บทที่ 6 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข และ การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข
(Numerical Differentiation and Integration)

รศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง และ ดร.รัฐพรหม พรหมคำ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

2025

Table of Contents

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation) คือ การหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยการนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข

ทฤษฎีบท 1.1

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาได้ในช่วงเปิด (a, b) ถ้า x_0 เป็นจุดในช่วงเปิด (a, b) แล้ว อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ รอบจุด x_0 นิยามโดย

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n \quad (1.1)$$

เมื่อ $R_n(x)$ คือเศษเหลือ ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$R_n(x) = f^n(\xi)\frac{(x - x_0)^n}{n!}, \quad x_0 < \xi < x$$

โดยที่ $f^{(n)}$ คือ อนุพันธ์ลำดับที่ n ของฟังก์ชัน $f(x)$

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาได้ในช่วงเปิด (a, b) สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจาณาพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \quad (1.2)$$

เรียกสมการ (1.2) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 0**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาสองพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{1.3}$$

เรียกสมการ (1.3) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 1**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาสามพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \tag{1.4}$$

เรียกสมการ (1.4) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 2**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ** n นิยามโดย

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) =& f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1}-x_i)^2}{2!} \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)(x_{i+1}-x_i)^n}{n!} + R_n \end{aligned} \tag{1.5}$$

เมื่อ R_n คือเศษเหลือสำหรับค่าประมาณ นิยามโดย

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1}-x_i)^{n+1} \tag{1.6}$$

โดยที่ $\xi \in (x_i, x_{i+1})$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative) คือ การหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข และการนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยแบ่งออกเป็น 3 วิธีดังนี้

1. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)**
2. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the First Derivative)**
3. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)**

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ (1.5) นั่นคือ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} \tag{1.7}$$

จากนิยามของ R_n (1.6) และค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายสำหรับค่าประมาณของสมการ (1.7) จะได้

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i) \tag{1.8}$$

โดยที่ $\xi \in (x_i, x_{i+1})$ หรือสามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = O(x_{i+1} - x_i) \tag{1.9}$$

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ (1.7) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \tag{1.10}$$

เมื่อ

- Δf_i คือ ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับหนึ่ง (First Forward Difference)
- $h = x_{i+1} - x_i$
- $O(h)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายตามอันดับของ h

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the First Derivative)

จากอนุกรมเทย์เลอร์ สามารถพิจารณาช่วงกว้าง h ที่เป็นค่าย้อนหลัง คือ x_i และ x_{i-1} ได้ดังสมการ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} - \cdots$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \tag{1.11}$$

ดังนั้น

$$f'(x_i) = \frac{\nabla f_i}{h} + O(h) \tag{1.12}$$

เมื่อ

- ∇f_i คือ ผลต่างย้อนหลังอันดับหนึ่ง (First Backward Difference)
- $h = x_i - x_{i-1}$
- $O(h)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายตามอันดับของ h

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

จาก

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \cdots$$

และ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} - \cdots$$

จะได้

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)(h) + \frac{2f^{(3)}(x_i)(h)^2}{3!} + \cdots$$

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

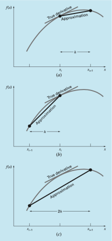
ดังนั้น

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)(h)^2}{6} - \cdots$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2) \qquad (1.13)$$

เราจะเรียกสมการ (1.13) ว่า **ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (centered difference)**



รูปที่ 1: Graphical depiction of (a) forward, (b) backward, and (c) centered finite-divided-difference approximations of the first derivative.

ตัวอย่างที่ 1.1

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ (ค่าจริง $f'(0.5) = -0.9125$) เมื่อ $h = 0.5$ และ $h = 0.25$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า $(O(h))$
2. วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง $(O(h))$
3. วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง $(O(h^2))$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของอนุกรมเทย์เลอร์สามารถใช้ค่าตัวเลขที่ได้ มาหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงต่อไป และสามารถเขียนอนุกรมเทย์เลอร์แบบไปข้างหน้าสำหรับ $f(x_{i+2})$ ในพจน์ของ $f(x_i)$ จะได้

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)(2h)^2}{2!} + \cdots \qquad (1.14)$$

จากสมการ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \cdots$$

ทำการคูณด้วย 2 แล้วนำไปลบกับสมการ (1.14) จะได้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \cdots$$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

ดังนั้น

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \tag{1.15}$$

เราจะเรียกว่า สมการ (1.15) ว่า **ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับสอง (Second Forward Finite Divided Difference)**

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

ในทำนองเดียวกัน **ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังอันดับสอง (Second Backward Finite Divided Difference)** คือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h) \tag{1.16}$$

และ **ผลต่างสืบเนื่องตรงกลางอันดับสอง (Second centered finite divided difference)**

