

รายวิชา 09114222  
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเบื้องต้น  
(Introduction to Numerical Methods)  
บทที่ 6 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical  
Integration)

---

---

Integration)

---

- Application Trapezoidal

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

ปัญหาทั่วไปของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขอาจกล่าวได้ดังนี้ กำหนดให้  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  เป็นเซตของข้อมูลของฟังก์ชัน  $y = f(x)$  เมื่อ  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบแน่ชัด ซึ่งเราต้องการจะคำนวณหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตที่อยู่ในรูปลงนี้

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

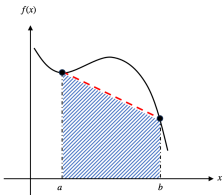
ในกรณีการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข เราจะแทนที่  $f(x)$  ด้วยการประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนาม ซึ่งจะได้ค่าประมาณของปริพันธ์จำกัดเขต นั่นคือ หากแทนที่  $f(x)$  ด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับที่  $n$  ( $f_n(x)$ ) ที่อยู่ในรูปของสมการ

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

ดังนั้น จะเขียนสมการการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขได้ดังนี้

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_n(x)dx$$

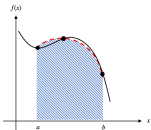
การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)



รูปที่ 1: ประมาณค่าปริพันธ์ด้วยพื้นที่ใต้เส้นตรง

Navigation icons: back, forward, search, etc.

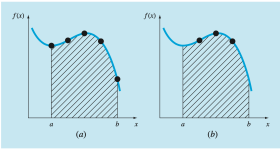
การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)



รูปที่ 2: The approximation of an integral by the area under three straight-line segments.

Navigation icons: back, forward, search, etc.

# การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)



รูปที่ 3: The difference between (a) closed and (b) open integration formulas.

Navigation icons: back, forward, search, etc.

## Outline

### การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

- 1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)
- 1.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)
- 1.3 วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)
- 1.4 วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)
- 1.5 วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)
- 1.6 แบบฝึกหัด 6

Navigation icons: back, forward, search, etc.

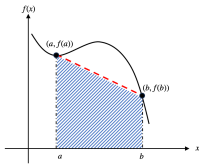
# วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) เป็นวิธีที่ง่ายที่สุดในการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขต โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับหนึ่งหรือสมการเส้นตรงเป็นฟังก์ชันในการประมาณค่าปริพันธ์ นั่นคือ

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_1(x)dx \tag{1.1}$$

# วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

จากรูปที่ 4 จะเห็นได้ว่า การประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามอันดับหนึ่งคือการหาพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู



รูปที่ 4: การประมาณค่าปริพันธ์กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

จากการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น นั่นคือ

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1.2}$$

จะได้ว่า พื้นที่ใต้เส้นตรงจะเป็นการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน  $f_1(x)$  ในช่วง  $a$  ถึง  $b$  จะได้

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx \tag{1.3}$$

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

จากสมการ (1.2) จะได้

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - \frac{af(b) - af(a)}{b - a} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b - a} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \end{aligned} \tag{1.4}$$

แทนสมการ (1.4) ใน (1.3) จะได้

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \right] dx \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{x^2}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} x \Big|_a^b \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} (b - a) \end{aligned}$$

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

เนื่องจาก  $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$  จะได้

$$I = [f(b) - f(a)] \frac{b + a}{2} + bf(a) - af(b)$$

ดังนั้น

$$I = (b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2} \tag{1.5}$$

จะเรียกสมการ (1.5) ว่าการประมาณค่าปริพันธ์ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

ตัวอย่างที่ 1.1

จงประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$  ในช่วง  $a = 0$  ถึง

$b = 0.8$  ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู และประมาณร้อยละค่าคลาดเคลื่อน

