พิจารณาตารางดังต่อไปนี้

The following table gives the weights of a particular child at various ages in her first year:

Age (months)	0	2	3	4	5	6	9	12
Weight (pounds)	8	9	13	14	16	17	18	19

Let's write $W(0)$ for the child's weight at birth (in pounds), $W(2)$ for her weight at 2 months, and so on (we read $W(0)$ as "W of 0"). Thus, $W(0) = 8$, $W(2) = 9$, $W(3) = 13$, . . . , $W(12) = 19$. More generally, if we write t for the age of the child (in months) at any time during her first year, then we write $W(t)$ for the weight of the child at age t. We call W a **function** of the variable t, meaning that for each value of t between 0 and 12, W gives us a single corresponding number $W(t)$ (the weight of the child at that age).

บทนิยาม ฟังก์ชัน f จากเซต A ไปยังเซต B ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละสมาชิก $x \in A$ จะมีสมาชิก $y \in B$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $y = f(x)$

To help understand this definition, look at the function that relates the time of day to the temperature in Figure 1.29.

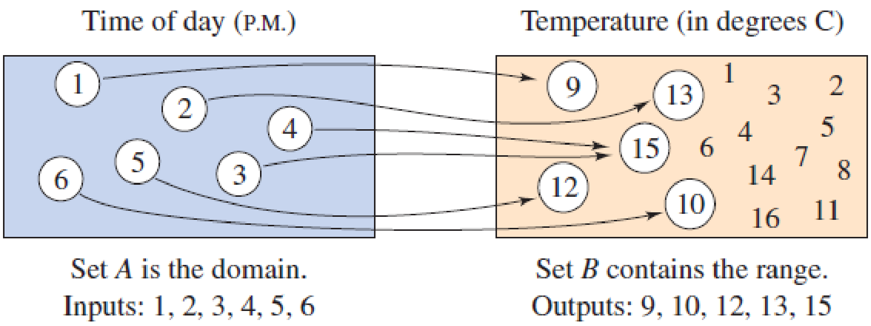
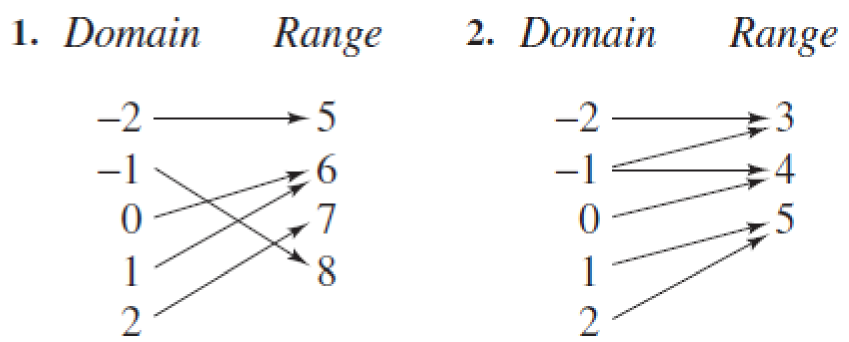


Figure 1.29

This function can be represented by the ordered pairs $\{(1, 9°), (2, 13°), (3, 15°), (4, 15°), (5, 12°), (6, 10°)\}$. In each ordered pair, the first coordinate (x-value) is the **input** and the second coordinate (y-value) is the **output.**

ตัวอย่าง 1 Does the relation describe a function?



ตัวอย่าง 2

Cell Phone Sales The following table lists the net sales (after-tax revenue) at the Finnish cell phone company Nokia for each year in the period 1995–2001[5] ($t = 5$ represents 1995):

Year *t*	5	6	7	8	9	10	11
Nokia Net Sales *P(t)* (Billions of Dollars)	8	8	10	16	20	27	28

a. Find or estimate $P(5)$, $P(10)$, and $P(7.5)$. Interpret your answers.

b. What is the domain of P?

ตัวอย่าง 3

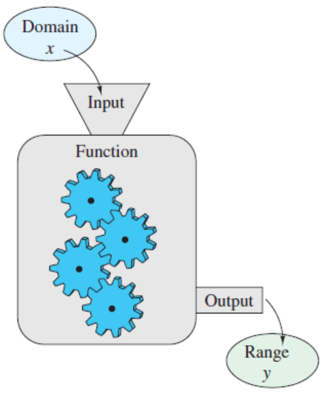
The price $V(t)$ in dollars of EBAY stock during the 10-week period starting July 1, 2004 can be approximated by the following function of time t in weeks ($t = 0$ represents July 1):

$$V(t) = \begin{cases} 90 - 4t & \text{if } 0 \le t \le 5 \\ 60 + 2t & \text{if } 5 < t \le 20 \end{cases}$$

What was the approximate price of EBAY stock after 1 week, after 5 weeks, and after 10 weeks?

