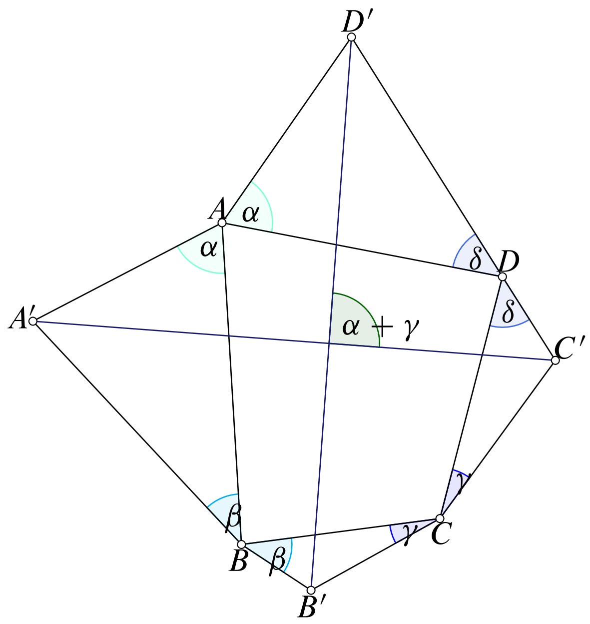
Mở rộng 8. *Cho A, B, C, D là bốn điểm bất kỳ. Vẽ các tam giác ABA', BCB', CDC' và DAD' sao cho*

$$\left(AA'; AB\right) = \left(AD; AD'\right) = \alpha \ (\mathrm{mod}\pi); \quad \left(BB'; BC\right) = \left(BA; BA'\right) = \beta \ (\mathrm{mod}\pi);$$
$$\left(CC'; CD\right) = \left(CB; CB'\right) = \gamma \ (\mathrm{mod}\pi); \quad \left(DD'; DA\right) = \left(DC; DC'\right) = \delta \ (\mathrm{mod}\pi);$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi \ (\mathrm{mod}\pi).$$

Chứng minh rằng

a) $(A'C'; B'D') = \alpha + \gamma \ (\mathrm{mod}\pi)$.

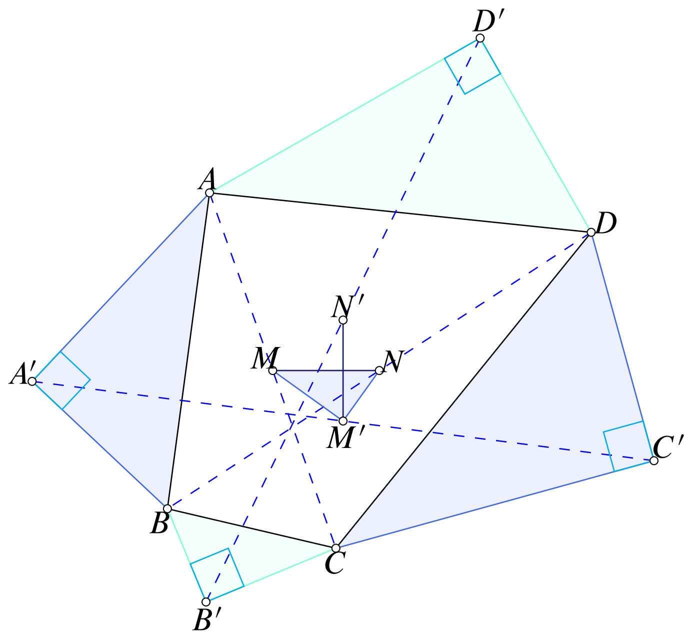
b) $\frac{A'C'}{B'D'} = \frac{\sin(\delta+\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\delta+\gamma)}$.



Mở rộng 9. *Cho A, B, C, D là bốn điểm bất kỳ, ABA' là tam giác vuông tại A'. Vẽ các tam giác CBB', CDC' và ADD' sao cho CBB' và ABA' đồng dạng ngược hướng; CDC' và ABA' đồng dạng cùng hướng; ADD' và ABA' đồng dạng ngược hướng. M, N, M', N' lần lượt là trung điểm của $AC, BD, A'C', B'D'$. Chứng minh rằng*

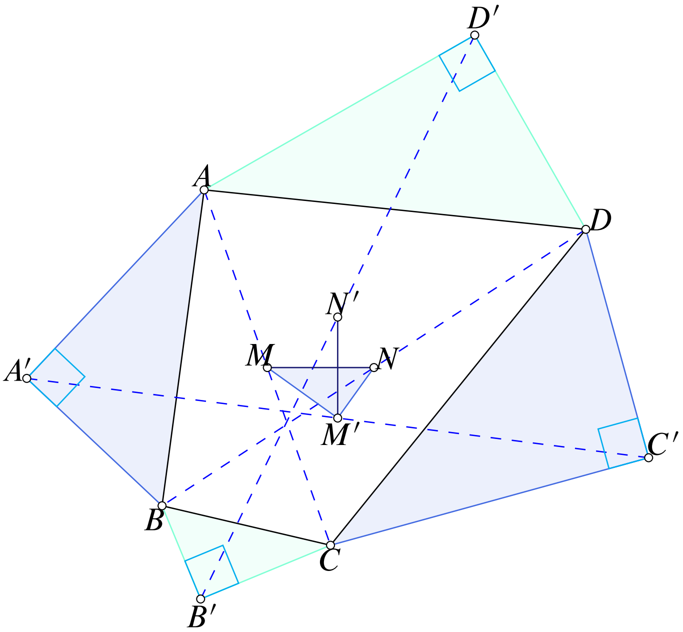
a) Tam giác MNM' và ABA' đồng dạng cùng hướng.

b) MN là trung trực của đoạn thẳng $M'N'$.

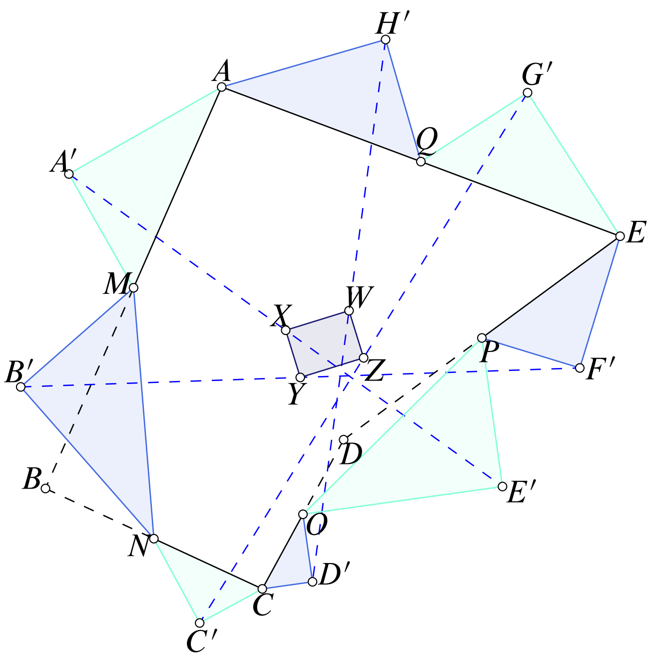


Mở rộng 10. *Cho năm điểm A, B, C, D, E tùy ý, M, N, O, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EA, AMA' là tam giác vuông tại A'. Vẽ các tam giác NCC', OPE', EQG'*

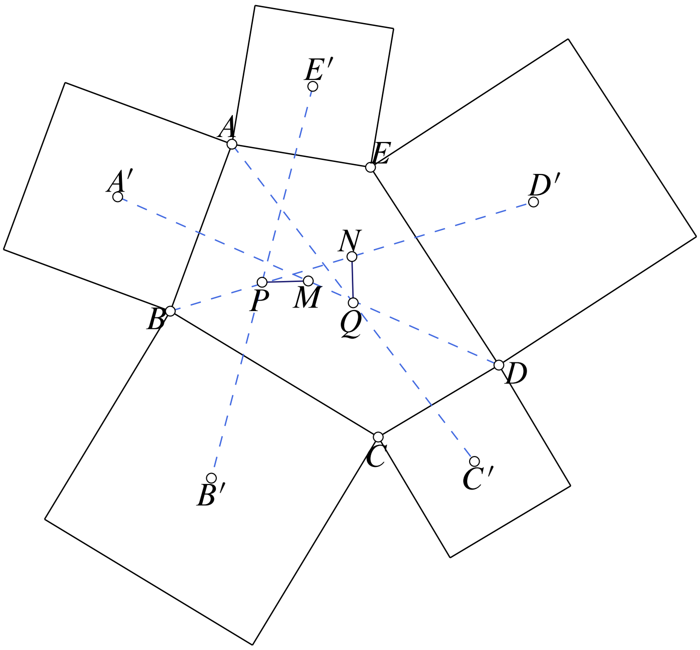
và AMA' đồng dạng cùng hướng. Vẽ các tam giác MNB', COD', PEF', QAH' đồng dạng cùng hướng đồng thời tam giác MNB' và AMA' đồng dạng ngược hướng. X, Y, Z, W lần lượt là trung điểm của $A'E'$, $B'F'$, $C'G'$, $D'H'$. Chứng minh rằng $XYZW$ là hình chữ nhật.



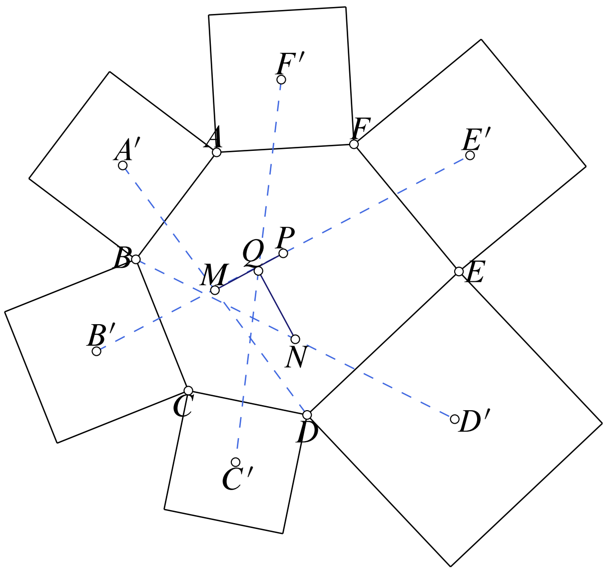
Mở rộng 11. *Cho ngũ giác $ABCDE$. Vẽ cùng bên ngoài (hoặc cùng bên trong) ngũ giác này các hình vuông có các cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DE, EA và gọi tâm của các hình vuông tương ứng là A', B', C', D', E'. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'D$, BD', $B'E'$, AC'. Chứng minh rằng MP và NQ bằng nhau và vuông góc với nhau.*



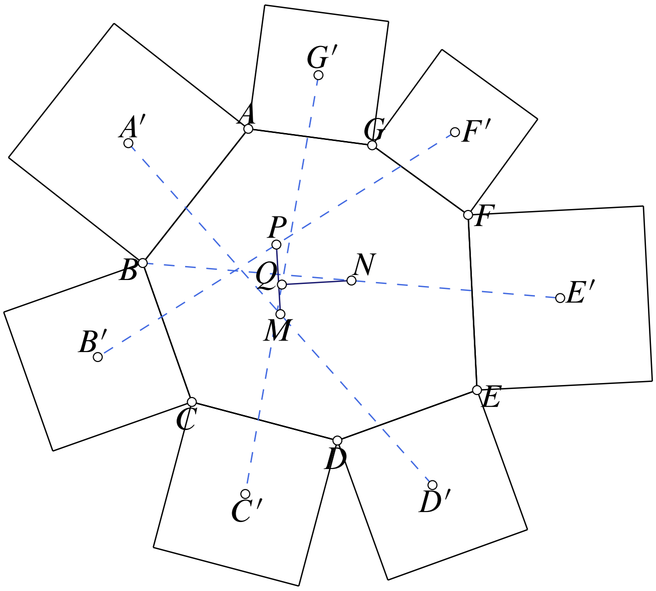
Mở rộng 12. *Cho ngũ giác $ABCDE$. Vẽ cùng bên ngoài (hoặc cùng bên trong) ngũ giác này các hình vuông có các cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DE, EA và gọi tâm của các hình vuông tương ứng là A', B', C', D', E'. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'D, BD', B'E', AC'$. Chứng minh rằng MP và NQ bằng nhau và vuông góc với nhau.*



Mở rộng 13. *Cho lục giác $ABCDEF$. Vẽ cùng bên ngoài (hoặc cùng bên trong) lục giác này các hình vuông có các cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DE, EF, FA và gọi tâm của các hình vuông tương ứng là A', B', C', D', E', F'. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'D, BD', B'E', C'F'$. Chứng minh rằng MP và NQ bằng nhau và vuông góc với nhau.*



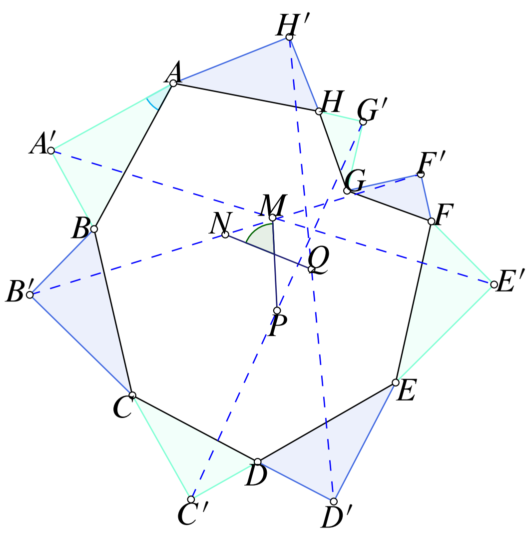
Mở rộng 14. *Cho thất giác $ABCDEFG$. Vẽ cùng bên ngoài (hoặc cùng bên trong) thất giác này các hình vuông có các cạnh lần lượt là $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA$ và gọi tâm của* *các hình vuông tương ứng là A', B', C', D', E', F', G'. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'D'$, BE', $B'F'$, $C'G'$. Chứng minh rằng MP và NQ bằng nhau và vuông góc với nhau.*



Mở rộng 15. *Cho tám điểm A, B, C, D, E, F, G, H tùy ý, ABA' là tam giác vuông tại A'. Vẽ các tam giác CDC', EFE', GHG' và ABA' đồng dạng cùng hướng. Vẽ các tam giác CBB', EDD', GFF', AHH' đồng dạng cùng hướng đồng thời tam giác CBB' và ABA' đồng dạng ngược hướng. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'E', B'F', C'G', D'H'$. Chứng minh rằng*

a) $MP = NQ$.

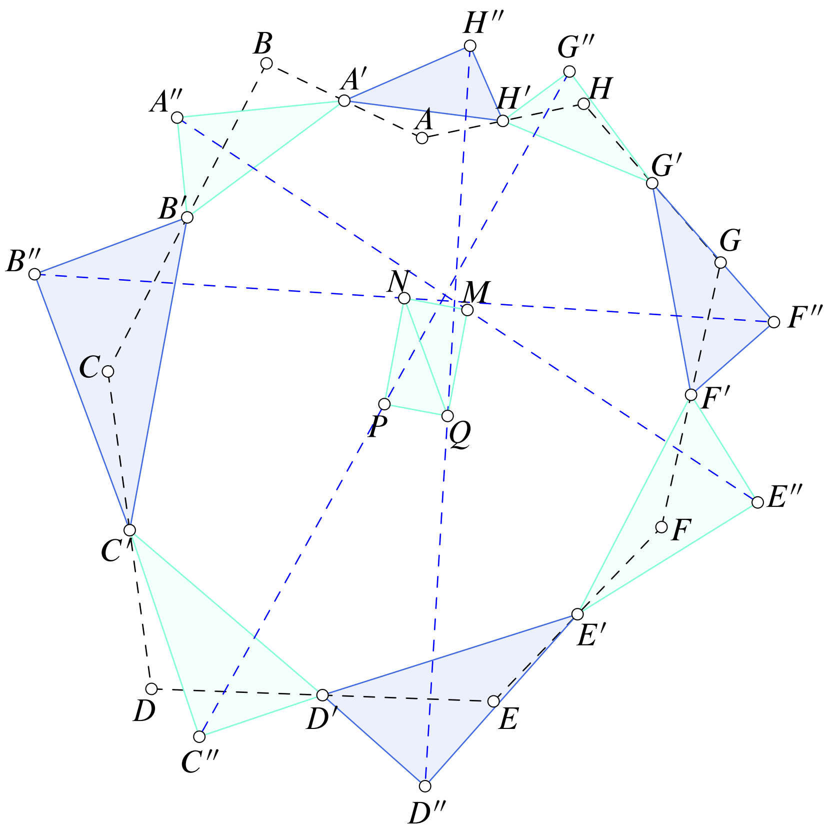
b) $(MP; NQ) = 2(AA'; AB) \pmod{\pi}$.