สัมพัทธ์ เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.640533



วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)  
วิธีทำ

---

---

---

---

---

---

---

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

---

---

---

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

---

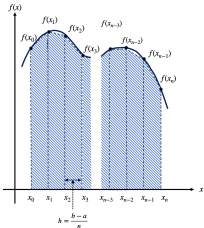
---

---

# กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

จากหัวข้อที่ผ่านมา จะเห็นได้ว่าการประมาณค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู จะมีค่าคลาดเคลื่อนอย่างมาก ดังนั้นวิธีหนึ่งที่จะลดค่าคลาดเคลื่อนลงเมื่อใช้วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู คือแบ่งช่วงการหาค่าปริพันธ์เป็นหลายๆ ส่วน โดยแต่ละส่วนย่อยจะใช้การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่า การหาค่าปริพันธ์ก็คือผลบวกของการหาค่าปริพันธ์แต่ละส่วน ดังนั้นวิธีนี้จะเรียกว่า **กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)**

# กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)



รูปที่ 5: การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

จากรูปที่ 5 แสดงการแบ่งเป็น  $n$  ช่วง โดยแต่ละช่วงจะมีช่วงกว้าง  $h$  เท่ากัน ซึ่งจะมี  $n + 1$  จุด คือ  $x_0, x_1, \dots, x_n$  เมื่อ  $h = \frac{b - a}{n}$  จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \tag{1.6}$$

แทนค่าสมการด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูในแต่ละปริพันธ์ จะได้

$$I = h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \tag{1.7}$$

หรือ

$$I = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \tag{1.8}$$

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

เมื่อ  $h = \frac{b-a}{n}$  จะได้

$$I = (b - a) \frac{[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]}{2n} \tag{1.9}$$

สมการ (1.9) เรียกว่า การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule Method)

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

ตัวอย่างที่ 1.2

จงประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$  ในช่วง  $a = 0$  ถึง

$b = 0.8$  ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป และหาร้อยละค่าคลาดเคลื่อน

สัมพัทธ์ เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

วิธีทำ

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

<i>n</i>	<i>h</i>	<i>I</i>	<i>ε<sub>t</sub></i> (%)
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

รูปที่ 6

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

นอกเหนือจากการใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูในการประมาณค่าปริพันธ์แล้ว ยังมีอีกวิธีหนึ่งในการประมาณค่าปริพันธ์ที่มีความแม่นยำยิ่งขึ้น นั่นคือการใช้พหุนามที่มีลำดับสูงกว่าเพื่อเชื่อมต่อจุดต่างๆ เราจะเรียกวิธีประมาณค่าปริพันธ์นี้ว่า กฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule) โดยกฎของซิมป์สัน แบ่งออกเป็นสองวิธีดังนี้ กฎของซิมป์สัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule) และ กฎของซิมป์สัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

กฎของซิมป์สัน 1/3 เป็นการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันทำได้โดยการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ซึ่งเส้นโค้งดังกล่าวจะแทนด้วยฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์อันดับสอง ซึ่งจะพิจารณาข้อมูล 3 จุด ดังนั้นการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันจะอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx \tag{1.10}$$

ถ้า  $a$  และ  $b$  แทนด้วย  $x_0$  และ  $x_2$  ตามลำดับ และ  $f_2(x)$  แทนด้วยฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์อันดับสอง (Second Order Lagrange Polynomial) จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \right] dx$$

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

จากการหาค่าปริพันธ์ข้างต้นจะได้

$$I \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \tag{1.11}$$

โดย  $h = (b - a)/2$  สมการ (1.11) เรียกว่า กฎของซิมป์สัน 1/3 หรือ สูตรซิมสัน1/3 (Simpson's 1/3 Rule) หรือ

$$I \cong (b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \tag{1.12}$$

ถ้า  $a = x_0$ ,  $b = x_2$  และ  $x_1$  คือจุดกึ่งกลางระหว่าง  $a$  และ  $b$  หรือเท่ากับ  $(b + a)/2$  และสมการ (1.12) เรียกว่า การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยกฎของซิมป์สัน 1/3

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

ตัวอย่างที่ 1.3

จงประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$  ในช่วง  $a = 0$  ถึง

$b = 0.8$  ด้วยกฎของซิมป์สัน 1/3 และหาร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.640533

---

---

---

---

---

---

---

---

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีทำ

---

---

---

---

---

---

---

---



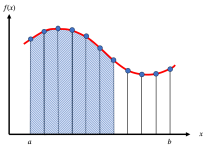
การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป  
(Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

