

บทที่ 2

เริ่มต้นการสร้างแบบจำลอง

เราสร้างแบบจำลองเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา แต่ปัญหาส่วนใหญ่ในชีวิตจริงมักจะไม่มีอยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ มากไปกว่านั้นคำตอบของปัญหาก็อาจจะไม่มีอยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ด้วย อย่างไรก็ตามวิธีการทางคณิตศาสตร์ยังคงมีส่วนสำคัญในการหาคำตอบ จึงมีความจำเป็นที่จะต้องทำความเข้าใจ ศึกษาและวิเคราะห์ปัญหา จำแนกองค์ประกอบของปัญหา เพื่อกำหนดตัวแปร และเขียนความสัมพันธ์เหล่านั้นในทางคณิตศาสตร์

เราจะศึกษาความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์เหล่านั้นแทนสถานการณ์จริง เมื่อได้วิธีการหาคำตอบแล้ว จึงนำแบบจำลองที่สร้างขึ้น นี้ไปทดสอบ เพื่อปรับปรุงแก้ไข และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาตามสถานการณ์จริงต่อไป

จากขั้นตอนการสร้างแบบจำลอง 6 ขั้นตอน ในบทที่ 1 โดยเฉพาะขั้นตอนที่ 1 ระบุปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง และขั้นตอนที่ 2 สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็น**ขั้นตอนเริ่มต้นของการสร้างแบบจำลอง** โดยทั่วไปแล้วทั้งสองขั้นตอนนี้จะดำเนินการควบคู่กันไป อย่างไรก็ตามควรมีการแบ่งขั้นตอนตามรายละเอียดเพิ่มเติม ดังนี้

1. การทำความเข้าใจปัญหา (Clarify the problem)
2. การจำแนกรายการองค์ประกอบต่าง ๆ (List the factors)
3. การจำแนกรายการของสมมติฐาน (List the assumptions)
4. การเขียนปัญหาในรูปของคณิตศาสตร์ (Formulate a mathematical problem)

2.1 การทำความเข้าใจปัญหา

ปัญหาในชีวิตจริงที่นำมาสร้างแบบจำลองส่วนใหญ่จะไม่มีอยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ คำตอบของปัญหาที่ต้องการต้องตีความและเขียนในเชิงบรรยายที่ไม่ใช่สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นก่อนที่จะสร้างแบบจำลองจึงมีความจำเป็นที่จะต้องศึกษาและทำความเข้าใจธรรมชาติของปัญหาที่ปรากฏอย่างแท้จริงวิเคราะห์ข้อมูลเท่าที่มีอยู่ เป็นพื้นฐานในการวางแผนการแก้ปัญหา ซึ่งอาจมีความจำเป็นต้องหาข้อมูลเพิ่มเติม จะต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติของข้อมูล อาจจะต้องมีการกำหนดวัตถุประสงค์เฉพาะเพื่อการศึกษาปัญหา และอาจจะต้องมีความจำเป็นต้องละทิ้งข้อมูลบางตัวเพื่อให้ง่ายต่อการแก้ปัญหาเป็นต้น อย่างไรก็ตามการศึกษาคำถามจะง่ายขึ้น ถ้าขณะที่ศึกษาปัญหาได้พยายามตอบคำถามต่อไปนี้

1. ใครเป็นผู้ใช้แบบจำลองมีความต้องการความละเอียดและความสมบูรณ์ของคำตอบมากน้อยเพียงไร
2. พฤติกรรมทางด้านกายภาพ ทางด้านวิทยาศาสตร์ของข้อมูลเป็นอย่างไรบ้าง
3. การเปลี่ยนแปลงของข้อมูล ต้องมีการเก็บข้อมูลเพิ่มเติมหรือไม่
4. อะไรเป็นสมมติฐานที่ซ่อนเร้นอยู่และอะไรเป็นสมมติฐานที่ทำให้ปัญหาง่ายขึ้น
5. ต้องการคำตอบเมื่อไร ช่วงเวลาต่าง ๆ ที่กำหนดให้การแก้ปัญหาเสร็จสิ้น
6. รูปแบบของคำตอบเป็นอย่างไร การเขียนรายงานและการนำเสนอเป็นอย่างไร
7. มีการขัดแย้งของผลลัพธ์เกี่ยวกับในด้านการเงินหรือไม่ เช่น ค่าใช้จ่ายในการ นำไปใช้แตกต่างจากค่าใช้จ่ายในการปฏิบัติจริง

2.2 การจำแนกรายการองค์ประกอบต่าง ๆ

องค์ประกอบของปัญหามีส่วนช่วยในการหาคำตอบของปัญหาแต่ละปัญหา ประกอบด้วยองค์ประกอบในจำนวนที่แตกต่างกัน ในขั้นแรกของการสร้างแบบจำลอง เราต้องจำแนกรายการองค์ประกอบต่าง ๆ ของปัญหา เพื่อพิจารณาประเภท สัญลักษณ์ และหน่วยขององค์ประกอบในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เราต้องการองค์ประกอบเชิงปริมาณ เช่น ตัวแปรที่เป็นตัวเลข (ที่มีหน่วยกำกับ)

องค์ประกอบเชิงปริมาณง่ายต่อการจำแนกว่าเป็นตัวแปร พารามิเตอร์ หรือเป็นตัวคงที่ ดังนี้

