3. อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงจำกัด $[a,b]$ *อินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral)* ของ f บน $[a,b]$ เขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)\,dx$ พิจารณาอินทิกรัลจำกัดเขตที่มีลักษณะต่อไปนี้

1. ลิมิตการอินทิเกรตค่าใดค่าหนึ่งหรือทั้งสองค่าเป็นอนันต์

2. f ไม่มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$

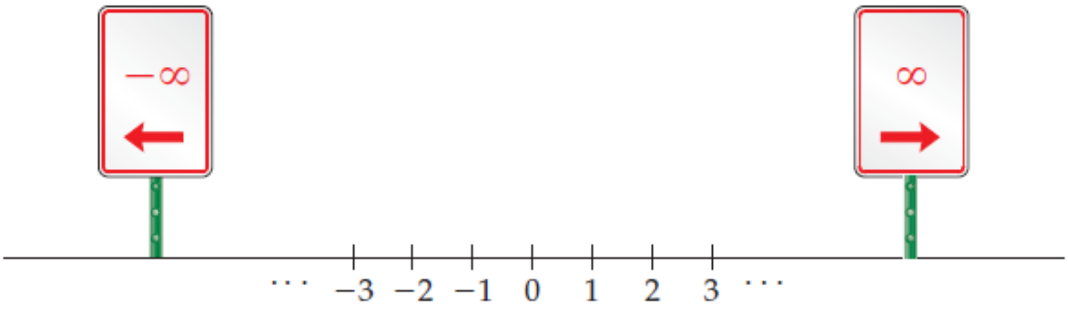
อินทิกรัลที่มีคุณสมบัติดังกล่าวจะเรียกว่า *อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral)* เช่น $\int_0^\infty e^{-x}dx$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบเพราะลิมิตการอินทิเกรตเป็นอนันต์

Limits as x Approaches $\pm\infty$

Recall that the notation $x \to \infty$ ("x approaches infinity") means that x takes on arbitrarily large values.

$x \to \infty$ and $x \to -\infty$

$x \to \infty$	means:	x takes values arbitrarily far to the *right* on the number line.
$x \to -\infty$	means:	x takes values arbitrarily far to the *left* on the number line.



Approaching Infinity

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n > 0)$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-ax} = 0 \quad (a > 0)$$

Approaching Negative Infinity

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{for integer } n > 0)$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{ax} = 0 \quad (a > 0)$$

Limits that Do Not Exist

The following limits do not exist:

$\lim\limits_{x \to \infty} x^n$	$(n > 0)$	As x approaches infinity, x to a positive power has no limit
$\lim\limits_{x \to \infty} e^{ax}$	$(a > 0)$	As x approaches infinity, e to a positive number times x has no limit
$\lim\limits_{x \to \infty} \ln x$		As x approaches infinity, the natural logarithm of x has no limit

ในทำนองเดียวกัน $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ และ $\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}dx$ ก็เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบเช่นกัน เพราะตัวถูกอินทิเกรตไม่มีขอบเขตบนช่วงการอินทิเกรต

บทนิยาม 3.1 อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 1 (ลิมิตการอินทิเกรตเป็นอนันต์)

1. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,\infty)$ แล้ว $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$
2. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,b]$ แล้ว $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$
3. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,\infty)$ แล้ว $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$ เมื่อ $c \in (-\infty,\infty)$

อินทิกรัลไม่ตรงแบบเรียกว่า*ลู่เข้า* ถ้าลิมิตหาค่าได้และอินทิกรัลเรียกว่า*ลู่ออก* ถ้าลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่าอินทิกรัลต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจะลู่เข้าสู่ค่าใด

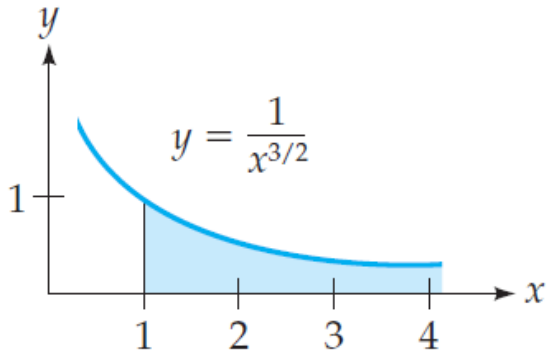
1) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$

2) $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x} =$

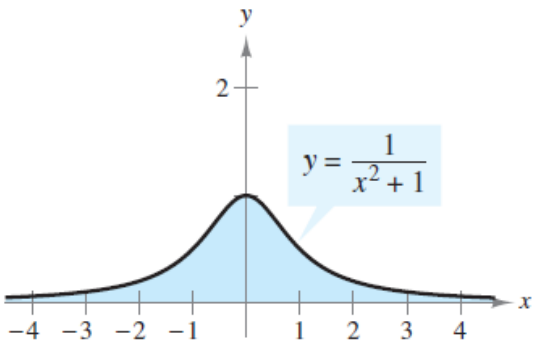
3) $\int_{-\infty}^{3} e^{x} dx =$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\int_{0}^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพื้นที่ใต้กราฟ $\frac{1}{x^{3/2}}$ ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x = 1$ และแกน x ดังรูป



ตัวอย่างที่ 5 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \frac{1}{x^2+1}$ และแกน x ดังรูป



บทนิยาม 1.2 อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 2 (ตัวถูกอินทิเกรตไม่มีขอบเขตบนช่วงการอินทิเกรต)

1. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b)$ และไม่มีขอบเขตที่ b แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$

2. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $(a,b]$ และไม่มีขอบเขตที่ a แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$

3. ถ้า f ไม่มีขอบเขตที่จุด $c\in(a,b)$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

อินทิกรัลไม่ตรงแบบเรียกว่า*ลู่เข้า* ถ้าลิมิตหาค่าได้และอินทิกรัลเรียกว่า*ลู่ออก* ถ้าลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าอินทิกรัล $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x-2}\, dx$ ให้อยู่ในรูปของลิมิตของอินทิกรัล *(ไม่ต้องคำนวณหาค่าอินทิกรัล)*

ตัวอย่างที่ 9 จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x}\, dx$ ให้อยู่ในรูปของลิมิตของอินทิกรัล *(ไม่ต้องคำนวณหาค่าอินทิกรัล)*