Mở rộng 16. *Cho tám điểm A, B, C, D, E, F, G, H tùy ý. $A', B', C', D', E', F', G', H'$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA$. Tam giác $A'B'A''$ vuông tại A''. Vẽ các tam giác $C'D'C''$, $E'F'E''$, $G'H'G''$ và $A'B'A''$ đồng dạng cùng hướng. Vẽ các tam giác $C'B'B''$, $E'D'D''$, $G'F'F''$, $A'H'H''$ đồng dạng cùng hướng đồng thời tam giác $C'B'B''$ và $A'B'A''$ đồng dạng ngược hướng. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A''E'', B''F'', C''G'', D''H''$. Chứng minh rằng*

a) Tam giác QNM và $A'B'A''$ đồng dạng cùng hướng.

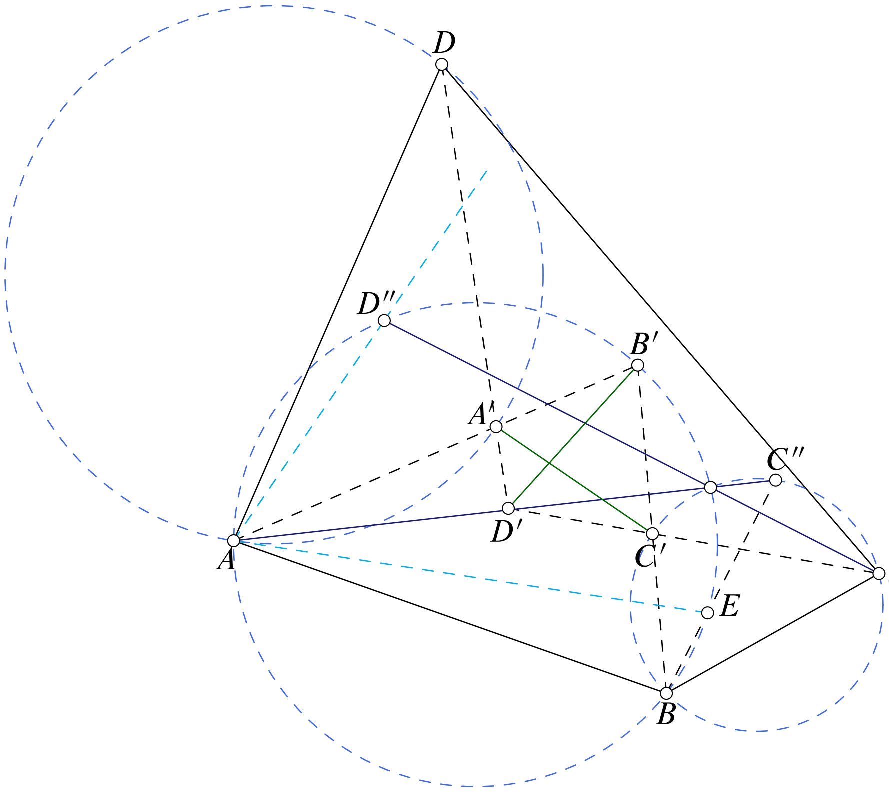
b) $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Mở rộng 17. *Cho tứ giác lồi $ABCD$. Các đường phân giác trong của các góc A, B, C, D không trùng nhau và theo thứ tự cắt nhau tại B', C', D', A'. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (DAA') cắt đường tròn (ABB') tại E (khác A). Đường thẳng BE cắt đường tròn (BCC') tại C'' (khác B). Đường thẳng đối xứng của AE qua AA' cắt (ABB') tại D'' (khác A). Chứng minh rằng*

a) AC'' và CD'' cắt nhau tại một giao điểm của (ABB') và (BCC').

b) $\frac{A'C'}{B'D'} = \frac{AC''}{CD''}$.



4. Áp dụng định lý Van Aubel vào giải một số bài toán liên quan đến tam giác

Bài toán 3. *Cho một tam giác $P_1P_2P_3$, P là một điểm ở trong tam giác đó; P_1P, P_2P, P_3P cắt các cạnh đối diện tại Q_1, Q_2, Q_3. Chứng minh rằng trong các tỉ số $\frac{P_1P}{PQ_1}$, $\frac{P_2P}{PQ_2}$, $\frac{P_3P}{PQ_3}$ có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2 và ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn 2.*

Lời giải. Gọi G là giao điểm của ba đường trung tuyến. Ba trung tuyến P_1L, P_2M, P_3N chia tam giác $P_1P_2P_3$ thành sáu tam giác nhỏ $GP_1M, GP_1N, GP_2N, GP_2L, GP_3L, GP_3M$.

Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trong tam giác nhỏ GP_1M.

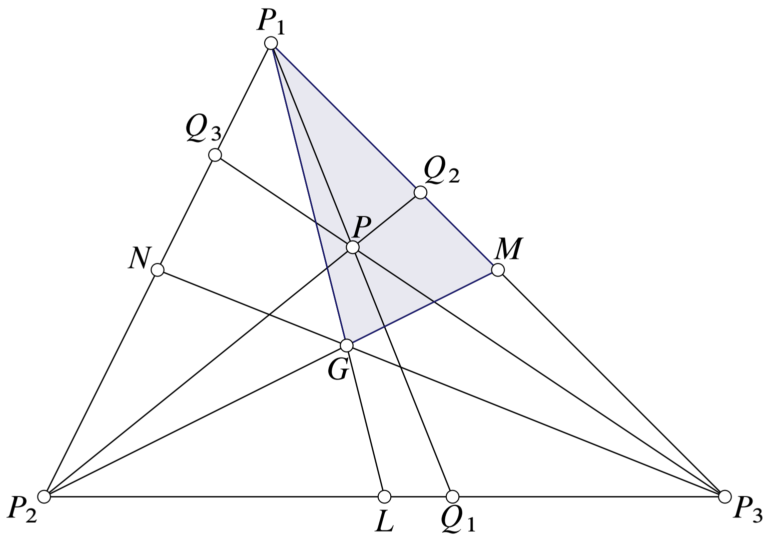
Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{P_1P}{PQ_1} = \frac{P_1Q_2}{Q_2P_3} + \frac{P_1Q_3}{Q_3P_2} \leqslant 2 \text{ (vì } \frac{P_1Q_2}{Q_2P_3} \leqslant 1;\ \frac{P_1Q_3}{Q_3P_2} \leqslant 1).$$

Mặt khác, ta lại có

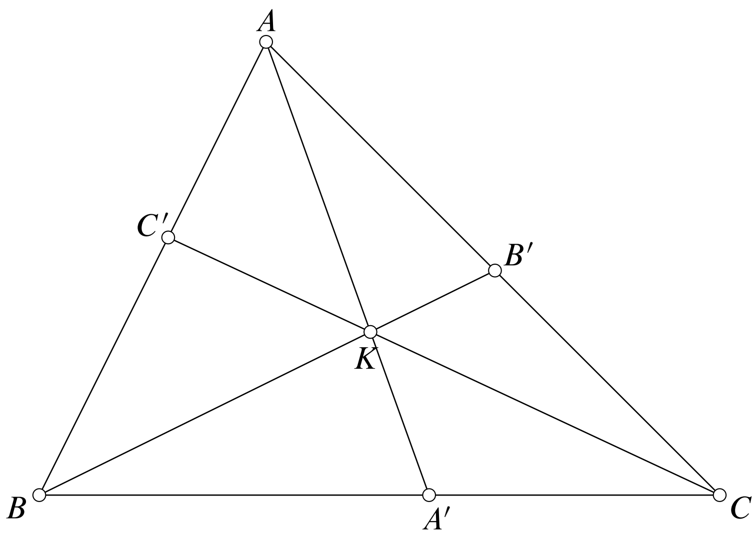
$$\frac{P_2P}{PQ_2} = \frac{P_2Q_3}{Q_3P_1} + \frac{P_2Q_1}{Q_1P_3} \geqslant 2.$$

Dấu bằng ở các biểu thức trên xảy ra khi $P \equiv G$ (khi P là trọng tâm của tam giác $P_1P_2P_3$).



Vậy ta suy ra được điều phải chứng minh. □

Bài toán 4. *Chứng minh rằng hiệu giữa tích ba tỉ số Céva và tổng của chúng là một hằng số, bằng* 2.



Lời giải. Đặt

$$\frac{AB'}{B'C} = m; \quad \frac{CA'}{A'B} = n; \quad \frac{BC'}{C'A} = t.$$

Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = m + \frac{1}{t};$$
$$\frac{BK}{KB'} = \frac{BC'}{C'A} + \frac{BA'}{A'C} = t + \frac{1}{n};$$
$$\frac{CK}{KC'} = \frac{CA'}{A'B} + \frac{CB'}{B'A} = n + \frac{1}{m}.$$

Tổng ba tỷ số

$$S = m + n + t + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{t}.$$

Tích ba tỷ số

$$P = \left(m + \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{n}\right)\left(n + \frac{1}{m}\right) = mnt + \frac{1}{mnt} + m + n + t + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{t}.$$

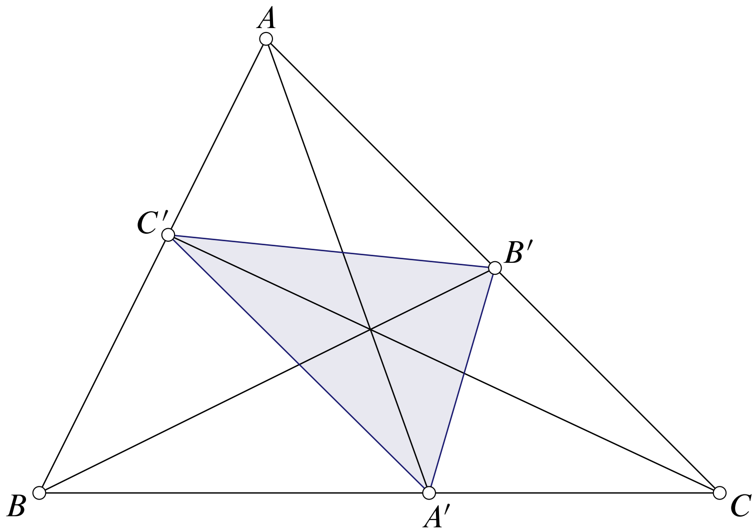
Áp dụng định lý *Céva*, ta có

$$mnt = \frac{1}{mnt} = 1.$$

Vậy $P - S = 2$. □

Bài toán 5. *Xác định diện tích tam giác $A'B'C'$ có các đỉnh là chân của một bộ ba cevian cắt nhau trong một tam giác, theo diện tích S của tam giác ABC và các tỉ số*

$$\frac{AB'}{B'C} = m; \quad \frac{CA'}{A'B} = n; \quad \frac{BC'}{C'A} = t.$$



Lời giải. Ta có

$$S_{A'B'C'} = S\left(1 - \frac{S_{AB'C'}}{S} - \frac{S_{BA'C'}}{S} - \frac{S_{CA'B'}}{S}\right).$$

Theo bổ đề quen thuộc, ta có

$$\frac{S_{AB'C'}}{S} = \frac{AB'.AC'}{AC.AB} = \frac{AB'}{AB' + B'C}.\frac{AC'}{AC' + C'B} = \frac{m}{1+m}.\frac{1}{1+t}.$$

Tương tự,

$$\frac{S_{BA'C'}}{S} = \frac{t}{1+t}.\frac{1}{1+n}; \quad \frac{S_{CA'B'}}{S} = \frac{n}{1+n}.\frac{1}{1+m}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
S_{A'B'C'} &= S\left[1 - \frac{m}{(1+m)(1+t)} - \frac{t}{(1+t)(1+n)} - \frac{n}{(1+n)(1+m)}\right] \\
&= S.\frac{1+mnt}{(1+m)(1+n)(1+t)} \\
&= \frac{2S}{(1+m)(1+n)(1+t)} \text{ (vì } mnt = 1).
\end{aligned}$$

□

Các trường hợp đặc biệt

1. Các *cevian* là các *cevian trọng tâm*:

$$\begin{aligned}
&m = n = t = 1; \\
&S_{A'B'C'} = \frac{S}{4}.
\end{aligned}$$

2. Các *cevian* là các *cevian tâm đường tròn nội tiếp*:

$$\begin{aligned}
&m = \frac{c}{a}, \quad n = \frac{b}{c}, \quad t = \frac{a}{b}; \\
&S_{A'B'C'} = \frac{2Sabc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.
\end{aligned}$$

3. Các *cevian* là các *cevian trực tâm*:

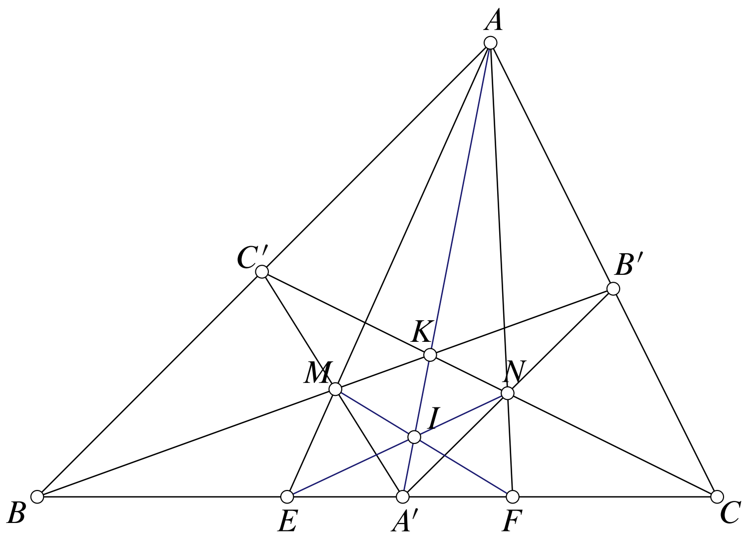
$$\begin{aligned}
&m = \frac{c\cos A}{a\cos C}, \quad n = \frac{b\cos C}{c\cos B}, \quad t = \frac{a\cos B}{b\cos A}; \\
&S_{A'B'C'} = \frac{2Sabc\cos A\cos B\cos C}{(b\cos A + a\cos B)(c\cos B + b\cos C)(a\cos C + c\cos A)}; \\
&S_{A'B'C'} = 2S\cos A\cos B\cos C. \\
&(\text{vì } c\cos B + b\cos C = a,\ a\cos C + c\cos A = b,\ b\cos A + a\cos B = c).
\end{aligned}$$

4. Khi các *cevian* là các *cevian Gergonne*, các *cevian Nagle*, tính $S_{A'B'C'}$?

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC, trên ba cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại K. Gọi N, M lần lượt là giao điểm của $A'B'$ và CC', $A'C'$ và BB'. Tia AM, tia AN lần lượt cắt BC tại E, F. Chứng minh rằng*

a) EN, FM, AA' đồng quy tại I.

b) $IA.KA' = 3IA'.KA$.



Lời giải. a) Áp dụng định lý *Menelaus* cho tam giác ABE với cát tuyến $A'MC'$, ta có

$$\frac{AM}{ME}\cdot\frac{EA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1\Rightarrow\frac{AM}{ME}=\frac{C'A}{BC'}\cdot\frac{A'B}{EA'}.$$

Áp dụng định lý *Menelaus* cho tam giác AFC với cát tuyến $A'NB'$, ta có

$$\frac{FN}{NA}\cdot\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'F}=1\Rightarrow\frac{FN}{NA}=\frac{A'F}{CA'}\cdot\frac{B'C}{AB'}.$$

Theo định lý *Céva*, ta suy ra được

$$\frac{AM}{ME}\cdot\frac{EA'}{A'F}\cdot\frac{FN}{NA}=\left(\frac{C'A}{BC'}\cdot\frac{A'B}{EA'}\right)\cdot\frac{EA'}{A'F}\cdot\left(\frac{A'F}{CA'}\cdot\frac{B'C}{AB'}\right)=\frac{C'A}{BC'}\cdot\frac{A'B}{CA'}\cdot\frac{B'C}{AB'}=1.$$

Áp dụng định lý *Céva đảo*, ta có AA', EN, FM đồng quy tại I.

b) Áp dụng định lý *Van Aubel* cho tam giác ABA', ACA', AEF, ta có

$$\frac{AM}{ME}=\frac{AK}{KA'}+\frac{AC'}{C'B}; \tag{1}$$

$$\frac{AN}{NF}=\frac{AK}{KA'}+\frac{AB'}{B'C}; \tag{2}$$

$$\frac{AI}{IA'}=\frac{AM}{ME}+\frac{AN}{NF}. \tag{3}$$

Thay (1) và (2) vào (3) ta được

$$2\frac{AK}{KA'}+\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}=\frac{AI}{IA'}. \tag{4}$$