Functions

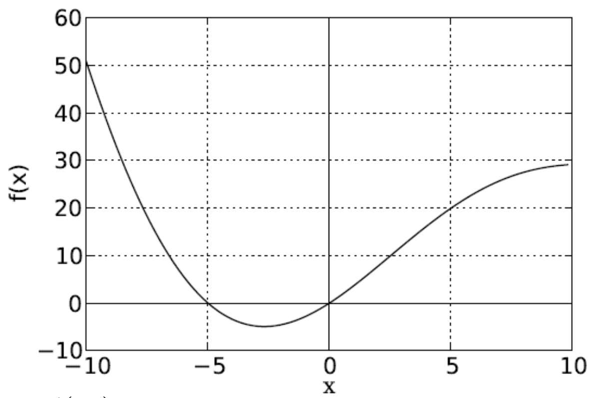
- A **function** is a rule that takes a number as input and outputs another number.
- A function is an action.
- Functions are **deterministic**. The output is determined only by the input.



ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = 3x$ จงหาค่าของ $f(-1), f(0), f(1)$ และ $f(5)$ พร้อมทั้งวาดกราฟ f

ตัวอย่าง 5 กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $g(x) = x^2 - 2$ จงหาค่าของ $g(0),\ g(1), g(-1)$ และ $g(2)$ พร้อมทั้งวาดกราฟ g

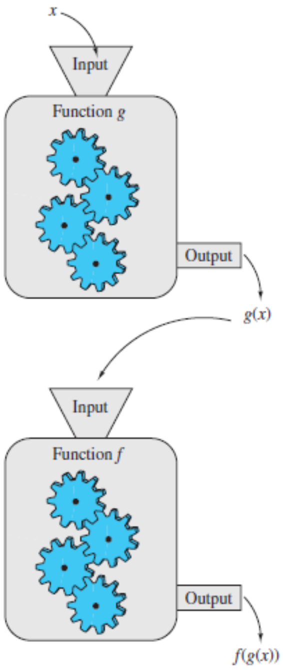
ตัวอย่าง 6 กำหนดให้ f มีกราฟดังรูป



จงหาค่าของ $f(-10), f(0)$ และ $f(10)$

ฟังก์ชันประกอบ

บทนิยาม กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันโดยที่ $D_f \cap R_g \neq \phi$ ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $f \circ g$ นิยามโดย $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ สำหรับทุก $x \in D_{f \circ g} = \left\{ x \middle| x \in D_g \text{ และ } g(x) \in D_f \right\}$



ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $f(x) = 2x - 3$ และ $g(x) = x^2 + 1$ จงหา

(1) $(f \circ g)(x)$

(2) $(g \circ f)(x)$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{x}$ และ $g(x)=\sqrt{2-x}$ จงหา

