1. รูปแบบไม่กำหนดและกฎของโลปิตาล

(Indeterminate Form & L'Hôpital's Rule)

ในการหาค่าลิมิตในรูปแบบ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ ที่ผ่านมานั้น เราจะแก้ปัญหาโดยใช้วิธีแยกตัวประกอบเพื่อตัดตัวร่วมหรือการใช้สังยุคเพื่อทำให้พจน์ที่แทนค่าแล้วเป็นศูนย์ตัดกันได้ อย่างไรก็ตามการหาลิมิตในรูปแบบดังกล่าว อาจหาได้ไม่ง่ายนักในบางกรณี กล่าวคือรูปแบบ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้หรือไม่สามารถใช้สังยุคมาช่วยได้ เช่น

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x},\ \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} \qquad \text{เป็นลิมิตในรูป } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x},\ \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} \qquad \text{เป็นลิมิตในรูป } \frac{\infty}{\infty}$$

เราเรียกรูปแบบการหาลิมิตในรูป $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ ว่า *รูปแบบไม่กำหนด (indeterminate form)*

Determinate Forms	**Indeterminate Forms**
$0+0$	$\infty - \infty$
$0-0$	$\frac{0}{0}$
$0 \cdot 0$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
$\pm\infty \cdot \pm\infty$	$0 \cdot \infty$
$\frac{0}{\infty}, \frac{n}{\infty}$	0^0
$\frac{\infty}{0}, \frac{\infty}{n}$	∞^0
$n \cdot \infty \quad {\scriptstyle n \neq 0}$	1^∞
0^∞	
$n^\infty \quad {\scriptstyle n \neq 1}$	
∞^∞	

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาลิมิตต่อไปนี้

a) $\lim_{x\to 0}(x^3 - x)$ b) $\lim_{x\to \infty}(x^3 - 1)$ c) $\lim_{x\to \infty}(x^3 - x)$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2+1}$ e) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x}{x^2+1}$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2+1}$

Determinate form คือลิมิตข้อ__________________________

Indeterminate form คือลิมิตข้อ__________________________

การหาค่าลิมิตในรูปแบบไม่กำหนดนี้ จะใช้*กฎของโลปิตาล (*L'Hôpital's Rule*)* ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่ช่วยในการหาค่าลิมิตในรูปแบบต่างๆได้ง่ายและสะดวกมากขึ้น

ทฤษฎีบท 1.1 กฎของโลปิตาล
กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = a$ และ $g'(a) \neq 0$ ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (หรือ $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$) จะได้ว่า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

หมายเหตุ กฎของโลปิตาลเป็นจริงสำหรับกรณีของลิมิต $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$ และ $x \to \infty$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x\to 1}\frac{x^{99}-1}{x^3-1}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x^2}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + x + 1}{x^2 + 2x + 3}$

ลิมิตที่น่าสนใจ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$$

เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

Equivalent form $\lim_{u\to 0}\left(1+ku\right)^{\frac{1}{u}} = e^{k}$

2. เทคนิคการอินทิเกรต

2.1 การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by part)

กำหนดให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x จากอนุพันธ์ของผลคูณจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

อินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x ทั้งสองข้างจะได้

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\,dx = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

นั่นคือ $$\int udv = uv - \int vdu$$

สูตรการอินทิเกรตดังกล่าวเรียกว่า *การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by part)*

หลักการใช้สูตรการอินทิเกรตทีละส่วนคือ การเลือก u และ dv ให้เหมาะสม โดยจะต้องหา $\int vdu$ ได้ด้วย โดยทั่วไปจะเลือก v เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้โดยง่าย การอินทิเกรตทีละส่วนมักจะใช้กับผลคูณของฟังก์ชันบางชนิดซึ่งมีรูปแบบดังนี้

รูปแบบการอินทิเกรตผลคูณของฟังก์ชัน	**วิธีการกำหนด u และ dv**
1. ผลคูณระหว่างฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล	เลือก u เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ dv เป็นเทอมที่เหลือจากการเลือก u
2. ผลคูณระหว่างฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เลือก u เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ dv เป็นเทอมที่เหลือจากการเลือก u
3. ผลคูณระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันพหุนาม	เลือก u เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน และ dv เป็นเทอมที่เหลือจากการเลือก u
4. ผลคูณระหว่างฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันลอการิทึม	เลือก u เป็นฟังก์ชันลอการิทึม และ dv เป็นเทอมที่เหลือจากการเลือก u
5. ผลคูณระหว่างฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เลือก u เป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลหรือฟังก์ชันตรีโกณมิติก็ได้

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int xe^x dx$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int x \sin 2x \, dx$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int x^2e^{-x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$ จะได้ $du = 2xdx$ และให้ $dv = e^{-x}dx$ จะได้ $v = -e^{-x}$
จากสูตรการอินทิเกรตทีละส่วน $\int udv = uv - \int vdu$
ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}\,dx &= -x^2e^{-x} - \int(-2xe^{-x}dx)\\ &= -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx \qquad (1)\end{aligned}$$