1. ตัวแปรนำเข้า (Input Variables) คือปริมาณที่ต้องใช้ในการคำนวณแบบจำลอง เช่น อัตราฝนตก จำนวนคนที่เข้าใช้บริการในสถานบันเทิง จำนวนเดือนที่ใช้รถยนต์ เป็นต้น ตัวแปรนำเข้าอาจได้จากสิ่งที่กำหนดให้ การสมมุติ หรือการคาดเดา ซึ่งเป็นค่าที่เปลี่ยนแปลงได้
2. ตัวแปรผลลัพธ์ (Output Variables) คือปริมาณที่เป็นผลลัพธ์ของแบบจำลอง ที่ได้จากการประมวลผลของ ตัวแปรนำเข้า ตัวคงที่ และพารามิเตอร์
3. ตัวแปรประกอบ หรือ พารามิเตอร์ (Parameters) คือปริมาณที่มีค่าคงที่ในขณะที่นำแบบจำลองไปใช้ในแต่ละครั้ง ซึ่งสามารถเปลี่ยนแปลงค่าเป็นอย่างอื่นได้ เมื่อนำไปใช้ในสถานการณ์ หรือกรณีอื่น ๆ ตัวอย่าง เช่น ค่าใช้จ่ายคงที่ในแบบจำลองทางธุรกิจอย่างง่าย ขนาดห้อง ราคาตัว ความหนาแน่นของของเหลว เป็นต้น
4. ตัวคงที่ (Constants) คือปริมาณที่มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง อันได้แก่ ตัวคงที่ทางคณิตศาสตร์ เช่น π ค่าคงที่ทางฟิสิกส์ เช่น แรงโน้มถ่วงของโลก ความเร็วของแสง เป็นต้น

ทั้งนี้ตัวแปรดังกล่าวข้างต้นยังสามารถถูกแยกแยะได้ว่าเป็นแบบต่อเนื่อง แบบไม่ต่อเนื่อง หรือแบบสุ่ม ซึ่งเราสามารถจำแนกองค์ประกอบได้ดังนี้

1. ตัวแปรต่อเนื่อง (Continuous Variables) คือตัวแปรที่มีค่าต่อเนื่องตลอดเวลา เช่น เวลาความเร็ว ความยาว ราคา พื้นที่ เป็นต้น

2. ตัวแปรดีสกรีต (Discrete Variables) คือเป็นตัวแปรที่มีค่าแยกเฉพาะตัวเท่านั้น เช่น จำนวนคน จำนวนครั้งที่ทำกิจกรรม เป็นต้น
3. ตัวแปรสุ่ม (Random Variables) คือ ปริมาณที่ค่าของมันวัดได้จากกระบวนการสุ่มหรือกระบวนการที่มีความไม่แน่นอนอยู่ อาจจะเป็นตัวเลขสุ่มที่ได้จากตารางเลขสุ่มตามหลักการทางสถิติ หรือเลขสุ่มที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ใช้พยากรณ์ความน่าจะเป็นในอนาคต เช่น จำนวนลูกค้าที่เข้ามาในธนาคารเวลาพักเที่ยง ระยะเวลาที่นักวิ่งใช้ในการเข้าเส้นชัย เป็นต้น

หมายเหตุ ในการจำแนกองค์ประกอบต่าง ๆ ดังที่กล่าวมาแล้วอาจมีการซ้ำซ้อนและเกี่ยวเนื่องกันได้ เช่น ตัวแปรนำเข้า/ตัวแปรผลลัพธ์ สามารถเป็นได้ทั้งตัวแปรต่อเนื่อง ตัวแปรดีสกรีต หรือตัวแปรสุ่ม ในทางปฏิบัติเพื่อให้ง่ายและสะดวก เรามักจะกำหนดองค์ประกอบต่าง ๆ ดังที่กล่าวมาแล้วข้างบนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ และมีหน่วยกำกับ เช่น

รายการ	ประเภท	สัญลักษณ์	หน่วย
ความเร็ว	ตัวแปรนำเข้า	v	เมตร/วินาที

2.3 การจำแนกรายการของสมมติฐาน

สมมติฐานเป็นข้อความที่เชื่อมโยงองค์ประกอบต่าง ๆ เข้าด้วยกัน สมมติฐานเป็นสิ่งที่ช่วยให้การสร้างแบบจำลองง่าย ชัดเจน และบรรลุวัตถุประสงค์มากยิ่งขึ้น เราสามารถจำแนกสมมติฐานได้ดังนี้

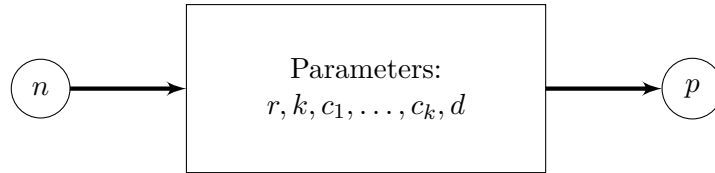
1. สมมติฐานที่มีองค์ประกอบอยู่หรือไม่มีองค์ประกอบอยู่อย่างชัดเจน
2. สมมติฐานที่กล่าวถึงขนาดผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงองค์ประกอบ
3. สมมติฐานที่อยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ

ในช่วงแรกของการสร้างแบบจำลองเราจะต้องเลือกสมมติฐานที่ทำให้แบบจำลองง่ายที่สุด มาพิจารณาก่อนสมมติฐานตามแบบที่ 2. ช่วยให้เราเลือกใช้องค์ประกอบที่จำเป็น สมมติฐานตามแบบที่ 3. เป็นหัวใจของแบบจำลอง ที่จะใช้ในการพัฒนาแบบจำลอง ในการใช้สมมติฐานแฝงอาจจะต้องใช้โดยปราศจากข้อมูลจริง พยายามศึกษาทำความเข้าใจกับทุกสมมติฐาน