Áp dụng định lý *Van Aubel* cho tam giác ABC, ta có

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{AK}{KA'}.$$

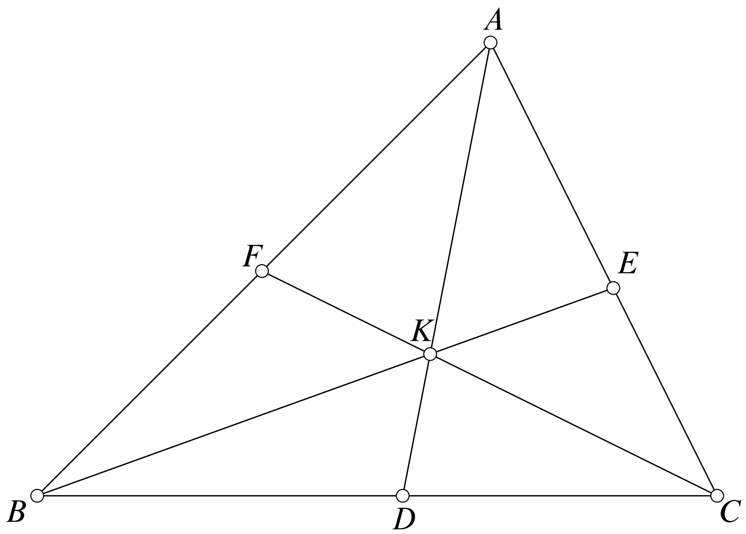
Thay vào (4) ta được

$$3\frac{AK}{KA'} = \frac{AI}{IA'} \Rightarrow 3IA'.AK = KA'.AI.$$

□

Bài toán 7. *Cho K là điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AK và BC; BK và AC; CK và AB. Chứng minh rằng*

$$\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{CK}{KF} \geqslant 6.$$



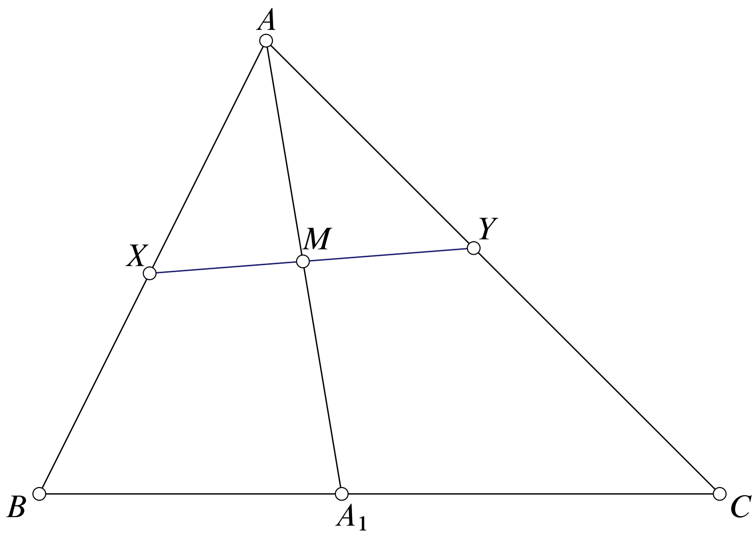
Lời giải. Áp dụng định lý *Van Aubel* cho tam giác *ABC*, ta có

$$\frac{AK}{KD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}; \quad \frac{BK}{KE} = \frac{FB}{AF} + \frac{BD}{DC}; \quad \frac{KC}{FK} = \frac{EC}{AE} + \frac{DC}{BD}.$$

Cộng vế theo vế của các đẳng thức trên, ta được

$$\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{KC}{FK} = \left(\frac{AE}{EC} + \frac{EC}{AE}\right) + \left(\frac{AF}{FB} + \frac{FB}{AF}\right) + \left(\frac{BD}{DC} + \frac{DC}{BD}\right) \underset{AM-GM}{\geqslant} 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi E, F, D lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, AB, BC (khi K là trọng tâm của tam giác ABC). □



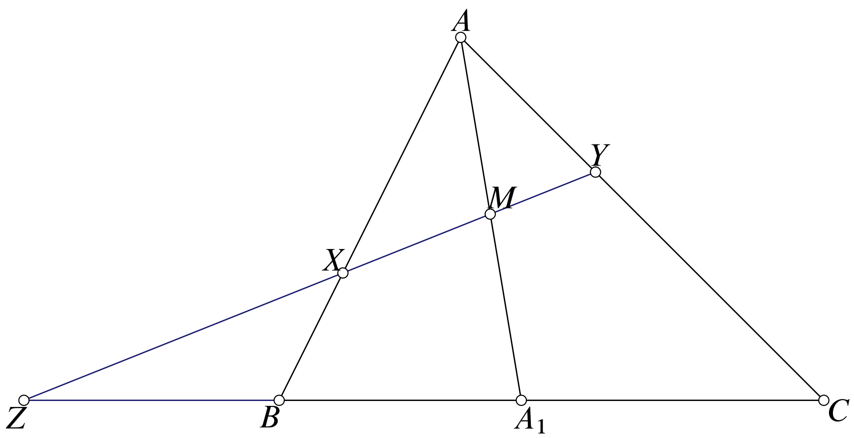
Bài toán 8. *Cho tam giác ABC, A_1 là điểm trên cạnh BC sao cho $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\alpha}{\beta}$. Gọi X và Y lần lượt là các điểm trên cạnh AB và AC, M là giao điểm của đoạn thẳng XY với AA_1. Chứng minh rằng*

$$\alpha\frac{YC}{YA} + \beta\frac{XB}{XA} = (\alpha + \beta)\frac{A_1M}{MA}.$$

Lời giải. Đầu tiên giả sử rằng XY song song với BC. Khi đó

$$\frac{XB}{XA} = \frac{YC}{YA} = \frac{MA_1}{MA}$$

nên kết quả đúng với mọi β, γ.



Giả sử XY và BC cắt nhau tại Z.

Áp dụng định lý *Menelaus* cho tam giác AA_1B với cát tuyến MXZ, ta có

$$\frac{YC}{YA}.\frac{MA}{MA_1}.\frac{ZA_1}{ZC} = 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\beta\frac{XB}{XA}+\gamma\frac{YC}{YA} &= \beta\frac{MA_1.ZB}{MA.ZA_1}+\gamma\frac{MA_1.ZC}{MA.ZA_1}\\
&= \frac{MA_1}{MA.ZA_1}(\beta ZB+\gamma ZC)\\
&= \frac{MA_1}{MA.ZA_1}(\beta ZA_1-\beta BA_1+\gamma ZA_1+\gamma A_1C)\\
&= (\beta+\gamma)\frac{MA_1}{MA.ZA_1}ZA_1 \text{ (vì } \frac{A_1B}{A_1C}=\frac{\gamma}{\beta})\\
&= (\beta+\gamma)\frac{MA_1}{MA}.
\end{aligned}$$

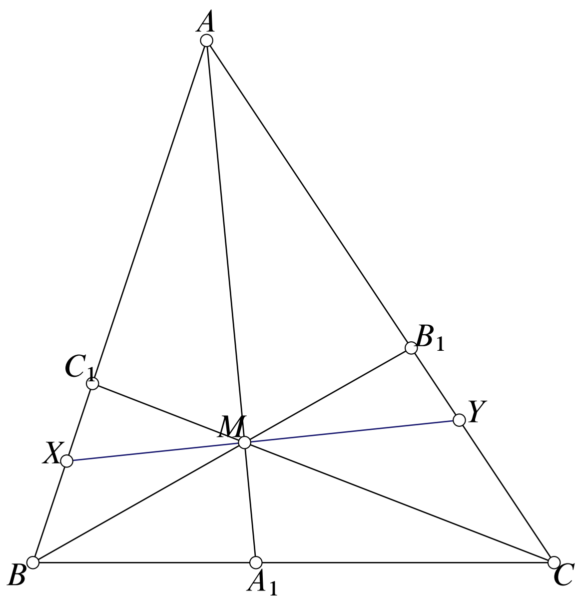
□

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC có ba cevian AA_1, BB_1, CC_1 giao nhau tại M. Giả sử*

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{\gamma}{\beta};\quad \frac{B_1C}{B_1A}=\frac{\alpha}{\gamma};\quad \frac{C_1A}{C_1B}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Nếu X và Y lần lượt là hai điểm trên cạnh AB và AC thì M nằm trên đoạn XY khi và chỉ khi

$$\beta\frac{XB}{XA}+\gamma\frac{YC}{YA}=\alpha.$$



Lời giải. Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AM}{A_1M}=\frac{AC_1}{C_1B}+\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}.$$

Bây giờ giả sử M nằm trên đoạn XY. Theo *bài toán 8*, ta được

$$\beta\frac{XB}{XA}+\gamma\frac{YC}{YA}=(\beta+\gamma)\frac{A_1M}{MA}=(\beta+\gamma)\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\alpha.$$

Ngược lại, giả sử XY và AA_1 giao nhau tại M'. Ta sẽ chỉ ra M' trùng với M.

Theo *bài toán 8*, ta có

$$\beta\frac{XB}{XA}+\gamma\frac{YC}{YA}=(\beta+\gamma)\frac{A_1M'}{M'A}.$$

Theo giả thiết, ta có

$$\beta\frac{XB}{XA}+\gamma\frac{YC}{YA}=\alpha.$$

Do đó

$$\frac{A_1M}{AM}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}.$$

nên M và M' trùng nhau. Do đó M phải nằm trên đoạn XY. □

Hệ quả 6. *Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\alpha=\beta=\gamma=1$, và G nằm trên đường thẳng XY khi và chỉ khi*

$$\frac{XB}{XA}+\frac{YC}{YA}=1.$$

Hệ quả 7. *Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì các giá trị của α,β và γ được xác định bằng độ dài các cạnh của tam giác*

$$\alpha=a;\quad \beta=b;\quad \gamma=c.$$

Do đó I nằm trên đường thẳng XY khi và chỉ khi

$$b\frac{XB}{XA}+c\frac{YC}{YA}=a.$$

Hệ quả 8. *Nếu H là trực tâm của tam giác ABC thì tỉ số các cạnh được xác định bởi*

$$\alpha=\tan\angle BAC;\quad \beta=\tan\angle ABC;\quad \gamma=\tan\angle ACB.$$

Khi đó H nằm trên đường thẳng XY khi và chỉ khi

$$\frac{XB}{XA}\tan\angle ABC+\frac{YC}{YA}\tan\angle ACB=\tan\angle BAC.$$

Bài tập rèn luyện

Bài tập 4. Nếu ba đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại một điểm K nằm trong tam giác ABC thì
$$\frac{KA'}{AA'} + \frac{KB'}{BB'} + \frac{KC'}{CC'} = 1 \text{ và } \frac{AK}{AA'} + \frac{BK}{BB'} + \frac{CK}{CC'} = 2.$$
Bài tập 5. Từ các đỉnh A, B, C của một tam giác ABC, kẻ các đường thẳng lần lượt song song với các cạnh $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng này đồng quy thì các đường thẳng kẻ từ A', B', C' và theo thứ tự song song với BC, CA, AB cũng đồng quy.

Bài tập 6. Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H, M, N sao cho ba đoạn thẳng AH, BM, CN đồng quy tại G. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HN và BM, HM và CN. Tia AP và tia AQ cắt cạnh BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng
$$\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 3\left(\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}\right).$$

Khi G là trung điểm AH, tính $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF}$.

Bài tập 7. (Intervarsity Ireland 2006) Cho tam giác ABC, X và Y lần lượt là các điểm trên cạnh AB và AC sao cho đường thẳng XY chia đôi diện tích tam giác, các điểm X và Y chia đôi chu vi tam giác ABC. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp I nằm trên đoạn XY.

Tài liệu tham khảo

[1] BÀI TOÁN HAY - LỜI GIẢI ĐẸP - ĐAM MÊ TOÁN HỌC
https://www.facebook.com/groups/652284361511408.

[2] MATH WARS PROJECT
https://www.facebook.com/Math-Wars-Project-108594537589543.

[3] NGUYỄN ĐÌNH HUY (2018), *Định lý Van Aubel và ứng dụng trong việc giải một số bài toán hình học dành cho học sinh giỏi*, Luận văn Thạc sĩ toán học, Trường Đại học Thái Nguyên.

[4] NGUYỄN NGỌC GIANG (2015) , *Sáng tạo với định lí van Aubel*, TP. Hồ Chí Minh.

[5] TRẦN XUÂN BANG, *Đường tròn bàng tiếp trong tam giác*, Trường THPT Chuyên Quảng Bình.

[6] YUTAKA NISHIYAMA (2011), *The beautiful geometric theorem of Van Aubel*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 66(1), 71-80.

ỨNG DỤNG CỦA TRƯỜNG HỮU HẠN VÀO GIẢI BÀI TOÁN DÃY SỐ

Dương Thái Bảo
Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp

GIỚI THIỆU

Sự khác biệt lớn nhất giữa tập số nguyên và tập số hữu tỉ hay số thực là ở chỗ **phép chia**. Bản chất của phép chia là phải có nghịch đảo. Rộng ra hơn một tí, chúng còn sự khác biệt ở phép toán lấy căn bậc hai. Chính vì phép chia và phép lấy căn không thực hiện được (chỉ một vài trường hợp đặc biệt như nghịch đảo của ± 1 hay căn bậc hai của số chính phương) nên khi gặp một số bài toán dãy số mà ở đó công thức tổng quát có chứa căn chúng ta lại không thể sử dụng đồng dư. Những trở ngại này buộc chúng ta đưa bài toán từ xét trên tập số nguyên về trường hữu hạn $\mathbb{Z}_p$ hay trường mở rộng $\mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$ với d không thặng dư chính phương modulo p. Thế nhưng trong bài viết này chúng ta cũng sẽ tiếp cận theo hướng dẫn dắt học sinh (đối tượng chưa được học về các khái niệm nhóm, vành, trường) nắm được tinh thần của trường hữu hạn.

1. Trường hữu hạn $\mathbb{Z}_p$

Bây giờ ta xét $n > 1$ là số nguyên và tập

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}^1.$$

Tập trên cũng có thể hiểu là hệ thặng dư đầy đủ modulo n. Lấy $x, y \in \mathbb{Z}_n$, ta định nghĩa

- $x \pm y = z$ với z là số dư của $x \pm y$ khi chia cho n.
- $xy = z$ với z là số dư của xy khi chia cho n.

[1] Ở một số tài liệu vẫn kí hiệu $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Cách định nghĩa các phép toán này hoàn toàn dựa trên phép toán của đồng dư. Hơn nữa, $x \pm y, xy \in \mathbb{Z}_n$ với mọi $x, y \in \mathbb{Z}_n$ - *tính chất đóng*. Lúc này tập $\mathbb{Z}_n$ cùng với hai phép toán "+" và "×" được gọi là *vành* $\mathbb{Z}_n$. Bạn đọc hãy thử so sánh giữa $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Z}_n$. Mỗi người sẽ có một sự so sánh khác nhau, tuy nhiên chúng ta sẽ có cảm nhận $\mathbb{Z}_n$ như một sự phân hoạch $\mathbb{Z}$ thành n lớp: i là lớp các số chia n dư i. Do đó thay vì làm việc trên toàn bộ tập $\mathbb{Z}$ ta chỉ cần làm việc với số đại diện $0, 1, \ldots, n-1$.

Tập $\mathbb{Z}$ có một "điểm yếu": mỗi số thuộc $\mathbb{Z}$ không có nghịch đảo, chẳng hạn phương trình $ax = 1$ vô nghiệm trên $\mathbb{Z}$ nếu $a \neq \pm 1$. Bản thân $\mathbb{Z}_n$ cũng chẳng khá hơn: với $n = 6$, số 4 không có nghịch đảo trong $\mathbb{Z}_6$ vì phương trình $4x \equiv 1 \pmod 6$ vô nghiệm. Trái lại, 5 có nghịch đảo là 5 vì $5 \times 5 \equiv 1 \pmod 6$. Khái niệm nghịch đảo hoàn toàn giống như khái niệm nghịch đảo theo modulo n. Vì thế số phần tử khả nghịch trong $\mathbb{Z}_n$ là $\varphi(n)$.

Chúng ta biết rằng $\varphi(n) \leqslant n-1$, dấu "=" chỉ xảy ra khi và chỉ khi n là số nguyên tố. Khi n là một số nguyên tố thì ta nói $\mathbb{Z}_n$ là *trường* $\mathbb{Z}_n$ - *mọi số khác không đều khả nghịch*. Xét p là số nguyên tố, lấy $x, y \in \mathbb{Z}_p$ với $y \neq 0$, ta định nghĩa *"phép chia"* như sau: $\frac{x}{y} = z$ với z là tích của x với nghịch đảo của y (theo mod p). Ở đây $y \neq 0$ ta có thể hiểu là $p \quad y$, do đó y có nghịch đảo.

Sau khi mô tả được tập $\mathbb{Z}_p$ có hai phép toán cơ bản là cộng và nhân, chúng ta sẽ nói thêm một tí về việc chuyển khái niệm trên $\mathbb{Z}$ sang khái niệm trên $\mathbb{Z}_p$: với $a \in \mathbb{Z}$, khi đó

- $p \mid a$ khi và chỉ khi $a = 0$ trên $\mathbb{Z}_p$.
- $a \equiv b \pmod p$ khi và chỉ khi $a = b$ trên $\mathbb{Z}_p$.
- a là thặng dư chính phương modulo p khi và chỉ khi tồn tại $x \in \mathbb{Z}_p$ thỏa $a = x^2$.
- $p \quad a$ khi và chỉ khi tồn tại $a' \in \mathbb{Z}_p$ sao cho $aa' = 1$ (a' cũng chính là nghịch đảo theo modulo p).

Nghiệm nguyên thủy g của modulo p có tính chất

$$\{g, g^2, \ldots, g^{p-1}\}$$

là hệ thặng dư thu gọn mod p. Điều này viết lại thành

Định lý 1. *Tồn tại một số $x \in \mathbb{Z}_p^*$ sao cho*

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x, x^2, \ldots, x^{p-1}\}.$$

Số x ở đây còn được gọi là *phần tử sinh* của $\mathbb{Z}_p^*$.

