รายวิชา 09131201 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์ (Numerical Methods for Computers) บทที่ 7 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (The Numerical Solution of Ordinary Differential Equation)

ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

Outline

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

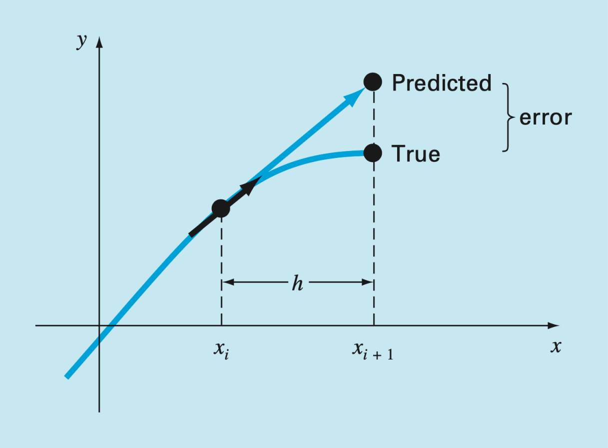
Table of Contents

Outline

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)



รูปที่ 1: Euler's method.

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปโดยทั่วไป ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

จากรูปที่ 1 จะสามารถหาค่าผลลัพธ์โดยประมาณของ y_{i+1} ที่ x_{i+1} จากค่าผลลัพธ์ของ y_i ซึ่งทราบค่าที่ x_i โดยใช้ค่าความชันที่ y_i ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

เมื่อ $h = x_{i+1} - x_i$ คือช่วงกว้างที่ใช้ในการคำนวณ ดังนั้น $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$ นั่นคือ

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{7.1}$$

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

ตัวอย่างที่ 7.1

จงใช้วิธีของออยเลอร์ เพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์

$$y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

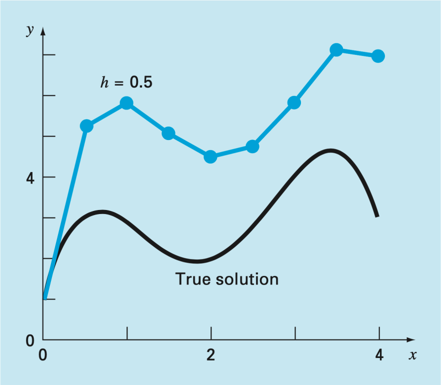
กำหนดให้หาค่า x ในช่วง 0 ถึง 4 เมื่อช่วงกว้างเท่ากับ 0.5 และมีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $y(0) = 1$ ค่าจริงหาได้จากสมการ $y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

			Percent Relative Error	
x	y_{true}	y_{Euler}	Global	Local
0.0	1.00000	1.00000		
0.5	3.21875	5.25000	−63.1	−63.1
1.0	3.00000	5.87500	−95.8	−28.1
1.5	2.21875	5.12500	−131.0	−1.4
2.0	2.00000	4.50000	−125.0	20.3
2.5	2.71875	4.75000	−74.7	17.2
3.0	4.00000	5.87500	−46.9	3.9
3.5	4.71875	7.12500	−51.0	−11.3
4.0	3.00000	7.00000	−133.3	−53.1

รูปที่ 2

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)



รูปที่ 3: Comparison of the true solution with a numerical solution using Euler's method for the integral of $y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ from $x = 0$ to $x = 4$ with a step size of 0.5. The initial condition at $x = 0$ is $y = 1$.

ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีออยเลอร์ (Error of Euler's Method)

ผลเฉลยของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ สามารถแบ่งค่าคลาดเคลื่อนออกเป็น 2 แบบ

1. ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation Error)
2. ค่าคลาดเคลื่อนปัดเศษ (Round-off Error)

1.ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation Error)

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายสามารถแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ
1. ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายที่ตำแหน่งนั้น (Local Truncation Error) เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในขั้นตอนนั้น
2. ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายสะสม (Propagated Truncation Error) เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่มีผลมาจากค่าประมาณในขั้นตอนแรก ทำให้ค่าประมาณในขั้นตอนต่อไปเกิดค่าคลาดเคลื่อนขึ้นด้วย เช่น ค่า y ที่ได้จากค่าประมาณในขั้นตอนแรก เมื่อนำค่า y ไปใช้ในขั้นตอนต่อไป จะทำให้ค่า y ที่ได้ครั้งใหม่ เกิดค่าคลาดเคลื่อนด้วย ผลบวกของค่าคลาดเคลื่อนทั้ง 2 ส่วน เรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนรวม (Global Truncation Error)

วิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุง (Modification and Improvements of Euler's Methods)

วิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุง (Modification and Improvements of Euler's Methods)

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

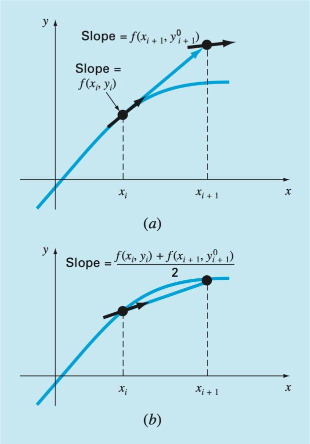
วิธีของฮวนเป็นวิธีที่ดัดแปลงมาจากวิธีของออยเลอร์เพื่อให้ได้ค่าผลลัพธ์ของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ให้มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น ค่าความชันในวิธีของออยเลอร์สามารถคำนวณที่จุดเริ่มต้นของช่วงกว้างที่ตำแหน่ง x_i จะได้

$$y_i' = f(x_i, y_i)$$

จากนั้นจะนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าผลลัพธ์โดยประมาณที่ x_{i+1} ดังนี้

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{7.2}$$

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)



รูปที่ 4: Graphical depiction of Heun's method. (a) Predictor and (b) corrector.

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

ถ้านำค่าที่ได้ไปคำนวณหาค่าความชันที่จุดปลายของช่วงกว้างที่ ดังแสดงในรูปที่ 4 (a) จะได้

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^0_{i+1}) \tag{7.3}$$

หลักการในวิธีของฮวน คือการนำค่าความชันที่จุดเริ่มต้น และจุดปลายของช่วงกว้างมาหาค่าเฉลี่ย ซึ่งจะให้ค่าความชันเฉลี่ยที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4 (b) และถ้าหากใช้ค่าความชันเฉลี่ยในการคำนวณ จะทำให้ได้ค่าผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้นตามไปด้วย
ดังนั้น ค่าความชันเฉลี่ย คือ

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2} \tag{7.4}$$

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

ดังนั้นคำตอบของค่าผลลัพธ์โดยประมาณที่ตำแหน่ง x_{i+1} คือ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2} h \tag{7.5}$$

โดยสรุปวิธีของฮวนจะประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ขั้นตอนแรกเป็นการทำนายค่าโดยประมาณที่ x_{i+1} ดังแสดงในสมการ (7.2) ทำให้เกิดค่าผลลัพธ์ y^0_{i+1} เรียกว่า **ตัวทำนาย(Predictor)** ค่าผลลัพธ์ที่ได้ สามารถนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าความชันที่ x_{i+1} และค่าความชันที่ได้ คือ x_{i+1} จะนำไปใช้หาค่าความชันเฉลี่ยในขั้นตอนที่สองเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าผลลัพธ์ y_{i+1} ซึ่งเรียกว่า **ตัวแก้ (Corrector)** ที่มีความเที่ยงตรงสูงขึ้น

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

ดังนั้นสามารถกล่าวได้ว่าวิธีของฮวน เป็นวิธีที่ประกอบด้วยการคำนวณตัวทำนายและตัวแก้ (Predictor Corrector Method) ที่มีขั้นตอน ดังนี้

1. Predictor:

$$y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{7.6}$$

2. Corrector:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0})}{2}h \tag{7.7}$$

และ

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{y_{i+1}^{j} - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^{j}} \right| 100\% \tag{7.8}$$

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

ตัวอย่างที่ 7.2

Use Heun's method to integrate

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

from $x = 0$ to $x = 4$ with a step size of 1. The initial condition at $x = 0$ is $y = 2$.
(We can use calculus to determine the following analytical solution:
$y = \frac{4}{1.3}(e^{0.8x} - e^{-0.5x}) + 2e^{-0.5x}$)

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

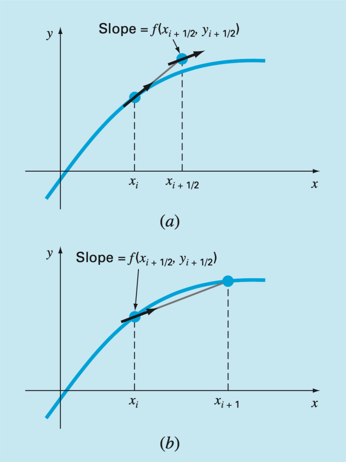
		Iterations of Heun's Method			
		1		15	
x	y_{true}	y_{Heun}	$\|\varepsilon_t\|$ (%)	y_{Heun}	$\|\varepsilon_t\|$ (%)
0	2.0000000	2.0000000	0.00	2.0000000	0.00
1	6.1946314	6.7010819	8.18	6.3608655	2.68
2	14.8439219	16.3197819	9.94	15.3022367	3.09
3	33.6771718	37.1992489	10.46	34.7432761	3.17
4	75.3389626	83.3377674	10.62	77.7350962	3.18

รูปที่ 5

2. วิธีโพลิกอน(Polygon Method or Midpoint Method)

วิธีโพลิกอน เป็นวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุง (Modification Euler's Method) หรือเป็นวิธีที่เกิดจากความเข้าใจในทำนองเดียวกับความเข้าใจในวิธีของฮวน คือค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ จะมีความเที่ยงตรงมากขึ้น ถ้าสามารถหาค่าความชันที่จะนำมาใช้ในการคำนวณได้แม่นยำมากยิ่งขึ้น ดังนั้นในวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงนี้ จะทำให้หาค่าความชันที่จุดกึ่งกลางของช่วงกว้าง h ดังแสดงในรูป

2. วิธีโพลิกอน (Polygon Method or Midpoint Method)



รูปที่ 6: Graphical depiction of the midpoint method.

2. วิธีโพลิกอน (Polygon Method or Midpoint Method)

เราจะเริ่มต้นจากการใช้วิธีของออยเลอร์ ในการคำนวณหาค่าผลลัพธ์ที่จุดกึ่งกลางของช่วงกว้าง ดังนี้

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

จากนั้นจึงจะคำนวณหาค่าความชันที่จุดกึ่งกลางของช่วงกว้าง

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

แล้วจะนำค่าความชันที่จุดกึ่งกลางของช่วงกว้างที่คำนวณได้มาใช้ในการคำนวณหาค่าผลลัพธ์ที่จุดปลายของช่วงกว้างต่อไป

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$

วิธีรุงเงคุตตา (Runge Kutta Methods)

วิธีรุงเงคุตตา (Runge Kutta Methods)

วิธีรุงเงคุตตา (Runge Kutta Methods)

วิธีรุงเงคุตตา เป็นวิธีที่ได้รับความนิยม และนำไปใช้กันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการค่าผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง สมการหลักที่ใช้ในการคำนวณวิธีรุงเงคุตตา (Runge Kutta Methods) คือ

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

โดยที่ $\phi(x_i, y_i, h)$ เรียกว่า ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (Increment Function)
ฟังก์ชันส่วนเพิ่มนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปโดยทั่วไปได้ ดังนี้

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

เมื่อ a_i เป็นค่าคงที่ $(i = 1, 2, ..., n)$

วิธีรุงเงคุตตา (Runge Kutta Methods)

และ ค่า k_i สามารถคำนวณหาได้จาก

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned}$$

(ตัวห้อย n บอกถึงอันดับของวิธีรุงเงคุตตาที่เลือกใช้ เช่น เมื่อ $n = 1$ เรียกว่า **วิธีรุงเงคุตตาอันดับหนึ่ง** เมื่อ $n = 2$ เรียกว่า **วิธีรุงเงคุตตาอันดับสอง** และค่า p_i และ q_i เป็นค่าคงที่)

1. วิธีรุงเงคุตตาอันดับสอง (Second Order Runge Kutta Method)

สำหรับวิธีรุงเงคุตตาอันดับสอง (Second Order Runge Kutta Method) หรือ $n = 2$ มีรูปทั่วไปดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

โดยที่ $k_1 = f(x_i, y_i)$
และ $k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$
เมื่อ $a_1 + a_2 = 1, a_2 p_1 = 1/2, a_2 q_{11} = 1/2$

2. วิธีรุงเงคุตตาอันดับสาม (Third Order Runge Kutta Method)

สำหรับวิธีรุงเงคุตตาอันดับสาม (Third Order Runge Kutta Method) หรือ $n = 3$ มีรูปทั่วไปดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

โดยที่

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h) \end{aligned}$$

3. วิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ (Forth Order Runge Kutta Method)

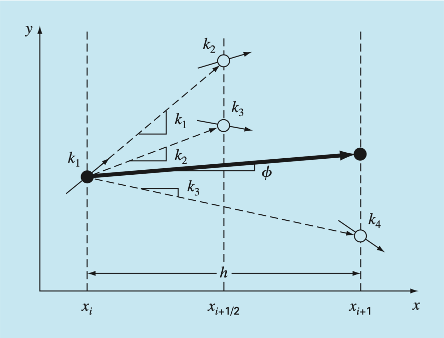
สำหรับวิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ (Forth Order Runge Kutta Method) หรือ $n = 4$ มีรูปทั่วไปดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3 h)
\end{aligned}$$

3. วิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ (Forth Order Runge Kutta Method)



รูปที่ 7: Graphical depiction of the slope estimates comprising the fourth-order RK method.

3. วิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ (Forth Order Runge Kutta Method)

ตัวอย่างที่ 7.3

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

โดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ เมื่อกำหนดช่วงกว้างเท่ากับ 0.5 และมีเงื่อนเริ่มต้นคือ $x = 0, y = 1, 0 \leq c \leq 4$

ระบบสมการอนุพันธ์ (System of Equations)

ระบบสมการอนุพันธ์ (System of Equations)

ระบบสมการอนุพันธ์ (System of Equations)

ระบบสมการที่ประกอบด้วย n สมการย่อยในรูป ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\frac{dy_3}{dx} &= f_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}
$$

Solving Systems of ODEs Using Euler's Method

ตัวอย่างที่ 7.4

จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้โดยวิธีของออยเลอร์

$$\frac{y_1}{dx} = -0.5y_1$$
$$\frac{y_2}{dx} = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0) = 4, y_2(0) = 6$ จงหาคำตอบที่ $x = 2$ เมื่อช่วงกว้างเท่ากับ 0.5

Solving Systems of ODEs Using Euler's Method

x	y_1	y_2
0	4	6
0.5	3	6.9
1.0	2.25	7.715
1.5	1.6875	8.44525
2.0	1.265625	9.094087

รูปที่ 8

Solving Systems of ODEs Using the Fourth-Order RK Method

ตัวอย่างที่ 7.5

จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้โดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่

$$\frac{y_1}{dx} = -0.5y_1$$
$$\frac{y_2}{dx} = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0) = 4, y_2(0) = 6$ จงหาคำตอบที่ $x = 2$ เมื่อช่วงกว้างเท่ากับ 0.5

Solving Systems of ODEs Using the Fourth-Order RK Method

x	y_1	y_2
0	4	6
0.5	3.115234	6.857670
1.0	2.426171	7.632106
1.5	1.889523	8.326886
2.0	1.471577	8.946865

รูปที่ 9

แบบฝึกหัด 7

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = yx^2 - y$$

โดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ เมื่อกำหนด $h = 0.5$ และ $y(0) = 1$ ทำซ้ำในสมการตัวแก้ไข เมื่อกำหนด $\epsilon_s = 1$ จงหาคำตอบในช่วง $x = 0$ ถึง $x = 2$

แบบฝึกหัด 7

2. จากโจทย์ข้อ 1 โดยวิธีของออยเลอร์
3. จากโจทย์ข้อ 1 โดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่

แบบฝึกหัด 7

4. Solve the following problem over the interval from $x = 0$ to 1 using a step size of 0.25 where $y(0) = 1$. Display all your results on the same graph.

$$\frac{dy}{dt} = (1 + 4t)\sqrt{y}$$

1. Analytically.
2. Euler's method.
3. Heun's method without iteration.
4. Fourth-order RK method.

แบบฝึกหัด 7

4. Use (a) Euler's and (b) the fourth-order RK method to solve

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 5e^{-t}$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{yz^2}{2}$$

over the range $t = 0$ to 0.4 using a step size of 0.1 with $y(0) = 2$ and $z(0) = 4$.