Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

EpsiLON

No. 21
13.02

Như vậy nguyên lý tính toán lượng tử là việc tác động toán tử Hamiltonian để các bít biến chuyển theo phương trình Schrödinger. Cái khó của việc chế tạo máy tính lượng tử là ở chỗ, người ta vừa phải thiết lập được hệ các hạt rất nhỏ và phải tác động được vào trạng thái của từng hạt một. **Nguyễn Lê Anh (Máy tính lượng tử)**

Giả sử có gò đáy là hình vuông xếp nửa tầng, bốn mặt đều, có chiều rộng trên là 7 viên gạch, chiều rộng dưới là 12 viên, hỏi tổng số viên gạch?
Phạm Văn Hoàng và cộng sự
(Toán gò đống – Dẫn tới bài toán tính tổng hữu hạn trong các sách toán Hán Nôm)

THẦY LÊ HẢI CHÂU VÀ IMO 1983
Trần Nam Dũng

TỪ BÀI TOÁN TỔNG BÌNH PHƯƠNG TỚI LÝ THUYẾT PHỔ
Phan Thành Nam

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

Biên tập viên:
Lê Viết Ân
Võ Quốc Bá Cẩn
Trần Quang Hùng
Nguyễn Văn Huyện
Lê Phúc Lữ
Tống Hữu Nhân
Nguyễn Tất Thu
Đặng Nguyễn Đức Tiến

Chủ biên:
Trần Nam Dũng

MỤC LỤC

TỪ BÀI TOÁN TỔNG BÌNH PHƯƠNG TỚI LÝ THUYẾT PHỔ

Phan Thành Nam (Đại học Munich, Đức)

GIỚI THIỆU

Bài viết này sẽ trình bày mối quan hệ từ một bài toán phổ thông quen thuộc (phân tích một số thành tổng hai bình phương) tới một số bài toán mở quan trọng trong lý thuyết phổ (giả thuyết Pólya và giả thuyết Lieb-Thirring).

1. Bài toán phân tích tổng bình phương

Chúng ta bắt đầu với một bài toán số học quen thuộc.

Bài toán 1 (Phân tích tổng bình phương). Tìm tất cả các số nguyên dương n có thể viết thành tổng của hai bình phương, tức là phương trình

$$n = x^2 + y^2$$

có nghiệm nguyên $x, y \in \mathbb{Z}$.

Lời giải tóm tắt. Trước hết, ta nhận xét rằng nếu x là số nguyên, thì $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, tức là x^2 chia 4 dư 0 hoặc 1. Do đó, nếu $n = x^2 + y^2$ với $x, y \in \mathbb{Z}$, thì $n \equiv 0,1,2 \pmod 4$.

Hệ quả là ta có thể loại trừ tất cả các số $n \equiv 3 \pmod 4$. Nói riêng, nếu $n = p^\alpha$ với p là một số nguyên tố $\equiv 3 \pmod 4$, thì số mũ α phải chẵn.

Tổng quát hơn, nếu trong phân tích thừa số nguyên tố của n có chứa p^α với p là một số nguyên tố $\equiv 3 \pmod 4$, thì số mũ α phải chẵn. Điều này có thể chứng minh từ

Bổ đề: Nếu p là một số nguyên tố $\equiv 3 \pmod 4$ và $n = x^2 + y^2$ chia hết cho p, thì cả x và y đều chia hết cho p.

Chứng minh bổ đề. Bạn đọc có thể tự chứng minh bằng cách dùng định lý nhỏ của Fermat ($a^p \equiv a$ (mod p) với mọi $a \in \mathbb{Z}$). □

Tóm lại *điều kiện cần* để viết $n = x^2 + y^2$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ là ta có phân tích thừa số nguyên tố

$$n = 2^k \prod_p p^{2\alpha_p} \prod_q q^{\beta_q} \tag{1}$$

với các số nguyên tố $p \equiv 3 \pmod 4$, $q \equiv 1 \pmod 4$ và các số mũ $k, \alpha_p, \beta_p \in \{0, 1, 2, ...\}$ tuỳ ý.

Ngược lại, (1) cũng chính là *điều kiện đủ* để viết $n = x^2 + y^2$ với $x, y \in \mathbb{Z}$. Thật vậy, vì $\prod_p p^{2\alpha_p}$ là một số chính phương, nên ta chỉ cần xét $n = 2^k \prod_q q^{\beta_q}$ với các số nguyên tố $q \equiv 1 \pmod 4$. Từ đẳng thức Diophantus

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

ta có thể quy về hai trường hợp cơ bản: $n = 2$ và $n = q$ là một số nguyên tố $\equiv 1 \pmod 4$. Rõ ràng $2 = 1^2 + 1^2$. Trong trường hợp còn lại ta có

Định lý (Girard-Fermat) Nếu q là một số nguyên tố $\equiv 1 \pmod 4$, thì $q = x^2 + y^2$ với $x, y \in \mathbb{Z}$.

Tóm lại, (1) là điều kiện cần và đủ để một số có thể viết thành tổng của hai bình phương. $\square$

Chúng ta vẫn cần phải chứng minh định lý Girard-Fermat. Kết quả này được Girard phát biểu đầu tiên vào năm 1625 [1]. Sau đó trong một bức thư gửi Mersenne cuối năm 1640, Fermat nêu ra một phát biểu tổng quát, bao gồm cả số cách biểu diễn $q^\beta = x^2 + y^2$, nên kết quả này cũng được gọi là "Định lý Giáng sinh" của Fermat. Theo thường lệ, Fermat không cung cấp bất cứ chứng minh nào. Ngày nay có hơn 50 chứng minh khác nhau cho định lý này. Năm 1749, Euler đưa ra chứng minh đầu tiên bằng kỹ thuật *lùi vô hạn* trong một lá thư viết cho Goldbach. Năm 1975, Lagrange đưa ra một chứng minh khác dựa trên việc nghiên cứu các *dạng toàn phương*. Ông sử dụng kết quả cơ bản sau đây

Bổ đề (Lagrange) Nếu q là một số nguyên tố $\equiv 1 \pmod 4$, thì tồn tại một số nguyên a sao cho $a^2 + 1$ chia hết cho q.

Chứng minh bổ đề. Ta có thể chọn $a = ((q-1)/2)!$ và dùng định lý Wilson $a^2 \equiv (q-1)! \equiv -1$ (mod q). $\square$

Dưới đây chúng ta sẽ kết hợp Bổ đề Lagrange với các ý tưởng hình học để chứng minh định lý Girard-Fermat. Một kết quả rất hữu ích là định lý Minkowski cho các *lưới*.

Định nghĩa: Xét $(e_i)_{i=1}^d$ là một cơ sở tuyến tính của $\mathbb{R}^d$, tức là $\mathbb{R}^d = \{\sum_{i=1}^d x_i e_i \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$. Khi đó lưới sinh bởi $(e_i)_{i=1}^d$ là

$$\Lambda = \Big\{ \sum_{i=1}^d m_i e_i \,|\, m_1, ..., m_d \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Chú ý rằng hai cơ sở khác nhau có thể sinh cùng một lưới Λ. Tuy nhiên *định thức* $\det \Lambda = \det((e_i \cdot e_j)_{i,j=1}^d)$ luôn độc lập với cách chọn cơ sở.

Định lý (Minkowski) Xét Λ là một lưới trong $\mathbb{R}^d$ và Ω là một tập lồi, bị chặn, đối xứng tâm sao cho

$$\mathrm{Vol}(\Omega) > 2^d \det \Lambda.$$

Khi đó $\Omega \cap \Lambda$ chứa ít nhất một điểm khác 0.

Chứng minh. Ta xét trường hợp $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ ($\det \Lambda = 1$), trường hợp tổng quát có thể chứng minh bằng ý tưởng tương tự. Giả sử phản chứng $\Omega \cap \Lambda = \{0\}$. Đặt $A = \frac{1}{2}\Omega = \{\frac{1}{2}x \mid x \in \Omega\}$. Khi đó các tập hợp $A + x$ luôn rời nhau với $x \in \mathbb{Z}^d$ khác nhau. Lấy D là đường kính của A và $N \geq D$, ta có

$$\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d \cap [-N,N]^d} (A + x) \subset [-(N + D, N + D)]^d$$

Lấy thể tích hai vế ta thu được

$$(2N)^d \mathrm{Vol}(A) \leq (2(N + D))^d$$

Chia hai vế cho $(2N)^d$ và lấy $N \to \infty$ ta thu được $1 \geq \mathrm{Vol}(A) = 2^{-d}\mathrm{Vol}(\Omega)$, mâu thuẫn với giả thiết $\mathrm{Vol}(\Omega) > 2^d \det \Lambda$. □

Bây giờ ta có thể kết luận

Chứng minh định lý Girard-Fermat. Xét một số nguyên tố $q \equiv 1 \pmod 4$. Theo bổ đề Lagrange, tồn tại số nguyên a sao cho $a^2 + 1$ chia hết cho q.

Xét lưới $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ sinh bởi $z_1 = (1, a)$ và $z_2(0, q)$. Ta có $\det \Lambda = q$. Tập hợp

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2q\}$$

lồi, bị chặn, đối xứng tâm, và có

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = 2\pi q > 4q = 2^2 \det \Lambda.$$

Do đó, theo định lý Minkowski tồn tại $(0, 0) \neq (x, y) \in \Omega \cap \Lambda$, tức là $(x, y) = m_1 z_1 + m_2 z_2 = (m_1, am_1 + qm_2)$ với $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ và

$$2q > x^2 + y^2 = m_1^2 + (am_1 + qm_2)^2 \equiv m_1^2(1 + a^2) \equiv 0 \pmod q.$$

Vậy ta kết luận $q = x^2 + y^2 = m_1^2 + (am_1 + qm_2)^2$, tức là q có thể viết thành tổng của hai bình phương. □

Một hệ quả quan trọng của định lý Minkowski là

Định lý (Bất đẳng thức Minkowski cho vector ngắn nhất) Với mọi lưới bất kỳ $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, tồn tại một vector $x \in \Lambda \setminus \{0\}$ thoả mãn $\|x\|_\infty \leq |\det \Lambda|^{1/d}$.

Ở đây ta dùng chuẩn $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, ..., |x_d|)$ với $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Chứng minh. Ta có thể áp dụng định lý Minkowski với $\Omega = \{y : \|y\|_\infty < \ell\}$ và $\ell = \min\{\|x\|_\infty \mid x \in \Lambda \setminus \{0\}\}$. $\square$

Trong chứng minh định lý Girard-Fermat bên trên, ta có thể chọn (x, y) là vector (khác 0) ngắn nhất trên $\Lambda = \Lambda(z_1, z_2)$. Trong thực tế, vector ngắn nhất này có thể tính được rất hiệu quả nhờ thuật toán tìm cơ sở giản lược trên lưới của Lenstra-Lenstra-Lovász (LLL). Bạn đọc hứng thú về thuật toán LLL và các ứng dụng trong lý thuyết mật mã có thể xem thêm ở [2].

2. Bài toán hình tròn Gauss

Số nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 = n$ thường được ký hiệu là $r_2(n)$. Từ bài toán phân tích tổng bình phương, ta biết rằng $r_2(n) > 0$ khi và chỉ khi n có dạng phân tích thừa số nguyên tố như (1), tức là

$$n = 2^k \prod_p p^{2\alpha_p} \prod_q q^{\beta_q}$$

với các số nguyên tố $p \equiv 3 \pmod 4$ và $q \equiv 1 \pmod 4$. Hơn nữa, ta có công thức Jacobi [3]

$$r_2(n) = 4 \prod_q (1 + \beta_q). \tag{2}$$

Bài tập: Chứng minh rằng với mọi $\varepsilon > 0$ ta có $r_2(n) \le O(n^\varepsilon)$ khi $n \to \infty$.

Dưới ngôn ngữ hình học, ta thấy rằng $r_2(n)$ là lời giải cho bài toán sau (với $R = \sqrt{n}$).

Bài toán 1'. Có bao nhiêu điểm nguyên *nằm trên* đường tròn bán kính R?

Tương tự, ta có bài toán hình tròn của Gauss.

Bài toán 2 (Gauss) Có bao nhiêu điểm nguyên *nằm trong* hình tròn bán kính R?

Với mỗi $R > 0$, lời giải cho bài toán 2 có thể tính một cách chính xác là

$$S(R) = \sum_{n=0}^{R^2} r_2(n).$$

Dưới đây chúng ta quan tâm về dáng điệu tiệm cận của $S(R)$ khi $R \to \infty$. Vì $S(R)$ xấp xỉ bằng πR^2, diện tích của hình tròn bán kính R, nên đại lượng cần quan sát là sai số

$$E(R) = S(R) - \pi R^2.$$

Gauss chứng minh rằng $|E(R)| \leq O(R)$. Điều này không quá ngạc nhiên, vì $O(R)$ là độ lớn của chu vi hình tròn bán kính R. Điều đáng ngạc nhiên là $E(R)$ thực sự nhỏ hơn nhiều.

Giả thuyết: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta có $|E(R)| \leq O(R^{1/2+\varepsilon})$ khi $R \to \infty$.

Ở đây số mũ $1/2 + \varepsilon$ là tối ưu vì Hardy chứng minh năm 1915 rằng $|E(R)| \notin O(R^{1/2} \log R)$. Kết quả tốt nhất hiện nay là của Huxley [5]

$$|E(R)| \leq O(R^{\theta} (\log R)^{2.26}), \quad \theta = \frac{131}{208} = 0.6289...$$

Dưới đây, chúng ta sẽ chứng minh rằng $|E(R)| \leq O(R^{2/3})$ bằng *công thức tổng Poisson*. Đây là một ứng dụng rất thú vị của biến đổi Fourier.

Định nghĩa (Biến đổi Fourier) Với mỗi hàm số $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ta định nghĩa

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi \mathbf{i} k\cdot x} f(x) \mathrm{d}x$$

trong đó $\mathbf{i}^2 = -1$ và $k \cdot x = \sum_{j=1}^d k_j x_j$ với $k = (k_j), x = (x_j)$.

Định lý (Công thức tổng Poisson) Nếu $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, ta có

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k).$$

Chứng minh. Vì hàm số $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$,

$$F(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} f(x + y),$$

là một hàm tuần hoàn (chu kỳ 1), ta có thể viết dưới dạng chuỗi Fourier

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{2\pi \mathbf{i} k \cdot x}$$

where

$$\begin{aligned} a_k = \int_{[0,1]^d} F(x) e^{-2\pi \mathbf{i} k\cdot x} \mathrm{d}x &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d} f(x+y) e^{-2\pi \mathbf{i} k \cdot x} \mathrm{d}x \\ = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \int_{y + [0,1]^d} f(x) e^{-2\pi \mathbf{i} k\cdot x} \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi \mathbf{i} k \cdot x} \mathrm{d}x = \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} f(x + y) = F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) e^{2\pi \mathbf{i} k \cdot x}.$$

Nói riêng, chọn $x = 0$ ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chú ý là trong chứng minh bên trên, công thức

$$\mathbb{1}_{[0,1]^d} F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k \cdot x}$$

ban đầu được suy ta từ đẳng thức Parseval trong $L^2([0,1]^d)$, do đó về mặt nguyên tắc nó đúng *hầu hết từng điểm*. Tuy nhiên, thực ra nó đúng *với mọi điểm* vì các hàm số cả hai vế đều liên tục và được nới rộng bằng tính tuần hoàn. Do đó, điều kiện mấu chốt để công thức tổng Poisson đúng là F và $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k\cdot x}$ đều liên tục. Các điều kiện này thoả mãn chẳng hạn khi $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (khi đó $\widehat{f}(k)$ giảm nhanh hơn mọi đa thức khi $|k| \to \infty$).

Bây giờ chúng ta có thể chứng minh

Định lý. Xét $S(R)$ là số điểm nguyên nằm trong $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$. Ta có

$$|E(R)| = |S(R) - \pi R^2| \leq O(R^{2/3}), \quad R \to \infty.$$

Chứng minh của Hugh Montgomery. **Bước 1.** Chú ý rằng

$$S(R) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{1}_{B_R(0)}(x).$$

Để sử dụng công thức Poisson, ta sẽ thay hàm đặc trưng $\mathbb{1}_{B_R(0)}$ bởi các hàm trơn. Xét một hàm trơn đối xứng

$$0 \leq \varphi_1 \in C_c^\infty(B_1(0)), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1 = 1$$

và định nghĩa với tham số $1 \gg h > 0$ và $r > 0$,

$$\varphi_h(x) = h^{-2}\varphi_1(x/h), \quad f_r(x) = \varphi_h * \mathbb{1}_{B_r(0)}(x) = \int_{B_r(0)} \varphi_h(x-y)\mathrm{d}y$$

Khi đó $f_r \in C_c^\infty$ và ta có thể dùng công thức tổng Poisson

$$\widetilde{S}(r) := \sum_{x\in\mathbb{Z}^2} f_r(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \widehat{f}_r(k).$$

Hơn nữa

$$f_{R-h} \leq \mathbb{1}_{B_R(0)} \leq f_{R+h} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{S}(R-h) \leq S(R) \leq \widetilde{S}(R+h)$$

Bước 2. Bây giờ ta đánh giá $|\widetilde{S}(r) - \pi r^2|$. Chú ý rằng

$$\widehat{f}_r(0) = \int_{\mathbb{R}^2} f_r = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_h \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{B_r(0)} = \pi r^2.$$

Do đó trong tổng $\widetilde{S}(r)$ ta cần chặn $\sum_{k\neq 0} \widehat{f}_r(k)$. Với $k \neq 0$, ta có

$$\widehat{f}_r(k) = \widehat{\varphi_h}(k)\widehat{\mathbb{1}_{B_r(0)}}(k) = \widehat{\varphi_1}(hk) r^2 \widehat{\mathbb{1}_{B_1(0)}}(rk) = \widehat{\varphi_1}(hk) r^2 \frac{J_1(2\pi r|k|)}{r|k|}$$

với *hàm Bessel*

$$J_1(t) = \frac{1}{\mathbf{i}\pi}\int_0^{\pi} e^{\mathbf{i}t\cos\theta}\cos\theta \mathrm{d}\theta.$$

Ở đây ta sử dụng $\widehat{\varphi_h}(k) = \widehat{\varphi_1}(hk)$, $r^{-2}\widehat{\mathbb{1}_{B_r(0)}}(k) = \widehat{\varphi_1}(rk)$, và

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{1}_{B_1(0)}}(k) = \widehat{\mathbb{1}_{B_1(0)}}(|k|,0) &= \iint\limits_{|x_1|^2+|x_2|^2<1} e^{-2\pi \mathbf{i}|k|x_1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi\mathbf{i}|k|x_1}2\sqrt{1-x_1^2}\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^{\pi} e^{2\pi\mathbf{i}|k|\cos\theta}2(\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{\pi\mathbf{i}|k|}\int_0^{\pi}\frac{d}{d\theta}\Big(e^{2\pi\mathbf{i}|k|\cos\theta}\Big)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\pi\mathbf{i}|k|}\int_0^{\pi} e^{2\pi\mathbf{i}|k|\cos\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{J_1(2\pi|k|)}{|k|}.
\end{aligned}$$

Bạn đọc có thể tự chứng minh tính chất căn bản sau đây của hàm Bessel

Bài tập: Chứng minh rằng $J_1(t) \le Ct^{-1/2}$ for all $t > 0$.

Từ đó, ta có

$$|\widehat{f}_r(k)| = |\widehat{\varphi_1}(hk)|\frac{r}{|k|}J_1(r|k|) \le \frac{C_\ell r^{1/2}}{(h|k|)^{\ell}|k|^{3/2}}, \quad \forall \ell \ge 0.$$

Với mọi tham số $K > 0$, ta có thể đánh giá

$$\sum_{0<|k|\le K}|\widehat{f}_r(k)| \le \sum_{0<|k|\le K}\frac{Cr^{1/2}}{|k|^{3/2}} \le Cr^{1/2}K^{1/2}.$$

và

$$\sum_{|k|>K}|\widehat{f}_r(k)| \le \sum_{|k|>K}\frac{Cr^{1/2}}{h|k|^{5/2}} \le C\frac{r^{1/2}}{hK^{1/2}}.$$

Tóm lại

$$\sum_{k\neq 0}|\widehat{f}_r(k)| \le Cr^{1/2}K^{1/2} + C\frac{r^{1/2}}{hK^{1/2}}$$

và bằng cách chọn $K > 0$ tối ưu chúng ta thu được

$$|\widetilde{S}(r) - \pi r^2| = \sum_{k\neq 0}|\widehat{f}_r(k)| \le C\frac{r^{1/2}}{h^{1/2}}.$$

Bước 3. Cuối cùng, từ $\widetilde{S}(R-h) \le S(R) \le \widetilde{S}(R+h)$ và kết quả ở Bước 2, chúng ta kết luận rằng

$$\pi(R-h)^2 - C\frac{(R-h)^{1/2}}{h^{1/2}} \le S(R) \le \pi(R+h)^2 + C\frac{(R+h)^{1/2}}{h^{1/2}}$$

và do đó

$$|S(R) - \pi R^2| \le CRh + C\frac{R^{1/2}}{h^{1/2}}$$

Chọn h tối ưu (chẳng hạn $h \sim R^{-1/3}$) ta thu được $|S(R) - \pi R^2| \le CR^{2/3}$. □

Chứng minh của Huxley [5] cho đánh giá tốt nhất hiện nay cũng dựa trên chiến thuật tương tự như trên, tuy nhiên bước trơn hoá hàm đặc trưng $\mathbb{1}_{B_R(0)}$ được làm tốt hơn (chú ý là $131/208 = 0.6289...$ vẫn tương đối gần $2/3 = 0.6666...$). Các kỹ thuật này cũng có thể sử dụng để đánh giá độ tăng của hàm zeta Riemann trên đường thẳng $\Re(z) = 1/2$.

Nếu bạn đọc hứng thú với các ứng dụng của tổng Poisson vào hàm zeta Riemann, xin đọc lại bài viết [6].

3. Lý thuyết phổ cho Laplacian

Xét $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là một tập mở, bị chặn. Chúng ta biết rằng toán tử Dirichlet Laplacian $-\Delta$ trên $L^2(\Omega)$ có các hàm riêng trực chuẩn $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$-\Delta u_n = \lambda_n u_n, \quad u_{n|\partial\Omega} = 0$$

với các trị riêng

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq ..., \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Một trong những vấn đề căn bản trong lý thuyết phổ là

Bài toán 3. Xác định dáng điệu tiệm cận của λ_n khi $n \to \infty$.

Vấn đề này được liên hệ tới âm nhạc từ cuốn sách của Rayleigh năm 1877 [7], sau đó nó đã thâm nhập sâu rộng vào nhiều lĩnh vực ứng dụng khác, chẳng hạn vật lý lượng tử. Như phân tích trong [7], độ lớn của λ_n sẽ phụ thuộc vào thể tích của Ω. Năm 1910, Sommerfeld dự đoán rằng

$$\lambda_n = \frac{(2\pi)^2}{(|B_{\mathbb{R}^d}(0,1)||\Omega|)^{2/d}} n^{2/d} + o(n^{2/d})_{n\to\infty}. \tag{3}$$

Sau đó, Lorentz trình bày 6 bài giảng ở Göttingen về "Old and new problems of physics", và cuối bài giảng thứ tư ông đã phát biểu giả thuyết (3) một lần nữa. Có lời đồn rằng Hilbert từng dự đoán là giả thuyết này sẽ không được chứng minh khi ông còn sống [8]. Tuy nhiên, một học trò của Hilbert (cũng có mặt trong bài giảng của Lorentz) là Weyl đã chứng minh giả thuyết này không quá hai năm sau đó [9]. Kết quả của Weyl thường được phát biểu dưới dạng tương đương là số lượng trị riêng nhỏ hơn λ thoả mãn

$$N(\lambda) = \#\{n : \lambda_n < \lambda\} = L_{0,d}^{\mathrm{cl}} |\Omega| \lambda^{\frac{d}{2}} + o(\lambda^{\frac{d}{2}})_{\lambda\to\infty}, \quad L_{0,d}^{\mathrm{cl}} = \frac{|B_{\mathbb{R}^d}(0,1)|}{(2\pi)^d} \tag{4}$$

Chứng minh của Weyl dựa trên sự vận dụng nhuần nhuyễn kết quả sau.

Định lý (Nguyên lý min-max) Các trị riêng của toán tử Dirichlet Laplacian thoả mãn

$$\mu_n = \inf_{\dim M = n} \sup_{u\in M\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2} \tag{5}$$

trong đó $\inf$ được lấy trên tất cả các không gian con $M \subset C_c^\infty(\Omega)$ với $\dim M = n$ (hoặc ta cũng có thể thay $C_c^\infty(\Omega)$ bằng không gian Sobolev $H_0^1(\Omega)$).

Nguyên lý min-max cho phép biểu diễn các trị riêng qua phương pháp biến phân. Nguyên lý này có thể mở rộng trong nhiều trường hợp, chẳng hạn toán tử không bị chặn trong không gian Hilbert, và là một công cụ quan trọng trong lý thuyết phổ.

Cùng thời gian này, Weyl cũng đưa ra giả thuyết rằng số hạng tiếp theo trong (4) sẽ liên quan tới độ đo bề mặt $|\partial\Omega|$.

Giả thuyết (Weyl) Với mọi tập $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mở, bị chặn, với biên $\partial\Omega$ đủ trơn, ta có

$$N(\lambda) = L_{0,d}^{\mathrm{cl}}|\Omega|\lambda^{\frac{d}{2}} - \frac{1}{4}L_{0,d-1}^{\mathrm{cl}}|\partial\Omega|\lambda^{\frac{d-1}{2}} + o(\lambda^{\frac{d-1}{2}})_{\lambda\to\infty}. \tag{6}$$

Chứng minh giả thuyết Weyl cho hình vuông. Công thức (6) dễ dàng kiểm tra khi $\Omega = [0,\pi]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Trong trường hợp này, các trị riêng của toán tử Dirichlet Laplacian $-\Delta_{\mathrm{D}}$ trên $L^2(\Omega)$ là

$$\{|x|^2 = (x_1^2 + x_2^2) \,|\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 = \{1, 2, ...\}^2\}.$$

Do đó

$$N(\lambda) = \frac{1}{4}(S(\sqrt{\lambda}) - 4\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor - 1)$$

với $\lfloor t \rfloor$ là phần nguyên của t (i.e. $\lfloor t \rfloor \le t < \lfloor t \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$). Do đó giả thuyết (6), trong trường hợp này là

$$N(\lambda) = \frac{1}{4}\pi\lambda - \lambda^{1/2} + o(\lambda^{\frac{1}{2}})_{\lambda\to\infty},$$

tương đương với đánh giá $|S(R) - \pi R^2| = o(R)_{R\to\infty}$. Đây là điều chúng ta đã biết từ bài toán hình tròn của Gauss. □

Kiểm tra giả thuyết của Weyl cho các miền tổng quát là một vấn đề rất khó, mãi tới năm 1980 mới được chứng minh cho một lớp các miền Ω có biên trơn bởi Ivrii [10]. Việc mở rộng kết quả này cho các miền tổng quát hơn vẫn có tính thời sự, chẳng hạn các miền có biên Lipschitz vừa được nghiên cứu trong một bài báo gần đây [11].

4. Giả thuyết Pólya

Năm 1961, trong một bài báo tưởng nhớ Weyl [11], Pólya đã đưa ra giả thuyết sau đây.

Giả thuyết (Pólya) Với mọi tập $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mở và bị chặn, các trị riêng của toán tử Dirichlet Laplacian trên $L^2(\Omega)$ thoả mãn

$$\lambda_n \ge \frac{(2\pi)^2}{(|B_{\mathbb{R}^d}(0,1)||\Omega|)^{2/d}} n^{2/d}, \quad \forall n \ge 1. \tag{7}$$

Như vậy giả thuyết này nói rằng không những vế phải của (7) xấp xỉ bằng λ_n khi $n \to \infty$ theo định lý Weyl (3), mà nó thực sự là một chặn dưới cho λ_n với mọi n. Giả thuyết (7) tương đương với

$$N(\lambda) \leq L_{0,d}^{\mathrm{cl}} |\Omega| \lambda^{\frac{d}{2}}, \quad \forall \lambda > 0,$$

điều này cũng nhất quán với (6) vì số hạng thứ hai trong (6) là một số âm.

Chứng minh giả thuyết Pólya cho hình vuông. Giả thuyết (7) có thể kiểm tra đơn giản cho hình vuông $\Omega = [0, \pi]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Nhắc lại là trong trường hợp này, tất cả các trị riêng là

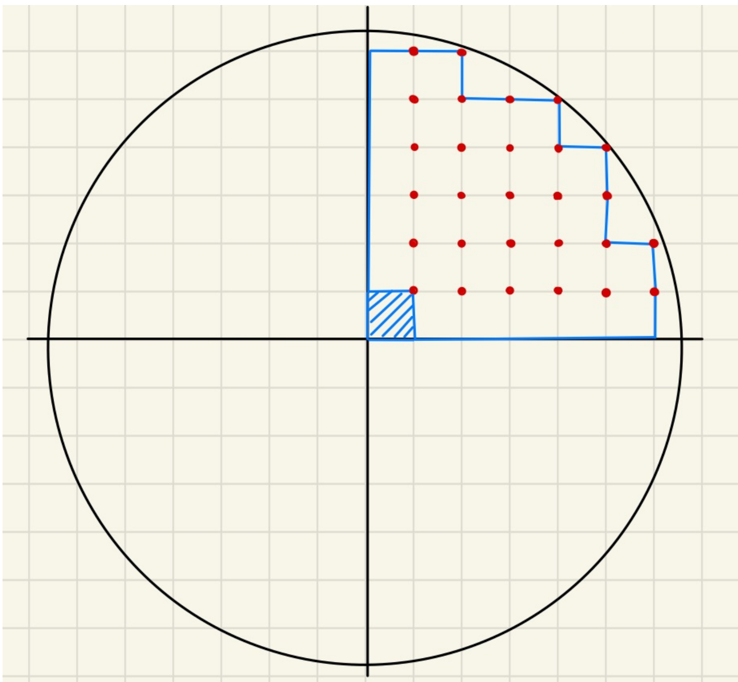
$$\{|x|^2 = (x_1^2 + x_2^2) \mid x = (x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Chúng ta liên kết mỗi điểm điểm nguyên dương $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ với một hình vuông đơn vị

$$Q_x = (x_1, x_1 - 1) \times (x_2, x_2 - 1).$$

Vì các hình vuông Q_x này rời nhau và $Q_x \subset B_R(0)$ khi $x \in \mathbb{N}^2 \cap B_R(0)$, ta có

$$|\mathbb{N}^2 \cap B_R(0)| = \left| \bigcup_{x \in \mathbb{N}^2 \cap B_R(0)} Q_x \right| \leq 2^{-2} |B_R| = 2^{-2} R^2 |B_1|.$$



Hình vẽ: Các điểm nguyên dương trong một hình tròn

Mặt khác, vì dãy $\{\lambda_n\}$ tăng nên luôn có ít nhất n điểm nguyên dương bên trong hình tròn $B_R(0)$ với bán kính $R = \sqrt{\lambda_n}$. Do đó ta kết luận

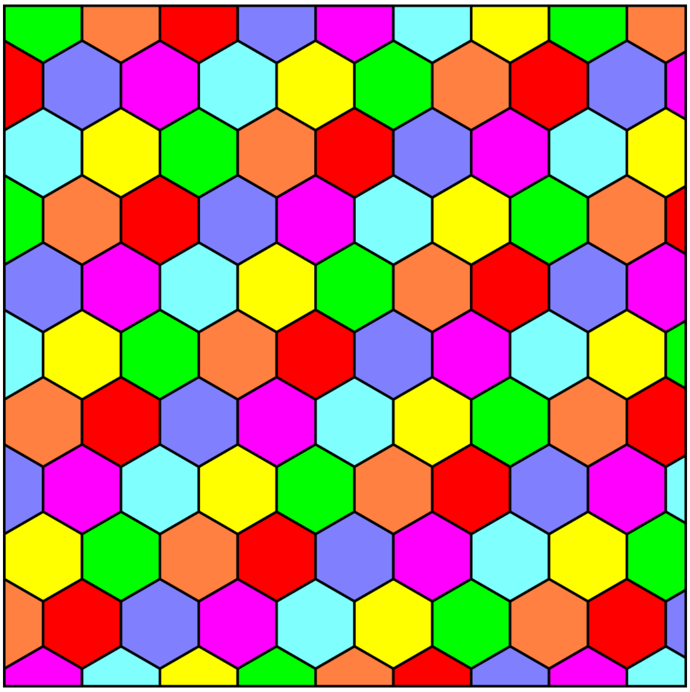
$$n \leq 2^{-2} \lambda_n |B_1| \iff \lambda_n \geq \frac{2^2}{|B_1|} n = \frac{(2\pi)^2}{|B_1|^{\frac{2}{d}} |\Omega|^{\frac{2}{d}}} n, \quad \forall n \geq 1.$$

$\square$

Trong bài báo [11], Pólya chứng minh giả thuyết (7) cho một lớp các tập hợp Ω thoả mãn điều kiện "miền lát kín" (tiling domain).

Định nghĩa (Tiling domain). Một tập $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gọi là *tiling domain* nếu chúng ta có thể lát kín $\mathbb{R}^d$ (trừ một tập có độ đo 0) bằng các phiên bản copy rời nhau của Ω (mỗi bản copy nhận được từ Ω sau các phép tịnh tiến, xoay hoặc phản chiếu).

Chú ý rằng hình vuông là tiling domain, nhưng hình tròn thì không.



Hình vẽ: Lát kín $\mathbb{R}^2$ bởi hình lục giác

Định lý (Pólya) Bất đẳng thức (7) đúng khi $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là *tiling domain*.

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng nguyên lý min-max để đưa về trường hợp hình vuông. Giả sử ta có thể đặt N bản copy rời nhau của Ω, kí hiệu là $\{\Omega_n\}_{n=1}^N$, vào trong một hình vuông lớn $Q \subset \mathbb{R}^d$. Khi đó

$$\lambda_k(\Omega) \geq \lambda_{kN}(Q), \quad \forall k = 1, 2, ... \tag{8}$$

Để chứng minh điều này, theo nguyên lý min-max cho $\lambda_k(\Omega) = \lambda_k(\Omega_n)$, với mọi $\varepsilon > 0$ và n, ta có thể tìm được một không gian con $M_{k,n} \subset C_c^\infty(\Omega_n)$ sao cho $\dim M_{k,n} = k$ và

$$\lambda_k(\Omega) = \lambda_k(\Omega_n) \geq \sup_{u \in M_{k,n} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega_n} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega_n} |u|^2} - \varepsilon. \tag{9}$$

Vì các tập $\{\Omega_n\}_{n=1}^N$ rời nhau nên không gian $M = \bigoplus_{n=1}^N M_{k,n} \subset C_c^\infty(Q)$ có số chiều $\dim M = kN$. Do đó, theo nguyên lý min-max

$$\lambda_{kN}(Q) \leq \sup_{u \in M \setminus \{0\}} \frac{\int_Q |\nabla u|^2}{\int_Q |u|^2}. \tag{10}$$

Với mọi hàm $u \in M$ ta có thể viết $u = \sum_{n=1}^{n} u_n$ với $u_n \in M_{k,n}$. Vì supp $u_n \subset \Omega_n$ rời nhau nên từ (9) ta có

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \sum_{n=1}^{N} \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 \le \sum_{n=1}^{N} \int_{\Omega_n} \lambda_k(\Omega)|u_n|^2 = \lambda_k(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

Vậy từ (10) suy ra $\lambda_{kN}(\Omega) \le \mu_k(\Omega) + \varepsilon$. Lấy $\varepsilon \to 0$ ta thu được (8).

Mặt khác, sử dụng kết quả (7) với hình vuông, ta có

$$\mu_{kN}(Q) \ge \frac{(2\pi)^2}{|B_1|^{\frac{2}{d}}|Q|^{2/d}}(kN)^{\frac{2}{d}}, \quad \forall k \ge 1.$$

Vì Ω là tilling domain, ta có thể chọn $Q = Q_N$ sao cho $|Q_N|/(N|\Omega|) \to 1$ khi $N \to \infty$. Từ (8) suy ra

$$\mu_k(\Omega) \ge \frac{(2\pi)^2}{|B_1|^{\frac{2}{d}}|Q_N|^{2/d}}(kN)^{\frac{2}{d}} \to_{N\to\infty} \frac{(2\pi)^2}{|B_1|^{\frac{2}{d}}|\Omega|^{2/d}}k^{\frac{2}{d}}, \quad \forall k \ge 1.$$

□

Hiện tại giả thuyết Pólya vẫn chưa được chứng minh cho hầu hết các tập Ω (không phải tiling domain), chẳng hạn khi Ω và hình tròn. Trong trường hợp tổng quát, từ chứng minh bên trên ta có đánh giá

$$\mu_k(\Omega) \ge R(\Omega)^{2/d}\frac{(2\pi)^2}{|B_1|^{\frac{2}{d}}|\Omega|^{2/d}}k^{\frac{2}{d}}, \quad \forall k \ge 1.$$

trong đó $R(\Omega)$ là "mật độ đóng gói" của Ω, tức là tỉ lệ không gian lớn nhất của $\mathbb{R}^d$ có thể lát bằng các bản copy rời nhau của Ω. Xác định $R(\Omega)$ gọi là bài toán đóng gói (packing problem) hoặc bài toán xếp cam. Khi Ω là hình tròn, thì ta biết rằng $R(\Omega) = \pi/\sqrt{12} \approx 0.9069$ trong 2 chiều và $R(\Omega) = \pi/\sqrt{18} \approx 0.74048...$ trong 3 chiều (đây là giả thuyết Kepler nổi tiếng). Bạn đọc quan tâm tới bài toán xếp cam xin xem thêm [13, 14].

5. Giả thuyết Lieb-Thirring

Nếu giả thuyết Pólya là đúng, thì ta có hệ quả sau

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \ge \frac{(2\pi)^2}{|B_1|^{\frac{2}{d}}|\Omega|^{2/d}} \sum_{n=1}^{N} n^{\frac{2}{d}} \ge \frac{(2\pi)^2}{|B_1|^{\frac{2}{d}}|\Omega|^{2/d}} \int_0^N t^{\frac{2}{d}} \mathrm{d}t = \frac{K_d^{\mathrm{cl}}}{|\Omega|^{\frac{2}{d}}} N^{1+\frac{2}{d}}$$

với hằng số bán cổ điển (semiclassical constant)

$$K_d^{\mathrm{cl}} = \frac{(2\pi)^2}{|B_1|^{\frac{2}{d}}}\Big(1 + \frac{2}{d}\Big).$$

Phiên bản yếu hơn này đã được chứng minh độc lập bởi Berezin (1972) [15] và Li-Yau (1983) [16].

Định lý (Berezin-Li-Yau) Với mọi tập $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mở và bị chặn, các trị riêng của toán tử Dirichlet Laplacian trên $L^2(\Omega)$ thoả mãn

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \geq \frac{K_d^{\mathrm{cl}}}{|\Omega|^{\frac{2}{d}}} N^{1+\frac{2}{d}}.$$

Chứng minh. Lấy $\{u_n\}_{n=1}^N \subset H_0^1(\Omega)$ là các vector riêng trực chuẩn. Ta xem $\{u_n\}$ như là các hàm trên toàn $\mathbb{R}^d$ (nới rộng bởi 0 bên ngoài Ω) và dùng biến đổi Fourier

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |2\pi k|^2 |\widehat{u}_n|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |2\pi k|^2 F(k) \mathrm{d}k$$

với

$$0 \leq F(k) := \sum_{i=1}^{N} |\widehat{u}_n(k)|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left| \int\limits_{\Omega} u_n(x) e^{-2\pi i k \cdot x} \mathrm{d}x \right|^2 \leq \int\limits_{\Omega} \left| e^{-2\pi i k \cdot x} \right|^2 \mathrm{d}x = |\Omega|.$$

Ở đây ta đã sử dụng bất đẳng thức Bessel. Chú ý là bài toán cực tiểu

$$\inf \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d} |2\pi k|^2 F(k) \mathrm{d}k \,\middle|\, 0 \leq F \leq |\Omega|, \int_{\mathbb{R}^d} F = N \right\}$$

đạt được với $F_0(k) = |\Omega| \mathbb{1}_{B_R(0)}(k)$ tròn đó bán kính $R > 0$ được xác định bởi

$$N = \int_{\mathbb{R}^d} F_0 = |\Omega||B_R| = |\Omega||B_1|R^d \iff R = \left(\frac{N}{|\Omega||B_1|} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

Hàm số $F_0(k)$ thu được từ *nguyên lý bồn tắm*, tức là khi đổ một lượng nước cho trước ($\int_{\mathbb{R}^d} F = N$) vào một bồn tắm (tương ứng với ràng buộc $0 \leq F \leq |\Omega|$) thì nước sẽ choáng chỗ tối đa ($F = |\Omega|$) từ dưới lên. Tóm lại

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |2\pi k|^2 F(k) \mathrm{d}k \geq \int\limits_{B_R} |2\pi k|^2 |\Omega| \mathrm{d}k = \frac{K_d^{\mathrm{cl}}}{|\Omega|^{2/d}} N^{1+2/d}.$$

□

Bất đẳng thức Berezin-Li-Yau có thể phát biểu một cách tương đương là với mọi hệ trực chuẩn $\{u_n\}_{n=1}^N$ trong $L^2(\Omega)$ với $u_n \in H_0^1(\Omega)$ ta có

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \geq \frac{K_d^{\mathrm{cl}}}{|\Omega|^{2/d}} \Big(\int_{\Omega} \rho \Big)^{1+\frac{2}{d}} = \frac{K_d^{\mathrm{cl}}}{|\Omega|^{2/d}} N^{1+\frac{2}{d}} \tag{11}$$

trong đó

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{N} |u_n(x)|^2$$

gọi là hàm mật độ của hệ $\{u_n\}_{n=1}^N$. Kết quả này liên quan tới

Giả thuyết (Lieb-Thirring [17]) Nếu $d \geq 3$, thì mọi hệ trực chuẩn $\{u_n\}_{n=1}^N$ trong $L^2(\mathbb{R}^d)$ với $u_n \in H^1(\mathbb{R}^d)$ thoả mãn

$$\sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \geq K_d^{\rm cl} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^{1+2/d}. \tag{12}$$

Rõ ràng (12) mạnh hơn (11) vì theo bất đẳng thức Hölder ta có

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho^{1+2/d} \geq \int_{\Omega \rho^{1+2/d}} \geq \frac{1}{|\Omega|^{2/d}} \Big(\int_\Omega \rho \Big)^{1+\frac{2}{d}}.$$

Mặt khác, (12) không đúng với $d = 1$ hoặc $d = 2$. Trong các trường hợp này, Lieb và Thirring dự đoán là hằng số bán cổ điển $K_d^{\rm cl}$ sẽ được thay thế bởi hằng số trong bất đẳng thức Sobolev

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \geq K_d^{\rm So} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{2(1+2/d)}, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 = 1.$$

Bằng phương pháp đối ngẫu, Lieb và Thirring chứng minh rằng (12) tương đương với chặn dưới cho các trị riêng âm $\lambda_1 < \lambda_2 \leq ...$ của toán tử Schrödinger $-\Delta + V$ trong $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{\lambda_i<0} \lambda_i(-\Delta + V) = {\rm Tr}[-\Delta + V(x)]_- \geq -L_d^{\rm cl} \int_{\mathbb{R}^d} |V_-|^{1+d/2} \tag{13}$$

trong đó $V_- = \min(V, 0) \leq 0$ là phần âm của V và

$$L_d^{\rm cl} = \frac{2}{d+2} \cdot \frac{|B_1|}{(2\pi)^d}.$$

Tất nhiên, (13) được dự đoán là đúng khi $d \geq 3$, và ở số chiều $d = 1$ và $d = 2$ thì hằng số $L_d^{\rm cl}$ cũng cần thay đổi tương tự như $K_d^{\rm cl}$. Mối quan hệ giữa hai đại lượng này trong mọi chiều luôn là

$$\Big(\Big(1 + \frac{2}{d}\Big) K_d \Big)^{1+\frac{d}{2}} \Big(\Big(1 + \frac{d}{2}\Big) L_{1,d} \Big)^{1+\frac{2}{d}} = 1.$$

Trong [17], Lieb và Thirring đã chứng minh được (12)-(13) với các hằng số không tối ưu. Phiên bản này tuy chưa hoàn hảo nhưng đã có những ứng dụng quan trọng trong việc nghiên cứu tính ổn định của các hệ lượng tử nhiều hạt từ nguyên tử, phân tử, cho tới khí Fermi và các sao neutron.

Chú ý là bất đẳng thức (13) có thể liên hệ với định lý Weyl thông qua phép *xấp xỉ bán cổ điển* (semiclassical approximation). Chúng ta biết rằng trong cơ học cổ điển, mỗi hạt chất điểm trong $\mathbb{R}^d$ có thể mô tả hoàn toàn bởi một cặp trạng thái vị trí-động lượng $(x, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Mặt khác, trong cơ học lượng tử chúng ta không thể xác định đồng thời cả vị trí và động lượng, theo nguyên lý bất định của Heisenberg. Do đó, mỗi hạt lượng tử sẽ được mô tả bởi một hàm số $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ trong đó

$$\begin{aligned} |\psi(x)|^2 &= \text{ mật độ xác suất của vị trí,} \\ |\widehat{\psi}(k)|^2 &= \text{ mật độ xác suất của động lượng,} \end{aligned}$$

tức là lưỡng tính sóng-hạt được dung hoà một cách tự nhiên thông qua phép biến đổi Fourier. Phép xấp xỉ bán cổ điển đề xuất việc kết nối cơ học lượng tử và cổ điển bằng ý tưởng chủ đạo là thay thế mỗi trạng thái lượng tử bởi một miền thể tích đơn vị trong không gian pha $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Chẳng hạn, tổng các trị riêng âm của toán tử Schrödinger có thể xấp xỉ như sau:

$$\operatorname{Tr}[-\Delta + V(x)]_- \approx \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} [|2\pi k|^2 + V(x)]_- \mathrm{d}k\mathrm{d}x = -L_d^{\mathrm{cl}} \int_{\mathbb{R}^d} |V_-|^{1+d/2}. \tag{14}$$

Các kết quả của Weyl ở dạng tổng quát nói rằng nếu $V_- \in L^{1+d/2}(\mathbb{R}^d)$ thì

$$\operatorname{Tr}[-\Delta + \lambda V(x)]_- = -L_d^{\mathrm{cl}} \int_{\mathbb{R}^d} |\lambda V_-|^{1+d/2} + o(\lambda^{1+d/2})_{\lambda \to \infty} \tag{15}$$

Ở đây hằng số λ đóng vai trò của $1/\hbar^2$ với $\hbar$ là Planck constant. Do đó (15) nhất quán với nguyên tắc tương ứng của Born, tức là cơ học lượng tử suy ra cơ học cổ điển khi $\hbar \to 0$.

Như vậy giả thuyết Lieb-Thirring (13) nói rằng xấp xỉ bán cổ điển (14) không chỉ đúng trong giới hạn $\hbar \to 0$ như (15), mà nó còn đúng một cách *phổ quát*, ít nhất là như một chặn dưới khi $d \geq 3$. Nói riêng, khi áp dụng (13) cho

$$V(x) = \begin{cases} -\lambda & \text{if } x \in \Omega, \\ +\infty & \text{if } x \notin \Omega \end{cases}$$

ta thu được bất đẳng thức Berezin-Li-Yau. Mặt khác, ngoài trường hợp đơn giản này, bài toán (12)-(13) vẫn là một câu hỏi mở quan trọng trong lý thuyết phổ cho toán tử Schrödinger. Bạn đọc quan tâm có thể xem thêm bài báo tổng quan [18].

Tài liệu

[1] L. E. Dickson. "Chapter VI: Sum of two squares". History of the Theory of Numbers (1920), Vol. II. pp. 227–228.

[2] Phan Thị Hà Dương. "Về giải Abel năm 2021", Viện Toán học. https://www.youtube.com/watch?v=hfy2rkqeFdE

[3] G. H. Hardy, E. M. Wright. "An introduction to the theory of numbers" (Sixth ed.), Oxford University Press, 2008 (Theorem 278).

[4] G. H. Hardy. "On the expression of a number as the sum of two squares". Quarterly Journal of Mathematics 46 (1915), pp. 263-283.

[5] M. Huxley. “Exponential sums and lattice points. III." Proc. London Math. Soc. 87 (2003), pp. 591–609.

[6] Ngô Bảo Châu. “Dẫn nhập về hàm zeta Riemann và phép biến đổi Mellin”. Tạp chí Epsilon số 9 (2016).

[7] L. Rayleigh. “The Theory of Sound”, 1877.

[8] M. Kac. “Can One Hear the Shape of a Drum?” American Mathematical Monthly 73 (1966).

[9] H. Weyl. “Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte”, Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1911), pp. 110–117; “Das asymptotische Verteilungsgesetz linearen partiellen Differentialgleichungen". Mathematische Annalen 71 (1912), pp. 441–479.

[10] V. Ivrii. “100 years of Weyl’s law”. arXiv:1608.03963

[11] R. L. Frank, S. Larson. “Two-term spectral asymptotics for the Dirichlet Laplacian in a Lipschitz domain”. J. reine angew. Math. (2020).

[12] G. Pólya. “On the Eigenvalues of Vibrating Membranes”. Proc. London. Math. Soc. 11 (1961), pp. 419-433.

[13] Vũ Hà Văn. “Xếp cam” (2015). https://vuhavan.wordpress.com/2015/05/30/xep-cam/

[14] Dương Đức Lâm. “Giả thuyết Kepler và bài toán xếp cam”. Tạp chí Epsilon số 12 (2016).

[15] F. A. Berezin. “Covariant and contravariant symbols of operators”. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 36 (1972), pp. 1134–1167.

[16] Peter Li, Shing Tung Yau. “On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem”. Comm. Math. Phys. 88 (1983), pp. 309–318.