Ví dụ 1 (VMO 2011). *Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn*

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = -1 \\ a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_{2011} - 2010 \,\vdots\, 2011.$

Bài toán hoàn toàn có thể giải dựa vào công thức tổng quát của dãy

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(7-2\sqrt{14})(3+\sqrt{14})^n + (7+2\sqrt{14})(3-\sqrt{14})^n}{14} \\ &= \frac{(-7+\sqrt{14})(3+\sqrt{14})^{n-1} - (7+\sqrt{14})(3-\sqrt{14})^{n-1}}{14} \\ &= -u_n + 2v_n \end{aligned}$$

với

$$u_n = \frac{(3+\sqrt{14})^{n-1} + (3-\sqrt{14})^{n-1}}{2}, v_n = \frac{(3+\sqrt{14})^{n-1} - (3-\sqrt{14})^{n-1}}{2\sqrt{14}}.$$

Từ đây xét đồng dư theo từng dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$.

Công việc trên có điểm chưa hay là việc tách u_n và v_n, hơn nữa việc tổng quát của bài toán sẽ khó khăn. Bây giờ ta sẽ xét dãy $\{a_n\}$ trên trường $\mathbb{Z}_p$. Ấy thế, để cho người đọc dễ dàng tiếp cận, chúng ta sẽ viết dưới dạng đồng dư.

Xét phương trình đồng dư $X^2 - 6X - 5 \equiv 0 \pmod{p}$, khi đó $(X-3)^2 \equiv 14 \pmod{p}$. Ta dễ dàng kiểm tra được 14 là thặng dư bậc hai modulo p (dùng tính chất của kí hiệu Legendre). Tức là tồn tại $a \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$ sao cho $a^2 \equiv 14 \pmod{p}$. Lúc này phương trình đang xét có hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} X \equiv 3+a \pmod{p} \\ X \equiv 3+a \pmod{p} \end{array}\right. .$$

Tiếp theo ta xét dãy $\{X_n\}$ thỏa $X_n = c_1(3+a)^n + c_2(3-a)^n$ với mọi $n \geqslant 0$, trong đó c_1, c_2 là hai số nguyên ta sẽ chọn để

$$\begin{cases} X_0 \equiv 1 \pmod{p} \\ X_1 \equiv -1 \pmod{p} \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} c_1 \equiv \frac{a-4}{2a} \pmod{p} \\ c_2 \equiv \frac{a+4}{2a} \pmod{p} \end{cases}$$

Bằng qui nạp ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$X_{n+2} \equiv 6X_{n+1} + 5X_n \pmod p \quad \text{và} \quad a_n \equiv X_n \pmod p, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Tuy nhiên, ta có

$$\begin{aligned} X_p &= c_1(3+a)^p + c_2(3-a)^p \\ &\equiv c_1(3+a) + c_2(s-a) \pmod p \\ &\equiv \frac{(a-4)(3+a)}{2a} + \frac{(a+4)(3-a)}{2d} \pmod p \\ &\equiv -1 \pmod p. \end{aligned}$$

Vậy $a_p - (p-1)$ chia hết cho p.

Trong ý tưởng thực hiện lời giải trên, cách tìm dãy $\{X_n\}$ thực ra là chúng ta đang tìm $\{a_n\}$ trên trường $\mathbb{Z}_p$. Lúc này có một điều thú vị $\sqrt{14}$ không là số nguyên tuy nhiên nó lại "tồn tại" trong $\mathbb{Z}_p$! Vậy trong $\mathbb{Z}_n$ có căn bậc m của một số nguyên? Xét $n, m > 1$ là hai số nguyên.

Định nghĩa 1. *Cho a là số nguyên, nếu phương trình đồng dư $X^m \equiv a \pmod n$ có nghiệm thì ta nói a có căn bậc m trong $\mathbb{Z}_n$. Kí hiệu $\sqrt[m]{a}$ là một căn bậc m của a theo mod n.*

Nhận xét 1. Cho p là số nguyên tố, khi đó nếu a là thặng dư chính phương mod p thì a có căn bậc hai trong $\mathbb{Z}_p$. Ngược lại a không có căn bậc hai.

Việc dùng kí hiệu căn ở đây là dạng hình thức. Tuy nhiên các tính chất của mũ trong $\mathbb{Z}_n$ có thể thực hiện như trong tập số thực. Điển hình nhất, ở ví dụ trên, việc kí hiệu $\frac{a+4}{2a}$ chỉ là hình thức. Chúng ta phải hiểu đó là tích của $a+4$ với nghịch đảo của $2a$ theo mod p. Việc tương đồng về phép toán giữa tập số hữu tỉ và $\mathbb{Z}_p$ cho phép chúng ta viết như thế.

Chúng ta biết rằng số nguyên a làm cho phương trình $X^2 \equiv a \pmod p$ với p là số nguyên tố, có nghiệm thì a được gọi là thặng dư chính phương. Tuy nhiên ở khía cạnh ngược lại, nghiệm của phương trình này thì chưa được khai thác nhiều.

Ví dụ 2 (VMO 2020). *Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_2 = 13$ và*

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \text{ với mọi } n \geqslant 2$$

Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố của a_{2^k} thì $p-1$ chia hết cho 2^{k+1} với mọi số tự nhiên k.

Ví dụ 3. *Cho k là số nguyên dương và dãy số $\{x_n\}$ thỏa*

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 3 \\ x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n, \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}.$$

Gọi p là ước nguyên tố lẻ của x_{2^k}. Chứng minh rằng *a)* *2 là thặng dư chính phương mod p.*

b) 2^{k+3} *là ước của* $p-1$.

Trong hai bài này thì bài sau khó hơn ở chỗ phương trình đặc trưng cho nghiệm vô tỉ. Tuy nhiên chúng ta vẫn có cách khắc phục để lời giải bài sau **không khác gì mấy** lời giải bài trước.

Lời giải. Ta có công thức tổng quát của dãy số

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Từ đây ta có

$$2x_{2^{k-1}}^2 = 1 + x_{2^k}^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

suy ra 2 là thặng dư chính phương mod p.

Xét phương trình đồng dư $X^2 - 6X + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, khi đó $(X-3)^2 \equiv 8 \pmod{p}$. Do 2 cũng là thặng dư chính phương mod p nên tồn tại số nguyên a để $a^2 \equiv 2 \pmod{p}$. Lúc này nghiệm của phương trình là

$$\left[\begin{array}{ll} X \equiv 3+2a & \pmod{p} \\ X \equiv 3-2a & \pmod{p} \end{array}\right. .$$

Chú ý rằng $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 \equiv 3 + 2a \pmod{p}$, tương tự ta có $(a-1)^2 \equiv 3 - 2a \pmod{p}$.

Xét dãy $\{X_n\}$ thỏa $X_n = c_1(1+a)^{2n} + c_2(1-a)^{2n}$ với mọi $n \geqslant 0$, trong đó c_1, c_2 là hai số nguyên thỏa

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \equiv 1 \pmod{p} \\ c_1(3+2a) + c_2(3-2a) \equiv 3 \pmod{p} \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} c_1 \equiv \frac{1}{2} \pmod{p} \\ c_2 \equiv \frac{1}{2} \pmod{p} \end{cases} .$$

Gọi c là nghịch đảo của 2 theo mod p, $x = 1 + a$ và $y = 1 - a$. Ta có

$$X_n = c\left(x^{2n} + y^{2n}\right), \quad \forall n \geqslant 0.$$

Dễ dàng nhận thấy $X_{n+1} = 6X_{n+1} - X_n$ và $x_n \equiv X_n \pmod{p}$ với mọi $n \geqslant 0$.

Đặt $h = \operatorname{ord}_p(x)$, vì $x^2y^2 \equiv 1 \pmod{p}$ nên

$$X_{2^k} \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow x^{2^{k+1}} + y^{2^{k+1}} \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow x^{2^{k+2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

suy ra
$$x^{2^{k+3}} \equiv 1 \pmod{p}.$$
Rõ ràng $h \mid 2^{k+3}$, nếu $h = 2^t$ với $t \leqslant k+2$ thì do $x^{2^t} \equiv 1 \ (p)$ nên ta cứ bình phương s lần để được $t + s = k + 2$, lúc này ta có điều mâu thuẫn. Vậy $h = 2^{k+3}$. □

2. Trường hữu hạn $\mathbb{F}_{p^2}$

Xét p là số nguyên tố lẻ và số nguyên dương d không là thặng dư chính phương modulo p. Đặt
$$\mathbb{F}_{p^2} := \mathbb{Z}_p[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}_p\}.$$
rõ ràng $\mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$ có đúng p^2 phần tử. Chúng ta định nghĩa các phép toán trên $\mathbb{F}_{p^2}$ như sau: $x = a + b\sqrt{d}$, $y = m + n\sqrt{d} \in \mathbb{F}_{p^2}$

- $x = y$ khi và chỉ khi $a = m, b = n$.
- $x \pm y = a \pm m + (b \pm n)\sqrt{d}$.
- $xy = am + bnd + (an + bm)\sqrt{d}$

Từ định nghĩa này chúng ta thấy rằng: với mọi $x, y \in \mathbb{F}_{p^2}$ thì

∘ $x \pm y \in \mathbb{F}_{p^2}$.

∘ $xy \in \mathbb{F}_{p^2}$.

Lúc này xét $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$, tức là tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}_p$ không đồng thời bằng 0 sao cho $x = a + b\sqrt{d}$. Khi đó $a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}^*_p$. Thật vậy, nếu $a^2 - db^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$ thì $a^2 - db^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Nếu $b = 0$ thì suy ra $a = 0$ (mâu thuẫn với $x \neq 0$), do đó $b \neq 0$. Vì thế ta có
$$d \equiv \left(ab^{-1}\right)^2 \pmod{p}$$
Điều này mâu thuẫn với giả thiết d không là thặng dư chính phương. Tiếp đến ta xét
$$y = \left(a^2 - db^2\right)^{-1}(a - b\sqrt{d}) \in \mathbb{F}^*_{p^2}$$
suy ra $xy = 1$. Điều này chứng tỏ nếu $x \neq 0$ thì x luôn có nghịch đảo trong $\mathbb{F}_{p^2}$. Điều này giúp cho $\mathbb{F}_{p^2}$ có tính chất hoàn toàn tương tự như $\mathbb{Z}_p$, vì thế nó cũng được gọi là trường.

Trong $\mathbb{Z}_p$, mọi số khác 0 đều có cấp và cấp của nó là ước của $p-1$. Lấy bất kì $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$, xét dãy

$$x, x^2, \ldots, x^{p^2-1}.$$

lúc này các số trên đều thuộc $\mathbb{F}^*_{p^2}$. Nếu tồn tại $x^n = 1$ thì ta chọn ra số n bé nhất thỏa mãn điều này. Ngược lại, tồn tại $n < m$ sao cho $x^m = x^n$, kéo theo theo $x^{m-n} = 1$. Vì thế ta sẽ luôn chọn được số nguyên dương bé nhất để $x^n = 1$, rõ ràng $n \leqslant p^2 - 1$.

Định nghĩa 2. *Số nguyên dương bé nhất thỏa mãn $x^n = 1$ thì được gọi là bậc của x trong $\mathbb{F}^*_{p^2}$. Kí hiệu* $\operatorname{ord}(x)$.

Gọi $h = \operatorname{ord}(x)$, lúc này tồn tại q, r với $0 \leqslant r < h$ sao cho $p^2 - 1 = hq + r$. Khi đó

$$1 = x^{p^2-1} = x^{hq+r} = (x^h)^q.x^r = x^r$$

suy ra $r = 0$.

Mệnh đề 1. *Cấp của mọi phần tử khác 0 đều là ước của $p^2 - 1$ và $x^{p^2-1} = 1$ với mọi $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$.*

Mệnh đề 2. *Cho $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$ và $k > 1$ là số nguyên dương*

$$\operatorname{ord}(x^k) = \frac{\operatorname{ord}(x)}{\gcd(\operatorname{ord}(x), k)}.$$

Chứng minh. Để thuận tiện cho chứng minh, ta kí hiệu

$$t = \operatorname{ord}(x) \quad \text{và} \quad d = \gcd(\operatorname{ord}(x), k),$$

khi đó

$$(x^k)^{\frac{t}{d}} = \left(x^t\right)^{\frac{k}{d}} = 1.$$

Đặt $t' = \operatorname{ord}(x^k)$, lúc này ta có $x^{kt'} = 1$ suy ra

$$t' \,\Big|\, \frac{t}{d} \tag{1}$$

Mặt khác khác vì $x^{kt'} = (x^k)^{t'} = 1$ nên $t \mid kt'$ suy ra

$$\frac{t}{d} \,\Big|\, \frac{k}{d} t'.$$

Vì

$$\gcd\left(\frac{t}{d}, \frac{k}{d}\right) = 1$$

nên

$$\frac{t}{d} \,\Big|\, t'. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có $t' = \frac{t}{d}$. □

Từ tính chất này ta thấy $\operatorname{ord}(x^k) = \operatorname{ord}(x)$ khi và chỉ khi $\gcd(k, d) = 1$.

Mệnh đề 3. *Cho $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$ có cấp là d, khi đó x^k có cấp là d khi và chỉ khi* $\gcd(k, d) = 1$.

Mọi phần tử của $\mathbb{Z}_p$ đều có thể biểu diễn thành lũy thừa của nghiệm nguyên thủy. Bây giờ chúng ta cũng sẽ đi tìm một số thuộc $\mathbb{F}^*_{p^2}$ có tính chất tương tự như nghiệm nguyên thủy.

Gọi $\psi(d)$ là tập hợp các phần tử thuộc $\mathbb{F}^*_{p^2}$ mà có cấp là d. Chú ý rằng mỗi phần tử thuộc $\mathbb{F}^*_{p^2}$ đều thuộc đúng một $\psi(d)$, suy ra

$$\sum_{0<d \mid p^2-1} \psi(d) = p^2 - 1.$$

Nếu x có cấp là d thì tất cả

$$x, x^2, \ldots, x^d$$

đều phân biệt và có cấp là d. Nói cách khác, tất cả đều là nghiệm của phương trình $X^d = 1$, mà phương trình này chỉ có tối đa d nghiệm nên dãy trên là tất cả các nghiệm của phương trình. Nếu $a \neq x$ cũng có cấp là d thì a là nghiệm của phương trình $X^d = 1$, suy ra tồn tại k để $a = x^k$. Theo tính chất trên thì $\gcd(k, d) = 1$. Vậy số phần tử có cấp là d bằng $\varphi(d)$, suy ra

$$\psi(d) = \varphi(d)$$

với mọi ước d của $p^2 - 1$. Vậy $\psi(p^2 - 1) = \varphi(p^2 - 1)$.

Mệnh đề 4. *Tồn tại $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$ để* $\operatorname{ord}(x) = \varphi(p^2 - 1)$. *Nói cách khác, mọi phần tử thuộc $\mathbb{F}^*_{p^2}$ đều được biểu diễn thành một lũy thừa của x.*

Ví dụ 4 (IMO SL 2003). *Cho dãy số a_0, a_1, a_2, ... được định nghĩa như sau*

$$a_0 = 2, \qquad a_{k+1} = 2a_k^2 - 1 \quad \text{với mọi } k \geqslant 0.$$

Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố lẻ của a_n thì 2^{n+3} là ước của $p^2 - 1$.

Lời giải. Xét phương trình $a + \dfrac{1}{a} = 4$, khi đó ta chọn $a = 2 + \sqrt{3}$ kéo theo $\frac{1}{a} = 2 - \sqrt{3}$. Chú ý rằng

$$a_0 = \frac{a + \frac{1}{a}}{2}$$

suy ra

$$a_1 = 2a_0^2 - 1 = \frac{a^2 + \frac{1}{a^2}}{2}.$$

Tiếp tục ta thu được

$$a_n = \frac{a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}}{2}, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Bây giờ xét ước nguyên tố lẻ p của x_n. Vì $p \mid a_p = 2a_{p-1}^2 - 1$ nên

$$2a_{p-1}^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

kéo theo 2 là thặng dư chính phương modulo p. Thế nên $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ hay $8 \mid p^2 - 1$.

Nếu 3 là thặng dư chính phương modulo p thì ta sẽ xét dãy $\{a_n\}$ trên trường $\mathbb{Z}_p$. Mặt khác tồn tại $x \in \mathbb{Z}_p$ sao cho $x^2 = 3$. Khi đó

$$a_n = \frac{(2+x)^{2^n} + (2-x)^{2^n}}{2} = 0$$

vì $2 - x = \frac{1}{2-x}$ nên suy ra

$$(2+x)^{2^{n+1}} = -1$$

mà 2 là thặng dư chính phương nên tồn tại $y \in \mathbb{Z}_p$ sao cho $y^2 = 2$, suy ra

$$2 + x = \frac{4+2x}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} = \left(\frac{1+x}{y}\right)^2.$$

Đặt $z = \dfrac{1+x}{y}$, ta có

$$z^{2^{n+2}} = -1 \quad \text{và} \quad z^{2^{n+3}} = 1.$$

Lúc này $\operatorname{ord}(z) = 2^i$ với $i \leqslant n+3$. Nếu $i \leqslant n+2$ thì ta bình phương hai vế $z^i = 1$ cho đến khi nào bằng với $n+2$ ta sẽ gặp ngay mâu thuẫn. Vì thế $\operatorname{ord}(z) = 2^{n+3}$. Vậy $2^{n+3} \mid p-1$, suy ra điều phải chứng minh.

