2.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง

2.2.1 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลังซึ่งมีรูปแบบ $\int \sin^m u \cos^n u du$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในรูปแบบดังกล่าวจะแบ่งการอินทิเกรตได้ดังนี้

กรณี 1 : ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคี่ ในที่นี้เราจะเขียน $m = 2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$ จากนั้นใช้การจัดรูปเชิงอนุพันธ์ $\sin u du = -d(\cos u)$ ซึ่งรูปแบบที่ได้จะลดรูปไปเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

กรณี 2 : ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ ในที่นี้เราจะเขียน $n = 2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ จากนั้นใช้การจัดรูปเชิงอนุพันธ์ $\cos u du = d(\sin u)$ ซึ่งรูปแบบที่ได้จะลดรูปไปเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 8 จงหา $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

ตัวอย่างที่ 9 จงหา $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

ตัวอย่างที่ 10 จงหา $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$

ตัวอย่างที่ 11 จงหา $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$

ตัวอย่างที่ 12 จงหา $\int \sin^5 x dx$

กรณี 3 : ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ในที่นี้เราใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2} \text{ และ } \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

ซึ่งรูปแบบที่ได้จะลดรูปไปเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 13 จงหา $\int \sin^2 x dx$

วิธีทำ

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

เราสามารถสรุปเป็นสูตรได้ คือ

$$\boxed{\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} + c}$$

และในทำนองเดียวกันจะได้

$$\boxed{\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + c}$$

ตัวอย่างที่ 14 จงหา $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

วิธีทำ

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (2\sin x \cos x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right) + c$$

2.2.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลังซึ่งมีรูปแบบ $\int \sec^m u \tan^n udu$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในรูปแบบดังกล่าวจะแบ่งการหาปริพันธ์ออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณี 1: ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่ ในที่นี้เราจะเขียน $m = 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sec^2 u = 1 + \tan^2 u$ จากนั้นใช้การจัดรูปเชิงอนุพันธ์ $\sec^2 udu = d(\tan u)$ ซึ่งรูปแบบที่ได้จะลดรูปไปเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 15 จงหา $\int \sec^2 x \tan^4 xdx$

ตัวอย่างที่ 16 จงหา $\int \sec^4 x \tan^3 xdx$

ตัวอย่างที่ 17 จงหา $\int \sqrt[3]{\tan x}\sec^4 x dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\tan x}\sec^4 x dx &= \int \sqrt[3]{\tan x}\sec^2 x(\sec^2 x dx)\\ &= \int \sqrt[3]{\tan x}(1+\tan^2 x)d(\tan x)\\ &= \int (\sqrt[3]{\tan x}+\tan^{\frac{7}{3}} x)d(\tan x)\\ &= \frac{3}{4}\tan^{\frac{4}{3}} x+\frac{3}{10}\tan^{\frac{10}{3}} x+c\end{aligned}$$

กรณี 2: ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ ในที่นี้เราจะเขียน $n=2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\tan^2 u=\sec^2 u-1$ จากนั้นใช้การจัดรูปเชิงอนุพันธ์ $\sec u\tan u du = d(\sec u)$ ซึ่งรูปแบบที่ได้จะลดรูปไปเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 18 จงหา $\int \sec^3 x\tan^5 x dx$

กรณี 3: ถ้า m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ จะใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ทีละส่วน

ตัวอย่างที่ 19 จงหา $\int \sec^3 x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sec x$ จะได้ $du = \sec x \tan x dx$ และให้ $dv = \sec^2 x dx$ จะได้ $v = \tan x$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x)\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$2\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$
$$2\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x - \tan x|$$

เพราะฉะนั้น

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x - \tan x|) + c$$

2.3 การหาอินทิเกรตโดยวิธีแทนค่าเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Substitution)

ในการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีเทอมของ $\sqrt{a^2 \pm b^2u^2}$ หรือ $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$ โดยที่ $a, b > 0$ เราจะเปลี่ยนตัวแปรด้วยการแทนค่าเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังต่อไปนี้

รูปแบบการอินทิเกรต	การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เงื่อนไข
$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$bu = a\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$bu = a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$bu = a\sec\theta$	$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ หรือ $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$