[17] E. H. Lieb, W. E. Thirring. “Bound on kinetic energy of fermions which proves stability of matter”, Phys. Rev. Lett. 35 (1975), pp. 687-689

[18] Phan Thành Nam. “Direct methods to Lieb-Thirring kinetic inequalities". arXiv:2012.12045

MÁY TÍNH LƯỢNG TỬ

Nguyễn Lê Anh

Có quá nhiều bài viết về máy tính lượng tử nhưng các bài viết ấy gây ra sự hiểu lầm cho người đọc.

Ở Việt Nam có nhóm của anh Đỗ Ngọc Diệp nghiên cứu nhiều về thuật giải chạy trên máy tính lượng tử. Tuy nhiên nhóm ấy không quan tâm về bản chất tính toán của máy tính lượng tử.

Máy tính là thiết bị xử lý thông tin. Máy tính hiện nay là hệ thống chuyển động của các dòng điện, được điều khiển bởi chương trình. Người ta gọi chúng làm máy tính bán dẫn. Chất bán dẫn có thể ở trạng thái dẫn điện hoặc không dẫn điện. Khả năng này tùy thuộc điện áp tác động vào chân điều khiển của mạch bán dẫn. Thông tin đầu vào được mã hóa thành các xung điện. Xung có điện áp cao là 1, xung có điện áp thấp là 0. Người ta gọi chúng là các bit. Chương trình mà chúng ta viết sẽ tác động vào chân điều khiển khiến cho thông tin đầu vào dưới dạng dãy các bít chuyển thành dãy các bít ở đầu ra. Do hoạt động ở dạng xung nhịp nên tốc độ tính của máy tính bán dẫn bị giới hạn. Máy tính lượng tử hoạt động cũng dựa trên nguyên lý chuyển các dãy bít đầu vào thành dãy bít đầu ra. Tuy nhiên dãy bít đầu vào không phải là các xung điện có điện áp cao hay thấp mà dựa trên nguyên lý lượng tử hóa.

Chúng ta vẫn quen với cơ học Newton, ở đó sự di chuyển của một vật là được xác định bởi lực F theo phương trình phương trình chuyển động là $F = -ma$. Nếu có nhiều vật cùng tham gia chuyển động thì giữa chúng có lực hút và khi một vật thay đổi vị trí sẽ khiến cho lực tác động lên vật kia cũng thay đổi theo, cứ thế mà hệ thống biến đổi. Điều mà chúng ta cần phải lưu ý, chuyển động trong cơ học Newton là nghiệm của hệ phương trình vi phân và chúng có quỹ đạo là liên tục.

Đối với hệ gồm các vật thể rất nhỏ thì chúng ở dạng các lượng tử. Tức chúng chỉ có thể ở dạng một trong số nào đó các trạng thái tách biệt . Sự biến đổi khi ấy không còn theo phương trình Newton nữa mà theo phương trình Schrödinger $i\partial|\Psi\rangle/{=}H|\Psi\rangle$, trong đó H là ma trận Hamiltonian. Như vậy bằng việc lựa chọn ma trận H chúng ta có thể chuyển vật chất ở trạng thái lượng tử này sang trạng thái lượng tử kia (tức dãy bít 0,1 này thành dãy 0,1 kia). Đó là bản chất của tính toán lượng tử.

Lấy ví dụ như hướng tự quay của một electron là lượng tử hóa và chỉ có thể có 2 trạng thái. Một hệ Ψ gồm n electron sẽ có 2^n trạng thái lượng tử cho hướng tự quay của chúng. Thông tin đầu vào được mã hóa dưới dạng một trạng thái lượng tử của Ψ, tức là dãy nào đó các bít, sau tác động của ma trận Hamiltonian, nó chuyển thành trạng thái lượng tử mới ở đầu ra.

Như vậy nguyên lý tính toán lượng tử là việc tác động toán tử Hamiltonian để các bít biến chuyển theo phương trình Schrödinger. Cái khó của việc chế tạo máy tính lượng tử là ở chỗ, người ta vừa phải thiết lập được hệ các hạt rất nhỏ và phải tác động được vào trạng thái của từng hạt một. Để tác động được vào từng hạt người ta phải tìm cách tách các hạt ra xa mà chúng vẫn liên quan với nhau như là ở gần. Cái thuộc tính để làm được điều này được gọi là rối lượng tử, entaglement. Rối lượng tử cho phép thiết lập hệ vật chất ở rất xa nhau mà như ở gần, và vì thế chúng tuân thủ phương trình Schrödinger. Việc thay đổi trạng thái lượng tử được thực hiện thông qua các ma trận Hamiltonian đơn giản, được gọi là gate. Chương trình cho máy tính lượng tử là việc kết nối các ma trận Hamiltonian đơn giản lại với nhau (các gate) để thành ma trận Hamiltonian cần phải có để biến đổi trạng thái lượng tử đầu vào thành trạng thái lượng tử đầu ra. Chúng ta gọi các ma trận Hamiltonian được tạo ra từ các ma trận Hamiltonian cơ bản là chương trình cho máy tính lượng tử.

Nhóm của anh Đỗ Ngọc Diệp đi tìm các ma trận Hamiltonian, tức các chương trình cho phép giải các bài toán nhất định nào đấy trên máy tính lượng tử.

Cuộc đua chế tạo máy tính lượng tử đang diễn ra rất quyết liệt. Hy vọng, bước vào năm mới, các bạn có thể hiểu được bản chất của tính toán lượng tử để nhanh chóng đi vào lĩnh vực này.

TRIỆU ĐÀ LÀ AI?

Nguyễn Lê Anh

GIỚI THIỆU

Liên tục trong 8 số Epsilon gần đây, chúng tôi luôn có chuyên mục phám phá lịch sử thông qua tư duy lô-gích và phương pháp suy luận khoa học. Chúng tôi muốn giới thiệu với độc giả chúng ta có thể làm được những gì với tư duy toán học, thông qua những nghiên cứu miệt mài của nhà toán học Nguyễn Lê Anh. Trong số này, chúng tôi tiếp tục đăng những ghi chép của ông, những nỗ lực không ngừng nghỉ cùng với những khám phá mới. Đây cũng là lời kêu gọi cộng đồng trong việc cùng chung tay xây dựng một tài liệu lịch sử cho dân tộc chúng ta - dân tộc Việt Nam.

Trong số Epsilon này, chúng tôi trân trọng đăng một bài viết rất mới của ông về một nhân vật rất đặc biệt trong lịch sử dân tộc ta và Trung Quốc: Triệu Đà.

80 nghìn năm về trước có một thời điểm mực nước biển rất thấp, loài người thông minh là tổ tiên trực tiếp của loài người hiện nay đã vượt được biển ra khỏi châu Phi để di cư vào lục địa Á-Âu. Trong bảng tuần hoàn Mendeleev hai nguyên tố kim loại hóa trị 1 là Na và Ka đứng gần nhau. Chúng có tính chất hóa lý gần giống nhau, các Ion Natri và Kali có thể thay đổi vị trí cho nhau trong các hợp chất hóa học. Tỷ lệ Ion Natri và Kali chính là cơ sở để não người dùng làm bit nhớ. Như thế loài người là động vật thông minh không thể sống thiếu muối. Do gia súc chỉ mới được thuần hóa từ 10000 năm cho tới 7000 năm về trước, và vì chỉ có thể sử dụng gia súc để thồ hàng, nên các cuộc di cư tạo thành các vệt dân cư ổn định theo các con đường vào sâu trong lục địa xa biển chỉ có thể có sau 10000 năm về trước.

Vì vậy sự di cư của loài người chỉ có thể diễn ra bằng thuyền dọc theo bờ biển để tới định cư ở các cửa sông, nơi vừa có thể bắt được các loài cua ốc làm thức ăn, vừa có nước ngọt để uống. Khoảng 20 nghìn năm về trước mực nước biển thấp hơn ngày nay 120m. Vịnh Hạ Long có độ sâu trung bình khoảng 70m, từ 20 nghìn năm về trước loài người tiền sử này đã định cư ở vùng mà nay là Vịnh Hạ Long, dọc theo con sông Hồng. Sông Hồng ngày ấy chảy ra tận phía gần quần đảo Hoàng Sa. Nơi đây ngoài lợi thế về nước ngọt và tôm cua ốc cá dễ bắt, còn có các họ cây thuộc loại vả cung cấp đường và tinh bột.

Thời tiết ấm dần mực nước biển dâng cao, cư dân Hạ Long tiền sử di cư dần lên vùng cao. Một phần cư dân tiền sử sống ở đồng bằng Hạ Long di cư về phía Bắc tới các vùng nay là Quảng Đông Quảng Tây, họ là cư dân Bách Việt. Khoảng 10 nghìn năm về trước mực nước biển đã dâng cao thêm 70m, nhấn chìm đồng bằng hạ Long xuống dưới làn nước biển, nhưng phần đồng bằng Bắc Bộ như chúng ta thấy ngày nay thì vẫn khô ráo. Như thế Bách Việt và chúng ta cùng thuộc một chủng người ở đồng bằng Hạ Long, nhưng có văn hóa khác nhẳn nhau vì đã chia tay nhau từ 10 nghìn năm về trước. Điểm khác biệt đầu tiên về văn hóa là hệ lụy của việc "Khác với vùng đất ở đồng bằng Bắc Bộ, nơi cái ăn có thể tìm thấy quanh năm; cư dân sống ở vùng Quảng Đông Quảng tây tới mùa đông không có cái ăn, họ sẽ gây chiến giết người để cướp đồ ăn!". Giao thông cũng khác, ở vùng đồng bằng Bắc Bộ giao thông bằng thuyền, ở vùng ôn đới Quảng Đông Quảng Tây giao thông bộ. Khoảng 3000 năm về trước cư dân Bách Việt trải qua chế độ chiến hữu nô lệ, nhưng ở vùng đồng bằng Bắc Bộ thì không. Chế độ chiếm hữu nô lệ đã thúc đẩy kinh tế phát triển, và vì thế từ 3000 năm về trước cho tới tận đầu Công Nguyên cư dân Bách Việt di cư tới Việt Nam có được các lợi thế như có chữ viết, biết được nhiều công nghệ sản xuất, và biết thương thuyết làm ăn kinh doanh buôn bán.

Nhiều nhà nghiên cứu cố công đi tìm nguồn gốc chữ viết Việt. Trên thực tế chữ viết được hình thành một cách tự nhiên ở mọi dân tộc, chủ yếu là từ nhu cầu tâm linh. Thủa ban đầu đó chỉ là các ký hiệu để linh hồn tìm được đường hồi sinh. Hệ thống ký hiệu này cũng chỉ giới hạn ở tầng lớp thày Mo thày Cúng, không mang tính xã hội vì không có nhu cầu. Chính việc chiếm hữu nô lệ đem lai sản xuất và lưu thông hàng hoá là tiền đề thúc đẩy việc sử dụng ngôn ngữ viết.

Vùng Bắc Việt Nam bị bao bọc bởi các dãy núi cao hàng nghìn mét, rộng hàng trăm kilomet với nhiều loài thú dữ ăn thịt, chính vì thế cho tới tận đầu Công Nguyên, hầu như không thể có các cuộc di cư lớn nào từ Bách Việt tới vùng này. Để có thể thấy được rõ hơn sự thật, vào đầu Công Nguyên dân số cư dân sống tại đồng bằng Bắc Bộ đã lên tới hơn 700 nghìn người. Các cuộc di cư nhỏ lẻ vài trăm người dọc theo bờ biển bị đồng hóa văn hóa và do trước đây họ cùng một gốc Gen mà họ hòa đồng vào thành một dân tộc duy nhất. Như thế tất cả cả các dòng họ khác nhau, Hồ, Ngô, Lý, Lê, Trần,.. chúng ta đều cùng thuộc một dân tộc với hệ gen thuần nhất và với với nền văn hóa kế thừa từ văn hóa Gò Đống ở đồng bằng Hạ Long 20 nghìn năm xưa.

Cư dân Bách Việt di cư tới Việt Nam biết cách thương thuyết và làm ăn buôn bán nên họ thu phục được các làng xóm Việt để chống lại sự đô hộ của ngoại bang. Phải mãi tới tận thế kỷ thứ 9, các chính quyền Việt Nam mới chính thức sử dụng chữ viết trong hành chính. Trước đó thì người Việt chỉ có tên để phân biệt trong làng chứ không có nhu cầu về họ tên. Khi giành được độc lập và phải có tên để quản lý, thì hầu như người dân Việt lấy họ theo họ các đời vua. Chính vì thế mà cộng đồng người Việt có cảm giác là dân di cư từ Bách Việt tới. Các dãy núi phía Bắc Việt Nam và cả Sông Hồng được sinh ra từ sự va chạm lục địa, và vì thế mà nơi đây là vùng đất rất giàu tài nguyên cùng với khoáng sản lộ thiên. Chính vì thế từ 3000 năm về trước cư dân sống ở vùng đồng bằng Hạ Long di cư lên các vùng mà nay là đồng bằng Bắc Bộ có được cuộc sống tốt hơn, do họ có thể trồng trọt được nhiều loại cây cối hoa màu lương thực tươi tốt quanh năm. Do điều kiện tự nhiên Gò Đồi ổn định trong suốt 20 nghìn năm qua mà văn hóa Gò Đồi là thứ văn hóa ổn định. Chính đây là yếu tố văn hóa khiến cho ngôn ngữ Việt là một trong những ngôn ngữ giao tiếp có khả năng mô phỏng tự nhiên cũng như tư duy rất tốt.

Như thế không phải chúng ta là có gốc Bách Việt. Chúng ta là hậu duệ của cư dân sống ở đồng bằng Hạ Long 20 nghìn năm trước đây. Khi nước biển dâng cao họ đã di tản vào các vùng núi, và khi đồng bằng được phù sa sông Hồng bồi rộng ra thì một bộ phận đã di cư xuống vùng đất mới. Cư dân ở lại vùng núi là người Mường, và chúng ta, những người di cư tới vùng đất mới ở đồng bằng là người Kinh. Các dân tộc khác di cư tới Việt Nam trong quá trình di cư tự nhiên với tốc độ 300km cho 1000 năm. Người Thái và Tày khoảng thế kỷ thứ 7, và theo như nghiên cứu của anh Mai Thanh Sơn, người Mông là khoảng thế kỷ 17.

Để hiểu sâu hơn chúng ta đi phân tích văn hóa Việt Nam. Cái tên Việt Nam cũng không phải do chúng ta tự đặt, đấy là cách mà người Phương Bắc sử dụng chữ Hán để viết về Bách Việt ở phương Nam. Sự hiểu biết về địa lý vào thời 3000 năm về trước chưa đủ để xác định được vùng đất mà nay là Việt Nam, bởi khi ấy gần như toàn bộ đồng bằng Bắc Bộ chưa có, nó là vịnh nông bị nước biển bao phủ.

Rất nhiều nhà thông thái Việt Nam sử dụng cổ sử Trung Quốc để lập luận suy diễn cố tìm ra sự thật, nhưng họ không hề hiểu là các quyển cổ sử ấy là không có. Hay nói một cách đúng hơn những thứ mà chúng ta vẫn coi là sự thật thì đều là các tác phẩm bịa ra từ những tư liệu được viết bằng chữ Hán Cổ. Những chữ Hán Cổ này, được viết trên các thanh tre và cứ sau một thời gian bị mối mọt thì phải sao chép lại. Quá trình "tam sao thất bản" đã để lại các chữ vô nghĩa đã đành mà ở các thời đại khác nhau các con Hán tự cũng không có nghĩa duy nhất. Vì thế các Cổ Hán Thư đều là các tác phẩm suy đoán giải mã các ký hiệu từ các các thẻ tre và được soạn ra để phục vụ cho mục đích chính trị. Những sự kiện có trong tư liệu được cho là Hán Cổ như Sử Ký Tư Mã Thiên được viết ra dựa theo các sự kiện truyền thuyết từ 2000 năm trước khi Tư Mã Thiên ra đời. Đối với Hậu Hán Thư cũng thế. Đó là tập hợp các sự kiện mà được được Phạm Bằng viết lại sau những 500. Hơn thế nữa okhái niệm về Trung Quốc như một quốc gia cũng chưa hề có để mà nói về chủ nhân của Cổ Hán Thư và về việc đô hộ Việt Nam. Như thế các dữ liệu có trong Cổ Hán Thư chỉ là các tư liệu đối sánh, không thể là tư liệu đáng tin cậy. Các tài liệu cổ sử Việt Nam được soạn ra từ Cổ Sử Trung Quốc cũng ở trạng thái tương tự.

Chúng ta tìm lại lịch sử bằng một cách khác.

Mực nước biển dâng cho tới khoảng 6000 năm về trước thì dừng lại và giữ nguyên như vậy cho tới tận ngày nay. Khoảng 6000 về trước bờ biển đi vào tới tận Phú Thọ, ven theo chân dãy núi Tam Đảo và vùng Hòa Bình. Đồng bằng Bắc Bộ cũ bị nhấn chìm dưới mực nước biển. Mỗi năm các hệ thống sông lấy đi từ các vùng đồi núi Việt Nam khoảng 100 triệu tấn phù sa, khoảng 75 triệu mét khối đất bồi xuống vùng trũng và lấp dần vịnh biển. Cứ mỗi năm phù sa bồi thêm khoảng 5mm khiến cho đồng bằng Bắc Bộ cũ bị nằm ở dưới lớp đất phù sa. Lớp phù sa này sâu dần từ Phú Thọ ra đến bờ biển. Khoan thăm dò cũng đã tìm thấy dấu vết của thực vật ở đồng bằng Bắc Bộ cũ này.

Xét về mặt cấu trúc thì toàn bộ đồng bằng Bắc bộ và cả vùng đáy vịnh Hạ Long nay là do phù sa của sông Hồng bồi đắp từ nhiều triệu năm về trước bồi mà thành. Dòng phù sa ra tới biển thì gặp dòng Hải Lưu chảy ngược chiều kim đồng hồ đẩy trở lại vón thành các gò. Cứ mỗi khi mùa mưa là nước các con sông đổ về làm tràn ngập khắp mọi nơi và đưa phù sa về bồi cho các vùng đất cao thêm. Trên gò có cây mọc. Gió thổi bụi quẩn vào chỗ có các cây bụi khiến cho gò đất cao dần lên. Tại những nơi cao nhất thường là nơi chim đậu, chúng tha các loại quả về ăn và những nơi cao nhất trên gò thường là nơi có cây thuộc loại vả, như đa, sung,... Trên các gò cao nước ngọt tự chảy quanh năm này có người sinh sống. Cuộc sống trên các gò có nước ngọt chảy quanh tạo ra văn hóa gò đống. Văn hóa Gò Đống khác hẳn với văn hóa vùng núi hay vùng thảo nguyên. Tại nơi cao nhất của gò là nơi ngôi nhà đầu tiên được dựng lên, đó chính là đình làng về sau. Đình là nơi những người đầu tiên tới định cư tại gò, nên đấy là nơi tổ tiên của làng. Đình là nơi hội họp để đưa ra các quyết định chung. Đình luôn gắn với cây Đa vì đình được dựng nơi cao nhất của gò. Giếng đình chính là giếng nước của ngôi nhà đầu tiên, nó được bảo vệ sạch sẽ tránh nước mưa hay nước lụt tràn vào. Khi cư dân trở nên đông đúc hơn họ sống dọc theo các con đường tới đình, vừa tiện để lấy nước dùng và tiện để tới đình. Như thế đối với người Việt thì "mọi con đường đều tới Đình Làng". Phương thức sản xuất Gò Đống nặng về hái lượm. Thức ăn có quanh năm và dễ kiếm. Cư dân Gò Đống đánh bắt tôm cua cá ngay tại các vùng nước chảy quanh. Các cây họ vả trên gò cung cấp lương thực.

Do được phù sa bồi mà vịnh đồng bằng Bắc Bộ trở nên nông dần. Phù sa khiến cho bờ biển lấn dần ra và biển hẹp lại thành con sông Hồng. Cứ 1000 năm thì cửa sông Hồng ra biển lại chạy dần ra xa 45km. Khảo cổ học cho thấy tính liên tục của các tầng văn hóa từ nhiều nghìn năm về trước, chứng tỏ sự hình thành tự nhiên của cư dân bản địa, không phải là sự di cư từ nơi khác tới. Vào khoảng 7000 năm về trước, nơi đây đã xuất hiện các giống cây trồng và vật nuôi. Phương thức sản xuất chuyển sang chăn nuôi trồng trọt. Cho tới tận đầu Công Nguyên thì phương thức sản xuất ở đồng bằng Bắc Bộ vẫn mang nặng tính Gò Đống. Nơi đấy, tuy không trải qua thời kỳ chiếm hữu Nô Lệ nhưng quan hệ Gò Đống trên thực chất là một thứ nô lệ trá hình.

Vào khoảng thế kỷ 12 cho tới thế kỷ 18 mực nước biển xuống thấp khoảng 0.5m, như thế đủ để lượng nước mưa ít hơn, mực nước sông thấp hơn khoảng 2m khiến cho một vùng đầm lầy rất lớn ở đồng bằng Bắc Bộ ngày nay trở nên khô ráo. Lương thực vì thế làm ra được nhiều hơn, dân số tăng nhanh hơn. Đây là thời kỳ dân tộc Việt Nam trở nên hùng mạnh hơn. Nhà Trần chẳng những đánh thắng quân Nguyên Mông, mà các triều đình về sau cũng đã thu phục được nhiều quốc gia mở rộng bờ cõi về phía Nam. Sau khi đánh thắng quân Nguyên, các Vua Trần đưa ra quyết định viết sử dân tộc. Rất nhiều tích cổ của Bách Việt được du nhập và vật thể hóa thành tài sản lịch sử của Việt Nam. Một trong số các tích sử ấy là Triệu Đà. Khoảng năm 250 trước Công Nguyên công nghệ luyện kim sắt xuất hiện ở vùng dọc sông Dương Tử. Sắt cho phép làm ra vũ khí và trục cho xe kéo, nó là nguyên nhân thúc đẩy sự phát triển kinh tế và dẫn tới các cuộc chiến tranh chiếm đoạt mà Trung Quốc gọi là thống nhất đất nước. Điểm cao là cuộc chiến tranh do Tần Thủy Hoàng thống nhất Trung Hoa sau khi tiêu diệt sáu nước chư hầu, chấm dứt thời kỳ Chiến Quốc vào năm 221 TCN. Triệu Đà là võ tướng theo lệnh Tần Thuỷ Hoàng, làm đường vượt qua dãy Ngũ Lĩnh, dẫn quân đánh chiếm lãnh thổ của các bộ tộc Bách Việt bao gồm vùng Quảng Đông, Quảng Tây.

Các sử gia Trung Quốc và Việt Nam cho rằng Triệu Đà có biết đến và đánh chiếm cả Bắc Việt Nam. Trên thực tế không như vậy. Phương thức sản xuất mà Triệu Đà thực hiện là chế độ chiếm hữu Nô Lệ. Vì thế việc tiến đánh Bách Việt là không dễ, không thể không vấp phải sự kháng cự, nhất là khi Triệu Đà không còn có được sự hỗ trợ về mặt quân sự của nhà Tần. Triệu Đà đánh chiếm Bách Việt là năm 50 tuổi. Các tính toán cho rằng Triệu Đà sống lâu 120 tuổi, tuy nhiên đó chỉ là suy diễn. Việc ăn uống chơi bời trác táng khó mà có thể duy trì được quá được 100 tuổi. Cho dù là Triệu Đà có thể sống lâu nhưng tuổi thọ trung bình của người thường vào thời gian ấy chỉ khoảng chưa tới 50 tuổi. Họ sẽ chết không phải vì đói rét thì cũng vì bệnh tật. Như chúng ta đã lưu ý ở trên văn hóa Bách Việt là thứ văn hóa chém giết chứ không đơn giản là thần phục. Cứ cho là binh lính của Triệu Đà khi tiến quân đánh Bách Việt có tuổi là 20, thì với thời gian 30 năm, với một lượng quân lính người ngựa ít ỏi, và với sự khác biệt văn hóa, thì Triệu Đà không đủ khả năng để bình định một vùng đất rộng lớn Quảng Đông và Quảng Tây. Hiển nhiên là Triệu Đà phải tìm cách hòa hoãn để tồn tại cho bản thân. Như thế trong cả cuộc đời còn lại của mình Triệu Đà không thể biết đến mảnh đất mà nay là Việt Nam.

Lịch sử nên được soi dọi bằng khoa học. Phần đất nay là đồng bằng Bắc Bộ khi xưa là khu vực Gò Đống có nước chảy quanh. Cư dân nơi đây đi lại bằng thuyền. Bởi bao quanh làng là ruộng nước việc tiến quân đánh chiếm nhanh bằng ngựa là không thể. Khả năng tác chiến lâu dài không dễ bởi không có đủ lương thực, ngoài ra lạ nước và các bệnh nhiệt đới truyền nhiễm sẽ làm cho quân sĩ của Triệu Đà, những người vùng ôn đới, bị bệnh mà chết dần. Người dân địa phương đã thích nghi, hơn thế có thể chạy rút vào đầm lầy, vào rừng núi nhiều ngày mà không sợ chết đói.

Vùng đất này 2500 năm về trước chẳng những là đầm lầy mà tới tận thế kỷ 16 rừng còn bao phủ cả tới tận khu vực Hồ Tây. Nơi đây 2500 về trước chỉ có các gò đống với đình làng là một thứ chính quyền phân tán, không dễ để đội quân Viễn Chinh có thể áp đặt sự thống trị. Đặt giả sử như Triệu Đà có tiến đánh và đặt được ách thống trị lên mảnh đất này thì hiển nhiên chế độ chiếm hữu nô lệ đã được thiết lập. Và văn hóa Gò Đống đã không còn mà thay vào đó là thứ văn hóa như một bản sao của Bách Việt. Khảo cổ học mới chỉ tìm thấy dấu vết của tiền vào thế kỷ thứ 3 sau Công Nguyên, chưa tìm thấy dấu vết của tiền trước Công Nguyên. Như thế cư dân khu vực này vẫn chưa hề trải qua thời kỳ chiếm hữu nô lệ, chưa có sản xuất hàng hóa. Cho tới tận ngày nay cư dân ở đây vẫn tuân thủ một thứ văn hóa không chấp nhận sự đô hộ. Thậm chí cái gốc văn hóa Gò Đống được hun đúc nâng tầm lên thành văn hóa Làng Xã và còn lưu lại cho tới tận ngày nay.

2200 năm về trước, đồng bằng Bắc Bộ khi ấy phần lớn là đầm lầy. Nơi đây chẳng những không dễ tiến quân mà cũng không hề có một con đường nào đi qua được biên giới Việt Nam. Được bao bọc bởi rừng núi đầy thú dữ, cùng các dãy núi cao cả vài kilomet, dài nhiều nghìn kilomet và rộng hơn 500km việc tiến quân là không thể. Còn nếu như có một đội quân nhỏ tiến đến được Việt Nam thì không thể gây chiến với tất cả các làng xã Việt. Vậy nói đúng hơn, sự hiểu biết của Triệu Đà về Việt Nam cũng chỉ giới hạn như Bách Việt, và chưa bao giờ có sự đô hộ của Triệu Đà lên mảnh đất mà nay là Bắc Việt Nam. Cổ sử Trung Quốc một vài yếu tố suy diễn cho rằng Triệu Đà có sử dụng quà cáp biếu xén để lấy lòng các tộc trưởng và các tộc trưởng này chấp nhận quy phục Triệu Đà. Trên thực tế đó chỉ là những vùng đất Quảng Tây ở phía Bắc Việt Nam, nơi ấy lạc hậu và Triệu Đà có khả năng tiến quân đánh chiếm. Không có một chứng minh thuyết phục nào cho thấy các vùng đất với tên gọi như thế là ở Việt Nam ta ngày nay. Trên thực tế bờ biển Việt Nam xưa là cảng biển trong khu vực. Một vài thập kỷ trước Công Nguyên, Phật Giáo nguyên thủy đã du nạp vào khu vực này với dãy các di tích Chùa Cổ. Cư dân các vùng ven biển phía Bắc vùng Quảng Ninh và Quảng Tây vẫn có giao lưu tự nhiên bằng thuyền ven biển. Sự giao lưu này đã có từ 20 nghìn năm về trước, và vì thế những thứ mà Triệu Đà cho là quà cáp thì không phải là những thứ đủ để hấp dẫn.

Hơn thế những đồ Đồng niên đại Đông Sơn 2500 năm về trước được tìm thấy ở trên mảnh đất Việt Nam lại là những sản phẩm đẹp nhất, tinh sảo nhất mà không một nơi nào có được. Như thế khái niệm quà cáp của Triệu Đà chỉ là sự suy diễn hoang tưởng. Đặt giả sử như Triệu Đà có sử dụng quà cáp để hối lộ được các thủ lĩnh, mà chúng ta tạm gọi là các Lạc Tướng, Lạc Hầu thì mục tiêu của việc này chủ yếu để Triệu Đà được yên thân, hoàn toàn không thể dùng vài ba thứ quà cáp để bắt một dân tộc phải làm nô dịch. Từ đặc điểm văn hóa mà suy, cư dân Việt Nam cho tới tận ngày nay nhu cầu ăn hối lộ ngày càng lớn và việc nhớ tới trách nhiệm của việc ăn hối lộ thì gần như không có. Vậy nên việc tin vào mấy thứ quà cáp Triệu Đà là lố bịch.

Như chúng ta đã lưu ý, việc nhìn nhận lại lịch sử phải trong khuôn khổ khoa học. Trước khi Tần sai Triệu Đà đánh chiếm thì vùng đất Quảng Đông và Quảng Tây, thì những vùng đất này là không bị phương Bắc gây sự. Nguyên nhân là do đây là những vùng đông dân và có kinh tế phát triển. Sở dĩ Triệu Đà đánh chiếm được các vùng đất này là do họ có được công nghệ luyện kim sắt. Tuy vậy sự chống cự là khủng khiếp. Điều này thì có thể thấy được từ sự thật lịch sử đó là việc Hán Quang Vũ Đế đã phải thực thi chính sách giải phóng Nô Lệ – mà nguyên nhân sâu xa là tìm mọi cách để làm suy yếu chính quyền chư hầu đương thời. Hán Quang Vũ Đế sinh vào đầu Công Nguyên, sống thọ 60 tuổi. Như thế cho tới tận đầu Công Nguyên với công lao của Hán Quang Vũ Đế, việc Hán Hóa các vùng Bách Việt mới được thực hiện. Vậy thì không thể có việc Triệu Đà tiến đánh Việt Nam. Sự thay đổi phương thức sản xuất từ Nô Lệ sang Phong Kiến khiến cho Trung Quốc trở nên hùng mạnh. Việc này đã đưa đến hệ lụy là các vùng như Việt Nam khi ấy cũng bị ảnh hưởng. Như chúng ta đã biết do việc người dân có thể tự sống, và môi trường gò đồi không đủ rộng để thực hiện việc chiếm hữu Nô Lệ, vì thế mà ở Việt Nam không trải qua thời kỳ chiếm hữu Nô Lệ. Tuy nhiên quan hệ con người trong làng quá ràng buộc cũng là một thứ nô lệ trá hình. Chính vì thế mà, do tính ưu việt của phương thức phong kiến mang lại, đã khiến cho tới tận 500 năm sau cuộc khởi nghĩa của Hai Bà Trưng hầu như không có một cuộc kháng cự nào nổi dậy chống lại Phương Bắc.

Tóm lại Trung Quốc không phải là một Quốc gia, càng không phải là một dân tộc để mà chúng ta tự nhận tổ tiên là ở đấy. Sự kiện đô hộ của Phương Bắc đối với Việt Nam chỉ thực sự diễn ra sau Công Nguyên, sau khi ở đấy đã chuyển sang phương thức sản xuất Phong Kiến. Việc đưa Triệu Đà lên thành một vị vua của cả Việt Nam ta là được thực hiện vào sau thế kỷ 12, có liên quan tới việc muốn Việt hóa toàn bộ di sản văn hóa của Bách Việt. Phương thức Việt hóa là gán vị trí của Việt Nam ta cho các địa danh được nói tới trong các cổ sử Bách Việt. Có lẽ chúng ta nên bình tĩnh mà nhìn ra sự thật lịch sử.

Câu Cổ Pháp (Định Lí Pythagoras) Trong Ý Trai Toán Pháp Nhất Đắc Lục

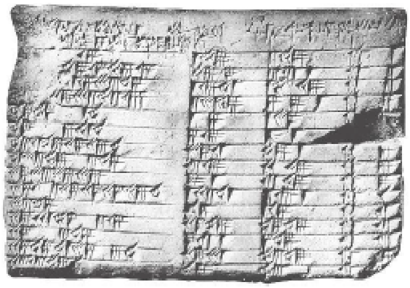
Đoàn Thị Lệ
Nghiên cứu sinh, National Tsing-Hua University, Taiwan
Lê Thị Nhàn
Trường THPT Nguyễn Thị Lợi, Sầm Sơn, Thanh Hóa
Tạ Duy Phượng
Cộng tác viên Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
Mai Văn Thu
Thạc sĩ Toán học
Cung Thị Kim Thành
Thạc sĩ Hán Nôm
Phan Ánh Tuyết
National Taiwan Normal University

Tóm Tắt

Bài viết giới thiệu các bài toán hình học giải được nhờ sử dụng định lí Pythagoras trong cuốn sách toán chữ Hán *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* [2] của Ý Trai Nguyễn Hữu Thận. Để dễ đọc, chúng tôi trình bày lời giải các bài toán kết hợp ngôn ngữ trong [2] với ngôn ngữ hiện đại, nhưng vẫn cố gắng trung thành với nội dung, phương pháp giải và cấu trúc trong [2].

1. Định lí Pythagoras

Định lí Pythagoras được tìm thấy trong các bảng đất sét của người Babylon. Hình 1 là bảng Plimpton 322 có niên đại khoảng 1800 năm trước công nguyên (CN), hiện nay được lưu trữ tại thư viện trường đại học Columbia (Mỹ). Chi tiết xem, thí dụ, [12], trang $31 - 34$.



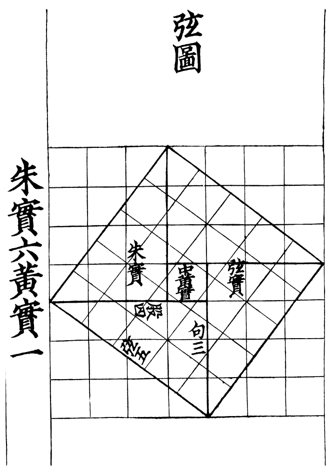
Hình 1: Plimpton 322

Bảng này chứa các bộ ba Pythagoras, tức là các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$.

Euclid (Thế kỉ III trước CN) đã phát biểu và chứng minh Mệnh đề thuận ([4], Mệnh đề 47, trang 86) và Mệnh đề đảo ([4], Mệnh đề 48, trang 86) của định lí Pythagoras trong cuốn sách Cơ sở [4] của Ông.

Người Ấn Độ cũng đã biết đến định lí Pythagoras từ thế kỉ 8 – thế kỉ 5 trước CN (xem [12]).

Cuốn sách Chu bễ toán kinh (周髀算经) được coi là từ thời nhà Chu (Trung Quốc, 1046–771 trước CN) đã nhắc tới tam giác cạnh $(3, 4, 5)$ và áp dụng câu cổ pháp (phép câu cổ, câu, cổ: Cạnh góc vuông) trong đo đạc, tính toán.

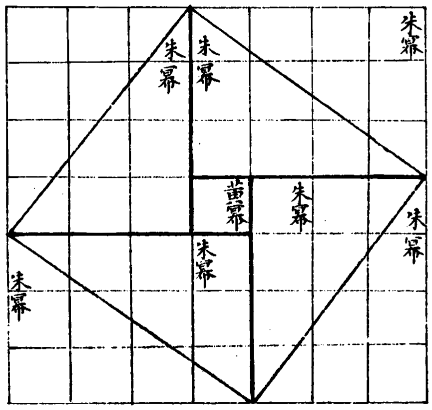


Hình 2: Chu bễ toán kinh in 1213

Phép câu cổ (định lí Pythagoras) được nghiên cứu sâu trong các tác phẩm tiếp theo của các nhà toán học Trung Hoa như Cửu chương toán thuật (九章算術), được coi là của Trần Sanh, khoảng năm 152 trước CN và được Liu Hui (劉徽, thế kỉ III, [1]) và Tổ Xung Chi (祖冲之, thế kỉ V) bổ sung.

Định lí Pythagoras được phát biểu như sau: *Tam giác ABC có các cạnh a, b, c vuông ở A khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$.*

Người Trung Quốc đã có một chứng minh Định lí Pythagoras khá độc đáo như sau. Xét tam giác vuông cạnh $3, 4, 5$ (Hình 3, là hình vẽ trong Cửu chương toán thuật của Liu Hui [1], trang 114). Hình vuông lớn ABCD có cạnh $3 + 4 = 7$, do đó diện tích bằng 49.

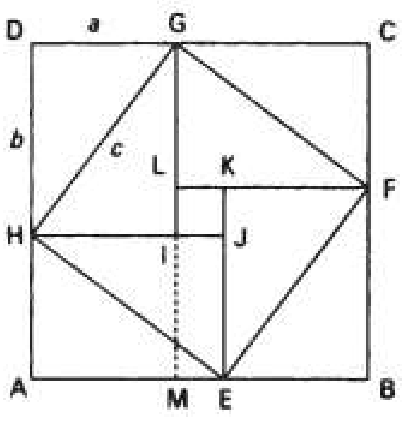


Hình 3: Cửu chương toán thuật [1].

Nếu từ hình vuông đó cắt đi bốn tam giác vuông AHE, BEF, CFG và DGH bằng hai hình chữ nhật có tổng diện tích $2\,(3 \times 4) = 24$, ta còn lại hình vuông nhỏ $HEFG$. Như vậy,

$$5^2 = (3+4)^2 - 2\,(3 \times 4) = 3^2 + 4^2.$$

hay $a^2 = b^2 + c^2$.



Hình 4: Chứng minh Định lí Pythagoras của người Trung Hoa [1].

Định lí Pythagoras cũng đã được các nhà toán học Việt Nam tiếp thu và ứng dụng trong giải toán. Trong cuốn sách Ý Trai toán pháp nhất đắc lục (Một điều tâm đắc về toán pháp của Ý Trai), Nguyễn Hữu Thận (hiệu Ý Trai) đã viết ([2], Quyển 5, trang $1-2$): *Phép câu cổ, vốn* *xuất xứ từ Chu bễ kinh, trong cuộc hỏi đáp của Chu Công và Thương Cao, đối với số học [toán học] thì việc vận dụng nó rất mầu nhiệm, phàm vật nằm trong vòm trời đất, không có gì không lấy đó mà suy tính. Câu cổ huyền [tên gọi ba cạnh của tam giác vuông], như một nửa hình chữ nhật, ắt có một góc vuông làm khuôn. Nhân có góc vuông này, đặt ra qui tắc tìm tổng, hiệu của ba cạnh, có thể từ cái nhỏ mà biết được cái lớn, từ cái đơn giản, gần cận mà suy rộng ra những cái cao xa...*

Người Trung Hoa (và Nguyễn Hữu Thận) thường sử dụng hai tam giác vuông có các số đo: $3, 4, 5$ hoặc $8, 15, 17$. Từ đó, nhờ phép đồng dạng, biết được số đo của các tam giác có số đo lớn (xem [2], [5]).

Dưới đây là định nghĩa các tên gọi trong tam giác vuông (xem [2], Quyển 5):

Câu: "*khoát*" (rộng) gọi là "*câu*", tam giác vuông $(8, 15, 17)$ thì câu là 8.

Cổ: "*trường*" (dài) gọi là "*cổ*", ví dụ là 15 trong tam giác vuông $(8, 15, 17)$.

Huyền: "*tà*" (cạnh chéo) gọi là "*huyền*", bằng 17 trong tam giác $(8, 15, 17)$.

Câu cổ hòa: Tổng hai cạnh câu và cổ, ví dụ: $8 + 15 = 23$.

Câu huyền hòa: Tổng của cạnh câu và cạnh huyền: $8 + 17 = 25$.

Cổ huyền hòa: Tổng của cạnh cổ và cạnh huyền: $15 + 17 = 32$.

Câu cổ hiệu: Cạnh cổ trừ cạnh câu: $15 - 8 = 7$.

Câu huyền hiệu: Cạnh huyền trừ đi cạnh câu: $17 - 8 = 9$.

Cổ huyền hiệu: Cạnh huyền trừ đi cạnh cổ: $17 - 15 = 2$.

Huyền hòa hiệu: Tổng của câu và cổ, trừ đi huyền: $15 + 8 - 17 = 6$.

Huyền hiệu hiệu: Huyền trừ đi hiệu của cổ và câu: $17 - (15 - 8) = 10$.

Huyền hiệu hòa: Huyền cộng với hiệu của cổ và câu: $17 + (15 - 8) = 24$.

Huyền hòa hòa: Huyền cộng với tổng của câu cổ: $17 + (15 + 8) = 40$.

2. Giải tam giác vuông nhờ Định lí Pythagoras

Dựa vào Định lí Pythagoras, biết hai yếu tố trong tam giác vuông, có thể tìm các yếu tố còn lại (cạnh, diện tích,...). Trong Ý Trai toán pháp nhất đắc lục, Nguyễn Hữu Thận đã nêu 60 bài toán giải tam giác vuông bằng đại số (giải hệ phương trình bậc hai). Dưới đây chúng tôi trình bày các bài toán này theo [2].

2.1. Các bài toán cơ bản: CÂU CỔ HUYỀN TÌM LẪN NHAU, TÌM DIỆN TÍCH, DUNG VIÊN (đường kính đường tròn nội tiếp)

Trước tiên Nguyễn Hữu Thận nêu các bài toán cơ bản. Ông viết (Quyển 5, trang 8): Chiếu theo: Câu 3 phân, cổ 4 phân, huyền 5 phân, ắt có một góc vuông. Câu bình phương bằng 9, cổ bình phương bằng 16, huyền bình phương bằng 25. Bình phương cạnh huyền, bằng bình phương của hai cạnh câu và cổ cộng lại, cho nên xác định qui tắc, dùng phép cộng, phép trừ bình phương của các cạnh câu 3, cổ 4, huyền 5, mà tìm lẫn nhau.

Lấy cái việc định số không thay đổi mà định pháp (quy tắc) không thay đổi.

Bài toán cơ bản 1 ([?], Quyển 5, trang 8). *Hữu câu hữu cổ cầu huyền. Có cạnh CÂU và cạnh CỔ. Tìm cạnh HUYỀN. Tìm a, biết c, b.*

Phương pháp (Từ định lí Pythagoras). Bình phương các cạnh câu cổ, cộng gộp lại, được kết quả, khai phương [khai căn], là cạnh huyền. □

Bài toán cơ bản 2 (Trang 8[1]). *Hữu câu hữu huyền cầu cổ. Có cạnh CÂU và cạnh HUYỀN. Tìm cạnh CỔ. Tìm b, biết c, a.*

Phương pháp. Bình phương các cạnh câu và huyền. Huyền bình phương trừ đi câu bình phương, khai phương kết quả, được cạnh cổ. □

Bài toán cơ bản 3 (Trang 8). *Hữu cổ hữu huyền cầu câu. Có cạnh CỔ và cạnh HUYỀN. Tìm cạnh CÂU. Tìm c, biết b, a.*

Phương pháp. Bình phương các cạnh cổ và huyền. Huyền bình phương trừ cổ bình phương, được kết quả, khai phương, là cạnh câu. □

[1] Về sau *Trích dẫn [?], quyển 5, trang m* sẽ được viết gọn là *trang m*.

Bài toán cơ bản 4 (Trang 9). *Hữu câu cổ cầu tích. Có cạnh CÂU và cạnh CỔ. Tìm diện tích.*

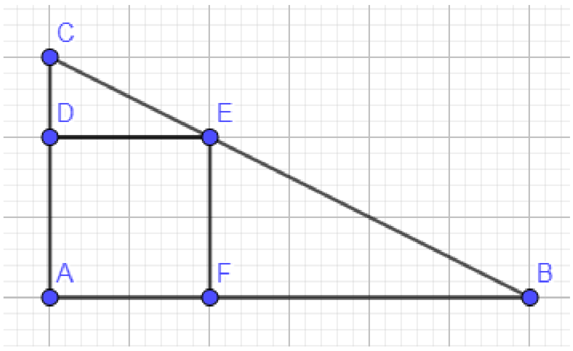
Phương pháp. Hai cạnh câu, cổ nhân với nhau, chia đôi, được [diện] tích, hoặc cạnh câu và một nửa cạnh cổ, hoặc cạnh cổ và một nửa cạnh câu nhân với nhau cũng được. □

Giải thích: Câu cổ tích là diện tích. Phàm ruộng hình chữ nhật thì lấy chiều dài nhân chiều rộng được diện tích, mà hình câu cổ (tam giác vuông) là nửa hình chữ nhật, cho nên hai cạnh câu cổ nhân với nhau, chia đôi, được diện tích.

Bài toán cơ bản 5 (Trang 10). *Hữu câu cổ cầu huyền cầu dung phương. Có CÂU CỔ HUYỀN. Tìm cạnh hình vuông nội tiếp.*

Phương pháp. Lấy hai cạnh câu và cổ nhân với nhau, được một tích, là "*thực*". Hai cạnh câu, cổ cộng với nhau, được "*pháp*". Thực chia pháp được một cạnh của dung phương. □

Giải thích 1: Gọi các cạnh của tam giác vuông là a, b, c, cạnh hình vuông nội tiếp là x.



Hình 5: Cạnh hình vuông nội tiếp

Hai tam giác CDE và CAB đồng dạng (hình 5). Suy ra

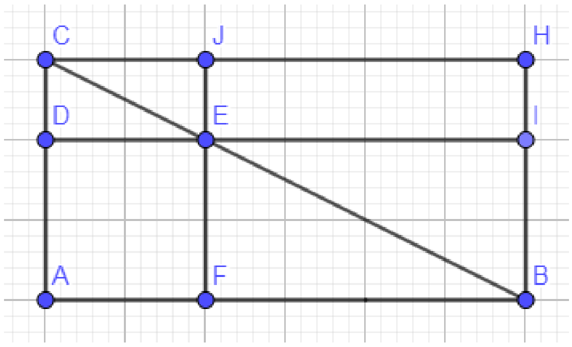
$$\frac{CD}{DE} = \frac{CA}{AB} \Leftrightarrow \frac{b-x}{x} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{b}{x} - 1 = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{b}{c} + 1 = \frac{b+c}{c}.$$

Vậy $x = \frac{bc}{b+c}$.

Giải thích 2 (Phương pháp diện tích): Các tam giác vuông ABC và HBC, BEF và BEI, CDE và CJE tương ứng bằng nhau (Hi nh 6) nên diện tích hình vuông $ADEF$ bằng diện tích chữ nhật $EIHJ$. Suy ra $x^2 = (b-x)(c-x)$. Vậy $x = \frac{bc}{b+c}$.

Ví dụ 1 (Trang 10). *Giả sử có câu 5 xích* [2]*, cổ 12 xích, dung phương bằng bao nhiêu?*

[2] Đơn vị đo độ dài: 1 xích (1 thước) = 10 thốn = 100 phân = 1000 ly.



Hình 6: Phương pháp diện ích

Lời giải. (Trang 10) Lấy câu 5 xích, cổ 12 xích, nhân với nhau, được 60 xích làm thực. Gộp câu, cổ được 17 xích làm pháp. Thực chia pháp, được 3 xích 5 thốn 2 phân 9 ly, có dư, là một cạnh của dung phương. □

Giải thích: Ta có

$$x = \frac{bc}{b+c} = \frac{5 \times 12}{5+12} = \frac{60}{17} \approx 3.5294117647.$$

Nguyễn Hữu Thận cũng đã nói đến chia có dư, tức là phép chia được số thập phân vô hạn tuần hoàn. Dừng lại đơn vị ly thì ta được gần đúng đến ly.

Bài toán cơ bản 6 (Trang 11). *Hữu câu cổ huyền cầu dung viên kính. Có CÂU CỔ HUYỀN cầu DUNG VIÊN KÍNH. Biết các cạnh câu, cổ, huyền. Tìm bán kính của đường tròn nội tiếp.*

Lời giải. Câu cổ cộng với nhau, trừ đi cạnh huyền, được "*huyền hòa hiệu*", trong câu cổ, có bán kính của dung viên [tức là, đoạn câu AB, và đoạn cổ AC, có chứa một đoạn AC' và AB' là bán kính đường tròn nội tiếp]. Cách này đơn giản và hoàn chỉnh nhất. Hoặc lấy câu cổ nhân với nhau làm "*thực*", chia cho câu, cổ, huyền, cộng với nhau làm "*pháp*", được bán kính của dung viên, nhân đôi, được đường kính của dung viên. □

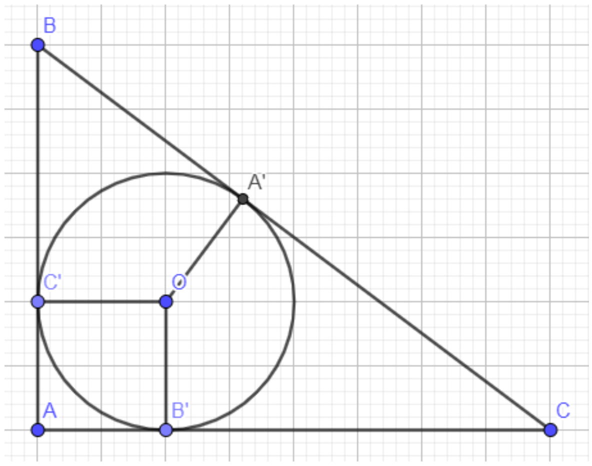
Giải thích 1: Tam giác ABC vuông ở A. Gọi A', B', C' tương ứng là các tiếp điểm với các cạnh BC, AC, AB của đường tròn tâm O nội tiếp tam giác (hình 7).

