4. ลำดับและอนุกรม (Sequence and Series)

บทนิยาม *ลำดับ (Sequence)* คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
นั่นคือ $a_n = f(n)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

- ลำดับ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ หรือ $\{a_n\}$
- จำนวนต่างๆในลำดับ เรียกว่า พจน์ (Term) ของลำดับ
- เราเรียก a_n ว่าพจน์ที่ n ของลำดับหรือพจน์ทั่วไป

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนห้าพจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

1. $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$

2. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์ที่ n ของลำดับต่อไปนี้ เมื่อ $n \geq 1$

1. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{27}, \dfrac{4}{81}, \ldots$ $a_n =$ ....

2. $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \ldots$ $a_n =$ ....

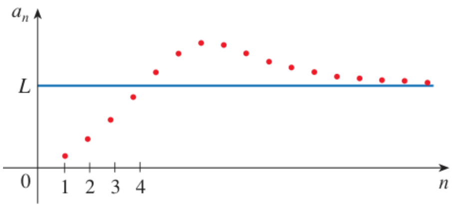
3. $-1, \dfrac{4}{5}, -\dfrac{6}{8}, \dfrac{8}{11}, \ldots$ $a_n =$ ....

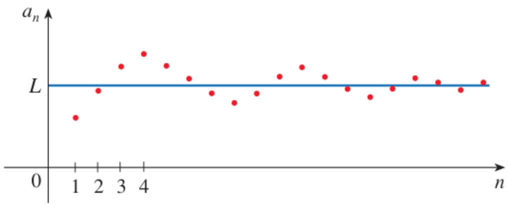
4. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{7}{11}, \ldots$ $a_n =$ ....

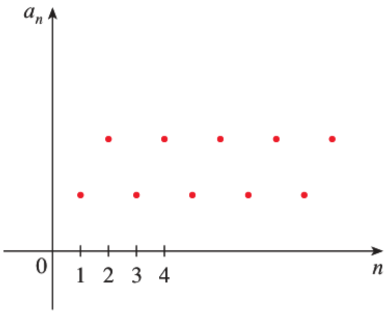
SEQUENCE	BRACE NOTATION
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$	$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$	$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \ldots$	$\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$	$\{2n-1\}_{n=1}^{+\infty}$

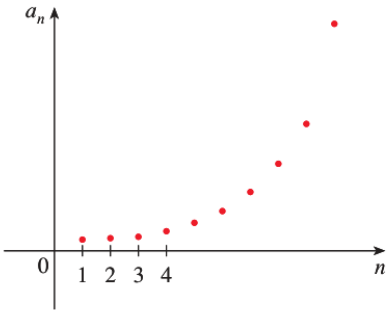
ลิมิตของลำดับ (Limit of Sequence)

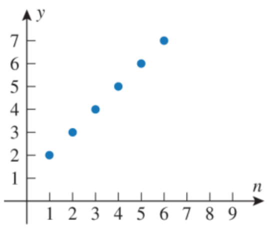
<u>บทนิยาม</u> ลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ เรียกว่า*ลู่เข้า (Converge)* สู่ค่าสู่ค่าจำนวนจริง L ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ และเรียก L *ว่าลิมิตของลำดับ*



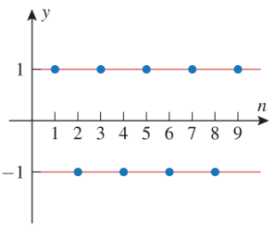




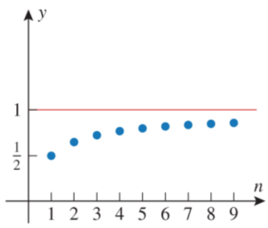




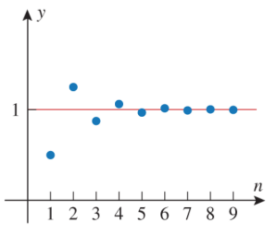
$\{n+1\}_{n=1}^{+\infty}$



$\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{+\infty}$



$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$



$\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$

<u>ทฤษฎีบทของลิมิต (Theorem of Limits)</u>

กำหนดให้ลำดับ $\{a_n\},\{b_n\}$ มีลิมิตคือ L, M ตามลำดับและ c เป็นค่าคงที่แล้ว

1. ลิมิตของลำดับจะต้องมีค่าเพียงค่าเดียว (Unique)

2. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = cL$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \pm b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \pm M$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = LM$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = f(L)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

8. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาว่าลำดับต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าๆสู่ค่าใด

1. $\dfrac{5}{3}, \dfrac{8}{7}, \dfrac{11}{11}, \dfrac{14}{15}, \ldots$

2. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. $\left\{\dfrac{2n+3}{3n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4. $\left\{n^2+1\right\}_{n=1}^{\infty}$

5. $\left\{(-1)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

6. $\left\{\ln\left(\dfrac{5n+1}{3n+4}\right)\right\}$

7. $\left\{\cos\left(\dfrac{n^2\pi}{2n^2+3n+1}\right)\right\}$

8. $\left\{\sqrt{\dfrac{n^2+4}{4n^2+1}}\right\}$

ลำดับทางเดียว (Monotone Sequence)

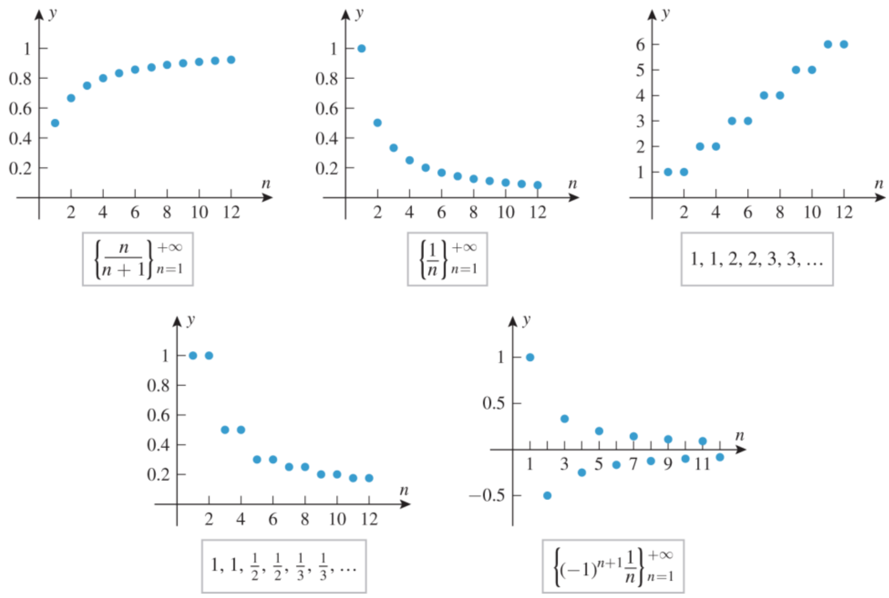
<u>บทนิยาม</u> ลำดับ $\{a_n\}$ เรียกว่าเป็นลำดับ

1. *เพิ่มขึ้น (Increasing)* ก็ต่อเมื่อ $a_n < a_{n+1}$ สำหรับทุกๆจำนวนนับ n

2. *ไม่ลดลง (Non decreasing)* ก็ต่อเมื่อ $a_n \le a_{n+1}$ สำหรับทุกๆจำนวนนับ n

3. *ลดลง (Decreasing)* ก็ต่อเมื่อ $a_{n+1} < a_n$ สำหรับทุกๆจำนวนนับ n

4. *ไม่เพิ่มขึ้น (Non increasing)* ก็ต่อเมื่อ $a_{n+1} \le a_n$ สำหรับทุกๆจำนวนนับ n

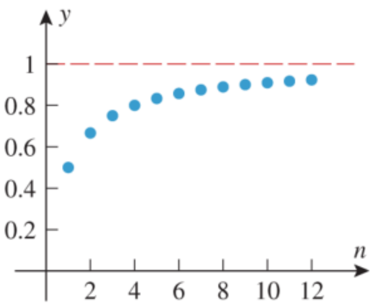


วิธีการตรวจสอบชนิดลำดับทางเดียว

1. Check จากผลต่าง

ผลต่าง	ชนิดของลำดับ
$a_{n+1}-a_n>0$	เพิ่มขึ้น
$a_{n+1}-a_n<0$	ลดลง
$a_{n+1}-a_n\geq 0$	ไม่ลด
$a_{n+1}-a_n\leq 0$	ไม่เพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าลำดับ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น เป็นลำดับทางเดียวชนิดใด