พิจารณา $\int 2xe^{-x}dx$
โดยให้ $u = 2x$ จะได้ $du = 2dx$ และให้ $dv = e^{-x}dx$ จะได้ $v = -e^{-x}$
ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int 2xe^{-x}dx &= -2xe^{-x} - \int(-2e^{-x}dx)\\ &= -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx\\ &= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c \qquad (2)\end{aligned}$$

นำ (2) ไปแทนใน (1) จะได้ว่า $\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int \tan^{-1}xdx$

วิธีทำ ให้ $u = \tan^{-1}x$ จะได้ $du = \dfrac{1}{x^2+1}dx$ และให้ $dv = dx$ จะได้ $v = x$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1}xdx &= x\tan^{-1}x - \int\frac{x}{x^2+1}dx\\ &= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)\\ &= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\int \sin^{-1}3xdx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin^{-1}3x$ จะได้ $du = \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ และให้ $dv = dx$ จะได้ $v = x$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sin^{-1}3xdx &= x\sin^{-1}3x - \int\frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx\\ &= x\sin^{-1}3x + \frac{1}{6}\int\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}d(1-9x^2)\\ &= x\sin^{-1}3x + \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + c\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6 จงหา $\int 2x^3 \ln x \, dx$

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\int e^x \cos 3x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \cos 3x$ จะได้ $du = -3\sin 3x dx$ และให้ $dv = e^x dx$ จะได้ $v = e^x$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int e^x \cos 3x\,dx &= e^x \cos 3x - \int (-3e^x \sin 3x)\,dx \\ &= e^x \cos 3x + \int 3e^x \sin 3x\,dx \qquad (1)\end{aligned}$$

พิจารณา $\int 3e^x \sin 3x\,dx$

โดยให้ $u = \sin 3x$ จะได้ $du = 3\cos 3x dx$ และให้ $dv = 3e^x dx$ จะได้ $v = 3e^x$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int 3e^x \sin 3x\,dx &= 3e^x \sin 3x - \int 3e^x \cos 3x dx \\ &= 3e^x \sin 3x - 3\int e^x \cos 3x dx \qquad (2)\end{aligned}$$

นำ (2) ไปแทนใน (1) จะได้ว่า

$$\int e^x \cos 3x\,dx = e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x - 3\int e^x \cos 3x dx$$

$$\int e^x \cos 3x\,dx + 3\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x$$

$$4\int e^x \cos 3x\,dx = e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x$$

เพราะฉะนั้น

$$\int e^x \cos 3x\,dx = \frac{1}{4}(e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x) + c$$

2.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง

2.2.1 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลังซึ่งมีรูปแบบ $\int \sin^m u \cos^n u du$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในรูปแบบดังกล่าวจะแบ่งการอินทิเกรตได้ดังนี้

กรณี 1 : ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคี่ ในที่นี้เราจะเขียน $m=2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin^2 u = 1-\cos^2 u$ จากนั้นใช้การจัดรูปเชิงอนุพันธ์ $\sin u du = -d(\cos u)$ ซึ่งรูปแบบที่ได้จะลดรูปไปเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

กรณี 2 : ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ ในที่นี้เราจะเขียน $n=2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\cos^2 u = 1-\sin^2 u$ จากนั้นใช้การจัดรูปเชิงอนุพันธ์ $\cos u du = d(\sin u)$ ซึ่งรูปแบบที่ได้จะลดรูปไปเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 8 จงหา $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

ตัวอย่างที่ 9 จงหา $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

ตัวอย่างที่ 10 จงหา $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$

ตัวอย่างที่ 11 จงหา $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$

ตัวอย่างที่ 12 จงหา $\int \sin^5 x dx$

กรณี 3 : ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ในที่นี้เราใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2} \text{ และ } \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

ซึ่งรูปแบบที่ได้จะลดรูปไปเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 13 จงหา $\int \sin^2 x dx$

วิธีทำ

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

เราสามารถสรุปเป็นสูตรได้ คือ

$$\boxed{\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} + c}$$

และในทำนองเดียวกันจะได้

$$\boxed{\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + c}$$

ตัวอย่างที่ 14 จงหา $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

วิธีทำ

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (2\sin x \cos x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right) + c$$

2.2.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลังซึ่งมีรูปแบบ $\int \sec^m u \tan^n u du$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในรูปแบบดังกล่าวจะแบ่งการหาปริพันธ์ออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณี 1: ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่ ในที่นี้เราจะเขียน $m = 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sec^2 u = 1 + \tan^2 u$ จากนั้นใช้การจัดรูปเชิงอนุพันธ์ $\sec^2 udu = d(\tan u)$ ซึ่งรูปแบบที่ได้จะลดรูปไปเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 15 จงหา $\int \sec^2 x \tan^4 xdx$