Ta có

$$r = AB' = AC' = OA' = OB' = OC'.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} b + c - a &= \left(AB' + B'C\right) + \left(AC' + C'B\right) - \left(BA' + A'C\right) \\ &= AB' + AC' = 2r. \end{aligned}$$



Hình 7: Bán kính đường tròn nội tiếp

Giải thích 2: Vì ABC là tam giác vuông nên ta có $S = pr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$ và $S = \frac{bc}{2}$. Suy ra $r = \frac{bc}{a+b+c}$.

Ví dụ 2 (Trang 12). *Giả sử có câu* 6 *xích, cổ* 8 *xích, huyền* 10 *xích, muốn từ đỉnh góc vuông kẻ đường cao đến cạnh huyền, chia làm* 2 *hình tam giác, hỏi mỗi hình có các số đo lớn nhỏ là bao nhiêu?*

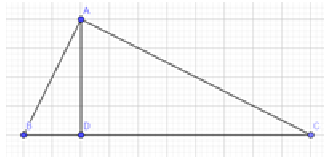
Lời giải. Câu 6 xích, cổ 8 xích, nhân với nhau, chia cho cạnh huyền 10 xích, được 4 xích 8 thốn, là chiều dài tính theo xích, thốn từ góc vuông đến cạnh huyền (tức là "*trung thùy tuyến*" cùng với cạnh huyền tạo thành hình chữ thập, cho nên gọi nó là trung thùy tuyến).

Vẫn lấy cạnh câu 6 xích như ban đầu, bình phương, được 36 xích, chia cho cạnh huyền ban đầu 10 xích, được 3 xích 6 thốn, làm cạnh nhỏ được phân ra từ cạnh huyền ban đầu, là cạnh câu của hình tam giác nhỏ. Hình tam giác nhỏ [có] cạnh câu của hình nhỏ dài 3 xích 6 thốn, cổ dài 4 xích 8 thốn (tức là trung thùy tuyến), huyền 6 xích (tức là cạnh câu ban đầu).

Lại có cạnh cổ ban đầu 8 xích, bình phương, được 64 xích, chia cho cạnh huyền ban đầu 10 xích, được 6 xích 4 thốn, làm cạnh lớn hơn được chia ra từ cạnh huyền, là cạnh cổ của hình tam giác lớn hơn. Hình tam giác lớn, có cạnh cổ 6 xích 4 thốn, câu 4 xích 8 thốn (tức là trung thùy tuyến), huyền 8 xích (tức là cạnh cổ ban đầu).

Dựa vào câu, cổ để tìm diện tích, hình ban đầu có diện tích là 24 xích, hình câu cổ lớn hơn được chia ra từ đó có diện tích là 15 xích 3 thốn 6 phân, hình nhỏ hơn được chia ra từ đó có diện tích là 8 xích 6 thốn 4 phân, cộng lại cũng được diện tích của hình ban đầu là 24 xích. □

Giải thích: "*Trung thùy tuyến*" theo ngôn ngữ hiện nay là "*chiều cao*" $AD = h$ của tam giác vuông ABC có các cạnh huyền $BC = a = 10$ xích, câu $AB = c = 6$ xích, cổ $AC = b = 8$



Hình 8: Tam giác vuông đồng dạng

xích. Gọi S là diện tích tam giác vuông ABC. Ta có $2S = bc = ah$. Suy ra $h = AD = \frac{bc}{a} = \frac{6\times 8}{10} = 4,8$ (4 xích 8 thốn). Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $AB^2 = BD \cdot BC$. Suy ra

$$BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6 \quad \text{(3 xích 6 thốn).}$$

Tương tự, $AB^2 = CD \cdot BC$. Suy ra $CD = \frac{AC^2}{BC} = \frac{8^2}{10} = 6,4$ (6 xích 4 thốn).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{6\times 8}{2} = 24 \quad \text{(xích vuông).}$$

$$S_{ADB} = \frac{1}{2}AD \cdot BD = \frac{4,8\times 3,6}{2} = 8,64 \quad \text{(8 xích 6 thốn 4 phân).}$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2}AD \cdot CD = \frac{4,8\times 6,4}{2} = 15,36 \quad \text{(15 xích 3 thốn 6 phân).}$$

3. Câu cổ huyền hòa hiệu tương cầu chư pháp (kế lục thập điều) CÁC PHƯƠNG PHÁP DÙNG TỔNG, HIỆU CỦA CÁC CẠNH CÂU, CỔ, HUYỀN. TÌM LẪN NHAU (60 bài toán)

Trong các Quyển 2, 4, 5 (trong số 8 Quyển) của [2], Nguyễn Hữu Thận đã áp dụng định lí Pythagoras để giải khá nhiều các bài toán về tam giác vuông (60 bài toán), bằng cách đưa về giải các hệ phương trình bậc hai hai ẩn và áp dụng trong tính diện tích các hình. Mục này trình bày 60 bài toán giải tam giác vuông trong Quyển 5 của Ý Trai toán pháp nhất đắc lục.

Bài toán 1 (Trang 22, Hữu câu hữu cổ huyền hòa, cầu cổ huyền). *Có CÂU, có tổng của CỔ và HUYỀN. Tìm CỔ, HUYỀN. Biết c, $a + b = m$. Tìm a, b.*

Lời giải. Ta có $a^2 - b^2 = c^2$. Suy ra $a - b = \frac{c^2}{a+b} = \frac{c^2}{m}$. Vậy

$$b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2} = \frac{m - \frac{c^2}{m}}{2} = \frac{m^2 - c^2}{2m}. \tag{1}$$

và

$$a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = \frac{m + \frac{c^2}{m}}{2} = \frac{m^2+c^2}{2m}. \tag{2}$$

□

Ví dụ 3 (Trang 22 - 23). *Giả sử có câu 8 xích, tổng của cổ và huyền 32 xích, hỏi cạnh cổ và cạnh huyền là bao nhiêu?*

Lời giải. Ta có $c = 8$, $m = a + b = 32$. Suy ra $a - b = \frac{c^2}{a+b} = \frac{8^2}{32} = 2$. Suy ra $a = 17$, $b = 15$. Cũng có thể áp dụng trực tiếp công thức (1), (2), ta có $b = \frac{32^2-8^2}{2\times 32} = 15$ (xích) và $a = \frac{32^2+8^2}{2\times 32} = 17$ (xích). □

Bài toán 2 (Trang 23). *Hữu cổ hữu câu huyền hòa, cầu câu huyền. Có CỔ, tổng của HUYỀN và CÂU. Tìm CÂU và HUYỀN. Biết b, $a + c = m$. Tìm a, c.*

Lời giải. Bình phương cạnh cổ, lấy tổng của câu và huyền để lập phép chia, được hiệu của câu và huyền. Lấy tổng trừ hiệu, chia đôi, là cạnh câu. Lấy tổng cộng hiệu, chia đôi là cạnh huyền. □

Giải thích: Ta có $a^2 - c^2 = b^2$. Suy ra

$$a - c = \frac{b^2}{a+c} = \frac{b^2}{m}.$$

Vậy

$$c = \frac{(a+c)-(a-c)}{2} = \frac{m - \frac{b^2}{m}}{2} = \frac{m^2-b^2}{2m},$$

và

$$a = \frac{(a+c)+(a-c)}{2} = \frac{m + \frac{b^2}{m}}{2} = \frac{m + \frac{b^2}{m}}{2} = \frac{m^2+b^2}{2m}.$$

Lưu ý: Về nguyên tắc, Bài toán (3) và (2) giống nhau. Có thể phát biểu chung: Cho một cạnh góc vuông và tổng của cạnh huyền và cạnh còn lại. Tìm cạnh huyền và cạnh còn lại. Tuy nhiên, trong các sách toán Trung Quốc cổ đại, và sa ch toán Hán Nôm, mỗi cạnh góc vuông có tên riêng (câu và cổ), do đó các bài toán liên quan đến câu hoặc cổ thường được phát biểu riêng rẽ.

Bài toán 3 (Trang 23). *Hữu câu hữu cổ huyền hiệu, cầu cổ huyền. Có CÂU, hiệu của HUYỀN và CỔ. Tìm CỔ và HUYỀN. Biết c, $a - b = m$. Tìm a, b.*

Lời giải. Bình phương cạnh câu, dựa vào hiệu của huyền và cổ để lập phép chia, được tổng của huyền và cổ. Lấy tổng trừ hiệu, chia đôi, là cạnh cổ. Lấy tổng cộng hiệu, chia đôi, là cạnh huyền. □

Giải thích: Ta có $a^2 - b^2 = c^2$. Suy ra

$$a + b = \frac{c^2}{a-b} = \frac{c^2}{m}.$$

Vậy

$$b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2} = \frac{\frac{c^2}{m} - m}{2} = \frac{c^2 - m^2}{2m}$$

và

$$a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = \frac{\frac{c^2}{m} + m}{2} = \frac{c^2 + m^2}{2m}.$$

Bài toán 4 (Trang 23). *Hữu cổ hữu câu huyền hiệu, cầu câu huyền. Có CỔ, hiệu của HUYỀN và CÂU. Tìm CÂU và HUYỀN. Biết b, $a - c = m$. Tìm a, c.*

Lời giải. Bình phương cạnh cổ, dựa vào hiệu của huyền và câu để lập phép chia, được tổng của huyền và câu. Lấy tổng trừ hiệu, chia đôi là câu. Lấy tổng cộng hiệu, chia đôi, là cạnh huyền. □

Giải thích: Ta có $a^2 - c^2 = b^2$. Suy ra $a + c = \frac{b^2}{a-c} = \frac{b^2}{m}$. Vậy

$$c = \frac{(a+c)-(a-c)}{2} = \frac{\frac{b^2}{m} - m}{2} = \frac{b^2 - m^2}{2m},$$

và

$$a = \frac{(a+c)+(a-c)}{2} = \frac{\frac{b^2}{m} + m}{2} = \frac{b^2 + m^2}{2m}.$$

Bài toán 5 (Trang 24). *Hữu huyền, hữu câu cổ hòa, cầu câu cổ. Có HUYỀN, tổng của CÂU và CỔ. Tìm CÂU, CỔ. Biết a, $c + b = m$. Tìm c, b.*

Lời giải. Bình phương cạnh huyền, nhân đôi, trừ đi bình phương tổng của câu và cổ, được kết quả, khai phương, là hiệu của hai cạnh câu và cổ. Lấy tổng trừ hiệu, chia đôi, là cạnh câu. Lấy tổng cộng hiệu, chia đôi, là cạnh cổ. □

Giải thích: Ta có

$$(b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 = 2(b^2 + c^2) - \left(b^2 + 2bc + c^2\right) = 2a^2 - (c+b)^2 = 2a^2 - m^2.$$

Suy ra $b - c = \sqrt{2a^2 - m^2}$. Vậy

$$b = \frac{(c+b)+(b-c)}{2} = \frac{m + \sqrt{2a^2 - m^2}}{2}. \tag{3}$$

và

$$c = \frac{(c+b)-(b-c)}{2} = \frac{m - \sqrt{2a^2 - m^2}}{2}. \tag{4}$$

Ví dụ 4 (Trang 24). *Giả sử có cạnh huyền 17 xích, tổng câu và cổ là 23 xích, hỏi cạnh câu, cạnh cổ là bao nhiêu?*

Lời giải. Bình phương cạnh huyền, là 289 xích, nhân đôi, là 578 xích, trừ đi bình phương tổng của câu cổ là 529 xích, còn 49 xích, khai căn, được 7 xích, là hiệu của cạnh câu và cạnh cổ. Lấy tổng trừ hiệu, còn 16 xích, chia đôi, được 8 xích, là cạnh câu. Lấy tổng cộng hiệu, được 30 xích, chia đôi được 15 xích, là cổ. □

Giải thích: Ta có

$$(b-c)^2 = 2a^2 - (c+b)^2 = 2a^2 - m^2 = 2 \times 17^2 - 23^2 = 49.$$

Suy ra $b - c = 7$, kết hợp với $b + c = 23$ ta có $b = 15,\ c = 8$. Tính trực tiếp theo công thức (11), (12), ta được

$$b = \frac{23 + \sqrt{2 \times 17^2 - 23^2}}{2} = 15 \quad \text{(xích)},$$
$$c = \frac{23 - \sqrt{2 \times 17^2 - 23^2}}{2} = 8 \quad \text{(xích)}.$$

Bài toán 6 (Trang 25). *Hữu huyền hữu câu cổ hiệu, cầu câu cổ. Có HUYỀN, hiệu của CỔ và CÂU. Tìm CÂU, CỔ. Biết $a,\ b - c = m$. Tìm b, c.*

Lời giải. Bình phương cạnh huyền, nhân đôi, trừ đi bình phương hiệu của cổ và câu, được kết quả, khai căn, là tổng của câu và cổ. Lấy tổng trừ hiệu, chia đôi là cạnh câu. Lấy tổng cộng hiệu, chia đôi, là cạnh cổ. □

Giải thích: Tương tự Bài toán 5, ta có

$$(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = 2(b^2 + c^2) - \left(b^2 - 2bc + c^2\right) = 2a^2 - (b-c)^2 = 2a^2 - m^2.$$

Suy ra

$$b = \frac{(b+c) + (b-c)}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 - m^2} + m}{2},$$

và

$$c = \frac{(b+c) + (c-b)}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 - m^2} - m}{2}.$$

Bài toán 7 (Trang 27). *Hữu câu huyền hòa, hữu cổ huyền hòa, cầu câu cổ huyền. Có tổng HUYỀN và CÂU, tổng HUYỀN và CỔ. Tìm CÂU, CỔ, HUYỀN. Biết $a + c = m,\ a + b = n$. Tìm a, b, c.*

Lời giải. Lấy tổng (của huyền + câu) nhân với tổng (của huyền + cổ), được một tích, nhân đôi, khai phương, được "*tổng hòa*" (câu + cổ + huyền)

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\\ &= 2a^2+2ab+2ac+2bc = 2(a+b)(a+c) = 2mn.\end{aligned}$$

Vậy $a+b+c=\sqrt{2mn}$. Lấy "*tổng hòa*", trừ đi (huyền + câu), còn lại là cổ

$$b = (a+b+c)-(a+c) = \sqrt{2mn}-m. \tag{5}$$

Lấy "*tổng hòa*" trừ đi (huyền + cổ), còn lại là câu

$$c = (a+b+c)-(a+b) = \sqrt{2mn}-n. \tag{6}$$

Lấy "*tổng hòa*", trừ đi (câu + cổ), còn lại là huyền

$$a = (a+b+c)-(b+c) = \sqrt{2mn}-\left(\sqrt{2mn}-n+\sqrt{2mn}-m\right) = m+n-\sqrt{2mn}. \tag{7}$$

□

Ví dụ 5 (Trang 26). *Giả sử có tổng hai cạnh câu và huyền là 25 xích, tổng hai cạnh cổ và huyền là 32 xích, hỏi câu, cổ, huyền là bao nhiêu?*

Lời giải. Lấy tổng hai cạnh câu và huyền ($m=c+a=8+17=25$ xích), nhân với tổng hai cạnh cổ và huyền ($n=b+a=15+17=32$ xích), được $mn=25\times 32=800$ xích, nhân đôi, được $2mn=2\times 800=1600$ xích, khai phương, được $a+b+c=\sqrt{2mn}=\sqrt{1600}=40$ xích, là tổng của cả ba cạnh câu, cổ, và huyền.

Lấy tổng hòa ($a+b+c=40$ xích) này, trừ đi tổng của câu và huyền (25 xích), còn 15 xích, là cạnh cổ:

$$b = (a+b+c)-(a+c) = \sqrt{2mn}-n = 40-25 = 15(\text{xích}).$$

Lấy tổng hòa (40 xích), trừ đi tổng của huyền và cổ (32 xích), còn 8 xích, là cạnh câu $c=(a+b+c)-(a+b)=40-32=8$ xích.

Lấy tổng hòa 40 xích, trừ đi cạnh câu 8 xích, trừ tiếp cạnh cổ 15 xích, còn 17 xích, là cạnh huyền $a=(a+b+c)-b-c=40-15-8=17$ xích.

Tính trực tiếp ba cạnh theo công thức (5) – (7), ta được

$$b = \sqrt{2mn}-m = \sqrt{2\times 25\times 32}-25 = 40-25 = 15.$$

$$c = \sqrt{2mn}-n = 40-32 = 8;$$

$$a = m+n-\sqrt{2mn} = 32+25-40 = 17.$$

□

Bài toán 8 (Trang 26). *Hữu câu cổ hòa, hữu câu huyền hòa, cầu câu cổ huyền. Có tổng của CÂU và CỔ, tổng của CÂU và HUYỀN. Tìm CÂU, CỔ, HUYỀN. Biết* $c+b=m$, $c+a=n$. *Tìm* a, b, c.

Lời giải. Lấy bình phương của hai tổng, trừ cho nhau

$$n^2-m^2=(c+a)^2-(c+b)^2=a^2+2ac-2bc-b^2.$$

Lấy hai tổng trừ cho nhau, kết quả là hiệu của cạnh huyền và cạnh cổ

$$a-b=(c+a)-(c+b)=n-m.$$

Lấy bình phương của hiệu này, cộng với hiệu của bình phương hai tổng:

$$\begin{aligned}(n-m)^2+\left(n^2-m^2\right)&=(a-b)^2+\left((c+a)^2-(c+b)^2\right)\\&=a^2-2ab+b^2+\left(a^2+2ac-2bc-b^2\right)=2a^2-2ab+2ac-2bc\\&=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc=(c+a-b)^2.\end{aligned}$$

Suy ra

$$c=(c+a-b)-(a-b)=\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)}-(n-m)\,. \tag{8}$$

$$\begin{aligned}b&=(c+b)-c=m-\left(\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)}-(n-m)\right)\\&=n-\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)}.\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}a&=(a+b)-b=n-\left(\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)}-(n-m)\right)\\&=2n-m-\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)}.\end{aligned} \tag{10}$$

□

Bài toán 9 (Trang 25). *Hữu câu cổ hòa, hữu cổ huyền hòa, cầu câu cổ huyền. Có tổng CÂU và CỔ, tổng CỔ và HUYỀN. Tìm CÂU, CỔ, HUYỀN. Biết* $c+b=m$, $b+a=n$. *Tìm* a, b, c.

Lời giải. Lấy bình phương của hai tổng trừ cho nhau

$$n^2-m^2=(b+a)^2-(c+b)^2=a^2+2ab-2bc-c^2,$$

và lấy hai tổng trừ cho nhau

$$a-c=(b+a)-(c+b)=n-m.$$

Bình phương, cộng với hiệu của bình phương hai tổng, khai căn, được kết quả là cổ + huyền – câu

$$\begin{aligned}(n-m)^2+\left(n^2-m^2\right) &= (a-c)^2+\left(a^2+2ab-2bc-c^2\right)\\ &= a^2-2ac+c^2+\left(a^2+2ab-2bc-c^2\right)\\ &= 2a^2-2ac+2ab-2bc\\ &= a^2+b^2+c^2-2ac+2ab-2bc=(b+a-c)^2.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}b &= (b+a-c)-(a-c)=\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)}-(n-m)\,.\\ c &= (c+b)-b=m-\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)}+(n-m)\\ &= n-\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)}.\\ a &= (b+a)-b=n-\left(\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)}-(n-m)\right)\\ &= 2n-m-\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)},\end{aligned}$$

□

Bài toán 10 (Trang 29). *Hữu câu huyền hiệu, hữu cổ huyền hiệu, cầu câu cổ huyền. Có hiệu của HUYỀN và CÂU, hiệu của HUYỀN và CỔ. Tìm CÂU, CỔ, HUYỀN. Biết $a-c=m, a-b=n$. Tìm a, b, c.*

Lời giải. Lấy hiệu huyền–câu nhân với hiệu huyền–cổ, nhân đôi, khai căn, được hiệu (câu +cổ)–huyền, cũng gọi là "huyền hòa hiệu":

$$\begin{aligned}(b+c-a)^2 &= b^2+c^2+2bc-2ab-2ac+a^2\\ &= 2a^2-2ab-2ac+2bc=2(a-c)(a-b)=2mn.\end{aligned}$$

Vậy $b+c-a=\sqrt{2mn}$. Lấy hiệu đó cộng thêm hiệu huyền–câu, là cạnh cổ:

$$b=(b+c-a)+(a-c)=\sqrt{2mn}+m.$$

Lấy hiệu đó cộng thêm hiệu huyền–cổ, là cạnh câu

$$c=(b+c-a)+(a-b)=\sqrt{2mn}+n.$$

Lấy cạnh cổ cộng thêm hiệu huyền–cổ, là cạnh huyền

$$a=b+(a-b)=\left(\sqrt{2mn}+m\right)+n=\sqrt{2mn}+m+n.$$

Hoặc lấy cạnh câu cộng thêm hiệu huyền–câu, cũng được cạnh huyền

$$a=c+(a-c)=\left(\sqrt{2mn}+n\right)+m=\sqrt{2mn}+m+n.$$

□

Bài toán 11 (Trang 29). *Giả sử có hiệu giữa cạnh huyền và câu là 9 xích, hiệu giữa cạnh huyền và cạnh cổ là 2 xích, hỏi các cạnh câu, cổ, huyền là bao nhiêu?*

Lời giải. Lấy hiệu huyền–câu, $m = 9$ xích, nhân với hiệu huyền – cổ, $n = 2$ xích, được $m \cdot n = 9 \times 2 = 18$ xích, nhân đôi, được $2mn = 2 \times 18 = 36$ xích, khai phương, được $\sqrt{2mm} = \sqrt{36} = 6$ xích, chính là hiệu của (câu + cổ) – huyền, còn được gọi là "huyền hòa hiệu": $b + c - a = \sqrt{2mn} = 6$ xích.

Lấy "huyền hòa hiệu" 6 xích cộng thêm hiệu huyền–câu, 9 xích, được 15 xích, là cạnh cổ

$$b = (b + c - a) + (a - c) = \sqrt{2mn} + m = 6 + 9 = 15.$$

Lấy "huyền hòa hiệu" cộng thêm hiệu huyền – cổ, 2 xích, được 8 xích, là cạnh câu

$$c = (b + c - a) + (a - b) = \sqrt{2mn} + n = 6 + 2 = 8.$$

Lấy cạnh cổ, 15 xích, cộng với hiệu huyền – cổ, 2 xích, được 17 xích, là cạnh huyền hoặc lấy cạnh câu 8 xích, cộng thêm hiệu huyền – câu, 9 xích, cũng được 17 xích, là cạnh huyền. Hoặc tính theo công thức

$$a = \sqrt{2mn} + m + n = \sqrt{2 \times 9 \times 2} + 9 + 2 = 17 \quad \text{(xích)}.$$

□

Bài toán 12 (Trang 55). *Hữu câu cổ hiệu, hữu câu cổ huyền tổng hòa (nhất danh huyền hòa hòa), cầu câu cổ huyền. Biết hiệu cổ-câu và tổng hòa câu + cổ + huyền (gọi là huyền hòa hòa). Tìm câu, cổ, huyền. Biết $b - c = m$, $a + b + c = n$. Tìm a, b, c.*

Lời giải. Lấy bình phương "tổng hòa", chia đôi, là "trường phương tích" $\frac{(a+b+c)^2}{2} = \frac{n^2}{2}$.

Lấy 4 nhân với "trường phương tích", cộng với bình phương của hiệu khoát– trường, khai căn, được tổng khoát + trường

$$\begin{aligned}
(2a + b + c)^2 &= 4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 2bc \\
&= \left(b^2 - 2bc + c^2\right) + 2\left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\right) \\
&= (b - c)^2 + 4 \cdot \frac{(a + b + c)^2}{2} = m^2 + 2n^2. \\
&\Rightarrow 2a + b + c = \sqrt{m^2 + 2n^2}.
\end{aligned}$$

Lấy tổng của trường và khoát, trừ đi hiệu của trường và khoát, chia đôi, được cạnh khoát, chính là tổng huyền+câu:

$$a + c = \frac{(2a + b + c) - (b - c)}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 2n^2} - m}{2}.$$

Lấy tổng của trường và khoát, cộng với hiệu của trường và khoát, chia đôi, được cạnh trường, chính là tổng huyền+cổ.

$$a + b = \frac{(2a + b + c) + (b - c)}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 2n^2} + m}{2}.$$

Lấy "tổng hòa" câu+cổ+huyền trừ đi tổng huyền + câu, kết quả là cạnh cổ

$$b = (a + b + c) - (a + c) = n - \frac{\sqrt{m^2 + 2n^2} - m}{2} = \frac{2n - \sqrt{m^2 + 2n^2} + m}{2}. \tag{11}$$

Trong "tổng hòa", trừ đi tổng huyền + cổ, kết quả là cạnh câu

$$c = (a + b + c) - (a + b) = n - \frac{\sqrt{m^2 + 2n^2} + m}{2} = \frac{2n - \sqrt{m^2 + 2n^2} - m}{2}. \tag{12}$$

Trong tổng hòa, trừ cạnh câu, trừ cạnh cổ, phần còn lại là cạnh huyền.

$$\begin{aligned} a &= (a + b + c) - b - c = n - \frac{2n - \sqrt{m^2 + 2n^2} + m}{2} - \frac{2n - \sqrt{m^2 + 2n^2} - m}{2} \\ &= \sqrt{m^2 + 2n^2} - n. \end{aligned} \tag{13}$$

□

Bài toán 13 (Trang 56). *Giả sử có hiệu cổ – câu là 7 xích, tổng hòa câu + cổ + huyền là 40 xích, hỏi các cạnh câu, cổ, huyền là bao nhiêu?*

Lời giải. Lấy tổng hòa câu + cổ + huyền là 40 xích, bình phương, được $(a + b + c)^2$ =1600 xích, chia đôi, được $\frac{(a+b+c)^2}{2} = 800$ xích, là trường phương tích, nhân với 4, được $4 \times \frac{(a+b+c)^2}{2} = 3200$ xích.

Lấy hiệu cổ – câu, $b - c = 7$ xích, làm hiệu trường – khoát, bình phương, được $(b - c)^2 = 49$ xích, cộng với 4 nhân với "trường phương tích", được $(2a + b + c)^2 = (b - c)^2 + 4 \times \frac{(a+b+c)^2}{2} = 49 + 3200 = 3249$ xích, khai phương, được $2a + b + c = 57$ xích, là tổng trường + khoát.

Lấy tổng (57 xích) trừ hiệu (7 xích), còn $2(a + c) = (2a + b + c) - (b - c) = 50$ xích, chia đôi, được $a + c = 25$ xích, là cạnh khoát, tức là tổng huyền + câu.

Lấy tổng (57 xích) cộng với hiệu 7 xích, được $2(a + b) = (2a + b + c) + (b - c) = 64$ xích, chia đôi, là $a + b = 32$ xích, là cạnh trường, tức là tổng huyền + cổ.

Lấy "tổng hòa" (40 xích) trừ đi tổng huyền + câu (25 xích), còn lại $(a + b + c) - (a + c) = 40 - 25 = 15$ xích, là cạnh cổ.

Lấy tổng hòa (40 xích), trừ đi tổng huyền + cổ (32 xích), còn $b = (a + b + c) - (a + b) = 40 - 32 = 8$ xích, là cạnh câu.

Lấy tổng hòa (40 xích), trừ đi cạnh câu 8 xích, trừ đi cạnh cổ 15 xích, còn 17 xích, là cạnh huyền. $\square$

Nhận xét: Thay $m = 7,\ n = 40$ vào các công thức (11) - (13), ta được

$$b = \frac{2n - \sqrt{m^2 + 2n^2} + m}{2} = \frac{2 \times 40 - \sqrt{7^2 + 2 \times 40^2} + 7}{2} = 15.$$

$$c = \frac{2n - \sqrt{m^2 + 2n^2} - m}{2} = \frac{2 \times 40 - \sqrt{7^2 + 2 \times 40^2} - 7}{2} = 8.$$

$$a = \sqrt{m^2 + 2n^2} - n = \sqrt{7^2 + 2 \times 40^2} - 40 = 17.$$

Bài toán 14 (Trang 57). *Hữu câu huyền hiệu, hữu câu cổ huyền tổng hòa (nhất danh huyền hòa hòa), cầu câu cổ huyền. Có hiệu huyền – câu và tổng hòa câu + cổ + huyền (gọi là huyền hòa hòa). Tìm câu, cổ, huyền. Biết $a - c = n$, $a + b + c = m$. Tìm a, b, c.*

Lời giải. Lấy tổng hòa câu + cổ + huyền trừ đi hiệu huyền – câu, phần còn lại là tổng 2 câu + cổ, bình phương lên, được một tích

$$m - n = (a + b + c) - (a - c) = 2c + b$$
$$\Rightarrow (m - n)^2 = (2c + b)^2 = 4c^2 + 4bc + b^2.$$

Lại lấy tổng hòa câu + cổ + huyền cộng với hiệu huyền – câu, được tổng 2 huyền + cổ, bình phương, được tích thứ hai

$$m + n = (a + b + c) + (a - c) = 2a + b$$
$$\Rightarrow (m + n)^2 = (2a + b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2.$$

Lấy hai tích trừ cho nhau, được kết quả, chia cho 4, là "trường phương tích"

$$\frac{(m + n)^2 - (m - n)^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + b^2 - (4c^2 + 4bc + b^2)}{4}$$
$$\Leftrightarrow mn = a^2 - c^2 + ab - bc = b^2 + ab - bc.$$

Lấy hiệu huyền – câu làm hiệu khoát–trường.

Nhân 4 với "trường phương tích", cộng với bình phương của hiệu khoát–trường, khai căn bậc hai, được tổng khoát+trường.

$$4mn + n^2 = 4(b^2 + ab - bc) + (a - c)^2$$
$$\Leftrightarrow 4mn + n^2 = a^2 + c^2 + 4b^2 - 2ac - 4bc + 4ab$$
$$\Leftrightarrow 4mn + n^2 = (a + 2b - c)^2$$
$$\Rightarrow a + 2b - c = \sqrt{4mn + n^2}.$$

Lấy tổng khoát + trường trừ hiệu khoát – trường, chia đôi, được khoát, là cạnh cổ

$$\begin{cases} a + 2b - c = \sqrt{4mn + n^2} \\ a - c = n \end{cases} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{4mn + n^2} - n}{2}.$$

Trong tổng hòa câu + cổ + huyền, trừ đi cạnh cổ, phần còn lại là tổng huyền + câu

$$a + c = (a + b + c) - b = m - \frac{\sqrt{4mn + n^2} - n}{2} = \frac{2m - \sqrt{4mn + n^2} + n}{2}.$$

Lấy tổng huyền + câu trừ đi hiệu huyền – câu, chia đôi, là cạnh câu

$$c = \frac{(a + c) - (a - c)}{2} = \frac{\frac{2m - \sqrt{4mn + n^2} + n}{2} - n}{2} = \frac{2m - \sqrt{4mn + n^2} - n}{4}.$$

Lấy tổng huyền + câu cộng với hiệu (huyền – câu), chia đôi, là cạnh huyền

$$a = \frac{(a + c) + (a - c)}{2} = \frac{\frac{2m - \sqrt{4mn + n^2} + n}{2} + n}{2} = \frac{2m - \sqrt{4mn + n^2} + 3n}{2}.$$

□

Bài toán 15. *Hữu cổ huyền hiệu, hữu câu cổ huyền tổng hòa (nhất danh huyền hòa hòa), cầu câu cổ huyền. Có hiệu huyền – cổ và tổng hòa câu + cổ + huyền. Tìm câu, cổ, huyền. Biết $a - b = n$, $a + b + c = m$. Tìm a, b, c.*

Lời giải. Lấy tổng hòa câu + cổ + huyền, trừ đi hiệu huyền – cổ, phần còn lại là tổng 2 cổ + câu, bình phương, được tích thứ nhất

$$\begin{aligned} m - n &= (a + b + c) - (a - b) = 2b + c \\ &\Rightarrow (m - n)^2 = (2b + c)^2 = 4b^2 + 4bc + c^2. \end{aligned}$$

Lại lấy tổng hòa câu + cổ + huyền cộng với hiệu huyền – cổ, được kết quả là tổng 2 huyền + câu, bình phương, được tích thứ hai:

$$\begin{aligned} m + n &= (a + b + c) + (a - b) = 2a + c \\ &\Rightarrow (m + n)^2 = (2a + c)^2 = 4a^2 + 4ac + c^2. \end{aligned}$$

Hai tích trừ cho nhau, được kết quả, chia cho 4, là trường phương tích

$$\begin{aligned} &\frac{(m + n)^2 - (m - n)^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ac + c^2 - (4b^2 + 4bc + c^2)}{4} \\ &\Leftrightarrow mn = a^2 - b^2 + ac - bc = c^2 + ac - bc. \end{aligned}$$

Coi hiệu huyền – cổ là hiệu khoát – trường. Nhân 4 với trường phương tích, cộng với bình phương của hiệu khoát – trường. Khai căn, được tổng khoát+trường

$$\begin{aligned}
&4mn + n^2 = 4(c^2 + ac - bc) + (a-b)^2\\
&\Leftrightarrow 4mn + n^2 = a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4bc + 4ac\\
&\Leftrightarrow 4mn + n^2 = (a - b + 2c)^2\\
&\Rightarrow a - b + 2c = \sqrt{4mn + n^2}.
\end{aligned}$$

Lấy tổng khoát + trường trừ hiệu khoát–trường, chia đôi, được khoát, là câu

$$\begin{cases} a - b + 2c = \sqrt{4mn + n^2} \\ a - b = n \end{cases} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{4mn + n^2} - n}{2}.$$

Trong tổng hòa câu + cổ + huyền trừ đi cạnh câu, phần còn lại là tổng huyền + cổ

$$a + b = (a + b + c) - c = m - \frac{\sqrt{4mn + n^2} - n}{2} = \frac{2m + n - \sqrt{4mn + n^2}}{2}.$$

Lấy tổng huyền + cổ trừ đi hiệu huyền – cổ, chia đôi, là cạnh cổ

$$b = \frac{(a + b) - (a - b)}{2} = \frac{\frac{2m+n-\sqrt{4mn+n^2}}{2} - n}{2} = \frac{2m - n - \sqrt{4mn + n^2}}{4}.$$

Lấy tổng huyền+cổ cộng với hiệu huyền–cổ, chia đôi, là cạnh huyền

$$a = \frac{(a + b) + (a - b)}{2} = \frac{\frac{2m+n-\sqrt{4mn+n^2}}{2} + n}{2} = \frac{2m + 3n - \sqrt{4mn + n^2}}{4}.$$

□

Nhận xét: Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp "*trường phương tích*" giải hệ

$$\begin{cases} a + b + c = m \\ a - b = n \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

Bài toán 16. *Hữu câu cổ hòa, hữu huyền dữ câu cổ hiệu chi hiệu (nhất danh huyền hiệu hiệu) cầu câu cổ huyền. Có tổng cổ + câu và hiệu huyền – (cổ – câu) (gọi là huyền hiệu hiệu). Tìm câu, cổ, huyền. Biết $b + c = m$, $a - (b - c) = n$. Tìm a, b, c.*

Lời giải. Bình phương tổng cổ + câu, là số thứ nhất

$$(b + c)^2 = m^2.$$

Lại lấy tổng cổ + câu cộng với hiệu huyền – (cổ – câu), được tổng 2 câu + huyền, bình phương, là số thứ hai

$$m + n = (b + c) + (a - (b - c)) = 2c + a \Leftrightarrow (2c + a)^2 = (m + n)^2.$$

Hai số trừ cho nhau, được kết quả, chia đôi, là trường phương tích

$$\frac{(2c + a)^2 - (b + c)^2}{2} = \frac{3c^2 + 4ac + a^2 - b^2 - 2bc}{2} = \frac{(m + n)^2 - m^2}{2} = \frac{n^2 + 2mn}{2}.$$

Lại lấy hiệu huyền – (cổ – câu) cộng với tổng 2 câu + huyền, là tổng khoát+trường

$$(a - (b - c)) + (2c + a) = 2a + 3c - b = n + (m + n) = m + 2n.$$

Trường phương tích nhân 4, và bình phương của tổng khoát + trường trừ cho nhau, khai căn, được hiệu trường − khoát

$$(2a + 3c - b)^2 - 4 \cdot \frac{\left(3c^2 + 4ac + a^2 - b^2 - 2bc\right)}{2} = (m + 2n)^2 - 2\left(n^2 + 2mn\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(4a^2 + 9c^2 + b^2 + 12ac - 4ab - 6bc\right) - \left(6c^2 + 8ac + 2a^2 - 2b^2 - 4bc\right) = m^2 + 2n^2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2a^2 + 3c^2 + 3b^2 + 4ac - 4ab - 2bc = m^2 + 2n^2 \\
&\Leftrightarrow 4a^2 + c^2 + b^2 + 4ac - 4ab - 2bc = m^2 + 2n^2 \\
&\Leftrightarrow (2a - b + c)^2 = m^2 + 2n^2 \Leftrightarrow 2a - b + c = \sqrt{m^2 + 2n^2}.
\end{aligned}$$

Lấy tổng khoát + trường trừ hiệu khoát – trường, chia đôi, được khoát, là câu

$$c = \frac{(2a + 3c - b) - (2a - b + c)}{2} = \frac{(m + 2n) - \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2}. \tag{14}$$

Lấy tổng cổ + câu trừ đi câu, còn lại là cạnh cổ:

$$\begin{aligned}
b &= (b + c) - c = m - c \\
&= m - \frac{m + 2n - \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2} = \frac{m - 2n + \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Lại lấy huyền – (cổ – câu) + (cổ – câu), là cạnh huyền

$$\begin{aligned}
a &= (a - (b - c)) + (b - c) = n + (b - c) \\
&= n + \frac{m - 2n + \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2} - \frac{m + 2n - \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2} \\
&= \sqrt{m^2 + 2n^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

□

Bài toán 17. *Giả sử có tổng của cạnh cổ và câu là 23 xích, hiệu của hiệu cổ – câu và huyền là 10 xích. Hỏi các cạnh câu, cổ, huyền là bao nhiêu? Biết* $m = b + c = 23$, $n = a - (b - c) = 10$. *Tìm* a, b, c.

Lời giải. Lấy tổng của cạnh cổ và cạnh câu là 23 xích, bình phương, được 529 xích: $m^2 = (b + c)^2 = 23^2 = 529$.

Lấy hiệu huyền – (cổ – câu) (10 xích) cộng với tổng cổ + câu (23 xích), được 33 xích, là tổng của 2 câu + huyền, bình phương, được 1089 xích

$$(m + n)^2 = ((a - (b - c)) + (b + c))^2 = (2c + a)^2 = (23 + 10)^2 = 33^2 = 1089.$$

Hai tích (hai số có được từ phép bình phương) trừ cho nhau, còn 560 xích, chia đôi, được 280 xích, là trường phương tích

$$\frac{3c^2 + 4ac + a^2 - b^2 - 2bc}{2} = \frac{(2c + a)^2 - (b + c)^2}{2} = \frac{(m + n)^2 - m^2}{2} = \frac{1089 - 529}{2} = 280.$$

Lấy hiệu huyền – (cổ – câu) (10 xích) cộng với tổng 2 câu + huyền (33 xích), được 43 xích, là tổng khoát+ trường

$$2a + 3c - b = (a - (b - c)) + (2c + a) = n + (m + n) = 10 + (23 + 10) = 43.$$

Dùng "*trường phương tích*", có tổng khoát+trường, tìm hiệu khoát – trường, dùng các công thức của trường, khoát để tính toán.

Trường phương tích (280 xích) nhân 4, được 1120 xích, tổng khoát + trường (43 xích), bình phương, được 1849 xích, trừ cho nhau, được 729 xích, khai căn bậc hai, được 27 xích, là hiệu trường – khoát

$$(2a - b + c)^2 = (2a + 3c - b)^2 - 4\frac{\left(3c^2 + 4ac + a^2 - b^2 - 2bc\right)}{2} = 43^2 - 4 \times 280 = 729.$$

$$\Rightarrow 2a - b + c = 27.$$

Lấy trường + khoát (43 xích) trừ đi trường – khoát (27 xích), được 16 xích, chia đôi, được khoát 8 xích, là cạnh câu

$$c = \frac{(2a + 3c - b) - (2a - b + c)}{2} = \frac{43 - 27}{2} = 8.$$

Lấy tổng cổ + câu (23 xích) trừ đi cạnh câu (8 xích), còn 15 xích, là cạnh cổ $b = (b + c) - c = m - c = 23 - 8 = 15$. Suy ra $b - c = 15 - 8 = 7$.

Vậy $a = (a - (b - c)) + (b - c) = n + (b - c) = 10 + 7 = 17$. □

Nhận xét: Có thể tính trực tiếp theo công thức (14) – (16)

$$c = \frac{m + 2n - \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2} = \frac{23 + 2 \times 10 - \sqrt{23^2 + 2 \times 10^2}}{2} = 8.$$

$$b = \frac{m - 2n + \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2} = \frac{23 - 2 \times 10 + \sqrt{23^2 + 2 \times 10^2}}{2} = 15.$$

$$a = \sqrt{m^2 + 2n^2} = \sqrt{23^2 + 2 \times 10^2} = \sqrt{729} = 27.$$

Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp "*trường phương tích*" giải hệ

$$\begin{cases} b + c = m \\ a - (b - c) = n \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

Bài toán 18. *Hữu câu cổ hòa, hữu huyền dữ câu cổ hiệu chi hòa (nhất danh huyền hiệu hòa), cầu câu cổ huyền. Có tổng cổ + câu và tổng huyền + (cổ – câu) (gọi là huyền hiệu hòa). Tìm câu, cổ, huyền. Biết $b + c = m$, $a + (b - c) = n$. Tìm a, b, c.*

Lời giải. Tổng cổ + câu, bình phương, được tích thứ nhất

$$m^2 = (b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc.$$

Tổng huyền + (cổ – câu), bình phương được tích thứ hai

$$n^2 = [a + (b - c)]^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 2a^2 + 2ab - 2ac - 2bc.$$

Lấy hai tích cộng với nhau, là trường phương tích

$$m^2 + n^2 = 3a^2 + 2ab - 2ac.$$

Lấy tổng huyền + (cổ – câu), nhân đôi, là hiệu trường – khoát $2(a + (b - c)) = 2n$.

Dựa theo phép thay thế dùng trường phương tích, có hiệu trường – khoát, tìm tổng trường + khoát, dựa vào các công thức của trường, khoát để tính toán.

Trường phương tích nhân 4, cộng với bình phương của hiệu trường – khoát, khai căn, được tổng khoát + trường

$$\begin{aligned} & 4(3a^2 + 2ab - 2ac) + [2(a + (b - c))]^2 = 4(m^2 + n^2) + 4n^2 = 4(m^2 + 2n^2) \\ \Leftrightarrow\ & 12a^2 + 8ab - 8ac + 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8ab - 8ac - 8bc = 4(m^2 + 2n^2) \\ \Leftrightarrow\ & 16a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 16ab - 16ac - 8bc = 4(m^2 + 2n^2) \\ \Leftrightarrow\ & (4a + 2b - 2c)^2 = 4(m^2 + 2n^2) \\ \Leftrightarrow\ & 4a + 2b - 2c = 2\sqrt{m^2 + 2n^2}. \end{aligned}$$

Lấy tổng trường + khoát trừ đi hiệu trường – khoát, chia đôi, được khoát, là cạnh huyền

$$2a = (4a + 2b - 2c) - (2a + 2b - 2c) = 2\sqrt{m^2 + 2n^2} - 2n \Rightarrow a = \sqrt{m^2 + 2n^2} - n.$$

Lấy tổng huyền + (cổ – câu) trừ đi cạnh huyền, còn hiệu cổ – câu

$$b - c = (a + (b - c)) - a = n - \left(\sqrt{m^2 + 2n^2} - n\right) = 2n - \sqrt{m^2 + 2n^2}.$$

Lấy tổng trừ hiệu, chia đôi, được cạnh câu

$$c = \frac{(b + c) - (b - c)}{2} = \frac{m - \left(2n - \sqrt{m^2 + 2n^2}\right)}{2} = \frac{m - 2n + \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2}.$$

Lấy tổng cộng hiệu, chia đôi, được cạnh cổ

$$b = \frac{(b + c) + (b - c)}{2} = \frac{m + \left(2n - \sqrt{m^2 + 2n^2}\right)}{2} = \frac{m + 2n + \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2}.$$

□

Nhận xét: Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp "*trường phương tích*" giải hệ

$$\begin{cases} b + c = m \\ a + (b - c) = n \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

Còn tiếp ...

TOÁN GÒ ĐỐNG DẪN TỚI BÀI TOÁN TÍNH TỔNG HỮU HẠN TRONG CÁC SÁCH TOÁN HÁN NÔM

Phạm Văn Hoằng
Trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội
Phạm Vũ Lộc
Trung tâm Vũ trụ Việt Nam, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
Trần Đại An
Nghiên cứu sinh, Đại học Sư phạm Hà Nội
Đoàn Thị Lệ
Nghiên cứu sinh, National Tsing-Hua University, Taiwan
Tạ Duy Phượng
Cộng tác viên Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết
Thạc sĩ Hán Nôm

Toán gò đống: Dạng toán tính tổng hữu hạn đã có trong các sách toán Trung Quốc từ thế kỉ XI-XVII (xem thí dụ trong [4], [6]). Vì dạng toán này chủ yếu xuất phát từ các bài toán xếp hộp hoặc xếp quả thành đống cao nên các sách toán Trung Quốc và sách toán Hán Nôm (sách toán Việt Nam viết bằng chữ Hán và chữ Nôm) thường gọi là *toán gò đống*.

Một số vật [hộp, quả,...] được xếp trên mặt phẳng thành hình vuông, hình tam giác đều hoặc hình chữ nhật. Lớp tiếp theo được xếp chồng lên lớp thứ nhất với mỗi cạnh giảm đi một vật. Cứ như vậy được k lớp. Ta gọi hình nhận được là *gò*. Như vậy, mỗi mặt bên của gò nhìn từ ngoài vào có dạng một hình thang cân.

Đống được hiểu như các vật [viên gạch, quả, hộp,...] được xếp từ dưới lên trên, mỗi hàng của lớp trên giảm một vật so với hàng ở lớp dưới, giảm dần đến đỉnh chỉ còn 1 viên hoặc một hàng. Đống có thể có đáy là một hàng (đống dựa tường), có thể đáy là một lớp vật xếp thành hình vuông, tam giác đều hoặc chữ nhật. Nếu đáy là hình vuông hoặc tam giác đều thì mỗi mặt bên của đống nhìn từ ngoài vào là tam giác đều. Nếu đáy là hình chữ nhật thì mặt bên là tam giác đều hoặc hình thang cân.

Bài viết này trình bày dạng toán gò đống trong 3 cuốn sách toán Hán Nôm [1] - [3], dẫn tới các bài toán tính tổng hữu hạn.

Để dễ dàng cho bạn đọc và tiện sử dụng trong các lớp khác nhau, chúng tôi kết hợp trình bày cách giải trong sách toán Trung Quốc và sách toán Hán Nôm với những giải thích và chứng minh tỉ mỉ theo ngôn ngữ hiện đại.

1. Dạng toán 1: Xếp vật thành đống dựa tường

1.1. Dạng toán 1.1: Đống nhọn dựa tường

Trước khi phát biểu các bài toán cụ thể, Nguyễn Hữu Thận thường giải thích dạng toán và phương pháp giải. Ông gọi vật xếp thành đống là *vật xếp thành tầng*.

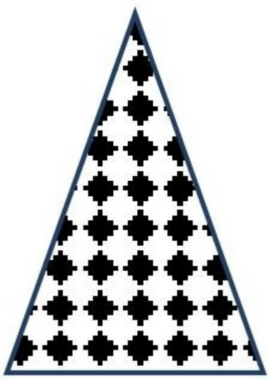
Vật xếp thành tầng nhọn dựa tường một mặt ([2], quyển 6, trang 49a): Vật chỉ xếp một chiều, từ dưới lên trên, mỗi tầng giảm một cái, đến chóp nhọn chỉ còn một cái. Từ tầng thấp nhất, được một số vật thì từ đáy đến tầng ngọn, số tầng cũng bằng số vật [ở tầng thấp nhất] vậy.

Nguyễn Hữu Thận cũng nêu *Phép tính* ([2], quyển 6, trang 49a - 49b): Lấy số cái [số vật] ở tầng thấp nhất cộng với ngọn 1 cái, chia nửa. Lấy số cái ở tầng dưới cùng, nhân với nó được kết quả.

Trình Đại Vị cũng nêu Qui tắc tính số vật trong đống nhọn một mặt như sau.

Qui tắc ([5], trang 13a): Mượn phép ruộng tam giác, đặt số vật ở đáy cộng vào 1 ở trên làm thực. Lấy số vật ở đáy làm pháp, nhân vào chia nửa được kết quả.

Số vật ở chân đáy của đống nhọn cũng chính là số tầng cao.



Hình 1: Mô hình *Đống nhọn dựa tường* ([5], trang 13a).

Giải thích 1: Nhiều công thức giải dạng toán gò đống (tính tổng số vật rời rạc) được mô phỏng từ các công thức tính diện tích, thể tích đã biết (diện tích hình thang, tam giác, thể tích khối đa diện,...).

Giải thích 2: Vì mỗi tầng bớt đi 1 nên số vật ở tầng dưới cùng cũng chính là số hàng. Dẫn tới bài toán tính tổng S_n của dãy số $n,\ n-1, \ldots, 3, 2, 1$ nếu tính từ dưới lên trên, hoặc $1,\ 2,\ 3, \ldots,$ $n-1,\ n$ nếu tính từ trên xuống dưới. Ta xét bài toán tổng quát hơn:

Bài toán: *Tính tổng* $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *của n số hạng đầu tiên của dãy số* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *với* $a_{i+1} = a_i + 1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ta có công thức

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}. \tag{1}$$

Công thức này dễ dàng chứng minh bằng nhiều cách, thí dụ:

Do $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ và $a_i + a_{n-i+1} = (a_1 + i - 1) + (a_n - i + 1) = a_1 + a_n$, nên

$$2S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1)$$

$$= (a_1 + a_n) + ((a_1 + 1) + (a_n - 1)) + \cdots + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n).$$

Vậy (1) được chứng minh.