(1) $(f\circ g)(x)$

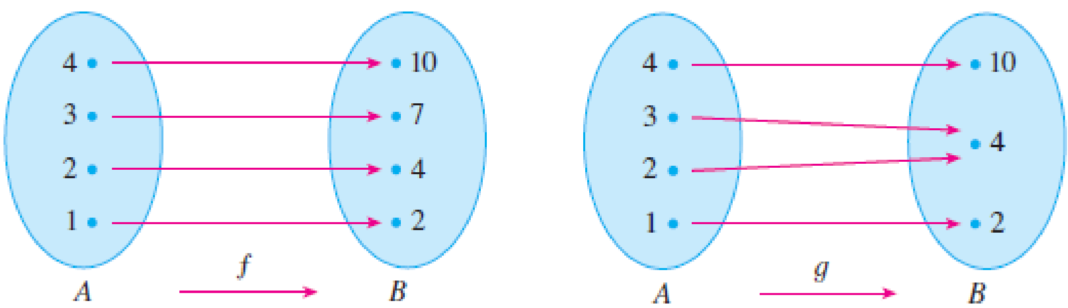
(2) $(g\circ f)(x)$

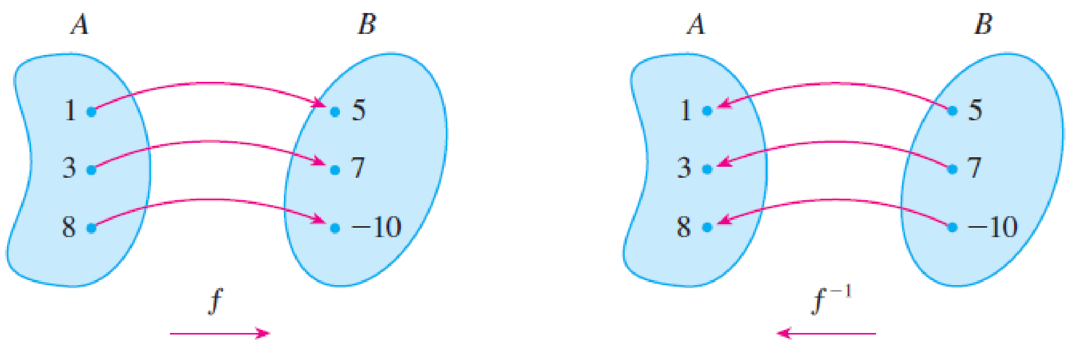
(3) $(f\circ f)(1)$

(4) $(g\circ g\circ g)(0)$

ฟังก์ชันผกผัน

พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

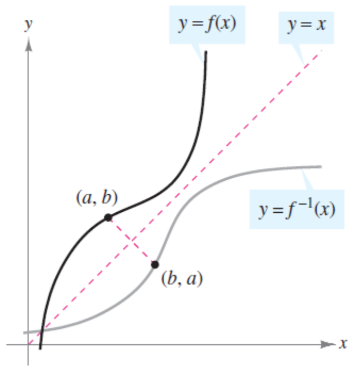




บทนิยาม กำหนดให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง *ฟังก์ชันผกผัน (inverse function)* ของ f เขียนแทนด้วย f^{-1} นิยามโดย

$$f^{-1}(y) = x \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(x) = y$$

สำหรับแต่ละ $y \in B$



กราฟของ f และกราฟของ f^{-1}

5 How to Find the Inverse Function of a One-to-One Function f

Step 1 Write $y = f(x)$.

Step 2 Solve this equation for x in terms of y (if possible).

Step 3 To express f^{-1} as a function of x, interchange x and y. The resulting equation is $y = f^{-1}(x)$.

Example 6 **Finding Inverse Functions**

Several functions and their inverse functions are shown below. In each case, note that the inverse function "undoes" the original function. For instance, to undo multiplication by 2, you should divide by 2.

a. $f(x) = 2x$ $\qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$

b. $f(x) = \frac{1}{3}x$ $\qquad f^{-1}(x) = 3x$

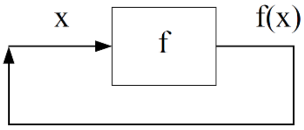
c. $f(x) = x + 4$ $\qquad f^{-1}(x) = x - 4$

d. $f(x) = 2x - 5$ $\qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$

e. $f(x) = x^3$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

f. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$

Iterated Functions



ตัวอย่าง 9 พิจารณากระบวนการต่อไปนี้ เมื่อกำหนด $f(x) = 3x$ เมื่อกำหนด $x_0 = 1$ และ $x_0 = 2$

ตัวอย่าง 10 พิจารณากระบวนการต่อไปนี้ เมื่อกำหนด $f(x) = x^2$ เมื่อกำหนด $x_0 = 1.1$ และ $x_0 = -0.25$

จากกระบวนดังกล่าวจะเห็นว่าถ้าให้ $x_1 = f(x_0)$ เราสามารถหา $x_2, x_3, x_4, \ldots.$ ได้ดังนี้

$x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2), x_4 = f(x_3), \ldots.$ นั่นคือ