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \tag{1.17}$$

ตัวอย่างที่ 1.2

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ เมื่อ $h = 0.5$ และ $h = 0.25$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า $(O(h))$
2. วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง $(O(h))$
3. วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง $(O(h^2))$

สูตรการหาค่าอนุพันธ์ที่มีความแม่นยำสูง (High-accuracy Differentiation Formulas)

จากอนุกรมเทย์เลอร์

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x_i)(h)^3}{3!} + \cdots \quad (1.18)$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2) \quad (1.19)$$

จากผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับสอง นั่นคือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (1.20)$$

แทนสมการ (1.20) ในสมการ (1.18) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2) \quad (1.21)$$

ดังนั้น **สูตรการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าสำหรับความแม่นยำ** $O(h^2)$ คือ

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2) \quad (1.22)$$

ในทำนองเดียวกัน **สูตรการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังสำหรับความแม่นยำ** $O(h^2)$ คือ

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} + O(h^2) \tag{1.23}$$

และ **สูตรการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ** $O(h^4)$ คือ

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i+1}) + f(x_{i-2})}{12h} + O(h^4) \tag{1.24}$$

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

รูปที่ 2: Forward finite-divided-difference formulas

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

รูปที่ 3: Backward finite-divided- difference formulas

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$	$O(h^2)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$	$O(h^4)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$	$O(h^2)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$	$O(h^4)$

รูปที่ 4: Centered finite-divided- difference formulas

ตัวอย่างที่ 1.3

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ เมื่อ $h = 0.25$ โดยใช้วิธี high-accuracy divided-difference ต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า ($O(h^2)$)
2. โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง ($O(h^2)$)
3. โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง ($O(h^4)$)

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 2$ เมื่อ $h = 0.2$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้
   1.1 วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าสำหรับความแม่นยำ $O(h)$
   1.2 วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังสำหรับความแม่นยำ $O(h)$
   1.3 วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ $O(h^2)$
2. กำหนดให้ $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 2$ เมื่อ $h = 0.2$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้
   2.1 วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าสำหรับความแม่นยำ $O(h^2)$
   2.2 วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังสำหรับความแม่นยำ $O(h^2)$
   2.3 วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ $O(h^4)$
3. กำหนดให้ $f(x) = x^2 \cos x$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.4$ เมื่อ $h = 0.1$ โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ $O(h^4)$
4. กำหนดให้ $f(x) = e^x + x$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 2$ เมื่อ $h = 0.2$ โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ $O(h^4)$
5. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1, 2, 3 และ 4 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข

เฉลยแบบฝึกหัด

1. 1.1 312.8000000000004, $\varepsilon = 10.53\%$
   1.2 255.19999999999996, $\varepsilon = 9.82\%$
   1.3 284.0000000000002, $\varepsilon = 0.35\%$
2. 2.1 281.0000000000009, $\varepsilon = 0.7067\%$
   2.2 281.0, $\varepsilon = 0.7067\%$
   2.3 283.0000000000003, $\varepsilon = 1.0043 \times 10^{-13}\%$
3. 0.67450391
4. 8.38866013

Table of Contents

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

Outline

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

ปัญหาทั่วไปของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขอาจจะกล่าวได้ดังนี้ กำหนดให้ $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ เป็นเซตของข้อมูลของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังกชันที่ไม่ทราบแน่ชัด ซึ่งเราต้องการจะคำนวณหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตที่อยู่ในรูปดังนี้

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

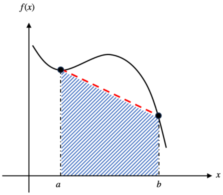
ในกรณีการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข เราจะแทนที่ $f(x)$ ด้วยการประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนาม ซึ่งจะได้ค่าประมาณของปริพันธ์จำกัดเขต นั่นคือ หากแทนที่ $f(x)$ ด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับที่ n ($f_n(x)$) ที่อยู่ในรูปของสมการ

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

ดังนั้น จะเขียนสมการการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขได้ดังนี้

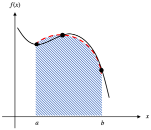
$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)



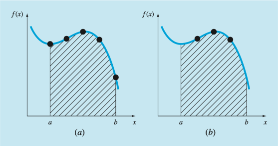
รูปที่ 5: ประมาณค่าปริพันธ์ด้วยพื้นที่ใต้เส้นตรง

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)



รูปที่ 6: The approximation of an integral by the area under three straight-line segments.

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)



รูปที่ 7: The difference between (a) closed and (b) open integration formulas.

Outline

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

1.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)
1.2 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)
1.3 สูตรการหาค่าอนุพันธ์ที่มีความแม่นยำสูง (High-accuracy Differentiation Formulas)

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

2.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)
2.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)
2.3 วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)
2.4 วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)
2.5 วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)
2.6 แบบฝึกหัด 6

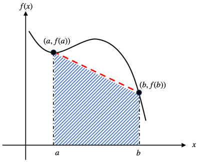
วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) เป็นวิธีที่ง่ายที่สุดในการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขต โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับหนึ่งหรือสมการเส้นตรงเป็นฟังก์ชันในการประมาณค่าปริพันธ์ นั่นคือ

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

จากรูปที่ 8 จะเห็นได้ว่า การประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามอันดับหนึ่งคือการหาพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู



รูปที่ 8: การประมาณค่าปริพันธ์กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

จากการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น นั่นคือ

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2.2}$$

จะได้ว่า พื้นที่ใต้เส้นตรงจะเป็นการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f_1(x)$ ในช่วง a ถึง b จะได้

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cong \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \tag{2.3}$$

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

จากสมการ (2.2) จะได้

$$\begin{aligned} f_1(x) =& \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - \frac{af(b) - af(a)}{b - a} \\ =& \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b - a} \\ =& \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \end{aligned} \tag{2.4}$$

แทนสมการ (2.4) ใน (2.3) จะได้

$$\begin{aligned} I =& \int_a^b \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}\right] \mathrm{d}x \\ =& \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{x^2}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}x\Big|_a^b \\ =& \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}(b - a) \end{aligned}$$

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

เนื่องจาก $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ จะได้

$$I = [f(b) - f(a)]\frac{b+a}{2} + bf(a) - af(b)$$

ดังนั้น

$$I = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} \tag{2.5}$$

จะเรียกสมการ (2.5) ว่า**การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู**

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

ตัวอย่างที่ 2.1

จงประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู และประมาณร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.640533

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

วิธีทำ

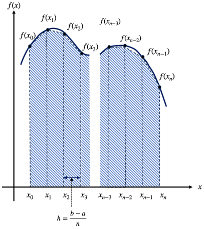
กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

จากหัวข้อที่ผ่านมา จะเห็นได้ว่าการประมาณค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู จะมีค่าคลาดเคลื่อนอย่างมาก ดังนั้นวิธีหนึ่งที่จะลดค่าคลาดเคลื่อนลงเมื่อใช้วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู คือแบ่งช่วงการหาค่าปริพันธ์เป็นหลายๆ ส่วน โดยแต่ละส่วนย่อยจะใช้การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่า การหาค่าปริพันธ์ก็คือผลบวกของการหาค่าปริพันธ์แต่ละส่วน ดังนั้นวิธีนี้จะเรียกว่า **กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)**

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)



รูปที่ 9: การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

จากรูปที่ 9 แสดงการแบ่งเป็น n ช่วง โดยแต่ละช่วงจะมีช่วงกว้าง h เท่ากัน ซึ่งจะมี $n+1$ จุด คือ $x_0, x_1, ..., x_n$ เมื่อ $h = \frac{b-a}{n}$ จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

แทนค่าสมการด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูในแต่ละปริพันธ์ จะได้

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \tag{2.7}$$

หรือ

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \tag{2.8}$$

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

เมื่อ $h = \frac{b-a}{n}$ จะได้

$$I = (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]}{2n} \tag{2.9}$$

สมการ (2.9) เรียกว่า **การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule Method)**

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

ตัวอย่างที่ 2.2

จงประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน
$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป และหาร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

วิธีทำ

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

n	h	I	ε_t (%)
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

รูปที่ 10

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

นอกเหนือจากการใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูในการประมาณค่าปริพันธ์แล้ว ยังมีอีกวิธีหนึ่งในการประมาณค่าปริพันธ์ที่มีความแม่นยำยิ่งขึ้น นั่นคือการใช้พหุนามที่มีลำดับสูงกว่าเพื่อเชื่อมต่อจุดต่างๆ เราจะเรียกวิธีประมาณค่าปริพันธ์นี้ว่า **กฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule)** โดยกฎของซิมป์สัน แบ่งออกเป็นสองวิธีดังนี้ กฎของซิมป์สัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule) และ กฎของซิมป์สัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

กฎของซิมป์สัน 1/3 เป็นการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันทำได้โดยการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ซึ่งเส้นโค้งดังกล่าวจะแทนด้วยฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์อันดับสอง ซึ่งจะพิจารณาข้อมูล 3 จุด ดังนั้นการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันจะอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cong \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x \qquad (2.10)$$

ถ้า a และ b แทนด้วย x_0 และ x_2 ตามลำดับ และ $f_2(x)$ แทนด้วยฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์อันดับสอง (Second Order Lagrange Polynomial) จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] \mathrm{d}x$$

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

จากการหาค่าปริพันธ์ข้างต้นจะได้

$$I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \qquad (2.11)$$

โดย $h = (b-a)/2$ สมการ (2.11) เรียกว่า **กฎของซิมป์สัน 1/3 หรือ สูตรซิมสัน1/3 (Simpson's 1/3 Rule)** หรือ