Trường hợp đặc biệt: *Tổng n số tự nhiên đầu tiên được tính theo công thức*

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}. \tag{2}$$

Bài toán 1 ([5], tờ 13b). *Nay có đống nhọn một mặt dựa tường, chân đáy rộng 18 cái, hỏi tổng số cái?*

Lời giải. Đặt chiều rộng 18 cái làm thực. Đặt riêng 18 cái thêm đỉnh 1 cái, được 19 cái làm pháp. Nhân với nhau được 342 cái. Chia đôi thì được 171 cái. □

Giải thích 1: Đống nhọn dựa tường có chân đáy gồm 18 cái, mỗi hàng bớt đi một cái, tạo thành dãy số $18, 17, \ldots, 2, 1$, có tổng

$$S_{18} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 17 + 18 = \frac{18 \times 19}{2} = 171.$$

Thực và pháp ở đây là hai thừa số trong phép nhân.

Giải thích 2: Sách toán Trung Hoa và sách toán Hán Nôm thường được trình bày theo cấu trúc: Phát biểu bài toán, Đáp số (Đáp rằng), Lời giải hay Qui tắc giải (Pháp viết, Phép tính) được viết bằng lời (chưa dùng công thức và kí hiệu toán học). Và gần như không có giải thích hay chứng minh công thức được sử dụng.

Bài toán 2 ([1], tờ 17a). *Nay có các bao gạo dựa tường một mặt, chân đáy 25 bao, hỏi có tất cả bao nhiêu bao gạo?*

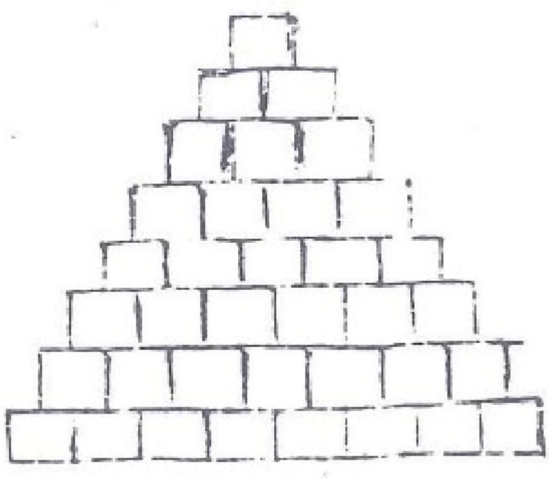
Lời giải. Lấy số chân đáy làm thực, lại lấy số đáy cộng 1 làm pháp nhân với nó, được 650. Chia đôi được 325 bao gạo. □

Giải thích: Dãy số $25, 24, \ldots, 1$ có tổng

$$S_{25} = 1 + 2 + \cdots + 25 = \frac{25 \times 26}{2} = 325.$$

Bài toán 3 ([1], tờ 17a, [3], tờ 95b). *Nay có một đống gạch, dưới chân 38 viên, hỏi chứa bao nhiêu gạch?*

Lời giải. Lấy chân 38 viên làm thực, lại lấy số chân thêm đỉnh là 1, được tổng 39 viên, nhân với nó, được 1482 viên. Chia đôi lấy nửa được 741 viên, hợp với câu hỏi. □



Hình 2: Xếp gạch thành bức tường ([1], tờ 17a)

Giải thích: Đống gạch có chân 38 viên, mỗi hàng trên bớt đi 1 viên, tạo thành dãy số $38, 37, 36, 35, \ldots, 1$ (hình 2, minh họa với $n = 8$) có tổng

$$S_{38} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 37 + 38 = \frac{38 \times 39}{2} = 741.$$

Bài toán 4 ([3], tờ 96a-96b, [2], quyển 6, tờ 57). *Nay có một đống quả một mặt, chân đáy rộng* 12. *Hỏi có bao nhiêu quả?*

Lời giải. Đặt chân dưới 12 làm thực, ngoài ra lấy 12 cộng với đỉnh là 1 cái được tổng là 13, làm phép nhân với nó được 156 cái, chia đôi lấy nửa, hợp với câu hỏi. □

Giải thích: Đống quả có chân 12 quả, mỗi hàng trên bớt đi 1 quả, tạo thành dãy số $12, 11, 10, \ldots, 2, 1$ có tổng

$$S_{12} = 1 + 2 + \cdots + 12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78.$$

1.2. Dạng toán 1.2: Đống cụt dựa tường

Nguyễn Hữu Thận gọi dạng toán này là *vật xếp nửa tầng* hay *đống cụt* ([2], quyển 6, trang 49a): Vật xếp nửa tầng tức là vật xếp không đến ngọn. Dạng toán *Đống nửa một mặt dựa tường* giống dạng toán trước, nhưng đống xếp không đến ngọn, nên gọi là đống nửa (đống cụt).

Phép tính ([2], quyển 6, trang 49a): Lấy số cái (số vật) ở tầng trên cùng cộng với số cái ở tầng dưới cùng, chia nửa. Lấy số cái ở tầng dưới cùng trừ đi số cái ở tầng trên cùng, kết quả lại cộng với 1 cái rồi nhân với nó, được số cái.

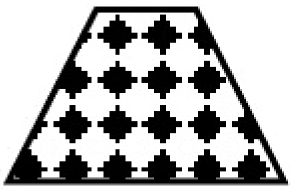
Giải thích: Gọi số vật tầng trên cùng là a_1, số vật tầng cuối cùng là a_n (cái). Số tầng bằng $n = a_n - a_1 + 1$. Theo công thức (1), tổng số vật bằng

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times (a_n - a_1 + 1). \tag{3}$$

Bài toán 5 ([5], tờ 13b). *Nay có đống bằng một mặt, chân đáy gồm 7 cái, trên gồm 3 cái, hỏi có bao nhiêu cái?*

Lời giải. Đặt chân đế 7 cái trừ đi chiều rộng trên 3 cái, còn 4 cái, thêm 1 được 5 cái làm pháp, cũng là 5 tầng vậy. Cộng riêng chiều rộng trên dưới được 10 cái làm thực, nhân với pháp, được 50 cái. Chia đôi được 25 cái, hợp với câu hỏi. □

Trình Đại Vị đã xét bài toán với đống xếp thiếu hai tầng trên (Hình 3).



Hình 3: Xếp vật thành đống cụt ([5], tờ 14a)

Giải thích: Tổng số vật là $S = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = \frac{(7+3)\times(7-3+1)}{2} = 25$.

Trình Đại Vị cũng viết ([5], tờ 14a): Đây là đống nhọn một mặt không có 2 tầng trên vậy (xem hình 3).

Dùng phép hình thang, cộng số trên dưới lại làm thực. Lấy số cao làm pháp, nhân vào chia nửa được tích. Số đáy của đống bằng liên quan đến số cao của đống nhọn mà trừ đi 2 tầng trên, tức đống bằng cao 5 tầng vậy.

Nhận xét: ([1], tờ 17b) Nếu chiều rộng trên dưới đều lẻ hoặc đều chẵn thì có thể cộng lại. Chia đôi, nhân với chiều cao, nhanh hơn. Hoặc lấy chiều rộng trên dưới nhân với chiều cao, rồi sau chia đôi cũng vậy.

Bài toán 6 ([1], tờ 17b). *Nay có một đống đấu đất đầu bằng, dưới chân rộng 9 đấu, đỉnh rộng 4 đấu, chứa bao nhiêu đấu?*

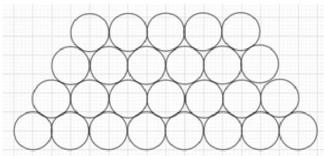
Lời giải. Lấy chân 9 đấu giảm đi trên 4 đấu còn 5. Thêm 1 được 6, làm thực (là 6 tầng vậy). Lại cộng chiều rộng trên dưới được 13 làm pháp, nhân với nhau, được 78. Chia đôi được số đấu. □

Giải thích: Dãy số 9, 8, 7, 6, 5, 4 (viên gạch tính từ dưới lên) hay 4, 5, 6, 7, 8, 9 (viên gạch tính từ trên xuống) có $a_1 = 4, a_n = 9$. Vì $n = a_n - a_1 + 1 = 9 - 4 + 1 = 6$ nên $n = 6$ và tổng số đầu đất bằng $S = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = \frac{(9+4)\times(9-4+1)}{2} = 39$.

Lưu ý: Dạng toán 1 với các ví dụ trong các sách toán Hán Nôm đã được trình bày chi tiết trong [10]. Để có cái nhìn toàn cảnh, chúng tôi trình bày lại ở đây. Lưu ý rằng, dạng toán này vẫn còn ý nghĩa thời sự.

Xét bài toán sau đây

Bài toán 7 ([9], Ví dụ 14, trang 20). *Các ống sắt ở một nhà máy được xếp như trong Hình 4, trong đó hàng trên cùng có 5 ống, hàng dưới có nhiều hơn hàng liền trên một ống, hàng dưới cùng có 20 ống. Hỏi tất cả có bao nhiêu ống.*



Hình 4: Minh họa 4 hàng trên cùng

Lời giải. Tổng số ống là $S = 5 + 6 + \cdots + 19 + 20 = (5 + 20) + (6 + 19) + (7 + 18) + (8 + 17) + (9 + 16) + (10 + 15) + (11 + 14) + (12 + 13) = 25 \times 8 = 200$. Tất nhiên, ta có thể tính theo công thức (3):

$$S = \frac{(5 + 20) \times (20 - 5 + 1)}{2} = \frac{25 \times 16}{2} = 200.$$

Kết quả 200 ống. □

2. Dạng toán 2 Gò đống có đáy là hình vuông

2.1. Dạng toán 2.1 Đống có đáy là hình vuông

Nguyễn Hữu Thận viết ([2], Quyển 6, tờ 49b): Tầng này gồm các vật tròn như hình viên đạn [hình cầu], xếp trên đất bằng, đáy là hình vuông. Từ tầng dưới lên trên, lần lượt mỗi hàng giảm 1 vật, đến ngọn còn đúng 1 viên. Theo bốn mặt quan sát, mỗi mặt là hình tam giác.

Bài toán 8 ([5], tờ 14b; [2], Quyển 6, tờ 49b). *Giả sử có hình vuông xếp tầng nhọn, bốn mặt đáy đều là 12 viên (đạn), hỏi tổng cộng có bao nhiêu viên?*

Lời giải. Lấy chiều rộng đáy là 12, cộng thêm 1, tổng được 13, nhân với chiều rộng đáy là 12, được 156. Lại lấy chiều rộng đáy là 12 cộng thêm nửa viên, tổng là 12 viên rưỡi, nhân với số đã tính được là 156, được 1950 làm thực. Dùng phép chia 3, được 650 viên, tức là số tích tứ giác 4 mặt nhọn xếp tầng. □

Giải thích: Xếp vật thành n lớp, lớp thứ k là một hình vuông có số vật là k^2. Vậy tổng số vật được tính theo công thức

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{3}. \tag{4}$$

Áp dụng với $n = 12$, ta được $S = \frac{12\times13\times(12+\frac{1}{2})}{3} = 650$.

Ghi chú: Công thức (4) trong các sách toán hiện đại thường được viết dưới dạng

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{5}$$

và được chứng minh bằng qui nạp.

Chỉ dẫn lịch sử: Dương Huy năm 1274 ([6], trang 303) đã tính số hộp lập phương chứa trong một đống có đáy vuông theo công thức (4):

$$S_n = \frac{n \times (n+1) \times (n+\frac{1}{2})}{3}.$$

Đống có đáy vuông, mỗi tầng gồm $n^2, (n-1)^2, \ldots, 2^2, 1^2$ các lập phương nhỏ. Do đó

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Dương Huy đã không chứng minh hoặc giải thích công thức (4). Bốn trăm năm sau, Du Zhigeng (cuối thế kỉ XVII), đã nhận xét rằng ba cột với bốn góc có thể được chắp lại với nhau để nhận được hình hộp chữ nhật tương đương với nửa chiều cao phù hợp chính xác với mặt trên của hình hộp (Hình 5). Như vậy ta có hộp chữ nhật với số chiều là $n, n+1, n+\frac{1}{2}$ với thể tích bằng ba lần tổng đã cho (Hình 4, [6], trang 303). Đây cũng là cách chứng minh hình học các công thức tính tổng của người xưa (khác với cách chứng minh công thức tính tổng thường bằng qui nạp toán học hoặc giải tích như ngày nay).

Bài toán 9 ([1], tờ 18a). *Nay có đống đá nhọn bốn mặt, đáy (một mặt) rộng 13 cái, hỏi đống chứa bao nhiêu viên đá?*

Lời giải. Đặt số rộng đáy là 13, lại lấy số ấy thêm nửa cái, được 13 cái rưỡi, nhân với nhau, được 175 rưỡi. Lại lấy 13 thêm 1 cái, được 14, nhân với nó, được 2457 làm thực. Chia cho 3, được 819 viên. □

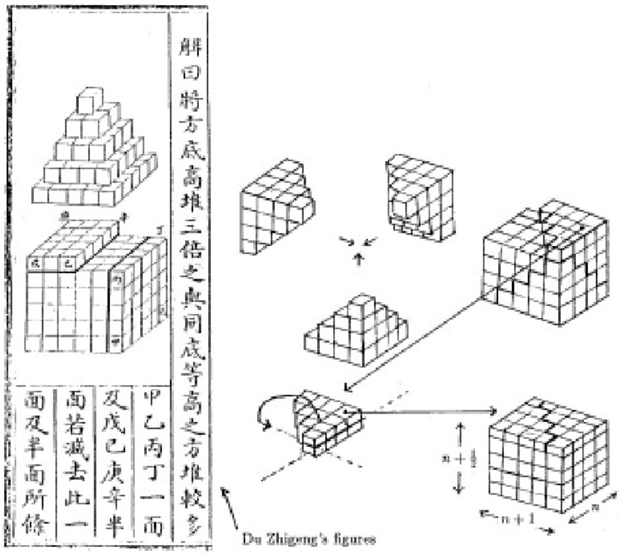
Nhận xét: ([1], tờ 18a) Bài này nếu lần đầu thêm 1, lần sau thêm nửa, cũng vậy.

Giải thích: Sử dụng công thức (4), ta được

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + 13^2 = \frac{13 \times (13+\frac{1}{2}) \times (13+1)}{3},$$

hoặc

$$S_n = \frac{13 \times (13+1) \times (13+\frac{1}{2})}{3} = 819.$$



Hình 5: Chứng minh công thức (4)

2.2. Dạng toán 2.2: Gò có đáy là hình vuông

Bài toán 10 ([2], Quyển 6, tờ 49b). *Giả sử có gò đáy là hình vuông xếp nửa tầng, bốn mặt đều, có chiều rộng trên là 7 viên gạch, chiều rộng dưới là 12 viên, hỏi tổng số viên gạch?*

Lời giải. Lấy chiều rộng trên là 7 viên tự nhân với nó, được 49, ghi lại. Chiều rộng dưới là 12 viên tự nhân với nó, được 144, ghi lại. Lại lấy chiều rộng trên là 7 nhân với chiều rộng dưới là 12, được 84, lại ghi nữa. Lấy chiều rộng trên là 7 trừ với chiều rộng dưới là 12, thừa 5. Chia nửa được 2 viên rưỡi, lại ghi nữa. Rồi cộng 4 số đã ghi, được 297 viên rưỡi. Ngoài ra, lấy chiều rộng trên là 7 trừ với chiều rộng dưới là 12, thêm 1 vào 5 được 6, tức là số tầng, nhân với nó, được 1677 làm thực. Dùng phép chia 3, được 559 viên, tức là tổng số gạch của gò hình vuông xếp nửa tầng. □

Giải thích: Hình chóp cụt có đáy dưới là hình vuông cạnh 12, đáy trên là hình vuông cạnh 7, vậy tổng số viên gạch là $7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 = 559$.

Tuy nhiên, Nguyễn Hữu Thận đã sử dụng công thức tổng quát (6) dưới đây để tính.

Công thức tổng quát tính tổng $S = m^2 + (m+1)^2 + \cdots + n^2$.

Gọi cạnh đáy dưới của gò hình chóp cụt đáy vuông là n, cạnh đáy trên là m. Khi ấy tổng các viên đá xếp trong đống là

$$S = m^2 + (m+1)^2 + \cdots + n^2 = \frac{(m^2 + n^2 + mn + \frac{n-m}{2})(n - m + 1)}{3}. \qquad (6)$$

Thật vậy

$$S = \sum_{i=0}^{n-m} (m+i)^2 = \sum_{i=0}^{n-m} m^2 + \sum_{i=0}^{n-m} 2mi + \sum_{i=0}^{n-m} i^2$$

$$= m^2(n-m+1) + 2m\frac{(n-m)\times(n-m+1)}{2} + \frac{(n-m)(n-m+1)(n-m+\frac{1}{2})}{3}$$
$$= (3m^2 + 3m(n-m) + (n-m)(n-m+\frac{1}{2})) \times \frac{n-m+1}{3}$$
$$= \frac{(m^2+n^2+mn+\frac{n-m}{2})(n-m+1)}{3}.$$

Áp dụng với $m = 7, n = 12$ ta được

$$S = \frac{(7^2+12^2+7\times 12+\frac{12-7}{2})\times(12-7+1)}{3} = 559.$$

Nhận xét 1: Gò hình chóp cụt đáy dưới n, đáy trên m chính là đống hình chóp có đáy là hình vuông cạnh n cắt đi ngọn là đống hình chóp đáy là hình vuông cạnh $m-1$. Ta có

$$S = S_n - S_{m-1} = (n^2+\cdots+2^2+1) - ((m-1)^2+\cdots+1) = m^2+(m+1)^2+\cdots+n^2 = (6).$$

Nhận xét 2: Khi $m = 1$ thì công thức (6) trở về công thức (4).

3. Dạng toán 3 Gò đống có đáy tam giác

3.1. Dạng toán 3.1 Đống có đáy tam giác

Nguyễn Hữu Thận viết ([2], Quyển 6, tờ 49b): Tầng này hình chóp tam giác như vật hình viên đạn [hình cầu], xếp bằng trên mặt đất thành hình tam giác. Từ dưới lên trên, mỗi hàng tại mỗi tầng trên lần lượt giảm 1 viên, đến ngọn chỉ còn 1 viên. Từ ba mặt nhìn nó, mỗi mặt cũng là hình tam giác, nên gọi là tam giác xếp tầng nhọn.

Lấy tầng thấp nhất mỗi cạnh một số viên bày lên trên. Lại lấy tầng thấp nhất mỗi cạnh một số viên. Phép tính cộng thêm 2 viên của hàng, nhân với nó, được số làm thực. Dùng phép chia 6, được tích.

Bài toán 11. *([5], trang 14a) Nay có một đống quả đáy tam giác, đáy rộng một mặt 7 quả, hỏi có tất cả bao nhiêu quả?*

Lời giải. Đặt chiều rộng đáy 7 quả. Lấy riêng 7 quả thêm 1 được 8 cái nhân vào, được 56 quả. Lại lấy 7 quả thêm 2 được 9 quả nhân với 56 quả được 504 quả làm thực. Chia 6 hợp với câu hỏi. □

Giải thích: Vì đáy là tam giác, các lớp (tính từ dưới lên) có số quả là $S_7 = 1+2+\cdots+7 = 28$, $S_6 = 1+2+\cdots+6 = 21$, $S_5 = 1+2+3+4+5 = 15$, $S_4 = 10$, $S_3 = 6$, $S_2 = 3$, $S_1 = 1$.

Vậy tổng số quả ở đống tam giác 7 tầng là

$$S = 1+3+6+10+15+21+28 = 84.$$

Tuy nhiên, Trình Đại Vị đã áp dụng công thức (7) dưới đây cho $n = 7$ và được

$$S = \frac{7 \times (7+1) \times (7+2)}{6} = 84.$$

Công thức tổng quát tính đống quả có đáy tam giác: Vì đống quả gồm n tầng, tầng thứ k là tam giác đều mỗi cạnh gồm k quả nên số quả ở tầng thứ k là

$$S_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$S_1 = 1,\ S_2 = 3,\ S_3 = 6,\ S_4 = 10,\ S_5 = 15, \ldots$$

Vậy tổng số quả ở đống n tầng đáy tam giác là:

$$S_{\sum n} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \quad (7)$$

Thật vậy, giả sử công thức (7) đúng với n. Khi ấy

$$S_{\sum n+1} = S_{\sum n} + S_{n+1} = \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{6} + \frac{(n+1) \times (n+2)}{2} = \frac{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}{6}.$$

Ngoài ra, ta còn một chứng minh khác nữa như sau. Vì

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

nên

$$S_{\sum n} = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^{n} i \times (i+1) = \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i)$$

$$= \frac{1}{2} \times (\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i) = \frac{1}{2} \times (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Vậy công thức (7) được chứng minh.

Bài toán 12 ([2], Quyển 6, trang 49b). *Giả sử tam giác xếp tầng nhọn, ba mặt của nó mỗi mặt 5 viên, hỏi tổng số.*

Lời giải. Bày xuống đáy 5 viên, cộng thêm 1 viên là 6, nhân với 5 viên, được 30. Lại lấy 5 viên dưới đáy, cộng thêm 2, tổng cộng là 7, nhân với 30, được 210. Dùng phép chia 6, được 35 viên, tức là tổng số viên trong tam giác xếp tầng nhọn. □

Giải thích: Áp dụng công thức (7) cho $n = 5$ ta được

$$S_{\sum 5} = \frac{5(5+1)(5+2)}{6} = 35.$$

Hoặc tính trực tiếp

$$S_{\sum 5} = S_5 + S_4 + S_3 + S_2 + S_1 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35.$$

Bài toán 13 ([1], trang 18b). *Nay có một đống quả đáy tam giác, đáy rộng mỗi mặt 18 quả, chứa bao nhiêu quả?*

Lời giải. Đặt số chiều rộng, lại riêng lấy chiều rộng thêm 1 quả, được 19, nhân với nhau, được 342 quả. Lại lấy 18 thêm 2 được 20, nhân vào, được 6840 làm thực. Chia cho 6 được số chứa. □

Giải thích: Áp dụng công thức (7) cho $n = 18$ ta được

$$S_{\sum 18} = \frac{18(18+1)(18+2)}{6} = 1140.$$

3.2. Dạng toán 3.2: Gò có đáy tam giác

Nguyễn Hữu Thận viết ([2], Quyển 6, trang 49b): Gò là tam giác xếp tầng nhọn, nhưng tầng không đến ngọn mà đỉnh trên bằng.

Gò dạng này có đáy là tam giác, đỉnh của gò cũng là tam giác, các mặt bên nhìn vào là hình thang cân. Ta được gò hình chóp cụt.

Bài toán 14 ([2], Quyển 6, trang 49b). *Giả sử có tam giác xếp nửa tầng, ba mặt đều có chiều rộng trên là 4 viên, chiều rộng dưới là 9 viên, hỏi tổng số.*

Lời giải. Lấy chiều rộng trên là 4 viên tự nhân với nó, được 16, ghi lại. Chiều rộng dưới là 9 viên tự nhân với nó, được 81, ghi lại. Lại lấy chiều rộng trên nhân với chiều rộng dưới, được 36, ghi lại. Gấp đôi chiều rộng dưới tính nhập vào chiều rộng trên, được 22, ghi lại. Cộng 4 số đã ghi, được 155. Ngoài ra, lấy chiều rộng trên trừ chiều rộng dưới, còn 5.

Phép tính lại thêm 1 thành 6 là số tầng, nhân với nó, được 930 làm thực. Dùng phép chia 6, được 155 viên, tức tổng số viên trong tam giác xếp tầng cụt. □

Giải thích 1: Vì mỗi tầng là một tam giác có số viên là $S_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ nên tổng số viên từ tầng dưới cùng (cạnh 9 viên) lên tới tầng trên cùng (cạnh 4 viên) là

$$\frac{9\times 10}{2} + \frac{8\times 9}{2} + \cdots + \frac{4\times 5}{2} = 155.$$

Giải thích 2: Vì đống là chóp cụt tam giác nên số quả có thể tính như "*toàn tích*" theo công thức (7) (tổng số quả trong chóp tam giác $S_9 = \frac{9\times 10\times 11}{6} = 165$), trừ số quả trong chóp tam giác trên đỉnh với cạnh đáy là 3 cũng theo công thức (7) ("*hư tích*" - không có thật, $S_3 = \frac{3\times 4\times 5}{6} = 10$). Suy ra

$$S = S_{\sum 9} - S_{\sum 3} = 165 - 10 = 155.$$

Giải thích 3: (Nguyễn Hữu Thận) Áp dụng công thức tổng quát (8) dưới đây với $n = 9, m = 4$ ta được

$$S = (4^2 + 9^2 + 4\times 9 + 2\times 9 + 4) \times \frac{9-4+1}{6} = 155.$$

Công thức tổng quát tính đống quả hình chóp cụt: *Giả sử có đống quả hình chóp cụt đáy tam giác. Cạnh đáy trên có m quả, cạnh đáy dưới có n quả. Khi ấy tổng số quả trong đống hình chóp cụt đáy tam giác được tính theo công thức*

$$(m^2+n^2+mn+2n+m)\times\frac{n-m+1}{6}. \tag{8}$$

Lời giải. Đáy là tam giác cạnh n có số quả bằng $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Đỉnh là tam giác cạnh m nên số quả bằng $\frac{m(m+1)}{2}$. Tổng số quả của chóp tam giác cụt bằng

$$S=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}+\cdots+\frac{m(m+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sum_{i=0}^{n-m}(m+i)(m+i+1)=\frac{1}{2}\times\sum_{i=0}^{n-m}((m^2+m)+(2m+1)i+i^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times((m^2+m)(n-m+1)+(2m+1)\times\sum_{0}^{n-m}i+\sum_{0}^{n-m}i^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times((m^2+m)(n-m+1)+(2m+1)\times\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}+\frac{(n-m)(n-m+1)(2(n-m)+1)}{6})$$

$$=\frac{n-m+1}{12}\times(6(m^2+m)+3(2m+1)(n-m)+(n-m)(2(n-m)+1))$$

$$=(m^2+n^2+mn+2n+m)\times\frac{n-m+1}{6}.$$

Vậy (8) đúng. □

Nhận xét 1: Khi $m=1$ thì công thức (8) trở về công thức (7).

Nhận xét 2: Số quả có trong gò tam giác cụt chính là số quả trong chóp tam giác có cạnh đáy n ("*toàn tích*") trừ đi số quả có trong chóp tam giác ("*hư tích*") cạnh đáy $m-1$. Ta có

$$S=S_{\sum n}-S_{\sum(m-1)}=(m^2+n^2+mn+2n+m)\times\frac{n-m+1}{6}.$$

Bài toán 15 ([5], tờ 14b, [1], tờ 18b). *Nay có một gò quả tam giác cụt, mỗi mặt trên rộng 5 cái, đáy rộng 12 cái, hỏi tổng là bao nhiêu cái?*

[5], tờ 14b. Cũng dùng phép tam giác, trước tiên lấy chiều rộng dưới 12 cái, tính ra tích toàn bộ là 364 cái. Lấy riêng chiều rộng ảo của đống nhọn trên là 4 cái, tính ra tích ảo là 20, trừ khỏi tích toàn bộ còn tích đống nửa là 344 cái. □

Giải thích: Toàn tích là tổng số quả trong chóp nhọn đáy tam giác 12 tầng, theo công thức (7)

$$S_{\sum 12}=\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\cdots+\frac{12\times 13}{2}=\frac{12\times 13\times 14}{6}=364.$$

Hư tích là phần ngọn, tính theo công thức (7) với $n = 4$:

$$S_{\sum 4} = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \cdots + \frac{4 \times 5}{2} = \frac{4 \times 5 \times 6}{6} = 20.$$

Thực tích là số quả trong chóp cụt bằng $364 - 20 = 344$ quả.

Một pháp khác ([5], tờ 14b): Lấy chiều rộng trên 5 tự nhân được 25, chiều rộng dưới 12 tự nhân được 144. Chiều rộng trên 5 nhân chiều rộng dưới 12, được 60. Lại gấp đôi chiều rộng dưới được 24, cộng thêm chiều rộng trên 5, được 29. Cộng cả bốn số được 258 làm thực. Lấy chiều rộng dưới 12 trừ đi chiều rộng trên 5 còn 7, cộng 1 được cao 8 làm pháp. Lấy pháp nhân thực được 2064. Chia 6 được đạp số.

Giải thích: Tính theo công thức (8) với $k = 5, n = 12$, ta được

$$S = (5^2 + 12^2 + 5 \times 12 + 2 \times 12 + 5) \times \frac{12 - 5 + 1}{6} = 344.$$

Cũng có thể tính trực tiếp như sau: Vì đáy của đống quả là tam giác nên tổng số quả từ tầng 12 lên tới tầng 5 là

$$\frac{12 \times 13}{2} + \frac{11 \times 12}{2} + \frac{10 \times 11}{2} + \frac{9 \times 10}{2} + \frac{8 \times 9}{2} + \frac{7 \times 8}{2} + \frac{6 \times 7}{2} + \frac{5 \times 6}{2}$$
$$= 78 + 66 + 55 + 45 + 36 + 28 + 21 + 15 = 344.$$

4. Dạng toán 4: Gò đống có đáy là chữ nhật

4.1. Dạng toán 4.1: Đống có đáy là chữ nhật

Nguyễn Hữu Thận viết ([2], Quyển 6, tờ 49b): Tầng này cũng là vật hình viên đạn, xếp trên đất bằng, chiều dài và chiều rộng không bằng nhau. Ví dụ như tầng trên dài 13 viên, rộng 8 viên, giảm lần lượt lên trên, mỗi tầng giảm 1 viên, đến ngọn thì chiều dài là 6 viên, chiều rộng ngọn là 1 viên, vậy là chiều dài và chiều rộng không bằng nhau.

Bài toán 16 ([5], tờ 13a, [1], tờ 18a - 18b). *Nay có một đống bình rượu, chân đế rộng 8 cái, dài 13 cái. Hỏi tổng số là bao nhiêu?*

Lời giải. Đặt chiều dài trừ đi chiều rộng còn 5 cái, chia đôi được 2 cái rưỡi. Thêm nửa cái thành 3 cái, cộng gộp vào chiều dài, được 16 cái. Lấy 8 cái nhân với nó, được 128 cái. Lại lấy riêng 8 cái chiều rộng thêm 1 thành 9 cái, nhân với nó được 1152 cái. Chia 3 hợp với câu hỏi. □

Giải thích: Đây là dạng đống có đáy là chữ nhật với số chiều $m \times n$, xếp dần lên đến tầng trên cùng còn 1 hàng có $n - m + 1$ cái.

Vì mỗi tầng mỗi mặt giảm đi một cái nên tổng số bình rượu là

$$8 \times 13 + 7 \times 12 + 6 \times 11 + 5 \times 10 + 4 \times 9 + 3 \times 8 + 2 \times 7 + 1 \times 6 = 384.$$

Tuy nhiên, Trình Đại Vị và Phạm Gia Kỷ đã tính theo công thức (9) dưới đây Công thức 1 tính tổng số vật xếp thành đống có đáy là chữ nhật: Với đống quả xếp từ dưới lên trên, đáy là chữ nhật $m \times n, m \leqslant n$ ta có tổng số vật được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{3}m(m+1)(\frac{n-m}{2} + \frac{1}{2} + n) = \frac{1}{6}m(m+1)(3n-m+1). \tag{9}$$

Lời giải. Đống quả có các lớp tính từ dưới lên là $m \times n, (m-1) \times (n-1), \dots, 1 \times (n-m+1)$. Ta có

$$\begin{aligned} S &= m \times n + (m-1) \times (n-1) + \cdots + 1 \times (n-m+1) \\ &= \sum_1^m i(n-m+i) = \sum_1^m ((n-m)i + i^2) \\ &= (n-m)\sum_1^m i + \sum_1^m i^2 = (n-m) \times \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)(m+\frac{1}{2})}{3} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n-m}{2} + \frac{m+\frac{1}{2}}{3}\right)m(m+1) = \frac{(\frac{3(n-m)}{2} + m + \frac{1}{2})m(m+1)}{3} = \frac{1}{3}m(m+1)(\frac{n-m}{2} + \frac{1}{2} + n).$$

Vậy công thức (9) được chứng minh. □

Áp dụng với $m = 8, n = 13$, ta được

$$S = \frac{(\frac{13-8}{2} + \frac{1}{2} + 13)8(8+1)}{3} = \frac{16 \times 8 \times 9}{3} = 384.$$

Bài toán 17 ([2], Quyển 6, tờ 49a). *Giả sử có hình trụ vuông xếp tầng nhọn, tầng dưới cùng dài* 12 *viên, chiều rộng mặt là* 8 *viên, hỏi tổng số viên?*

Lời giải 1. ([2], Quyển 6, tờ 49a) Lấy chiều rộng dưới là 8 viên trừ với chiều dài dưới 12 viên, thừa 4, chia nửa được 2. Lại cộng thêm nửa viên, được 2 viên rưỡi. Tính nhập vào chiều dài dưới 12 viên, được 14 viên rưỡi. Lấy chiều rộng dưới là 8 viên nhân với nó, được 116. Lại lấy chiều rộng dưới là 8 viên, thêm 1 là 9 viên, nhân với nó, được 1044 viên làm thực. Dùng phép chia 3 chia cho nó, được 348 viên, tức là tổng số viên gạch trong hình trụ vuông xếp tầng nhọn. □

Nhận xét: ([2], Quyển 6, tờ 49b) Nhìn chung hình xếp tầng này ắt chiều rộng trên chỉ có 1 viên. Cho nên giả sử hỏi có chiều dài trên thì không nhất định dùng chiều rộng trên làm câu hỏi.

Giải thích: *Hình trụ vuông* (danh từ cổ) ở đây có nghĩa là một khối có đáy là chữ nhật được xếp thành tầng. Tầng trên so với tầng dưới thu lại mỗi cạnh một viên (gạch).

Tầng dưới cùng là chữ nhật cạnh 8×12. Vậy tổng số viên là

$$8 \times 12 + 7 \times 11 + 6 \times 10 + 5 \times 9 + 4 \times 8 + 3 \times 7 + 2 \times 6 + 1 \times 5 = 348.$$

Tuy nhiên, Nguyễn Hữu Thận đã áp dụng công thức (9) với $n = 12, m = 8$ là

$$\frac{(\frac{12-8}{2} + \frac{1}{2} + 12)8(8+1)}{3} = 348.$$

Lời giải. Lấy chiều dài dưới 12 viên nhân lên, được 24, tính nhập vào chiều dài trên 5 viên, tổng là 29. Lấy chiều rộng dưới 8 viên nhân với nó được 232, ghi lại. Ngoài ra lấy 232 nhân với chiều rộng dưới 8 viên, được 1856. Lại lấy số đã ghi là 232 cộng với 1856 được tổng cộng 2088 làm thực. Dùng phép chia 6, được 348 viên, giống như trên. □

Giải thích: Nguyễn Hữu Thận đã sử dụng công thức (10) dưới đây để tính.

Công thức 2 tính tổng số vật xếp thành đống có đáy là chữ nhật: *Đống quả có các tầng tính từ dưới lên (với $m \leqslant n$) là $m \times n, (m-1) \times (n-1), \dots, 1 \times (n-m+1)$ với chiều dài trên $h = n - m + 1$. Tổng số vật là*

$$S = \frac{(2n+h)m \times m + (2n+h)m}{6}. \tag{10}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S = (9) = \frac{m(m+1)(3n-m+1)}{6} &= \frac{m(m+1)(2n+h)}{6} \\ &= \frac{(2n+h)m \times m + (2n+h) \times m}{6} = (10). \end{aligned}$$

Áp dụng với $n = 12, m = 8$ ta có chiều dài trên $h = n - m + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$. Vậy

$$S = \frac{(2 \times 12 + 5) \times 8 \times 8 + (2 \times 12 + 5) \times 8}{6} = 348.$$

Bài toán 18 ([5], trang 15b). *Nay có một đống mặt ngang dưới rộng 10 cái, trên rộng 1 cái, mặt trước dưới rộng 12 cái, trên rộng 3 cái. Hỏi là bao nhiêu?*

Lời giải. Đặt chiều rộng dưới mặt trước 12 cái gấp đôi được 24 cái, thêm chiều rộng trên 3 được 27. Lấy chiều rộng dưới mặt ngang 10 nhân vào được 270. Đặt riêng 270 nhân với chiều rộng dưới (mặt) ngang được 2700, cộng vào 270 được 2970. Chia 6 thì được. □

Giải thích: Đây là đống có đáy là chữ nhật 10×12. Mỗi tầng tiếp theo mỗi chiều giảm đi 1, nên các tầng tiếp theo là $10 \times 12, 9 \times 11, 8 \times 10, 7 \times 9, 6 \times 8, 5 \times 7, 4 \times 6, 3 \times 5, 2 \times 4, 1 \times 3$. Tổng số vật bằng

$$10 \times 12 + 9 \times 11 + 8 \times 10 + 7 \times 9 + 6 \times 8 + 5 \times 7 + 4 \times 6 + 3 \times 5 + 2 \times 4 + 1 \times 3 = 495.$$

Tuy nhiên, Trình Đại Vị đã sử dụng công thức tổng quát (10) để tính

Áp dụng với $n = 12, m = 10$ thì $h = 12 - 10 + 1 = 3$. Theo công thức (9), ta có

$$\frac{(2 \times 12 + 3) \times 10 \times 10 + (2 \times 12 + 3) \times 10}{6} = 495.$$

Lời bình: Như Nguyễn Hữu Thận đã nhận xét, đầu bài cho trên rộng 1 cái là thừa.

4.2. Dạng toán 4.2: Gò có đáy là chữ nhật

Nguyễn Hữu Thận gọi dạng toán này là *Hình trụ vuông xếp nửa tầng* ([2], Quyển 6, tờ 50a): Tầng này bốn mặt dài rộng không bằng nhau, cũng là hình trụ vuông xếp tầng nhọn nhưng xếp tầng chưa đến ngọn đã dừng lại.

Công thức tổng quát cho hình trụ vuông xếp nửa tầng: *Cho đống vật có đáy là chữ nhật kích thước $m \times n$, mỗi tầng từ dưới lên trên mỗi cạnh rút đi 1, tầng trên cùng cũng là chữ nhật kích thước $k \times h$. Do mỗi tầng mỗi cạnh rút đi 1 nên $m - k = n - h$ và tổng số vật bằng*

$$S = ((2k + m)h + (2m + k)n + m - k) \times \frac{m - k + 1}{6}. \tag{11}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
S &= k \times h + (k + 1) \times (h + 1) + \cdots + mn = \sum_{i=0}^{m-k} (k + i)(h + i) \\
&= \sum_{i=0}^{m-k} kh + (k + h) \sum_{i=0}^{m-k} i + \sum_{i=0}^{m-k} i^2 \\
&= kh(m - k + 1) + (k + h) \times \frac{(m - k)(m - k + 1)}{2} + \frac{(m - k)(m - k + 1)(2(m - k) + 1)}{6} \\
&= ((6kh + 3(k + h)(m - k) + (m - k)(2m - 2k + 1))\frac{m - k + 1}{6} \\
&= (6kh + 3km + 3hm - 3k^2 - 3kh + 2m^2 - 4km + 2k^2 + m - k)\frac{m - k + 1}{6} \\
&= (3kh - km + 3hm + 2m^2 - k^2 + m - k)\frac{m - k + 1}{6} \\
&= ((2k + m)h + (2m + k)(m - k + h) + m - k)\frac{m - k + 1}{6} \\
&= ((2k + m)h + (2m + k)n + m - k)\frac{m - k + 1}{6}.
\end{aligned}$$

Vậy (11) được chứng minh.

Nhận xét 1: Khi $k = 1$ thì $h = n - m + 1$ và (11) trở về (9). Thật vậy, thay $k = 1$ và $h = n - m + 1$ vào (11) ta được

$$\begin{aligned}
(11) &= ((2 + m)(n - m + 1) + (2m + 1)n + m - 1) \times \frac{m - 1 + 1}{6} \\
&= (2n - 2m + 2 + mn - m^2 + m + 2mn + n + m - 1)\frac{m}{6} \\
&= (3n + 3mn - m^2 + 1)\frac{m}{6} = (3n(m + 1) - (m^2 - 1))\frac{m}{6} = \frac{m(m + 1)(3n - m + 1)}{6} = (9).
\end{aligned}$$

Nhận xét 2: Công thức (11) cũng có thể viết dưới dạng

$$S = ((2h + n)k + (2n + h)m + n - h) \times \frac{n - h + 1}{6} \tag{12}$$

Vì $m-k=n-h$ nên $m-k+1=n-h+1$. Mặt khác ta có

$(2k+m)h+(2m+k)n+m-k = 2kh+mh+2mn+kn+n-h = (2h+n)k+(2n+h)m+n-h.$

Vậy (11) = (12).

Bài toán 19 ([2], Quyển 6, tờ 49b). *Giả sử có hình trụ vuông xếp nửa tầng, chiều dài dưới* 12 *viên, chiều dài trên* 7 *viên, chiều rộng dưới* 8 *viên, chiều rộng trên* 3 *viên, hỏi tổng số viên?*

Lời giải. Lấy chiều dài trên 7 viên nhân đôi lên, được 14, cộng thêm chiều dài dưới 12 viên, tổng được 26. Lấy chiều rộng trên 3 viên nhân với nó, được 78. Lấy chiều dài dưới 12 viên nhân đôi lên, được 24, cộng thêm chiều dài trên 7 viên, tổng được 31. Lấy chiều rộng dưới 8 viên nhân với nó, được 248. Cộng 2 lần tích vừa nhân, được 326. Lại lấy chiều dài trên 7 viên trừ với chiều dài dưới 12 viên, thừa 5, cộng với tổng trên, được 331. Ngoài ra lấy chiều dài dưới 12 viên trừ đi chiều dài trên 7 viên, thừa 5. Lại thêm 1 vào phép tính, được số tầng lầu, nhân với nó được 1986 làm thực. Dùng phép chia 6, được 331, tức là số tích hình trụ vuông xếp nửa tầng. □

Giải thích: Vì đáy dưới là mặt chữ nhật cạnh $m \times n = 8 \times 12$, đáy trên là mặt chữ nhật $k \times h = 3 \times 7$ nên tổng là

$$8 \times 12 + 7 \times 11 + 6 \times 10 + 5 \times 9 + 4 \times 8 + 3 \times 7 = 331.$$

Nhưng Nguyễn Hữu Thận đã áp dụng công thức (12) với $m=8, k=3, n=12, h=7$

$$(2h+n)k + (2n+h)m + n - h)\frac{n-h+1}{6}$$

$$= (2 \times 7 + 12)3 + (2 \times 12 + 7) \times 8 + 12 - 7)\frac{12-7+1}{6} = 331.$$

Bài toán 20 ([5], tờ 15b - 16a, [1], tờ 19a, [3], tờ 97a - 97b). *Nay có một đống bình rượu, trên dài* 25 *cái, rộng* 12 *cái, dưới dài* 30 *cái, rộng* 17 *cái, cao* 6 *cái. Hỏi tích bao nhiêu?*

[3], tờ 97b. Nhân đôi *thượng trường* được 50 cái, cộng với *hạ trường* tổng cộng là 80 cái. Lấy chiều rộng 12 nhân với nó được 960 cái, lại nhân đôi*hạ trường* được 60 cái cộng với *thượng trường* được tổng 85 cái, lấy *hạ hoạt* 17 nhân với nó được 1445 cái tính nó được 2405 cái ($1445 + 960 = 2405$), lại lấy *hạ trường* trừ đi *thượng trường* dư 5 tính vào được 2410 cái, lấy chiều cao 6 cái nhân với nó được 14460 làm thực, lấy 6 làm phép tính chia với nó là xong vậy. □

Giải thích: Đây là đống cụt có đáy là chữ nhật 17×30. Mỗi tầng tiếp theo mỗi chiều giảm đi 1, nên các tầng tiếp theo là 16×29, 15×28, 14×27, 13×26, 12×25. Tổng số bình rượu bằng

$$17 \times 30 + 16 \times 29 + 15 \times 28 + 14 \times 27 + 13 \times 26 + 12 \times 25 = 2410.$$

Tuy nhiên, Trình Đại Vị, Nguyễn Hữu Thận và Tạ Hữu Thường đã tính theo công thức (12).

Áp dụng với $n=30, m=17, h=25, k=12$ ta được $m-k = 17-12 = 5 = 30-25 = n-h$. Khi đó

$$S = (2h+n)k + (2n+h)m + n - h)\frac{n-h+1}{6}$$

$$= ((25 \times 2 + 30) \times 12 + (30 \times 2 + 25) \times 17 + (30 - 25))\frac{30 - 25 + 1}{6} = 2410.$$

Nhận xét 1: ([3], tờ 97b) Nếu lấy bài toán đống dài để tính, lại tính ra hư tích ở trên, còn dưới là thực tích, cũng khớp với số này.

Giải thích Vì đáy dưới là chữ nhật 17×30 nên các lớp quả xếp đến tận đỉnh sẽ là 17×30, 16×29, 15×28, 14×27, 13×26, 12×25, 11×24, 10×23, 9×22, 8×21, 7×20, 6×19, 5×18, 4×17, 3×16, 2×15, 1×4. Tổng số quả là

$$17 \times 30 + 16 \times 29 + 15 \times 28 + 14 \times 27 + 13 \times 26 + 12 \times 25 + 11 \times 24 + 10 \times 23 + 9 \times 22$$
$$+8 \times 21 + 7 \times 20 + 6 \times 19 + 5 \times 18 + 4 \times 17 + 3 \times 16 + 2 \times 15 + 1 \times 4 = 3774.$$

Tính theo công thức (9)

$$S = \frac{1}{6}m(m+1)(3n - m + 1) = \frac{1}{6}(17(17+1)(3 \times 30 - 17 + 1)) = 3774.$$

Hư tích (đống chóp ở trên) có số quả là

$$11 \times 24 + 10 \times 23 + 9 \times 22 + 8 \times 21 + 7 \times 20 + 6 \times 19 + 5 \times 18 + 4 \times 17 + 3 \times 16 + 2 \times 15 + 1 \times 14 = 1364.$$

Tính hư tích theo công thưc (9) với $m = 11, n = 24$

$$S = \frac{m(m+1)(3n - m + 1)}{6} = \frac{(11(11+1)(3 \times 24 - 11 + 1)}{6} = 1364.$$

Vậy số quả thật có (trong hình chóp cụt là) $3774 - 1364 = 2410$ quả.

Nhận xét: ([1], tờ 19a) Bài này tương tự bài tính thể tích hình lăng trụ lệch. Nhưng bài này lại lấy hai chiều dài trừ đi nhau, lấy số dư cộng vào làm thực vậy.

Lăng trụ lệch: Kiểu này hai mặt dài không đối nhau, bốn mặt nghiêng đối nhau vậy. Cách tính là nhân đôi cạnh dài trên cộng với cạnh dài dưới, lấy cạnh rộng trên nhân với nó; nhân đôi cạnh dài dưới cộng với cạnh dài trên, lấy cạnh rộng dưới nhân với nó. Cộng hai cái làm một, lấy chiều cao nhân với nó. Lại chia cho 6.

Đây chính là công thức được chứng minh trong *Phụ lục*. Phạm Gia Kỷ cũng có chữ *nhưng*: *Nhưng bài này lại lấy hai chiều dài trừ đi nhau, lấy số dư cộng vào làm thực vậy*. Nhưng Ông cũng không giải thích rõ tại sao có chữ "*nhưng*" này.

Dưới đây chúng tôi trình bày chứng minh công thức lăng trụ lệch.

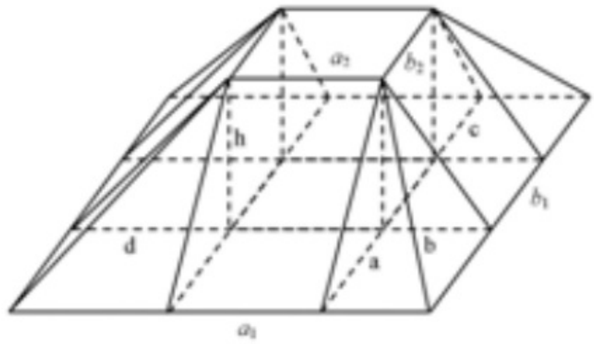
Phụ lục (công thức tính thể tích hình lăng trụ lệch): *Lăng trụ lệch* là lăng trụ có hai mặt là các hình chữ nhật song song, bốn mặt còn lại (các mặt bên) là những hình thang.

Nhận xét; Lăng trụ lệch khác với chóp cụt vì các cạnh bên kéo dài không nhất thiết cắt nhau tại một điểm.

Gọi a_1, b_1, a_2, b_2 tương ứng là chiều dài, chiều rộng của mặt dưới và mặt trên, h là chiều cao hình lăng trụ lệch (khoảng cách giữa hai mặt chữ nhật song song, Hình 6).

Ta có công thức tính thể tích hình lăng trụ lệch:

$$4V = ((2a_1 + a_2)b_1 + (2a_2 + a_1)b_2) \times \frac{h}{6}. \tag{13}$$



Hình 6: Chứng minh công thức tính thể tích lăng trụ lệch

Lời giải. (Xem [8] trang 551 và [7]) Chiếu đáy trên (đáy nhỏ) xuống đáy dưới. Ta có $a_2 = b + a_1 + d$ và $b_1 = a + b_2 + c$ (Hình 6). Lăng trụ cụt bị cắt thành 9 miếng: Một hộp chữ nhật có thể tích a_2b_2h, bốn lăng trụ đáy tam giác có tổng thể tích là $\frac{1}{2}aha_2 + \frac{1}{2}bhb_2 + \frac{1}{2}cha_2 + \frac{1}{2}dhb_2$ và bốn hình chóp đáy chữ nhật có tổng thể tích $\frac{1}{3}abh + \frac{1}{3}bch + \frac{1}{3}cdh + \frac{1}{3}adh$ (Hình 6).