ตัวอย่างที่ 16 จงหา $\int \sec^4 x \tan^3 xdx$

ตัวอย่างที่ 17 จงหา $\int \sqrt[3]{\tan x}\sec^4 x dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\tan x}\sec^4 x dx &= \int \sqrt[3]{\tan x}\sec^2 x(\sec^2 x dx) \\ &= \int \sqrt[3]{\tan x}(1+\tan^2 x)d(\tan x) \\ &= \int (\sqrt[3]{\tan x}+\tan^{\frac{7}{3}} x)d(\tan x) \\ &= \frac{3}{4}\tan^{\frac{4}{3}} x+\frac{3}{10}\tan^{\frac{10}{3}} x+c\end{aligned}$$

กรณี 2: ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ ในที่นี้เราจะเขียน $n=2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\tan^2 u=\sec^2 u-1$ จากนั้นใช้การจัดรูปเชิงอนุพันธ์ $\sec u \tan u du = d(\sec u)$ ซึ่งรูปแบบที่ได้จะลดรูปไปเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 18 จงหา $\int \sec^3 x \tan^5 x dx$

กรณี 3: ถ้า m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ จะใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ทีละส่วน

ตัวอย่างที่ 19 จงหา $\int \sec^3 x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sec x$ จะได้ $du = \sec x \tan x dx$ และให้ $dv = \sec^2 x dx$ จะได้ $v = \tan x$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x)\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$2\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$
$$2\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x - \tan x|$$

เพราะฉะนั้น

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x - \tan x|) + c$$

2.3 การหาอินทิเกรตโดยวิธีแทนค่าเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Substitution)

ในการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีเทอมของ $\sqrt{a^2 \pm b^2u^2}$ หรือ $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$ โดยที่ $a, b > 0$ เราจะเปลี่ยนตัวแปรด้วยการแทนค่าเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังต่อไปนี้

รูปแบบการอินทิเกรต	การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เงื่อนไข
$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$bu = a\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$bu = a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$bu = a\sec\theta$	$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ หรือ $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-9x^2}}\,dx$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} dx$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$

2.4 การหาปริพันธ์โดยแยกเศษส่วนย่อย (Integration by Partial Fraction)

พิจารณาการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะในรูปแบบ $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโดยที่ $Q(x) \neq 0$ ในที่นี้จะพิจารณากรณีที่ดีกรีของ $P(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $Q(x)$ จะเรียกรูปแบบนี้ว่าฟังก์ชันตรรกยะแท้ เช่น $\frac{2x^2-1}{x^3-27}$ ในการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะดังกล่าว เราจะเขียน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ให้เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยโดยพิจารณาพจน์ของ $Q(x)$ ซึ่งจะต้องแยกตัวประกอบให้เป็นผลคูณของตัวประกอบกำลังหนึ่งหรือตัวประกอบกำลังสองซึ่งลดทอนไม่ได้ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

รูปแบบที่ 1 ถ้า $Q(x)$ มีตัวประกอบทั้งหมดที่เป็นกำลังหนึ่งและไม่มีตัวประกอบซ้ำกัน นั่นคือ $Q(x) = (a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\ldots(a_kx-b_k)$ และ $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j$ สำหรับ $i \neq j$ โดยที่ $i, j = 1,2,3,\ldots,k$ แล้ว

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x-b_1} + \frac{A_2}{a_2x-b_2} + \ldots + \frac{A_k}{a_kx-b_k}$$

รูปแบบที่ 2 ถ้า $Q(x)$ มีตัวประกอบทั้งหมดที่เป็นกำลังหนึ่งที่ซ้ำกัน k พจน์ นั่นคือ $Q(x) = (ax-b)^k$ แล้ว

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax-b} + \frac{A_2}{(ax-b)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(ax-b)^k}$$

รูปแบบที่ 3 ถ้า $Q(x)$ มีตัวประกอบที่เป็นพหุนามกำลังสองที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้และไม่ซ้ำกัน นั่นคือ $Q(x) = (a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\ldots(a_kx^2+b_kx+c_k)$ และ $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, c_i \neq c_j$ สำหรับ $i \neq j$ โดยที่ $i, j = 1,2,3,\ldots,k$ แล้ว

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+A_2}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_3x+A_4}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \ldots + \frac{A_{k-1}x+A_k}{a_kx^2+b_kx+c_k}$$

รูปแบบที่ 4 ถ้า $Q(x)$ มีตัวประกอบที่เป็นพหุนามกำลังสองที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้และซ้ำกัน k พจน์ นั่นคือ $Q(x) = (ax^2+bx+c)^k$ แล้ว

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+A_2}{ax^2+bx+c} + \frac{A_3x+A_4}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_{k-1}x+A_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

เมื่อ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ คือค่าคงที่

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนฟังก์ชันตรรกยะต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย (ไม่ต้องหาค่าคงที่)

(1) $\dfrac{-2}{(2x-1)(x+3)} =$

(2) $\dfrac{x+1}{(x+2)^3} =$

(3) $\dfrac{2x+1}{(3x-2)(x-1)^2} =$

(4) $\dfrac{x^2}{(2x-1)(x^2+3)} =$

(5) $\dfrac{x-2}{(x^2+2)(x^2+4)} =$

(6) $\dfrac{2}{(x^2-1)(x^2+3)} =$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+2)(x-1)}\,dx$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{4}{2x+1}\right)dx$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int \frac{1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\int \frac{2x^2 - x + 13}{(x+3)(x^2+25)}\,dx$

3. อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงจำกัด $[a,b]$ *อินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral)* ของ f บน $[a,b]$ เขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)\,dx$ พิจารณาอินทิกรัลจำกัดเขตที่มีลักษณะต่อไปนี้

1. ลิมิตการอินทิเกรตค่าใดค่าหนึ่งหรือทั้งสองค่าเป็นอนันต์
2. f ไม่มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$

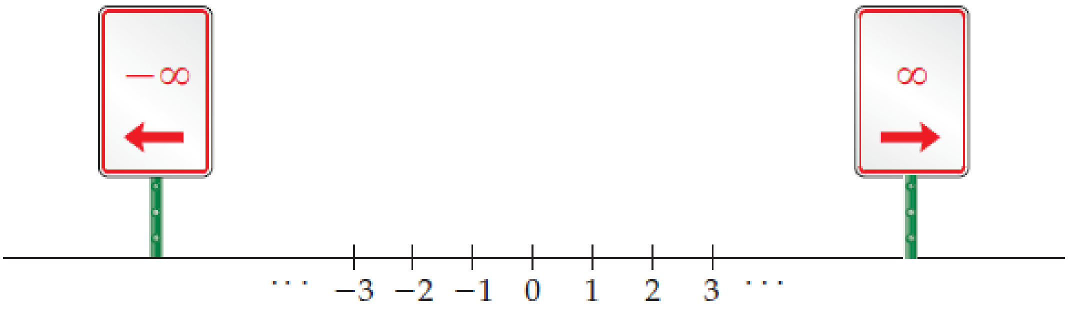
อินทิกรัลที่มีคุณสมบัติดังกล่าวจะเรียกว่า *อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral)* เช่น $\int_0^\infty e^{-x}dx$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบเพราะลิมิตการอินทิเกรตเป็นอนันต์

Limits as x Approaches $\pm\infty$

Recall that the notation $x \to \infty$ ("x approaches infinity") means that x takes on arbitrarily large values.

$x \to \infty$ and $x \to -\infty$

$x \to \infty$	means:	x takes values arbitrarily far to the *right* on the number line.
$x \to -\infty$	means:	x takes values arbitrarily far to the *left* on the number line.



Approaching Infinity	*Approaching Negative Infinity*
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n > 0)$	$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{for integer } n > 0)$
$\lim_{x\to\infty} e^{-ax} = 0 \quad (a > 0)$	$\lim_{x\to-\infty} e^{ax} = 0 \quad (a > 0)$

Limits that Do Not Exist

The following limits do not exist:

$\lim\limits_{x \to \infty} x^n$	$(n > 0)$	As x approaches infinity, x to a positive power has no limit
$\lim\limits_{x \to \infty} e^{ax}$	$(a > 0)$	As x approaches infinity, e to a positive number times x has no limit
$\lim\limits_{x \to \infty} \ln x$		As x approaches infinity, the natural logarithm of x has no limit

ในทำนองเดียวกัน $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ และ $\int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx$ ก็เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบเช่นกัน เพราะตัวถูกอินทิเกรตไม่มีขอบเขตบนช่วงการอินทิเกรต

บทนิยาม 3.1 อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 1 (ลิมิตการอินทิเกรตเป็นอนันต์)

1. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,\infty)$ แล้ว $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$
2. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,b]$ แล้ว $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$
3. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,\infty)$ แล้ว $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$ เมื่อ $c \in (-\infty,\infty)$

อินทิกรัลไม่ตรงแบบเรียกว่า*ลู่เข้า* ถ้าลิมิตหาค่าได้และอินทิกรัลเรียกว่า*ลู่ออก* ถ้าลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่าอินทิกรัลต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจะลู่เข้าสู่ค่าใด

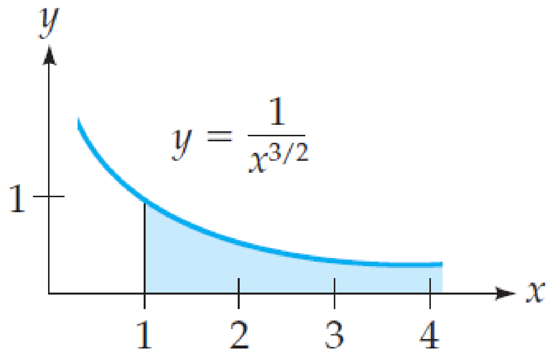
1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$

