

2.4 การหาปริพันธ์โดยแยกเศษส่วนย่อย (Integration by Partial Fraction)

พิจารณาการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะในรูปแบบ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโดยที่ $Q(x) \neq 0$ ในที่นี้จะพิจารณากรณีที่ดีกรีของ $P(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $Q(x)$ จะเรียกรูปแบบนี้ว่าฟังก์ชันตรรกยะแท้ เช่น $\frac{2x^2 - 1}{x^3 - 27}$ ในการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะดังกล่าว เราจะเขียน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ให้เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยโดยพิจารณาพจน์ของ $Q(x)$ ซึ่งจะต้องแยกตัวประกอบให้เป็นผลคูณของตัวประกอบกำลังหนึ่งหรือตัวประกอบกำลังสองซึ่งลดทอนไม่ได้ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

รูปแบบที่ 1 ถ้า $Q(x)$ มีตัวประกอบทั้งหมดที่เป็นกำลังหนึ่งและไม่มีตัวประกอบซ้ำกัน นั่นคือ

$Q(x) = (a_1x - b_1)(a_2x - b_2) \dots (a_kx - b_k)$ และ $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j$ สำหรับ $i \neq j$ โดยที่ $i, j = 1, 2, 3, \dots, k$ แล้ว

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x - b_1} + \frac{A_2}{a_2x - b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx - b_k}$$

รูปแบบที่ 2 ถ้า $Q(x)$ มีตัวประกอบทั้งหมดที่เป็นกำลังหนึ่งที่ซ้ำกัน k พจน์ นั่นคือ

$Q(x) = (ax - b)^k$ แล้ว

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax - b} + \frac{A_2}{(ax - b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax - b)^k}$$

รูปแบบที่ 3 ถ้า $Q(x)$ มีตัวประกอบที่เป็นพหุนามกำลังสองที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้และไม่ซ้ำกัน นั่นคือ $Q(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \dots (a_kx^2 + b_kx + c_k)$ และ $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, c_i \neq c_j$ สำหรับ $i \neq j$ โดยที่ $i, j = 1, 2, 3, \dots, k$ แล้ว

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + A_2}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_3x + A_4}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \dots + \frac{A_{k-1}x + A_k}{a_kx^2 + b_kx + c_k}$$

รูปแบบที่ 4 ถ้า $Q(x)$ มีตัวประกอบที่เป็นพหุนามกำลังสองที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้และซ้ำกัน k พจน์ นั่นคือ $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^k$ แล้ว

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + A_2}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_3x + A_4}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_{k-1}x + A_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

เมื่อ A_1, A_2, \dots, A_k คือค่าคงที่

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนฟังก์ชันตรรกยะต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย (ไม่ต้องหาค่าคงที่)

$$(1) \frac{-2}{(2x-1)(x+3)} =$$

$$(2) \frac{x+1}{(x+2)^3} =$$

$$(3) \frac{2x+1}{(3x-2)(x-1)^2} =$$

$$(4) \frac{x^2}{(2x-1)(x^2+3)} =$$

$$(5) \frac{x-2}{(x^2+2)(x^2+4)} =$$

$$(6) \frac{2}{(x^2-1)(x^2+3)} =$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int \frac{x-9}{(x+2)(x-1)} dx$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{4}{2x+1} \right) dx$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int \frac{1}{(x-1)^2(x+2)} dx$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\int \frac{2x^2 - x + 13}{(x + 3)(x^2 + 25)} dx$