Để ý rằng $a_2 = b + a_1 + d$ và $b_1 = a + b_2 + c$, ta tính được

$$V = a_2b_2h + \frac{1}{2}aha_2 + \frac{1}{2}bhb_2 + \frac{1}{2}cha_2 + \frac{1}{2}dhb_2 + \frac{1}{3}abh + \frac{1}{3}bch + \frac{1}{3}cdh + \frac{1}{3}adh.$$

Vậy công thức (13) được chứng minh. □

Kết luận: Bài báo trình bày các bài toán tính tổng thông qua phát biểu từ các bài toán thực tế trong ba cuốn sách toán Hán Nôm. Văn bản chữ Hán nói về bài toán tính tổng trong [1] - [3] đã được phân tích trong [12]. Một bài toán khác dẫn tới bài toán tính tổng là *bài toán bó vật*, cũng đã được trình bày trong [11].

Toán gò đống thể hiện sự trưởng thành của toán học Việt Nam thế kỉ XIX.

Mặc dù các công thức và kết quả trong sách toán Hán Nôm đã được giải mã (chứng minh) đầy đủ và chi tiết trong bài viết, vẫn còn một câu hỏi: Người xưa đã đi đến các công thức tính tổng (thí dụ, các công thức (9) – (12)) như thế nào? - Có thể khẳng định: Người xưa đã đi từ các công thức tính thể tích các hình để suy ra các công thức tính tổng (tương tự hóa). Hơn nữa, các công thức tính thể tích và công thức tính tổng thường được chứng minh nhờ phương pháp *cắt ghép hình*, chứ không chứng minh qui nạp như ngày nay. Ví dụ tính thể tích hình lăng trụ cụt và công thức tính tổng bình phương các số tự nhiên trên đây là những cơ sở cho khẳng định này.

Những bài toán tính tổng vẫn còn có ý nghĩa thực tế trong giảng dạy, thậm chí cho học sinh lớp 6. Tùy trình độ, có thể cho học sinh làm các bài tập với các số cụ thể (như các sách toán cổ, và đã được trình bày, phân tích trong bài), hoặc cho học sinh chứng minh các công thức tổng quát trước khi áp dụng vào các bài toán cụ thể.

Nghiên cứu lịch sử toán học cũng cho chúng ta thấy con đường phát triển của toán học và mối quan hệ của toán hoc với thực tế.

Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Gia Kỷ, *Đại thành toán học chỉ minh*, khoảng 1840, Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, A.1555.

[2] Nguyễn Hữu Thận, *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, 1829. Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, Vhv.1184.

[3] Tạ Hữu Thường, *Thống tông toán pháp*, Khoảng cuối thế kỉ XIX, Thư viện Quốc gia, Mã hiệu số hóa nlvnpf-0493, Mã kho R.1194

[4] Dương Huy, *Dương Huy toán pháp*, Quách Thư Xuân (chủ biên), Trung quốc khoa học kỹ thuật điển tịch thông vựng (Toán học - quyển 1), Nhà xuất bản giáo dục Hà Nam, Trung Quốc, 1993 (Chữ Hán).

[5] Trình Đại Vị, *Toán pháp thống tông*, Quách Thư Xuân (chủ biên), Trung quốc khoa học kỹ thuật điển tịch thông vựng (Toán học - quyển 2 - trang 1217-1346). Nhà xuất bản giáo dục Hà Nam, Trung Quốc, 1993 (Chữ Hán).

[6] Jean-Claude Marzloff, *History of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 2006.

[7] Ngô Hân, *Công thức vạn năng*, Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, số 37 (tháng 10, 1967), trang 13-16.

[8] E. I. Berezina, Bản dịch và Chú giải *Cửu chương toán thuật* của Liu Hui (chữ Hán, thế kỉ III), in trong *Nghiên cứu lịch sử toán học*, Tập 10, Nhà xuất bản sách Khoa học, Moscow, 1957, trang 425-586 (tiếng Nga).

[9] Vữ Hữu Bình, *Toán 6,* Cơ bản và nâng cao, Tập 1, Nhà xuất bản Giáo dục, 2020 (Tái bản lần thứ 10).

[10] Tạ Duy Phượng, Phạm Vũ Lộc, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết, *Bài toán xếp vật dựa tường trong ba cuốn sách Hán Nôm dẫn đến bài toán tính tổng của dãy số tự nhiên* Tạp chí *Toán Tuổi thơ*, Số 212+213 (3/9, 2020-2021), trang 54-57.

[11] Trần Đại An, Phạm Văn Hoằng, Đoàn Thị Lệ, Phạm Vũ Lộc, Tạ Duy Phượng, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết, *Bài toán bó vật trong hai cuốn sách Hán Nôm dẫn đến bài toán tính tổng của cấp số cộng* Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, Số 522 (12-2020), trang 33-36.

[12] Tạ Duy Phượng & nhóm nghiên cứu (Trần Đại An, Phạm Văn Hoằng, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết), *Về các dạng toán tính số vật xếp đống trong ba cuốn sách Hán Nôm,* in trong *Nghiên cứu Hán Nôm năm 2020*, Nhà xuất bản sách Thế giới, 2020, trang 651-664.

ĐỊNH LÝ PASCAL VÀ ÁP DỤNG

Lê Viết Ân (Tp.HCM)
Nguyễn Duy Phước (Thừa Thiên - Huế)

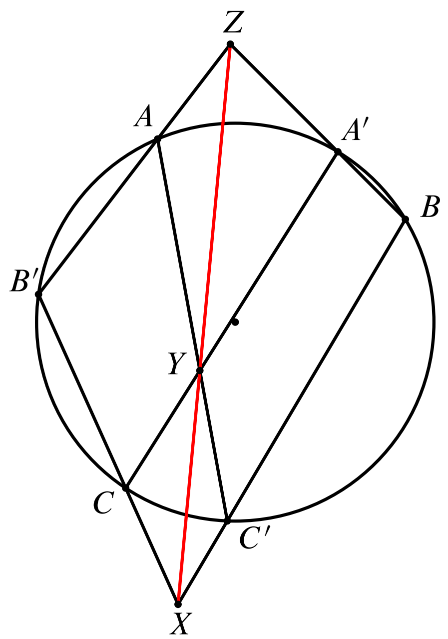
TÓM TẮT

Định lý Pascal cho đường tròn là một trong những kết quả kinh điển nhất của hình học sơ cấp. Trong bài viết này, chúng tôi xin đề cập đến một chứng minh mới khá đơn giản dựa vào định lý về tâm đẳng phương của ba đường tròn được chúng tôi phát hiện trong quá trình giảng dạy. Bên cạnh đó sẽ nêu lên một vài ứng dụng ứng với những trường hợp đặc biệt của nó để bạn đọc thấy được sự ứng dụng tuyệt vời của định lý này.

1. Giới thiệu

Nội dung của định lý Pascal thường được phát biểu như sau:

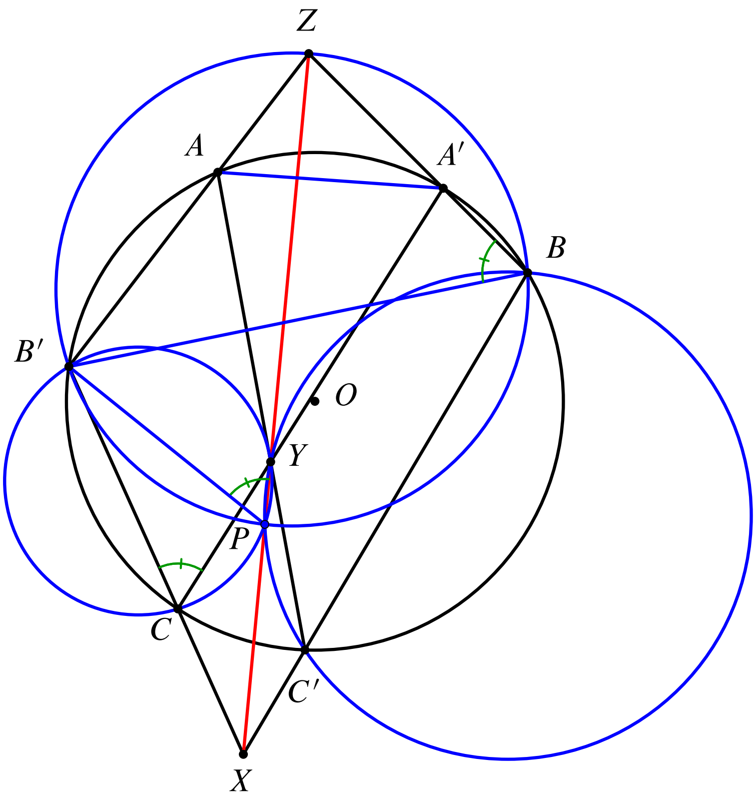
Định lý 1. *Cho sáu điểm A, B, C, A', B', C' cùng nằm trên một đường tròn. Đặt $X = BC' \cap B'C$, $Y = CA' \cap C'A$ và $Z = AB' \cap A'B$. Khi đó X, Y, Z thẳng hàng.*



Hình vẽ định lý Pascal ứng với bộ điểm $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$.

2. Chứng minh

Có rất nhiều cách để chứng minh định lý Pascal, trong đó có một cách của tác giả Jan van Yzeren (xem tại [1]), là dùng tứ giác nội tiếp đưa về hai tam giác vị tự rất đẹp. Tuy nhiên trong bài viết này, chúng tôi cũng dùng một cách chứng minh bằng tứ giác nội tiếp kết hợp với trục đẳng phương như sau:



Lời giải. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ZBB' cắt YZ tại P khác Z. Gọi (O) là đường tròn đi qua sáu điểm A, B, C, A', B', C'. Khi đó

$$\begin{aligned}
\widehat{YCB'} &= \widehat{A'CB'} && (\text{vì } Y \in A'C)\\
&= \widehat{A'BB'} && (\text{vì tứ giác } A'BCB' \text{ nội tiếp})\\
&= \widehat{ZBB'} && (\text{vì } Z \in A'B)\\
&= \widehat{ZPB'} && (\text{vì tứ giác } ZBPB' \text{ nội tiếp})\\
&= \widehat{YPB'} && (\text{vì } P \in YZ).
\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $B'YPC$ nội tiếp.
Chứng minh tương tự, cũng có tứ giác $C'BYP$ nội tiếp.
Áp dụng định lí về tâm đẳng phương cho hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $CB'Y$, $BC'Y$ và đường tròn (O) với chú ý $X = B'C \cap BC'$ thì ba trục đẳng phương $B'C$, BC' và YP đồng quy (tại X). Do đó YZ đi qua X, tức là ba điểm X, Y, Z thẳng hàng. □

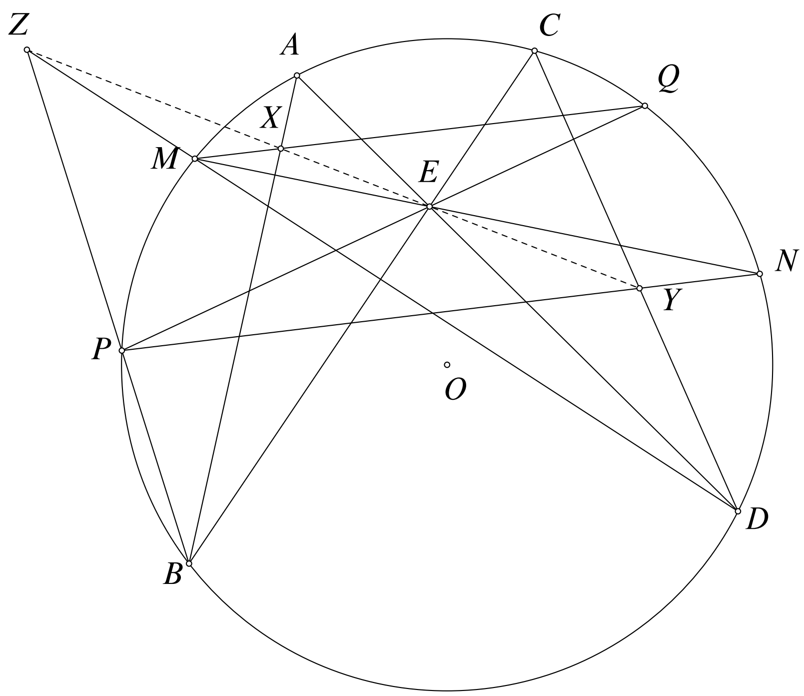
3. Các trường hợp suy biến của định lý Pascal

Từ định lý Pascal, ta xem xét một số tình huống có thể xảy ra của cấu hình của định lý, chẳng hạn:

- Nếu cho xảy ra $X = BC' \cap B'C = \infty$, tức $BC' \parallel B'C$ thì khi đó $YZ \parallel BC' \parallel B'C$.
- Còn nếu cho xảy ra một cặp điểm trùng nhau, hai cặp điểm trùng nhau hoặc thậm chí ba cặp điểm trùng nhau trong sáu điểm A, B, C, A', B', C' thì khi đó lục giác suy biến thành ngũ giác, tứ giác, tam giác, chẳng hạn như $A \equiv A'$ thì đường thẳng AA' trở thành tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, chúng ta còn thu thêm nhiều kết quả đặc biệt nữa.

4. Một số ví dụ

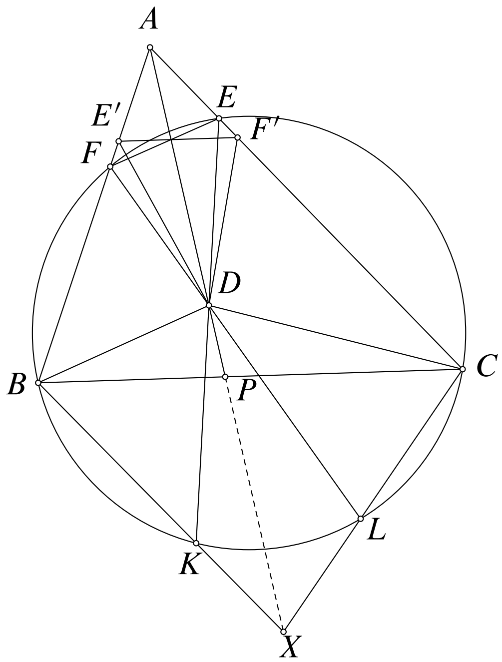
Ví dụ 1. *Cho đường tròn (O). AB, CD là hai dây cung của (O). Gọi E là giao điểm của AD và BC. MN, PQ là hai dây cung khác AD, BC của (O) và đi qua E. Gọi X là giao điểm của MQ và AB, Y là giao điểm của NP và CD. Chứng minh rằng ba điểm X, E, Y thẳng hàng.*



Lời giải. Gọi Z là giao điểm của BP và MD.
Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} A & M & P \\ Q & B & D \end{pmatrix}$ ta thu được ba điểm X, Z, E thẳng hàng.
Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} M & P & C \\ B & D & N \end{pmatrix}$ ta thu được ba điểm Z, Y, E thẳng hàng.
Suy ra bốn điểm X, Y, Z, E thẳng hàng. □

Nhận xét 1. Chúng ta nhận thấy không có bộ sáu điểm nào để suy ra ba điểm X, E, Y thẳng hàng một cách trực tiếp bằng định lý Pascal. Điều này đòi hỏi chúng ta cần dựng thêm điểm phụ Z sau đó chỉ ra bốn điểm X, Y, Z, E thẳng hàng.

Ví dụ 2 (Lê Viết Ân). *Cho tam giác ABC, phân giác AP. Điểm D nằm trên đoạn AP sao cho $\widehat{BDP} > \widehat{DCB}$ và $\widehat{CDP} > \widehat{DBC}$. Lấy điểm K nằm cùng nửa mặt phẳng chứa B có bờ là AP sao cho $\widehat{KDP} = \widehat{DCB}$ và $\widehat{BKD} = \widehat{ACB}$, và lấy điểm L nằm cùng nửa mặt phẳng chứa C có bờ là AP sao cho $\widehat{LDP} = \widehat{DBC}$ và $\widehat{CLD} = \widehat{ABC}$. Gỉa sử BK và CL phân biệt và cắt nhau tại X. Chứng minh rằng AP đi qua X.*



Lời giải. Kéo dài DK, DL thứ tự cắt AC, AB tại E, F. Ta sẽ chứng minh sáu điểm B, C, E, F, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Gọi E', F' thứ tự là đối xứng của E, F qua phân giác AP của $\widehat{BAC}$. Suy ra $E' \in AB$ và $F' \in AC$, hơn nữa: $\widehat{E'DA} = \widehat{EDA} = \widehat{KDP} = \widehat{DCB}$ và $\widehat{F'DA} = \widehat{FDA} = \widehat{LDP} = \widehat{DBC}$.

Áp dụng định lý sin cho tam giác ADE', ADF' và DBC với chú ý $\widehat{E'AD} = \widehat{F'AD}$, ta có:

$$\frac{AE'}{AF'} : \frac{DE'}{DF'} = \frac{AE'}{DE'} : \frac{AF'}{DF'} = \frac{\sin\widehat{ADE'}}{\sin\widehat{E'AD}} : \frac{\sin\widehat{ADF'}}{\sin\widehat{F'AD}} = \frac{\sin\widehat{ADE'}}{\sin ADF'} = \frac{\sin DCB}{\sin\widehat{DBC}} = \frac{DB}{DC}.$$

Suy ra

$$\frac{AE'}{AF'} = \frac{DB \cdot DE'}{DC \cdot DF'}.$$

Mặt khác: $\widehat{E'DF'} = \widehat{E'DA} + \widehat{F'DA} = \widehat{DCB} + \widehat{DBC} = 180° - \widehat{BDC}$.
Suy ra $\widehat{E'DF'} + \widehat{BDC} = 180°$.
Do đó $\widehat{BDF'} + \widehat{CDE'} = 180°$. Suy ra $\sin\widehat{BDE'} = \sin\widehat{CDF'}$.
Chú ý rằng D nằm trên phân giác góc BAC nên D cách đều AB và AC. Suy ra

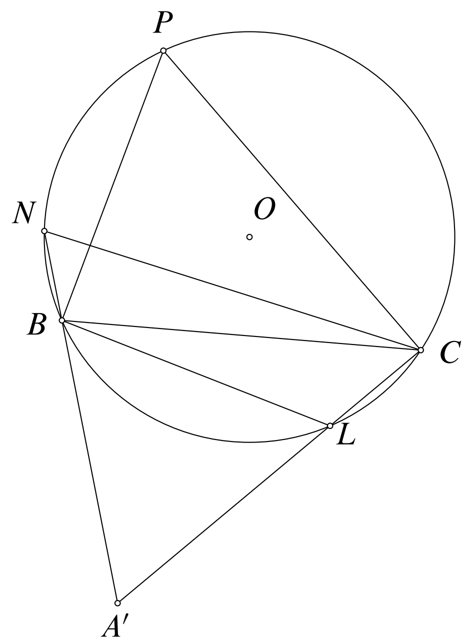
$$\frac{BE'}{CF'} = \frac{S_{DBE'}}{S_{CDF'}} = \frac{\frac{DB\cdot DE'\cdot\sin\widehat{BDE'}}{2}}{\frac{DC\cdot DF'\cdot\sin\widehat{CDF'}}{2}} = \frac{DB \cdot DE'}{CD \cdot CF'}.$$

Do đó $\frac{AE'}{AF'} = \frac{BE'}{CF'}$. Theo định lí Thales đảo, ta có $E'F' \parallel BC$. Suy ra $\widehat{AE'F'} = \widehat{ABC}$. Mặt khác, chú ý hai tam giác AEF và $AE'F'$ đối xứng nhau qua AD nên $\widehat{AEF} = \widehat{AE'F'}$ nên $\widehat{AEF} = \widehat{ABC} = \widehat{FBC}$. Suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
Bây giờ chú ý rằng $\widehat{EKB} = \widehat{DKB} = \widehat{ACB} = \widehat{ECB}$ nên tứ giác $BKCE$ nội tiếp.
Chứng minh tương tự, cũng có tứ giác $CLBF$ nội tiếp.
Từ đó ta suy ra lục giác $BKLCEF$ nội tiếp. Đến đây, áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} B & E & L \\ C & F & K \end{pmatrix}$ thì ba điểm $X = BK \cap CL$, $A = BF \cap CE$ và $D = EK \cap FL$ thẳng hàng hay AP đi qua X. □

Ví dụ 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P, Q là hai điểm nằm trên (O). Gọi A' là điểm đối xứng với P qua BC, A'' là giao điểm của $A'Q$ với BC. Định nghĩa B', B'', C', C'' một cách tương tự. Chứng minh rằng ba điểm A'', B'', C'' thẳng hàng.*

Lời giải. Trước hết, xin phát biểu và chứng minh bổ đề sau

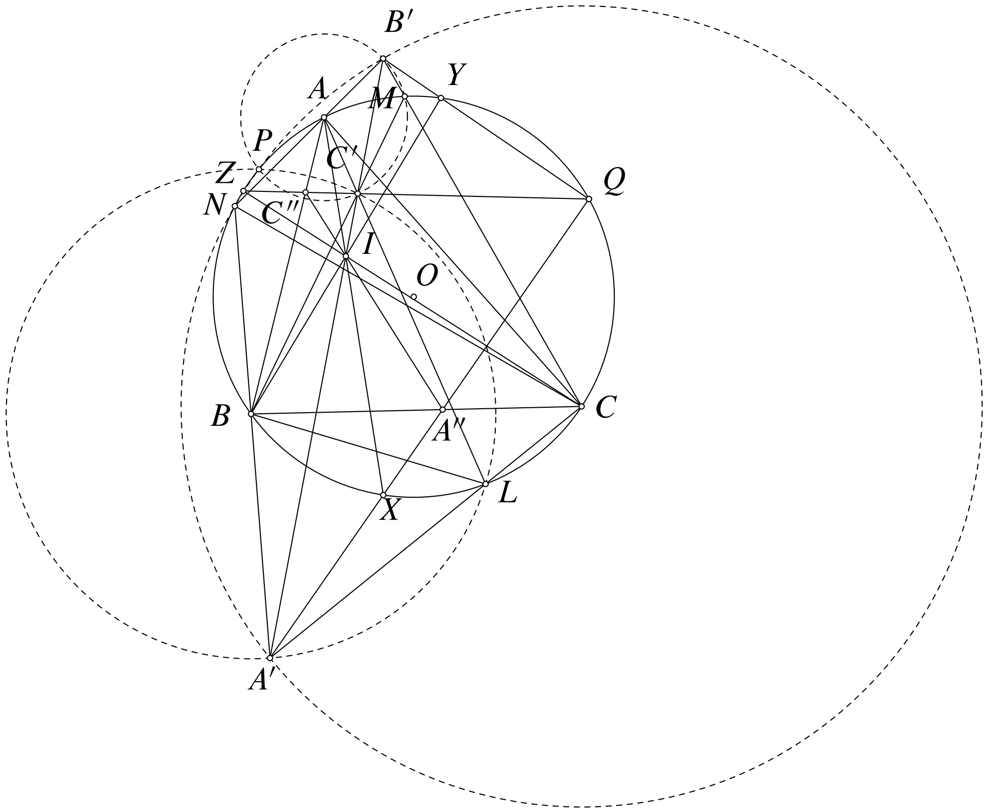
Bổ đề 1. *Cho tam giác PBC nội tiếp đường tròn (O). A' đối xứng với P qua BC. $A'B, A'C$ lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là N, L. Khi đó $BL = BP, CN = CP$.*



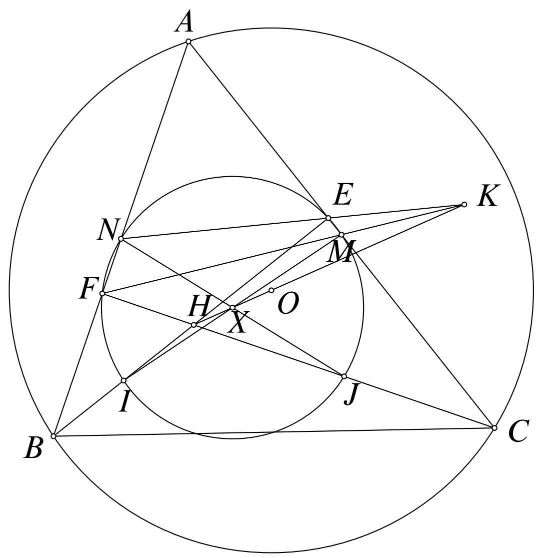
Lời giải. Ta có $\widehat{BCA'} = \widehat{BCP}$ nên $BL = BP$; $\widehat{PBC} = \widehat{A'BC}$ nên $CN = CP$. □

Quay trở lại bài toán.

Gọi M, L, N theo thứ tự là các giao điểm thứ hai của các đường tròn $\odot(A; AP)$, $\odot(B; BP)$, $\odot(C; CP)$ với (O). Áp dụng **bổ đề 1** ta có ba điểm C', A, L thẳng hàng và ba điểm C', B, M thẳng hàng. Gọi X, Y, Z lần lượt là các giao điểm khác Q của $A'Q, B'Q, C'Q$ với (O).
Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} A & B & C \\ M & L & N \end{pmatrix}$ thì ba điểm A', B', C' thẳng hàng (đường thẳng Steiner). (1)
Gọi I là giao điểm của AX và BY. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} A & B & Q \\ Y & X & N \end{pmatrix}$ thì ba điểm A', B', I thẳng hàng hay $AX, BY, A'B'$ đồng quy. Chứng minh tương tự, $AX, CZ, A'C'$ đồng quy.
Từ đây, kết hợp với (1) ta thu được $AX, BY, CZ, A'B'$ đồng quy tại I.
Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} A & C & Q \\ Z & X & B \end{pmatrix}$ thì ba điểm A'', C'', I thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ba điểm A'', B'', I thẳng hàng. Vậy bốn điểm A'', B'', C'', I thẳng hàng hay ta có điều phải chứng minh. □



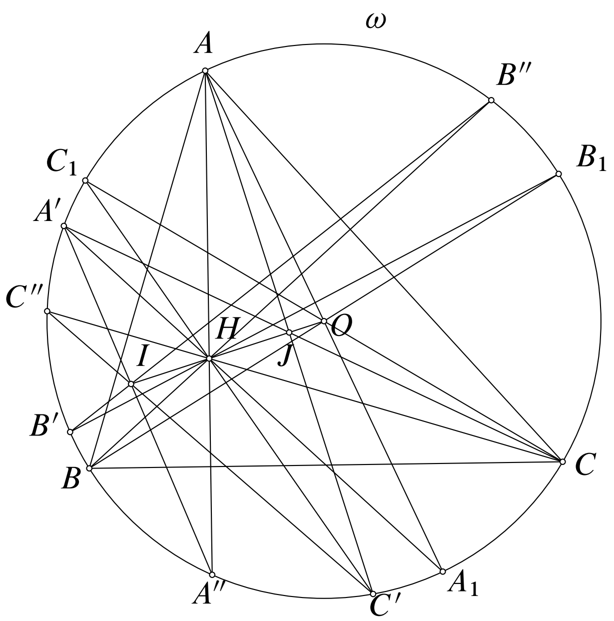
Ví dụ 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với các đường cao BE, CF giao nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, AB. Chứng minh rằng EN, FM, OH đồng quy.*



Lời giải. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BH, CH; X là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC; K là giao điểm của EN và FM. Khi đó, ta có X là trung điểm của OH và 6 điểm E, F, M, N, I, J cùng nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC. Ngoài ra, dễ thấy MI, NJ là hai đường kính của đường tròn $\odot(X)$.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} E & M & J \\ F & N & I \end{pmatrix}$ thì K, X, H thẳng hàng hay $K \in OH$. $\square$

Ví dụ 5 (Iran MO - 3rd Round - 2005). *Giả sử H và O là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. AO cắt ω tại điểm thứ hai là A_1. A_1H cắt lại ω tại A' và A'' là giao điểm thứ hai của ω với AH. Định nghĩa các điểm B', B'', C', C'' một cách tương tự. Chứng minh rằng $A'A'', B'B'', C'C''$ đồng quy tại một điểm trên đường thẳng $Euler$ của tam giác ABC.*



Lời giải. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $A'A''$ và $C'C''$, AC' và $A'C$.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} A & A' & C'' \\ C & C' & A'' \end{pmatrix}$ thì ba điểm H, I, J thẳng hàng. (1)

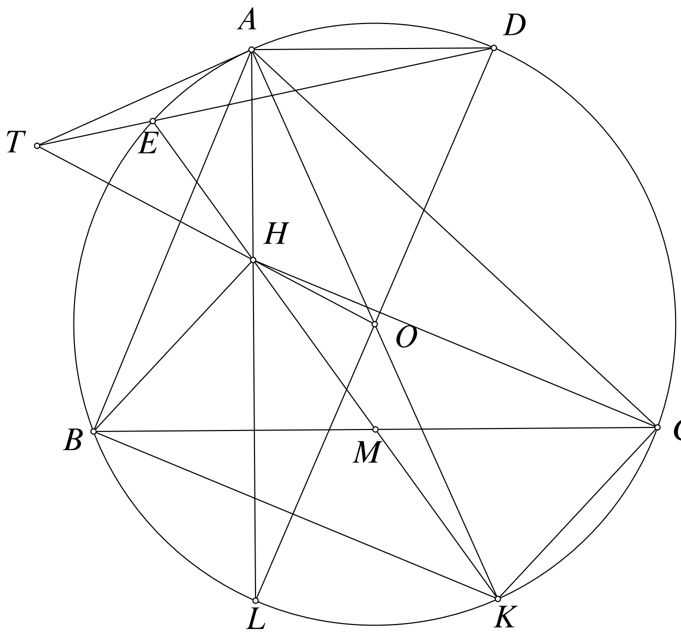
Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} A & A' & C_1 \\ C & C' & A_1 \end{pmatrix}$ thì ba điểm H, O, J thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A'A'', C'C''$ và OH đồng quy. Hoàn toàn tương tự, ta có $A'A'', B'B''$ và OH đồng quy. Vì vậy $A'A'', B'B'', C'C''$ và OH đồng quy. $\square$

Nhận xét 2. Chúng ta đã chứng minh $A'A'', B'B'', C'C''$ đồng quy tại một điểm nằm trên OH bằng phương pháp tính duy nhất giao điểm của các đường thẳng cắt nhau. Đây là một trong những phương pháp chứng minh các đường thẳng đồng quy tại một điểm nằm trên một đối tượng đặc biệt nào đó.

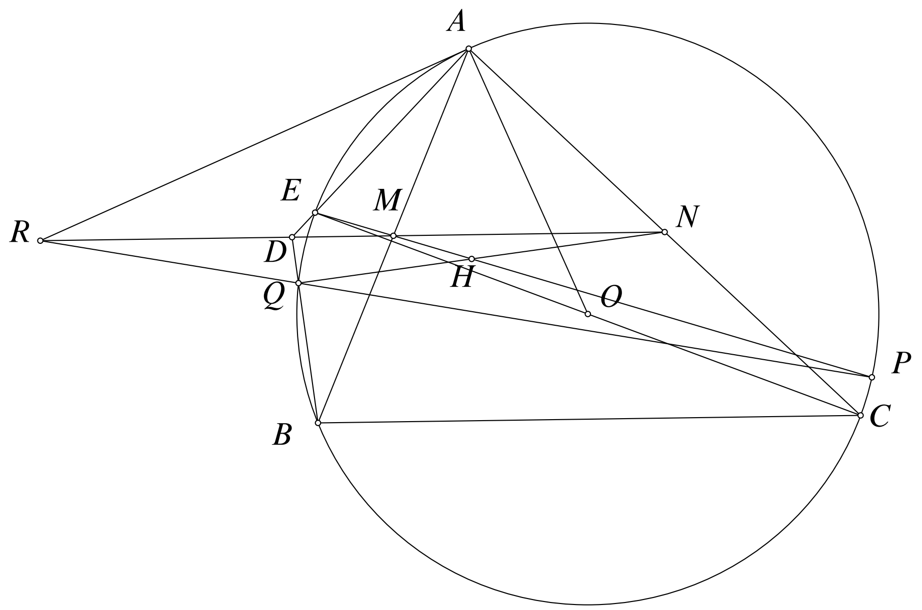
Tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng các trường hợp suy biến của định lý Pascal cho việc chứng minh tiếp xúc hoặc song song.

Ví dụ 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. M là trung điểm BC. Tia MH cắt (O) tại E. Đường thẳng qua A song song với BC cắt (O) tại D. DE giao OH tại T. Chứng minh rằng TA tiếp xúc với (O).*



Lời giải. Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của AO, AH với (O). Ta có $AL \equiv AH \perp BC \parallel AD$ nên $AL \perp AD$ hay DL là đường kính của đường tròn (O).
Ta có $KC \perp AC \perp BH$ nên $KC \parallel BH$. Tương tự, $CH \parallel KB$. Suy ra tứ giác $BHCK$ là hình bình hành. Mà M là trung điểm của BC nên ba điểm H, K, M thẳng hàng.
Áp dụng định lý Pascal cho bộ điểm $\begin{pmatrix} A & D & K \\ E & A & L \end{pmatrix}$ thì ta thu được tiếp tuyến tại A của (O), DE và OH đồng quy. Mà $T = DE \cap OH$ vì vậy TA tiếp xúc với (O). $\square$

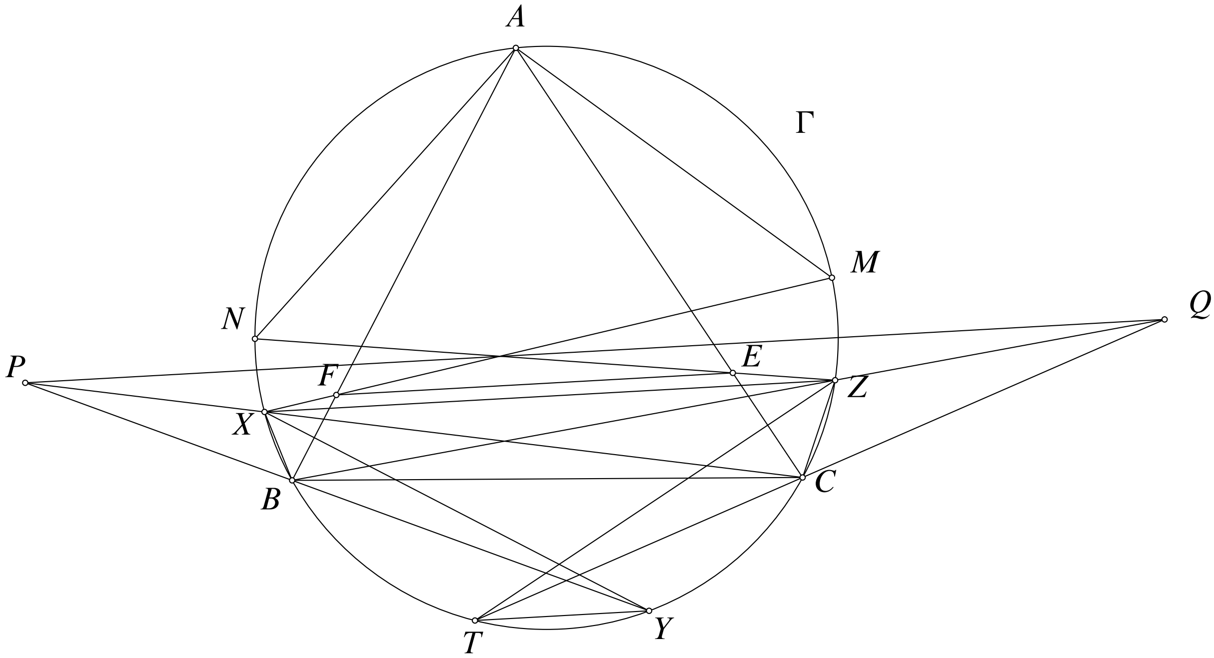
Ví dụ 7 (USA TSTST 2011). *Cho tam giác nhọn ABC với (O) là đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Các tia MH, NH lần lượt cắt (O) tại P và Q. Hai đường thẳng MN và PQ cắt nhau tại R. Chứng minh rằng $OA \perp RA$.*



Lời giải. Gọi $CO \cap (O) = E$ $(E \neq C)$. Khi đó, chứng minh tương tự như ví dụ 6, ta thu được tứ giác $AEBH$ là hình bình hành nên M là trung điểm của EH.
Gọi D là giao điểm của AE và BQ thì $\widehat{DAN} = \widehat{DQN} = 90°$ nên tứ giác $ADQN$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{AND} = \widehat{AQD} = \widehat{ACB}$, do đó $DN \parallel BC$. Điều này có nghĩa là $D \in MN$.
Áp dụng định lý Pascal cho bộ điểm $\begin{pmatrix} A & B & P \\ Q & E & A \end{pmatrix}$ với chú ý rằng $AE \cap BQ = D$, $BA \cap PE = M$, $R \in PQ$ và ba điểm D, M, R thẳng hàng, suy ra RA tiếp xúc với (O). Nên $OA \perp RA$. $\square$

Ví dụ 8 (Nguyễn Hữu Tâm). *Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn Γ. Trên hai cạnh CA, AB lần lượt lấy điểm E, F sao cho $AE = AF$. Giả sử đường trung trực của BF lần lượt cắt cung nhỏ AB, cung lớn AB của đường tròn Γ tại X, Y; đường trung trực của CE lần lượt cắt cung nhỏ AC, cung lớn AC của đường tròn Γ tại Z, T. Gọi P là giao điểm của BY và CX, Q là giao điểm của BZ và CT. Chứng minh rằng $PQ \parallel EF$.*

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của XF, ZE với đường tròn Γ. Ta có $\widehat{AMF} = \widehat{AMX} = \widehat{ABX} = \widehat{XBF} = \widehat{XFB} = \widehat{AFM}$. Suy ra tam giác AFM cân tại A, nên $AF = AM$.
Tương tự, $AN = AE$. Mặt khác, ta có $AE = AF$. Do đó $AM = AF = AE = AN$ hay bốn điểm E, F, M, N cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra $\angle NEF = \angle NMF = \angle NMX = \angle NZX$. Vì vậy $EF \parallel XZ$.
Chứng minh tương tự như trên, ta có $YT \parallel EF$. Như vậy, ta thu được $XZ \parallel EF \parallel YT$.



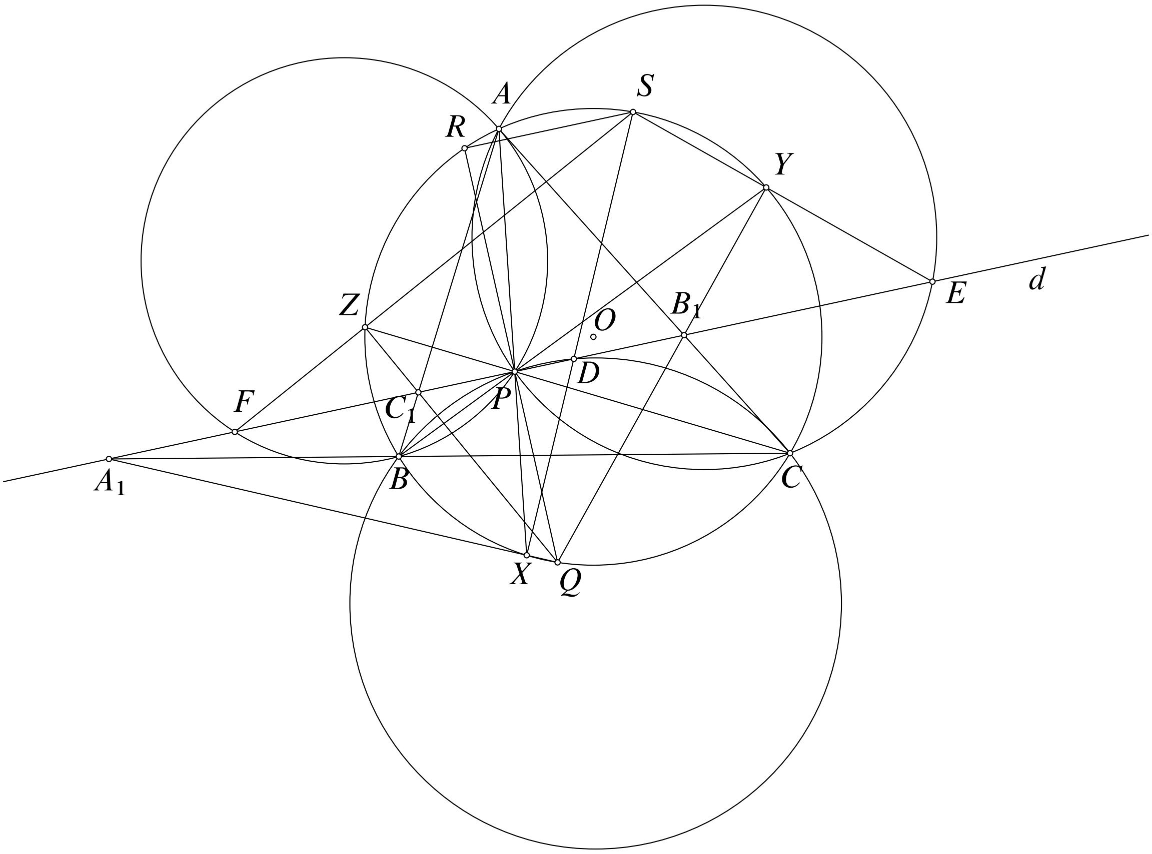
Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} B & X & T \\ C & Y & Z \end{pmatrix}$ với chú ý $BY \cap CX = P$, $BZ \cap CT = Q$ và $XZ \parallel YT$ thì ta thu được $PQ \parallel XZ \parallel YT \parallel EF$. □

Cuối cùng, xin giới thiệu đến độc giả một số bài toán sử dụng định lý Pascal để tiện cho việc khai thác các dữ kiện của bài toán.

Ví dụ 9. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), một điểm P bất kì nằm trong mặt phẳng và không thuộc các cạnh của tam giác. Một đường thẳng d đi qua P lần lượt cắt các đường tròn $\odot(PBC), \odot(PCA), \odot(PAB)$ tại các điểm thứ hai là D, E, F. AP, BP, CP lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là X, Y, Z. Chứng minh rằng XD, YE, ZF đồng quy tại một điểm nằm trên (O).*

Lời giải. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm của BC, CA, AB với đường thẳng d. Trước tiên, ta sẽ chứng minh XA_1, YB_1, ZC_1 đồng quy tại một điểm nằm trên (O).
Gọi Q là giao điểm thứ hai của ZC_1 và (O), B_1' là giao điểm của YQ và CA. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} Z & A & Y \\ B & Q & C \end{pmatrix}$ ta suy ra ba điểm C_1, P, B_1' thẳng hàng hay B_1' là giao điểm của CA và đường thẳng d. Do đó $B_1 \equiv B_1'$ hay ZC_1, YB_1 cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O). Chứng minh tương tự, ta thu được XA_1, YB_1, ZC_1 đồng quy tại Q nằm trên đường tròn (O).
Đến đây, $\overline{A_1P} \cdot \overline{A_1D} = \overline{A_1B} \cdot \overline{A_1C} = \overline{A_1X} \cdot \overline{A_1Q}$. Do đó bốn điểm X, Q, P, D đồng viên.

Chứng minh tương tự, ta có hai bộ bốn điểm Y, Q, P, E; Z, Q, P, F đồng viên.

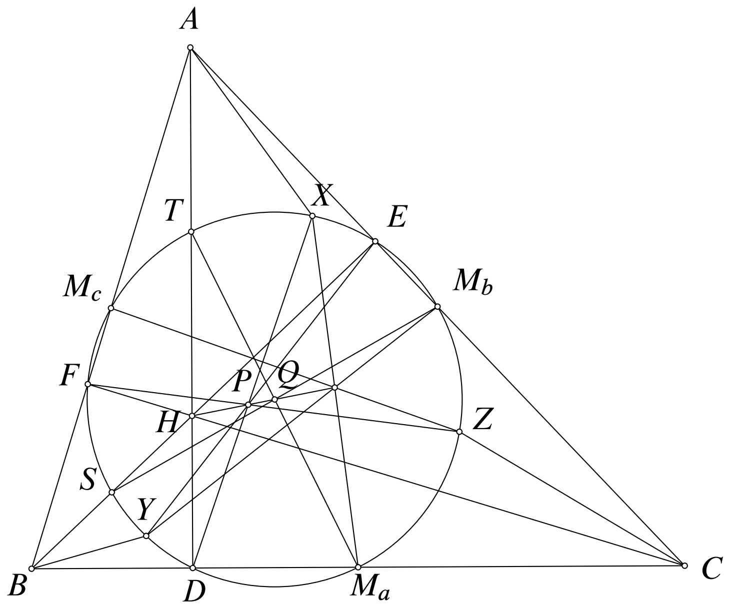


Gọi R là giao điểm thứ hai của QP và (O), S là điểm trên (O) sao cho $RS \parallel d$. Ta có biến đổi góc có hướng $(DP, DX) \equiv (QP, QX) \equiv (QR, QX) \equiv (SR, SX) \pmod{\pi}$. Chú ý $RS \parallel d \equiv PD$. Ta thu được ba điểm X, D, S thẳng hàng.
Chứng minh tương tự, ta có hai bộ ba điểm Y, E, S; Z, F, S thẳng hàng.
Vậy XD, YE, ZF đồng quy tại điểm S nằm trên đường tròn (O). □

Ví dụ 10. *Cho tam giác ABC không cân, D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C. P là điểm bất kì nằm trên đường thẳng $Euler$ của tam giác ABC. DP, EP, FP lần lượt cắt đường tròn $Euler$ của tam giác ABC tại các điểm thứ hai là X, Y, Z. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.*

Lời giải. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; M_a, M_b, M_c, T, S lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, AH, BH; Q là tâm đường tròn $Euler$ của tam giác ABC.
Dễ thấy ba điểm H, P, Q thẳng hàng; các điểm $D, E, F, M_a, M_b, M_c, T, S$ cùng nằm trên đường tròn Q; ba điểm Q, T, M_a thẳng hàng; ba điểm S, Q, M_b thẳng hàng.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} M_a & D & S \\ M_b & E & T \end{pmatrix}$ ta suy ra giao điểm của M_aE và M_bD nằm trên HQ.
Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} M_a & Y & D \\ M_b & X & E \end{pmatrix}$ với chú ý giao điểm của M_aE và M_bD nằm trên HQ suy ra giao điểm của M_aX và M_bY thuộc HQ hay nói cách khác M_aX, M_bY, HQ đồng quy.
Chứng minh tương tự, ta thu được M_aX, M_bY, M_cZ, HQ đồng quy.



Áp dụng định lý Ceva dạng sin vào tam giác AM_bM_c, ta có

$$\frac{\sin \widehat{XAM_c}}{\sin \widehat{XAM_b}} \cdot \frac{\sin \widehat{XM_cM_b}}{\sin \widehat{XM_cA}} \cdot \frac{\sin \widehat{XM_bA}}{\sin \widehat{XM_bM_c}} = 1$$

Suy ra

$$\frac{\sin \widehat{XAB}}{\sin \widehat{XAC}} = \frac{\sin \widehat{XM_cA}}{\sin \widehat{XM_cM_b}} \cdot \frac{\sin \widehat{XM_bM_c}}{\sin \widehat{XM_bA}} = \frac{\sin \widehat{XDF}}{\sin \widehat{XM_aM_b}} \cdot \frac{\sin \widehat{XM_aM_c}}{\sin \widehat{XDE}}$$

Xây dựng các đẳng thức tương tự và nhân lại, ta có

$$\prod \frac{\sin \widehat{XAB}}{\sin \widehat{XAC}} = \prod \frac{\sin \widehat{XDF}}{\sin \widehat{XDE}} \cdot \prod \frac{\sin \widehat{XM_aM_c}}{\sin \widehat{XM_aM_b}} = 1$$

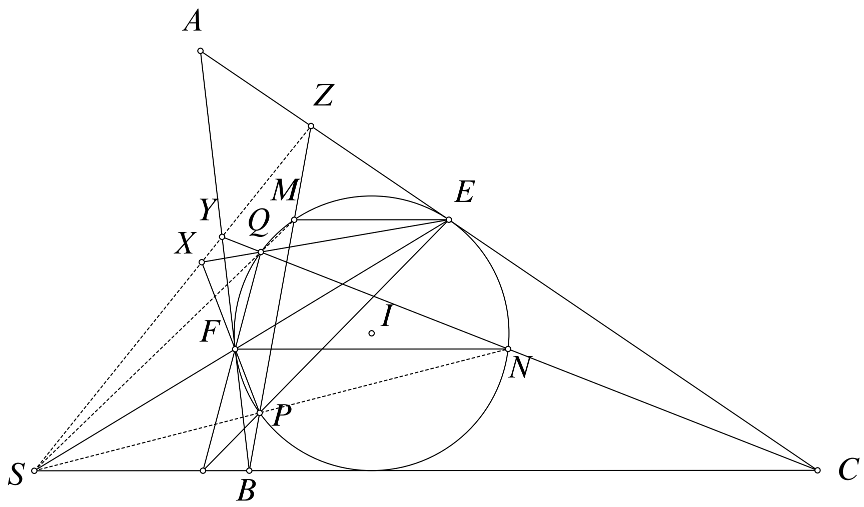
vì DX, EY, FZ đồng quy và M_aX, M_bY, M_cZ đồng quy. Từ đó, áp dụng định lý Ceva dạng sin vào tam giác ABC ta suy ra AX, BY, CZ đồng quy. $\square$

Ví dụ 11 (Nguyễn Minh Hà). *Cho tam giác ABC không cân tại A. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp của tam giác. (I) tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E, F. Các điểm M, N thuộc (I) sao cho $EM \parallel FN \parallel BC$. Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BM, CN với đường tròn (I). Chứng minh rằng BC, EP, FQ đồng quy.*

Lời giải. Gọi S là giao điểm của EF và BC. Ta sẽ chứng minh ba điểm S, P, N thẳng hàng; ba điểm S, Q, M thẳng hàng, thật vậy. Ta có biến đổi góc có hướng

$$(SF, SB) \equiv (EF, EM) \equiv (PF, PM) \equiv (PF, PB) \ (mod \pi)$$

Suy ra bốn điểm S, F, P, B cùng nằm trên một đường tròn. Từ đây, chú ý (I) tiếp xúc với AB tại F nên ta có $(SP, SB) \equiv (FP, FB) \equiv (NP, NF) \ (mod \pi)$. Kết hợp với $FN \parallel SB \equiv BC$. Do đó ba điểm S, P, N thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta có ba điểm S, Q, M thẳng hàng. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng PF và QE, AB và QN, AC và PM.



Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} E & P & Q \\ M & E & F \end{pmatrix}$ ta thu được ba điểm Z, S, X thẳng hàng.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} F & Q & P \\ N & F & E \end{pmatrix}$ ta thu được ba điểm Y, X, S thẳng hàng.

Do đó bốn điểm X, Y, Z, S thẳng hàng. Áp dụng định lý Desargues vào hai tam giác BPF và CEQ có $X = PF \cap EQ, Y = BF \cap CQ, Z = BP \cap CE$ và ba điểm X, Y, Z thẳng hàng suy ra BC, EP, FQ đồng quy. $\square$

Ví dụ 12 (Nguyễn Duy Phước). *Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi S là giao điểm của AH và EF, T là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính AH và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Giả sử TE, TF lần lượt cắt BC tại X, Y. Đường thẳng qua H vuông góc với AH cắt XS tại P. Chứng minh rằng đường tròn đường kính XY tiếp xúc với đường tròn $(P; PH)$.*

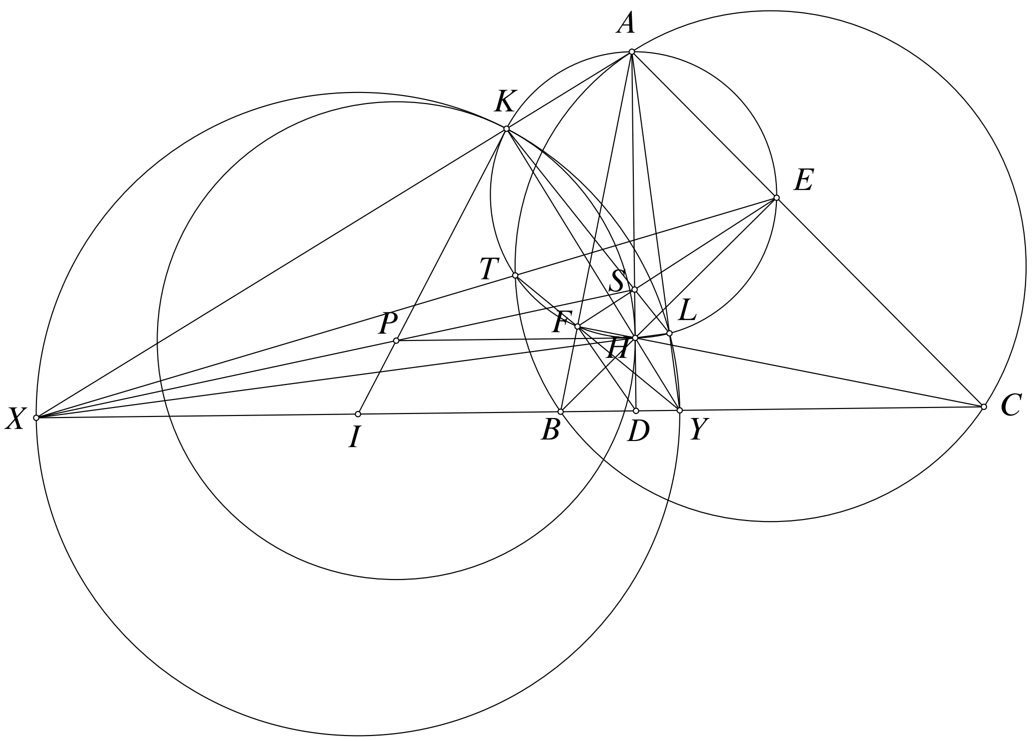
Lời giải. Dễ thấy các điểm A, E, F, H, T cùng nằm trên đường tròn đường kính AH.
Ta có biến đổi góc (chú ý tứ giác $ACDF$ nội tiếp)

$$\widehat{XTF} = 180^\circ - \widehat{ETF} = 180^\circ - \widehat{EAF} = 180^\circ - \widehat{FDX}.$$

Suy ra tứ giác $XTFD$ nội tiếp.
Gọi K là giao điểm thứ hai của AX và đường tròn (AH). Ta có

$$\widehat{XKH} = 180^\circ - \widehat{AKH} = 90^\circ = \widehat{HDX}$$

nên bốn điểm H, K, X, D cùng nằm trên một đường tròn.
Áp dụng tính chất trục đẳng phương vào ba đường tròn $\odot(AH), \odot(XDHK), \odot(XDFT)$ và chú ý TF cắt XD tại Y ta suy ra ba điểm H, K, Y thẳng hàng.
Từ đó, $\widehat{XKY} = \widehat{XKH} = 90^\circ$ hay K nằm trên đường tròn đường kính XY.
Hoàn toàn tương tự, nếu gọi L là giao điểm thứ hai của AY và đường tròn $\odot(AH)$ thì ba điểm X, H, L thẳng hàng và $L \in \odot(XY)$.
Gọi S' là giao điểm của AH và KL. Khi đó, áp dụng hàng tứ giác toàn phần thì ta thu được $(AH, SD) = -1 = (AH, S'D)$. Suy ra $S \equiv S'$ hay AH, EF, KL đồng quy tại S.



Gọi P' là giao điểm của hai tiếp tuyến tại K, H của đường tròn $\odot(AH)$. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} K & H & L \\ H & K & A \end{pmatrix}$ ta thu được ba điểm X, P', S thẳng hàng. Chú ý PH là tiếp tuyến của $\odot(AH)$ và $P \in XS$. Vì vậy $P \equiv P'$ hay PK là tiếp tuyến tại K của đường tròn $\odot(AH)$. Nên $PK = PH$ hay $K \in \odot(P; PH)$.

Gọi I là trung điểm của XY. Từ chứng minh trên, ta thu được H là trực tâm của tam giác AXY. Khi đó, ta có kết quả quen thuộc là IK là tiếp tuyến tại K của đường tròn $\odot(AH)$. Do đó ba điểm I, P, K cùng nằm trên tiếp tuyến kẻ từ K của đường tròn $\odot(AH)$.

Vậy đường tròn đường kính XY tiếp xúc với đường tròn $\odot(P; PH)$ tại K. $\square$

Để kết thúc bài viết, xin đề nghị đến các bạn độc giả một số bài tập để luyện tập.

5. Bài tập tự luyện

Bài tập 1 (APMO 2021). Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp và Γ là đường tròn ngoại tiếp của nó. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, gọi L là tâm của đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, BC và CD, gọi M là trung điểm cung BC của Γ không chứa A và D. Chứng minh rằng tâm đường tròn bàng tiếp góc E của tam giác BCE thì nằm trên đường thẳng LM.

Bài tập 2 (Iran MO - 3rd Round - 2004). Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Một đường thẳng qua O lần lượt cắt các đường thẳng AB và AC tại M và N. Gọi R và S theo thứ tự là trung điểm của BN và CM. Chứng minh rằng $\widehat{ROS} = \widehat{BAC}$.

Bài tập 3 (Australia 2001). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt cắt lại (O) tại A', B', C' và D là điểm nằm trên (O). Giả sử A'', B'', C'' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng DA' và BC, DB' và CA, DC' và AB. Chứng minh rằng A'', B'', C'', H thẳng hàng (với H là trực tâm của tam giác ABC).

Bài tập 4 (Iran TST 2004). Giả sử M và M' là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. Gọi P, Q, R lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC, CA, AB; P', Q', R' lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M' đến BC, CA, AB. Giả sử E, F, G theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng QR và $Q'R'$, RP và $R'P'$, PQ và $P'Q'$. Chứng minh rằng các đường thẳng AE, BF, CG đôi một song song với nhau.

Bài tập 5 (China TST 2003). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Tiếp tuyến PD kẻ từ A, với D thuộc tia BC, P thuộc tia DA. Đường thẳng PU $(U \in BD)$ cắt đường tròn (O) tại Q, T và cắt AB, AC lần lượt tại R và S. Chứng minh rằng nếu $QR = ST$ thì $PQ = UT$.

Bài tập 6 (Korea MO 2012). Giả sử ω là đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Các cạnh BC, CA lần lượt tiếp xúc với ω tại D, E. Một đường thẳng đi qua B và song song với DE cắt ω tại F và G (F nằm giữa B và G). Đường thẳng CG cắt ω tại H khác G. Một đường thẳng đi qua G và song song với EH cắt AC tại I. IF cắt ω tại J khác F. CJ cắt EG tại K. Giả sử l là đường thẳng đi qua K và song song với JD. Chứng minh rằng l, IF, ED có một điểm chung.

Bài tập 7 (IMO Shortlist 1991). Cho điểm P thay đổi trong tam giác ABC. Gọi P', P'' là hình chiếu vuông góc của P trên AC, BC; Q', Q'' là hình chiếu vuông góc của C trên AP, BP và gọi $X = P'Q' \cap P''Q''$. Chứng minh rằng X di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 8 (China National Olympiad 2015). Cho A, B, D, E, F, C là sáu điểm trên một đường tròn theo thứ tự đó sao cho $AB = AC$. Giả sử $P = AD \cap BE$, $R = AF \cap CE$, $Q = BF \cap CD$, $S = AD \cap BF$, $T = AF \cap CD$. K là điểm nằm trên ST sao cho $\widehat{QKS} = \widehat{ECA}$. Chứng minh rằng $\frac{SK}{KT} = \frac{PQ}{QR}$.

Bài tập 9 (Nguyễn Văn Linh). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. H_1, H_2 lần lượt là trực tâm của các tam giác APB, APC. H_1H_2 cắt BC tại S. AP cắt BC tại D. Đường tròn đường kính AP cắt (O) tại T. Chứng minh rằng A, T, S, D đồng viên.

Bài tập 10 (Nguyễn Duy Phước). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có I là tâm đường tròn nội tiếp. OI lần lượt cắt BC, CA, AB tại X, Y, Z. Các đường thẳng theo thứ tự qua X, Y, Z lần lượt vuông góc với IA, IB, IC cắt nhau tạo thành tam giác PQR. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với (O).

Tài liệu tham khảo

[1] Van Yzeren, Jan (1993), *A simple proof of Pascal's haxagon theorem*, The American Mathematical Monthly. 100. Mathematical Association of America. tr. 930 - 931.

[2] Nguyễn Văn Linh, *Một số chủ đề hình học phẳng dành cho học sinh chuyên Toán*, nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Trần Nam Dũng (Chủ biên), *Các phương pháp giải Toán qua các kì thi Olympic 2020.*

MỘT TỔNG QUÁT CHO HAI BÀI TOÁN HÌNH HỌC OLYMPIC

Trần Quang Hùng

Ngày 13 tháng 2 năm 2022

TÓM TẮT

Bài viết này giới thiệu một bài toán tổng quát cùng với chứng minh thuần túy hình học cho cả hai bài toán hình học khá nổi tiếng, một bài xuất hiện trong kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) năm 2012 và một bài xuất hiện trong kỳ thi chọn đội tuyển Mĩ (USA TST) năm 2013.

1. Mở đầu

Kỳ thi IMO (Olympic Toán học Quốc tế) và một số kỳ thi Olympic Toán của Mĩ như USA MO (vô địch Mĩ) và USA TST (chọn đội tuyển Mĩ) đều là các kỳ thi Olympic Toán nổi tiếng trên thế giới với các đề thi chất lượng. Đặc biệt Olympic Toán học Quốc tế IMO là đích phấn đấu của nhiều học sinh yêu thích toán Olympic. USA MO và USA TST tuy là các kỳ thi Olympic Toán của riêng nước Mĩ những cũng có sức ảnh hưởng rộng tới phong trào Olympic Toán trên toàn thế giới. Các kỳ thi này cũng thường có những mối liên hệ chặt chẽ với nhau.

Trong kỳ thi IMO năm 2012, có bài toán hình học P5 (bài toán ở vị trí số 2 trong ngày thi thứ 2) được đề nghị bởi Josef Tkadlec từ nước cộng hòa Czech như sau

Bài toán 1 (IMO 2012 P5; xem [3])**.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm P nằm trong tam giác sao cho AP vuông góc với BC. Trên các đoạn thẳng PC, PB lần lượt lấy các điểm Q, R sao cho $BQ = BA$ và $CQ = CA$. Gọi giao điểm của BQ và CR là X. Chứng minh rằng $XQ = XR$.

Bài toán trên có một lời giải xúc tích và ngắn gọn, chỉ dùng đến kiến thức phần đầu của hình học lớp 9 (ứng với chương trình THCS ở Việt Nam). Lời giải này đã được tác giả bài viết trình bày chi tiết trong Bài toán 43 trang 75 của [1].

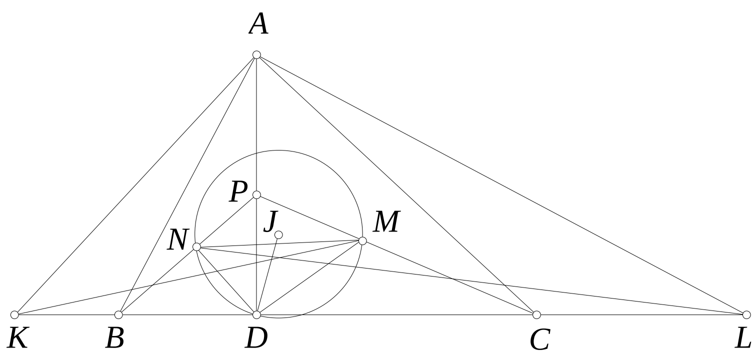
Sau đó ít lâu vào năm 2013, bài toán chọn đội tuyển Mĩ xuất hiện và có thể coi là một trong những ứng dụng đặc sắc nhất của bài toán IMO 2012 ở trên

Bài toán 2 (USA TST P3; xem [4]). Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AD (D thuộc cạnh BC). Lấy điểm P trên đoạn thẳng AD. Trên các đoạn thẳng PC, PB lần lượt lấy các điểm Q, R sao cho $BQ = BA$ và $CQ = CA$. Gọi giao điểm của BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác DQR là T (khác D). Chứng minh rằng AT là phân giác $\angle BAC$.

Bài toán 2 có thể coi là một ứng dụng của Bài toán 1 và cũng có thể coi là "khó" hơn Bài toán 1 vì trong chứng minh của nó cần dùng tới kết quả Bài toán 1 như một bổ đề. Chứng minh chi tiết của Bài toán 2 có thể xem trong [4] với rất nhiều lời giải, đặc biệt có lời giải cũng chỉ dùng định lý Thales tương ứng với kiến thức THCS (theo chương trình ở Việt Nam).

Nhiều khai thác và mở rộng của Bài toán 1 đã có trong một bài viết của chính tác giả và tác giả Ong Thế Phương; xem [5]. Tuy nhiên trong bài viết này, tác giả muốn giới thiệu với bạn đọc một mở rộng gộp của cả hai bài toán trên trong cùng một bài toán. Mở rộng này tác giả đã giới thiệu nó trong [2] dưới dạng một bài toán hàng tuần: đề bài được đăng ở Tuần 1 tháng 11 năm 2015 và lời giải được đăng ở ở Tuần 2 tháng 11 năm 2015. Tôi xin giới thiệu lại bài toán đó như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD. P là một điểm bất kỳ di chuyển trên đoạn thẳng AD. Các điểm K và L thuộc đường thẳng BC sao cho $AK \perp AC$ và $AL \perp AB$. Trên đoạn thẳng PC và PB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $KM = KA$ và $LN = LA$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác DMN luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P di chuyển. (Xem Hình 1).

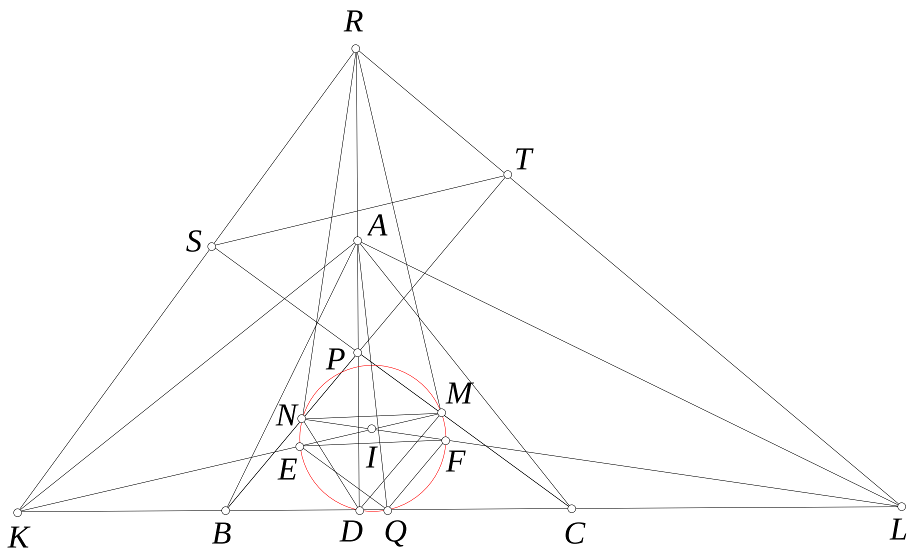


Hình 1: Hình minh họa cho Bài toán 3

Bài toán 3 là một tổng quát trực tiếp của Bài toán 2, khi tam giác ABC ở trong Bài toán 3 vuông tại A, ta thu được Bài toán 2. Mặt khác trong lời giải Bài toán 3 cũng chứa tổng quát của Bài toán 1.

2. Lời giải cho Bài toán 3

Ta chú ý, độ dài các đoạn thẳng trong lời giải này đều là độ dài đại số, tuy nhiên để trình bày cho gọn, tác giả đã ký hiệu độ dài đại số như độ dài thông thường khác với SGK ở Việt Nam.



Hình 2: Hình minh họa cho lời giải Bài toán 3

(Xem Hình 2). Gọi giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN và BC là Q (khác D). Ta sẽ chứng minh Q là điểm cố định. Khi đó tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác DMN sẽ thuộc trung trực của đoạn thẳng DQ cố định, đó chính là đường thẳng cố định cần tìm. Thật vậy, ta chú ý rằng các tam giác ABL và ACK vuông tại A và có đường cao AD. Do đó ta có thể lấy điểm R sao cho

$$DP \cdot DR = DA^2 = DB \cdot DL = DC \cdot DK.$$

Từ đẳng thức trên, ta dễ thấy P chính là trực tâm của hai tam giác RBL và RCK. Vậy PC, PB lần lượt vuông góc với RK, RL tại S, T. Chú ý tứ giác $RSDC$ nội tiếp đường tròn đường kính RC nên

$$KM^2 = KA^2 = KD \cdot KC = KS \cdot KR$$

suy ra $\angle KMR = 90^\circ$. Chứng minh tương tự thì $\angle LNR = 90^\circ$. Kết hợp cả hai điểu trên cho ta

$$RM^2 = RS \cdot RK = RP \cdot RD = RT \cdot RL = RN^2.$$

Nếu KM cắt LN tại I, từ đẳng thức trên ($RM = RN$), ta suy ra hai tam giác vuông RIM và RIN bằng nhau (ch-cgv), dẫn tới $IM = IN$.

Chú ý rằng, kết luận trên chính là tổng quát của Bài toán 1.

Gọi giao điểm thứ hai của IM, IN với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN lần lượt là E, F (E khác M và F khác N), khi đó dễ thấy $EM = FN$. Lại có các hệ thức lượng

$$KM^2 = KA^2 = KD \cdot KC.$$

suy ra

$$\angle MCK = \angle KMD = \angle EQD$$

hay $EQ \parallel PC$. Chứng minh tương tự thì $FQ \parallel PB$. Kết hợp định lý Thales, ta có biến đổi tỷ số độ dài như sau

$$\begin{aligned}\frac{QK}{QL} = \frac{QK}{QC} \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{QB}{QL} = \frac{KE}{EM} \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{FN}{FL} = \frac{EK}{FL} \cdot \frac{QC}{QB} = \\ = \frac{KE \cdot KM}{KA} \cdot \frac{LA}{LF \cdot LN} \cdot \frac{QC}{QB} = \frac{LA}{KA} \cdot \frac{KD \cdot KQ}{LD \cdot LQ} \cdot \frac{QC}{QB}.\end{aligned}$$

Từ trên ta thu được $\frac{QB}{QC} = \frac{KD \cdot LA}{KA \cdot LD}$ hay

$$\frac{QB^2}{QC^2} = \frac{KD^2}{KA^2} \cdot \frac{LA^2}{LD^2} = \frac{KD}{KC} \cdot \frac{LB}{LD}. \tag{1}$$

Lại để ý rằng hai đường thẳng AK và AL đẳng giác trong góc $\angle BAC$ nên theo định lý Steiner, ta có

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{KB \cdot LB}{KC \cdot LC}. \tag{2}$$

Mặt khác $DB \cdot DL = DP \cdot DR = DC \cdot DK$ hay

$$\frac{DK}{DL} = \frac{DB}{DC} = \frac{DK - DB}{DC - DL} = \frac{BK}{LC}. \tag{3}$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra

$$\frac{QB^2}{QC^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

hay $\frac{QB}{QC} = \frac{AB}{AC}$. Vậy AQ là phân giác góc $\angle BAC$.

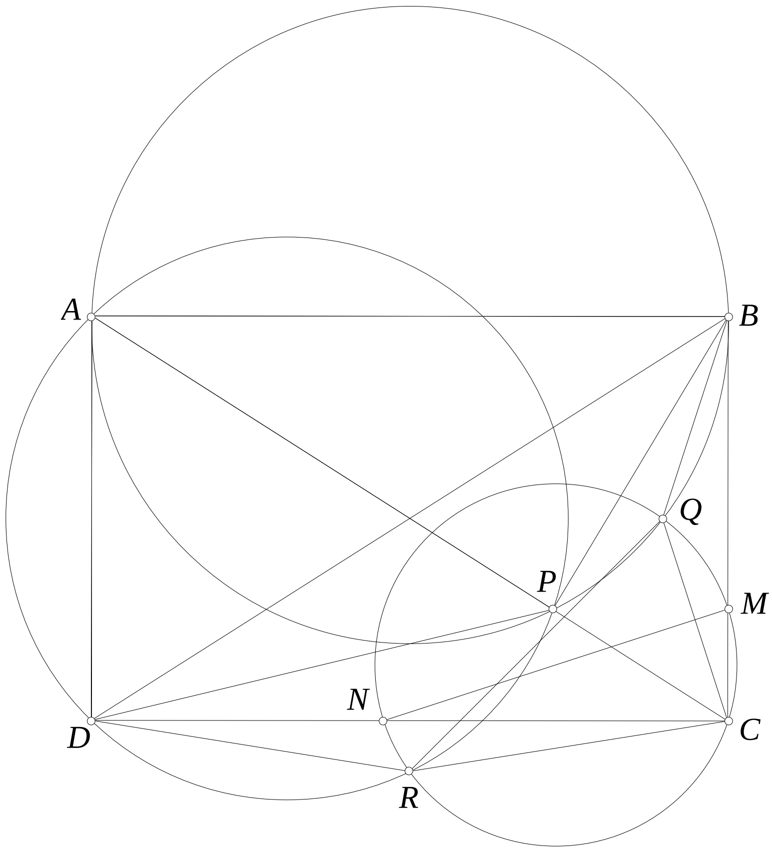
Chú ý rằng, kết luận AQ là phân giác $\angle BAC$ cũng chính là tổng quát của Bài toán 2.

Đến đây ta hoàn thành lời giải. □

3. Kết luận

Bài toán chọn đội tuyển Mĩ có thể coi là phát triển hay cho bài toán IMO năm 2012. Bài toán IMO năm 2012 ở trên đứng ở vị trí số 5 trong hai ngày thi thì cũng có thể coi là bài toán khó trong kỳ thi năm đó. Tác giả đã chọn viết về hai bài toán này vì đối với bản thân tác giả năm 2012 là một dấu mốc quan trọng. Đó là thời điểm lần đầu tiên tác giả tham gia tập huấn cho đội tuyển Việt Nam tham dự kỳ thi IMO. Năm thi đó, sau khi hai ngày thi kết thúc, tác giả đã rất quan tâm tới bài toán số 5 này. Ngay trong topic [3], tác giả đã gửi lên những phát triển đầu tiên của mình. Thời điểm sau đó, tác giả cùng với bạn Ong Thế Phương (THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai) đã cộng tác trong một bài viết (xem [5]), bài viết đó đưa ra và giải thêm một số phát triển quan trọng của bài toán IMO. Sau này trong vòng 10 năm, tính tới thời điểm tác giả viết bài viết này là năm 2022, thế giới toán sơ cấp (nhất là trong môn hình học sơ cấp) đã có nhiều thay đổi lớn. Bên cạnh chất lượng của nhiều bài toán trong các kỳ thi tăng lên và về độ khó và quy mô, thì cũng có khá nhiều "rác thải" và những bài viết kém chất lượng được "ra mắt" trôi nổi bồng bềnh trên mạng và facebook, chúng góp phần làm hỏng mất vẻ đẹp thú vị của hình học sơ cấp. Tuy vậy, nếu bỏ qua những tiêu cực thì trong vòng 10 năm trở lại đây, những bài toán hình học mới ở các kỳ thi uy tín ngày càng hay và có thêm nhiều ý nghĩa. Nhưng những vấn đề từ 10 năm trước như bài toán IMO năm 2012 và bài toán chọn đội tuyển Mĩ năm 2013 thì vẫn được coi là những vấn đề đẹp, kinh điển và không thể bị thay thế theo thời gian. Cuối cùng, để kết thúc bài viết, tác giả xin giới thiệu với bạn đọc một bài toán tác giả phát triển từ Bài toán 2. Bài toán này tác giả đã dùng trong đợt tập huấn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO từ năm 2016. Gần đây tác giả cũng dùng nó trong đợt giao lưu với các bạn học sinh ở trường Đông tổ thức tại Đại học Vinh, Nghệ An. Tác giả rất vui vì bài toán đã được hưởng ứng nhiệt tình. Chú ý rằng bài toán này cũng được đưa lên ở [6]. Bài toán này có phát biểu đẹp, thú vị và khá thách thức nên nó cũng lôi cuốn nhiều người muốn "sử dụng" nó ở nhiều nơi khác nhau.

Bài toán 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và P là một điểm nằm trên đường chéo AC. Lấy Q thuộc cung nhỏ PB của đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB sao cho $QB = QC$. Lấy R thuộc cung nhỏ PD của đường tròn ngoại tiếp tam giác PAD sao cho $RC = RD$. Hai cạnh CB, CD cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác CQR theo thứ tự tại hai điểm M, N. Chứng minh rằng $BM = DN$.



Hình 3: Hình minh họa cho Bài toán 4

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, Nguyễn Tiến Dũng, Đào Thị Hoa Mai, Nguyễn Đăng Quả, Đỗ Xuân Long, Tuyển chọn các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán 9 hình học, NXBĐHQG năm 2021.

[2] Trần Quang Hùng, Mỗi tuần một bài toán hình học, NXBĐHQG năm 2017.

[3] mathmdmb (nickname), Topic: Problem 5 từ diễn đàn AoPS, https://artofproblemsolving.com/community/c6h488511p2737425.

[4] v_Enhance (nickname), Topic: USA December TST for IMO 2013, Problem 3 từ diễn đàn AoPS, https://artofproblemsolving.com/community/c6h546344p3161942.

[5] Trần Quang Hùng, Ong Thế Phương, Mở rộng bài toán hình học IMO 2012, blog Hình học sơ cấp, 2013.

[6] parmenides51 (nickname), Topic: BM = DN wanted , ABCD rectangle, QB = QC, RC = RD, 2 circles từ diễn đàn AoPS, https://artofproblemsolving.com/community/c6h546344p3161942.

Một Số Dạng Toán Sử Dụng Tính Chất Của Phần Nguyên Và Phần Lẻ

Đào Xuân Luyện
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn - Bình Định

Xấp xỉ một số thực gần với một số nguyên mà số nguyên đó không lớn hơn số thực ban đầu là bài toán thường gặp trong cuộc sống, như tính chẵn số năm trong bài toán lãi suất hay số năm trong sự khảo sát tỉ lệ tăng dân số của một địa phương, một quốc gia hay thế giới. Trong các bài toán để phát triển tính đam mê toán học và kích thích sự sáng tạo cho học sinh thì bài toán liên quan đến phần nguyên và phần lẻ của một số thực cũng góp phần quan trọng cho vấn đề này. Các bài toán thi Olympic các cấp cũng được tạo ra để phát huy năng lực sáng tạo của học sinh.

1. Nội dung

Trước tiên chúng ta nhắc lại khái niệm phần nguyên và một số tính chất có sử dụng trong bài viết để người dọc tiện theo dõi.

1.1. Định nghĩa

Với mọi số thực x ta gọi phần nguyên của x là số nguyên, ký hiệu $[x]$ thỏa mãn

1. $[x] \leqslant x$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x \Rightarrow n \leqslant [x]$.

Hay nói cách khác: Phần nguyên của x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.
Ta gọi $\{x\} = x - [x]$ là phần lẻ của x.

Nhận xét.

- Với mọi ta có: $x = [x] + \{x\}$. Trong đó $[x] \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant \{x\} < 1$.
- Phần nguyên và phần lẻ của một số thực x được xác định và duy nhất.
- Số x nguyên khi và chỉ khi $[x] = x \Leftrightarrow \{x\} = 0$
  Ví dụ:
  - $x = 2,53 \Rightarrow [x] = 2, \{x\} = 0,53$
  - $x = -3,65 \Rightarrow [x] = -4, \{x\} = 0,35$

1.2. Tính chất

Sử dụng định nghĩa của phần nguyên, ta dễ dàng chứng minh được các tính chất sau:

- Với mọi không nguyên thì $[-x] = -[x] - 1$
- Với mọi ta có
  - Nếu $x < y$ thì $[x] < [y]$.
  - Nếu thì $[m + x] = m + [x]$
  - $[x] + [y] \leqslant [x + y]$
  - Nếu m là số nguyên dương thì $\left[\dfrac{[x]}{m}\right] = \left[\dfrac{x}{m}\right]$

  Tiếp theo sử dụng tính chất của phần nguyên và phần lẻ, ta đi xét các dạng toán sau.

1.3. Tìm phần nguyên của một số

Chúng ta bắt đầu từ bài toán tìm phần nguyên của một số theo định nghĩa

Bài toán 1. *Tìm phần nguyên của số sau*

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$ *,với n là số nguyên dương cho trước.*

Lời giải. Dễ dàng biến đổi được $0 \leqslant A = 1 - \dfrac{1}{n} < 1$. Từ đó có $[A] = 0$. □

Nhận xét. 1 bài toán đơn giản học sinh trung học cơ sở có thể dễ dàng giải được chỉ cần hiểu được khái niệm phần nguyên của một số. Tuy nhiên khai thác kết quả ta có thể dễ dàng tìm phần nguyên của các số sau.

Bài toán 1.1 Tìm phần nguyên của số sau

$$B = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2021^2}$$

Với học sinh Trung học phổ thông ta có thể mở rộng một lớp các bài toán sau:

Bài toán 1.2: Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có các số hạng đều dương và có công sai dương, tìm phần nguyên của các tổng sau:

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k.u_{k+1}}$
2. $P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k.u_{k+1}.u_{k+2}}$

Tương tự ta có thể tạo ra được nhiều bài toán khác.

Bài toán 2. *Tìm phần nguyên của số*

$$B_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2}} \text{ Với } n \text{ là số nguyên dương, } n \geqslant 2.$$

Lời giải. Với k là số nguyên dương, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right).$$

Và

$$\frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right).$$

Do đó

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \text{ với mọi k nguyên dương.}$$

Suy ra

$$1+2\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2}\right) < B_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1+2\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2}\right)$$

Mà

$$\begin{cases} 1+2\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2}\right) > 1+2\sqrt{n^2+1}-\sqrt{8} > 1+2n-3 = 2n-2 \\ 1+2\left(\sqrt{n^2}-1\right) = 2n-1. \end{cases}$$

Do đó

$$[B_n] = 2n-2 \text{ với mọi n nguyên dương } n \geqslant 2$$

□

Sử dụng kết quả trên ta có thể sáng tác bài toán

Bài toán 3. *Tìm phần nguyên của số*

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{216}}$$

Lời giải. Mỗi số hạng của A đều có dạng $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ với n nguyên dương, do đó ta đi tìm các bất đẳng thức kiểu sai phân để ước lượng $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.
Ta chứng minh

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right) \quad (1)$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(n+1)^2 n} - 3n < 2 < 3n - 3\sqrt[3]{n(n-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n+2 > 3\sqrt[3]{(n+1)^2} & (2) \\ 3n-2 > 3\sqrt[3]{n(n-1)^2}. & (3) \end{cases}$$

- Bất đẳng thức (2) dễ dàng suy ra từ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm $n, n+1, n+1$.
- Bất đẳng thức (3) dễ dàng suy ra từ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số $n, n-1, n-1$

Áp dụng bất đẳng thức 1 lần lượt với $n = 4, 5, \ldots, 6^3$ rồi cộng vế theo vế ta được

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(6^3+1)^2}-\sqrt[3]{4^2}\right)<A<\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(6^3)^2}-\sqrt[3]{3^2}\right)$$

Suy ra

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{6^3}-\sqrt[3]{2^4}\right)<A<\frac{3}{2}\left(6^2-\sqrt[3]{8}\right)$$

Hay $50<A<51$. Dẫn đến $[A]=50$.

□

Bài toán 4. *Với mỗi số nguyên dương a xét dãy số (u_n)*

$$\begin{cases} u_1=\sqrt{a} \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+a}, n\geqslant 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n<\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ (1) với mọi n nguyên dương.

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức (1) bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n=1$,rõ ràng $u_1=\sqrt{a}=\dfrac{\sqrt{4a}}{2}<\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$, do đó (1) đúng với $n=1$.
- Giả sử (1) đúng với $n=k, k\geqslant 1$ nghĩa là $u_k<\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$. Khi đó

$$u_{k+1}=\sqrt{u_k+a}<\sqrt{a+\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}}=\sqrt{\frac{4a+2+2\sqrt{4a+1}}{4}}=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}.$$

  Do đó, (1) đúng với $n=k+1$.

  Theo nguyên lý quy nạp toán học (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

□

Từ kết quả trên, chúng ta có thể tìm được phần nguyên của một số số có dạng $\sqrt{a+\sqrt{a+...+\sqrt{a}}}$ có n dấu căn.

1.4. Một số dạng toán phương trình liên quan đến hàm nguyên - hàm lẻ

Trên các tài liệu đã xuất bản có nhiều dạng phương trình, hệ phương trình liên quan đến phần nguyên và phần lẻ, trong mục này tác giả chỉ đưa vào một số dạng toán mà tác giả sáng tác mà tác giả ít thấy trên các tài liệu.

Bài toán 5 (Bài T7/517 Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ-Bài của tác giả đề nghị). *Tìm tất cả các số thực x sao cho* $\left\{\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x+1}\right\} = \dfrac{1}{2}$ *,trong đó* $\{a\}$ *là ký hiệu phần lẻ của số thực a.*

Lời giải. $y = \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x+1}$. (1)

Vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ với mọi số thực x nên biểu thức y xác định với mọi số thực x .

Xem (1) là phương trình ẩn x và y là tham số, ta tìm y để phương trình có nghiệm.

Ta có phương trình (1) tương đương với phương trình $(y-2)x^2 - (y-5)x + y - 2 = 0$. (2)

- Nếu $y = 2$ thì phương trình (2) có nghiệm $x = 0$.
- Nếu $y \neq 2$ thì phương trình (2) là phương trình bậc hai . Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi biệt thức $\Delta = (-y-1)(3y-9) \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant y \leqslant 3$.

Kết hợp cả hai trường hợp thì phương trình (2) hay phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leqslant y \leqslant 3$.

Do $-1 \leqslant y \leqslant 3$ nên $[y]$ (số nguyên lớn nhất không vượt quá y) thuộc tập $\{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vì $\{\mathrm{y}\} = \mathrm{y} - [\mathrm{y}]$ nên lần lượt thay $[y] = -1, 0, 1, 2, 3$ vào và giải các phương trình tương ứng, ta được tập các giá trị x cần tìm là

$$S = \left\{\frac{11 \pm \sqrt{21}}{10}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}; \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}.$$

□

Nhận xét. Phương pháp giải ở đây kết hợp giữa tính chất của phần nguyên và miền giá trị của hàm số. Các bạn có thể theo dõi cách giải khác trên tạp chí nói trên với số Tháng 11 năm 2020.

Bài toán 6. *Giải phương trình* $\left\{\dfrac{1-\sin x}{\sin x + \cos x + 2}\right\} = \dfrac{1}{2}$. (1)

Lời giải. Đặt $A = \left[\dfrac{1-\sin x}{\sin x + \cos x + 2}\right]$.
Từ định nghĩa phần nguyên ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-\sin x}{\sin x+\cos x+2} - \left\{\frac{1-\sin x}{\sin x+\cos x+2}\right\} \\ &= \frac{1-\sin x}{\sin x+\cos x+2} - \frac{1}{2} = \frac{-3\sin x-\cos x}{2(\sin x+\cos x+2)} \end{aligned}$$

Khi đó, ta có $(2A+3)\sin x + (2A+1)\cos x = -4A.$ (2)
Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & (2A+3)^2 + (2A+1)^2 \geqslant (-4A)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4A^2 - 8A - 5 \leqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{2} \leqslant A \leqslant \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Vì A nguyên nên $A \in \{0; 1; 2\}$.

- Với $A = 0$, thay vào (2) có $3\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \arctan\left(\dfrac{-1}{3}\right) + k\pi$.
- Với $A = 1$, thay vào (2) có $5\sin x + 3\cos x = -4$.
  Phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \alpha - \beta + k2\pi \\ x = \pi + \alpha - \beta + k2\pi \end{array}\right.$ với $\alpha = -\arcsin\dfrac{4}{\sqrt{34}}; \beta = \arccos\dfrac{5}{\sqrt{34}}$.
- Với $A = 2$ ta có phương trình $7\sin x + 5\cos x = -8$.
  Phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \varphi - \psi + k2\pi \\ x = \pi - \varphi - \psi + k2\pi \end{array}\right.$ với $\varphi = \arcsin\dfrac{8}{\sqrt{74}}; \psi = \arccos\dfrac{7}{\sqrt{74}}$

□

Tương tự ta có thể sáng tác bài toán sau:
Bài toán 2.1: Tìm tất cả các số thực x sao cho $\left\{\dfrac{|2x-1|}{\sqrt{x^2-x+1}}\right\} = \dfrac{1}{2}$,trong đó {a} là ký hiệu phần lẻ của số thực a.
Bài toán 2.2: Tìm tất cả các số thực x sao cho $\left\{\dfrac{5x^2-4x+2}{x^2+1}\right\} = \dfrac{1}{3}$,trong đó {a} là ký hiệu phần lẻ của số thực a.

Bài toán 7 (Tạp chí Pi). *Cho hai đa thức* $P(x) = x^3 - 4x^2 + 39x - 46$ *và* $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 3$.

1. *Chứng minh rằng cả hai đa thức đều có duy nhất nghiệm thực.*

2. *Ký hiệu α, β tương ứng là nghiệm thực của $P(x)$ và $Q(x)$. Chứng minh rằng $\{\alpha\} > \{\beta\}^2$.*

Lời giải. Sử dụng tính liên tục và tính đơn điệu của hai đa thức suy ra $P(x)$ có nghiệm thực duy nhất α thuộc khoảng (1;2) và $Q(x)$ có nghiệm thực duy nhất β thuộc khoảng (0; 1). Do đó $\{\alpha\} = \alpha - 1$; $\{\beta\} = \beta$.
Vì thế, ta cần chứng minh $\alpha - 1 > \beta^2 \Leftrightarrow \alpha > \beta^2 + 1$.
Vì β là nghiệm của $Q(x)$ nên $0 = Q(\beta) = \beta^3 + 3\beta^2 + 4\beta - 3.$ (1)
Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \beta^3 + 4\beta = 3(1-\beta^2) \Leftrightarrow \left(\beta^3 + 4\beta\right)^2 = 9\left(1-\beta^2\right)^2 (0 < \beta < 1) \Leftrightarrow$$
$$\beta^6 - \beta^4 + 34\beta^2 - 9 = 0. \quad (2)$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} P(\beta^2+1) &= (\beta^2+1)^3 - 4(\beta^2+1)^2 + 39(\beta^2+1) - 46 \\ &= \beta^6 - \beta^4 + 34\beta^2 - 10 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Do đó $P(\beta^2+1).P(2) = (-1).24 < 0$.
Từ đó do $P(x)$ là hàm liên tục trên và α là nghiệm duy nhất của $P(x)$ nên $\alpha \in \left(\beta^2+1; 2\right)$.
Vì vậy $\alpha > \beta^2 + 1$ (đpcm). □

Bình luận: Trong cách xử lý ở trên ta thấy có các ý rất hay:

- Chuyển bất đẳng thức từ phần lẻ $\{\alpha\}, \{\beta\}$ về bất đẳng thức với các số thực bình thường bằng cách ước lượng nghiệm α, β nhờ sử dụng tính liên tục và đạo hàm.

- Để chứng tỏ $\alpha > \beta^2 + 1$ lại sử dụng tính liên tục và duy nhất nghiệm của $P(x)$ để suy ra α thuộc khoảng $\left(\beta^2+1; 2\right)$.

1.5. Phần nguyên, phần lẻ trong các bài toán dãy số

Bài toán 8 (Chọn đội tuyển KHTN 2011). *Chọn k là số thực dương thỏa mãn $\left[k.n^2\right]$ là số chính phương với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng k là số chính phương.*

Lời giải. Ta có nhận xét sau:

Nhận xét. Dãy số nguyên có giới hạn là a thì từ một chỉ số nào đó mọi số hạng của dãy số đều bằng a.

Đặt $x_n = \sqrt{[kn^2]}$ và $u_{n+1} = x_{n+1} - x_n$.
Khi đó

$$\lim u_{n+1} = \lim\left(\sqrt{[k(n+1)^2]} - \sqrt{[kn^2]}\right) = \lim \frac{\left[k(n+1)^2\right] - \left[kn^2\right]}{\sqrt{[k(n+1)]^2} + \sqrt{[kn^2]}}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[x]}{n} = 1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k(n+1)^2 - kn^2}{\sqrt{k(n+1)^2} + \sqrt{kn^2}} = \sqrt{k}$.
Do x_n, u_n là dãy các số nguyên và (u_n) có giới hạn là $\sqrt{k}$ nên kể từ một lúc nào đó trở đi tất cả các số hạng của dãy đó là $\sqrt{k}$, vì thế $\sqrt{k}$ là số nguyên hay k là số chính phương. □

Bài toán 9. *Cho ba cạnh của tam giác theo thứ tự là các số nguyên l, m, n thỏa $l > m > n$ và $\left\{\dfrac{3^l}{10^4}\right\} = \left\{\dfrac{3^m}{10^4}\right\} = \left\{\dfrac{3^n}{10^4}\right\}$, trong đó $\{x\}$ là phần lẻ của x . Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác đó.*

Lời giải. Từ $\dfrac{3^l}{10^4} - \left[\dfrac{3^l}{10^4}\right] = \dfrac{3^m}{10^4} - \left[\dfrac{3^m}{10^4}\right] = \dfrac{3^n}{10^4} - \left[\dfrac{3^n}{10^4}\right]$

Ta có $3^l \equiv 3^m \equiv 3^n (\text{mod} 10^4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^l \equiv 3^m \equiv 3^n (\text{mod} 2^4) & (1) \\ 3^l \equiv 3^m \equiv 3^n (\text{mod} 5^4) & (2) \end{cases}$ Từ $(2, 3) = 1$ nên từ (1) có $3^{l-n} \equiv 3^{m-n} \equiv 1(\text{mod} 2^4)$.
Gọi u là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $3^u \equiv 1(\text{mod} 2^4)$ thì mọi số nguyên dương v mà $3^v \equiv 1(\text{mod} 2^4)$ thì $u \,|v$
Chú ý rằng $3 \equiv 3(\text{mod} 2^4); 3^2 \equiv 9(\text{mod} 2^4); 3^3 \equiv 27(\text{mod} 2^4); 3^4 \equiv 1(\text{mod} 2^4)$.
Nên ta có $u = 4$. Giả sử rằng $m - n = 4k$ với k là một số nguyên dương.
Tương tự từ (2) ta có $3^{m-n} \equiv 1(\text{mod} 5^4) \Rightarrow 3^{4k} \equiv 1(\text{mod} 5^4)$.
Bây giờ ta sẽ tìm k sao cho $3^{4k} - 1 = (1 + 5.2^4) - 1 \equiv 0(\text{mod} 5^4)$
Có nghĩa là

$$\begin{aligned} 5k.2^4 + \frac{k(k-1)}{2}.5^2.2^8 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}.5^3.2^{12} &\equiv 5k + 5^2k\left[3 + (k-1).2^7\right] + \frac{k(k-1)(k-2)}{3}.5^3.2 \\ &\equiv 0(\text{mod} 5^4) \end{aligned}$$

Vậy $k = 5t$ thế vào biểu thức trên ta có $t + 5t\left[3 + (5t-1).2^7\right] \equiv 0(\bmod 5^2)$.

Khi đó $\begin{cases} k = 5t = 5^3 s \\ m - n = 500s \end{cases}$ với $s \in \mathbb{N}^*$. Tương tự ta cũng có $l - n = 500r, r \in \mathbb{N}^*, r > s$.

Vậy ba cạnh yêu cầu là ba cạnh của một tam giác là $l = 500r + n, m = 500s + n, n$ tương ứng thỏa mãn là $n > l - m = 500(r - s)$.

Khi $s = 1, r = 2$ thì chu vi đạt giá trị nhỏ nhất bằng $(1000 + 501) + (500 + 501) + 501 = 3003$. □

Bài toán 10. *Kí hiệu a là phần lẻ của số thực a cho trước. Chứng minh rằng tồn tại vô số cặp số tự nhiên n và m sao cho*

$$0 < \left|\left\{n\sqrt{2}\right\} - \left\{m\sqrt{2}\right\}\right| < \frac{1}{2021}$$

Lời giải. Do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên với hai số tự nhiên $n \neq m$ thì $\left\{n\sqrt{2}\right\} \neq \left\{m\sqrt{2}\right\}$.

Ngược lại ta có $n\sqrt{2} - \left[n\sqrt{2}\right] = m\sqrt{2} - \left[m\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow \sqrt{2} = \dfrac{\left[n\sqrt{2}\right] - \left[m\sqrt{2}\right]}{n - m}$ là số hữu tỉ (vô lý).

Với n là số tự nhiên, tập hợp các giá trị $\left\{n\sqrt{2}\right\}$ là một tập hợp vô hạn trong khoảng $(0; 1)$ cho nên nếu chia khoảng này thành 2021 khoảng con, mỗi khoảng có độ dài $\dfrac{1}{2021}$ thì có 1 khoảng con chứa vô hạn giá trị có dạng $\left\{n\sqrt{2}\right\}$ ứng với cặp m, n nguyên dương mà $\left\{m\sqrt{2}\right\}$ và $\left\{n\sqrt{2}\right\}$ thuộc khoảng này thì $\left|\left\{n\sqrt{2}\right\} - \left\{m\sqrt{2}\right\}\right| < \dfrac{1}{2021}$.

Vậy có vô số cặp số nguyên dương m,n thỏa $0 < \left|\left\{n\sqrt{2}\right\} - \left\{m\sqrt{2}\right\}\right| < \dfrac{1}{2021}$. □

Nhận xét. Trong kết quả trên ta có thể thay số 2 bởi một số nguyên dương không chính phương bất kỳ.

Bài toán 11 (Toán học và tuổi trẻ T10/504). *Cho dãy số thực được xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2x_n}, n \geqslant 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $[9x_{81}] = 81$ *(ký hiệu* $[x]$ *là phần nguyên của số thực* x*).*

Lời giải. Vì $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2x_n}$ nên $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \dfrac{1}{4x_n^2} + 1$.

Đặt $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ta chứng minh $n \leqslant \sqrt{n}x_n < n + \dfrac{H_n}{6}, n \in \mathbb{Z}^+$. (1)
Trước hết ta chứng minh $\sqrt{n}x_n \geqslant n \Leftrightarrow x_n^2 \geqslant n$. (2)
Chứng minh (2) bằng quy nạp.

- Với $n = 1$ thì (2) đúng.
- Giả sử (2) đúng với n : $x_n^2 \geqslant n$. Khi đó $x_{n+1}^2 \geqslant n + 1 + \dfrac{1}{4x_n^2} > n + 1$. Vậy (2) đúng với $n + 1$.

Tiếp theo áp dụng (2) ta có

$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{4x_{n-1}^2} + 1 = \ldots =$$
$$x_1^2 + (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4x_k^2} \leqslant n + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} < n + \frac{1}{4}H_n < \left(\sqrt{n} + \frac{1}{6\sqrt{n}}H_n\right)^2$$

Suy ra $\sqrt{n}x_n \leqslant n + \dfrac{H_n}{6}$.
Vậy (1) được chứng minh.
Tiếp theo, dễ dàng chứng minh được $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x, \forall x > 0$.
Do đó $H_{81} = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{81} < 1 + \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln 81 - \ln 80 = 1 + \ln 81 < 6$. (3)
Từ (1) và (3) ta có $81 \leqslant \sqrt{81}x_{81} < 81 + \dfrac{H_{81}}{6} < 82$.
Vậy $[9x_{81}] = 81$. □

Bài toán 12. *Cho dãy số u_n xác định bởi $u_0 = 2$ và $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Tìm phần nguyên của $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{2021} u_n$.

