บทที่ 4

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีต

เราสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาเพื่อใช้ในการหาคำตอบหรือพยากรณ์เหตุการณ์ในอนาคต เช่น พยากรณ์การพัฒนาการของระบบในอนาคตพยากรณ์แนวโน้มในอนาคต หรือใช้ประกอบการตัดสินใจ

ตัวแปรของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นับว่าเป็นส่วนประกอบที่สำคัญที่มีผลโดยตรงต่อคำตอบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สิ่งที่ต้องพิจารณาเกี่ยวกับตัวแปร คือ ค่าของตัวแปรและอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ตัวแปร เช่น ค่าของตัวแปร x ในปัจจุบัน ค่าของตัวแปร x ก่อนหน้า ค่าของตัวแปรอื่น ๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอื่น ๆ หรือ เวลา t เป็นต้น

ความสัมพันธ์ที่อยู่ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นความสัมพันธ์ที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร x ตามเวลา t ซึ่งมีด้วยกัน 2 แบบ คือ

1. ความสัมพันธ์ที่ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของเวลาต่อเนื่อง t ซึ่งเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันชัดเจน (Explicit Function) $x(t)$ ในพจน์ของ t และเรียกแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีความสัมพันธ์ลักษณะนี้ว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อเนื่อง (Continous Mathematical Model)

2. ความสัมพันธ์ที่ใช้ค่า x เฉพาะบางจุดของเวลา เช่น ณ จุดเวลา 1 ชั่วโมง หรือ ณ จุดเวลา 1 เดือน กรณีนี้ใช้สัญลักษณ์ x_n แทนค่าของ x ณ จุดเวลา n และเรียกแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีความสัมพันธ์ลักษณะนี้ว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีต (Discrete Mathematical Model)

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงเฉพาะการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีตตัวแปรเดียว และการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีตหลายตัวแปร

4.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีตตัวแปรเดียว

4.1.1 สมการผลต่าง

กำหนดให้ตัวแแปร $x_n \in \mathbb{R}$ แทนค่าของตัวแปร x ณ จุดเวลา n ความสัมพันธ์ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีต จะอยู่ในรูปสมการที่แสดงว่า ค่าตัวแปร x_{n+1} กำหนดโดยฟังก์ชันของตัวแปร $n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \geq 0$ ทั้งนี้ $x_0 \in \mathbb{R}$ คือค่าของตัวแปร x ณ จุดเวลาเริ่มต้น $(n = 0)$ เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}) \tag{4.1}$$

โดยเราเรียกสมการที่อยู่ในรูป (4.1) ว่า สมการผลต่าง [1] (Difference Equation)

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ P_n เป็นผลผลิตของโรงงาน ณ ปีที่ n และผลผลิตของโรงงานนี้ ณ ปีต่อไปเป็นสองเท่าของผลผลิตของโรงงาน ณ ปีก่อนหน้าเสมอ ดังนั้น จะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีตในรูปสมการผลต่าง คือ

$$P_{n+1} = 2P_n$$

ถ้า P_0 คือ ผลผลิตของโรงงาน ณ ปีที่เริ่มต้น $(n = 0)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} P_1 &= 2P_0, \\ P_2 &= 2P_1 = 2(2P_0) = 2^2P_0, \\ P_3 &= 2P_2 = 2(2^2P_0) = 2^3P_0 \end{aligned}$$

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ เราสามารถแสดงได้ว่า

$$P_n = 2^nP_0$$

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.2 จงพิสูจน์ว่าสูตรบิเนต์ของสมการผลต่าง $P_{n+1} = 2P_n$ คือ $P_n = 2^nP_0$

$\diamondsuit$

[1] ในทางทฤษฎีจำนวนหรือวิทยาการคอมพิวเตอร์อาจเรียกสมการที่อยู่ในรูป (4.1) ว่า ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation)

ตัวอย่าง 4.3 จากตัวอย่างที่แล้ว ถ้าเรากำหนดให้ผลผลิตของโรงงานนี้มีอัตราการเจริญเติบโต คือ 25% ต่อปี (นั่นคือ ผลผลิตของโรงงานนี้ ณ ปีต่อไป คือ 1.25 เท่าของผลผลิตของโรงงาน ณ ปีก่อนหน้า) ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีตในรูปสมการผลต่าง คือ

$$P_{n+1} = (1.25)P_n$$

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ เราสามารถแสดงได้ว่า

$$P_n = (1.25)^n P_0$$

$\diamondsuit$

สมการผลต่างที่อยู่ในรูป

$$x_{n+1} = ax_n \tag{4.2}$$

เมื่อ $a \neq 0$ มีรูปแบบปิด (Closed Form) ที่ไม่อยู่ในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$x_n = a^n x_0 \tag{4.3}$$

ทั้งนี้สมการ (4.2) และสมการ (4.3) เป็นสมการที่สมมูลกัน แต่เราสามารถใช้สมการ (4.3) ในการหาค่า x_n ได้โดยที่ไม่ต้องใช้ค่า x ณ จุดเวลาก่อนหน้า (แต่ต้องทราบค่าของ x ณ จุดเวลาเริ่มต้น) เราเรียกสมการ (4.3) ว่าเป็นสูตรบีเนต์ [2] (Binet Formula) ของสมการ (4.2)

ตัวอย่าง 4.4 สถาบันการเงินใช้ระบบดอกเบี้ยทบต้นในการคำนวณยอดเงินคงเหลือในแต่ละปี ถ้าอัตราดอกเบี้ยคือ $r\%$ ต่อปี เมื่อ P_0 เป็นเงินต้น และ P_n เป็นเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ n เราจะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีตในรูปสมการผลต่าง คือ

$$P_{n+1} = (1 + \frac{r}{100})P_n$$

โดยมีสูตรบีเนต์ คือ

$$P_n = (1 + \frac{r}{100})^n P_0$$

$\diamondsuit$

[2]ในปี ค.ศ. 1843 นักคณิตศาสตร์ชื่อ Jacques Philippe Marie Binet (ฝรั่งเศษ, 1786 - 1856) ได้เสนอรูปแบบปิดในการหาค่าพจน์ใด ๆ ของลำดับฟิโบนัชชี (Fibonacci Sequence) ทำให้ต่อมาเพื่อเป็นการให้เกียรติ เราจึงมักเรียกรูปแบบปิดในการหาค่าพจน์ใด ๆ ของความสัมพันธ์เวียนเกิดว่าเป็นสูตรบิเนต์

ตัวอย่าง 4.5 ในการฝากเงินระบบดอกเบี้ยทบต้นด้วยอัตราดอกเบี้ย $r\%$ ต่อปี อยากทราบว่าจะใช้เวลานานเท่าไรที่จะทำให้เงินรวมเป็นสองเท่าของเงินต้น

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.6 จงหาอัตราผลตอบแทนจากการฝากเงินคงที่กับสถาบันการเงินเป็นประจำทุกเดือน ถ้ากำหนดให้อัตราดอกเบี้ยคือ $r\%$ ต่อปี และธนาคารคิดดอกเบี้ยปีละ 1 ครั้ง

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.7 จากตัวอย่างที่แล้ว จงหาว่าอัตราผลตอบแทนจะเปลี่ยนไปหรือไม่ ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ยปีละ 2 ครั้ง

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.8 จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการให้สินเชื่อของสถาบันการเงิน

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.9 พิจารณาสมการผลต่าง (4.1) ที่อยู่ในรูป

$$x_{n+1} = ax_n + b \tag{4.4}$$

เมื่อ $a, b \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 + b \\ x_2 &= ax_1 + b \\ &= a(ax_0 + b) + b \\ &= a^2x_0 + (a+1)b \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} x_3 &= ax_2 + b \\ &= a(a^2x_0 + (a+1)b) + b \\ &= a^3x_0 + a(a+1)b + b \\ &= a^3x_0 + (a(a+1)+1)b \\ &= a^3x_0 + (a^2+a+1)b \end{aligned}$$

โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะได้ว่า สูตรบีเนต์ของสมการผลต่าง (4.4) คือ

$$x_n = a^nx_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)b$$

สำหรับกรณีที่ $a \neq 1$ จะได้ว่า สูตรบีเนต์ของสมการผลต่าง (4.4) คือ

$$x_n = a^nx_0 + \frac{(1-a^n)b}{1-a}$$

และสำหรับกรณีที่ $a = 1$ จะได้ว่า สูตรบีเนต์ของสมการผลต่าง (4.4) คือ

$$x_n = 1^nx_0 + (1^{n-1} + 1^{n-2} + \ldots + 1^2 + 1 + 1)b = x_0 + nb$$

จะเห็นได้ชัดเจนว่า ในกรณีที่ $a = 1$ นั้นค่าของ x_n จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่สิ้นสุด (ขึ้นอยู่กับว่า $b > 0$ หรือ $b < 0$) เมื่อ n เพิ่มขึ้นอย่างไม่สิ้นสุด นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (x_0 + nb) = \operatorname{sign}(b) \cdot \infty$$

ในกรณีที่ $|a| < 1$ ค่าของ x_n จะลู่เข้าสู่จำนวนจริงจำนวนหนึ่ง เมื่อ n เพิ่มขึ้นอย่างไม่สิ้นสุด นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(a^nx_0 + \frac{(1-a^n)b}{1-a} \right) = \frac{b}{1-a}$$

และในกรณีที่ $|a| \geq 1$ ค่าของ x_n จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่สิ้นสุด เมื่อ n เพิ่มขึ้นอย่างไม่สิ้นสุด $\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.10 จงพิสูจน์ว่าสูตรบิเนต์ของสมการผลต่าง $x_{n+1} = ax_n + b$ เมื่อ $a \neq 1$ คือ

$$x_n = a^n x_0 + \frac{(1-a^n)b}{1-a}$$

$\diamondsuit$

บทนิยาม 4.11 (อันดับของสมการผลต่าง (Order of Difference Equation)) เราเรียกสมการผลต่าง

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$$

ว่ามีอันดับเป็น $k+1$ เมื่อ $n-k$ คือ จุดเวลาที่ห่างจากเวลาที่จุด $n+1$ มากที่สุดที่ต้องใช้ในการกำหนดค่าของ x_{n+1}

ตัวอย่าง 4.12 พิจารณาสมการผลต่างต่อไปนี้

(1) สมการผลต่าง $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ มีอันดับเป็น 2 เนื่องจากจุดเวลาที่ห่างจากเวลาที่จุด $n+1$ มากที่สุดที่ต้องใช้ในการกำหนดค่าของ x_{n+1} คือ $n-1$

(2) สมการผลต่าง $x_{n+1} = ax_n$ เมื่อ $a \neq 0$ มีอันดับเป็น 1 เนื่องจากจุดเวลาที่ห่างจากเวลาที่จุด $n+1$ มากที่สุดที่ต้องใช้ในการกำหนดค่าของ x_{n+1} คือ n

(3) สมการผลต่าง $x_{n+1} = -x_n + (n-5)^2$ มีอันดับเป็น 1 เนื่องจากจุดเวลาที่ห่างจากเวลาที่จุด $n+1$ มากที่สุดที่ต้องใช้ในการกำหนดค่าของ x_{n+1} คือ n (ไม่ต้องพิจารณาพจน์ $(n-5)^2$)

(4) สมการผลต่าง $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + 5x_{n-3} + n^3$ มีอันดับเป็น 4 เนื่องจากจุดเวลาที่ห่างจากเวลาที่จุด $n+1$ มากที่สุดที่ต้องใช้ในการกำหนดค่าของ x_{n+1} คือ $n-3$

$\diamondsuit$

4.1.2 สมการผลต่างเชิงเส้น

นอกจากคุณสมบัติด้านอันดับของสมการผลต่างแล้ว ยังมีคุณสมบัติด้านเชิงเส้นที่เราใช้ในการพิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

บทนิยาม 4.13 เราเรียกสมการผลต่าง (4.1):

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$$

ว่าเป็นสมการผลต่างเชิงเส้น (Linear Difference Equation) ถ้าฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}) = g(n) + a_n x_n + a_{n-1} x_{x-1} + \ldots + a_{n-k} x_{x-k}$$

เมื่อ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงใด ๆ และ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่าง 4.14 พิจารณาสมการผลต่างต่อไปนี้

(1) สมการผลต่าง $x_{n+1} = 3x_n - 4x_{n-1}$ เป็นสมการผลต่างเชิงเส้น เนื่องจาก $x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}) = g(n) + 3x_n - 4x_{n-1}$ และ $g(n) = 0$

(2) สมการผลต่าง $x_{n+1} = n^2 + 7 + 2x_n + 3x_{n-1}$ เป็นสมการผลต่างเชิงเส้น เนื่องจาก $x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}) = g(n) + 2x_n + 3x_{n-1}$ และ $g(n) = n^2 + 7$

(3) สมการผลต่าง $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ ไม่เป็นสมการผลต่างเชิงเส้น เนื่องจาก $x_{n+1} = 2x_n - 2(x_n)^2$

$\Diamond$

4.1.3 สมการผลต่างโฮโมจิเนียส

บทนิยาม 4.15 เราเรียกสมการผลต่าง (4.1) ว่าเป็นสมการผลต่างโฮโมจิเนียส (Homogeneous Difference Equation) ถ้าสมการนี้สมมูลกับสมการที่อยู่ในรูป

$$h(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}) = 0$$

เมื่อ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงใด ๆ ที่ $h(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$ อยู่ในรูปนิพจน์ของ $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.16 พิจารณาสมการผลต่างต่อไปนี้

(1) สมการผลต่าง $x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0$ เป็นสมการผลต่างโฮโมจิเนียส

(2) สมการผลต่าง $x_{n+1} - 3x_n = 3n + 1$ ไม่เป็นสมการผลต่างโฮโมจิเนียส เนื่องจากสมการนี้สมมูลกับสมการ $x_{n+1} - 3x_n - 3n + 1 = 0$ และค่าของ $h(x_{n+1}, x_n) = x_{n+1} - 3x_n - 3n + 1$ ไม่อยู่ในรูปนิพจน์ของ x_{n+1} และ x_n เพียงแค่สองตัวนี้

(3) สมการผลต่างเชิงเส้น $x_{n+1} = g(n) + a_n x_n + a_{n-1} x_{x-1} + \ldots + a_{n-k} x_{x-k}$ เป็นสมการผลต่างโฮโมจิเนียส ก็ต่อเมื่อ $g(n) = 0$

$\Diamond$

4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีตหลายตัวแปร

โดยทั่วไปแล้วในการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เราอาจจะจำเป็นต้องพิจารณาตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัว ในหัวข้อนี้เราจะได้เรียนรู้ถึงการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีตหลายตัวแปร ตลอดจนตัวอย่างที่น่าสนใจในการแก้ปัญหาในโลกจริง

พิจารณาการสู้รบกันระหว่างกองกำลังฝ่ายรัฐบาลและกองกำลังฝ่ายปฏิวัติ ในการสู้รบนี้ต่างฝ่ายต่างก็ต้องสังหารฝ่ายตรงกันข้าม ถ้าทหารหนึ่งคนของกองกำลังฝ่ายรัฐบาลสามารถสังหารทหารของกองกำลังฝ่ายปฏิวัติได้จำนวน a คน ณ แต่ละจุดเวลา และในทำนองเดียวกันทหารหนึ่งคนของกองกำลังฝ่ายปฏิวัติสามารถสังหารทหารของกองกำลังฝ่ายรัฐบาลได้จำนวน b คน ณ แต่ละจุดเวลาเช่นกัน

ให้ A_n เป็นจำนวนทหารของกองกำลังฝ่ายรัฐบาล ณ จุดเวลา n และให้ B_n เป็นจำนวนทหารของกองกำลังฝ่ายปฏิวัติ ณ จุดเวลา n จำนวนทหารที่ถูกสังหารของกองกำลังฝ่ายรัฐบาล ณ จุดเวลาหนึ่งคือ bB_n ทั้งนี้เพราะทหารหนึ่งคนในจำนวน B_n คนของกองกำลังฝ่ายปฏิวัติสามารถสังหารทหารของกองกำลังฝ่ายรัฐบาล ได้ b คน ดังนั้น จำนวนทหารที่เหลือของกองกำลังฝ่ายรัฐบาล ณ จุดเวลาต่อไป คือ

$$A_{n+1} = A_n - bB_n$$

ในทำนองเดียวกัน ผลการสำรวจกองกำลังฝ่ายปฏิวัติ ณ จุดเวลาต่อไป คือ

$$B_{n+1} = B_n - aA_n$$

กำหนดให้จำนวนทหาร ณ จุดเวลาเริ่มต้นของกองกำลังฝ่ายรัฐบาลและกองกำลังฝ่ายปฏิวัติ คือ A_0, B_0 ตามลำดับ เราสามารถหาค่าของ A_n และ B_n ได้โดยการใช้ระบบสมการผลต่างข้างต้นโดยวิธีแทนค่าตรง ๆ (ความสัมพันธ์เวียนเกิด) หรือใช้วิธีการหาสูตรบิเนต์เพื่อความรวดเร็วในการหาค่า A_n และ B_n ดังนี้

$$\begin{aligned}
A_{n+2} &= A_{n+1} - bB_{n+1} \\
&= A_{n+1} - b(B_n - aA_n) \\
&= A_{n+1} - bB_n + abA_n \\
&= A_{n+1} + (A_{n+1} - A_n) + abA_n \\
&= 2A_{n+1} - (1 - ab)A_n
\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} + (1 - ab)A_n = 0$$

ซึ่งเป็นสมการผลต่างอันดับสอง และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
B_{n+2} &= B_{n+1} - aA_{n+1} \\
&= B_{n+1} - a(A_n - bB_n) \\
&= B_{n+1} - aA_n + abB_n \\
&= B_{n+1} + (B_{n+1} - B_n) + abB_n \\
&= 2B_{n+1} - (1 - ab)B_n
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$B_{n+2} - 2B_{n+1} + (1 - ab)B_n = 0$$

ซึ่งเป็นสมการผลต่างอันดับสองเช่นกัน

ตัวอย่าง 4.17 จงหาสูตรบิเนต์ของสมการผลต่าง $A_{n+2} - 2A_{n+1} + (1 - ab)A_n = 0$

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.18 จงหาสูตรบิเนต์ของสมการผลต่าง $B_{n+2} - 2B_{n+1} + (1 - ab)B_n = 0$

$\diamondsuit$

4.2.1 ระบบสมการผลต่างเชิงเส้น

เราสามารถเขียนระบบสมการผลต่างเชิงเส้นของการสู้รบระหว่างกองกำลังฝ่ายรัฐบาลและกองกำลังฝ่ายปฏิวัติข้างต้น:

$$A_{n+1} = A_n - bB_n$$
$$B_{n+1} = B_n - aA_n$$

ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ (หรือเวกเตอร์ในกรณีที่เป็นเมทริกซ์แถวหรือเมทริกซ์สดมภ์) ได้ คือ

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$$

และถ้าเรากำหนดให้ $x_n = \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$ และ $M = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$x_{+1} = Mx_n$$

และมีสูตรบิเนต์ คือ

$$x_n = M^n x_0$$

วิธีการดังกล่าวข้างต้น เราจะใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลง (Dynamics) ไปตามจุดเวลาของเวคเตอร์ x ซึ่งในบางครั้งจะเรียก x ว่าเป็น **สภาวะ** (State) และ เรียกเมทริกซ์ M ว่าเป็น **เมทริกซ์แปลงสภาวะ** (Transition Matrix)

ตัวอย่าง 4.19 พิจารณาประชากรของสัตว์ชนิดหนึ่งที่มีการเปลี่ยนแปลง จากสัตว์แรกเกิด (Newborn Animal) ซึ่งมีอายุไม่ถึง 1 ปี สัตว์วัยเยาว์ (Young Animal) ซึ่งมีอายุตั้งแต่ 1 ปี แต่ไม่ถึง 2 ปี และสัตว์ตัวเต็มวัย (Adult Animal) ซึ่งมีอายุตั้งแต่ 2 ปีขึ้นไป โดยกำหนดสัญลักษณ์ตามจำนวนประชากรของแต่ละกลุ่มของ ณ จุดเวลา n ดังต่อไปนี้

- กำหนดให้ N_n แทนด้วย จำนวนสัตว์แรกเกิด ณ ปีที่ n
- กำหนดให้ Y_n แทนด้วย จำนวนสัตว์วัยเยาว์ ณ ปีที่ n
- กำหนดให้ A_n แทนด้วย จำนวนสัตว์ตัวเต็มวัย ณ ปีที่ n

ถ้าในแต่ละปีสัตว์ชนิดนี้มีการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรในแต่ละกลุ่มช่วงอายุเป็นดังนี้

- จำนวนกลุ่มสัตว์แรกเกิด เพิ่มขึ้น 30% ของจำนวนสัตว์ตัวเต็มวัยในปีก่อนหน้า
- จำนวนกลุ่มสัตว์แรกเกิดมีอัตราการมีชีวิตรอดไปเป็นสัตว์วัยเยาว์เท่ากับ 90%
- จำนวนกลุ่มสัตว์วัยเยาว์มีอัตราการมีชีวิตรอดไปเป็นสัตว์ตัวเต็มวัยเท่ากับ 80%
- จำนวนกลุ่มสัตว์ตัวเต็มวัยมีอัตราการตายเท่ากับ 50%

เราสามารถเขียนแบบจำลองคณิตศาสตร์ดีสครีตโดยใช้ระบบสมการผลต่างอธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงจำนวนของสัตว์ในแต่ละกลุ่มช่วงอายุ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= 0.3A_n \\ Y_{n+1} &= 0.9N_n \\ A_{n+1} &= 0.8Y_n + 0.5A_n \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} N_{n+1} \\ Y_{n+1} \\ A_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_n \\ Y_n \\ A_n \end{bmatrix}$$

ถ้ากำหนดให้เวคเตอร์ $x = \begin{bmatrix} N_n \\ Y_n \\ A_n \end{bmatrix}$ และเมทริกซ์ $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$x_{n+1} = Mx_n$$

และได้สูตรบีเนต์คือ $x_{n+1} = M^n x_0$ ◊

ตัวอย่าง 4.20 ถ้าในแต่ละปีมีโรคเกิดใหม่ 1,000 โรค และเราสามารถกำจัดโรคได้เพียงครึ่งหนึ่งของโรคที่มีอยู่ ถ้าทราบว่าในปลายปี ค.ศ. 2020 มีโรคทั้งหมด 1,200 โรค อยากทราบว่าในปลายปี ค.ศ. 2030 จะมีโรคทั้งหมดเท่าไร และถ้าสถานการณ์ยังเป็นเช่นนี้เรื่อยไปเราจะสามารถกำจัดโรคได้ทั้งหมดหรือไม่

◊

ตัวอย่าง 4.21 กำหนดให้พรรคการเมืองพรรคหนึ่งมีการสูญเสียผู้สนับสนุนในแต่ละเดือน $p\%$ แต่จะมีผู้เปลี่ยนมาสนับสนุน $q\%$ ของฝ่ายตรงข้าม จงเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อธิบายจำนวนประชากรที่สนับสนุนพรรคการเมืองนี้

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.22 เด็กผู้หญิงคนหนึ่งกินอาหารวันละ 2,500 กิโลแคลอรี ใช้พลังงานในการเผาผลาญทั่วไป 1,200 กิโลแคลอรี ใช้พลังงานในการออกกำลังกายวันละ 16 กิโลแคลอรีต่อน้ำหนักตัว 1 กิโลกรัม และอัตราส่วนในการเปลี่ยนแปลงไขมันเป็นพลังงาน คือ ไขมัน 1 กิโลกรัม ต่อพลังงาน 10,000 กิโลแคลอรี

ถ้าในเช้าวันอาทิตย์เธอมีน้ำหนัก 55 กิโลกรัม จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อพยากรณ์น้ำหนักของเธอ พร้อมทั้งหาค่าต่อไปนี้

(1) น้ำหนักของเธอในตอนเช้าของวันเสาร์ถัดไป

(2) น้ำหนักของเธอในตอนเช้าของวันเสาร์ถัดไป ถ้าในวันพุธเธอกินอาหาร 3,500 กิโลแคลอรี

(3) ปริมาณอาหารที่เธอสามารถกินได้ในแต่ละวัน ถ้าเธอต้องการจะลดน้ำหนัก

(4) น้ำหนักน้อยสุดที่เธอสามารถลดได้ใน N สัปดาห์

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.23 เกิดโรคระบาดขึ้นในประเทศแห่งหนึ่ง ทำให้ผู้บริหารของประเทศต้องการประมาณยอดผู้ติดเชื้อรายวัน จงหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย และประมาณการแพร่ระบาดของโรคที่สอดคล้องกับสมมติฐานต่อไปนี้

(1) โรคนี้สามารถรักษาให้หายได้ และไม่ทำให้ผู้ป่วยถึงแก่ความตาย

(2) ผู้ป่วยที่รักษาหายแล้วจะมีภูมิคุ้มกัน และไม่กลับไปป่วยซ้ำอีก

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.24 จากตัวอย่างการเกิดโรคระบาดที่ผ่านมา จงนำเสนอวิธีการยับยั้งหรือชะลอโรคระบาด พร้อมทั้งบอกว่าวิธีการที่เสนอมานั้นมีประสิทธิภาพเป็นอย่างไร

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.25 จงเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อพยากรณ์การแพร่ระบาดของโรคติดต่อ ตลอดจนแนวทางการชะลอหรือยับยั้งโรคระบาดที่สอดคล้องกับสมมติฐานต่อไปนี้

(1) โรคนี้สามารถรักษาให้หายได้ และ ทำให้ผู้ป่วยถึงแก่ความตายได้

(2) ผู้ป่วยที่รักษาหายแล้วจะมีภูมิคุ้มกัน แต่จะกลับไปป่วยซ้ำอีกเมื่อภูมิคุ้มกันอ่อนลง

◊

ตัวอย่าง 4.26 การสู้รบกันระหว่างกองกำลังฝ่าย A ซึ่งมีจำนวนเริ่มต้น 10,000 คน และกองกำลังฝ่าย B ซึ่งมีจำนวนเริ่มต้น 5,000 คน กำหนดให้อัตราส่วนความสามารถในการสังหารของกองกำลังฝ่าย A และฝ่าย B คือ 0.1 และ 0.15 ตามลำดับ จงใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดีสครีตพยากรณ์ผลลัพธ์ของการสู้รบนี้

$\diamondsuit$

ตัวอย่าง 4.27 สมมติว่าแมลงตัวเต็มวัยเพศเมียแต่ละตัววางไข่เดือนละ 100 ฟอง, 10% ของไข่ เจริญเติบโตเป็นตัวอ่อน, 20% ของตัวอ่อน เจริญเติบโตเป็นแมลงเด็ก, 30% ของแมลงเด็กเจริญเติบโตเป็นแมลงตัวเต็มวัย และ 40% ของตัวเต็มวัยในเดือนนี้จะอยู่รอดไปจนถึงสิ้นเดือนถัดไป

จงเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์พยากรณ์จำนวนแมลงชนิดนี้ เมื่อสินเดือนที่ n ถ้าเริ่มต้นโดยมีแมลงตัวเต็มวัยเพศเมีย 10 ตัว และอัตราส่วนของตัวอ่อนเพศเมียที่ออกมาจากไข่คือ 50% จงพยากรณ์

(1) จำนวนประชากรของแมลงเมื่อสิ้นเดือนที่ 6

(2) จำนวนประชากรของแมลงในระยะยาว

◊

แบบฝึกหัด

1. จากสมการผลต่างและค่าเริ่มต้นต่อไปนี้ จงเขียนค่าของ x_1, x_2, x_3 และ x_4

    (1.1) $x_{n+1} = x_n + 3, x_0 = 1$

    (1.2) $x_{n+1} = 0.5x_n + 1, x_0 = 2$

    (1.3) $x_{n+1} = x_n^2 + \sqrt{x_n}, x_0 = 1$

    (1.4) $x_{n+1} = \sin(x_n), x_0 = 1$

2. จงตรวจสอบ อันดับ การเป็นสมการผลต่างเชิงเส้น และการเป็นสมการผลต่างโฮโมจีเนียส ของสมการผลต่างต่อไปนี้

    (2.1) $x_{n+1} = 1.2x_n + 30$

    (2.2) $y_{n+1} = 5 - y_n^2$

    (2.3) $x_{j+1} = 4x_j + x_{j-1}$

    (2.4) $v_{n+1} = 3v_n + 7$

    (2.5) $u_k = ku_{k-1} - u_{k-2}$

    (2.6) $w_{n+1} = w_n w_{n-1}$

    (2.7) $z_n = 2z_{n-1}^2 + nz_{n-3}$

3. จงเขียนสมการผลต่างในรูปของ x_{n+1} และ x_n เมื่อ $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, $x_2 = 11$, $x_3 = 23$, $x_4 = 47$, $\ldots$

4. ถ้าในแต่ละปี $k\%$ ของรถยนต์ที่มีอยู่จะเป็นรถยนต์เก่า และมีรถใหม่ v คัน จงเขียนสมการผลต่างของแสดงจำนวนรถยนต์

5. ถ้ารถยนต์กินน้ำมัน 30 กิโลเมตรต่อลิตร จงเขียนสมการผลต่างที่สอดคล้องกับ x_n ซึ่งเป็นจำนวนน้ำมันที่เหลือในถังหลังจากการวิ่งไปได้ n กิโลเมตร โดยไม่มีการเติมน้ำมันใหม่

6. ต้นถั่วเจริญเติบโตในวันแรก 3 เซนติเมตร และในวันถัด ๆ ไป เจริญเติบโตเป็นครึ่งหนึ่งของวันก่อนหน้า ถ้า B_n เป็นความยาวของต้นถั่วในวันที่ n จงเขียนสมการผลต่างแทนการเจริญเติบโตของต้นถั่ว

7. สมมติว่าจำนวนแมลงในเดือนที่ n ขึ้นอยู่กับจำนวนไข่ ที่วางใน 2 เดือนที่แล้ว และจำนวนตัวอ่อนที่รอดตายจากเดือนแรก จงเขียนสมการผลต่างเพื่อแสดงจำนวนแมลงในเดือนที่ n

8. สมมติว่าการปลูกต้นไม้จนใช้งานได้ต้องใช้เวลา 10 ปี ถ้า P_n แทนจำนวนของต้นไม้ที่ปลูกในปีที่ n และ M_n แทนจำนวนต้นไม้ที่โตเต็มที่สามารถใช้งานได้ในปีที่ n จงเขียนสมการผลต่างแสดงจำนวนต้นไม้โตเต็มที่ในแต่ละปี

9. ถ้าผลผลิตเพิ่มขึ้น 4% ทุก ๆ ปี และ P_n แทนผลผลิตในปีที่ n จงเขียนสมการผลต่างแสดงถึง P_n และถ้าผลผลิตในปี ค.ศ. 2015 เป็น 10 ล้านตัน จงประมาณค่าว่า

    (9.1) ปีใดที่ผลผลิตเป็น 15 ล้านตัน

(9.2) ปีใดที่ผลผลิตเป็น 30 ล้านตัน

10. เครื่องยนต์มีการเสื่อมราคา 5% ต่อปี จงเขียนสมการผลต่างสำหรับมูลค่าของเครื่องยนต์เมื่อปีที่ n ถ้าเครื่องยนต์ใหม่ราคา 100,000 บาท และเราสามารถใช้เครื่องยนต์ไปได้จนเครื่องยนต์ราคาลดลงเหลือ 30,000 บาท จงคำนวณหา

    (10.1) มูลค่าของเครื่องยนต์ ในปีที่ 5

    (10.2) อายุการใช้งานของเครื่องยนต์

11. ถ้ามีผู้ติดเชื้อโรค 100 คนเมื่อต้นปี และ 25% ของผู้ติดเชื้อโรคตั้งแต่ต้นปีเสียชีวิตในปลายปี จงเขียนสมการผลต่างสำหรับจำนวนผู้ติดเชื้อโรค ณ ปลายปีที่ n และจำนวนผู้ติดเชื้อโรคจะเป็นอย่างไรในระยะยาว

12. ห้องสมุดซื้อหนังสือใหม่จำนวน 500 เล่มทุก ๆ สิ้นปี โดยต้องทิ้งหนังสือเก่าที่มีอายุ 10 ปีทุกเล่ม และแต่ละปีมีหนังสือสูญหายหรือชำรุด 5% ของหนังสือในห้องสมุด จงเขียนสมการผลต่างแสดงถึงจำนวนหนังสือในห้องสมุดเมื่อ สิ้นปีที่ n

13. เวลาที่ใช้ในการทำงานชิ้นหนึ่งประกอบด้วยเวลาที่ใช้ในการติดตั้งอุปกรณ์ และเวลาที่ใช้ในกระบวนการผลิต โดยที่เวลาที่ใช้ในการผลิตในครั้งต่อไปจะลดลง 7% แต่เวลาที่ใช้ในการติดตั้งอุปกรณ์ยังคงเดิม จงเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แสดงเวลารวมที่ใช้ในการทำงานนี้ในแต่ละครั้ง

14. จะต้องใช้เวลานานเท่าไรที่จะทำให้เงินรวมของการฝากเงิน เป็น 3 เท่าของเงินต้น ถ้าอัตราดอกเบี้ย 9% ต่อปี

15. ต้นปีฝากเงิน 2,000 บาท ธนาคารคิดดอกเบี้ย 9% ต่อปี ตอนปลายปี และทุก ๆ 12 เดือน จะถอนเงิน w บาท

    (15.1) จงเขียนสมการผลต่างแสดงถึง เงินคงเหลือจากการถอนเงินครั้งที่ n

    (15.2) จงเขียนนิพจน์ของ x_n ในพจน์ของ n และ w

    (15.3) อยากทราบว่าเงินในบัญชีจะเป็นเท่าไรเมื่อ $w = 200$ และ $w = 160$

    (15.4) ค่าสูงสุดของ w ควรเป็นเท่าไรที่จะยังคงมีเงินเหลืออยู่ในบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 5

16. กองกำลังฝ่าย A 10,000 คน สู้รบกับกองกำลังฝ่าย B 8,000 คน ถ้าอัตราการสังหารต่อวันของกองทหาร A คือ 0.1 และอัตราการสังหารต่อวันของกองทหาร B คือ 0.12 หลังจากการต่อสู้กัน 3 วัน ทหาร 500 คน ของกองกำลังฝ่าย A ยอมแพ้และถูกจับเป็นเชลย ในสุดท้ายของวันที่ 6 กองกำลังฝ่าย B ได้รับการสนับสนุนกำลังคนเพิ่มอีก 1,500 คน จงใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายพยากรณ์ผลสรุปของการสู้รบครั้งนี้

17. ในการระบาดของไวรัสในโรงเรียนแห่งหนึ่ง เด็กที่ติดเชื้อไวรัสแต่ละคนสามารถทำให้เด็กอื่นติดเชื้อไวรัสได้อีกวันละ 2 คน และภายหลังจากรับเชื้อไวรัสไปแล้ว 2 วัน จะแสดงอาการป่วยและไม่สามารถมาโรงเรียนได้จนกว่าจะหายป่วย ถ้าเด็กทั้งหมดในโรงเรียนมี 400 คน จงพยากรณ์จำนวนเด็กที่ติดเชื้อไวรัสในวันที่ 10 ของการระบาด

18. ในเมืองเล็ก ๆ เมืองหนึ่งพบว่าในแต่ละวัน 50% ของผู้ป่วยจะหายเป็นปกติ และ 10% ของผู้ที่มีสุขภาพดีจะป่วย จงเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แสดงถึงจำนวนของผู้มีสุขภาพดีและผู้ป่วยในวันที่ n และถ้าเริ่มต้นด้วยมีผู้มีสุขภาพดี 5,000 คน และผู้ป่วย 500 คน ในวันจันทร์ อยากทราบจำนวนของผู้มีสุขภาพดีและผู้ป่วยในวันศุกร์ และในระยะยาวจำนวนของผู้มีสุขภาพดีและผู้ป่วยจะเป็นอย่างไร

19. สมมติว่า 80% ของผู้บริโภคที่ซื้อกาแฟ A ในเดือนนี้ยังคงซื้อกาแฟชนิดเดิมอยู่ในเดือนต่อไป ขณะที่ 20% จะเปลี่ยนไปซื้อกาแฟ B สมมติว่า 10% ของผู้ซื้อกาแฟ B ใน เดือนนี้เปลี่ยนไปซื้อกาแฟ A ในเดือนต่อไป ขณะที่ผู้ที่เหลืออีก 90% ยังคงซื้อกาแฟ B จงเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากสมมติฐานนี้เพื่อแสดงถึงปริมาณของกาแฟ A และ B ที่ขายได้ในแต่ละเดือน

20. สมมติว่าในแต่ละวัน

    (a) 2.6% ของตะกั่วในเลือดของคนขับออกมาโดยไต

    (b) 1% ของตะกั่วในเลือดเข้าไปในเนื้อเยื่อ

    (c) 0.4% ของตะกั่วในเลือดเข้าไปในกระดูก

    (d) 1.2% ของตะกั่วในเนื้อเยื่อเข้าไปในเลือด

    (e) 1.8% ของตะกั่วในเนื้อเยื่อถูกขับออกทางผม เล็บ และเหงื่อ

    จงเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงปริมาณของตะกั่วในเลือด เนื้อเยื่อ และกระดูก ที่สอดคล้องกับสมมติฐานข้างต้น และถ้าคน ๆ หนึ่งรับตะกั่วเข้าไป 100 มิลลิกรัมต่อวัน อยากทราบว่าปริมาณของตะกั่วในเลือด เนื้อเยื่อ และกระดูกในหนึ่งวัน และ หนึ่งสัปดาห์ต่อมาเป็นเท่าไร