Nếu 3 không là thặng dư chính phương thì ta sẽ xét dãy $\{a_n\}$ trên trường

$$\mathbb{F}_{p^2} = \{u + v\sqrt{3} | u, v \in \mathbb{Z}_p\}$$

Vì $a_n = 0$ nên

$$(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n} = 0$$

mà $2 - \sqrt{3} \neq 0$ trên $\mathbb{F}_{p^2}$ nên

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^{n+1}} = -1.$$

Mặt khác, $2 = y^2 = (y + 0\sqrt{3})^2$ nên 2 cũng là số chính phương trong $\mathbb{F}_{p^2}$. Đặt $z = \frac{1+\sqrt{3}}{y}$, khi đó $z^{2^{n+2}} = -1$. Lập luận tương tự như trên ta cũng có $\operatorname{ord}(z) = 2^{n+3}$. Vì thế $2^{n+3} \mid p^2 - 1$.

Vậy cả hai trường hợp ta đều có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 5 (China TST 2008). *Dãy số $\{x_n\}$ được định nghĩa $x_1 = 2, x_2 = 12$ và $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$, với mọi $n \geqslant 1$. Gọi p là số nguyên tố lẻ, q là ước nguyên tố của x_p. Chứng minh rằng nếu $q \neq 2, 3$ thì $q \geqslant 2p - 1$.*

Lời giải. Ta có công thức tổng quát cho dãy số

$$x_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^{2n} - (\sqrt{2}-1)^{2n}}{2\sqrt{2}}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Gọi p là số nguyên tố lẻ và q là ước nguyên tố của x_p. Tiếp theo chúng ta có thể thực hiện giống như trong ví dụ 4 là xét trên $\mathbb{Z}_q$ và $\mathbb{F}_{q^2}$ để chứng minh $p \mid q^2 - 1$. Khi đó $p \mid q - 1$ hoặc $p \mid q + 1$, mà p là số nguyên tố lẻ nên

$$p \mid \frac{q-1}{2} \quad \text{hoặc} \quad p \mid \frac{q+1}{2} \tag{*}$$

suy ra

$$p \leqslant \frac{q-1}{2} \quad \text{hoặc} \quad p \leqslant \frac{q+1}{2}$$

Vậy từ cả hai ta có $q \geqslant 2p - 1$.

Ngoài ra chúng ta có thể tiếp cận bài toán theo hướng sau: vì $x_p = 0$ (trong cả $\mathbb{Z}_q$ hay $\mathbb{F}_{q^2}$) nên

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^{2p} = 1$$

mà p là số nguyên dương bé nhất thỏa điều trên nên p là cấp của $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$. Giả sử $x_n = 0$, khi đó

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^{2n} = 1$$

suy ra n phải chia hết cho cấp của $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$ hay $p \mid n$. Thế nên ta chỉ cần chứng minh $x_{\frac{q-1}{2}}$ hoặc $x_{\frac{q+1}{2}}$ chia hết cho p là có thể dẫn đến (*). Để làm được điều này chúng ta cũng chứng minh $x_{\frac{q-1}{2}} = 0$ trên $\mathbb{Z}_p$ hoặc $x_{\frac{q+1}{2}} = 0$ trên $\mathbb{F}_{p^2}$. □

Từ lý thuyết và các ví dụ bên trên ta có thể chuyển định lí về dãy số nguyên: cho dãy số nguyên $\{x_n\}$ thỏa $\boldsymbol{x_{n+2} = a x_{n+1} - x_n}$ với mọi $n \geqslant 1$. Khi đó nó có công thức tổng quát

$$\boldsymbol{x_n = c \cdot \left(\lambda^n - \frac{1}{\lambda^n}\right), \quad \forall n \geqslant 1}$$

trong đó $c, \lambda \in \mathbb{Q}[\sqrt{\Delta}]$, $\Delta = a^2 - 4$. Với p là số nguyên tố lẻ, nếu Δ là thặng dư chính phương modulo p thì xét $\mathbb{Z}_p$ và ngược lại xét $\mathbb{F}_{p^2}$. Lúc này định lí trên được phát biểu lại thành: **nếu k là chỉ số bé nhất để $p \mid x_k$ thì với mọi n mà $p \mid x_n$ ta có $k \mid n$.**

Nhận xét 2. Cho p là số nguyên tố lẻ và Δ là số nguyên bất kì. Xét $\mathbb{Z}_p$ và

$$\mathbb{F}_{p^2} = \left\{a + b\sqrt{\Delta} | a, b \in \mathbb{Z}_p\right\}$$

Ở các vấn đề trên chúng ta thường phân chia ra hai trường hợp là Δ là thặng dư chính phương và ngược lại. Khi Δ không là thặng dư chính phương thì $\mathbb{F}_{p^2}$ mới trở thành trường. Tuy nhiên khi Δ là thặng dư chính phương thì $\sqrt{\Delta}$ thuộc $\mathbb{Z}_p$, lúc này ta có thể xem

$$\mathbb{F}_{p^2} = \mathbb{Z}_p$$

mà không gây ra hiểu lầm.

3. Bài tập đề nghị

Bài tập 1. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng trong dãy số trên không có số nào là bội của 2017.

Bài tập 2. Cho $p \equiv \pm 3 \pmod 8$ là số nguyên tố. Gọi tập $\{x_1, \ldots, x_{p^2-1}\}$ là tập tất cả các số có dạng $a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số không âm không vượt quá $p - 1$ và không đồng thời bằng 0.

a) Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên u, v sao cho

$$\prod_{i=1}^{p^2-1} x_i = u + v\sqrt{2}.$$

b) Tìm số dư của u, v khi chia cho p.

Bài tập 3 (Iran MO round 3 2005). Cho k là một số nguyên và $p \equiv 3 \pmod 4$ là một số nguyên tố, chúng ta định nghĩa dãy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ như sau

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 2ka_{n-1} - (k^2 + 1)a_{n-2} \quad (n \geqslant 2).$$

Chứng minh rằng $a_{n+p^2-1} \equiv a_n \pmod p$ với mọi $n \geqslant 0$.

Bài tập 4 (Poland 2005, IMO Shortlist 2004). Cho k là số nguyên lớn hơn 1 và $m = 4k^2 - 5$. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương a và b sao cho dãy (x_n) được định nghĩa bởi

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{với} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

có tất cả các số hạng đều nguyên tố với m.

Tài liệu tham khảo

[1] Z. X. Wan, *Lectures on Finite Fields and Galois Rings*, 2003.

[2] https://artofproblemsolving.com/community

HAI DÃY SỐ SINH BỞI CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH

Trương Ngọc Đắc
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định

Các dãy số thông thường có dạng $x_n = f(n)$, trong đó $f(x)$ là một hàm số, hoặc cho bởi một công thức truy hồi $x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ và việc xác định công thức tổng quát của dãy số đã cho phải sử dụng đến phương trình sai phân (chương trình toán cao cấp). Trong phần này, chúng ta xét hai dãy số mà các số hạng của chúng có quan hệ đan xen nhau bởi các đại lượng trung bình và làm thế nào xác định được công thức tổng quát của dãy.

1. Hai dãy số xác định bởi trung bình cộng và trung bình nhân

Ta xét hai dãy số xác định bởi công thức truy hồi dạng trung bình cộng và trung bình nhân.

Bài toán 1. *Cho dãy số (u_n) và (v_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}.v_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Xác định công thức của hai dãy số (u_n) và (v_n) tùy theo tham số thực $a \in [-1, +\infty)$.

Ta thấy

- Nếu $a = 1 \Rightarrow u_n = v_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Nếu $a = -1 \Rightarrow u_n = v_n = 0, \forall n \geqslant 2$.

- Nếu $a \in (-1, 1)$ thì việc xác định các phần tử ban đầu của dãy số như: $u_2, v_2, u_3, v_3, \ldots$ không giúp ta xác định được quy luật để xác định được công thức của dãy số.

  Nhận thấy
  $$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{a+1}{2} = A^2,\ v_1 = \sqrt{u_1.v_0} = \sqrt{A^2.1} = A, \quad A > 0.$$
  Khi đó $a = 2A^2 - 1$ có dạng một công thức lượng giác, ta đặt
  $$a = \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1, \quad \varphi \in (0, \pi).$$

- Số thực $a > 1$ đều tồn tại số thực $m = a + \sqrt{a^2 - 1} > 1$, $\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) = a$.

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1 \Rightarrow u_n = v_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Nếu $a = -1 \Rightarrow u_n = v_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Nếu $a \in (-1, 1)$, đặt a $= \cos\varphi$, với $\varphi \in (0, \pi)$. Khi đó
  $$u_1 = \frac{\cos\varphi + 1}{2} = \cos^2\frac{\varphi}{2}, \quad v_1 = \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot 1} = \cos\frac{\varphi}{2},$$
  $$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2^2},$$
  $$v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = \sqrt{\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}.$$
  Từ đó ta dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp
  $$\begin{cases} u_n = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^3}\cdots\cos^2\frac{\varphi}{2^n} \\ v_n = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^3}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2^n}\sin\varphi\cot\dfrac{\varphi}{2^n} \\ v_n = \dfrac{1}{2^n}\sin\varphi\dfrac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (1)$$
  Thậy vậy, với $n = 1, n = 2$ thì (1) đúng. Giả sử công thức (1) đúng đến $n \geqslant 2$.

  Từ công thức truy hồi của hai dãy số và áp dụng giả thiết quy nạp, ta có:
  $$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sin\varphi\cot\frac{\varphi}{2^n} + \frac{1}{2^n}\sin\varphi\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\left(\frac{\cos\frac{\varphi}{2^n} + 1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}\right)$$
  $$= \frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2^{n+1}}}{2\sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}\cos\frac{\varphi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\cot\frac{\varphi}{2^{n+1}}.$$

Tương tự, ta cũng có:

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = \sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\cot\frac{\varphi}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^n}\sin\varphi\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\frac{\cos\frac{\varphi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{1}{2^n}\sin\varphi\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}\cos\frac{\varphi}{2^{n+1}}}} = \frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}}.$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp, công thức (1) đúng với mọi n nguyên dương.

Chú ý công thức (1) cũng đúng khi $n = 0$.

- Nếu $a \in (1, +\infty)$. Khi đó tồn tại số thực

$$m = a + \sqrt{a^2-1} > 1, \quad \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) = a \Rightarrow u_1 = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right)}{2} = \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right)^2.$$

$$v_1 = \frac{m^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}.$$

$$u_2 = \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right)\right] = \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right) \cdot \left(\frac{m^{\frac{1}{2^2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^2}}}}{2}\right)^2.$$

$$v_2 = \sqrt{u_2v_1} = \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right) \cdot \left(\frac{m^{\frac{1}{2^2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^2}}}}{2}\right).$$

Khi đó, ta dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp:

$$\begin{cases} u_n = \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right) \cdot \left(\frac{m^{\frac{1}{2^2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^2}}}}{2}\right) \cdots \left(\frac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{2}\right)^2 \\ v_n = \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right) \cdot \left(\frac{m^{\frac{1}{2^2}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^2}}}}{2}\right) \cdots \left(\frac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{2}\right) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \\ v_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (2)$$

Thậy vậy, với $n = 1, n = 2$ thì (2) đúng. Giả sử công thức (2) đúng đến $n \geqslant 2$. Từ công thức truy hồi của hai dãy số và áp dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}} + 2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\frac{\left(m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}\right)^2}{\left(m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}\right)\left(m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}\right).$$

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = \sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}\right) \cdot \frac{1}{2^n}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)^2\left(\frac{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}\right) \cdot \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{4}{\left(m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}\right)\left(m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}\right)}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{2}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}\right).$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp, công thức (2) đúng với mọi n nguyên dương.

Lưu ý công thức (2) cũng đúng khi $n = 0$.

$\square$

2. Hai dãy số xác định bởi trung bình điều hòa và trung bình nhân

Xét hai dãy số xác định bởi hệ công thức truy hồi dạng trung bình điều hòa và trung bình nhân

Bài toán 2. *Cho dãy số* (u_n) *và* (v_n) *xác định bởi*

$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} \cdot v_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Xác định công thức của hai dãy số (u_n) *và* (v_n) *tùy theo tham số thực dương* a.

Phân tích

- Hai dãy số này được xác định bởi hệ công thức truy hồi dạng trung bình điều hòa và trung bình nhân là một dạng mới, để xác định được công thức của hai dãy đòi hỏi học sinh phải có kỹ năng thực hiện thành thạo các phép biến đổi.
- Nhưng với cách nhìn của *bài toán 1*, ta thực hiện phép biến đổi:

$$u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}, \quad \frac{1}{v_n} = \sqrt{\frac{1}{u_{n+1}} \cdot \frac{1}{v_n}}.$$

- Ta đặt $\frac{1}{u_n} = x_n$, $\frac{1}{v_n} = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{a}, y_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} \cdot y_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Hoàn toàn tương tự cách giải bài toán1, ta thực hiện lời giải *bài toán 2*.

Lời giải. Ta đặt $\frac{1}{u_n} = x_n$, $\frac{1}{v_n} = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ hai dãy đã cho trở thành

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{a}, y_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} \cdot y_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Theo *bài toán 1*, ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1 \Rightarrow x_n = y_n = 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n = v_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Nếu $a \in (1, +\infty) : a = \frac{1}{cos\varphi}, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, thì

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \cot \dfrac{\varphi}{2^n} \\ y_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \dfrac{1}{\sin \frac{\varphi}{2^n}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

  Vậy công thức xác định hai dãy số

$$\begin{cases} u_n = 2^n \cdot \tan \dfrac{\varphi}{2^n} \cdot \dfrac{1}{\sin\varphi} \\ v_n = 2^n \cdot \sin \dfrac{\varphi}{2^n} \cdot \dfrac{1}{\sin\varphi} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3}$$

  Chú ý công thức (3) cũng đúng khi $n = 0$.

- Nếu $a \in (0, 1) \Rightarrow \frac{1}{a} = b \in (1, +\infty)$. Theo *bài toán 1*, tồn tại số thực $m = b + \sqrt{b^2 - 1} > 1$ và

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \\ y_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

  Vậy công thức xác định hai dãy số (u_n) và (v_n)

$$\begin{cases} u_n = 2^n\left(\dfrac{2}{m - \frac{1}{m}}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \\ v_n = 2^n\left(\dfrac{2}{m - \frac{1}{m}}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{2}\right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

  Chú ý công thức trên cũng đúng khi $n = 0$.

$\square$

3. Hai dãy số xác định bởi trung bình bình phương và trung bình nhân

Xét hai dãy số xác định bởi công thức truy hồi dạng trung bình bình phương và trung bình nhân

Bài toán 3. *Cho dãy số (u_n) và (v_n) xác định bởi*

$$u_0 = a,\ v_0 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}},\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} \cdot v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Xác định công thức của hai dãy số (u_n) và (v_n) tùy theo tham số thực dương a.

Phân tích

- Nếu biến đổi thông thường để tìm ra quy luật xác định công thức hai dãy số là việc làm rất phức tạp và khó thực hiện được.
- Nhưng với giả thiết đã cho, ta nhận thấy các số hạng của hai dãy số đều dương và thực hiện phép biến đổi:

$$u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2},\ v_{n+1}^2 = \sqrt{u_{n+1}^2 . v_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Và đặt $u_n^2 = x_n,\ v_n^2 = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, theo bài toán 1, ta có lời giải sau.

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1 \Rightarrow u_n = v_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Nếu $a \in (0, 1)$. Từ công thức truy hồi truy hồi của hai dãy số, ta nhận thấy $u_n > 0$, $v_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}, \quad v_{n+1}^2 = \sqrt{u_{n+1}^2 \cdot v_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

  Đặt $u_n^2 = x_n,\ v_n^2 = y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x_0 = a^2, y_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}.y_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

  Theo *bài toán 1*, ta có

$$x_0 = a^2 = \cos\varphi, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

  và công thức xác định hai dãy số

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \cot\dfrac{\varphi}{2^n} \\ y_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \dfrac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó, suy ra công thức xác định dãy số (u_n) và (v_n)

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{\dfrac{1}{2^n}\sin\varphi\cot\dfrac{\varphi}{2^n}} \\ v_n = \sqrt{\dfrac{1}{2^n}\sin\varphi\dfrac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{5}$$

Chú ý công thức (5) cũng đúng khi $n = 0$ khi $a \in (0, 1)$.

- Nếu $a > 1 \to a^2 \in (1, +\infty) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{R}: m = a^2 + \sqrt{a^4 - 1} > 1,\ \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) = a^2$.

  Theo *bài toán 1*, ta có công thức (4) xác định hai dãy số $(x_n), (y_n)$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \\ y_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

  Suy ra công thức xác định dãy số (u_n) và (v_n)

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right)} \\ v_n = \sqrt{\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right)} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{6}$$

  Chú ý công thức (6) cũng đúng khi $n = 0$ khi $a > 1$.

□

4. Hai dãy số xác định bởi tựa trung bình bình phương và trung bình nhân

Ta xét hai dãy số xác định bởi hệ công thức truy hồi dạng tựa trung bình bình phương và trung bình nhân

Bài toán 4. *Cho dãy số (u_n) và (v_n) xác định bởi*

$$u_0 = a,\ v_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n v_n}{\sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}},\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} \cdot v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Xác định công thức của hai dãy số (u_n) và (v_n) tùy theo tham số thực dương a.

Phân tích

- Hai dãy số có các số hạng quan hệ đan xen giữa trung bình tựa trung bình bình phương và trung trung bình nhân, để xác định được công thức của hai dãy số là một việc làm rất khó.
- Nhưng nếu biến đổi hai công thức truy hồi của dãy về dạng

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{\frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{v_n^2}}{2}, \frac{1}{v_{n+1}^2} = \sqrt{\frac{1}{u_{n+1}^2 \cdot v_n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

  và sử dụng phép đặt đưa về *bài toán 1*.

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1 \Rightarrow u_n = v_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Nếu $a \in (1, +\infty) : a^2 = \frac{1}{\cos\varphi}, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Từ công thức truy hồi truy hồi của hai dãy số, ta nhận thấy $u_n > 0,\ v_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{\frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{v_n^2}}{2}, \frac{1}{v_{n+1}^2} = \sqrt{\frac{1}{u_{n+1}^2 . v_n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

  Ta đặt $u_n^2 = \frac{1}{x_n}, v_n^2 = \frac{1}{y_n}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{a^2},\ y_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} \cdot y_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (7)$$

  Theo *bài toán 1*, từ (7) công thức xác định hai dãy số (x_n), (y_n)

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \cot\dfrac{\varphi}{2^n} \\ y_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \dfrac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

  Từ đó, suy ra công thức xác định hai dãy số (u_n) và (v_n)

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{\dfrac{2^n \cdot \tan\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\varphi}} \\ v_n = \sqrt{\dfrac{2^n \cdot \sin\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\varphi}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (8)$$

  Chú ý công thức (8) cũng đúng khi $n = 0$ khi $a > 1$.

- Nếu $a \in (0,1)$, thì $\frac{1}{a^2} \in (1,+\infty)$, tồn tại số thực

$$m = \frac{1+\sqrt{1-a^4}}{a^2} > 1 : \frac{m^2+1}{2m} = \frac{1}{a^2}.$$

Theo *bài toán 1*, từ (7) ta có công thức xác định hai dãy số (x_n), (y_n)

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m-\frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}}-\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \\ y_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m-\frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{m^{\frac{1}{2^n}}-\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó, suy ra công thức xác định dãy số (u_n) và (v_n)

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{2^n\left(\dfrac{2}{m-\frac{1}{m}}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}}-\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right)} \\ v_n = \sqrt{2^n\left(\dfrac{2}{m-\frac{1}{m}}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}}-\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{2}\right)} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{9}$$

Chú ý công thức (9) cũng đúng khi $n = 0$ khi $a \in (0,1)$.

□

5. Kết luận

Qua các bài toán trên ta thấy nếu ta chọn các giá trị đặt biệt của tham số a thì việc xác định công thức của hai dãy số hoặc tìm giới hạn của các dạy số ta được những bài toán về dãy số có tính chất "*đẹp*".

Khi biết được công thức xác định dãy số, ta xây dựng các bài toán về tính chất các phần tử của dãy số hoặc xác định giới hạn của các dãy số, tạo lớp bài tập về dãy số thêm phong phú, tạo hứng thú cho các em học sinh có năng khiếu về toán say mê nghiên cứu.

Tài liệu tham khảo

[1] V.Adiyasuren 2010, *A Note on integral inequalities involving several convex function*, web: iom.num.edu.mn/journal/2010/V.Adiyasuren.pdf

[2] Nguyễn Văn Mậu 2002, *Một số bài toán chọn lọc về dãy số*, NXB Giáo Dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu 1997, *Phương trình hàm*, NXB Giáo Dục.

VỀ HAI BÀI TOÁN TỔ HỢP TRONG ĐỀ KIỂM TRA TRƯỜNG HÈ 2022

Lê Phúc Lữ
(ĐH Khoa học tự nhiên TPHCM)

TÓM TẮT

Trong bài viết ngắn này, tác giả giới thiệu và phân tích về hai bài toán Tổ hợp khá thú vị trong đề kiểm tra của hai kỳ Olympic trong hè 2022: Duyên hải Bắc Bộ và trường hè VIASM.

1. Bài toán về Hamming distance

1.1. Giới thiệu bài toán

Trong đề Olympic Duyên hải Bắc Bộ 2022, khối 10 có bài tổ hợp rất thú vị do trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong (Nam Định) đề xuất với nội dung (được tóm tắt lại) như sau

Bài toán 1. *Cho $n \geq 3$ là số nguyên dương và S là tập hợp tất cả các xâu nhị phân độ dài n. Xét $R \subset S$ sao cho với mọi cặp xâu nhị phân $a, b \in R$ thì $d(a, b) \geq 3$, trong đó $d : S^2 \to \mathbb{R}$ cho biết số vị trí khác nhau giữa hai xâu. Chứng minh rằng*

$$|R| \leq \frac{2^n}{n+1}.$$

Bình luận và lời giải. Khoảng cách d trong đề bài chính là khoảng cách Hamming giữa hai xâu nhị phân. Bài toán khảo sát kích thước lớn nhất của R cũng là một bài toán kinh điển của Khoa học máy tính, liên quan đến lý thuyết "mã sửa sai" và có ứng dụng trong thực tiễn. Chặn dưới 3 cũng được ưa chuộng nghiên cứu hơn so với các chặn khác vì kích thước của tập xây dựng được tương đối tốt theo nhiều nghĩa.

Tham khảo ý tưởng của đáp án đề thi tại [4], bên dưới là phần trình bày lại theo hướng đếm bằng hai cách (có thể sẽ dễ hiểu hơn)

Lời giải. Ta đếm số bộ (x, y) trong đó $x \in R, y \in S$ mà $d(x, y) \leq 1$.

1. Cách 1, đếm theo x: chọn $x \in R$ tùy ý có $|R|$ cách, chọn $y \in S$ để $d(x, y) = 0$ hoặc $d(x, y) = 1$, dễ thấy lần lượt có 1 và n cách (ta thay đổi từng vị trí trong xâu x để thu được xâu mới). Do đó, số bộ ở đây là $|R|\,(n+1)$.

2. Cách 2, đếm theo y: chọn $y \in S$ tùy ý có 2^n cách, chọn $x \in R$ để có $d(x, y) \le 1$ thì có không quá 1 cách. Thật vậy, nếu có $x_1, x_2 \in R$ để $d(x_1, y) \le 1,\ d(x_2, y) \le 1$ thì dễ thấy hai xâu x_1, x_2 chỉ khác nhau ở tối đa 2 vị trí, không thỏa cách chọn tập hợp R.

Từ đó số bộ sẽ không quá 2^n. So sánh với cách 1, ta có ngay $|R|\,(n+1) \le 2^n$ hay $|R| \le \frac{2^n}{n+1}$. $\square$

Nhận xét. Qua lời giải trên, bằng cách làm tương tự cho bài toán tổng quát, ta có thể phát biểu kết quả sau: Cho n, ℓ, q là các số nguyên dương và S là tập hợp tất cả các xâu $q-$phân độ dài n (mỗi vị trí có thể nhận giá thuộc $\{0, 1, \dots, q-1\}$). Xét $R \subset S$ sao cho với mọi cặp xâu $q-$phân $a, b \in R$ thì $d(a, b) \ge \ell$. Khi đó

$$|R| \le \frac{q^n}{\sum\limits_{k=0}^{(\ell-1)/2} C_n^k (q-1)^k}.$$

Tiếp theo, trở lại vấn đề ở Bài toán 1, ta có thể đặt ra câu hỏi: "vậy tập R có thể có kích thước lớn khoảng bao nhiêu?". Để trả lời, ta có thể tìm cách xây dựng cụ thể một tập R thỏa mãn, nhưng điều này không dễ và theo [1], ta phải dùng đến ma trận Hadamard là một ý tưởng cao cấp. Bên dưới, ta có một hướng sơ cấp hơn dùng kỹ thuật cực hạn quen thuộc.

Gọi R_0 là tập hợp nhiều nhất các xâu nhị phân có thể có, đặt $|R_0| = k$ và $|S \backslash R_0| = 2^n - k$. Ta thấy rằng với mỗi xâu $y \in S \backslash R_0$, tồn tại ít nhất một xâu $x \in R_0$ mà $d(x, y) \le 2$; vì nếu không có xâu x nào như thế, ta hoàn toàn có thể thêm y vào R_0 và được tập mới nhiều phần tử hơn, mâu thuẫn với tính lớn nhất.

Cách đánh giá. Ngoài ra, với mỗi xâu $x \in R_0$, ta có đúng

$$n + C_n^2 = \frac{n^2 + n}{2}$$

xâu $y \in S \backslash R_0$ mà $d(x, y) \in \{1, 2\}$. Do đó, bằng cách đếm số bộ (x, y) với $x \in R_0, y \in S \backslash R_0$ mà $d(x, y) \le 2$, ta suy ra được

$$k \cdot \frac{n^2 + n}{2} \ge 2^n - k \text{ hay } k \ge \frac{2^{n+1}}{n^2 + n + 2}.$$

Tất nhiên, đánh giá chặn dưới trên khá yếu và chỉ mới chỉ ra sự tồn tại chứ cũng chưa xây dựng cụ thể được. Tham khảo trong [1], bạn đọc có thể tìm ra một chặn dưới tốt hơn là

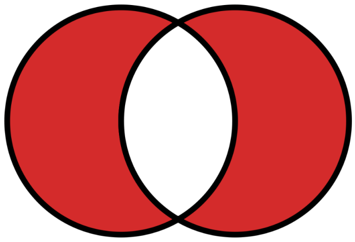
$$|R_0| \ge 2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1} \ge \frac{2^{n-2}}{n}.$$

Việc tìm ra chính xác giá trị $|R_0|$ cho mọi n nguyên dương tùy ý vẫn còn là bài toán mở mà các nhà Toán học theo đuổi hàng mấy chục năm nay [1].

1.2. Các vấn đề liên quan khác

Chú ý rằng ở khía cạnh tập con, ta có một liên hệ khá thú vị với khoảng cách Hamming ở trên như sau: một xâu nhị phân $s = a_1a_2\dots a_n$ với $a_i \in \{0,1\}, \forall i = 1,2,\dots,n$ ứng với tập con $B \subset A$ cho biết từng phần tử của tập nguồn $A = \{1,2,\dots,n\}$ có thuộc B hay không. Số xâu nhị phân là 2^n cũng ứng với số tập con đó. Như thế, với hai tập con $X, Y \subset A$ thì khoảng cách Hamming giữa hai xâu nhị phân tương ứng chính là số phần tử của "hiệu đối xứng" (symmetric difference), cụ thể là

$$X \,\Delta\, Y = (X \cup Y)\backslash(X \cap Y) = (X\backslash Y) \cup (Y\backslash X).$$



Bên dưới, ta xét hai bài toán có liên quan về việc ước lượng này trong các đề Olympic

Bài toán 2. *(Chọn đội tuyển PTNK 2013) Cho số nguyên dương n và tập $X = \{1,2,\dots,4n\}$. Xét họ Ω gồm m tập con của X đôi một có hiệu đối xứng kích thước không nhỏ hơn $2n+1$. Chứng minh rằng*

$$m \le \frac{4(n+1)}{3}.$$

Lời giải. Nếu thực hiện đếm bằng hai cách thuần túy, ta chỉ có ước lượng $m \le 2n$. Cụ thể là đếm số bộ $(\{A,B\}, c)$ trong đó $A, B \in \Omega$ và $c \in A\Delta B$.

Đếm theo cặp tập con $\{A,B\}$, ta có C_m^2 cách; chọn phần tử c thì có $\ge 2n+1$ nên số bộ sẽ $\ge (2n+1)C_m^2$.

Đếm theo phần tử c, ta có $4n$ cách. Chú ý rằng nếu phần tử $u \in X$ thuộc về x tập và không thuộc $m-x$ tập thì số cách chọn $\{A,B\}$ sẽ là $x(m-x) \le \frac{m^2}{4}$, kéo theo số bộ là

$$\le 4n \cdot \frac{m^2}{4} = nm^2.$$

Do đó $nm^2 \ge \frac{m(m-1)}{2}(2n+1)$ hay $m \le 2n+1$. Chú ý là dấu bằng không xảy ra vì khi $m = 2n+1$ là số lẻ thì đẳng thức $x(m-x) = \frac{m^2}{4}$ không đạt được. Do đó ta phải có $m \le 2n$.

Ta sẽ cải tiến thêm đánh giá như sau: chú ý rằng

$$|A\Delta B| = |A| + |B| - 2\,|A \cap B|$$

có cùng tính chẵn lẻ với $|A| + |B|$. Do đó, nếu bằng cách nào đó, ta có thể điều chỉnh được $|A| + |B|$ chẵn thì sẽ có ngay $|A \Delta B| \geq 2n + 2$. Cụ thể như sau: "mượn" thêm số 0 cho vào tập nguồn X, ta được

$$X' = \{0, 1, 2, \ldots, 4n\}.$$

Trong họ Ω, nếu tập con A có số phần tử chẵn thì giữ nguyên; nếu tập con A có lẻ phần tử thì bổ sung thêm 0 vào. Khi đó, họ Ω' mới vẫn có m tập con mà số phần tử mỗi tập đều chẵn, ta có ngay $|A' \Delta B'| \geq 2n + 2$ với mọi $A', B' \in \Omega'$. Thực hiện hoàn toàn tương tự trên thì

$$m \geq \frac{4(n+1)}{3}.$$

□

Ta có một ứng dụng trực tiếp của đánh giá trên vào đề Olympic Toán toàn Nga là

Bài toán 3. *Một loại thực vật có 100 đặc trưng và phòng thí nghiệm đang có chứa m mẫu cây của thực vật đó, sao cho mỗi cặp mẫu sẽ có giống nhau ít hơn 50% đặc trưng. Chứng minh rằng $m \leq 34$.*

Tiếp theo là một bài toán khá thú vị khác

Bài toán 4. *(Đề kiểm tra trường Đông Vinh 2021) Xét số nguyên dương n và tập hợp X gồm n số nguyên dương đầu tiên. Giả sử tồn tại họ Ω gồm đúng $\sqrt[5]{2^n}$ tập con của X sao cho với mọi $A \subset X$, tồn tại duy nhất $B \in \Omega$ để*

$$|A \, \Delta \, B| \in \{0, 2, 4\}.$$

Xác định tất cả giá trị có thể có của n.

Lời giải. Trước hết, vì $|\Omega| = \sqrt[5]{2^n}$ nên $5 | n$. Xét $A, B \subset X$ và tương ứng với hai xâu nhị phân biểu diễn là x, y. Ứng với mỗi xâu $B \in \Omega$, bằng cách chọn ra k vị trí bất kỳ trong xâu và đổi trạng thái $1 \leftrightarrow 0$ là sẽ được một xâu mới, tương ứng với một tập $A \subset X$ mà $|A \Delta B| = k$.

Do đó, lần lượt cho $k = 0, 2, 4$ và chọn ra các phần tử như trên, ta sẽ sinh ra được không quá $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4$ tập hợp A có tính chất $|A \Delta B| \in \{0, 2, 4\}$ (do các tập sinh ra có thể trùng nhau). Đến đây, gọi Φ là họ tất cả tập con của X. Ta sẽ đếm số cặp tập hợp (A, B) với $A \in \Phi,\ B \in \Omega$ sao cho $|A \Delta B| \in \{0, 2, 4\}$.

- Đếm theo A : chọn A có 2^n cách, chọn B có duy nhất 1 cách.
- Đếm theo B : chọn B có $\sqrt[5]{2^n}$ cách, mỗi tập B có không quá $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4$ tập A.

Như thế, ta có đánh giá

$$2^n \leq \sqrt[5]{2^n}(1 + C_n^2 + C_n^4)$$

hay

$$\sqrt[5]{16^n} \leq (1 + C_n^2 + C_n^4).$$

Dùng quy nạp, ta chỉ ra được bất đẳng thức trên sẽ sai với $n \geq 15$. Do đó $n \leq 10$ và $n \in \{5, 10\}$. Ta xét các trường hợp sau đây:

Với $n = 5$, ta có $|\Omega| = 2$ nên chọn $\Omega = \{\varnothing, X\}$ ứng với 2 xâu nhị phân

$$x = \overline{00000} \text{ và } y = \overline{11111}.$$

Dễ thấy rằng với mọi xâu nhị phân z có độ dài 5, ta luôn có $d(z, x) + d(z, y) = 5$ nên có đúng một trong hai số này là chẵn, tức là thuộc $\{0, 2, 4\}$. Do đó $n = 5$ thỏa mãn.