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \qquad (2.12)$$

ถ้า $a = x_0$, $b = x_2$ และx_1 คือจุดกึ่งกลางระหว่าง a และ b หรือเท่ากับ $(b+a)/2$ และสมการ (2.12) เรียกว่า **การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยกฎของซิมป์สัน 1/3**

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

ตัวอย่างที่ 2.3

จงประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน
$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง
$b = 0.8$ ด้วยกฎของซิมป์สัน 1/3 และหาร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์
เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.640533

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

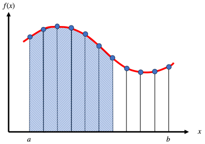
วิธีทำ

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป
(Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การประมาณค่าปริพันธ์ คือผลบวกของการประมาณค่าปริพันธ์ปริพันธ์ในแต่ละส่วน แล้วนำค่าที่ได้ในแต่ละส่วนมาบวกกัน โดยแต่ละช่วงย่อยจะใช้การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยกฎของซิมป์สัน 1/3 แสดงดังรูปที่ 11



รูปที่ 11: การประมาณค่าปริพันธ์ด้วยกฎของซิมป์สัน 1/3 หลายรูป

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

กำหนดให้ $h = \dfrac{b-a}{n}$ จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

แทนค่า Simpson's 1/3 rule แต่ละช่วง จะได้

$$\begin{aligned} I \cong{} & 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + \frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6} \\ & + \frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6} \end{aligned}$$

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ดังนั้น

$$I \approx (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n} \tag{2.13}$$

สมการ (2.13) เรียกว่า **การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีหาค่าปริพันธ์ด้วยซิมสัน 1/3 หลายรูป หรือการหาค่าปริพันธ์ด้วยการประยุกต์ใช้ซิมสัน 1/3 (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)**

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ตัวอย่างที่ 2.4

จงประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ ด้วยกฎของซิมป์สัน 1/3 หลายรูป เมื่อ $n = 4$ และหาร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.640533

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

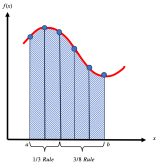
วิธีทำ

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

กฎของซิมป์สัน 3/8 เป็นการหาค่าปริพันธ์ที่มีความคล้ายคลึงกับวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู และกฎของซิมป์สัน1/3 โดยกฎของซิมป์สัน 3/8 นี้เป็นการหาค่าประมาณปริพันธ์โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์อันดับสาม ซึ่งฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์อันดับสามนี้พิจารณาข้อมูล 4 จุด แสดงดังรูปที่ 12



รูปที่ 12: กฎของซิมป์สัน 3/8

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

เพื่อหาค่าปริพันธ์ จะได้

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx$$

นั่นคือ

$$I \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

เมื่อ $h = (b-a)/3$ ดังนั้น

$$I = \frac{b-a}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] \qquad (2.14)$$

สมการ (2.14) เรียกว่า **สูตรซิมสัน 3/8 หรือวิธีซิมสัน 3/8**

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

ตัวอย่างที่ 2.5

จงประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ ด้วยกฎของซิมป์สัน 3/8 และหาร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.640533

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 6

1. จงหาค่าของ $\int_{1}^{\pi/2}(6+3\cos x)\mathrm{d}x$
    1.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู
    1.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป $n=4$
    1.3 กฎของซิมป์สัน 1/3
    1.4 กฎของซิมป์สัน 3/8
    1.5 กฎของซิมป์สัน 1/3 หลายรูป $n=4$
2. จงหาค่าของ $\int_{0}^{3}(1-e^{-2x})\mathrm{d}x$
    2.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู
    2.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป $n=8$
    2.3 กฎของซิมป์สัน 1/3
    2.4 กฎของซิมป์สัน 3/8
    2.5 กฎของซิมป์สัน 1/3 หลายรูป $n=8$

แบบฝึกหัด 6

3. จงหาค่าของ $\int_{-2}^{4}(1 - x - 4x^2 + 2x^5)\mathrm{d}x$

    0.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

    0.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป $n = 4$

    0.3 กฎของซิมป์สัน 1/3

    0.4 กฎของซิมป์สัน 3/8

    0.5 กฎของซิมป์สัน 1/3 หลายรูป $n = 4$

เฉลยแบบฝึกหัด 6

1. 1.1 11.78097245
   1.2 12.38612536
   1.3 12.43161759
   1.4 12.42779273
   1.5 12.42480285
2. 2.1 1.49628187
   2.2 2.47807626
   2.3 2.39918649
   2.4 2.45121318
   2.5 2.50118548
3. 3.1 5280.00000000
   3.2 1516.87500000
   3.3 1752.00000000
   3.4 1392.00000000
   3.5 1106.53125000