2.4 การเขียนปัญหาในรูปของคณิตศาสตร์

จากขั้นตอนการทำความเข้าใจปัญหา เราจะต้องแยกแยะและวิเคราะห์ส่วนประกอบต่าง ๆ ที่ได้เหล่านั้นให้อยู่ในแต่ละส่วนดังนี้

1. สิ่งที่กำหนดให้
2. สิ่งที่ต้องการหา
3. เงื่อนไขที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์



รูปที่ 2.1: ตัวแปรในตัวอย่าง 2.1

ผลของข้อสรุปทั้งหลายเราสามารถนำมาสร้างเป็นประโยคคำถาม (Problem Statement) แยกแยะตามองค์ประกอบ ซึ่งจะเขียนข้อความนี้อยู่ในรูปแบบทั่วไป ดังนี้ สิ่งที่กำหนดให้ตัวแปรนำเข้า, พารามิเตอร์, ตัวคงที่ สิ่งที่ต้องการหา ตัวแปรผลลัพธ์ ที่สอดคล้องกัน เงื่อนไขที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ รูปแบบดังกล่าวช่วยให้การสร้างประโยคคำถามง่ายขึ้นและช่วยในการสร้างแบบจำลองปัญหาเดียวกันเราสามารถสร้างประโยคคำถามที่แตกต่างกันได้หลายรูปแบบ แต่สิ่งสำคัญที่ต้องพิจารณาคือ สิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการให้แบบจำลองค้นหาคำตอบ การสร้างประโยคคำถามสามารถสรุปข้อควรคำนึงในการสร้างแบบจำลองได้ดังนี้

1. ต้องมีความแน่ชัดว่าอะไรคือสิ่งที่ต้องการหา
2. จำแนกองค์ประกอบทั้งหมดกำหนดใช้ในการสร้างแบบจำลองแต่ละองค์ประกอบ ต้องพิจารณาประเภทขององค์ประกอบ กำหนดสัญลักษณ์แทนองค์ประกอบเหล่านั้น และเขียนหน่วยขององค์ประกอบกำกับไว้
3. จำแนกสมมติฐานทั้งหมดนำมาใช้สร้างแบบจำลอง
4. สร้างสูตรของแบบจำลองที่อยู่ในรูปแบบ สิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการหา

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายเพื่อให้เห็นขั้นตอนและกระบวนการตั้งแต่เริ่มต้น

ตัวอย่าง 2.1 สมาคมแห่งหนึ่งต้องการหารายได้จากการขายสลาก จงนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบว่า ต้องขายสลากมากเท่าไรจึงจะได้กำไร ภายใต้เงื่อนไขคือ สลากราคาคงที่และเป็นราคาเดียวกันทุกใบ ทุกรางวัลจะมีผู้มารับเงินรางวัล และมีค่าใช้จ่ายในการดำเนินการ

ขั้นตอนการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในการนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้ไขปัญหานี้ เราจะแบ่งขั้นตอนการทำแบบจำลองออกเป็น ดังนี้

- ปัญหา (Questions): ขายสลากมากเท่าไรจึงจะได้กำไร ภายใต้เงื่อนไข
 - ขายสลากในราคาคงที่ และเป็นราคาเดียวกัน
 - มีการออกรางวัล
 - มีค่าใช้จ่ายในการดำเนินการ
- องค์ประกอบ (Factors): เราสามารถจำแนกได้ดังนี้

ตัวแปร	ประเภท	สัญลักษณ์	หน่วย
กำไร	ตัวแปรผลลัพธ์	p	บาท
จำนวนสลาก	ตัวแปรนำเข้า	n	ใบ
ราคาสลาก	พารามิเตอร์	r	บาท
จำนวนรางวัล	พารามิเตอร์	k	ไม่มี
มูลค่ารางวัลที่ i	พารามิเตอร์	c_i	บาท
ต้นทุนดำเนินการ	พารามิเตอร์	d	บาท

- สมมติฐาน (Assumptions):

- สลากทั้งหมดขายในราคาเดียวกัน
- สลากทั้งหมดถูกขายได้
- สมาคมต้องจ่ายออกทุกรางวัล

- ปัญหาในรูปคณิตศาสตร์ (Mathematical Problem): จากปัญหาและสัญลักษณ์ข้างต้น เราสามารถเขียนปัญหาได้ในรูปแบบของคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

กำหนดให้ $p, r, d \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{R}_+$ จงหา $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $p > 0$ เมื่อ

$$p = rn - \left(\sum_{i=1}^k c_i + d \right) \quad (2.1)$$

ทั้งนี้เราสามารถหาผลเฉลยของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (2.1) ได้โดยพิจารณาเงื่อนไขที่จะทำให้ได้กำไร $p > 0$ คือ

$$n > \frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^k c_i + d \right)$$

