1. รูปแบบไม่กำหนดและกฎของโลปิตาล

(Indeterminate Form & L'Hôpital's Rule)

ในการหาค่าลิมิตในรูปแบบ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ ที่ผ่านมานั้น เราจะแก้ปัญหาโดยใช้วิธีแยกตัวประกอบเพื่อตัดตัวร่วมหรือการใช้สังยุคเพื่อทำให้พจน์ที่แทนค่าแล้วเป็นศูนย์ตัดกันได้ อย่างไรก็ตามการหาลิมิตในรูปแบบดังกล่าว อาจหาได้ไม่ง่ายนักในบางกรณี กล่าวคือรูปแบบ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้หรือไม่สามารถใช้สังยุคมาช่วยได้ เช่น

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} \qquad \text{เป็นลิมิตในรูป } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x},\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^3}{e^x} \qquad \text{เป็นลิมิตในรูป } \frac{\infty}{\infty}$$

เราเรียกรูปแบบการหาลิมิตในรูป $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ ว่า *รูปแบบไม่กำหนด (indeterminate form)*

Determinate Forms	**Indeterminate Forms**
$0+0$	$\infty-\infty$
$0-0$	$\frac{0}{0}$
$0\cdot 0$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
$\pm\infty\cdot\pm\infty$	$0\cdot\infty$
$\frac{0}{\infty},\frac{n}{\infty}$	0^0
$\frac{\infty}{0},\frac{\infty}{n}$	∞^0
$n\cdot\infty \quad n\neq 0$	1^∞
0^∞	
$n^\infty \quad n\neq 1$	
∞^∞	

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาลิมิตต่อไปนี้

a) $\lim_{x\to 0}(x^3 - x)$ b) $\lim_{x\to\infty}(x^3 - 1)$ c) $\lim_{x\to\infty}(x^3 - x)$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2+1}$ e) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2+1}$

Determinate form คือลิมิตข้อ__________________________

Indeterminate form คือลิมิตข้อ__________________________

การหาค่าลิมิตในรูปแบบไม่กำหนดนี้ จะใช้*กฎของโลปิตาล (*L'Hôpital's Rule*)* ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่ช่วยในการหาค่าลิมิตในรูปแบบต่างๆได้ง่ายและสะดวกมากขึ้น

ทฤษฎีบท 1.1 กฎของโลปิตาล
กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = a$ และ $g'(a) \neq 0$ ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (หรือ $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$) จะได้ว่า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

หมายเหตุ กฎของโลปิตาลเป็นจริงสำหรับกรณีของลิมิต $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$ และ

$x \to \infty$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x\to 1}\frac{x^{99}-1}{x^3-1}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของลิมิต $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2x-1}{x^2}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของลิมิต $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของลิมิต $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{2x}+x+1}{x^2+2x+3}$