

บทที่ 3

การตรวจสอบแบบจำลองทาง คณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่สร้างขึ้นเพื่อจำลองสถานการณ์จริง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ดีจะต้องให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำหรือใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด การตรวจสอบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการหนึ่งที่ทำให้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ดี การตรวจสอบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในขั้นนี้เป็นการตรวจสอบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างคร่าว ๆ เพื่อให้ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น การตรวจสอบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในขั้นนี้ควรคำนึงถึง ความสอดคล้อง (Consistency) พฤติกรรม (Behaviors) และ ความเรียบง่าย (Simplicity) ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น

3.1 ความสอดคล้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เราสามารถตรวจสอบความสอดคล้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ 2 ลักษณะ คือ ความสอดคล้องทางตรรกะ (Logical Consistency) และความสอดคล้องทางมิติ (Dimensional Consistency)

- การตรวจสอบความสอดคล้องทางตรรกะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นการตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เมื่อข้อสมมติของตัวแปรเปลี่ยนไป โดยไม่มีความขัดแย้ง (Contradiction)
- การตรวจสอบความสอดคล้องทางมิติเป็นการตรวจสอบมิติของตัวแปรในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้มิติทั้งสองข้างเท่ากันหรือสมมูลกัน (Equivalence) หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า เป็นการตรวจสอบหน่วยของตัวแปรในสมการหรืออสมการ (เช่นเดียวกับการตรวจสอบหน่วยทางฟิสิกส์)

ตัวอย่าง 3.1 จงตรวจสอบความสอดคล้องทางมิติของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (2.1)

$$p = rn - \left(\sum_{i=1}^k c_i + d \right)$$

◇

ตัวอย่าง 3.2 ถ้ากำหนดให้ V เป็นปริมาตร M เป็นมวล ρ เป็นความหนาแน่น X เป็นความยาว A เป็นพื้นที่ และ k เป็นตัวคงที่ไม่มีมิติ สมการต่อไปนี้สมการใดบ้างที่มีความสอดคล้องทางมิติ

(a) $M = \rho AX$

(b) $V = \frac{A}{X} + \frac{M}{\rho}$

(c) $A = \frac{V}{X} + \frac{M}{\rho}$

(d) $X = \frac{kV}{A}$

(e) $\frac{A}{V} = \frac{k}{X} + \frac{\rho A}{M}$

(f) $\frac{A}{X} = \frac{k}{V} + \frac{M}{\rho}$

◇

3.2 พฤติกรรมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เราสามารถตรวจสอบพฤติกรรมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ 2 ลักษณะ คือ การตรวจสอบพฤติกรรมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในด้านปริมาณ และตรวจสอบพฤติกรรมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในด้านคุณภาพ

การตรวจสอบพฤติกรรมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในด้านปริมาณ เป็นการตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เมื่อเปลี่ยนแปลงตัวแปรเพียงตัวเดียว เช่น

- เมื่อ x เพิ่มขึ้น เศษส่วน $\frac{1}{x}$ มีค่า ลดลง
- กำหนดให้ $a > 0$ และ $b > 0$ จะเห็นว่าเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เพิ่มขึ้นเมื่อ a เพิ่มขึ้น และ เศษส่วน $\frac{a}{b}$ ลดลงเมื่อ b เพิ่มขึ้น
- กำหนดให้ $a, b, c, > 0$ และ $x > 0$ เราพบว่า $F = \frac{ax}{bx + c}$ เพิ่มขึ้น เมื่อ x เพิ่มขึ้น (เนื่องจาก $F = \frac{ax}{bx + c} = \frac{a}{b + \frac{c}{x}}$ และเมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่า $\frac{c}{x}$ จะลดลง นั่นคือ $b + \frac{c}{x}$ จะลดลง ส่งผลให้ F เพิ่มขึ้นนั่นเอง)

การตรวจสอบพฤติกรรมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในด้านคุณภาพ เป็นการตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยตัวแปรทั้งหมด ซึ่งโดยทั่วไปมักจะตรวจสอบพฤติกรรมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เฉพาะตัวแปรที่น่าสนใจเท่านั้น เช่น

- ตัวแปรที่เป็นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (Absolute Extremum Values) ซึ่งอาจจะเป็นค่าต่ำสุด (Minimum) หรือค่าสูงสุด (Maximum) ก็ได้
- ตัวแปรที่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (Relative Extremum Values) ซึ่งอาจจะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (Relative Minimum) หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (Relative Maximum) ก็ได้
- ตัวแปรที่มีค่าเป็นศูนย์ (Zero Values)
- ตัวแปรที่มีค่าไม่สิ้นสุด (Infinity Values) ซึ่งอาจจะเป็นตัวแปรที่มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่สิ้นสุด หรือลดลงอย่างไม่สิ้นสุดก็ได้

ตัวอย่าง 3.3 ตัวแปร w มีความสัมพันธ์กับสามตัวแปร x, y และ z ดังนี้ w แปรผกผัน กับตัวแปร x และแปรผันตรงกับผลบวกของตัวแปร y และ z สมการต่อไปนี้ สมการใด เป็นสมการที่แทนความสัมพันธ์ดังกล่าว

$$(a) \quad w = \frac{ay}{x} + \frac{bz}{x}$$

$$(b) \quad w = \frac{ay}{x} + \frac{az}{x}$$

$$(c) \quad w = a(y + z) + \frac{b}{x}$$

$$(d) \quad w = \frac{a(y + z)}{x} + \frac{b}{x}$$

ตัวอย่าง 3.4 ตัวแปร y ขึ้นอยู่กับสองตัวแปร w และ z และข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- ถ้า w เพิ่มขึ้น แล้ว y ลดลง
- ถ้า z เพิ่มขึ้น แล้ว y เพิ่มขึ้น
- ถ้า w และ z เป็น 0 แล้ว y จะเป็น 0 ด้วย

ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนจริงบวก สมการต่อไปนี้สมการใดเป็นสมการที่แทนความสัมพันธ์ดังกล่าว

(a) $y = aw + bz$

(b) $y = bz - aw + c$

(c) $y = \frac{cz}{w}$

(d) $y = cwz$

(e) $y = az - bw$

◇

ตัวอย่าง 3.5 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์การพยากรณ์ปริมาณ F ที่อยู่ในรูปสมการ

$$F = \frac{ax}{(c - bx)}$$

เมื่อ a , b , และ c เป็นจำนวนจริงบวก และ x เป็นตัวแปรที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ $\frac{c}{b}$ จงพยากรณ์ปริมาณ F ในกรณีต่อไปนี้

- (a) เมื่อ a เพิ่มขึ้น
- (b) เมื่อ b เพิ่มขึ้น
- (c) เมื่อ c เพิ่มขึ้น
- (d) เมื่อ x เพิ่มขึ้น

◇

3.3 ความเรียบง่ายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ดีจะต้องได้คำตอบที่ง่ายและเป็นไปได้ ซึ่งการที่จะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว เราจะต้องใช้การเปรียบเทียบตัวแปรที่ประกอบกันเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ตัวแปรทั้งหมดเป็นตัวแปรที่มีความจำเป็นหรือไม่ เช่น การทำแบบจำลองคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เราอาจจะพิจารณาถึงแรงเสียดทานแต่ยังไม่พิจารณาถึงแรงต้านทานของอากาศ โดยทั่วไปแล้วเราจะตัดสินใจละทิ้งตัวแปรที่ส่งผลกระทบน้อย ๆ ออกไปก่อนในการเริ่มต้นทำแบบจำลอง

ตัวอย่าง 3.6 จงแทนนิพจน์

$$\frac{x}{y} + x^2y + x^3y^3 + \frac{y^2}{x^4}$$

ด้วยรูปแบบอย่างง่าย เมื่อ x มีค่าน้อย ๆ

◇

ตัวอย่าง 3.7 จงแทนนิพจน์

$$k \exp(ax^3) + \cos(kx^2) + kx$$

ด้วยรูปแบบอย่างง่าย เมื่อ x มีค่าน้อย ๆ

◇

แบบฝึกหัด

1. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ช่วงเวลาของการแกว่งลูกตุ้มที่มีก้านยาว L คือ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

เมื่อ g เป็น ค่าคงตัวของแรงโน้มถ่วง จงตรวจสอบความสอดคล้องทางมิติของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว

2. ถ้า x และ L เป็นความยาว t และ T เป็นเวลา ข้อความต่อไปนี้ข้อความใดมีมิติเหมือนกัน

(a) $\sin(x) \cos(x)$

(b) $\sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{t}{T}\right)$

(c) $\ln\left(1 + \frac{x}{t}\right)$

(d) $\ln\left(1 + \frac{t}{T}\right)$

(e) $\exp\left(\frac{xt}{LT}\right)$

(f) $\sin(x+t)$

(g) $\exp\left((x+L)\frac{t}{T}\right)$

(h) $\sin\left(\frac{x}{L} + \frac{t}{T}\right)$

3. ถ้า A เป็นพื้นที่ x, y และ z เป็นความยาว t เป็นเวลา และ u เป็นความเร็ว สมการต่อไปนี้สมการใดบ้างมีความสอดคล้องทางมิติ

(a) $A = xy + yz$

(b) $u = \frac{x}{t} + \frac{y}{t}$

(c) $At = \frac{xyz}{u}$

(d) $\frac{A}{t} = xu$

(e) $A = ut + xy$

(f) $x = Au + y$

(g) $A = xy + xyt$

(h) $y = \frac{A}{x}$

4. ให้ p เป็นแรงดัน ณ ความลึก h ใต้พื้นผิวของของเหลวที่มีความหนาแน่น ρ เขียนเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$p = p_0 + \rho gh$$

เมื่อ p_0 เป็นแรงดัน ณ พื้นผิวของของเหลว และ g เป็นค่าคงที่แรงโน้มถ่วง จงตรวจสอบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวว่ามีความสอดคล้องทางมิติหรือไม่

5. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์พยากรณ์ความสูง $h(t)$ ของน้ำในแท็งก์ทรงกระบอก ณ เวลา t นิยามดังนี้

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - a \sqrt{\frac{a}{2\pi r^2}} t \right)^2$$

เมื่อ h_0 เป็นความสูงของน้ำ ณ เวลา t_0 , r เป็นรัศมีของส่วนตัดของแท็งก์, a เป็นพื้นที่ของส่วนตัดของก๊อกปล่อยน้ำ และ g เป็นค่าคงที่แรงโน้มถ่วง จงตรวจสอบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่ามีความสอดคล้องทางมิติหรือไม่

6. ตัวแปร w มีความสัมพันธ์กับสามตัวแปร x , y และ z ดังต่อไปนี้ w แปรผกผันกับ x และแปรผันตรงกับ ผลรวมของ y และ z ข้อความต่อไปนี้ข้อความใดเป็นไปตามความสัมพันธ์ดังกล่าว

(a) $w = \frac{ay}{x} + \frac{bz}{x}$

(b) $w = \frac{ay}{x} + \frac{az}{x}$

(c) $w = a(y + z) + \frac{b}{x}$

(d) $w = a \frac{(y + z)}{x} + \frac{b}{x}$

7. ตัวแปร y ขึ้นอยู่กับสองตัวแปร w และ z ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