2) $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x} =$

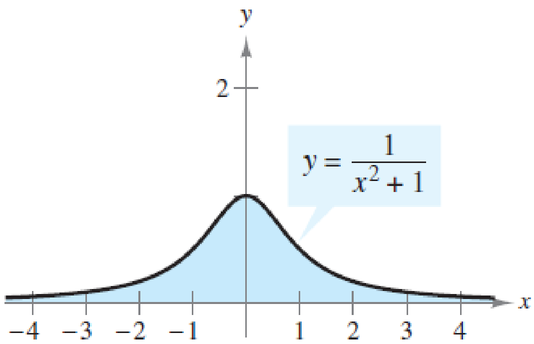
3) $\int_{-\infty}^{3} e^{x} dx =$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\int_{0}^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพื้นที่ใต้กราฟ $\frac{1}{x^{3/2}}$ ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x = 1$ และแกน x ดังรูป



ตัวอย่างที่ 5 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ และแกน x ดังรูป



บทนิยาม 1.2 อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 2 (ตัวถูกอินทิเกรตไม่มีขอบเขตบนช่วงการอินทิเกรต)

1. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b)$ และไม่มีขอบเขตที่ b แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$

2. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $(a,b]$ และไม่มีขอบเขตที่ a แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$

3. ถ้า f ไม่มีขอบเขตที่จุด $c \in (a,b)$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

อินทิกรัลไม่ตรงแบบเรียกว่า*ลู่เข้า* ถ้าลิมิตหาค่าได้และอินทิกรัลเรียกว่า*ลู่ออก* ถ้าลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าอินทิกรัล $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}dx$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x-2}\,dx$ ให้อยู่ในรูปของลิมิตของอินทิกรัล *(ไม่ต้องคำนวณหาค่าอินทิกรัล)*

ตัวอย่างที่ 9 จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x}\,dx$ ให้อยู่ในรูปของลิมิตของอินทิกรัล *(ไม่ต้องคำนวณหาค่าอินทิกรัล)*

4. ลำดับและอนุกรม (Sequence and Series)

บทนิยาม *ลำดับ (Sequence)* คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
นั่นคือ $a_n = f(n)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

- ลำดับ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ หรือ $\{a_n\}$
- จำนวนต่างๆในลำดับ เรียกว่า พจน์ (Term) ของลำดับ
- เราเรียก a_n ว่าพจน์ที่ n ของลำดับหรือพจน์ทั่วไป

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนห้าพจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

1. $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$

2. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์ที่ n ของลำดับต่อไปนี้ เมื่อ $n \geq 1$

1. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{27}, \dfrac{4}{81}, \ldots$ $a_n =$ ....

2. $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \ldots$ $a_n =$ ....

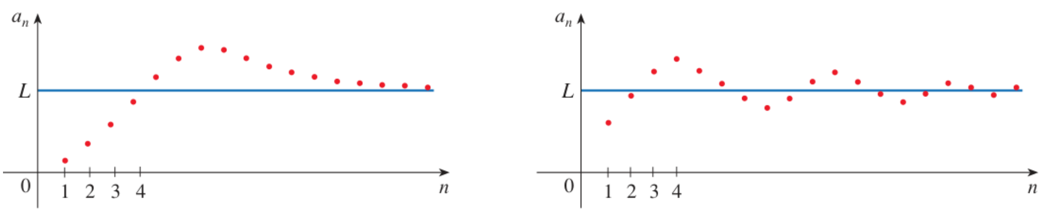
3. $-1, \dfrac{4}{5}, -\dfrac{6}{8}, \dfrac{8}{11}, \ldots$ $a_n =$ ....

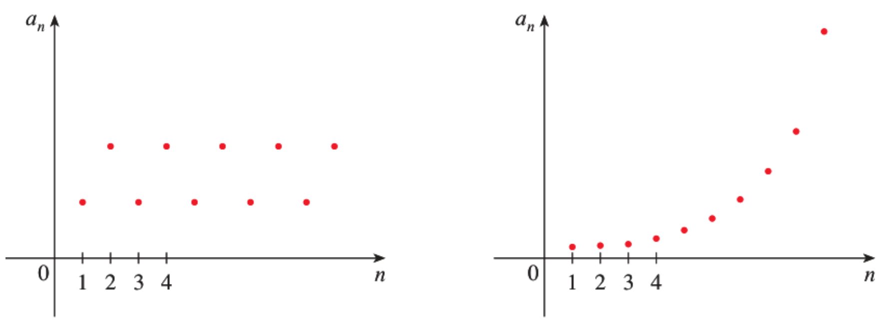
4. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{7}{11}, \ldots$ $a_n =$ ....

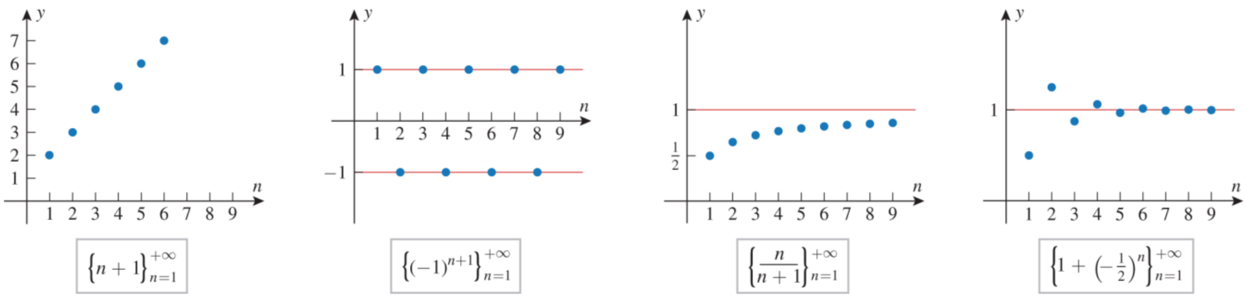
SEQUENCE	BRACE NOTATION
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$	$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$	$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \ldots$	$\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$	$\{2n-1\}_{n=1}^{+\infty}$

