อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)

บทนิยาม

1. อนุกรมอนันต์ คือ ผลบวกของลำดับอนันต์ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ นั่นคือ $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

2. เรียก $s_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ ว่า *ผลบวกย่อยที่* n (n^{th} *Partial sum)*

3. อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ เป็น*อนุกรมลู่เข้า* ถ้า $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ โดยที่ $s\in\mathbb{R}$ และเรียก s ว่าผลบวกของอนุกรม

อนุกรมพื้นฐานที่สำคัญ

1. *อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series)* คือ อนุกรมที่อยู่ในรูปแบบ

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots \quad \text{เมื่อ } a\neq 0$$

สามารถหาผลบวกย่อยที่ n ได้คือ $s_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

ทฤษฎีบท อนุกรมเรขาคณิตลู่เข้า ถ้า $|r|<1$ และมีผลบวกคือ $s=\dfrac{a}{1-r}$

และถ้า $|r|\geq 1$ อนุกรมเรขาคณิตลู่ออก

พิจารณาอนุกรมเรขาคณิตต่อไปนี้

$$1+2+4+8+\cdots+2^k+\cdots \qquad \boxed{a=1, r=2}$$

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^k}+\cdots \qquad \boxed{a=\tfrac{3}{10}, r=\tfrac{1}{10}}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1}{2^k}+\cdots \qquad \boxed{a=\tfrac{1}{2}, r=-\tfrac{1}{2}}$$

$$1+1+1+\cdots+1+\cdots \qquad \boxed{a=1, r=1}$$

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{k+1}+\cdots \qquad \boxed{a=1, r=-1}$$

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k+\cdots \qquad \boxed{a=1, r=x}$$

2. *อนุกรมพี (p - Series)* คือ อนุกรมที่อยู่ในรูปแบบ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

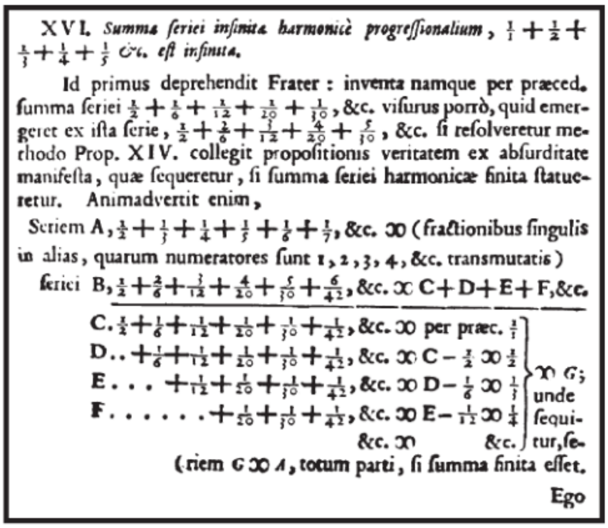
<u>ทฤษฎีบท</u> อนุกรมพีลู่เข้า ถ้า $p>1$ และถ้า $p\le 1$ อนุกรมพีลู่ออก

พิจารณาอนุกรมต่อไปนี้

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots \qquad \boxed{p=1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots \qquad \boxed{p=2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\cdots \qquad \boxed{p=\tfrac{1}{2}}$$


XVI. *Summa seriei infinitæ harmonicè progressionalium*, $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ *&c. est infinita.*

Id primus deprehendit Frater: inventa namque per præced. summa seriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$, &c. visurus porrò, quid emergeret ex ista serie, $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}$, &c. si resolveretur methodo Prop. XIV. collegit propositionis veritatem ex absurditate manifesta, quæ sequeretur, si summa seriei harmonicæ finita statueretur. Animadvertit enim,

Seriem A, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$, &c. ꝏ (fractionibus singulis in alias, quarum numeratores sunt 1, 2, 3, 4, &c. transmutatis) seriei B, $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{6}{42}$, &c. ꝏ C + D + E + F, &c.

C. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$, &c. ꝏ per præc. $\frac{1}{1}$
D.. $+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$, &c. ꝏ C $-\frac{1}{2}$ ꝏ $\frac{1}{2}$
E... $+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$, &c. ꝏ D $-\frac{1}{6}$ ꝏ $\frac{1}{3}$
F...... $+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$, &c. ꝏ E $-\frac{1}{12}$ ꝏ $\frac{1}{4}$
&c. ꝏ &c.
ꝏ G; unde sequitur, seriem G ꝏ A, totum parti, si summa finita esset.

Ego

Courtesy The Lilly Library, Indiana University, Bloomington, Indiana

This is a proof of the divergence of the harmonic series, as it appeared in an appendix of Jakob Bernoulli's posthumous publication, Ars Conjectandi, *which appeared in 1713.*

<u>ทฤษฎีบทเบื้องต้นของอนุกรมอนันต์</u>

1. การคูณอนุกรมด้วยค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์ จะไม่มีผลต่อการลู่เข้า / ลู่ออกของอนุกรม

2. การเพิ่มพจน์, ตัดพจน์ต่างๆออกด้วยจำนวนพจน์ที่แน่นอนไม่มีผลต่อการลู่เข้า / ลู่ออกของอนุกรม

3.

3.1 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า

3.2 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก

3.3 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ อาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

2. จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{6^{n-1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

3. จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

4. จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

5. จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\ln n-\ln(n+1)\right]$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

6. จงหาผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$

การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

<u>ทฤษฎีบท</u>

(i) ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

(ii) ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าหรืออาจจะลู่ออก

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-5}$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

<u>การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์บวก</u>

1. การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison Test)

<u>ทฤษฎีบท</u> : กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์บวกที่ต้องการทดสอบ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่รู้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก ซึ่ง $b_n > 0$

1. ถ้า $a_n \le b_n$ สำหรับทุกๆ $n \ge 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

2. ถ้า $a_n \ge b_n$ สำหรับทุกๆ $n \ge 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+1}$

ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2+1}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

3. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2+\sin^2 n}{n^{1.1}}\right]$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

4. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n!n^{5/4}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

5. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (Comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. การทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit Comparison Test)

<u>ทฤษฎีบท</u> กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์บวกที่ต้องการทดสอบ และ $b_n > 0$

1. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ซึ่ง $0 < L < \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า

2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

3. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{n^7+1}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

3. จงใช้วิธีทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit comparison test) ตรวจสอบว่าอนุกรม

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+1)(n+2)(n+5)}$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

3. การทดสอบอัตราส่วน (Ratio Test)

<u>ทฤษฎีบท</u> : กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์บวกและ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

1. ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

2. ถ้า $r > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

3. ถ้า $r = 1$ สรุปไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงใช้วิธีทดสอบอัตราส่วน (Ratio test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. จงใช้วิธีทดสอบอัตราส่วน (Ratio test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

3. จงใช้วิธีทดสอบอัตราส่วน (Ratio test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{e^{n}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

4. จงใช้วิธีทดสอบอัตราส่วน (Ratio test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n!)}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

4. การทดสอบรากที่ n (n^{th} Root Test)

<u>ทฤษฎีบท</u> : กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์บวกและ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$

1. ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

2. ถ้า $r > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

3. ถ้า $r = 1$ สรุปไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงใช้วิธีทดสอบรากที่ n (n^{th} Root Test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2568} \right)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. จงใช้วิธีทดสอบรากที่ n (n^{th} Root Test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

3. จงใช้วิธีทดสอบรากที่ n (n^{th} Root Test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(2-1/n)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

4. จงใช้วิธีทดสอบรากที่ n (n^{th} Root Test) ตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก