ลิมิตที่น่าสนใจ

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

Equivalent form $\lim_{u \to 0} \left(1 + ku\right)^{\frac{1}{u}} = e^k$

2. เทคนิคการอินทิเกรต

2.1 การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by part)

กำหนดให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x จากอนุพันธ์ของผลคูณจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

อินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x ทั้งสองข้างจะได้

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\, dx = \int u\frac{dv}{dx}\, dx + \int v\frac{du}{dx}\, dx$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

นั่นคือ $$\int udv = uv - \int vdu$$

สูตรการอินทิเกรตดังกล่าวเรียกว่า *การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by part)*

หลักการใช้สูตรการอินทิเกรตทีละส่วนคือ การเลือก u และ dv ให้เหมาะสม โดยจะต้องหา $\int vdu$ ได้ด้วย โดยทั่วไปจะเลือก v เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้โดยง่าย การอินทิเกรตทีละส่วนมักจะใช้กับผลคูณของฟังก์ชันบางชนิดซึ่งมีรูปแบบดังนี้

รูปแบบการอินทิเกรตผลคูณของฟังก์ชัน	วิธีการกำหนด u และ dv
1. ผลคูณระหว่างฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล	เลือก u เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ dv เป็นเทอมที่เหลือจากการเลือก u
2. ผลคูณระหว่างฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เลือก u เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ dv เป็นเทอมที่เหลือจากการเลือก u
3. ผลคูณระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันพหุนาม	เลือก u เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน และ dv เป็นเทอมที่เหลือจากการเลือก u
4. ผลคูณระหว่างฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันลอการิทึม	เลือก u เป็นฟังก์ชันลอการิทึม และ dv เป็นเทอมที่เหลือจากการเลือก u
5. ผลคูณระหว่างฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เลือก u เป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลหรือฟังก์ชันตรีโกณมิติก็ได้

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int xe^{x}dx$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int x\sin 2x\,dx$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int x^2 e^{-x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$ จะได้ $du = 2xdx$ และให้ $dv = e^{-x}dx$ จะได้ $v = -e^{-x}$

จากสูตรการอินทิเกรตทีละส่วน $\int udv = uv - \int vdu$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x}\,dx &= -x^2 e^{-x} - \int(-2xe^{-x}dx)\\ &= -x^2 e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx \qquad (1)\end{aligned}$$

พิจารณา $\int 2xe^{-x}dx$

โดยให้ $u = 2x$ จะได้ $du = 2dx$ และให้ $dv = e^{-x}dx$ จะได้ $v = -e^{-x}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int 2xe^{-x}dx &= -2xe^{-x} - \int(-2e^{-x}dx)\\ &= -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx\\ &= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c \qquad (2)\end{aligned}$$

นำ (2) ไปแทนใน (1) จะได้ว่า $\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int \tan^{-1} x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \tan^{-1} x$ จะได้ $du = \dfrac{1}{x^2+1}dx$ และให้ $dv = dx$ จะได้ $v = x$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1} x dx &= x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{x^2+1}dx\\ &= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)\\ &= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\int \sin^{-1} 3x dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin^{-1} 3x$ จะได้ $du = \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ และให้ $dv = dx$ จะได้ $v = x$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sin^{-1} 3x dx &= x\sin^{-1} 3x - \int \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx\\ &= x\sin^{-1} 3x + \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}d(1-9x^2)\\ &= x\sin^{-1} 3x + \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + c\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6 จงหา $\int 2x^3 \ln x \, dx$

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\int e^x \cos 3x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \cos 3x$ จะได้ $du = -3\sin 3x dx$ และให้ $dv = e^x dx$ จะได้ $v = e^x$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int e^x \cos 3x\,dx &= e^x \cos 3x - \int(-3e^x \sin 3x)\,dx \\ &= e^x \cos 3x + \int 3e^x \sin 3x\,dx \qquad (1)\end{aligned}$$

พิจารณา $\int 3e^x \sin 3x\,dx$

โดยให้ $u = \sin 3x$ จะได้ $du = 3\cos 3x dx$ และให้ $dv = 3e^x dx$ จะได้ $v = 3e^x$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int 3e^x \sin 3x\,dx &= 3e^x \sin 3x - \int 3e^x \cos 3x dx \\ &= 3e^x \sin 3x - 3\int e^x \cos 3x dx \qquad (2)\end{aligned}$$

นำ (2) ไปแทนใน (1) จะได้ว่า

$$\int e^x \cos 3x\,dx = e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x - 3\int e^x \cos 3x dx$$

$$\int e^x \cos 3x\,dx + 3\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x$$

$$4\int e^x \cos 3x\,dx = e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x$$

เพราะฉะนั้น

$$\int e^x \cos 3x\,dx = \frac{1}{4}(e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x) + c$$