$$x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$$

$$x_3 = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0)$$

$$x_4 = f(f(f(f(x_0)))) = f^4(x_0)$$

$$\vdots$$

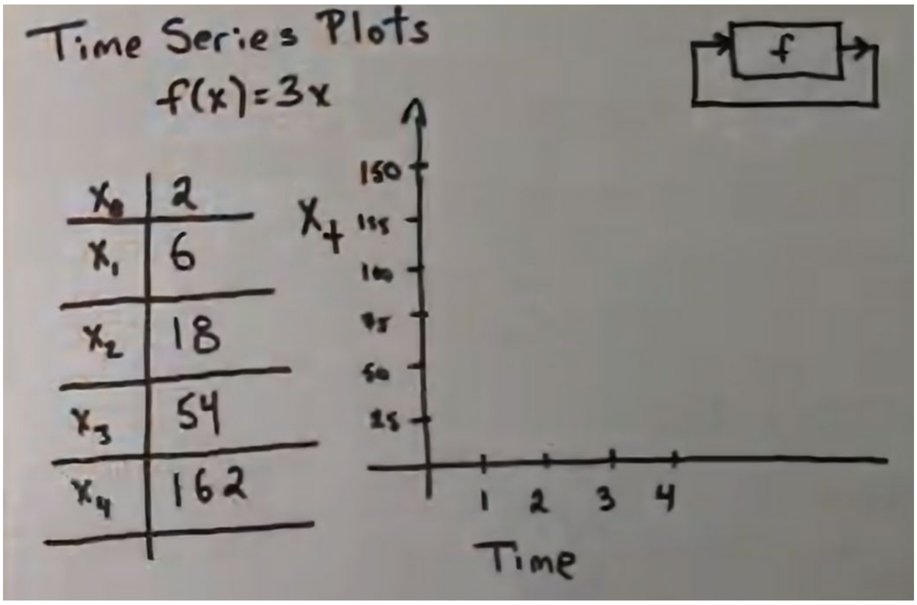
$$x_n = f^n(x_0)$$

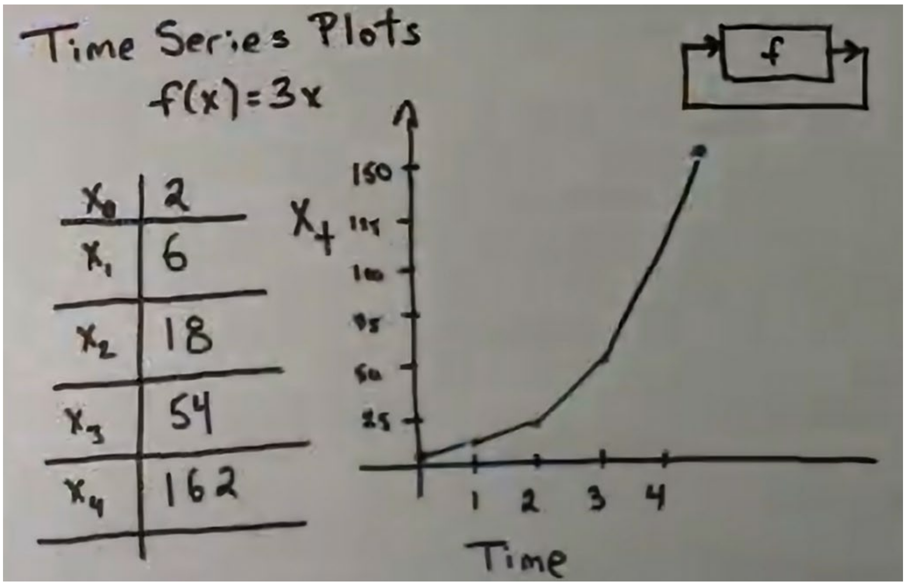
เราเรียก $O(x_0) = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ว่า orbit ของ x_0 ภายใต้การส่ง f

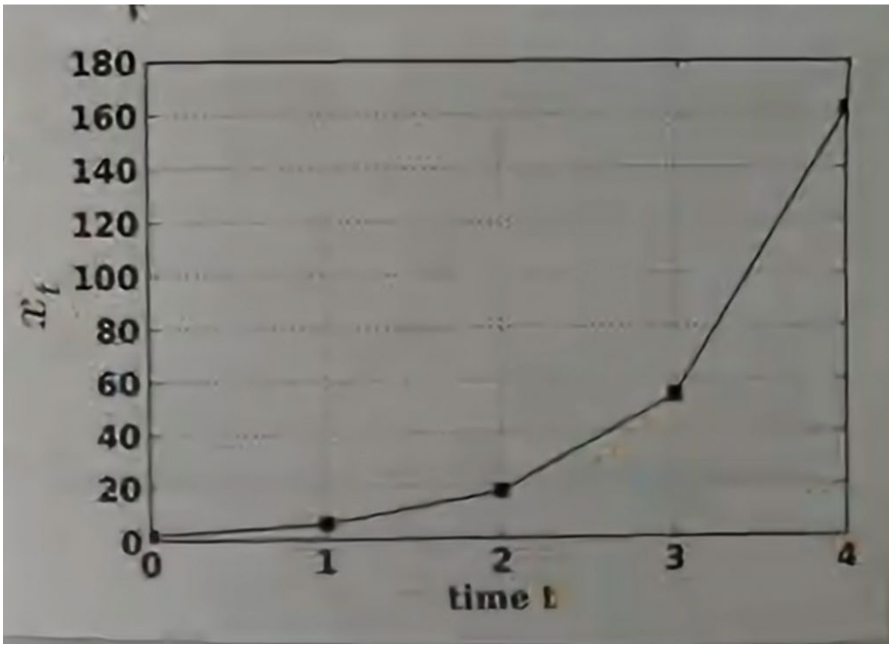
It is also sometimes called a **time series** or a **trajectory**.

ตัวอย่าง 11 กำหนด $f(x) = x^2 - 1$ จงหาห้าพจน์แรกของการทำซ้ำ เมื่อ $x_0 = 0.5$ และ $x_0 = 1$

พิจารณา time series plot

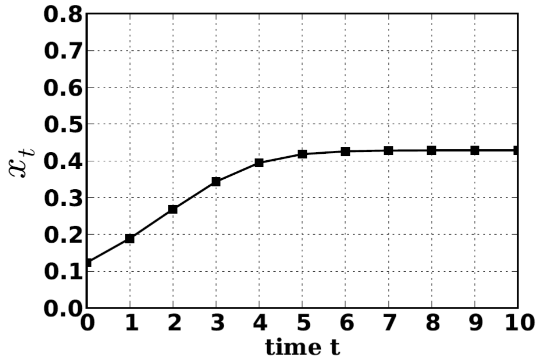






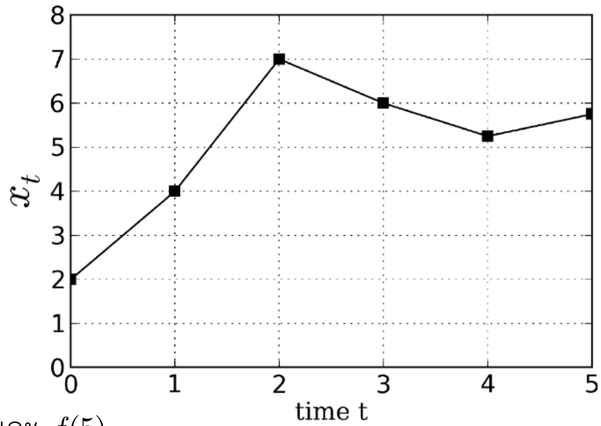
Time Series Plots

- A useful way to visualize an itinerary is with a **time series plot**.



- The time series plotted above is: $0.123,\ 0.189,\ 0.268,\ 0.343,\ 0.395,\ 0.418,\ 0.428,\ 0.426,\ 0.428,\ 0.429,\ 0.429.$

ตัวอย่าง 12 กำหนดกราฟ time series ของ f ดังรูป



จงหา $f(1), f(2),\ f(3)$ และ $f(5)$

A point x^* is said to be **fixed point** if x^* such that $x^* = f(x^*)$. In other word, a fixed point is a point for which $x_{n+1} = x_n = x^* = f(x^*)$, i.e., a fixed point is an equilibrium point of a map

ตัวอย่าง 13 จงหาจุดตรึงของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1) $f(x) = x^2$

1.2) $f(x) = x^3$

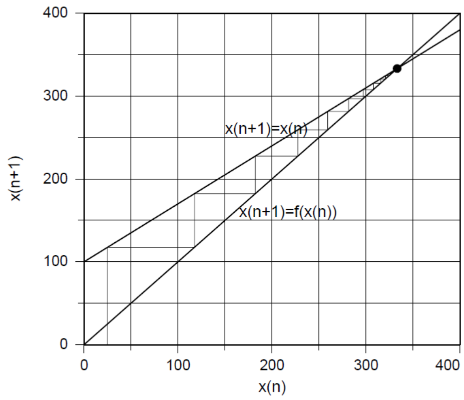
1.3) $f(x) = 2x(1-x)$

1.4) $f(x) = x^2 + 1$

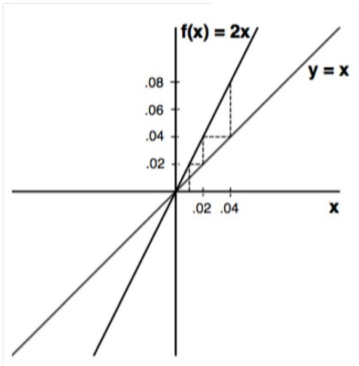
ตัวอย่าง 14 (โจทย์จากงานวิจัย) P. Sunthrayuth et al.: Convergence Theorems for Generalized Viscosity Explicit Methods for Nonexpansive Mappings in Banach Spaces and Some Applications, *Mathematics* **2019**, *7*(2), 161

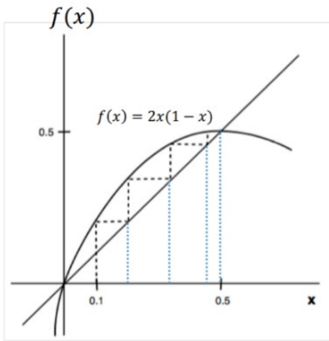
จงหาจุดตรึงของการส่ง $T : l_3 \to l_3$ ต่อไปนี้

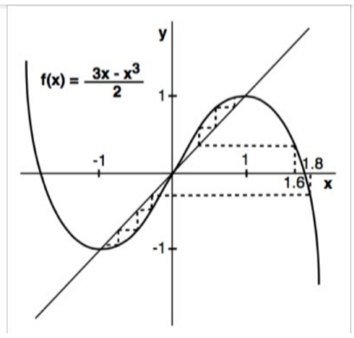
$$T\mathbf{x} = \left(\frac{x_1 + x_2}{10}, \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{x_3 - x_1}{5}, 0, 0, 0, \cdots\right)$$



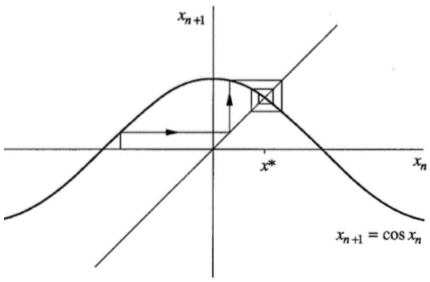
Supply and demand converge to a stable equilibrium.



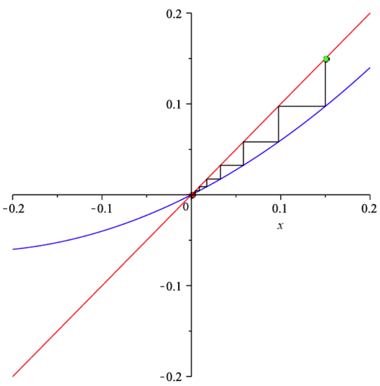


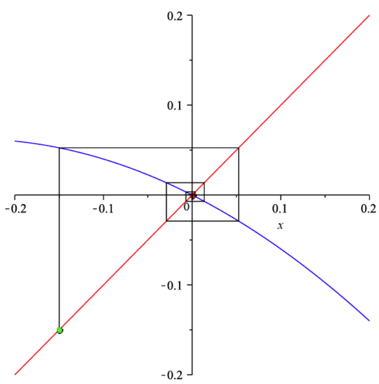


- Starts at 1.6, converges to 1
- Starts at 1.8, converges to -1



- $x_{n+1} = \cos x_n$
- $\lim_{n\to\infty} x_n$? ... by iterating the map (e.g., use calculator!), $x_n \to 0.739..$
- Solution of trascendental equation $x = \cos x$





Types of Fixed Points

• A fixed point x^* is said to be ***stable*** **(or a *sink*, or an *attractor*)** if every point in some neighborhood of x^* approaches x^* under iteration by f.

• A fixed point x^* is ***unstable*** **(or a *source* or *repeller*)** if every point in some neighborhood of x^* moves out of the neighborhood under iteration by f.

ตัวอย่าง 15 จงบอกประเภทของจุดตรึงของการส่งต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3$

2. $f(x) = \sqrt{2x}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

ตัวอย่าง 16 กำหนด phase line ดังนี้

1. The point -2 is:
   - A. a stable fixed point
   - B. an unstable fix point
   - C. not a fixed point

2. The point 0 is:
   - A. a stable fixed point
   - B. an unstable fix point
   - C. not a fixed point

3. The point 3 is:
   - A. a stable fixed point
   - B. an unstable fix point
   - C. not a fixed point

A fixed point x^* is stable if $|f'(x^*)| < 1$, and unstable if $|f'(x^*)| > 1$

ตัวอย่าง 18 จงบอกประเภทของจุดตรึงของการส่ง $f(x) = \tan x$