Lời giải. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Suy ra $\dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = 1 + \dfrac{3}{u_n - 1}$
Ta có $u_0 \neq 1 \Rightarrow u_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
Đặt $a_n = \dfrac{1}{u_n - 1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra $a_0 = 1$ và $a_{n+1} = 3a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
Suy ra $a_n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Suy ra $u_n = 1 + \dfrac{2}{3^{n+1} - 1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Ta có $A = 2021 + \displaystyle\sum_{n=1}^{2021} \frac{1}{3^{n+1} - 1}$.

Suy ra $2021 < A < 2021 + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{2021}\frac{1}{3^n}$.

Vì $\sum_{n=1}^{2021}\frac{1}{3^n}$ nên dẫn đến $2021 < A < 2022$.

Vậy phần nguyên của A là 2021. □

Bài toán 13. *Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi* $\begin{cases} u_0 = 2020 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1+u_n}, \forall n \geqslant 0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $[u_n] = 2020 - n$ với $0 \leqslant n \leqslant 1011$.

Lời giải. Từ công thức xác định dãy số, ta suy ra $u_n > 0, \forall n$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2}{1+u_n} - u_n = -\dfrac{u_n}{1+u_n} < 0, \forall n \Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm.

Ta cũng có

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = 2020 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{u_k}{1+u_k} = 2020 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{1+u_k}\right) = 2020 - n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+u_k}.$$

Mặt khác vì (u_n) là dãy số giảm nên $\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{1+u_k} < \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{1+u_{n-1}} < \dfrac{n}{1+u_{n-1}}$.

Mà $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n}{1+u_n} > u_n - 1 > ... > u_0 - (n+1)$.

Suy ra $1 + u_{n-1} > 1 + 2020 - (n-1) = 2022 - n$.

Dẫn đến $\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{1+u_k} < \dfrac{n}{2022-n} < 1$ với mọi $0 \leqslant n \leqslant 1011$. Suy ra $u_n < 2021 - n$ với mọi $0 \leqslant n \leqslant 1011$.

Do đó $0 \leqslant n \leqslant 1011$ thì $[u_n] = 2020 - n$. □

Bài toán 14 (Olympic 30-4 Năm 2005). *Tính tổng* $S = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + ... + \left[\frac{2^{2005}}{3}\right]$ *trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.*

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau: Nếu $a > 0, b > 0$ với a, b không là số nguyên và $a + b$ là số nguyên thì $[a] + [b] = a + b - 1$.

Thật vậy, theo giả thiết ta có $\begin{cases} a = m - x \\ b = n - y \end{cases}$ với $\begin{cases} m, n \in \mathbb{Z} \\ x, y \in (0;1) \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} [a]+[b] &= [m-x]+[n-y] \\ &= m-1+n-1 \\ &= m-(x+y)+n-1 = a+b-1. \end{aligned}$$

Ta luôn có $\dfrac{2^n}{3}+\dfrac{2^{n+1}}{3} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$. Áp dụng bổ đề trên ta được

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{2^0}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+...+\left[\frac{2^{2004}}{3}\right]+\left[\frac{2^{2005}}{3}\right] \\ &= \left(\frac{2^0}{3}+\frac{2^1}{3}-1\right)+\left(\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{3}-1\right)+...+\left(\frac{2^{2004}}{3}+\frac{2^{2005}}{3}-1\right) \\ &= \frac{1+2+...+2^{2005}}{3}-1003 = \frac{2^{2006}-1}{3}-1003. \end{aligned}$$

□

Áp dụng bổ đề trên và sử dụng kỹ thuật tương tự ta có thể sáng tác và giải được các bài toán sau:

Bài toán 7.1 Tính tổng $S = \left[\dfrac{1}{4}\right]+\left[\dfrac{3}{4}\right]+\left[\dfrac{3^2}{4}\right]+...+\left[\dfrac{3^{2021}}{4}\right]$ trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Bài toán 7.2 Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\left[\frac{4^k}{5}\right]$.Tìm $\lim \dfrac{S_n}{4^n}$ trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Bài toán 7.3 Tìm số nguyên dương n sao cho $\left[\dfrac{1}{3}\right]+\left[\dfrac{2}{3}\right]+\left[\dfrac{2^2}{3}\right]+...+\left[\dfrac{2^{2n+1}}{3}\right] = 1370-n$ trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Bài toán 15. *Cho dãy số nguyên dương* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *được xác định* $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases}$ $; n \geqslant 0$. *Tính tổng sau:*

$$S_{2021} = \left[\frac{2^{a_0}}{11}\right]+\left[\frac{2^{a_1}}{11}\right]+\left[\frac{2^{a_2}}{11}\right]+...+\left[\frac{2^{a_{2021}}}{11}\right].$$

Lời giải. Ta sử dụng bổ đề sau: Nếu a, b là các số không nguyên và $a+b$ là một số nguyên thì $[a]+[b] = a+b-1$.

Vì $\dfrac{2^{a_k}}{11} + \dfrac{2^{a_{k+1}}}{11} = \dfrac{2^{a_k}(1+2^5)}{11} = 3.2^{a_k}$ là số nguyên nên áp dụng bổ đề ta có:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{2^{a_0}}{11}\right] + \left[\frac{2^{a_1}}{11}\right] + \left[\frac{2^{a_2}}{11}\right] + \left[\frac{2^{a_3}}{11}\right] + \dots + \left[\frac{2^{a_{2020}}}{11}\right] + \left[\frac{2^{a_{2021}}}{11}\right] \\
= &\left(\frac{2^{a_0}}{11} + \frac{2^{a_1}}{11} - 1\right) + \left(\frac{2^{a_2}}{11} + \frac{2^{a_3}}{11} - 1\right) + \dots + \left(\frac{2^{a_{2020}}}{11} + \frac{2^{a_{2021}}}{11} - 1\right) \\
= &\frac{1}{11}\left(2^{a_0} + 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_{2020}} + 2^{a_{2021}}\right) - 1011
\end{aligned}$$

Do dãy (a_n) là 1 cấp số cộng có công sai d=5 nên dãy (2^{a_n}) là một cấp số nhân có số hạng đầu $(2^{a_0}) = 2$ và công bội $q = 2^5$ do đó

$$D_{2021} = \sum_{i=0}^{2021} 2^{a_i} = 2^{a_0}.\frac{(2^5)^{2022} - 1}{2^5 - 1} = \frac{2}{31}\left(2^{10110} - 1\right).$$

Do đó $S_{2021} = \dfrac{2}{341}\left(2^{10110} - 1\right) - 1011.$ □

Nhận xét. Xuất phát từ một bài toán thi Olympic 30-4 nghiên cứu khi tham khảo bài giải, tác giả đã có thể tổng quát hóa một lớp các bài toán trên và mở rộng. Các bài toán trên là một phần của các mở rộng đó.

Bài toán 16 (IMO 1968). *Tính tổng* $\left[\dfrac{n+1}{2}\right] + \left[\dfrac{n+2}{2^2}\right] + \left[\dfrac{n+2^2}{2^3}\right] + \dots + \left[\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \dots$.

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau: Với a là số thực, chứng minh rằng

$$\left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a] - [a].$$

Đặt $a = n + r$ với n nguyên và $0 \leqslant r < 1$ thì $[a] = n$.
Nếu $r < \dfrac{1}{2}$ thì $a + \dfrac{1}{2} = n + r + \dfrac{1}{2}, 2a = 2n + 2r$.
Do $0 \leqslant 2r < 1, 0 < r + \dfrac{1}{2} < 1$ nên $[2a] = 2n$, $\left[a + \dfrac{1}{2}\right] = n$ nên ta có $\left[a + \dfrac{1}{2}\right] = [2a] - [a]$.
Nếu $\dfrac{1}{2} \leqslant r < 1$ thì $a + \dfrac{1}{2} = n + r + \dfrac{1}{2} = n + 1 + r - \dfrac{1}{2}, 2a = 2n + 2r = 2n + 1 + 2r - 1$.
Do $0 \leqslant r - \dfrac{1}{2} < 1, 0 \leqslant 2r - 1 < 1$ nên $\left[a + \dfrac{1}{2}\right] = n + 1, [2a] = 2n + 1$ nên ta cũng có $\left[a + \dfrac{1}{2}\right] = [2a] - [a]$.
Quay trở lại bài toán, ta nhận xét rằng tổng trên thực ra là tổng hữu hạn vì với k nguyên dương đủ lớn, chẳng hạn $k > \log_2 n$ thì có $0 < \dfrac{n+2^k}{2^{k+1}} < 1$ nên các số hạng kể từ $k_0(k_0 > [\log_2 n] + 1)$ nào đó đều bằng không.
Áp dụng bổ đề ta có

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]$$

Lần lượt cho $k=0,1,2,...,k_0,...$ và cộng vế theo vế ta có

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+...+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+...=[n]-\left[\frac{n+2^{k_0+1}}{2^{k_0+2}}\right]=n.$$

□

1.6. Các bài toán liên quan đến phần nguyên và phần lẻ

Bài toán 17. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0=1, x_1=5, x_{n+1}=6x_n-x_{n-1}, \forall n\geqslant 1$. Tìm $\lim x_n\left\{\sqrt{2}x_n\right\}$, trong đó kí hiệu $\{a\}=a-[a]$ là phần lẻ của a.*

Lời giải. Phương trình đặc trưng của dãy (x_n) là $x^2-6x+1=0\Leftrightarrow x=3\pm 2\sqrt{2}$.
Ta có $x_n=A\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+B\left(3-2\sqrt{2}\right)^n$.
Với $x_0=1, x_1=5$ ta tìm được $A=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}, B=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$.
Từ đó ta có $x_n=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{2\sqrt{2}}$. Suy ra

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}x_n-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n-1} &= \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\left(\sqrt{2}\right)^{2n+1-k}\mathrm{C}_{2n+1}^{k}-\sum_{k=0}^{2n+1}\left(\sqrt{2}\right)^{2n+1-k}(-1)^k\,\mathrm{C}_{2n+1}^{k}\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n}2^{n-i}\mathrm{C}_{2n+1}^{2i+1}\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Lại có $0<\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}<1$. Suy ra $\left\{\sqrt{2}x_n\right\}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}, n\in\mathbb{N}$.

Suy ra $x_n\left\{\sqrt{2}x_n\right\}=\dfrac{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n+2}}{2\sqrt{2}}$.

Từ đó ta có $\lim x_n\left\{\sqrt{2}x_n\right\}=\lim\dfrac{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n+2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. □

Bài toán 18. *Cho k là số nguyên dương, đặt $a_n=\left[\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right], \forall n\in\mathbb{N}$.*

Xét dãy (s_n) thỏa mãn $s_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_{i-1}a_{i+1}}, \forall n\geqslant 1$. Chứng minh rằng dãy (s_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Xét dãy (b_n) xác định bởi $b_0 = 2; b_1 = 2k$ và $b_{n+1} = 2kb_n + b_{n-1}, \forall n \geqslant 1$.
Khi đó $b_n = \left(k + \sqrt{k^2+1}\right)^n + \left(k - \sqrt{k^2+1}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Vì $b_n < \left(k + \sqrt{k^2+1}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n < b_n + 1$ và $b_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ nên ta có

$$a_n = \left[\left(k + \sqrt{k^2+1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = b_n, n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, với mọi $n \geqslant 1$ ta có

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i-1}a_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_{i-1}b_{i+1}} = \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i+1}-b_{i-1}}{b_{i-1}b_{i+1}} = \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b_{i-1}b_i} - \frac{1}{b_ib_{i+1}}\right) = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{b_0b_1} - b\right.$$

Từ đó suy ra $\lim s_n = \frac{1}{8k^2}$. □

Bài toán 19 (Đề thi HSG tỉnh Bình Định). *Cho $a \geqslant 1$ và dãy số (x_n) xác định bởi hệ thức truy hồi $x_1 = a; x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2\{x_n\}^2}{[x_n]^2}, \forall n \geqslant 1$, trong đó $[x]$ là phần nguyên của x và $\{x\}$ là phần thập phân của x. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. **Trường hợp 1:** a là số nguyên.
Khi đó $[a] = a$ và $\{a\} = 0$. Do đó ta có

$$x_1 = a; x_2 = \frac{x_1 - 2\{x_1\}^2}{[x_1]^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Vậy $x_n = 1, \forall n \geqslant 2$. Do đó $\lim x_n = 1$.
Trường hợp 2: a là số không nguyên. Khi đó ta có

$$x_2 = \frac{a^2 - 2\{a\}}{[a]^2} = \frac{([a]+\{a\})^2 - 2\{a\}^2}{[a]^2} = \frac{2[a]^2 - \left([a]^2 - 2[a].\{a\} + \{a\}^2\right)}{[a]^2} = 2 - \left(1 - \frac{\{a\}}{[a]}\right)^2.$$

Vì $a > 1$ nên $0 < \frac{\{a\}}{[a]} < 1$. Do đó $x_2 \in (1;2)$.
Chứng minh quy nạp ta được $x_n \in (1;2), \forall n = 1,2,3....$
Do đó $\{x_n\} = x_n - [x_n] = 1, \forall n = 1,2....$ Suy ra $x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2(x_n-1)^2}{1} = -x_n^2 + 4x_n - 2$, $\forall n = 1,2,....$
Khi đó ta có $2 - x_{n+1} = (2-x_n)^2 = ... = (2-x_2)^{2^{n-1}}$.
Suy ra $\lim(2 - x_{n+1}) = \lim(2-x_2)^{2^{n-1}} = 0$.
Vậy $\lim x_n = 2$.

Bài toán 4: Cho $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ là đa thức bậc 4 với hệ số nguyên và hệ số cao nhất bằng 1. Biết rằng a không chia hết cho 4. Tìm $\lim \left\{ \sqrt[4]{|f(n)|} \right\}$ khi $n \to +\infty$.

Lời giải:

Ta có $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ với a không chia hết cho 4.

Đặt $a = 4k + r$ với $r \in \{1; 2; 3\}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(n) &= n^4 + an^3 + bn^2 + cn + d = (n+k)^4 + (a-4k)n^3 + \left(b - 6k^2\right)n^2 + \left(c - 4k^3\right)n + d - k^4 \\ &= (n+k)^4 + rn^3 + \left(b - 6k^2\right)n^2 + \left(c - 4k^3\right)n + d - k^4. \end{aligned}$$

Với n đủ lớn thì $rn^3 + \left(b - 6k^2\right)n^2 + \left(c - 4k^3\right)n + d - k^4 > 0$.

Suy ra $f(n) > (n+k)^4$.

Với n đủ lớn thì $|f(n)| = f(n)$.

Lại có $f(n) = n^4 + an^3 + bn^2 + cn + d = (n+k+1)^4 + [a - 4(k+1)]n^3 + ... = (n+k+1)^3 + (r-4)n^3 + ...$

Với n đủ lớn thì $(r-4)n^3 + ... < 0 \Rightarrow f(n) < (n+k+1)^4$

Do đó với n đủ lớn thì

$$\begin{aligned} (n+k)^4 < f(n) < (n+k+1)^4 \quad &\Rightarrow \left[\sqrt[4]{f(n)}\right] = n + k \\ &\Rightarrow \lim \left\{ \sqrt[4]{|f(n)|} \right\} = \lim \left\{ \sqrt[4]{f(n)} \right\}. \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} \lim \left\{ \sqrt[4]{|f(n)|} \right\} &= \lim \left\{ \sqrt[4]{f(n)} \right\} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left[\sqrt[4]{f(n)} - (n+k) \right] \\ &= \lim \frac{f(n) - (n+k)^4}{\left[\sqrt[4]{f(n)} + (n+k)\right]\left[\sqrt{f(n)} + (n+k)^2\right]} = \lim \frac{n^3(a - 3k + ...)}{n^3(1+1)(1+1)} \\ &= \frac{r}{4} = \left\{ \frac{a}{4} \right\}. \end{aligned}$$

□

Bài toán 20. *a, b là hai số nguyên dương cho trước. Với một số nguyên dương n đặt $x_n = a^2n^2 + bn$. Hãy xác định $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{ \sqrt{x_n} \right\}$, ký hiệu $\{x\}$ phần lẻ của số thực x.*

Lời giải. Lấy b chia cho $2a$ ta được $b = 2am + r$.

Với m, r là hai số nguyên, $m \geqslant 0, 0 \leqslant r \leqslant 2a - 1$.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $r = 0$ tức là $b = 2am$. Khi đó $x_n = a^2n^2 + 2amn = (an+m)^2 - m^2 <$

$(an+m)^2$.
Ta sẽ chứng tỏ rằng với n đủ lớn thì $(an+m-1)^2 < x_n = (an+m)^2 - m^2$.
Quả thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với $-2(an+m)+1 < -m^2$. Điều này đúng với n đủ lớn.
Từ các kết quả trên ta suy ra: Với n đủ lớn $\left[\sqrt{x_n}\right] = an+m-1$.
Do đó

$$\{x_n\} = \sqrt{x_n} - \left[\sqrt{x_n}\right] = \sqrt{(an+m)^2 - m^2} - (an+m-1) = \frac{2an-(m-1)^2}{\sqrt{(an+m)^2-m^2}+(an+m-1)}$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\sqrt{x_n}\right\} = 1$.
Trường hợp 2: $r \neq 0$. Tức là $1 \leqslant r \leqslant 2a-1$.
Khi đó

$$x_n = a^2n^2 + (2am+r)n = (an+m)^2 + rn - m^2 > (an+m)^2 \text{ (Với } n \text{ đủ lớn).}$$

Đồng thời, ta cũng có $x_n = a^2n^2 + (2an+r)n < (an+m+1)^2$ bởi vì bất đẳng thức này tương đương với

$$rn - m^2 < 2(an+m)+1.$$

Hay $0 < (2a-r)n + (m+1)^2$. Từ các kết quả trên ta suy ra: Với n đủ lớn $\left[\sqrt{x_n}\right] = an+m$.
Vậy

$$\begin{aligned}\{x_n\} &= \sqrt{(an+m)^2 + m - m^2} - (an+m) \\ &= \frac{rn-m^2}{\sqrt{(an+m)^2+rn-m^2}+(an+m)}.\end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\sqrt{x_n}\right\} = \dfrac{r}{2a}$. □

Bài toán 21. *Cho $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \left[\frac{5}{4}a_n + \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2-2}\right]$. Đặt $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Tìm chữ số tận cùng của S_{2021}.*

Lời giải. Dễ thấy và $a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant 6, \forall n \in N^*$. Từ đó ta có $\frac{5}{4}a_n + \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2-2} < \frac{5}{4}a_n + \frac{3}{4}a_n = 2a_n$.
Và do $a_n^2 - 2 \geqslant \left(a_n - \frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{8}{3}a_n \geqslant \frac{34}{9}$ (đúng) nên ta có

$$\frac{5}{4}a_n + \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2-2} > \frac{5}{4}a_n + \frac{3}{4}\left(a_n - \frac{4}{3}\right) = 2a_n - 1.$$

Suy ra $a_{n+1} = \left[\frac{5}{4}a_n + \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2 - 2}\right] = 2a_n - 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Suy ra $a_n = 5.2^{n-1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $a_n \div 1(\bmod 10)$ với mọi $n \geqslant 2$. Suy ra

$$S_{2021} = \sum_{i=1}^{2021} a_i \equiv a_1 + \sum_{i=2}^{2021} a_i \equiv 6 + 2020 \equiv 6(\bmod 10).$$

Vậy chữ số tận cùng của S_{2021} là 6. □

Nhận xét. Quan trọng nhất trong bài là sử dụng ước lượng để có hệ thức truy hồi $a_{n+1} = 2a_n - 1$.

Bài toán 22. *Dãy số (u_n) xác định như sau: $u_n = \left[n\sqrt{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng có vô số số hạng của dãy là số chính phương.*

Lời giải. Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}.$$

Ta thấy, khi n lẻ thì $\begin{cases} \left(\sqrt{2}+1\right)^n = x_n\sqrt{2} + y_n \\ \left(\sqrt{2}-1\right)^n = x_n\sqrt{2} - y_n \end{cases}$ với $x_n, y_n \in \mathbb{Z}^+$.
Suy ra $\left(x_n\sqrt{2} + y_n\right)\left(x_n\sqrt{2} - y_n\right) = 1$.
Dẫn đến $2x_n^2 - y_n^2 = 1$ hay $2x_n^2 = 1 + y_n^2$.
Vì thế $y_n^2 + y_n^4 = y_n^2\left(1 + y_n^2\right) = 2x_n^2 y_n^2$.
Do $y_n > 0$ nên $y_n^4 < y_n^4 + y_n^2 < \left(y_n^2 + 1\right)^2 \Rightarrow y_n^2 < \sqrt{y_n^4 + y_n^2} < y_n^2 + 1 \Rightarrow \left[\sqrt{y_n^4 + y_n^2}\right] = y_n^2$. (1)
Mặt khác, lại có: $\sqrt{y_n^4 + y_n^2} = x_n y_n \sqrt{2}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra: $\left[x_n y_n \sqrt{2}\right] = y_n^2$. (3)
Rõ ràng dãy $\left(x_n y_n \sqrt{2}\right)$ khi $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ là dãy tăng vô hạn. Do đó từ (3) ta suy ra có vô số số hạng của dãy (u_n), với $u_n = \left[n\sqrt{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}$ là số chính phương. □

1.7. Phần nguyên, phần lẻ trong các bài toán đa thức

Bài toán 23 (Tạp chí Pi). *Cho số nguyên dương k. Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, khác hằng và không có nghiệm nguyên. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $Q(x)$ hệ số nguyên sao cho*

$$Q\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) \equiv 0(\bmod P(n)) \text{ với mọi số nguyên dương } n.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh đa thức $Q(x)$ sau thỏa mãn các điều kiện của đề bài:

$$Q(x) = P(kx).P(kx+1)...P(kx+k-1).$$

Thật vậy, trước hết, do $P(x)$ là đa thức khác hằng với hệ số nguyên nên $Q(x)$ là đa thức khác đa thức 0 và có hệ số nguyên. Tiếp theo, với mỗi số nguyên n, ta có

$$\left[\frac{n}{k}\right] \leqslant \frac{n}{k} \leqslant \left[\frac{n}{k}\right] + 1$$

Do đó

$$k.\left[\frac{n}{k}\right] \leqslant n \leqslant k.\left[\frac{n}{k}\right] + k$$

Hay

$$n \in \left\{k.\left[\frac{n}{k}\right]; k.\left[\frac{n}{k}\right] + 1; ....; k\left[\frac{n}{k}\right] + k - 1\right\}$$

Vì thế, với mọi n nguyên ,trong các số nguyên $P\left(k.\left[\frac{n}{k}\right]\right), P\left(k.\left[\frac{n}{k}\right]+1\right), ..., P\left(k.\left[\frac{n}{k}\right]+k-1\right)$ luôn có một số là $P(n)$. (1)

Hơn nữa, do đa thức không có nghiệm nguyên nên $P(n)$ khác 0 với mọi n nguyên. (2)

Từ (1) và (2) hiển nhiên suy ra với mọi n nguyên $Q\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) \vdots P(n)$.

Nói cách khác, bài toán đã được chứng minh. □

Bài toán 24. *Cho $P(x)$, $Q(x)$ là hai đa thức với hệ số thực,khác đa thức hằng và thỏa mãn điều kiện: $\forall x \in \mathbb{R}, [P(x)] = [Q(x)]$ Chứng minh rằng*

$$P(x) = Q(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta có bổ đề sau: Cho đa thức $P(x)$ khác đa thức hằng. Khi đó tồn tại số thức a để đa thức $P(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a; +\infty)$.

Trở lại bài toán. Xét đa thức $R(x) = P(x) - Q(x)$. Theo giả thiết ta có

$$R(x) = P(x) - Q(x) = [P(x)] + \{P(x)\} - [Q(x)] - \{Q(x)\} = \{P(x)\} - \{Q(x)\}\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $-1 < R(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}.$ (1)

Nếu đa thức $R(x)$ có bậc dương thì đa thức đó không bị chặn, mâu thuẫn với (1).

Vì vậy $R(x) \equiv c$, với c là một hằng số thuộc khoảng $(-1; 1)$ hay $R(x) = P(x) - Q(x)$ $R(x) = P(x) - Q(x).$ (2)

Giả sử $c \neq 0$. Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu $c > 0$. Theo bổ đề trên tồn tại số thực a sao cho $P(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a; +\infty)$. Từ đó do P(x) liên tục trên khoảng $(a; +\infty)$ nên tồn tại $x_0 > a$ sao cho $P(x_0) = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Từ (2) ta có $Q(x_0) = P(x_0) - c = k - c < k$.
  Do đó $[Q(x_0)] = k < [P(x_0)]$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài.

- Nếu $c < 0$. Tương tự như trên, tồn tại số thực b sao cho đa thức $P(x)$ đơn điệu trên $(b; +\infty)$ nên tồn tại $x_1 > b$ sao cho $Q(x_1) = m$, $m \in \mathbb{Z}$. Từ (2) ta có $P(x_1) = Q(x_1) + c = m + c < m$.
  Do đó $|P(x_1)| < m = |Q(x_1)|$ (vô lý).
  Vậy $c = 0$. Dẫn đến $P(x) = Q(x)$ với mọi x.

□

Bài toán 25. *Cho số nguyên dương n . Ký hiệu $r(n)$ là tổng các số dư của n khi chia cho $1, 2, 3, 4, \dots n$. Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên dương n thỏa $r(n) = r(n-1)$.*

Lời giải. Ta có số dư khi chia n cho k là $\left\{\frac{n}{k}\right\}.k$ hay $n - \left[\frac{n}{k}\right].k$.
Vậy $r_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(n - \left[\frac{n}{k}\right].k\right)$.
Ta có r(n)=r(n-1) khi và chỉ khi $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(n - \left[\frac{n}{k}\right].k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(n - 1 - \left[\frac{n-1}{k}\right].k\right)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(n - \left[\frac{n}{k}\right].k\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(n - 1 - \left[\frac{n-1}{k}\right].k\right)\\
\Leftrightarrow\quad & n^2 - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right].k = (n-1)^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{n-1}{k}\right].k\\
\Leftrightarrow\quad & 2n - 1 = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right].k - \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{n-1}{k}\right].k \quad (*)
\end{aligned}$$

Nếu k là ước của n thì $\left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{n-1}{k}\right] + 1$. Vì thế $\left[\frac{n}{k}\right].k = \left[\frac{n-1}{k}\right].k$.
Vậy $(*) \Leftrightarrow 2n - 1 = \sum\limits_{k|n} k$.
Chọn $n = 2^m$, m là số nguyên không âm. Khi đó, hàm tổng các ước của n là $\sigma(n)$=$2^{m+1} - 1$.
Rõ ràng khi đó $2n - 1 = 2^{m+1} - 1 = \sum\limits_{k|n} k$.
Vậy nếu n là lũy thừa của 2 thì $r(n) = r(n-1)$. □

2. Lời cảm ơn

Bài viết cũng nhận được quan tâm của Ban giám hiệu trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, sự cộng tác và góp ý chân thành của các đồng nghiệp trong tổ Toán của trường, của các em học sinh trong đội tuyển của tỉnh dự thi học sinh giỏ quốc gia và đặc biệt các em lớp chuyên Toán khóa 21, 22 của trường, sự động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện của người thân. Tác giả xin chân thành cám ơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Vũ Thanh-Số học (Chuyên đề bồi dưỡng chuyên Toán cấp 2-3), NXB Cà Mau 1993.

[2] Vũ Dương Thụy (chủ biên)-Lý thuyết số các định lí cơ bản và bài tập chọn lọc. NXB Giáo dục 2004.

[3] Tạp chí Pi.

[4] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

[5] Tài liệu trên Internet.

BẤT ĐẲNG THỨC SVAC-XƠ

Nguyễn Song Thiên Long
(THPT chuyên Bến Tre, Bến Tre)

TÓM TẮT

Bất đẳng thức luôn là một chủ đề hay và phổ biến trong các đề thi Olympic, đi cùng với đó là việc sử dụng các bất đẳng thức kinh điển cũng như các kĩ thuật biến đổi. Trong bài viết này, tôi xin giới thiệu về ứng dụng của bất đẳng thức *Svac-xơ*, một hệ quả của bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* trong việc giải các bài bất đẳng thức, khá đơn giản nhưng lại vô cùng hữu ích trong một số tình huống. Bất đẳng thức *Svac-xơ* có thể được áp dụng trực tiếp hoặc thông qua một số phép biến đổi và bất đẳng thức khác.

1. Giới thiệu

1.1. Kí hiệu trong bài viết

$\sum$ (hay $\sum\limits_{cyc}$ với *cyc* là viết tắt của *cyclic*): tổng tuần hoàn. VD: $\sum ab = ab + bc + ca$

LHS (Left hand side): vế trái.

1.2. Tên gọi

Có rất nhiều tên gọi cho bất đẳng thức này như: *Cauchy-Schwarz dạng Engle*, *Bunyakovsky dạng phân thức*, *bất đẳng thức cộng mẫu*, *AM-GM dạng cộng mẫu*, *Engle*, ... Trong bài viết này, tôi xin được gọi là bất đẳng thức *Svac-xơ*, cách đọc theo tiếng Đức của *Schwarz* [1].

Thực chất, bất đẳng thức *Svac-xơ* là một hệ quả của bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* (hay còn gọi là bất đẳng thức *Bunyakovsky*).

[1] Karl Hermann Amandus Schwarz (25/1/1843-30/11/1921), là một nhà toán học người Đức.

1.3. Phát biểu

(1) Dạng tổng quát:

Cho hai dãy số thực $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n > 0)$ thì ta luôn có

$$\frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \ldots + \frac{{a_n}^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

(2) Dạng cụ thể:

- Cho $x, y > 0$, ta có $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y}$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.
- Cho $x, y, z > 0$, ta có $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

1.4. Chứng minh

Cách 1.

Cho a, b, x, y là các số thực và $x, y > 0$. Khi đó

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y}. \tag{1}$$

Thật vậy, (1) được viết lại thành

$$a^2 y(x+y) + b^2 x(x+y) \geqslant (a+b)^2 xy \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geqslant 0 \text{ (hiển nhiên)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$. Vậy (1) được chứng minh.

Với 6 số a, b, c, x, y, z là các số thực và $x, y, z > 0$. Áp dụng (1) hai lần ta có

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Bằng phép qui nạp toán học với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực bất kì và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số thực dương, ta chứng minh được

$$\frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \ldots + \frac{{a_n}^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng đẳng thức *Bunyakovsky* cho hai bộ số

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right), \qquad (\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \ldots, \sqrt{b_n}),$$

ta có

$$\left(\frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \ldots + \frac{{a_n}^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$$

$$\Rightarrow \frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \ldots + \frac{{a_n}^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

1.5. Một số kết quả quen thuộc

- Cho a, b là hai số thực. Khi đó $2(a^2 + b^2) \geqslant (a + b)^2 \geqslant 4ab$.
- Cho a, b, c là các số thực. Khi đó $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$.
- Cho a, b là hai số thực dương. Khi đó $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a + b}$.
- Cho a, b, c là các số thực dương. Khi đó $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a + b + c}$.
- Cho a, b, c là ba số thực dương. Khi đó $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \geqslant \frac{3}{2}$. (BĐT Nesbitt) [2]

2. Ứng dụng bất đẳng thức Svac-xơ vào một số bài toán

Bài toán 1 (**Russia 1990**). *Cho n số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, thỏa mãn $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{{a_1}^2}{a_1 + a_2} + \frac{{a_2}^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{{a_n}^2}{a_n + a_1} \geqslant \frac{1}{2}$$

[2] Hiện nay có hơn 49 cách chứng minh bất đẳng thức Nesbitt.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\frac{{a_1}^2}{a_1+a_2}+\frac{{a_2}^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{{a_n}^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}=\frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n=\dfrac{1}{n}$. □

Bài toán 2. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải. Ta tìm cách đưa vế trái về dạng dùng được bất đẳng thức *Svac-xơ*

$$\begin{aligned}LHS&=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\\&=\frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)}+\frac{b^4}{b(b^2+bc+c^2)}+\frac{c^4}{c(c^2+ca+a^2)}\\&\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}\end{aligned}$$

Vì $a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ nên

$$LHS\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\geqslant\frac{a+b+c}{3}\tag{2}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}(2)&\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2\\&\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\geqslant 0\\&\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0 \text{ (luôn đúng)}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Bài toán 3 (**IMO 1995**). *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$LHS=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)} \geqslant \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Suy ra $LHS \geqslant \dfrac{ab+bc+ca}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM*, ta có

$$LHS \geqslant \frac{ab+bc+ca}{2} \geqslant \frac{\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

Sau đây là một mở rộng của bài toán trên. Bài toán đã được đăng trên *Tạp chí Toán học và tuổi trẻ* chỉ với trường hợp k là số nguyên lớn hơn 1.

Bài toán 4 (**Ngô Văn Thái**). *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ và $k \geqslant 2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^k(b+c)} + \frac{1}{b^k(c+a)} + \frac{1}{c^k(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

Lời giải. Đặt vế trái của bài toán là J. Vì $a, b, c > 0, abc = 1$ nên

$$J = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{k-1}}{ab+ac} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{k-1}}{bc+ba} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^{k-1}}{ca+cb} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{k-1}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{k-1}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^{k-1}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Khi $k = 2$ thì $J = \dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} + \dfrac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geqslant \dfrac{3}{2}$ (BĐT *Nesbitt*).

Khi $k > 2$, không mất tính tổng quát $0 < a \leqslant b \leqslant c$, suy ra

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{k-2} \geqslant \left(\frac{1}{b}\right)^{k-2} \geqslant \left(\frac{1}{c}\right)^{k-2} > 0; \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geqslant \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} \geqslant \frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} > 0$$

Theo bất đẳng thức *Chebyshev*

$$J \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} + \frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{k-2} + \left(\frac{1}{b}\right)^{k-2} + \left(\frac{1}{c}\right)^{k-2}\right]$$

Mà theo bất đẳng thức *Nesbitt* thì

$$\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} + \frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geqslant \frac{3}{2}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức *AM-GM*, ta được

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{k-2} + \left(\frac{1}{b}\right)^{k-2} + \left(\frac{1}{c}\right)^{k-2} \geqslant 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{abc}\right)^{k-2}} = 3$$

Suy ra $J \geqslant \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{2}.3 = \dfrac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán 5 (**Đại học Sư phạm**). *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geqslant \frac{1}{3}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Bunyakovsky*, ta có

$$(a+2b)^2 \leqslant 3(a^2+2b^2)$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\frac{a^2}{a^2+2b^2}+\frac{b^2}{b^2+2c^2}+\frac{c^2}{c^2+2a^2} \geqslant 1$$

Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2b^2}+\frac{b^2}{b^2+2c^2}+\frac{c^2}{c^2+2a^2} \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(a^2+2b^2)+b^2(b^2+2c^2)+c^2(c^2+2a^2)}=1$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Bài toán 6 (**Thổ Nhĩ Kì 2011**). *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)}+\frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)}+\frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geqslant \frac{3}{2}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM*, ta có

$$(b+1)(b+5)=\frac{3(b+1)(b+5)}{3} \leqslant \frac{[3(b+1)+(b+5)]^2}{12}=\frac{4(b+2)^2}{3}$$

Do đó

$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)} \geqslant \frac{3}{4}.\frac{a+1}{b+2}$$

Tương tự với hai bất đẳng thức còn lại, ta cần chứng minh

$$\frac{a+1}{b+2}+\frac{b+1}{c+2}+\frac{c+1}{a+2} \geqslant 2$$

Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a+1}{b+2}+\frac{b+1}{c+2}+\frac{c+1}{a+2} &\geqslant \frac{(a+1+b+1+c+1)^2}{(a+1)(b+2)+(b+1)(c+2)+(c+1)(a+2)}\\ &=\frac{(a+b+c+3)^2}{ab+bc+ca+3(a+b+c)+6}\end{aligned}$$

Mặt khác

$$(a+b+c+3)^2-2\left[ab+bc+ca+3(a+b+c)+6\right]=a^2+b^2+c^2-3 \geqslant 0$$

Vậy ta suy ra được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. □

Bài toán 7. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4}{(a+b)^2(a+c)} + \frac{b^4}{(b+c)^2(b+a)} + \frac{c^4}{(c+a)^2(c+b)} \geqslant \frac{3}{8}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\sum \frac{a^4}{(a+b)^2(a+c)} \geqslant \frac{\left(\sum \frac{a^2}{a+b}\right)^2}{2(a+b+c)} \tag{3}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\sum \frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta suy ra được

$$\sum \frac{a^4}{(a+b)^2(a+c)} \geqslant \frac{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{8} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{abc}}{8} = \frac{3}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán 8 (**Samin Riasa**). *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geqslant 1$$

Lời giải. Ta có

$$4\sum \frac{a}{3a-b+c} = \sum \frac{4a}{3a-b+c} = 3 + \sum \frac{a+b-c}{3a-b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta được

$$\sum \frac{a+b-c}{3a-b+c} = \sum \frac{(a+b-c)^2}{(a+b-c)(3a-b+c)} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\sum (a+b-c)(3a-b+c)} = 1$$

Vậy ta suy ra được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. □

Bài toán 9 (**Phạm Kim Hùng**). *Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2} \geqslant 0$$

Lời giải. Ta để ý rằng
$$1-\frac{2(c^2-ab)}{2c^2+a^2+b^2}=\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}.$$
Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành
$$\sum\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\leqslant 3 \tag{5}$$
Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có
$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\leqslant\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}$$
Như vậy
$$LHS(5)\leqslant\sum\frac{a^2}{a^2+c^2}+\sum\frac{b^2}{b^2+c^2}=3$$
Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các các hoán vị của nó. □

Bài toán 10. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng*
$$\frac{(a+b)a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{2}{9}(a+b+c)^2$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Bunyakovsky*, ta có
$$\left[\sum\frac{(a+b)a^3}{a^2+ab+b^2}\right]\left[\sum\frac{a(a^2+ab+b^2)}{a+b}\right]\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$$
Mặt khác, ta có
$$\sum\frac{a(a^2+ab+b^2)}{a+b}=\sum a(a+b)-\sum\frac{a^2b}{a+b}$$
Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta được
$$\sum\frac{a^2b}{a+b}=\sum\frac{a^2b^2}{ab+b^2}\geqslant\frac{(ab+bc+ca)^2}{\sum a^2+\sum ab}$$
Vì vậy
$$\sum\frac{a(a^2+ab+b^2)}{a+b}=\sum a(a+b)-\sum\frac{a^2b}{a+b}\leqslant\sum a(a+b)-\frac{(ab+bc+ca)^2}{\sum a^2+\sum ab}=\frac{\sum a^2(\sum a)^2}{\sum a^2+\sum ab}$$
Do đó
$$\begin{aligned}LHS&\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum\frac{a(a^2+ab+b^2)}{a+b}}\geqslant\frac{(\sum a^2+\sum ab)\sum a^2}{(\sum a)^2}\\&\geqslant\frac{(\sum a^2+\sum ab)(\sum a)^2}{3(\sum a)^2}=\frac{1}{3}\left(\sum a^2+\sum ab\right)\geqslant\frac{2}{9}(a+b+c)^2\end{aligned}$$
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Bài toán 11 (**Japan TST 2004**). *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leqslant\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}$$

Lời giải. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$\frac{3}{2}+\sum\frac{a}{b+c}\leqslant\sum\frac{a}{b}\Leftrightarrow\sum(\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c})\geqslant\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{ac}{b(b+c)}\geqslant\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\sum\frac{ac}{b(b+c)}=\sum\frac{a^2c^2}{abc(b+c)}\geqslant\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}$$

Ta cần chứng minh $(ab+bc+ca)^2\geqslant 3abc(ab+bc+ca)$. Thậy vậy,

$$\begin{aligned}(ab+bc+ca)^2&=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c)\\&\geqslant ab.bc+bc.ca+ca.ab+2abc(a+b+c)\\&=3abc(a+b+c)\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. □

Bài toán 12 (**China MO 2007**). *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{c+a}+\frac{c^k}{c+a}\geqslant\frac{3}{2},\forall k\geqslant 2$$

Lời giải. Với giả thiết đã cho, áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$LHS\geqslant\frac{(a^{\frac{k}{2}}+b^{\frac{k}{2}}+c^{\frac{k}{2}})^2}{2(a+b+c)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$a\geqslant b\geqslant c>0\Rightarrow a^{\frac{k-2}{2}}\geqslant b^{\frac{k-2}{2}}\geqslant c^{\frac{k-2}{2}},\forall k\geqslant 2.$$

Theo bất đẳng thức *Chebyshev* thì

$$a^{\frac{k}{2}}+b^{\frac{k}{2}}+c^{\frac{k}{2}}\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)(a^{\frac{k-2}{2}}+b^{\frac{k-2}{2}}+c^{\frac{k-2}{2}})$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức *AM-GM* và $abc=1$, ta được

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3; a^{\frac{k-2}{2}}+b^{\frac{k-2}{2}}+c^{\frac{k-2}{2}}\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^{\frac{k-2}{2}}}=3$$

Suy ra

$$LHS\geqslant\frac{(a^{\frac{k}{2}}+b^{\frac{k}{2}}+c^{\frac{k}{2}})^2}{2(a+b+c)}\geqslant\frac{(a+b+c)^2(a^{\frac{k-2}{2}}+b^{\frac{k-2}{2}}+c^{\frac{k-2}{2}})^2}{18(a+b+c)}\geqslant\frac{3.9}{18}=\frac{3}{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. □

Bài toán 13 (**Bất đẳng thức Vasile Cirtoaje**). *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geqslant 1 \tag{6}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c(a+b+c)} \geqslant \frac{(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

$$\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^2}{a(a+b+c)} \geqslant \frac{(b+a)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

$$\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{b^2}{b(a+b+c)} \geqslant \frac{(c+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

Cộng vế theo vế của ba bất đẳng trên, ta được

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}-\frac{abc^2+a^2bc+ab^2c}{abc(a+b+c)} =$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Nhận xét. Từ bất đẳng thức (6), ta đưa về bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{1+\frac{c}{b}+\left(\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{1}{1+\frac{a}{c}+\left(\frac{a}{c}\right)^2} \geqslant 1$$

Bây giờ ta đặt $x=\dfrac{b}{a}$, $y=\frac{c}{b}$, $z=\frac{a}{c}$ thì (6) được phát biểu dưới dạng mới sau đây:

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1} \geqslant 1$$

Bài toán 14 (**Nguyễn Văn Thạch**). *Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+c^3} \geqslant 1$$

Lời giải. Bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hóa $abc=1$.

Đặt $a=\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$, , $b=\sqrt[3]{\dfrac{y}{z}}$, $c=\sqrt[3]{\dfrac{z}{x}}$ với mọi $x, y, z>0$. Ta có

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1+\frac{y}{z}}=\frac{x^2}{x^2+xy+yz}$$

Như vậy, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^2}{x^2+xy+yz}+\frac{y^2}{y^2+yz+zx}+\frac{z^2}{z^2+zx+xy}\geqslant 1$$

Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\frac{x^2}{x^2+xy+yz}+\frac{y^2}{y^2+yz+zx}+\frac{z^2}{z^2+zx+xy}\geqslant \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}=1$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c=1$. □

Bài toán 15 (**Phạm Kim Hùng**). *Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a^2+2(a+b)^2}+\frac{b^2}{b^2+2(b+c)^2}+\frac{c^2}{c^2+2(c+a)^2}\geqslant\frac{1}{3}$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{b}$, $z=\frac{a}{c}$. Ta cần chứng minh

$$\sum\frac{1}{1+2(x+1)^2}\geqslant\frac{1}{3}$$

Vì $xyz=1$ nên tồn tại các số thực dương m,n,p thỏa mãn

$$x=\frac{np}{m^2},\quad y=\frac{mp}{n^2},\quad z=\frac{mn}{p^2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum\frac{m^4}{m^4+2(m^2+np)^2}\geqslant\frac{1}{3} \tag{7}$$

Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$LHS(7)\geqslant\frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{m^4+n^4+p^4+2(m^2+np)^2+2(n^2+pm)^2+2(p^2+mn)^2}$$

Mặt khác,

$$3\left(\sum m^2\right)^2-\sum m^4-2\sum(m^2+np)^2=\sum m^2(n-p)^2\geqslant 0$$

Ta suy ra được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Bài toán 16 (**Lê Minh Cường**). *Cho k và a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $2k^2\leqslant 2k+1$. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{ka+b}\right)^2+\left(\frac{b}{kb+c}\right)^2+\left(\frac{c}{kc+a}\right)^2\geqslant\frac{3}{(k+1)^2}$$

Lời giải. Đặt $\frac{b}{a} = \frac{yz}{x^2}, \frac{b}{c} = \frac{zx}{y^2}, \frac{c}{a} = \frac{xy}{z^2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^4}{(kx^2+yz)^2} + \frac{y^4}{(ky^2+zx)^2} + \frac{z^4}{(kz^2+xz)^2} \geqslant \frac{3}{(k+1)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$LHS \geqslant \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(kx^2+yz)^2+(ky^2+zx)^2+(kz^2+xz)^2}$$

Ta cần chứng minh rằng

$$(k+1)^2(x^2+y^2+z^2)^2 \geqslant 3\left[(kx^2+yz)^2+(ky^2+zx)^2+(kz^2+xz)^2\right]$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned}
&(k+1)^2(x^2+y^2+z^2)^2 \geqslant 3\left[(kx^2+yz)^2+(ky^2+zx)^2+(kz^2+xz)^2\right]\\
&\Leftrightarrow (k+1)^2\sum x^4 + 2(k+1)^2\sum x^2y^2 \geqslant 3k^2\sum x^4 + 6kxyz\sum x + 3\sum x^2y^2\\
&\Leftrightarrow (2k+1-2k^2)\sum x^4 + (2k^2+4k-1)\sum x^2y^2 \geqslant 6kxyz(x+y+z)
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
(2k+1-2k^2)\sum x^4 + (2k^2+4k-1)\sum x^2y^2 &\geqslant (2k+1-2k^2)\sum x^2y^2 + (2k^2+4k-1)\sum x^2y^2\\
&\geqslant 6k\sum x^2y^2 \geqslant 6kxyz(x+y+z)
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Bài toán 17 (**Phạm Quốc Sang**). *Cho a,b,c là các số thực dương và $k \geqslant 2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b^2+kbc+c^2} + \frac{b}{c^2+kca+a^2} + \frac{c}{a^2+kab+b^2} \geqslant \frac{9}{(k+2)(a+b+c)}$$

Lời giải. Đặt $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$. Vì vậy $pq \geqslant 9r$ và $p^2 \geqslant 3q$.

Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\sum \frac{a}{b^2+kbc+b^2} = \sum \frac{a^2}{ab^2+kabc+ac^2} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\sum ab(a+b)+3kabc}$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+b+c)^2}{\sum ab(a+b)+3kabc} \geqslant \frac{9}{(k+2)(a+b+c)}\\
&\Leftrightarrow (k+2)(a+b+c)^3 \geqslant 9(a+b+c)(ab+bc+ca)+27(k-1)abc\\
&\Leftrightarrow (k+2)p^3 \geqslant 9pq+27(k-1)r\\
&\Leftrightarrow p(k+2)(p^2-3q) \geqslant 0 \text{ (đúng)}
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Bài toán 18. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a^2+2bc}+\sqrt{b^2+2ca}+\sqrt{c^2+2ab} \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}+2\sqrt{ab+bc+ca}$$

Lời giải. Đặt

$$A=\sqrt{a^2+2bc}, \quad B=\sqrt{b^2+2ca}, \quad C=\sqrt{c^2+2ab},$$
$$D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}, \quad E=\sqrt{ab+bc+ca}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$A+B+C \leqslant D+2E,$$

hay

$$(D-A)+(D-B)+(D-C) \leqslant 2(D-E) \tag{8}$$

Để ý rằng

$$D-A=\frac{D^2-A^2}{D+A}=\frac{(b-c)^2}{D+A},$$

và

$$2(D-E)=\frac{2(D^2-E^2)}{D+E}=\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{D+E}.$$

Ta có thể viết (8) dưới dạng

$$\frac{(b-c)^2}{D+A}+\frac{(c-a)^2}{D+B}+\frac{(a-b)^2}{D+C} \geqslant \frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{D+E}$$

Nếu $a=b=c$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Xét trường hợp ba số này không đồng thời bằng nhau. Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\frac{(b-c)^2}{D+A}+\frac{(c-a)^2}{D+B}+\frac{(a-b)^2}{D+C} \geqslant \frac{\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]^2}{(b-c)^2(D+A)+(c-a)^2(D+B)+(a-b)^2(D+C)}$$

Ta quy về chứng minh

$$(b-c)^2(E-A)+(c-a)^2(E-B)+(a-b)^2(E-C) \geqslant 0$$

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM*, ta được $\frac{E}{2}+\frac{A^2}{2E} \geqslant A$. Do đó

$$\begin{aligned}\sum\left[(b-c)^2(E-A)\right] &\geqslant \sum\left[(b-c)^2\left(\frac{E}{2}-\frac{A^2}{2E}\right)\right]\\ &=-\frac{1}{2E}\sum\left[(b-c)^2(a-b)(a-c)\right]\\ &=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2E}\sum(b-c)=0\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$, hoặc $b=c$, hoặc $c=a$. $\square$

Bài toán 19 (Phạm Quốc Sang). *Cho các số thực a, b, c khác 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2+3bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+3ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+3ab}{a^2+b^2}\geqslant 0$$

Lời giải. Theo nguyên lí *Dirichlet*, trong ba số thực a, b, c khác 0 luôn tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $bc>0$. Sử dụng bất đẳng thức *Svac-xơ* và *AM-GM*, ta có

$$\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}\geqslant\frac{(b^2+c^2)^2}{2b^2c^2+a^2(b^2+c^2)}+\frac{2b^2c^2+a^2(b^2+c^2)}{(b^2+c^2)^2}\geqslant 2$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&2+\frac{3bc}{b^2+c^2}-\frac{2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}+\frac{3ca}{c^2+a^2}+\frac{3ab}{a^2+b^2}\geqslant 0\\
\Leftrightarrow&\left(\frac{3}{2}+\frac{3ca}{c^2+a^2}\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{3ab}{a^2+b^2}\right)\geqslant\left(1-\frac{2bc}{b^2+c^2}\right)-\left[\frac{bc}{b^2+c^2}-\frac{2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}\right]\\
\Leftrightarrow&\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}\geqslant\frac{2}{3}\frac{(b^2-bc+c^2)(b-c)^2}{(b^2+c^2)^2}.
\end{aligned}$$

Ta đi chứng minh dãy bất đẳng thức sau

$$\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}\geqslant\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}\geqslant\frac{2}{3}.\frac{(b^2-bc+c^2)(b-c)^2}{(b^2+c^2)^2}$$

Với bất đẳng thức bên trái, ta xét hai trường hợp sau.

