

บทที่ 1

บทนำสู่การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

“คณิตศาสตร์เอาไปใช้ประโยชน์อะไรได้?” อาจจะเป็นคำถามที่ผู้ศึกษาคณิตศาสตร์มักจะถูกถามกันมากที่สุด นับว่าเป็นสิ่งที่สะท้อนความเป็นจริงได้ดีว่า สังคมนั้นคาดหวังว่าคณิตศาสตร์ที่คนทั่วไปมองว่ายากและซับซ้อนจะต้องมีประโยชน์คุ้มค่าที่ศึกษาเล่าเรียน

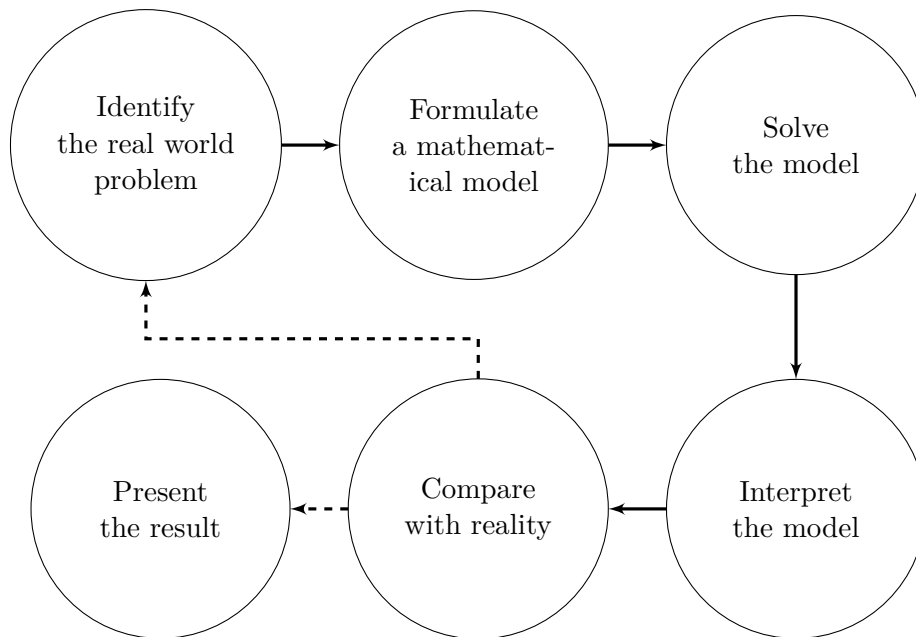
หนังสือการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เบื้องต้นเล่มนี้มีเนื้อหาเกี่ยวกับ ความรู้พื้นฐาน กระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ การนำไปใช้งาน ตลอดจนถึงมีการสอดแทรกปัญหาและผลกระทบจากการนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้งานจริง

โลกแห่งความเป็นจริงและโลกแห่งคณิตศาสตร์

โลกแห่งความเป็นจริง (Real World) ประกอบไปด้วยผู้คนและความสัมพันธ์ที่ซับซ้อน การที่มนุษย์จะอยู่ร่วมกันได้อย่างสันติสุขจำเป็นที่จะต้องมีการจัดการปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ เมื่อเราพิจารณาถึงต้นตอของปัญหาจะพบว่า กิจกรรม (Activities) ของมนุษย์มีความหลากหลาย ทั้งในแง่ของลักษณะ ขนาด และความเสี่ยง ในบางกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับคนส่วนใหญ่ของสังคมย่อมต้องใช้เงินลงทุนสูง กิจกรรมบางอย่างไม่สามารถที่จะมาลองผิดลองถูกได้ และในกิจกรรมที่มีความเสี่ยงสูงก็ย่อมที่จะมีผลกระทบต่อชีวิตและทรัพย์สินอย่างร้ายแรง

แม้ว่าโลกปัจจุบันจะมีเทคโนโลยีที่ก้าวหน้าขึ้นมาก แต่ปัญหาหลายอย่างก็ไม่สามารถแก้ไขได้โดยง่าย โดยเฉพาะอย่างยิ่งในบางปัญหานั้นเราต้องดำเนินการด้วยความระมัดระวัง ต้องมีการศึกษาทบทวนข้อมูล มีการออกแบบ หรือสร้างแบบจำลอง (Model) เพื่อศึกษาผลลัพธ์ ประเมินประสิทธิภาพ และวางแผนการดำเนินการที่รอบคอบก่อนนำไปดำเนินการใช้จริง ทั้งนี้ก็เพื่อลดความเสี่ยง ประหยัดเวลา และงบประมาณในการดำเนินการ คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่มีบทบาทในการเตรียมการในเรื่องนี้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งคือ การนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

โลกแห่งคณิตศาสตร์ (Mathematical World) เป็นโลกนามธรรมที่มีการกำหนดสัญลักษณ์แทนนามธรรมเหล่านั้น มีการนิยามทางคณิตศาสตร์ที่รัดกุม เพื่อใช้ในการศึกษาระบบ และพิสูจน์ผลที่ได้เป็นทฤษฎีเพื่อนำไปใช้ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Modeling) คือกระบวนการในการใช้คณิตศาสตร์เป็นตัวแทนวิเคราะห์ พยากรณ์ หรือสร้างความเข้าใจต่อกิจกรรมในโลกแห่งความเป็นจริง



รูปที่ 1.1: กระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) เป็นการจำลองสิ่งที่อยู่ในโลกแห่งความเป็นจริง ให้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปนามธรรม และใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์หาคำตอบของแบบจำลองเพื่อนำผลกลับไปประยุกต์ใช้กับโลกแห่งความเป็นจริง ซึ่งสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ระบุปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง (Identify the real world problem)

การทำความเข้าใจปัญหาเป็นขั้นตอนแรกในการสร้างแบบจำลอง ต้องวิเคราะห์ให้ทราบว่า ปัญหาคืออะไร มีอะไรบ้างที่เกี่ยวข้องกับปัญหามีคำถามมากมายที่ต้องทำความเข้าใจโจทย์ ปัญหาในสถานการณ์จริง เช่น ปัญหานี้ต้องการทราบอะไร มีวัตถุประสงค์และเป้าหมายอะไร จะตัดสินใจผลที่ออกมาอย่างไร แหล่งข้อมูลมาจากไหน เชื่อถือได้หรือไม่ มีคำตอบเป็นแบบเดียวหรือไม่ จำแนกปัญหาว่าเป็นแบบมีคำตอบแน่นอน (deterministic) หรือแบบมีคำตอบไม่แน่นอน (stochastic) ต้องใช้การสร้างสถานการณ์จำลอง (simulation) หรือไม่ คำถามหรือคำตอบดังกล่าวมาแล้วต้องนิยาม กำหนดขอบเขต ให้ตรงประเด็นและชัดเจน

ขั้นตอนที่ 2 สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Formulate a mathematical model)

ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากปัญหาที่ได้วิเคราะห์ หรือทำให้ชัดเจนแล้วในขั้นตอนที่ 1 ทดลองสร้างแบบจำลองที่ซับซ้อนน้อยที่สุดก่อน เขียนแผนภาพตามความเหมาะสม เขียนรายการปัจจัยที่เกี่ยวข้องรวบรวมข้อมูลและทดสอบเนื้อหารายละเอียด จุดสำคัญในขั้นตอนนี้คือ

- (1) การกำหนดตัวแปรพร้อมทั้งกำหนดหน่วย ซึ่งประกอบไปด้วย ตัวแปรนำเข้า (Inputs) ตัวแปรผลลัพธ์หรือตัวแปรส่งออก (Outputs) ตัวแปรประกอบ (Parameters) การอธิบายพฤติกรรมของตัวแปร รวบรวมข้อมูลเพิ่มเติมถ้าจำเป็น กำหนดข้อสมมติที่ต้องการสร้าง
- (2) เขียนความสัมพันธ์หรือสมการของตัวแปรโดยใช้ข้อเท็จจริง เช่น การเป็นส่วน ความสัมพันธ์เชิงเส้นและไม่เชิงเส้น ความสัมพันธ์จากการทดลอง กฎหรือทฤษฎีทางวิทยาศาสตร์ สมการเชิงผลต่าง สมการเชิงอนุพันธ์ เมทริกซ์ ความน่าจะเป็น การแจกแจงเชิงสถิติ เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 3 หาผลลัพธ์ของแบบจำลอง (Solve the model)

การหาคำตอบทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลอง อาจจะใช้วิธีเกี่ยวกับพีชคณิต หรือใช้วิธีเชิงตัวเลข ใช้แคลคูลัสและกราฟ เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ หรือใช้โปรแกรมสำเร็จรูปที่เหมาะสม หาค่าของตัวแปรที่ต้องการ อาจจะเป็นรูปแบบตารางหรือรูปภาพ

ขั้นตอนที่ 4 แปลความหมายของผลลัพธ์ (Interpret the solution)

ขั้นตอนนี้เป็นการแปลความหมาย และตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการทางคณิตศาสตร์ เช่น พิจารณาค่าของตัวแปรที่ได้ ว่ามีเครื่องหมายและขนาดถูกต้องหรือไม่ มีค่าเพิ่มหรือลดตามที่ควรจะเป็นหรือไม่ พิจารณาค่ามากและค่าน้อยของตัวแปรเพื่อตรวจสอบพฤติกรรมความไวต่อสิ่งกระตุ้นได้คำตอบที่ดีที่สุดตามที่คาดไว้หรือไม่ หรือต้องเปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้น

ขั้นตอนที่ 5 ตรวจสอบผลลัพธ์กับข้อมูลจริง (Compare with reality)

ผลลัพธ์ที่ได้สามารถตรวจสอบกับข้อมูลจริงได้หรือไม่ คำตอบทางคณิตศาสตร์มีความหมายหรือไม่ การทำนายสอดคล้องกับข้อมูลจริงหรือไม่ ประเมินแบบจำลองที่สร้างขึ้นว่าได้ครบตามวัตถุประสงค์หรือไม่ แบบจำลองสามารถปรับปรุงให้ดีขึ้นได้อีกหรือไม่ ผลลัพธ์ที่ได้ก่อนหน้านี้ชี้ให้เห็นว่าต้องคำนวณหาค่าตัวแปรจากแบบจำลองที่ปรับปรุงใหม่เพื่อความแม่นยำที่ดีกว่าหรือไม่ ถ้าต้องการทำใหม่ก็ต้องกลับไปเริ่มที่ขั้นที่ 1 หรือถ้าไม่ต้องการก็ให้ไปขั้นที่ 6 (ดูรูป 1.1 ประกอบความเข้าใจ) ขั้นตอนนี้สำคัญมาก เพราะมีบ่อยครั้งที่ต้องสร้างแบบจำลองหลายรอบก่อนที่จะได้ผลที่น่าพอใจ

ขั้นตอนที่ 6 นำเสนอผลงาน (Present the results)

ผลงานที่ไม่ได้ถูกเสนอต่อสังคมย่อมไม่มีประโยชน์กับผู้ใดเลย การนำเสนอผลงานจึงเป็นกระบวนการที่สำคัญ และยังเป็นการเปิดโอกาสให้เกิดการพัฒนาและต่อยอด การนำเสนอผลงานนั้นอาจจะอยู่ในรูปของการสัมมนา การเขียนบทความ หรือการเขียนรายงาน โดยที่เราต้องทราบว่า จะนำเสนอเพื่อใคร ต้องการทราบอะไรบ้าง ต้องการรายละเอียดในรายงาน

มากนักน้อยเพียงใด จะสร้างการนำเสนออย่างไร จึงจะทำให้ลักษณะที่สำคัญชัดเจน และผลที่ต้องการทราบปรากฏอยู่

การจำแนกแบบจำลอง

โดยทั่วไปแล้วเราจะสามารถจำแนกแบบจำลองออกได้เป็น แบบจำลองรูปธรรม (Physical Model) แบบจำลองรูปภาพ (Visual Model) และ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) หรือ แบบจำลองนามธรรม (Abstract Model) โดยที่แบบจำลองดังกล่าว นั้นมีความแตกต่างตามลักษณะการนำไปใช้งาน ดังนี้

1. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หรือแบบจำลองนามธรรม เป็นแบบจำลองที่ประกอบด้วยประพจน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Statements) มักอยู่ในรูปสัญลักษณ์ สมการ อสมการ หรือ ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์
2. แบบจำลองรูปธรรม (Physical Model) เป็นแบบจำลองที่สามารถจับต้องได้ เช่น แบบจำลองอาคาร แบบหุ่นจำลองต่าง ๆ
3. แบบจำลองรูปภาพ (Visual Model) เป็นแบบจำลองลักษณะรูปภาพที่สามารถมองเห็นได้ เช่น กราฟ แผนที่ แบบแปลน ลายแทง

ในที่นี้เราจะกล่าวถึงเฉพาะแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เท่านั้น ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สามารถถูกจำแนกออกตามลักษณะพื้นฐานได้ 4 ลักษณะ คือ

1. จำแนกตามการเปลี่ยนแปลง ซึ่งแยกได้เป็นแบบจำลองสถิต กับแบบจำลองพลวัต (Static and Dynamic Models) แบบจำลองสถิต เป็นแบบจำลองที่ไม่เกี่ยวข้อง กับเวลา ส่วนแบบจำลองพลวัตเป็นแบบจำลองที่มีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้อง หรือผลลัพธ์ (Outputs) ของแบบจำลองขึ้นอยู่กับช่วงเวลา
2. จำแนกตามความแน่นอนของผลลัพธ์ ซึ่งแยกได้เป็น แบบจำลองแน่นอน กับแบบจำลองความน่าจะเป็น (Deterministic and Stochastic Models) แบบจำลองแน่นอนเป็นแบบจำลองที่ข้อมูลนำเข้า (Inputs) ชัดเดียวจะให้ผลลัพธ์ (Outputs) ชัดเดียวเสมอไม่ว่าทำซ้ำกี่ครั้งก็ตาม ส่วนแบบจำลองความน่าจะเป็นนั้นเป็นแบบจำลองที่ข้อมูลนำเข้าชัดเจนจะให้ผลลัพธ์อยู่ในรูปของตัวแปรสุ่ม (หรือมีผลลัพธ์หลายชุดจากข้อมูลนำเข้าชุดเดียวกันนั่นเอง)
3. จำแนกตามความต่อเนื่อง ซึ่งแยกได้เป็น แบบจำลองต่อเนื่อง กับแบบจำลองไม่ต่อเนื่อง (Continuous and Discrete Models) แบบจำลองต่อเนื่อง เป็นแบบจำลองที่มีข้อมูลนำเข้าต่อเนื่องตลอดเวลา เช่น การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำ ส่วนแบบจำลองไม่ต่อเนื่องเป็นแบบจำลองที่มีข้อมูลนำเข้าไม่ต่อเนื่อง เช่น จำนวนลูกค้าที่มาใช้บริการของธนาคาร จะเปลี่ยนแปลงเมื่อมีลูกค้าเข้าหรือออกจากธนาคารเท่านั้น
4. จำแนกตามการให้ความหมาย ซึ่งแยกได้เป็น แบบจำลองกลวิธาน กับแบบจำลองทางสถิติ (Mechanistic and Statistical Models) โดยแบบจำลองกลวิธานนั้น จะถูกสร้างมาจากกฎหรือทฤษฎีทางวิทยาศาสตร์โดยมีข้อเท็จจริงรองรับ ส่วนแบบจำลองทางสถิตินั้นจะถูกสร้างมาจากข้อมูลเชิงคุณภาพหรือเชิงปริมาณโดยวิธีการทางคณิตศาสตร์และสถิติโดยไม่ได้สนใจในเรื่องการให้ความหมายของ

หมายเหตุ การจำแนกประเภทของแบบจำลองตามลักษณะต่าง ๆ ของแบบจำลอง ดังที่กล่าวมาแล้วในบทนี้เป็นเพียงการจำแนกเบื้องต้นเท่านั้น ในความเป็นจริงยังมีแบบจำลองที่มีลักษณะผสมผสานในหลายลักษณะดังกล่าวข้างต้นในแบบจำลองเดียวกัน