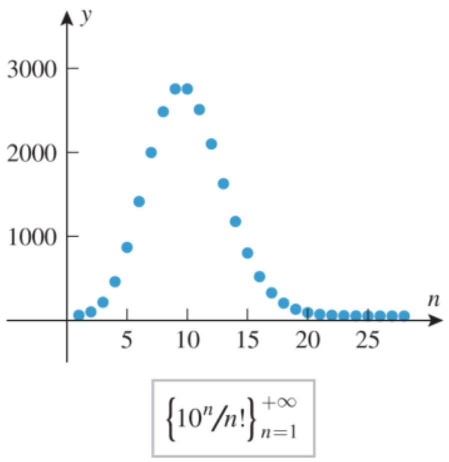
$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

2. Check จากอัตราส่วน

อัตราส่วน	ชนิดของลำดับ
$a_{n+1}/a_n>1$	เพิ่มขึ้น
$a_{n+1}/a_n<1$	ลดลง
$a_{n+1}/a_n\geq 1$	ไม่ลด
$a_{n+1}/a_n\leq 1$	ไม่เพิ่ม

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าลำดับ $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น เป็นลำดับทางเดียวชนิดใด

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าลำดับ $\left\{\dfrac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น เป็นลำดับทางเดียวชนิดใด



3. Check จากอนุพันธ์

อนุพันธ์ $f(x),\ x \ge 1; f(n) = a_n$	**ชนิดของลำดับ**
$f'(x) > 0$	เพิ่มขึ้น
$f'(x) < 0$	ลดลง

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น เป็นลำดับทางเดียวชนิดใด

1. $\{\tan^{-1} n\}$

2. $\left\{\dfrac{3n-2}{n}\right\}$

3. จงพิจารณาว่าลำดับ $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็นแล้วเป็นลำดับทางเดียวชนิดใด

4. จงพิจารณาการลู่เข้าของลำดับ $\left\{3-\dfrac{1}{2^{n-2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจะลู่เข้าสู่ค่าใด การเป็นลำดับทางเดียว ว่าเป็นหรือไม่เป็น และในกรณีที่เป็นลำดับทางเดียว ให้ระบุด้วยว่าเป็นลำดับทางเดียวชนิดใด

ขอบเขตของลำดับ (Boundedness of Sequence)

<u>บทนิยาม</u> :

1. ลำดับ $\{a_n\}$ มี*ขอบเขตบน (Upper Bound)* ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง M ที่ทำให้ $a_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}$ และเรียก M ว่าเป็น*ขอบเขตบนน้อยสุด (Least upper bounded)* ของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ

1.1 M เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$

1.2 M มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับขอบเขตบนทุกตัวของ $\{a_n\}$

2. ลำดับ $\{a_n\}$ มี*ขอบเขตล่าง (Lower Bound)* ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง N ที่ทำให้ $N \le a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ และเรียก N ว่าเป็น*ขอบเขตล่างมากสุด (Greatest lower bounded)* ของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ

2.1 N เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$

2.2 N มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับขอบเขตล่างทุกตัวของ $\{a_n\}$

3. ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

<u>ทฤษฎีบท</u> : ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับทางเดียวและมีขอบเขตแล้วลำดับ $\{a_n\}$ จะลู่เข้า

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้มีขอบเขตหรือไม่ ถ้ามีจงบอกขอบเขตล่างและขอบเขตบน

1.1 $1, 4, 9, 16, \ldots$

1.2 $\left\{ \dfrac{(-1)^n}{2n} \right\}$

1.3 $\left\{\dfrac{2n+1}{n}\right\}$

1.4 $\left\{\dfrac{n}{3n+1}\right\}$

1.5 $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right\}$