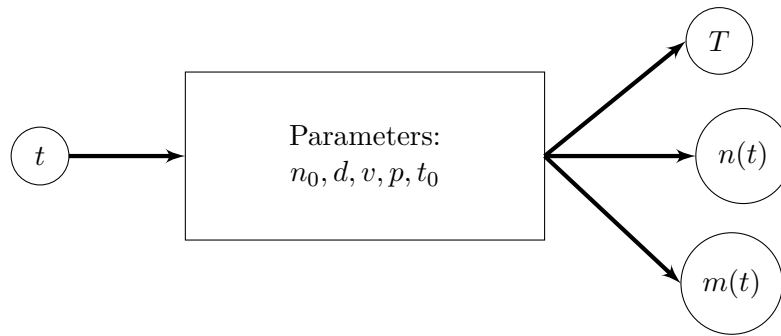
ทั้งนี้ยังมีคำถามที่น่าสนใจอีกหลายคำถามในการพัฒนาแบบจำลองนี้ให้ตอบปัญหาที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น เช่น เหตุการณ์จะเป็นอย่างไรถ้าราคาสลากเพิ่มขึ้น หรือ ราคาสลากบางฉบับขายลดราคา หรือในเหตุการณ์ที่ราคาสลากเปลี่ยนแปลงไปตามเวลานับแต่เริ่มขายสลาก

ตัวอย่าง 2.2 หน่วยรักษาความปลอดภัยมีความต้องการทราบเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการขนย้ายผู้ประสบภัยออกจากอาคารในยามฉุกเฉิน อีกทั้งทางออกและทางเดินมีเพียงพอกับการขนย้ายผู้ประสบภัยจำนวนมากหรือไม่ จงนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้ไขปัญหา \diamond

ขั้นตอนการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในการนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้ไขปัญหา เราจะแบ่งขั้นตอนการทำแบบจำลองออกเป็น ดังนี้

- ปัญหา (Questions): เวลาทั้งหมดที่ใช้ในการขนย้ายผู้คนออกจากตึกคือเท่าไร ทั้งนี้เราอาจจำเป็นต้องพิจารณาถึงปัญหาย่อยเพิ่มเติม เช่น

- ทางเดินที่ผู้ประสบภัยต้องเดินผ่านจากในตัวอาคารจนถึงจุดปลอดภัยมีลักษณะอย่างไร
- เวลาที่ต้องสูญเสียไปนับแต่เริ่มแจ้งเตือนจนถึงเวลาที่เริ่มการอพยพมีเท่าไร

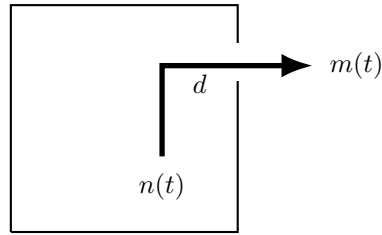


รูปที่ 2.2: ตัวแปรในตัวอย่าง 2.2

- จำนวนผู้ประสบภัยในตัวอาคารมีเท่าไร
 - จำนวนผู้ประสบภัยที่หน่วยรักษาความปลอดภัยสามารถพาออกมาได้ในแต่ละครั้งเป็นเท่าไร
 - ชัดจำกัดในการขนย้ายมีอะไรบ้าง เช่น ความเก่าแก่หรือความมั่นคงแข็งแรงของตึก คิวการขนย้าย
- องค์ประกอบ (Factors): ในตัวอย่างนี้ เราจะพิจารณาเพียงตัวแปรต่อไปนี้

ตัวแปร	ประเภท	สัญลักษณ์	หน่วย
เวลารวมในการขนย้ายผู้ประสบภัยทั้งหมด	ตัวแปรผลลัพธ์	T	คน
จำนวนผู้ประสบภัยที่อยู่ในตัวอาคาร ณ เวลา t	ตัวแปรผลลัพธ์	$n(t)$	คน
จำนวนผู้ประสบภัยที่อยู่ในจุดปลอดภัย ณ เวลา t	ตัวแปรผลลัพธ์	$m(t)$	คน
เวลาที่ผ่านไปหลังจากเริ่มปฏิบัติการอพยพ	ตัวแปรนำเข้า	t	วินาที
จำนวนผู้ประสบภัยทั้งหมด	พารามิเตอร์	n_0	คน
ระยะทางระหว่างจุดที่ผู้ประสบภัยอยู่และจุดปลอดภัย	พารามิเตอร์	d	เมตร
ความเร็วของการอพยพ	พารามิเตอร์	v	เมตร/วินาที
ความสามารถในการอพยพของหน่วยรักษาความปลอดภัย	พารามิเตอร์	p	คน/วินาที ²
เวลาที่เสียไปก่อนที่จะมีการขนย้ายผู้ประสบภัยคนแรก	พารามิเตอร์	t_0	วินาที

- สมมติฐาน (Assumptions): เส้นทางอพยพมีทางเดียว ลักษณะดังรูปที่ 2.3 และ
 - ผู้ประสบภัยทั้งหมดอยู่จุดเดียวกัน
 - ผู้ประสบภัยทั้งหมดมีความสามารถในการอพยพเท่าเทียมกัน
 - ความเร็วในการขนย้ายเป็นค่าคงที่



รูปที่ 2.3: ลักษณะของเส้นทางในการอพยพผู้ประสบภัย

- หน่วยรักษาความปลอดภัยมีเพียงหน่วยเดียว
 - หน่วยรักษาความปลอดภัยอยู่กับผู้ประสบภัย ณ เวลาที่เริ่มการอพยพทันที
 - ความเร็วในการอพยพเป็นค่าคงที่
 - ไม่มีข้อจำกัดอื่น ๆ ในการอพยพผู้ประสบภัย
- ปัญหาในรูปคณิตศาสตร์ (Mathematical Problem): จากปัญหาและสัญลักษณ์ข้างต้น เราสามารถเขียนปัญหาได้ในรูปแบบของคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