7.1. เมื่อ w เพิ่มขึ้น y จะเพิ่มขึ้นด้วย

7.2. เมื่อ z เพิ่มขึ้น y จะลดลง

7.3. เมื่อ z มีค่าน้อยมาก ๆ y จะมีค่ามาก

ข้อความต่อไปนี้ข้อความใดเป็นจริง

(a) $y = \frac{a}{w} + bz$

(b) $y = \frac{a}{(z + bw)}$

(c) $y = \frac{a}{z} + bw$

(d) $y = aw - bz$

8. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์พยากรณ์ปริมาณ F จากสมการ

$$F = \frac{ax - b}{cx + d}$$

เมื่อพารามิเตอร์ a , b , c และ d เป็นจำนวนจริงบวก และ x เป็นตัวแปรนำเข้าที่มีค่ามากกว่า $\frac{b}{a}$ ปริมาณของ F จะเป็นอย่างไรถ้า

(a) พารามิเตอร์ a มีค่าเพิ่มขึ้น

(b) พารามิเตอร์ b มีค่าเพิ่มขึ้น

- (c) พารามิเตอร์ c มีค่าเพิ่มขึ้น
- (d) พารามิเตอร์ d มีค่าเพิ่มขึ้น
- (e) ตัวแปรนำเข้า x มีค่าเพิ่มขึ้น

9. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์พยากรณ์ปริมาณ F จากสมการต่อไปนี้

$$9.1. \quad F = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}}$$

$$9.2. \quad F = \frac{b}{c} - a + \frac{b}{a}$$

$$9.3. \quad F = \frac{abc}{a + bc^2}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก ปริมาณของ F จะเป็นอย่างไรถ้า

- (a) เมื่อ a มีค่าเพิ่มขึ้น
- (b) เมื่อ b มีค่าเพิ่มขึ้น
- (c) เมื่อ c มีค่าเพิ่มขึ้น

10. จากเงื่อนไขต่อไปนี้

- 10.1. ตัวแปร y มีค่ามาก เมื่อตัวแปร x มีค่าบวกที่น้อยๆ
- 10.2. ตัวแปร y มีค่าเพิ่มขึ้น สำหรับทุก ๆ ค่าของ x
- 10.3. ตัวแปร y ค่าน้อยมาก ๆ เมื่อตัวแปร x มีค่ามาก
- 10.4. ตัวแปร y ไม่มีขอบเขต เมื่อตัวแปร x มีค่ามาก ๆ

สมการใดต่อไปนี้สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น

$$(a) \quad y = x + \frac{1}{x}$$

$$(b) \quad y = \frac{1}{1 + x}$$

$$(c) \quad y = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$(d) \quad y = 1 - e^{-x}$$

$$(e) \quad y = 1 + e^x$$

$$(f) \quad y = xe^{-x}$$

$$(g) \quad y = x \log x$$

11. จงอธิบายผลของการเปลี่ยนแปลงค่าของพารามิเตอร์ a, b และ c ที่มีต่อค่าของ y ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อไปนี้

$$(a) \quad y = a + be^{-cx}$$

$$(b) \quad y = c + axe^{-bx}$$

12. จงแทนนิพจน์

$$\left(e^{x^3 + \frac{1}{x}} + x^2 \right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$$

ด้วยรูปแบบอย่างง่าย

(a) เมื่อ x มีค่าน้อย ๆ

(b) เมื่อ x มีค่ามาก ๆ

13. จงแทนนิพจน์

$$\frac{x}{y} + x^2y + x^3y^3 + \frac{y^2}{x}$$

ด้วยรูปแบบอย่างง่าย

(a) เมื่อ x มีค่าน้อย ๆ

(b) เมื่อ y มีค่ามาก ๆ

14. จงแทนนิพจน์

$$1 + a \sin(\omega t) + a^2 \omega^2 \cos(\omega t)$$

ด้วยรูปแบบอย่างง่าย

(a) เมื่อ t มีค่าน้อย ๆ

(b) เมื่อ a มีค่าน้อย ๆ

(c) เมื่อ ω มีค่าน้อย ๆ

15. จงทำให้นิพจน์ต่อไปนี้อยู่ในรูปแบบอย่างง่ายเมื่อ x มีค่าน้อย ๆ

(a) $x^2 - 2cx + a$

(b) $ac + bx^2 + \frac{a}{x}$

(c) $b \sin x + a\sqrt{x}$