1. $a^2\leqslant bc$. Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}&\geqslant\frac{(c+a-a-b)^2}{(c^2+a^2)+(a^2+b^2)}=\frac{(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}\\
&\geqslant\frac{(b-c)^2}{2bc+b^2+c^2}=\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}
\end{aligned}$$

2. $a^2>bc$. Áp dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}&\geqslant\frac{[b(c+a)-c(a+b)]^2}{b^2(c^2+a^2)+c^2(a^2+b^2)}\\
&=\frac{a^2(b-c)^2}{2b^2c^2+a^2(b^2+c^2)}\\
&\geqslant\frac{a^2(b-c)^2}{2a^2bc+a^2(b^2+c^2)}=\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}
\end{aligned}$$

Với bất đẳng thức thứ hai, ta viết dưới dạng sau

$$3(b^2+c^2)^2 \geqslant 2(b^2-bc+c^2)(b+c)^2$$

Theo bất đẳng thức *AM-GM*, ta có

$$\begin{aligned}2(b^2-bc+c^2)(b+c)^2 &\leqslant \frac{1}{4}.\left[2(b^2-bc+c^2)+(b+c)^2\right]^2\\ &= \frac{9}{4}(b^2+c^2)^2 \leqslant 3(b^2+c^2)^2\end{aligned}$$

Ta thu được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=t, b=c=-t$ và các hoán vị của nó, trong đó t là một số thực khác 0. □

3. Bài tập

Bài toán. *Cho a,b,c,x,y,z là các số thực sao cho*

$$(a+b+c)(x+y+z)=3 \quad \textit{và} \quad (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4$$

Chứng minh rằng $ax+by+cz \geqslant 0$.

Bài toán (USAMO 2003). *Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leqslant 8$$

Bài toán (Phạm Quốc Sang). *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\frac{c+a}{c^2+ca+a^2} \leqslant 2$$

Bài toán (Chọn đội tuyển KHTN HN 2021). *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2(a^2-ab+b^2)}}+\sqrt[3]{\frac{b^4}{c^2(b^2-bc+c^2)}}+\sqrt[3]{\frac{c^4}{a^2(c^2-ca+a^2)}} \geqslant 3$$

Bài toán (Trung Âu 2012). *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh*

$$\sqrt{9+16a^2} + \sqrt{9+16a^2} + \sqrt{9+16c^2} \geqslant 3 + 4(a+b+c)$$

Bài toán (Vasile Cirtoaje, Crux). *Cho a, b, c, d là bốn số thực dương thỏa mãn $abcd = r^4 \geqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geqslant \frac{4(1+r^2)}{1+r}$$

Tài liệu tham khảo

[1] Hoàng Minh Quân, *Ứng dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engle trong chứng minh bất đẳng thức*, Hà Nội, 2012.

[2] Lê Anh Vinh (Chủ biên), *Định hướng Bồi dưỡng học sinh năng khiếu Toán - Đại số*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2021.

[3] Lê Hoành Phò, và Trần Nam Dũng, *Tuyển chọn các chuyên đề toán phổ thông (Tập 2)*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2020.

[4] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, và Võ Quốc Bá Cẩn, *Các chủ đề Bất đẳng thức ôn thi vào lớp 10*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2019.

[5] Ngô Văn Thái, và Đào Văn Nam, *Mở rộng bất đẳng thức Vasile Cirtoaje*, 2021.

[6] Ngô Văn Thái, *Phát triển mở rộng câu bất đẳng thức thi quốc tế năm 1995*, 2021.

[7] Ngô Văn Thái, *Mở rộng một bất đẳng thức Trung Quốc*, 2021.

[8] Pham Kim Hung, *Secrets in inequalities (volume 1)*, GIL Publishing House, 2007.

[9] Pham Quoc Sang, and Le Minh Cuong, *The art of Mathematics (Vol 3)*, Ho Chi Minh, 2017.

[10] Trần Nam Dũng, *Lời giải và bình luận đề thi các tỉnh, các trường đại học năm học 2009-2010*.

MỞ RỘNG BẤT ĐẲNG THỨC CỦA VASILE CIRTOAJE

Ngô Văn Thái - Thái Bình
Đào Văn Nam - Hà Nội

1. Giới thiệu bất đẳng thức Vasile Cirtoaje

Bất đẳng thức Vasile Cirtoaje là một bất đẳng thức không khó nhưng rất chặt. Ngoài cấu trúc gọn, đẹp nó còn được phát biểu dưới hai dạng tương đương tường minh rất thuận tiện cho việc áp dụng để giải hàng loạt bài toán bất đẳng thức khác hay và khó. Trong bài viết này tác giả không đề cập đến ứng dụng của bất đẳng thức đó vào giải toán, mà chỉ xin giới thiệu một số mở rộng mới đã được các tác giả tìm ra trong thời gian gần đây.

Nội dung bất đẳng thức Vasile Cirtoaje như sau:

Bài toán 1. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geqslant 1. \tag{1}$$

Từ bất đẳng thức (1) ta đưa về bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{1+\frac{c}{b}+\left(\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{1}{1+\frac{a}{c}+\left(\frac{a}{c}\right)^2} \geqslant 1.$$

Bây giờ ta đặt $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{b}$, $z=\frac{a}{c}$ thì (1) được phát biểu dạng khác sau đây:

Bài toán 2. *Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1} \geqslant 1. \tag{2}$$

Bất đẳng thức (1) và (2) đã có vài cách chứng minh khác nhau đăng trên các diễn đàn Toán học sơ cấp. Song tất cả các cách chứng minh đó đều khá dài và phức tạp, kể cả cách chứng minh của chính tác giả Vasile Cirtoaje. Cách chứng minh đưa ra dưới đây của bạn Lê Khánh Sỹ ở Long An có lẽ là cách chúng minh hay nhất, đặc sắc nhất ở thời điểm hiện tại. Xin mời đọc giả theo dõi thưởng thức. Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz sẽ được:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c\left(a+b+c\right)} \geqslant \frac{\left(a+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca},$$

$$\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^2}{a\left(a+b+c\right)}\geqslant\frac{\left(b+a\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca},$$
$$\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{b^2}{b\left(a+b+c\right)}\geqslant\frac{\left(c+b\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên rồi rút gọn thì (1) đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2. Một số mở rộng bất đẳng thức Vasile Cirtoaje

Theo các tác giả được biết bất đẳng thức (1) và (2) cũng mới chỉ có một mở rộng tầm thường sau đây đăng trên một số sách báo:

Bài toán 3. *Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz=1$ và $t\in R$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x^{2t}+x^t+1}+\frac{1}{y^{2t}+y^t+1}+\frac{1}{z^{2t}+z^t+1}\geqslant 1.$$

Vì yêu mến vẻ đẹp quyến rũ của (1) và (2) các tác giả đã bỏ thời gian nghiên cứu mở rộng ra được các kết quả không tầm thường dưới đây. Các mở rộng này cũng đẹp, cũng chặt và cũng không dễ, hy vọng rằng các mở rộng đó sẽ có vai trò làm cầu nối để áp dụng giải được nhiều bài toán hay, khó, hóc búa hơn nữa.

Mở rộng 1. *Cho a, b, c là ba số thực dương và $k\geqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a^2+kab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+kbc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+kca+a^2}\geqslant\frac{3}{k+2}.$$

Lời giải. Đặt vế trái của bài toán là A. Với giả thiết đã cho ta dễ dàng chứng minh được

$$\frac{k+2}{a^2+kab+b^2}\geqslant\frac{3}{a^2+ab+b^2},$$

hay

$$\frac{\left(k+2\right)a^2}{a^2+kab+b^2}\geqslant\frac{3a^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Tương tự

$$\frac{\left(k+2\right)b^2}{b^2+kbc+c^2}\geqslant\frac{3b^2}{b^2+bc+c^2},$$
$$\frac{\left(k+2\right)c^2}{c^2+kca+a^2}\geqslant\frac{3c^2}{c^2+ca+a^2}.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên sẽ được

$$\left(k+2\right)A\geqslant\frac{3a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{3b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{3c^2}{c^2+ca+a^2}.$$

Mặt khác từ (1), ta có

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geqslant 1.$$

Suy ra

$$(k+2)\,A\geqslant 3,$$

hay

$$\frac{a^2}{a^2+kab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+kbc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+kca+a^2}\geqslant\frac{3}{k+2}.$$

Dấu đẳng thức của mở rộng 1 xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Để tiếp tục có được mở rộng 2, 3, 4 cho (1) ta sử dụng đến bổ đề sau

Nếu các số dương $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ và

$$\begin{cases} y_1-x_1>0,\ y_2-x_2>0,\ y_3-x_3>0\\ \dfrac{x_1}{y_1}+\dfrac{x_2}{y_2}+\dfrac{x_3}{y_3}\geqslant t>0\end{cases}$$

thì

$$\frac{x_1}{y_1-x_1}+\frac{x_2}{y_2-x_2}+\frac{x_3}{y_3-x_3}\geqslant\frac{3t}{3-t}.$$

Lời giải. Từ giả thiết đã cho thì

$$\frac{x_i}{y_i-x_i}>0,\quad \frac{y_i}{y_i-x_i}>0,\quad i=\overline{1,3}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{y_i}{y_i-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{y_i-x_i}{y_i}\right)\geqslant 3^2,$$

tương đương với

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{y_i}{y_i-x_i}\right)-3\geqslant\frac{3^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{y_i-x_i}{y_i}\right)}-3,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{y_i}{y_i-x_i}-1\right)\geqslant\frac{3^2}{\sum\limits_{i=1}^{3}\left(1-\frac{x_i}{y_i}\right)}-3,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{y_i-x_i}\geqslant\frac{3^2}{3-\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{x_i}{y_i}}-3,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{y_i - x_i} \geqslant \frac{3\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i}}{3 - \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{x_i}{y_i}}.$$

Đẳng thức của bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{y_1}{y_1 - x_1} = \frac{y_2}{y_2 - x_2} = \frac{y_3}{y_3 - x_3},$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}.$$

Mặt khác từ giả thiết đã cho thì

$$0 < t \leqslant \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{y_i} < 3.$$

Hiển nhiên sẽ được

$$\frac{3\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{x_i}{y_i}}{3 - \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{x_i}{y_i}} \geqslant \frac{3t}{3-t}.$$

Vậy

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{y_i - x_i} \geqslant \frac{3t}{3-t}.$$

Đẳng thức của bổ đề xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{t}{3}.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Mở rộng 2. *Cho a, b, c là ba số thực dương và $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{\alpha a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2}{\alpha b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2}{\alpha c^2 + ca + a^2} \geqslant \frac{3}{2+\alpha}. \tag{3}$$

Lời giải. Trường hợp $\alpha = 1$ thì (3) chính là (1).

Trường hợp $0 \leqslant \alpha < 1$. Với giả thiết đã cho thì

$$(1-\alpha)\, VT_{(3)} = \frac{(1-\alpha)\, a^2}{a^2 + ab + b^2 - (1-\alpha)\, a^2} + \frac{(1-\alpha)\, b^2}{b^2 + bc + c^2 - (1-\alpha)\, b^2}$$
$$+ \frac{(1-\alpha)\, c^2}{c^2 + ca + a^2 - (1-\alpha)\, c^2}.$$

Biểu thức vế phải của đẳng thức trên có các điều kiện đều phù hợp với giả thiết của bổ đề và theo (1) thì

$$\frac{(1-\alpha)\, a^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{(1-\alpha)\, b^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{(1-\alpha)\, c^2}{c^2 + ca + a^2} \geqslant (1-\alpha)\,.$$

Do đó theo bổ đề ta được

$$(1-\alpha)\,VT_{(3)} \geqslant \frac{3\,(1-\alpha)}{3-(1-\alpha)},$$

cho nên

$$VT_{(3)} \geqslant \frac{3}{2+\alpha},$$

hay

$$\frac{a^2}{\alpha a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{\alpha b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{\alpha c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{3}{2+\alpha}.$$

Dấu đẳng thức của (3) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Mở rộng 3. *Cho a, b, c là ba số thực dương và $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $k \geqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{\alpha a^2+kab+b^2}+\frac{b^2}{\alpha b^2+kbc+c^2}+\frac{c^2}{\alpha c^2+kca+a^2} \geqslant \frac{3}{\alpha+k+1}. \tag{4}$$

Lời giải. Trường hợp $\alpha=1$ thì (4), chính là mở rộng 1.

Trường hợp $0 \leqslant \alpha < 1$. Với giả thiết đã cho thì

$$(1-\alpha)\,VT_{(4)} = \frac{(1-\alpha)\,a^2}{a^2+kab+b^2-(1-\alpha)\,a^2}+\frac{(1-\alpha)\,b^2}{b^2+kbc+c^2-(1-\alpha)\,b^2}$$
$$+\frac{(1-\alpha)\,c^2}{c^2+kca+a^2-(1-\alpha)\,c^2}.$$

Biểu thức vế phải của đẳng thức trên có các điều kiện đều phù hợp với giả thiết của bổ đề và theo mở rộng 1 sẽ được

$$\frac{(1-\alpha)\,a^2}{a^2+kab+b^2}+\frac{(1-\alpha)\,b^2}{b^2+kbc+c^2}+\frac{(1-\alpha)\,c^2}{c^2+kca+a^2} \geqslant \frac{3\,(1-\alpha)}{k+2}.$$

Do đó theo bổ đề ta được

$$(1-\alpha)\,VT_{(4)} \geqslant \frac{3\cdot\frac{3(1-\alpha)}{k+2}}{3-\frac{3(1-\alpha)}{k+2}},$$

hay

$$VT_{(4)} \geqslant \frac{3}{\alpha+k+1}.$$

Hay

$$\frac{a^2}{\alpha a^2+kab+b^2}+\frac{b^2}{\alpha b^2+kbc+c^2}+\frac{c^2}{\alpha c^2+kca+a^2} \geqslant \frac{3}{\alpha+k+1}.$$

Dấu đẳng thức của (4) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Từ các mở rộng 1, 2, 3 nếu ta đặt $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{b}$, $z=\frac{a}{c}$ thì sẽ lại được các bất đẳng thức mở rộng tương đương tương ứng sau đây:

Mở rộng 4. *Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$ và $k \geqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x^2+kx+1}+\frac{1}{y^2+ky+1}+\frac{1}{z^2+kz+1}\geqslant\frac{3}{k+2}.$$

Mở rộng 5. *Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$, và $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Chứng minh*

$$\frac{1}{x^2+x+\alpha}+\frac{1}{y^2+y+\alpha}+\frac{1}{z^2+z+\alpha}\geqslant\frac{3}{2+\alpha}.$$

Mở rộng 6. *Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$ và $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ $k \geqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x^2+kx+\alpha}+\frac{1}{y^2+ky+\alpha}+\frac{1}{z^2+kz+\alpha}\geqslant\frac{3}{1+k+\alpha}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Trần Nam Dũng, 2017, Phương pháp giải toán qua các bài toán Olympic, NXB Thế giới.

[2] Phạm Kim Hùng, 2006, Sáng tạo bất đẳng thức, NXB Tri thức.

[3] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ Việt Nam.

[4] Tạp chí Epsilon Việt Nam

[5] Mạng Internet.

Ứng Dụng Machine Learning Vào Dự Báo Bệnh Mạch Vành

Nguyễn Duy Khuê
Bệnh viện Trường ĐHYD Cần Thơ
Henry Tran
The Pennsvsylvania State University

TỔNG QUAN

Hiện nay, kỷ nguyên công nghệ số được xem là một trong những xu hướng của thời đại, tác động đối với mọi lĩnh vực. Trong đó, lĩnh vực y tế cũng chịu tác động và còn nhiều tiềm năng chưa được khai phá cũng như việc ứng dụng các kỹ thuật khoa học trong cuộc cách mạng 4.0. Điển hình như hiện nay, là sự bùng nổ thuật ngữ trí tuệ nhân tạo (AI), một ví dụ điển hình của lĩnh vực này là Robot can thiệp mạch vành nhờ vào sự phát triển của thuật toán "*Machine Learning*".

"*Machine Learning*" là một chuyên nghành nhỏ của AI có rất nhiều thuật toán ứng dụng như: Linear Regression, Logistic Regression, Neural networks, Random Forest,... nó có chức năng tự học hỏi dựa trên dữ liệu đưa vào mà không phải lập trình sẵn. Cùng theo thời gian, bước tiến mới của Machine Learning là xử lý các dữ liệu khổng lồ như việc phân tích điểm khác biệt trong giọng nói của 1 người, đặc điểm nhận dạng trên một bức ảnh giải phẫu bệnh để đưa ra chẩn đoán bệnh, hay những bất thường trên siêu âm tim để gợi ý cho các Bác sĩ lâm sàng, đó là đến lúc ra đời lĩnh vực Deep Learning. Hay, thậm chí Deep Learning có thể tự đưa ra các gợi ý điều trị thuốc và tư vấn chế độ dinh dưỡng, dự phòng bệnh cho từng đối tượng bệnh nhân.

1. Phân tích dữ liệu trên các công cụ "Machine Learning"

Điều đặc biệt hiện nay, Deep Learning ứng dụng trong lĩnh vực khoa học sức khoẻ nói chung còn nhiều hạn chế và còn bỏ ngõ. Lý do giới hạn của việc này là các bác sĩ là những người bị động ứng dụng các kết quả từ các chuyên gia khoa học máy tính. Trong khi chính các chuyên gia về khoa học máy tính không thể nào hiểu rõ hết được những đòi hỏi cần có của các thuật toán Deep Learning ứng dụng trong y khoa. Đặc biệt hơn, hiện nay y học chứng cứ ngày càng phát triển thì điều đó cho thấy vai trò của "*Machine Learning*" ngày được đánh giá cao trong dự đoán các bệnh lí tim mạch.

Việc chẩn đoán bệnh nhân, đây là một công việc được thực hiện tỉ mỉ bởi các bác sĩ lâm sàng. Tuy nhiên ngày nay, những việc làm này có thể hoàn toàn thực hiện được bằng các thuật toán

Họ tên	Cholesterol toàn phần
Tuổi	Đường huyết lúc đói
Giới tính	Điện tâm đồ khi nghi ngơi
Phân loại đau ngực	Tần số tim
Huyết áp tâm thu khi nhập viện	Đau ngực khi gắng sức
Đặc điểm đoạn ST	Kết quả chụng động mạch vành
Bệnh mạch vành	

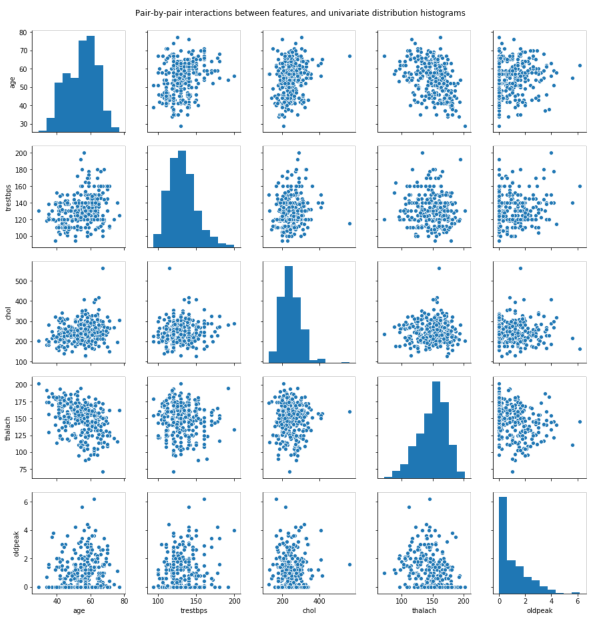
Bảng 1: Các biến số thường thu thập trong hồ sơ người bệnh

của "*Machine Learning*" dựa trên các dữ liệu sẵn có của bệnh nhân. Để phát hiện sớm và chính xác những bệnh nhân có mắc bệnh hay không.

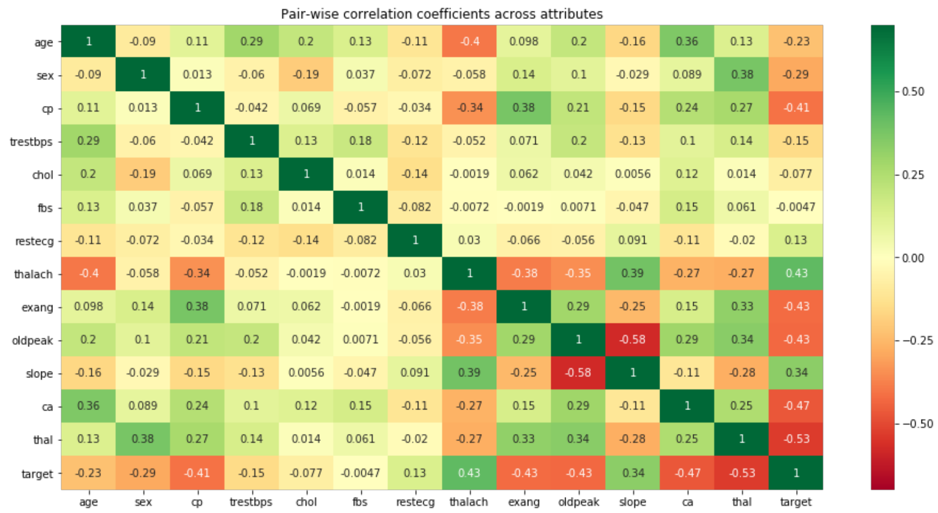
Phân tích dữ liệu là công việc bắt buộc phải làm trước khi thao tác các thuật toán trong "*Machine Learning*". Đối với các dữ liệu về bệnh động mạch vành ở các khoa lâm sàng hiện nay, chúng ta có thể thu thập được các thông tin cơ bản về các dữ liệu.

Trong đó dữ liệu bệnh mạch vành được chọn làm biến kết quả dự đoán. Đối với các biến số còn lại, sẽ được chọn làm biến số dự đoán.

Đây là dữ liệu cơ bản được thu thập từ các hồ sơ bệnh án của người bệnh. Đối với thuật toán "*Machine Learning*" các dữ liệu có thể trình bài từ hàng nghìn đến hàng triệu dòng, kích thước dữ liệu có thể lưu trữ dưới dạng GB. Trong việc phân tích dữ liệu, chúng ta cần xác định các kiểu biến số định tính và định lượng. Đối với các kỹ thuật đầu tiên khi phân tích dữ liệu, là cần xác định các mối tương quan của các biến số với bệnh mạch vành. Kế đến chúng ta có thể sử dụng kỹ thuật đánh khả năng phân phối của các biến số, và tìm hệ số tương quan với chẩn đoán là bệnh mạch vành ở Hình 1 và hình 2.



Hình 1:

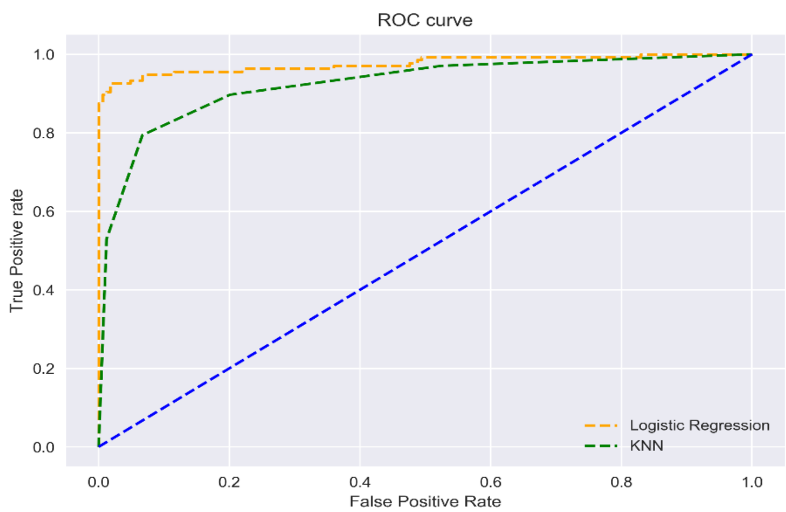


Hình 2:

2. Phân tích kết quả

Sau khi đánh giá mối liên quan, tìm ra hệ số tương của các biến với bệnh mạch vành. Sẽ tìm được các biến số liên quan chính. Để đánh giá được giá trị AUC, thì chúng ta chuyển các kiểu dữ liệu chữ liên quan sang dạng số liên tục. Khi thực hiện xong thao tác này, sẽ xuất hiện các biến số mới ở các cột mới.

Mục đích thao tác điều chỉnh các dữ liệu mang yếu tố nhiễu để giúp cho mô hình đạt giá trị AUC cao và có tính dự đoán cao hơn. Việc làm này giúp cho người phân tích, có thể tìm ra được nhiều sự kết hợp các biến với nhau. Dựa theo sự phối hợp các biến khác nhau và các mô hình dự đoán khác nhau như: Linear Logistic, Neuro Netwok, K-nearest neighbors,... (hình 3)



Hình 3:

Khi chúng ta có dữ liệu mới của một bệnh nhân vào viện, chúng ta có thể thực hiện thao tác trên mô hình có độ tin cậy cao. Từ đó kết quả sẽ là một gợi ý cho các Bác Sĩ lâm sàng ở biến bệnh mạch vành có nguy cơ ở bệnh nhân này có hay không?

3. Kết luận

Trên đây là cách thực hiện dự đoán bệnh mạch vành của bệnh nhân dựa vào các thuật toán của "*Machine Learning*". Ngoài bệnh mạch vành chúng ta có thể thực hiện cách thức tương tự đối với các bệnh lí khác. Ngoài mô hình dự đoán bệnh tật, chúng ta có thể thực hiện mô hình gợi ý điều trị cho bệnh nhân dựa vào các biến số trên dữ liệu của bệnh nhân. Đây là một trong rất nhiều hướng phát triển, của trí tuệ nhân tạo trong lĩnh vực sức khoẻ.

Tài liệu tham khảo

[1] GBD 2015 Mortality Causes of Death Collaborators. Global, regional, and national life expectancy, all-cause mortality, and cause-specific mortality for 249 causes of death, 1980–2015: a systematic analysis for the Global Burden of Disease Study 2015. Lancet 388(10053), 1459–1544 (2016).

[2] Obermeyer Z, Ezekiel JE. Predicting the future – big data, machine learning, and clinical medicine. N. Eng. J. Med. 375(13), 1216–1219 (2016).

[3] Tsay D, Patterson C. From machine learning to artificial intelligence applications in cardiac care: real-world examples in improving imaging and patient access. Circulation 138(22), 2569–2575 (2018).

[4] Cuocolo R, Perillo T, De Rosa E, Ugga L, Petretta M. Current applications of big data and machine learning in cardiology. J. Geriatr. Cardiol. 16(8), 601–607 (2019).

THẦY LÊ HẢI CHÂU VÀ IMO 1983

Trần Nam Dũng

Năm 1974, lúc đó tôi mới học lớp 2, ba đem về cuốn sách 16 *Kỳ thi toán quốc tế* do các thầy Lê Hải Châu và Phan Đức Chính biên soạn. Ba mua về cho chị Hà nhưng tôi cũng đọc lóm. Lúc đó tôi còn quá nhỏ để hiểu các vấn đề về toán, chỉ chăm chú đọc về chiến tích của đoàn Việt Nam, của Hoàng Lê Minh, Vũ Đình Hòa, Nguyễn Quốc Thắng, Tạ Hồng Quảng, Đặng Hoàng Trung. Đọc như đọc truyện nhưng quả thật là rất hứng thú và tạo cảm hứng.

Lúc đó toán của tôi mới chỉ là mấy phép tính số học, toán trồng cây, toán diện tích khu vườn. Những quyển sách thân thiết nhất của tôi lúc đó là *Em hãy tự giải!* và *Em muốn giỏi toán?* Nhưng những cuốn sách toán của chị Hà (do thầy Lê Hải Châu biên soạn) cũng được ba mẹ gói ghém đem vào Đà Nẵng (lúc đó gia tài của cả nhà quả thật chỉ có mấy cái chăn bông và ... sách).

Tôi vào Đà Nẵng, học ở một trường THCS bình thường và học toán không tệ. Đến năm lớp 8 lớp 9, trường cho đi thi học sinh giỏi nên tôi bắt đầu chú ý hơn đến học toán. Lúc đó tôi thích nhất các bài toán quỹ tích và dựng hình, còn đại số thì thích phân tích ra thừa số và bất đẳng thức. Tôi bắt đầu đi lùng sách báo ở Thư viện và tìm được các bài viết của thầy Lê Hải Châu trên báo Khoa học và Đời sống (lúc cấp 2 tôi chưa biết đến tạp chí Toán học và tuổi trẻ). Thỉnh thoảng tôi được mẹ cho lên Hòa Khánh, chỗ cô Ngũ và các thầy cô dạy toán, tôi cũng học mót được một chút. Đặc biệt là các chú giáo viên trẻ ở trường Phan Chu Trinh (sau này tôi gọi là anh) Nguyễn Thanh, Đặng Thanh, Nguyễn Nhân có những cuốn sách từ miền Bắc mang vào.

Đến năm 1981 tôi may mắn đậu vào chuyên toán, lúc đó thực sự tôi mới tập trung học toán, biết đến báo Toán học tuổi trẻ và đọc nhiều hơn các bài viết, cuốn sách của thầy Lê Hải Châu. Hồi đấy sách báo đến in giấy xấu, sách mỏng, đơn sơ, bìa mỏng và không có trang trí mĩ thuật gì, không đẹp như sách bây giờ nhưng các cuốn sách vẫn luôn được nâng niu, chuyền tay nhau để đọc. Tôi tập thói quen ghi chép từ dạo ấy vì sách toàn độc bản và photocopy thì lúc đó thật xa xỉ. Tôi nghĩ chính điều kiện khó khăn đấy khiến các cuốn sách của thầy Châu, thầy Chính, thầy Phi và các thầy cô khác lúc đó lại trở nên quý và hiệu quả hơn.

Đến năm 1983, thông tin kỳ IMO sẽ được tổ chức tại Paris, Pháp làm chúng tôi rất hào hứng, đặc biệt là tôi vì trong lớp chỉ có tôi và Trần Quý Phi học tiếng Pháp. Tôi may mắn được giải khuyến khích quốc gia, sau đó lọt vào Top 6 trong niềm vui mừng tột độ của nhà trường, thầy cô, bạn bè, cha mẹ. Hồi đó máy bay về Đà Nẵng tuần chỉ có 1, 2 chuyến nên thi xong tôi ở lại, đến hôm thầy Lê Hải Châu đến Nhà khách số 2 Trịnh Hoài Đức công bố kết quả tôi vẫn còn ở đó nên tôi (và hai anh Quốc học Huế) đã ở lại luôn để học chứ không về.

Năm đó thầy Lê Hải Châu và cô Hoàng Xuân Sinh dẫn đoàn, và thầy Lê Hải Châu là người sắp xếp cho chúng tôi mọi thứ. Từ lịch học (chúng tôi được học với các thầy hồi đó còn trẻ và sung sức như thầy Lê Đình Thịnh, Nguyễn Đăng Phất, Phan Huy Khải, Nguyễn Văn Thu, Đỗ Bá Khang, Tạ Hồng Quảng,...). Thầy Châu dạy chúng tôi vài buổi về số học và lượng giác. Thầy lo cho chúng tôi những việc ngoài chuyên môn nữa. Có lần chúng tôi không chịu ăn tối vì nói thịt bị ôi, thế là thầy phải đến nói chuyện với toàn đội, trao đổi với cô cấp dưỡng để ổn định tình hình. Lũ trẻ chúng tôi thì đang tuổi nghịch phá nên lúc nào cũng mong mất điện để trốn đi chơi. Thầy không nghiêm có mà toang.

Đến lúc sắp đi, chúng tôi được thầy dẫn đến cửa hàng chú Tứ ở Cửa Nam để mượn va-li, giày tây, áo veste, thầy mới nhà báo Hàm Châu đến phỏng vấn, chụp ảnh.

Đầu tháng 7, chúng tôi bay sang Moskva trên máy bay của Aeroflot, nghỉ lại một đêm rồi sáng hôm sau đi sang Paris. Đến Paris, chúng tôi được xe của Đại sứ quán (ĐSQ) chở về nhà khách ĐSQ ở số 2 Le Verrier. Chúng tôi ở đây 1 tuần trước khi vào địa điểm tập trung của IMO 1983 là Lyccee Louis Le Grande. Hàng ngày chúng tôi tự ăn sáng ở nhà khách. Vì biết tiếng Pháp nên thầy Châu giao tôi đi mua bánh mì bơ cho cả đoàn ở một tiệm gần cuối đường. Sau đó chúng tôi được xe của ĐSQ đưa đến ĐSQ. Lúc đó sứ quán vừa xây xong, to, đẹp và có rất nhiều tầng âm. Chúng tôi được sắp xếp ngồi học ở sảnh nhưng thực ra lúc đó chẳng ai còn tập trung học được nữa, chỉ chờ thầy Châu đi là bất ti vi xem tennis, bóng đá, game-show và khám phá sứ quán.

Biết chúng tôi trẻ con nên thầy Châu phải dặn dò nhiều thứ, từ việc không được đi lên đi xuống bằng thang máy nhiều, đến việc tiết kiệm điện, nước. Thầy nói chúng tôi đi nhờ các chú sứ quán cắt tóc nhưng không quên đưa tiền để chúng tôi bỏ vào cái thùng làm quỹ của các cô chú ở ĐSQ.

Đến khi vào trường Lycee Louis Legrande, thầy bày chúng tôi cách lấy đồ ăn, trong bữa ăn luôn hỏi chuyện, pha trò giúp chúng tôi đỡ căng thẳng. Có bữa thầy còn chỉ cho chúng tôi một bạn nữa của đoàn Brazil và hỏi các em có thấy bạn đó đẹp không. Khi chúng tôi nói "có" thì thầy nói "*Mấy thầy Brazil cũng hỏi thầy như vậy. Khi thầy trả lời có thì mấy ổng nói "Tao đem nó đi chỉ vì nó đẹp đấy!*".

Mấy buổi thi qua nhanh. Thầy Châu cùng cô Sính chấm bài và luôn cập nhật tình hình cho chúng tôi. Đến hôm có kết quả, thầy hơi buồn vì không có huy chương vàng, nhưng thành tích chung là ổn. Thầy hớn hở đem tờ Liberation về cho chúng tôi xem, báo giựt tít 186 bộ óc thi tài cùng 6 bài toán vỡ đầu, trong bài có phỏng vấn bạn Nadia của đoàn Algeria bạn ấy nói bạn ấn tượng nhất là đoàn CHLB Đức và đoàn Việt Nam.

Hôm trao giải ở Sorbonne, có đại diện của Việt kiều đến cổ vũ và tặng quà cho đoàn rất vui và cảm động. Sau IMO, chúng tôi ở lại Pháp thêm một tuần nữa, được ĐSQ chiêu đãi được đi thăm thú, đến nhà các cô chú Việt kiều, đặc biệt được đến thăm GS Hoàng Xuân Hãn ở một căn biệt thự bên bờ biển.

Từ Pháp về, chúng tôi lại ghé Moskva, nhưng lần này ở lại đúng một tuần. Anh Lê Hải Khôi con trai thầy Châu đến dẫn đi thăm thú khắp nơi. Vì vậy những địa danh như Quảng trường Đỏ, đồi Lê Nin, Sum, Gum là chúng tôi cũng đã được biết từ năm 1983 chứ không phải chờ đến năm đi học Nga mới biết. Và ước mơ được đi tàu điện ngầm bằng đồng 5 cô-pếch thời nhỏ đã thành hiện thực với cậu bé 17 tuổi.

Hai tháng học tập huấn, sau đó là chuyến đi thi kéo dài 4 tuần (3 tuần ở Pháp và 1 tuần ở Nga), chúng tôi thì vô tâm vô tư, chỉ biết học và chơi, chứ đâu biết rằng người lớn đã phải lo lắng, sắp xếp cho chúng tôi bao nhiêu thứ, đặc biệt là thầy Lê Hải Châu.

Trong câu chuyện của mình, tôi chỉ tập chung nói về ảnh hưởng của thầy Lê Hải Châu đối với bản thân tôi, đặc biệt là trong các kỳ thi quan trọng của năm 1983. Nhiều thế hệ đàn anh và đàn em của tôi cũng đều nhớ đến thầy Châu và các cuốn sách của thầy. Thậm chí như mẹ tôi cũng được học với thầy và em trai của thầy.

Sau gần 100 năm sống và cống hiến cho cuộc đời, với những đóng góp cho ngành giáo dục và đặc biệt là cho nhiều thế hệ học sinh chuyên toán, thầy Lê Hải Châu đã từ trần ngày $30/1/2022$, hưởng thọ 97 tuổi. Sáng $5/2/2022$, lễ viếng và lễ truy điệu Nhà giáo nhân dân Lê Hải Châu vừa được cử hành tại Hà Nội. Từ phương Nam, tôi viết bài này thay mặt cho các học trò IMO của thầy đang làm việc và sinh sống ở Sài Gòn gửi nén tâm nhang đưa tiễn thầy về cõi vĩnh hằng.

Và trên giá sách nhà tôi, trên kệ sách thư viện trường tôi, những cuốn sách của thầy Lê Hải Châu vẫn luôn được đặt ở những vị trí trang trọng. Và sẽ vẫn được tiếp tục sử dụng.

1. Một số bài toán xuất hiện trong chiến dịch IMO 1983 của tôi

Bài toán 1 (VMO 1983). *Cho tam giác ABC và số thực $k > 0$. Với điểm M nằm trong tam giác, gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho diện tích tam giác DEF bằng k.*

Bình luận. Bài toán này sẽ được giải dễ dàng nếu biết định lý Euler về tam giác Pedal. Một sự tình cờ là đúng tối hôm trước khi thi, tôi lật cuốn sách cũ của Nguyễn Văn Phú và đọc được ở trang cuối cùng của cuốn sách đó có phép chứng minh định lý đẹp đẽ này (phát biểu dưới dạng một bài toán có nhiều câu hỏi), sử dụng phương tích. Sau này, khi ra thi chọn đội tuyển ở Hà Nội, tôi được thầy Nguyễn Phong Cảnh ở Đồng Nai chép thêm cho một cách chứng minh khác sử dụng véc-tơ và tâm tỷ cự. Tôi sẽ viết về cách chứng minh này cũng như các ứng dụng khác của véc-tơ và tâm tỷ cự ở một bài viết trong Chuyên đề toán học PTNK tới đây.

Bài toán 2 (VMO 1983). *Cho một tứ diện trong đó các cặp cạnh đối diện bằng nhau đôi một và theo thứ tự bằng a, b, c (với $a < b < c$). Một mặt phẳng cắt tứ diện đã cho theo một tứ giác. Hãy tìm vị trí của mặt phẳng sao cho tứ giác thiết diện có chu vi bé nhất. Trong điều kiện nói trên hãy tìm quỹ tích của những trọng tâm của các tứ giác thiết diện.*

Bình luận. Tôi gặp bí ở bài này. Tôi định dùng phương pháp tính toán nhưng không thành công. Bài này được giải một cách khá nhẹ nhàng bằng cách trải tứ diện gần đều ra mặt phẳng đáy. Tuy thất bại nhưng chính phương pháp tính toán ở bài này đã giúp tôi giải quyết tốt bài TST sau đó.

Bài toán 3 (Vietnam TST 1983). *Cho các đa thức $P(x)$, $Q(x)$ thỏa mãn điều kiện*

$$P^2(x) = (x^2 + 1)Q^2(x) + 1.$$

Chứng minh rằng $P'(x) = nQ(x)$ trong đó $n = \deg(P)$.

Bình luận. Bài này thuộc sở trường của tôi. Hồi đó chương trình miền Nam đã học giải tích nên phần giới hạn, liên tục, đạo hàm tôi nắm khá tốt. Lại được rèn luyện thêm bởi cuốn *Vô địch toán sinh viên của Liên Xô* (cuốn sách màu nâu) do anh Tiến chị Hà đem về nên các kiến thức về giải tích của tôi khá vững vàng. Điều này đem lại khá nhiều lợi thế cho tôi, mặc dù ở các mảng khác như hình học, số học, tổ hợp thì tôi hơi kém.

Bài toán 4 (Vietnam TST 1983). *Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Biết rằng bán kính đường tròng ngoại tiếp 6 tam giác APG, ANG, BPG, BMG, CNG, CMG bằng nhau. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.*

Bình luận. Tôi giải được bài này bằng phương pháp tính toán. Các tam giác nhỏ nói trên đều có diện tích bằng nhau nên sử dụng công thức $r = \frac{S}{p}$ ta suy ra chu vi các tam giác nhỏ bằng nhau. Từ đó, nếu so sánh cho vi các tam giác BMG và CMG sẽ suy ra ngay $BM = CM$ từ đó mọi chuyện dễ dàng. Điều đáng nói là khi làm bài thi, tôi đã không so sánh chu vi hai tam giác này mà lại so sánh chu vi hai tam giác AGP và AGN nên mặc dù giải ra nhưng phức tạp hơn hẳn.

Bài toán 5 (Vietnam TST 1983). *Trong mặt phẳng cho 3 tia Ox, Oy, Oz và đoạn thẳng có độ dài p. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất bộ 3 điểm P thuộc Ox, Q thuộc Oy, R thuộc Oz sao cho chu vi các tam giác OPQ, OQR và ORP đều bằng nhau và bằng $2p$.*

Bình luận. Đây là niềm tự hào không nhỏ của tôi vì lúc bấy giờ hình như tôi là người duy nhất đạt điểm tối đa ở bài này. Tôi đã giải nó bằng phương pháp đại số-giải tích. Đã đặt $\angle xOy = \alpha$, $\angle yOz = \beta$ là các tham số, $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ là các ẩn số rồi dùng định lý hàm số cos để tính ra AB, BC, CA, từ đó thu được một hệ 3 phương trình, 3 ẩn số. Dùng các phép biến đổi đại số tôi khử được các ẩn, đưa về phương trình một ẩn, thế rồi dùng tính chất hàm liên tục để chứng minh phương trình này có nghiệm và dùng đạo hàm để chứng minh phương trình đó có nghiệm duy nhất. Có lẽ lời giải này đã tạo ấn tượng tốt với các vị giám khảo.

Bài toán 6 (Luyện đội 1983, VMO 1984). *Cho dãy số u_n xác định bởi $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$ với mọi $n \geqslant 2$. Tìm giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arccotan}(u_k).$$

Bình luận. Bài này lấy trong đề luyện đội 1983 và năm sau đó được sử dụng trong đề VMO 1984 với cách phát biểu hơi khác một chút. Bài này chủ yếu sử dụng tính chất của dãy Fibonacci và công thức

$$\operatorname{arccotan}(x) + \operatorname{arccotan}(y) = \operatorname{arccotan}\left(\frac{xy-1}{x+y}\right).$$

Bài toán 7 (Luyện đội 1983). *Cho chuỗi $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối. Chứng minh rằng với mọi số thực s, tồn tại một cách sắp xếp thứ tự các phần tử của chuỗi để được một chuỗi hội tụ về s.*

Bình luận. Bài này tôi nhớ thầy Đỗ Bá Khang ra trong đề kiểm tra. Bài kiểm tra này tôi được 9 điểm, là lần hiếm hoi tôi có điểm kiểm tra cao nhất đội tuyển. Hồi đó điểm kém nhất của tôi rơi vào các bài kiểm tra hình học của thầy Phất.

Bài toán 8 (Vietnam TST 1982). *Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Bình luận. Bài này lúc luyện đội các thầy có cho làm và chúng tôi đã xử lý khá tốt nhờ dạng bất đẳng thức mà sau này gọi là bất đẳng thức Schwarz dạng Engel. Hồi đó tôi đọc được dạng này trong một bài của thầy Lê Quốc Hán (chứng minh bằng quy nạp), sau đó lại có bài bình luận của thầy Lê Thống Nhất nói rằng đó chẳng qua là hệ quả của bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovsky. Thú vị là năm 1989 khi tôi tốt nghiệp Đại học về nước đến thăm cậu Ninh tôi thì thấy bài này trong vở học của em Nhung, lúc đó mới học lớp 8!

Bài toán 9 (IMO 1983). *Cho a, b, c là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $2abc - ab - bc - ca$ là số nguyên lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $abx + bcy + caz$ với x, y, z là các số nguyên không âm.*

Bình luận. Đây là bài toán liên quan đến chủ đề bài toán Frobenius về các đồng xu: *Nếu a_1, $a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên dương thỏa $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ thì tồn tại số $G = G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

(i) *G không biểu diễn được dưới dạng $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ với $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số nguyên không âm.*

(ii) *Với mọi số $N > G$ đều biểu diễn được dưới dạng $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ với $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số nguyên không âm.*

Với $n = 2$, định lý Sylvester khẳng định rằng $G(a,b) = ab - a - b$ nhưng với $n > 2$, hiện chưa có công thức nào tính G theo các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ trừ một số các trường hợp đặc biệt và bài IMO 1983 là một trong các trường hợp đặc biệt đó.

Sau này đề Vietnam TST 2000 cũng khai thác thêm bài IMO 1983 để đếm số các số bướng bỉnh là các số không biểu diễn được dưới dạng $abx + bcy + caz$ với x, y, z nguyên dương.

Bài toán 10 (IMO 1983). *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh rằng*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0. \tag{1}$$

Bình luận. Tôi kết bài này bằng phần bình luận về bài toán này mà tôi đã viết trong Epsilon số 5, trong đó có nhắc đến những kỷ niệm về IMO 1983, về người bạn Đức và về thầy Lê Hải Châu.

Năm đó cả đội bí bài này, chỉ có Trần Tuấn Hiệp đi xa nhất và có tổng điểm là 31. Tôi cũng được 1 điểm ở bài này nhưng lại bị trừ 1 điểm ở bài hình nên cuối cùng được 28 điểm.

Thầy Lê Hải Châu kể lại là khi phát Short list cho các trưởng đoàn thì không ai giải được bài này (đoàn Việt Nam cũng không ai làm được). Cho nên khi BGK thấy có lời giải chỉ 2 dòng thì quá ấn tượng và đã họp để trao giải đặc biệt cho Bernhard Leeb.

Tìm hiểu thêm thì trước đó Bernhard đã 2 lần thi IMO và năm 1984 còn thi thêm một lần nữa. Các năm 1981, 1982, 1984 Bernhard đều được HCB, dù điểm rất cao (thấp nhất là 35). Nếu là bây giờ thì Bernhard đã đạt 4 HCV, một thành tích đáng nể.

Bernhard rất giỏi ngoại ngữ. Cậu biết tiếng Pháp, tiếng Anh. Sau này khi tôi học ở Moscow vẫn thỉnh thoảng trao đổi thư từ (và ảnh mấy cô bạn gái người Nga). Hiện nay Bernhard Leeb là GS đầu ngành của ĐH Munchen, có nhiều công trình toán học giá trị.

Dưới đây chúng tôi trình bày 2 lời giải của bài toán này. Lời giải chính thức của Ban giám khảo và lời giải 2 dòng của Bernhard Leeb.

Lời giải 1. (Ban giám khảo) Vì a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên nếu đặt nên ta có thể đặt $a = y + z$, $b = z + x$ và $c = x + y$ với $x, y, z > 0$.

Thay vào và thực hiện biến đổi, ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geqslant xyz(x + y + z). \tag{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có

$$(xy^3 + yz^3 + zx^3)(z + x + y) \geqslant xyz(y + z + x)^2.$$

Với dấu bằng xảy ra khi $\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}$. Tức là dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Vậy dấu bằng xảy ra ở bất đẳng thức ban đầu khi và chỉ khi tam giác đã cho là tam giác đều. □

Trong lời giải này, mấu chốt là sử dụng phép thế $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ (được gọi là phép thế Ravi, khi đi thi vào năm 1983, chúng tôi chưa hề biết đến phép thế này) để đưa bất đẳng thức 1 chỉ đúng với a, b, c là ba cạnh của một tam giác về bất đẳng thức 2 đúng với mọi $x, y, z > 0$, tức là giải quyết được khó khăn về điều kiện ràng buộc.

Lời giải 2. (Bernhard Leeb) Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} &a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = \\ &\qquad = a(b+c-a)(b-c)^2 + b(a-b)(a-c)(a+b-c) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải này chính tay Bernhard Leeb đã viết cho tôi trên một tấm bưu thiếp. Tiếc là qua nhiều năm với nhiều lần di chuyển, tôi không còn giữ được tấm bưu thiếp quý đó mà chỉ nhớ lời giải cũng những kỷ niệm về người bạn trong ký ức của mình.

IMO 1983 đã qua được gần 40 năm. Chúng tôi, những cô cậu bé 17, 18 tuổi hồi đó giờ đã thành U60. Nhiều thầy giáo của chúng tôi đã ra đi: Lê Đình Thịnh, Phan Đức Chính, Nguyễn Đăng Phất, Lê Hải Châu,... Bài viết này như muốn lưu giữ lại những kỷ niệm về họ, những kỷ niệm về một thời vô tư lự ngày xưa của chúng tôi.