กำหนดให้ $t, t_0, d, v \in \mathbb{R}_+, n_0, p \in \mathbb{N}, n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ และ $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ จงหา $T = t_0 + \min(t^*)$ เมื่อ

$$\begin{aligned} n(t) &= n_0 - m(t) \\ m(t) &= \left\lfloor \left(\frac{d}{v} \right) pt \right\rfloor \end{aligned} \quad (2.2)$$

และ t^* คือ ผลเฉลยของสมการ

$$n(t^*) = n_0 - \left\lfloor \left(\frac{d}{v} \right) pt^* \right\rfloor = 0$$

แนวทางการพัฒนาแบบจำลองนี้อาจจะพิจารณาถึงสมมติฐานเพิ่มเติม เช่น ลักษณะของการอพยพแตกต่างไปจากรูปที่ 2.3 มีทางเข้าออกมากกว่าหนึ่งทาง หรือ มีอุปสรรคอื่น ๆ ในการอพยพผู้ประสบภัย เป็นต้น

ตัวอย่าง 2.3 ในรายการแข่งขันเทนนิสแบบพบกันหมด กรรมการดำเนินการแข่งขันพบว่ามีความแตกต่างกันในเรื่องเวลาที่ใช้ในแต่ละคู่ จึงเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยมีเป้าหมายคือ ต้องการหาจำนวนการแข่งขันทั้งหมด และเวลาทั้งหมดที่ต้องใช้ในการจัดแข่งขันเทนนิส ◇

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.4 ผู้ผลิตน้ำอัดลมกระป๋อง มีความประสงค์ให้ผู้บริโภคใช้ดื่มได้พอดีในหนึ่งครั้ง รูปร่างของกระป๋องควรจะเป็นอย่างไรจึงจะเหมาะสม และจะทำการอะไรที่จะทำให้ค่าใช้จ่ายในการผลิตกระป๋องต่ำที่สุด โดยมีเงื่อนไขว่า วัสดุที่ใช้ทำฝาด้านบนมีราคาสูงกว่าวัสดุที่ทำด้านข้างและก้นกระป๋อง และราคาวัสดุที่ใช้ทำกระป๋องเป็นค่าคงที่ จงนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้ไขปัญหา



วิธีทำ

2.5 การแปลงประโยคข้อความเป็นประโยคสัญลักษณ์

ในกระบวนการสร้างแบบจำลองขั้นตอนหนึ่งที่เราควรให้ความระมัดระวังคือ การแปลงประโยคภาษาให้อยู่ในรูปแบบประโยคสัญลักษณ์ ตัวอย่าง เช่น

- ข้อความ “เมื่อ y มีค่าเพิ่มขึ้น จะทำให้ x มีค่าเพิ่มขึ้น” มีความหมายว่า y แปรผันตรงกับ x ซึ่งเท่ากับข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ว่า $y \propto x$ หรือเป็นสมการ $y = kx$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
- ข้อความ “ y จะมีค่าลดลง เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น” กรณีนี้เป็นการแปรผกผัน นั่นคือ $y \propto \frac{1}{x}$ หรือ $y = \frac{k}{x}$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
- สมการเชิงเส้น $y = ax + b$ มีความหมายว่า เมื่อ x มีค่าเปลี่ยนไปหนึ่งหน่วย y จะมีค่าเปลี่ยนไป a หน่วย โดยการเปลี่ยนไปนี้จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงจะขึ้นกับว่าค่า $a > 0$ หรือไม่ และ $y = b$ เมื่อ $x = 0$

การแปลงประโยคข้อความเป็นประโยคสัญลักษณ์ โดยทั่วไปจะมีขั้นตอนดังนี้

1. ตั้งชื่อตัวแปรด้วยตัวอักษรหรือข้อความที่สื่อถึงตัวแปรนั้น ๆ
2. สร้างสมมติฐานความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร
3. แปลงสมมติฐานให้อยู่ในรูปสมการ อสมการ หรือประพจน์ทางคณิตศาสตร์

ในการตั้งชื่อตัวแปรนั้นไม่ได้มีข้อบังคับ โดยทั่วไปสามารถเลือกได้อย่างอิสระ แต่เพื่อความเรียบง่ายและเป็นสากล ควรเลือกใช้อักษรในภาษาอังกฤษที่สื่อความหมายถึงตัวแปรนั้น เช่น t แทนเวลา (time) และควรใช้อักษรกรีก เช่น α หรือ β แทนตัวแปรชนิดพารามิเตอร์

การเลือกสมมติฐานควรเลือกสมมติฐานที่ง่ายที่สุดและที่มีพฤติกรรมใกล้เคียงกับตัวแปรจริง ซึ่งจะทำให้สร้างแบบจำลองง่าย และการปรับปรุงแบบจำลองให้เหมาะสมได้ การแปลงประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ควรแปลงให้อยู่ในรูปแบบที่ง่าย โดยแบ่งออกเป็นส่วน ๆ เพื่อความสะดวกในการแปลง และนำมาประกอบกันภายหลัง

หมายเหตุ สิ่งที่เราควรระวังมีดังนี้ เช่น

- ความต่างของปริมาณ A และปริมาณ B หมายถึง ค่าสัมบูรณ์ $|A - B|$
- อัตราส่วนระหว่าง A ต่อ B คือ $\frac{A}{B}$
- สัดส่วน คือ สมการแสดงการเท่ากันของสองอัตราส่วน เช่น $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$

ในตารางที่ 2.1 มีตัวอย่างการแปลงประโยคข้อความเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่พบบ่อยครั้ง