Navigation icons: back, forward, search, etc.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การประมาณค่าปริพันธ์ คือผลบวกของการประมาณค่าปริพันธ์ปริพันธ์ในแต่ละส่วน แล้วนำค่าที่ได้ในแต่ละส่วนมาบวกกัน โดยแต่ละช่วงย่อยจะใช้การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยกฎของซิมสัน 1/3 แสดงดังรูปที่ 7



รูปที่ 7: การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยกฎของซิมสัน 1/3 หลายรูป

Navigation icons: back, forward, search, etc.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

กำหนดให้  $h = \frac{b-a}{n}$  จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

แทนค่า Simpson's 1/3 rule แต่ละช่วง จะได้

$$I \approx 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} + \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ดังนั้น

$$I \approx (b-a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n} \tag{1.13}$$

สมการ (1.13) เรียกว่า การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีหาค่าปริพันธ์ด้วยซิมสัน 1/3 หลายรูป หรือการหาค่าปริพันธ์ด้วยการประยุกต์ใช้ซิมสัน 1/3 (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ตัวอย่างที่ 1.4  
จงประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วง  $a = 0$  ถึง  $b = 0.8$  ด้วยกฎของซิมป์สัน 1/3 หลายรูป เมื่อ  $n = 4$   
และหาร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.640533

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

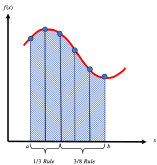
วิธีทำ

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

กฎของซิมป์สัน 3/8 เป็นการหาค่าปริพันธ์ที่มีความคล้อยคลึงกับวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู และกฎของซิมป์สัน 1/3 โดยกฎของซิมป์สัน 3/8 นี้เป็นการหาค่าประมาณปริพันธ์โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามลากรองจันต์สาม ซึ่งฟังก์ชันพหุนามลากรองจันต์สามนี้พิจารณาข้อมูล 4 จุด แสดงดังรูปที่ 8



รูปที่ 8: กฎของซิมป์สัน 3/8



วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีทำ

---

---

---

---

---

---

---

แบบฝึกหัด 6

- 1. จงหาค่าของ  $\int_1^{\pi/2} (6 + 3 \cos x)dx$ 
  - 1.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู
  - 1.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป  $n = 4$
  - 1.3 กฎของซิมป์สัน  $1/3$
  - 1.4 กฎของซิมป์สัน  $3/8$
  - 1.5 กฎของซิมป์สัน  $1/3$  หลายรูป  $n = 4$
- 2. จงหาค่าของ  $\int_0^3 (1 - e^{-2x})dx$ 
  - 2.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู
  - 2.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป  $n = 8$
  - 2.3 กฎของซิมป์สัน  $1/3$
  - 2.4 กฎของซิมป์สัน  $3/8$
  - 2.5 กฎของซิมป์สัน  $1/3$  หลายรูป  $n = 8$

---

---

---

---

---

---

---

แบบฝึกหัด 6

3. จงหาค่าของ  $\int_{-2}^4 (1 - x - 4x^2 + 2x^5) dx$
- 3.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู
  - 3.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป  $n = 4$
  - 3.3 กฎของซิมป์สัน  $1/3$
  - 3.4 กฎของซิมป์สัน  $3/8$
  - 3.5 กฎของซิมป์สัน  $1/3$  หลายรูป  $n = 4$

---

---

---

---

---

---

---

เฉลยแบบฝึกหัด 6

- 1.
  - 1.1 11.78097245
  - 1.2 12.38612536
  - 1.3 12.43161759
  - 1.4 12.42779273
  - 1.5 12.42480285
- 2.
  - 2.1 1.49628187
  - 2.2 2.47807626
  - 2.3 2.39918649
  - 2.4 2.45121318
  - 2.5 2.50118548
- 3.
  - 3.1 5280.00000000
  - 3.2 1516.87500000
  - 3.3 1752.00000000
  - 3.4 1392.00000000
  - 3.5 1106.53125000

---

---

---

---

---

---

---