ลิมิตของลำดับ (Limit of Sequence)

<u>บทนิยาม</u> ลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ เรียกว่า*ลู่เข้า (Converge)* สู่ค่าสู่ค่าจำนวนจริง L ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และเรียก L *ว่าลิมิตของลำดับ*







<u>ทฤษฎีบทของลิมิต (Theorem of Limits)</u>

กำหนดให้ลำดับ $\{a_n\},\{b_n\}$ มีลิมิตคือ L, M ตามลำดับและ c เป็นค่าคงที่แล้ว

1. ลิมิตของลำดับจะต้องมีค่าเพียงค่าเดียว (Unique)

2. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = cL$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \pm b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \pm M$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = LM$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = f(L)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

8. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาว่าลำดับต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าๆสู่ค่าใด

1. $\dfrac{5}{3}, \dfrac{8}{7}, \dfrac{11}{11}, \dfrac{14}{15}, \ldots$

2. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. $\left\{\dfrac{2n+3}{3n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4. $\left\{n^2+1\right\}_{n=1}^{\infty}$

5. $\left\{(-1)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

6. $\left\{\ln\left(\dfrac{5n+1}{3n+4}\right)\right\}$

7. $\left\{\cos\left(\dfrac{n^2\pi}{2n^2+3n+1}\right)\right\}$

8. $\left\{\sqrt{\dfrac{n^2+4}{4n^2+1}}\right\}$

ลำดับทางเดียว (Monotone Sequence)

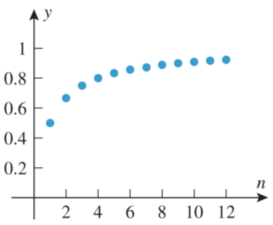
<u>บทนิยาม</u> ลำดับ $\{a_n\}$ เรียกว่าเป็นลำดับ

1. *เพิ่มขึ้น (Increasing)* ก็ต่อเมื่อ $a_n < a_{n+1}$ สำหรับทุกๆจำนวนนับ n

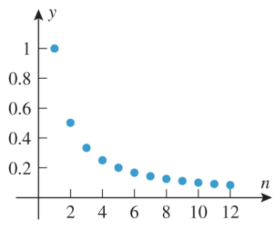
2. *ไม่ลดลง (Non decreasing)* ก็ต่อเมื่อ $a_n \le a_{n+1}$ สำหรับทุกๆจำนวนนับ n

3. *ลดลง (Decreasing)* ก็ต่อเมื่อ $a_{n+1} < a_n$ สำหรับทุกๆจำนวนนับ n

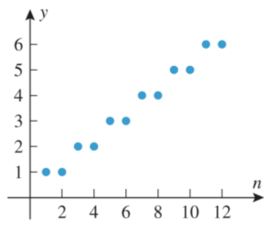
4. *ไม่เพิ่มขึ้น (Non increasing)* ก็ต่อเมื่อ $a_{n+1} \le a_n$ สำหรับทุกๆจำนวนนับ n



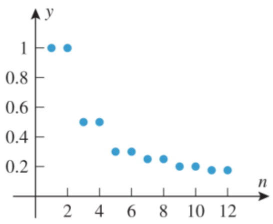
$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$



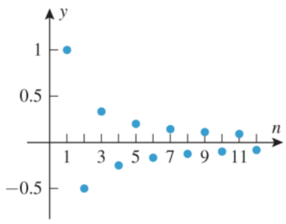
$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$



1, 1, 2, 2, 3, 3, …



$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$



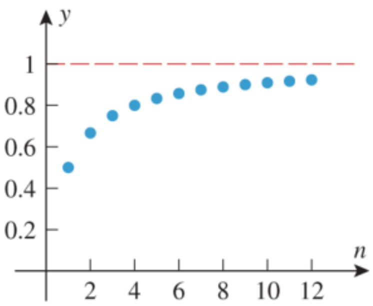
$\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

<u>วิธีการตรวจสอบชนิดลำดับทางเดียว</u>

1. Check จากผลต่าง

ผลต่าง	ชนิดของลำดับ
$a_{n+1}-a_n>0$	เพิ่มขึ้น
$a_{n+1}-a_n<0$	ลดลง
$a_{n+1}-a_n\geq 0$	ไม่ลด
$a_{n+1}-a_n\leq 0$	ไม่เพิ่มขึ้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่าลำดับ $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น เป็นลำดับทางเดียวชนิดใด



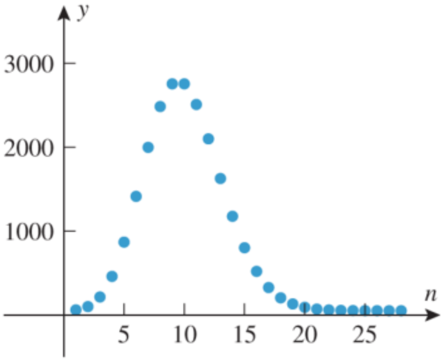
$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

2. Check จากอัตราส่วน

อัตราส่วน	ชนิดของลำดับ
$a_{n+1}/a_n>1$	เพิ่มขึ้น
$a_{n+1}/a_n<1$	ลดลง
$a_{n+1}/a_n\geq 1$	ไม่ลด
$a_{n+1}/a_n\leq 1$	ไม่เพิ่ม

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าลำดับ $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น เป็นลำดับทางเดียวชนิดใด

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าลำดับ $\left\{\dfrac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น เป็นลำดับทางเดียวชนิดใด



$\left\{10^n/n!\right\}_{n=1}^{+\infty}$

3. Check จากอนุพันธ์

อนุพันธ์ $f(x),\ x \geq 1; f(n) = a_n$	ชนิดของลำดับ
$f'(x) > 0$	เพิ่มขึ้น
$f'(x) < 0$	ลดลง

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น เป็นลำดับทางเดียวชนิดใด

1. $\{\tan^{-1} n\}$

2. $\left\{\dfrac{3n-2}{n}\right\}$

3. จงพิจารณาว่าลำดับ $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็นแล้วเป็นลำดับทางเดียวชนิดใด

4. จงพิจารณาการลู่เข้าของลำดับ $\left\{3-\dfrac{1}{2^{n-2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจะลู่เข้าสู่ค่าใด การเป็นลำดับทางเดียว ว่าเป็นหรือไม่เป็น และในกรณีที่เป็นลำดับทางเดียว ให้ระบุด้วยว่าเป็นลำดับทางเดียวชนิดใด

ขอบเขตของลำดับ (Boundedness of Sequence)

<u>บทนิยาม</u> :

1. ลำดับ $\{a_n\}$ มี*ขอบเขตบน (Upper Bound)* ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง M ที่ทำให้ $a_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}$ และเรียก M ว่าเป็น*ขอบเขตบนน้อยสุด (Least upper bounded)* ของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ

1.1 M เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$

1.2 M มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับขอบเขตบนทุกตัวของ $\{a_n\}$

2. ลำดับ $\{a_n\}$ มี*ขอบเขตล่าง (Lower Bound)* ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง N ที่ทำให้ $N \le a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ และเรียก N ว่าเป็น*ขอบเขตล่างมากสุด (Greatest lower bounded)* ของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ

2.1 N เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$

2.2 N มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับขอบเขตล่างทุกตัวของ $\{a_n\}$

3. ลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขตก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

<u>ทฤษฎีบท</u> : ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับทางเดียวและมีขอบเขตแล้วลำดับ $\{a_n\}$ จะลู่เข้า

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้มีขอบเขตหรือไม่ ถ้ามีจงบอกขอบเขตล่างและขอบเขตบน

1.1 $1, 4, 9, 16, \ldots$

1.2 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{2n}\right\}$

1.3 $\left\{\dfrac{2n+1}{n}\right\}$

1.4 $\left\{\dfrac{n}{3n+1}\right\}$

1.5 $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right\}$

อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)

<u>บทนิยาม</u>

1. อนุกรมอนันต์ คือ ผลบวกของลำดับอนันต์ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ นั่นคือ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. เรียก $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ว่า *ผลบวกย่อยที่ n (n^{th} Partial sum)*

3. อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น*อนุกรมลู่เข้า* ถ้า $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ โดยที่ $s \in \mathbb{R}$ และเรียก s ว่าผลบวกของอนุกรม

<u>อนุกรมพื้นฐานที่สำคัญ</u>

1. *อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series)* คือ อนุกรมที่อยู่ในรูปแบบ

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots \quad \text{เมื่อ } a \neq 0$$

สามารถหาผลบวกย่อยที่ n ได้คือ $s_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

<u>ทฤษฎีบท</u> อนุกรมเรขาคณิตลู่เข้า ถ้า $|r| < 1$ และมีผลบวกคือ $s = \dfrac{a}{1-r}$

และถ้า $|r| \geq 1$ อนุกรมเรขาคณิตลู่ออก

พิจารณาอนุกรมเรขาคณิตต่อไปนี้

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k + \cdots \qquad \boxed{a = 1, r = 2}$$

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^k} + \cdots \qquad \boxed{a = \tfrac{3}{10}, r = \tfrac{1}{10}}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{2^k} + \cdots \qquad \boxed{a = \tfrac{1}{2}, r = -\tfrac{1}{2}}$$

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \qquad \boxed{a = 1, r = 1}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{k+1} + \cdots \qquad \boxed{a = 1, r = -1}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots \qquad \boxed{a = 1, r = x}$$