Với $n = 10$, ta có $|\Omega| = 4$ nên chọn

$$\Omega = \{\varnothing, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}, X\}$$

lần lượt ứng với các xâu nhị phân xx, yx, xy, yy ghép được từ hai xâu $x = \overline{00000}$ và $y = \overline{11111}$. Xét một xâu $z = z_1z_2$ với z_1, z_2 độ dài 5, rõ ràng ta cũng có

$$d(z_1, x) + d(z_1, y) = 5 \text{ và } d(z_2, x) + d(z_2, y) = 5.$$

Suy ra trong $d(z_1, x), d(z_1, y)$ có một số chẵn và một số lẻ. Tương tự với $d(z_2, x), d(z_2, y)$.Tổng của cặp số chẵn và cặp số lẻ đều chẵn và dĩ nhiên có đúng một trong hai tổng nhỏ hơn 5 nên có đúng một trong 4 xâu thỏa mãn khoảng cách đến z thuộc $\{0, 2, 4\}$.

Vậy tất cả các giá trị n cần tìm là $n = 5$ và $n = 10$. $\square$

Để kết thúc chủ đề này, ta sẽ thảo luận về vấn đề hiệu đối xứng trên nhiều tập. Bằng quy nạp, ta có thể chỉ ra được rằng nếu lấy hiệu đối xứng lần lượt của k tập $X_1, X_2, \ldots, X_k$ thì

$$x \in (X_1 \,\Delta\, X_2 \,\Delta\, \ldots \,\Delta\, X_k) \Leftrightarrow x \text{ thuộc lẻ tập trong } k \text{ tập trên.}$$

Chú ý là điều này khó định nghĩa hơn ở Hamming distance. Từ ý tưởng trên, mời bạn đọc chỉ ra sự tương đương của hai bài toán sau và giải quyết chúng (tham khảo thêm tại [7])

Bài toán 5. *(Chọn đội tuyển Phú Thọ 2018) Cho tập hợp $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng trong $n+1$ tập con khác rỗng bất kỳ của S thì ta luôn có thể chọn ra một số tập $X_1, X_2, \ldots, X_k$ (với $2 \leq k \leq n+1$) sao cho*

$$X_1 \,\Delta\, X_2 \,\Delta\, \ldots \,\Delta\, X_k = \varnothing.$$

Bài toán 6. *Một lớp có $n+1$ học sinh, tham gia vào n câu lạc bộ. Chứng minh rằng có thể chọn ra một tập hợp khác rỗng các bạn học sinh sao cho trong mỗi câu lạc bộ, số học sinh được chọn là chẵn.*

2. Bài toán về phân hoạch cạnh của graph

2.1. Giới thiệu bài toán

Trong đề kiểm tra Thử thách mùa hè trong khuôn khổ chương trình trường hè của VIASM 2022, có bài 8 với nội dung như sau:

Bài toán 7. *Một câu lạc bộ học thuật có n thành viên muốn tổ chức một số buổi chuyên đề. Ở từng buổi, mỗi thành viên sẽ phụ trách đúng một trong ba môn: Toán, Lý, Hóa (mỗi môn có ít nhất một người). Biết rằng với hai thành viên bất kỳ, tồn tại ít nhất một buổi chuyên đề mà họ không cùng phụ trách chung một môn.*

a) Với $n = 9$, giả sử rằng câu lạc bộ tổ chức được đúng 2 buổi chuyên đề. Hỏi sau khi tổ chức xong buổi đầu tiên, câu lạc bộ có bao nhiêu cách phân công thành viên cho buổi thứ hai?

b) Với $n = 2022$, tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của số buổi chuyên đề.

Lời giải. (tham khảo [3])

a) Ta thấy trong mỗi buổi, không thể có môn nào có nhiều hơn 3 người vì nếu không, trong buổi sau, do chỉ có 3 môn nên theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có hai người tiếp tục phụ trách cùng môn, không thỏa mãn. Điều này cho thấy rằng mỗi môn phải có đúng 3 người phụ trách.

Đánh số các thành viên là $1, 2, \ldots, 9$. Không mất tính tổng quát, giả sử buổi đầu tiên thì các nhóm (theo thứ tự môn Toán, Lý, Hóa) sẽ là:

$$(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9).$$

Trong buổi tiếp theo, các thành viên của mỗi môn sẽ không được thuộc cùng môn nữa, vì thế số cách xếp cho ba người trong mỗi môn sẽ sẽ là $3! = 6$ và số cách phân công là $6^3 = 216$.

b) Gọi k là số buổi chuyên đề mà câu lạc bộ tổ chức được. Trong buổi chuyên đề thứ i với $1 \leq i \leq k$, gọi A_i, B_i, C_i lần lượt là tập hợp các thành viên tham gia phụ trách từng môn: Toán, Lý, Hóa. Khi đó, với mỗi i, ta có A_i, B_i, C_i là phân hoạch của các thành viên của câu lạc bộ.

Trong mỗi buổi thì các thành viên sẽ có 3 cách chọn môn để phụ trách nên tổng cộng sẽ có tất cả 3^k cách chọn. Nếu $n > 3^k$ thì theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có hai thành viên phải có cách chọn giống nhau ở tất cả k buổi. Tuy nhiên, lúc đó hai thành viên sẽ luôn luôn thuộc cùng một môn trong mọi buổi, không thỏa mãn nên phải có $n \leq 3^k$.

Ta sẽ chứng minh rằng với $n \leq 3^k$ thì luôn xây dựng được. Thật vậy, đổi các số thứ tự của các học sinh từ $0, 1, 2, \ldots, n-1$ sang hệ cơ số 3 thì mỗi số sẽ ứng với một xâu tam phân có độ dài không vượt quá $k - 1$. Để đồng bộ hóa cho các xâu đó, ta thêm 0 vào đằng trước để tất cả các xâu có cùng độ dài k. Ta định nghĩa quy tắc sau: trong buổi chuyên đề thứ i với $1 \leq i \leq k$, ta các xâu mà chữ số thứ i cùng là 0 thì vào nhóm môn Toán, tương tự, cùng là 1 thì vào nhóm môn Lý và cùng là 2 thì vào nhóm môn Hóa.

Khi đó, với hai xâu bất kỳ khác nhau, ta thấy chúng phải khác nhau tại một vị trí nào đó, và số thứ tự của vị trí đó sẽ là buổi chuyên đề mà hai thành viên tương ứng tham gia vào hai môn khác nhau, thỏa mãn ràng buộc. Ứng với $n = 2022$, ta có ngay $k \geq \lceil \log_3 2022 \rceil = 7$ và $k = 7$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. $\square$

2.2. Phân tích và mở rộng.

Nếu theo các ý tưởng đếm bằng hai cách thông thường, ta dễ có định hướng sai cho ý b) khi dự đoán số buổi chuyên đề vào khoảng $\sqrt{n}$. Việc phát hiện ra đánh giá chặn dưới là $\log_3 n$ và xây dựng thuận lợi bằng cách dùng xâu tam phân là điều khá bất ngờ.

Không khó để thấy rằng bài toán bên dưới đây chính là ý tưởng gốc của Bài toán 2 ở trên:

Bài toán 8. *Cho graph đơn, vô hướng đầy đủ $G = (V, E)$ có $|V| = n$. Cần tô màu mỗi cạnh của G bởi một trong k màu sao cho không có các cạnh nào cùng màu tạo thành chu trình lẻ. Tìm giá trị nhỏ nhất của k.*

Nói cách khác, ta cần phân hoạch các cạnh của G ra k graph con lưỡng phân (tính chất quen thuộc của graph lưỡng phân là không có chu trình lẻ), tham khảo [2].

Tại sao có sự liên hệ? Ta thấy rằng nếu như phân hoạch được các cạnh của G thành công thì với hai đỉnh bất kỳ, sẽ luôn có một graph con lưỡng phân mà ở đó, chúng không được nối nhau. Phát biểu lại thành ngôn ngữ học sinh – câu lạc bộ và điều chỉnh lại kích thước từ $2 \to 3$,ta có ngay Bài toán 2 ở trên. Như thế, Bài toán 2 và cả lời giải của nó đã "che giấu" được thành công bản chất lý thuyết graph của nó. Một cách tổng quát, ta có thể thay điều kiện nhị phân, tam phân thành $k-$phân bất kỳ, tức là thay ba môn Toán-Lý-Hóa bởi k môn học. Đáp số sẽ là $\lceil \log_k n \rceil$. Ngoài ra, trong [2], tác giả bài viết cũng có đưa ra lời giải nhờ việc dự đoán trước kết quả và sử dụng quy nạp cho cả hai chiều chặn dưới và xây dựng, nhưng khá dài dòng.

2.3. Liên hệ với bài toán về graph khác.

Ý tưởng sử dụng hệ nhị phân, tam phân để việc xây dựng hiệu quả, triệt để hơn cũng có xuất hiện trong bài toán tương tự sau đây từ cuộc thi Olympic về Tin học – Technocup của Nga vào tháng 12/2021, tham khảo [5]. Bài toán đó đã được sử dụng trong đề kiểm tra đội tuyển VMO 2022 với nội dung như sau

Bài toán 9. *Cho các số nguyên dương $n > k \geq 2$. Trong một quốc gia, có n thành phố $A_1, A_2, \ldots, A_n$.Giữa hai thành phố A_i và A_j, có tuyến đường bay từ A_i đến A_j khi và chỉ khi $i < j$. Một hành trình là một dãy gồm nhiều tuyến đường bay liên tiếp nhau và độ dài của nó là số tuyến đường bay trên đó. Người ta cấp phép khai thác cho các đường bay trên bởi các hãng hàng không sao cho mỗi đường bay chỉ được cấp phép cho đúng một hãng, đồng thời mọi hành trình có độ dài k đều có chứa hai tuyến đường bay được cấp phép cho hai hãng khác nhau.*

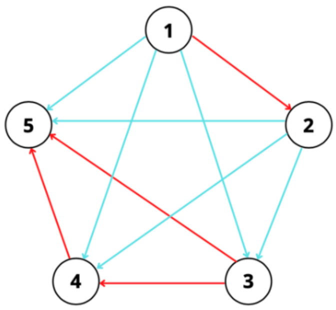
a) Cho $n = 5$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của số hãng hàng không ứng với $k = 3$ và ứng với $k = 2$.

b) Chứng minh rằng số lượng nhỏ nhất các hãng hàng không được cấp phép là $\lceil \log_k n \rceil$,trong đó ký hiệu $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x.

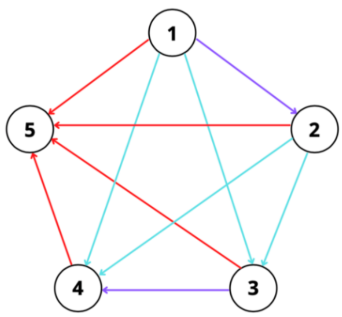
Ta có thể tóm tắt đề bài lại là: Cho graph đơn $G = (V, E)$ có hướng, $|V| = n$ và mỗi đỉnh ứng với đúng một trong n số nguyên dương đầu tiên, ngoài ra cạnh nối từ $i \to j$ khi và chỉ khi $i < j$. Cần tô các cạnh bởi 1 trong k sao cho không có đường đi đơn độ dài k có các cạnh tô cùng màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của k.

Lời giải. (tham khảo [6]). Trong lời giải bên dưới, để đơn giản, ta quy ước gọi số thứ tự đại diện cho các thành phố.

a) Với $n = 5, k = 3$, có hành trình $1 \to 2 \to 3 \to 4$ độ dài 3 nên trên đó phải có ít nhất hai đường bay được cấp phép cho hai hãng khác nhau. Khi đó, số hãng hàng không ít nhất là 2. Ta có phương án như sau, mỗi màu đại diện cho một hãng hàng không:



Với $n = 5, k = 2$, rõ ràng phải có ít nhất 2 hãng hàng không X, Y. Giả sử chỉ có hai hãng như thế, xét hành trình $1 \to 2 \to 3,\ 2 \to 3 \to 4$ và $3 \to 4 \to 5$,thì các tuyến $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)$ phải được cấp phép xen kẽ, giả sử là X, Y, X, Y. Khi đó, xét $1 \to 2 \to 4$ thì $(2, 4)$ cấp phép cho Y; khi đó $2 \to 4 \to 5$ lại có tuyến $(2, 4), (4, 5)$ cùng cấp phép cho Y, không thỏa. Do đó, số hãng hàng không ít nhất là 3 và ta xây dựng như hình:



b) Đầu tiên, để chứng minh số hãng hàng không ít nhất là $\lceil \log_k n \rceil$, ta sẽ chỉ ra rằng nếu có m hãng hàng không thì phải có số thành phố $n \leq k^m$ bằng cách quy nạp theo m. Với $m = 0$ thì rõ ràng không thể có đường bay nào nên $n = 1 = k^0$. Giả sử nếu có không quá $m - 1$ hãng hàng không thì số thành phố không quá k^{m-1}. Bây giờ xét m hãng hàng không và giả sử cấp phép được cho các tuyến bay của n thành phố. Xét một hãng hàng không X trong đó và ta chia các thành phố ra các nhóm. Cụ thể là nhóm thứ i gồm các thành phố a có tính chất: hành trình bay dài nhất chỉ đi qua các tuyến được cấp phép cho X, kết thúc tại a thì có độ dài đúng bằng i. Khi đó, theo ràng buộc của đề bài thì ta sẽ có $0 \leq i \leq k-1$.

Ta thấy rằng trong mỗi nhóm i, giả sử có hai thành phố b, c với $b < c$ mà chặng (b, c) được cấp phép cho X. Theo định nghĩa thì có hành trình độ dài i kết thúc tại b, kết hợp thêm tuyến (b, c) nữa thì được hành trình độ dài $i+1$ kết thúc tại c, mâu thuẫn. Vì thế, trong mỗi nhóm, không có tuyến nào được cấp phép cho X. Tiếp đến, dễ thấy rằng trong mỗi nhóm, ta cấp phép cho không quá $m-1$ hãng hàng không nên số thành phố trong đó sẽ không quá k^{m-1}, từ đó có $n \leq k \cdot k^{m-1} = k^m$. Quy nạp hoàn tất.

Cuối cùng, để xây dựng, ta biểu diễn các số $0, 1, 2, \ldots, n-1$ theo hệ cơ số k thì rõ ràng, mỗi số sẽ có độ dài không vượt quá $m = \lceil \log_k n \rceil$ chữ số. Để chuẩn hóa độ dài cùng là m, với các biểu diễn $k-$phân chưa đủ số lượng chữ số này, ta viết thêm 0 vào trước. Ứng với hai số $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mà chữ số thứ i đầu tiên tính từ trái sang phải của chúng là khác nhau, ta sẽ cấp phép đường bay giữa a, b cho hãng hàng không thứ i. Chú ý rằng nếu a_i, b_i lần lượt là hai chữ số đó thì $a_i < b_i \Leftrightarrow a < b$ (do các vị trí trước đã đó bằng nhau).

$$a = a_{m-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0$$
$$b = b_{m-1} \ldots\ldots b_2 b_1 b_0$$

Ta sẽ chỉ ra cách cấp phép này là thỏa mãn. Thật vậy, giả sử có $k+1$ thành phố mà hành trình bay qua chúng có độ dài k và được cấp phép cho cùng một hãng hàng không thứ i. Giả sử hành trình đó là $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{k+1}$ thì $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k+1}$ và tại vị trí thứ i của các số này, ta cũng có một dãy $k+1$ chữ số sắp tăng ngặt, điều này vô lý vì trong hệ k phân chỉ có k chữ số. Như thế, cách xây dựng trên thỏa mãn điều kiện. Bài toán được giải quyết. $\square$

Cuối cùng, ta phân tích thêm về điểm chung của hai bài toán nêu trên: ta thấy cách đánh giá, cách xây dựng và cả đáp số của hai bài toán 8 và 9 là rất giống nhau. Cũng có thể chỉ ra rằng khi $k = 2$ thì Bài toán 8 cũng tương đương với Bài toán 9. Thật vậy, bởi vì ta có thể tiến hành "vô hướng hóa" graph G trong Bài 9 và sử dụng tính chất không có chu trình lẻ của graph lưỡng phân nên có thể thiết lập được song ánh, tham khảo [8]. Đáng tiếc là với $k > 2$ thì khó có thể chỉ ra sự tương đương nữa.

Một điểm chung khác là các cách xây dựng của cả hai bài cùng có nhược điểm là chưa có tính balanced, tức là sự cân bằng giữa các tập trong phân hoạch, có tập con có kích thước lớn, có tập có kích thước nhỏ. Nếu tìm ra được một cách xây dựng khác đảm bảo được thêm yếu tố này thì biết đâu hai bài toán sẽ có các ứng dụng thực tế thú vị. Tính cân bằng đó cũng có thể hiện trong bài toán sau đây (tham khảo thêm tại [9]):

Bài toán 10. *Cho cây nhị phân hoàn hảo có chiều cao là h, có tổng cộng $2^{h+1} - 1$ đỉnh. Chứng minh rằng có thể phân hoạch các đỉnh của cây ra thành h phần sao cho không có hai đỉnh nào cùng phần là tổ tiên của nhau.*

Tài liệu

[1] Website https://en.wikipedia.org/wiki/Hamming_code.

[2] Trần Nguyễn Nam Hưng, *Các bài toán tổ hợp chọn lọc, bài viết trên group "Hướng tới Olympic Toán VN"*, tháng 02/2021.

[3] Nguyễn Chu Gia Vượng, *Đáp án đề kiểm tra "Thử thách mùa hè" của VIASM năm 2022*.

[4] BTC kỳ thi Duyên hải Bắc Bộ 2022, *Đáp án đề kiểm tra khối 10, năm 2022*.

[5] Tlatoani on codeforces.com, *Editorial for Technocup 2022 — Elimination Round 1 and Codeforces Round 749 (Div. 1+Div. 2), 1586F - Defender of Childhood Dreams*, năm 2021.

[6] Đề kiểm tra chuẩn bị cho kỳ thi VMO 2022, tháng 02/2022.

[7] Vũ Hồng Sơn, *Bài giảng tổ hợp tại trường Đông Vinh năm 2021*.

[8] Hoàng Tiến Nguyên, *Ý tưởng liên hệ giữa bài toán 2.1 và bài toán 2.2*, tháng 03/2022.

[9] Quang Cao, Rinaldo Gagiano, Duy Huynh, Xun Yi, Son Hoang Dau, Phuc Lu Le, Quang-Hung Luu, Emanuele Viterbo, Yu-Chih Huang, Jingge Zhu, Mohammad M. Jalalzai, Chen Feng, *Ancestral Colorings of Perfect Binary Trees With Applications in Private Retrieval of Merkle Proofs*, available at: https://arxiv.org/abs/2205.05211.

Bài toán hay - Lời giải đẹp

Nguyễn Duy Liên

Giới thiệu

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số 6 về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quan những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên với 5 cách giải cho bài toán số 5 trong đề thi IMO 2022, một bài toán vừa có thể giải bằng lập luận rất sơ cấp, vừa có thể tiếp cận một cách bài bản hơn bằng các công cụ và định lý mạnh của Lý thuyết số.

1. Một số bài toán hay, lời giải đẹp

Bài toán 1. *Tìm tất cả các bộ số nguyên dương* (a, b, p) *với* p *nguyên tố và* $a^p = b! + p$.

Lời giải 1. *Ta chia hai trường hợp sau:*

- *Xét* $p = 2$*, phương trình ban đầu trở thành:* $a^2 = b! + 2 \quad (1)$
  - *Nếu* $b \geq 3$ *thì vế phải của* (1) *chia 3 dư 2 suy ra* $a^2 \equiv 2 (\bmod 3)$ *vô lý.*
  - *Nếu* $b = 2$ *suy ra* $a^2 = 4$ *hay* $a = 2$ *vậy ta được bộ* $(a, b, p) = (2, 2, 2)$.
  - *Nếu* $b = 1$ *suy ra* $a^2 = 3$ *vô lý.*
- *Xét* $p > 2$

- *Nếu $b < p$ thì do $(p, b!) = 1$ nên $(a^p, b!) = 1$ suy ra $a > b$.*
  Khi đó $a^p - p \geq (b+1)^p - p > b^p > b!$, mâu thuẫn.

- *Nếu $b \geq p$. Khi đó $b! + p$ chia hết cho $p \Rightarrow a \vdots p \Rightarrow a \geq p$.*
  Mặt khác $v_2(b!) = 1$ (ngược lại $v_2(b!) > 1$ từ đó suy ra $p \vdots p^2$ vô lý) suy ra $b < 2p$, kéo theo $a \geq p$. Do $p > 2$ nên ta có

$$a^p = b! + p < (2p)! < p^{2p} \Rightarrow a < p^2$$

  Đặt $a = kp\,(k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k < p)$ thì $a^p \vdots k, b! \vdots k$ suy ra $p \vdots k$. Do đó $k = 1 \Rightarrow a = p$, khi đó phương trình trở thành $p\left(p^{p-1} - 1\right) = b!$ (2)
  Theo định lý bổ đề LTE ta có

$$v_2\left(p^{p-1} - 1\right) = 2v_2(p-1) + v_2(p+1) - 1$$

  Mà từ phương trình ta có $b \geq p + 1$ nên b ! chứa các ước là $2, \frac{p-1}{2}, p-1, p+1$.
  Hơn nữa tổng số mũ đúng của các ước trên là $2v_2(p-1) + v_2(p+1)$.
  Từ đó để 2 biểu thức bằng nhau thì 4 số trên bắt buộc phải có các số giống nhau, thử các trường hợp ta được $p - 1 = 2 \Rightarrow p = 3$, thay vào ta được $b = 4$.
  Khi đó ta được bộ $(a, b, p) = (3, 4, 3)$.
  Vậy có hai bộ số nguyên dương (a, b, p) thỏa mãn bài toán là $(2, 2, 2)$ và $(3, 4, 3)$.

Lời giải 2. *Giả sử ta có bộ ba (a, b, p) thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét hai trường hợp sau:*

- ***Trường hợp 1:*** $b < p$
  Khi đó $a^p = b! + p < b^p \Rightarrow a < b \Rightarrow b! \vdots a \Rightarrow p \vdots a \Rightarrow a = 1$.
  Từ đó ta có $b! + p = 1$ (vô lý).

- ***Trường hợp 2:*** $b \geq p$ *Khi đó $b! \vdots p \Rightarrow a^p \vdots p \Rightarrow a \vdots p \Rightarrow v_p(b! + p) \geq p \Rightarrow v_p(b!) = 1 \Rightarrow p \leq b < 2p$.*
  Từ đó ta có: $a^p = b! + p < p^{2p} \Rightarrow a < p^2$.
  Giả sử a có ước nguyên tố $q \neq p$, khi đó $b! \equiv -p (\bmod q) \Rightarrow b < q$. Suy ra

$$p^2 > a \geq pq > pb \geq p^2 \text{ (vô lý)}$$

  Vậy a không có ước nguyên tố khác p, mà $a < p^2$ nên $a = p$.
  Vậy phương trình đã cho trở thành $b! = p^p - p$ (3).

  - *Nếu $p = 2$ thì (3) trở thành : $b! = 2$ suy ra $b = 2$ ta được bộ $(a, b, p) = (2, 2, 2)$.*

  - *Nếu $p = 3$ thì (3) trở thành : $b! = 24$ suy ra $b = 4$ ta được bộ $(a, b, p) = (3, 4, 3)$.*

– *Nếu* $p \geq 5$ *thì ta có*

$$\begin{aligned} v_2\left(p^p-p\right) &= v_2\left(p^{p-1}-1\right) = v_2(p-1)+v_2(p+1)+v_2(p-1)-1 \\ &= \begin{cases} v_2\left((p-1)^2\right), p \equiv 1(\bmod 4) \\ v_2\left(p^2-1\right), p \equiv 3(\bmod 4) \end{cases} \end{aligned}$$

Mặt khác $v_2(b!) = b - s_2(b) > b - \log_2 b - 1$ *(Legendre's).*
Từ đó suy ra

$$b-\log_2 b-1 < \max\left\{v_2\left((p-1)^2\right), v_2\left(p^2-1\right)\right\} vb^2-1 \geq p^2-1 > 2^{b-\log_2 b-1} = \frac{2^b}{2b}$$

Suy ra

$$2b^3-2b > 2^b \quad (4)$$

Kiểm tra được với bất đẳng (4) sai với $b \geq 12$. *Do đó* $b \leq 11 \Rightarrow p \leq 11$.

∗ *Với* $p = 5$ *ta có* $v_2(b!) = v_2\left(5^5-5\right) = 4$, *từ đó có* $6 \leq b \leq 7$ *ta thử lại thấy không thỏa mãn .*

∗ *Với* $p = 7$ *ta có* $v_2(b!) = v_2\left(7^7-7\right) = 4$, *từ đó có* $6 \leq b \leq 7$ *ta thử lại thấy không thỏa mãn .*

∗ *Với* $p = 11$ *ta có* $v_2(b!) = v_2\left(11^{11}-1\right) = 3$, *từ đó có* $4 \leq b \leq 5$ *ta thử lại thấy không thỏa mãn.*

Vậy có hai bộ số nguyên dương (a, b, p) *thỏa mãn bài toán là* $(2, 2, 2)$ *và* $(3, 4, 3)$.

Lời giải 3. *Trước tiên, ta có nhận xét như sau:*

Nhận xét 1. *Với mọi số nguyên tố* p *ta có bất đẳng thức* $1 < 1+p < 2^p \Leftrightarrow 1 < (1+p)^{\frac{1}{p}} < 2$. *Từ đây ta có* $b = 1$ *không thỏa mãn phương trình* $a^p = b! + p$. *Ta xét hai trường hợp sau đây.*

- ***Trường hợp 1:*** *Nếu* $2 \leq b < p$.
  Gọi q *là số nguyên tố bất kỳ thỏa mãn* $q \mid b! + p = a^p$ *thì* $q > b$.
  Từ đó dẫn đến : $b! + p \leq b^p < q^p \leq a^p$ *khi* $2 \leq b < p$, *mâu thuẫn.*

- ***Trường hợp 2:*** *Nếu* $b \geq p$
  Thì từ đề bài: $a^p = b! + p$ *ta có* $a \vdots p$ *đặt* $a = kp$ *(với* $k \in \mathbb{Z}^+$*). Lưu ý* $v_p\left(a^p-p\right) = 1$ *vì vậy* $b < 2p$ *từ đây ta có* $1 \leq k < p$.
  Nếu $k > 1$ *từ đề bài ta có* $(kp)^p \leq (2p-1)! + p$. *Lấy một số nguyên tố* $r < p, r \mid k$ *thì* $b > r$, *nhưng* $(kp)^p > (r-1)! + p$, *mâu thuẫn .*
  Vậy $k = 1$ *hay* $a = p$.

Khi đó phương trình ban đầu trở thành $p^p = b! + p \Leftrightarrow p^p - p = b\,!$
Ta có $v_2(p^p - p) \leq 2\log_2(p-1)$ *(bổ đề LTE) và*

$$v_2(b!) \geq v_2(p!) = p - s_2(p) \geq p - \log_2(p+1)$$

(Legendre's). Suy ra $p - \log_2(p+1) \leq 2\log_2(p-1) \Rightarrow p < 10$*, kiểm tra các trường hợp hữu hạn trên* $p = 2, 3, 5, 7$ *ta thu được* $p = 2 = a; b = 2$ *và* $p = 3 = a; b = 4$.

Vậy có hai bộ số nguyên dương (a, b, p) *thỏa mãn bài toán là* $(2, 2, 2)$ *và* $(3, 4, 3)$

Lời giải 4. *Trước tiên, ta có nhận xét sau:*

Nhận xét 1. a *không chia hết cho bất kì số nguyên số nào* $q < p$.

Chứng minh. *Giả sử ngược lại* $q \mid a$*, suy ra* $q \backslash a^p - p = b! \Rightarrow b < q$*. Do đó* $b! \leq (q-1)! < q^{p-1} < q^p - p$*, vì vậy* $a < q$*, mâu thuẫn.*

Bây giờ, chúng ta xét hai trường hợp sau:

- ***Trường hợp 1:*** *Nếu* $p \nmid a$.
  $p \nmid a \Rightarrow p \nmid b! \Rightarrow b < p$*, như vậy* $b! \leq (p-1)! < p^{p-1} \leq p^p - p$ *hoặc* $a < p$ *mâu thuẫn.*
- ***Trường hợp 2:*** *Nếu* $p \mid a$*. Do* $v_p(a^p - p) = 1 \Rightarrow p^2 \nmid a^p - p \Rightarrow b < 2p$*, áp dụng bất đẳng thức* $\mathrm{AM} - \mathrm{GM}$ *ta được*

$$\begin{aligned} b! &\leq (2p-1)! \\ &= (1\cdot(2p-1))(2\cdot(2p-2))\cdots((p-1)\cdot(p+1))\cdot p \\ &< (p^2)\cdot(p^2)\cdots(p^2)\cdot p \\ &= p^{2p-1} \leq (p^2)^p - p \end{aligned}$$

  Suy ra $a < p^2$*. Vậy từ đây ta được* $a = p$.
  Khi đó phương trình đã cho trở thành $a^p = b! + p \Leftrightarrow p^p - p = b\,!$.

  – *Nếu* $p = 2$ *dễ dàng ta tính được* $a = 2, b = 2$ *ta được bộ* $(a, b, c) = (2, 2, 2)$
  – *Nếu p lẻ, khi đó ta có* $v_2(b!) \geq \frac{b-1}{2} + \frac{b-3}{4} \geq \frac{3p-5}{4}$ *và*

$$v_2(p^p - p) = 2v_2(p-1) + v_2(p+1) - 1 \leq \log_2(p+1) + \log_2(p-1) < 2\log_2 p$$

  Do đó chúng ta phải có $\frac{3p-5}{4} \leq 2\log_2 p \Leftrightarrow p \geq 2^{\frac{3p-5}{8}}$*, bất đẳng thức này chỉ đúng với* $p \leq 7$.

Tuy nhiên nếu $p = 7 \Rightarrow 5 \mid 7^7 - 7$ *(vô lý) và* $p = 5 \Rightarrow b! = 5^5 - 5 = 3120$ *(vô lý).*

$p = 3 \Rightarrow b! = 3^3 - 3 = 24 \Rightarrow b = 4$ *ta được bộ* $(a, b, c) = (3, 4, 3)$.

Vậy có hai bộ số nguyên dương (a, b, p) *thỏa mãn bài toán là* $(2, 2, 2)$ *và* $(3, 4, 3)$.

Lời giải 5. *Trước tiên, ta có hai nhận xét sau:*

Nhận xét 1. *Ta phải có* $b \geq p$.

Chứng minh. *Giả sử ngược lại* $b < p$. *Với mọi số nguyên tố* $q \leq b$, *chúng ta có* $q \mid b\,!$ *và* $q \nmid p$ *vì vậy* $q \nmid a$ *kể từ'* $a > 1$.
Điều này có nghĩa là $a \geq b + 1$ *và* $(b + 1)^p \leq b! + p$.
Với mỗi $p \geq 2$ *chúng ta có* $(b + 1)^p > b^p + pb^{p-1} \geq b^p + p \geq b\,! + p$ *vô lý.*

Nhận xét 2. *Ta phải có* $a = p$.

Chứng minh. *Do* $b \geq p \Rightarrow p \mid b! + p$, *điều này có nghĩa là* $p^p \mid b! + p$ *vì vậy* $p \mid a$ *và* $b \leq 2p - 1$.
Bây giờ ta lưu ý rằng không có số nguyên tố nào $q < p$ *có thể* $q \mid a$ *vì số nguyên tố* q *đó đều chia hết* $b!$, *nhưng không chia hết* p *nên* $a^p = b! + p$ *không xảy ra.*
Nếu $a \neq p \Rightarrow a \geq p^2$, *và* $p^{2p} \leq (2p - 1)! + p$. *Mặt khác*

$$(2p-1)! = \prod_{t=1, t\neq p}^{2p-1} [t(2p-t)] \cdot p < \left(p^2\right)^{p-1} \cdot p = p^{2p-1} (\text{ bđt AM-GM})$$

Điều này có nghĩa là $p^{2p} - p^{2p-1} = p^{2p-1}(p - 1) < p$ *(mâu thuẫn).*
Vậy $a = p$.
Khi đó phương trình ban đầu trở thành $p^p = b! + p \Leftrightarrow p^{p-1}(p - 1) = b!$, *cho một số* $p \leq b \leq 2p - 1$

- *Nếu* $p \geq 5$ *thì theo định lý Zsigmondy tồn tại một số nguyên tố* q *mà* $\text{ord}_q(p) = p - 1$ *, khi đó* $q \mid b\,!$ *và* $q \geq 2p - 1$ *(do* $p - 1 \mid q$ *).*
  Vì vậy chúng ta phải có $b = 2p - 1$, *nhưng khi đó* $(2p - 1)! \geq (2p - 1)(2p - 2) \cdots p > p^p$ *(mâu thuẫn).*
  Vậy $p \leq 3$.
- *Nếu* $p = 2$ *dễ dàng ta tính được* $a = 2, b = 2$ *ta được bộ* $(a, b, c) = (2, 2, 2)$.
- *Nếu* $p = 3 \Rightarrow b! = 3^3 - 3 = 24 \Rightarrow b = 4$ *ta được bộ* $(a, b, c) = (3, 4, 3)$.
  Vậy có hai bộ số nguyên dương (a, b, p) *thỏa mãn bài toán là* $(2, 2, 2)$ *và* $(3, 4, 3)$.

2. Các bài tập đề nghị

Từ những cách giải trên các bạn vận dụng vào giải các bài toán tương tự sau đây nhé.

Bài toán 1 (BulgariaMO 96). *Tìm tất cả các số nguyên không âm x, y, z sao cho:*

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z.$$

Bài toán 2 (USAMO 1998). *Tìm tất cả các số nguyên không âm x, y, z sao cho:* $3^x - 2^y = 19^z$.

Bài toán 3 (VN TST 2019). *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z sao cho:* $2^x + 1 = 7^y + 2^z$.

Bài toán 4 (EuroOM 2014). *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn:*

$$20^x + 14^{2y} = (x + 2y + z)^{zt}.$$

Bài toán 5 (Bilkent University Turkey -3/2022). *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn*

$$2^p = 2^{q-2} + q!$$

Và các bài toán trên liệu có bao nhiêu cách giải các bạn hãy tìm tòi và suy nghĩ cùng tôi.