ตัวอย่าง 2.5 จงแปลงประโยคข้อความต่อไปนี้เป็นประโยคสัญลักษณ์

(2.5.1) กำไรคือส่วนที่ราคาขายมากกว่าราคาทุน

(2.5.2) ค่า x น้อยกว่า 3 เท่าของผลต่างระหว่างค่า y กับค่า z

ประโยคข้อความ	สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์
ผลบวก	+
ผลต่าง	-
น้อยกว่า	<
มากกว่า	>
เท่ากับ, คือ	=
อย่างน้อย, ไม่ต่ำกว่า	\geq
อย่างมาก, ไม่เกินกว่า	\leq
อัตราส่วน	/
y แปรผันตรงกับ x	$y = kx$
y แปรผกผันกับ x	$y = \frac{k}{x}$
y เป็น $x\%$ ของ z	$y = \left(\frac{x}{100}\right) \cdot z$
y เป็น $x\%$ เพิ่มจาก z	$y = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot z$
อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ณ เวลา t	$\frac{dy}{dt}$

ตารางที่ 2.1: การแปลงประโยคข้อความ เป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

- (2.5.3) ผลต่างระหว่าง a และ b มากกว่าผลบวกของกำลังสองของ c และ d อยู่อย่างน้อย 1

◇

วิธีทำ

- (2.5.1) กำหนดให้ตัวแปร g แทน กำไร (Gain) ตัวแปร c แทน ราคาทุน (Cost) และ p แทน ราคาขาย (Price) จะได้ประโยคสัญลักษณ์คือ $g = p - c$
- (2.5.2) ประโยคสัญลักษณ์คือ $x < 3|y - z|$
- (2.5.3) ประโยคสัญลักษณ์คือ $|a - b| - (c^2 + d^2) \geq 1$

ตัวอย่าง 2.6 ในห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่ง ผู้จัดการพบว่าสินค้ารายการหนึ่งมีราคาขายขึ้นละ p บาท และเขามีข้อคาดการณ์ว่า ถ้าภายในสัปดาห์นี้เขาลดราคาสินค้านี้ขึ้นละ d บาท จะทำให้ลูกค้าซื้อสินค้านี้มากกว่า n ชิ้น จงเขียนประโยคสัญลักษณ์แทนข้อความต่อไปนี้

- (2.6.1) จำนวนสินค้าทั้งหมดที่ขายได้ในสัปดาห์นี้
- (2.6.2) รายได้ทั้งหมดที่ได้ในสัปดาห์นี้

◇

วิธีทำ กำหนดให้

ตัวแปร s แทน จำนวนสินค้านี้ที่ขายได้ในสัปดาห์นี้

ตัวแปร T แทน จำนวนสินค้าทั้งหมดที่ขายได้ในสัปดาห์นี้

ตัวแปร a แทน ราคาขายปลีกเฉลี่ยของสินค้าชนิดอื่นในสัปดาห์นี้

ตัวแปร P แทน รายได้ทั้งหมดที่ได้ในสัปดาห์นี้

- (2.6.1) ประโยคสัญลักษณ์คือ $T = s + n$
- (2.6.2) ประโยคสัญลักษณ์คือ $P = (p - d)s + an$

ตัวอย่าง 2.7 อ่างอาบน้ำใบหนึ่งเปิดน้ำเข้าอ่างใช้เวลา 3 นาทีจึงจะเต็มอ่าง และเปิดน้ำทิ้ง 4 นาทีจึงจะหมดอ่าง อยากทราบว่าเปิดน้ำขณะที่เปิดวาล์วน้ำทิ้งด้วยน้ำจะเต็มอ่างเมื่อไร และคำตอบจะเป็นอย่างไรถ้าเปิดน้ำเข้าอ่างใช้เวลา F นาที จึงจะเต็ม และเปิดน้ำทิ้ง E นาที น้ำจึงจะหมดอ่าง

◇

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.8 ถ้าคนงาน n คน ทำงานชิ้นหนึ่ง เสร็จใน t วัน อยากทราบว่า

(2.8.1) จะใช้เวลานานเท่าไรถ้าใช้คนงาน m คน ในการทำงานชิ้นนี้

(2.8.2) จะต้องใช้คนงานกี่คนที่จะทำงานชิ้นนี้เสร็จใน nt วัน เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

◇

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.9 สมมติว่าคุณต้องเลือกเข้าคิวชำระเงินในห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่ง ระหว่าง 2 คิวต่อไปนี้ คิวที่ 1 มีผู้ซื้อ m_1 คน แต่ละคนมี n_1 รายการสินค้า ขณะที่คิวที่ 2 มีผู้ซื้อ m_2 คน แต่ละคนมี n_2 รายการสินค้า ถ้าใช้เวลาชำระเงิน t วินาทีต่อหนึ่งรายการสินค้า จงเขียนเงื่อนไขที่ทำให้ คิวที่ 1 เร็วกว่า คิวที่ 2 ◇

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.10 คนขายไอศกรีมในงานฤดูร้อนต้องการคาดคะเนว่าจำนวนไอศกรีมที่ขายได้ต่อวันควรเป็นเช่นไร เขามีสมมติฐานว่า

- (A) จำนวนไอศกรีมที่ขายได้ต่อวันแปรผันตรงกับจำนวนคนที่มาเที่ยวงาน
- (B) จำนวนไอศกรีมที่ขายได้ต่อวันแปรผันตรงกับอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นจาก 10°C
- (C) จำนวนไอศกรีมที่ขายได้ต่อวันแปรผกผันกับราคาขายของไอศกรีม

จงเขียนประโยคสัญลักษณ์แสดงจำนวนไอศกรีมที่ขายได้ต่อวัน

◇

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.11 การชงกาแฟลาเต้ (Latte Coffee) จะมีการผสมนมสดลงไปในการกาแฟเอสเปรสโซ่ (Espresso) ถ้าอุณหภูมิ T_E ของกาแฟเอสเปรสโซ่ปริมาตร V_E จะลดลงเมื่อมีการเติมนมสดอุณหภูมิ T_M ปริมาตร V_M จงเขียนประโยคสัญลักษณ์แสดงอุณหภูมิของกาแฟลาเต้

วิธีทำ ◇

แบบฝึกหัด

1. จากสถานการณ์ต่อไปนี้ จงเขียนรายการขององค์ประกอบ
 - (a) การถ่ายภาพ
 - (b) การทำไวน์
 - (c) การผสมคอนกรีต
 - (d) การวางแผนจัดงานเลี้ยงสังสรรค์อาหารค่ำ
 - (e) การเลือกวันหยุด
 - (f) การเลือกซื้อรถ
2. จากข้อย่อยต่อไปนี้ (1) จงทำความเข้าใจปัญหา (2) แจกแจงองค์ประกอบ และ (3) สร้างสูตรเพื่อแก้ปัญหา
 - (a) มีรถผ่านขณะที่มีสัญญาณไฟสีเขียวได้กี่คัน
 - (b) ควรเปิดสัญญาณไฟสีแดงนานเท่าไร
 - (c) จะต้องทำมุมเท่าไรในการพุ่งแหลนที่ดีที่สุด
 - (d) ล้อจักรยานขนาดเท่าไรจึงจะดีที่สุด
3. จงสร้างสูตรสำหรับแก้ปัญหาต่อไปนี้ ในพจน์ที่วัดได้ อะไรเป็นข้อมูลที่ต้องเก็บและจะเก็บอย่างไร อะไรเป็นสมมติฐานที่จะทำให้ได้คำตอบ
 - (a) มีรถจำนวนเท่าไรบนถนนในกรุงเทพฯ ในปี พ.ศ. 2564
 - (b) มีรายการโทรทัศน์ที่ส่งเสริมการใช้ความรุนแรงให้เด็กดูจำนวนกี่รายการ
 - (c) ผู้ชายแข็งแรงกว่าผู้หญิงใช่หรือไม่
 - (d) ปัจจุบันค่าจ้างแรงงานเฉลี่ยของเมืองไทยเป็นเท่าไร
 - (e) มีความสัมพันธ์ระหว่างความยากจนกับการกระทำผิดกฎหมายหรือไม่
4. จงประมาณค่า และเขียนสมมติฐานของการประมาณค่า ในปัญหาต่อไปนี้
 - (a) ค่าเฉลี่ยของอายุของรถ 10 คัน ที่แล่นผ่านหน้าคุณ
 - (b) พื้นที่รวมของพุ่มไม้
 - (c) เงินที่ท่านจะใช้จ่ายทั้งหมดในปีต่อไป
5. ในข้อย่อยต่อไปนี้ จงเขียนองค์ประกอบ สมมติฐาน และสร้างสูตรในพจน์ขององค์ประกอบ
 - (a) การตกแต่งภายใน : เราต้องการที่จะลดราคาค่าตกแต่งภายในห้องให้เหลือน้อยที่สุด ให้เหมาะสมกับคุณภาพของกระดาดยปิดฝาผนังที่ใช้ และเวลาในการตกแต่ง

- (b) ความเร็วบนทางด่วน : ในเวลาที่มีการจราจรคับคั่งบนทางด่วน ผู้ดูแลทางด่วนต้องการให้มีสัญญาณเตือนผู้ขับขี่ ให้ขับรถในความเร็วที่ปลอดภัยสูงสุด หรือขับโดยใช้ระยะทางที่สั้นที่สุด (โดยการเขียนข้อความที่พื้นถนน) ควรใช้วิธีการเตือนแบบใดจึงจะดีที่สุด และควรจะใช้ข้อความใดในการเตือน
- (c) ที่ปัดน้ำฝน : กระจกหลังของรถมีที่ปัดน้ำฝนเพียงอันเดียว จะออกแบบอย่างไรที่จะทำให้การปัดน้ำฝนได้ผลดีที่สุด

6. จงแปลงประโยคต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์

- (a) Y มีค่ามากกว่า X เท่ากับ 5 หน่วย
- (b) ความต่างระหว่าง X และ Y คือ 2
- (c) อัตราส่วนของ Y ต่อ X คือ 2
- (d) ผลต่างระหว่าง A กับ B คือ สามเท่าของสัดส่วนของ C กับ D
- (e) Y เป็น 5% ของ X
- (f) Y น้อยกว่า X อยู่ 5%
- (g) Y มากกว่า X อยู่ 5%
- (h) Y น้อยกว่า 5% ของ X
- (i) Y ต่างจาก X อย่างน้อย 10
- (j) Y มากกว่า X อย่างน้อย 50%
- (k) W แปรผันตรงกับกำลังสองของผลต่างระหว่าง X กับ Y
- (l) W แปรผกผันกับรากที่สองของผลต่างระหว่าง U และผลบวกของ V กับ X
- (m) ตัวแปร y บวกด้วยตัวแปร X มีค่าเท่ากับ 120% ของตัวแปร Z
- (n) X มีค่าไม่เกิน 90% ของ Y
- (o) ผลบวกของ a และ b แปรผันตรงกับผลต่างระหว่างกำลังสองของ x และ y
- (p) ผลคูณของ a และ b แปรผกผันกับกำลังสองของผลต่างระหว่าง x และ y

7. รายการส่งเสริมการขายใดต่อไปนี้มีลดราคามากกว่า

- (a) ลด 30% ของราคาขาย
- (b) ลด 20% จากราคาที่ลดแล้ว 10% ของราคาขาย

8. เลขจำนวนนี้คืออะไร “ถ้าสองเท่าของจำนวนนั้นบวกด้วย 10 แล้วหารด้วย 2 ลบ ด้วยจำนวนนั้นมีค่าเท่ากับ 5 ”

9. มานะหนักกว่ามานี, มานีหนักมากกว่า 2 เท่าของชูใจ, น้ำหนักของมานะกับชูใจ รวมกันมากกว่าน้ำหนักของมานี, ชูใจเบากว่ามานะ 35 กิโลกรัม จงแปลงเป็นสัญลักษณ์

10. จงแปลงประโยคสัญลักษณ์ต่อไปนี้เป็นข้อความ

(a) $\sqrt{ab} = |x - y^2|$

(b) $q \propto \frac{1}{(x^2 + y^2)}$

11. ถ้าหนังสือนี้มี P หน้า แต่ละหน้ามี L บรรทัด แต่ละบรรทัดมี W คำ อยากทราบว่าหนังสือนี้มีทั้งหมดกี่คำ

12. คุณมีเงินอยู่ N บาท มีรายจ่าย S บาทต่อสัปดาห์ รายรับ Q บาทต่อสัปดาห์ อยากทราบว่า คุณสามารถใช้เงินได้นานเท่าไร

13. จงแปลงข้อความต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์

(a) ความเข้มของแสงลดลงตามกำลังสองของระยะทางจากดวงไฟ

(b) แรงดึงดูดของโลกระหว่างวัตถุสองชนิด แปรผันตรงกับมวล และแปรผกผันกับกำลังสองของระยะทางระหว่างวัตถุทั้งสอง

(c) มวลของดาวแปรผันตรงกับความหนาแน่นและรัศมี

14. จงแปลงข้อความต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสมการอย่างง่าย

(a) คุณมีเงินมากขึ้นคุณก็จ่ายมากขึ้น

(b) เวลาในการเดินทางลดลง ถ้าคุณเพิ่มความเร็ว

(c) เมื่อราคาสินค้าเพิ่มขึ้น ความต้องการจะลดลง

15. แบ่งเงิน M บาท ให้กับคนสองคน โดยที่

(a) ให้คนหนึ่งได้รับ k เท่าของอีกคนหนึ่ง

(b) ให้คนหนึ่งได้รับมากกว่าอีกคนหนึ่ง r บาท

จงเขียนสมการแสดงถึงเงินที่คนสองนี้ได้รับ

16. คนงาน ก. และ ข. แต่ละคนมีความสามารถในการทำงานไม่เท่ากัน เมื่อทั้งสองคนช่วยกันทำงานจะแล้วเสร็จใน d วัน ถ้าคนงาน ก. ทำงานนี้เพียงคนเดียวจะเสร็จใน x วัน อยากทราบว่าถ้าให้คนงาน ข. ทำงานนี้เพียงคนเดียวจะเสร็จในกี่วัน

17. นักศึกษา A และ B ยืนอยู่ข้างถนน (เป็นเส้นตรง) ห่างกัน d กิโลเมตร มีรถยนต์วิ่งมาในทิศทางเดียวกันสองคัน (1 และ 2) นักศึกษาทั้งสองจับเวลาที่รถแต่ละคันผ่านได้เวลา T_{A_1} , T_{A_2} , T_{B_1} และ T_{B_2} ตามลำดับ จงหา

(a) ความเร็วของรถแต่ละคัน

(b) ระยะห่างของรถทั้งสอง เมื่อรถคันที่ 2 อยู่ ณ ตำแหน่งนักศึกษา B

18. คนงาน n_1 คน ทำงาน t_1 วัน ได้งาน x_1 หน่วย อยากทราบว่า

(a) คนงาน n_2 คน ทำงาน x_2 หน่วย เสร็จในกี่วัน

- (b) คนงาน n_2 คน ทำงาน t_2 วัน จะได้งานกี่หน่วย
- (c) ทำงาน x_2 หน่วย ในเวลา t_2 วัน จะต้องใช้คนงานกี่คน

19. ต่อไปนี้ข้อความใดบ้างที่สมมูลกัน

- (a) $(V_1 + V_2)(V_3 + V_1)$
- (b) $V_1V_2(V_1 + V_2 + V_3 + 1)$
- (c) $V_1^2 + V_2V_3 + V_1(V_2 + V_3)$
- (d) $V_1^2 + V_1V_2V_3 + V_1V_3 + V_3^2V_1$
- (e) $V_1^2V_2 + V_1V_2V_3 + V_1V_2^2 + V_1V_2$

20. จากสมการต่อไปนี้ มีสมการใดบ้างที่สมมูลกัน

- (a) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = u^2 - v^2$
- (b) $\frac{(x-y)}{(u-v)} = \frac{(u+v)xy}{(x+y)}$
- (c) $\frac{u}{v} - \frac{v}{u} = x^2 - y^2$
- (d) $\frac{(x-y)}{xy} = \frac{(u^2 - v^2)}{(x+y)}$
- (e) $u^2 - v^2 = uv(x^2 - y^2)$
- (f) $x^2 - y^2 = xy(u^2 - v^2)$