2. *อนุกรมพี (p - Series)* คือ อนุกรมที่อยู่ในรูปแบบ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

<u>ทฤษฎีบท</u> อนุกรมพีลู่เข้า ถ้า $p>1$ และถ้า $p\le 1$ อนุกรมพีลู่ออก

พิจารณาอนุกรมต่อไปนี้

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots \qquad \boxed{p=1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots \qquad \boxed{p=2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\cdots \qquad \boxed{p=\tfrac{1}{2}}$$

XVI. *Summa ſeriei infinitæ harmonicè progreſſionalium*, $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ *&c. eſt infinita.*

Id primus deprehendit Frater: inventa namque per præced. ſumma ſeriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$, &c. viſurus porrò, quid emergeret ex iſta ſerie, $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}$, &c. ſi reſolveretur methodo Prop. XIV. collegit propoſitionis veritatem ex abſurditate manifeſta, quæ ſequeretur, ſi ſumma ſeriei harmonicæ finita ſtatueretur. Animadvertit enim,

Seriem A, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$, &c. ∞ (fractionibus ſingulis in alias, quarum numeratores ſunt 1, 2, 3, 4, &c. transmutatis)

ſeriei B, $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{6}{42}$, &c. ∞ C + D + E + F, &c.

C. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$, &c. ∞ per præc. $\frac{1}{1}$
D. . $+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$, &c. ∞ C $-\frac{1}{2}$ ∞ $\frac{1}{2}$
E. . . $+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$, &c. ∞ D $-\frac{1}{6}$ ∞ $\frac{1}{3}$
F. . . . . . $+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$, &c. ∞ E $-\frac{1}{12}$ ∞ $\frac{1}{4}$
&c. ∞ &c.

∞ *G*; unde ſequitur, ſeriem *G* ∞ *A*, totum parti, ſi ſumma finita eſſet.

Ego

Courtesy The Lilly Library, Indiana University, Bloomington, Indiana

This is a proof of the divergence of the harmonic series, as it appeared in an appendix of Jakob Bernoulli's posthumous publication, Ars Conjectandi, *which appeared in 1713.*

<u>ทฤษฎีบทเบื้องต้นของอนุกรมอนันต์</u>

1. การคูณอนุกรมด้วยค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์ จะไม่มีผลต่อการลู่เข้า / ลู่ออกของอนุกรม

2. การเพิ่มพจน์, ตัดพจน์ต่างๆออกด้วยจำนวนพจน์ที่แน่นอนไม่มีผลต่อการลู่เข้า / ลู่ออก ของอนุกรม

3.

3.1 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า

3.2 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก

3.3 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ อาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

2. จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{6^{n-1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

3. จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

4. จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

5. จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\ln n-\ln(n+1)\right]$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

6. จงหาผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$

การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

<u>ทฤษฎีบท</u>

(i) ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

(ii) ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าหรืออาจจะลู่ออก

ตัวอย่าง

1. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-5}$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}$

การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์บวก

1. การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison Test)

ทฤษฎีบท : กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์บวกที่ต้องการทดสอบ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่รู้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก ซึ่ง $b_n > 0$

1. ถ้า $a_n \le b_n$ สำหรับทุกๆ $n \ge 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

2. ถ้า $a_n \ge b_n$ สำหรับทุกๆ $n \ge 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

ตัวอย่าง

1. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+1}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2+1}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

3. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2+\sin^2 n}{n^{1.1}}\right]$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

4. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n!n^{5/4}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

5. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. การทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit Comparison Test)

<u>ทฤษฎีบท</u> กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์บวกที่ต้องการทดสอบ และ $b_n > 0$

1. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ซึ่ง $0 < L < \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า

2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

3. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{n^7+1}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

3. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+1)(n+2)(n+5)}$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

3. การทดสอบอัตราส่วน (Ratio Test)

<u>ทฤษฎีบท</u> : กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์บวกและ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

1. ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

2. ถ้า $r > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

3. ถ้า $r = 1$ สรุปไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงใช้วิธีทดสอบอัตราส่วน (Ratio test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. จงใช้วิธีทดสอบอัตราส่วน (Ratio test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

3. จงใช้วิธีทดสอบอัตราส่วน (Ratio test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{e^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

4. จงใช้วิธีทดสอบอัตราส่วน (Ratio test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n!)}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

4. การทดสอบรากที่ n (n^{th} Root Test)

<u>**ทฤษฎีบท**</u> **:** กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์บวกและ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = r$

1. ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

2. ถ้า $r > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

3. ถ้า $r = 1$ สรุปไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

<u>**ตัวอย่าง**</u>

1. จงใช้วิธีทดสอบรากที่ n (n^{th} Root Test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2568}\right)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. จงใช้วิธีทดสอบรากที่ n (n^{th} Root Test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

3. จงใช้วิธีทดสอบรากที่ n (n^{th} Root Test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(2-1/n)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

4. จงใช้วิธีทดสอบรากที่ n (n^{th} Root Test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก