

รายวิชา 09131201
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านการคอมพิวเตอร์
(Numerical Methods for Computers)
บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical
Integration)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เชื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

July 28, 2022

Outline

- 1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข
- 2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
- 3 บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)
- 4 บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)
- 5 บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)
- 6 บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)
 - 6.1 การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ (Newton Cotes Integration)
 - วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)
 - วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)
 - ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)
 - 6.2 วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)
 - วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)
 - ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 (Error of Simpson's 1/3 Rule)

Table of Contents

1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

3 บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)

4 บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)

5 บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

6 บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

7 บทที่ 7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

Table of Contents

- 1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข
- 2 **บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)**
- 3 บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)
- 4 บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)
- 5 บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)
- 6 บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

- 7 บทที่ 7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

Table of Contents

- 1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข
- 2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
- 3 **บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)**
- 4 บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)
- 5 บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)
- 6 บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

- 7 บทที่ 7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

Table of Contents

- 1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข
- 2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
- 3 บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)
- 4 บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)
- 5 บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)
- 6 บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)
- 7 บทที่ 7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

Table of Contents

- 1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข
- 2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
- 3 บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)
- 4 บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)
- 5 **บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)**
- 6 บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

- 7 บทที่ 7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

Table of Contents

- 1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข
- 2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
- 3 บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)
- 4 บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)
- 5 บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)
- 6 บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)**
 - 6.1 การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ (Newton Cotes Integration)
 - 6.2 วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

Outline

- 1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข
- 2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
- 3 บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)
- 4 บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)
- 5 บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

6 บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

6.1 การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ (Newton Cotes Integration)

- วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)
- วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)
- ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)

6.2 วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

- วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)
- ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 (Error of Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ (Newton Cotes Integration)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ (Newton Cotes Integration)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ (Newton Cotes Integration)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ เป็นวิธีพื้นฐานของการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข โดยมีหลักการพื้นฐาน คือการแทนฟังก์ชันที่ซับซ้อนด้วยค่าประมาณของฟังก์ชันที่ง่ายต่อการหาค่าปริพันธ์ และเขียนสมการแทนได้ดังนี้

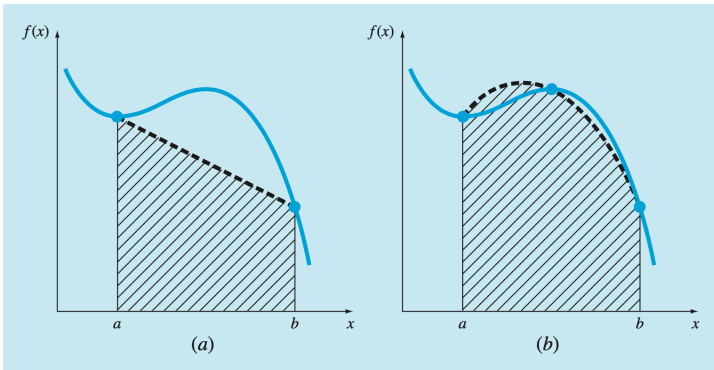
$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_n(x) dx$$

เมื่อ $f_n(x)$ คือ ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) ที่อยู่ในรูปของสมการ

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

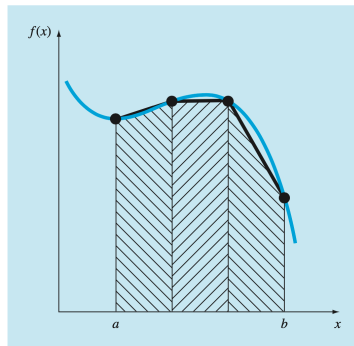
โดยที่ n คือ อันดับของฟังก์ชันพหุนาม

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ (Newton Cotes Integration)



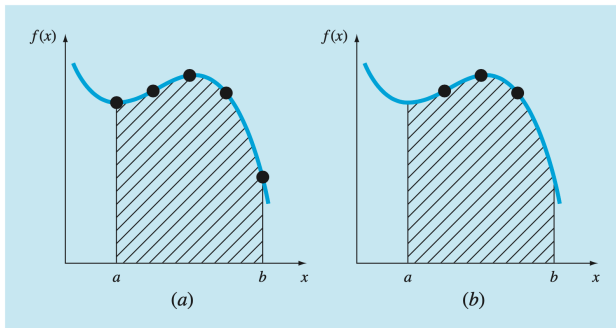
รูปที่ 1: The approximation of an integral by the area under (a) a single straight line and (b) a single parabola.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ (Newton Cotes Integration)



รูปที่ 2: The approximation of an integral by the area under three straight-line segments.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ (Newton Cotes Integration)



รูปที่ 3: The difference between (a) closed and (b) open integration formulas.

Outline

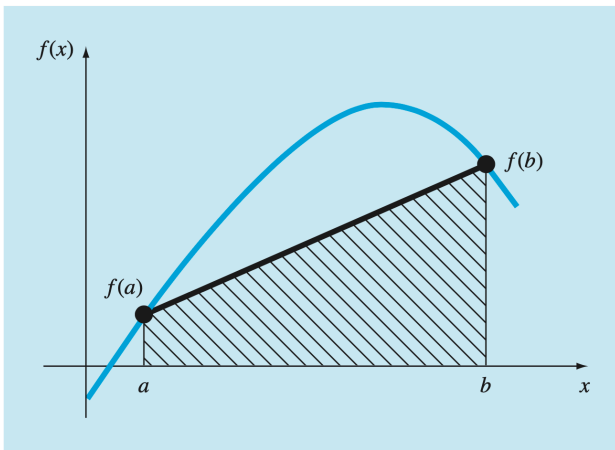
- 1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข
- 2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
- 3 บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)
- 4 บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)
- 5 บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)
- 6 **บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)**
 - 6.1 การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ (Newton Cotes Integration)
 - วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)
 - วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)
 - ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)
 - 6.2 วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)
 - วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)
 - ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 (Error of Simpson's 1/3 Rule)

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู เป็นวิธีการหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคตส์ ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายที่สุดใน
การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับหนึ่ง หรือ
สมการเส้นตรง จะได้

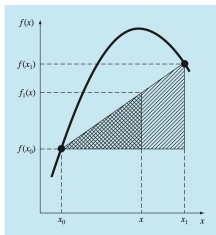
$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_1(x) dx \quad (6.1)$$

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)



รูปที่ 4: Graphical depiction of the trapezoidal rule.

Using Columns



รูปที่ 5

จากรูป พบว่ารูปมีพื้นที่ใต้กราฟที่แรเงาเป็นบริเวณของสี่เหลี่ยมคางหมู จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย จะได้

$$\frac{f_1(x) - f(x)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

นั่นคือ

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) \quad (6.2)$$

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

ดังนั้นพื้นที่ใต้เส้นตรงจะเป็นการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน ในช่วง a ถึง b จะได้

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_1(x) dx \approx \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) \right] dx \quad (6.3)$$

ดังนั้น

$$I = (b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2} \quad (6.4)$$

จะเรียกสมการ (6.4) ว่า **trapezoidal rule**

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

Before integration, Eq. (21.2) can be expressed as

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - \frac{af(b) - af(a)}{b - a}$$

Grouping the last two terms gives

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b - a}$$

or

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

which can be integrated between $x = a$ and $x = b$ to yield

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{x^2}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} x \Big|_a^b$$

This result can be evaluated to give

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} (b - a)$$

Now, since $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$,

$$I = [f(b) - f(a)] \frac{b + a}{2} + bf(a) - af(b)$$

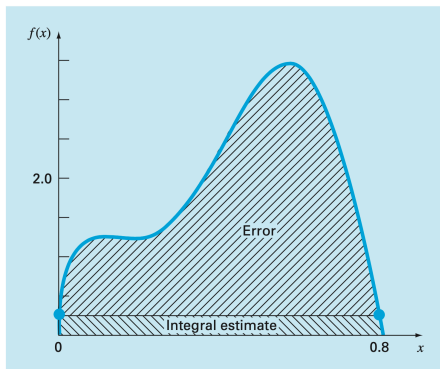
Multiplying and collecting terms yields

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

which is the formula for the trapezoidal rule.

รูปที่ 6: Derivation of Trapezoidal Rule.

ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยสี่เหลี่ยมคางหมู (Error of Trapezoidal Rule Method)



รูปที่ 7: Graphical depiction of the use of a single application of the trapezoidal rule to approximate the integral of $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ from $x = 0$ to 0.8 .

ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยสี่เหลี่ยมคางหมู (Error of Trapezoidal Rule Method)

ค่าคลาดเคลื่อนที่ได้อาจได้จากการใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู คือ

$$E_t = -\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$$

เมื่อ ξ อยู่ระหว่าง a และ b

ในการหาค่า $f''(\xi)$ จะใช้วิธีการหาค่าเฉลี่ย ซึ่งเขียนแทนด้วย $\bar{f}''(\xi)$ ดังนั้น

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_a^b f''(x) dx}{b-a} \quad (6.5)$$

จะได้

$$E_a = -\frac{1}{12}\bar{f}''(\xi)(b-a)^3$$

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

ตัวอย่างที่ 6.1

จงใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู เพื่อประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$

และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

Using Columns

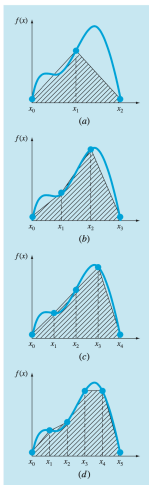
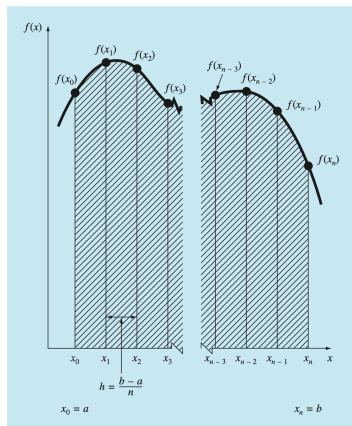


Illustration of the multiple-application trapezoidal rule. (a) Two segments, (b) three segments, (c) four segments, and (d) five segments.

รูปที่ 8

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)



รูปที่ 9: The general format and nomenclature for multiple-application integrals.

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

เมื่อใช้วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู คือแบ่งช่วงการหาค่าปริพันธ์เป็นหลายๆ ส่วน การหาค่าปริพันธ์ก็คือผลบวกของการหาค่าปริพันธ์แต่ละส่วน ซึ่งสมการนี้เรียกว่า การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป หรือการหาค่าปริพันธ์ด้วยการประยุกต์การใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application หรือ Composite Integration Formula)

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

จากรูปที่ 9 แสดงการแบ่งเป็น n ช่วง โดยแต่ละช่วงจะมีช่วงกว้าง h เท่ากัน ซึ่งจะมี $n + 1$ จุด คือ x_0, x_1, \dots, x_n เมื่อ $h = \frac{b-a}{n}$ จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \quad (6.6)$$

แทนค่าสมการด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป จะได้

$$I \approx h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \quad (6.7)$$

หรือ

$$I \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \quad (6.8)$$

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

เมื่อ $h = \frac{b-a}{2n}$ จะได้

$$I \approx (b - a) \frac{\left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]}{2n} \quad (6.9)$$

สมการนี้เรียกว่า การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป
(Multiple Application Trapezoidal Rule Method)

(Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายที่ได้จากการใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป คือ

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i)$$

โดยที่ $f''(\xi_i)$ คือ ค่าอนุพันธ์อันดับสอง เมื่อ ξ_i ในแต่ละส่วนที่ i ซึ่งใช้เป็นค่าประมาณของค่าเฉลี่ย หรือค่าเฉลี่ยอนุพันธ์อันดับสอง ของทุกๆ ส่วน

$$\bar{f}'' \approx \frac{\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)}{n} \quad (6.10)$$

จะได้

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}''$$

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

ตัวอย่างที่ 6.2

จงใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เพื่อประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

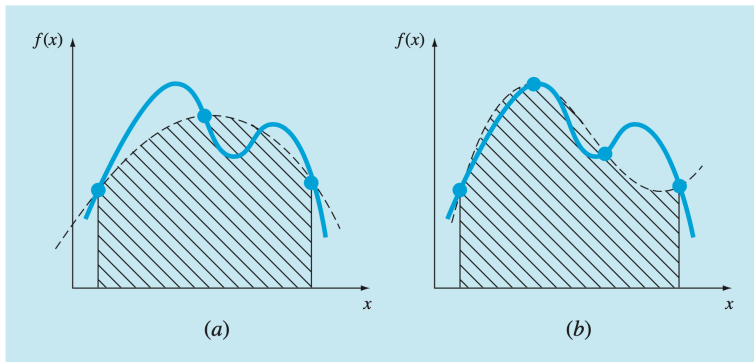
n	h	I	ϵ_t (%)
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

รูปที่ 10

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)



รูปที่ 11: (a) Graphical depiction of Simpson's 1/3 rule: It consists of taking the area under a parabola connecting three points. (b) Graphical depiction of Simpson's 3/8 rule: It consists of taking the area under a cubic equation connecting four points.

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule) แบ่งออกเป็นสองวิธีดังนี้

- 1 วิธีซิมสัน $1/3$ (Simpson's $1/3$ Rule)
- 2 วิธีซิมสัน $3/8$ (Simpson's $3/8$ Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 เป็นการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับสอง ดังนั้น

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_2(x) dx \quad (6.11)$$

ถ้า a และ b แทนด้วย x_0 และ x_2 ตามลำดับ และ $f_2(x)$ แทนด้วยฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์ อันดับสอง (Second Order Lagrange Polynomial) จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

จากการหาค่าปริพันธ์จะได้

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (6.12)$$

โดย $h = (b - a)/2$ สมการ (6.12) เรียกว่า **วิธีซิมสัน 1/3 หรือสูตรซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)** ซึ่งเป็น Second Newton-Cotes Closed Integration Formula
หรือ

$$I \approx (b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \quad (6.13)$$

ถ้า $a = x_0$, $b = x_2$ และ x_1 คือจุดกึ่งกลางระหว่าง a และ b หรือเท่ากับ $(b + a)/2$ และสมการ (6.13) เรียกว่า **การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3**

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

As was done in Box 21.2 for the trapezoidal rule, Simpson's 1/3 rule can be derived by integrating the forward Newton-Gregory interpolating polynomial (Box 18.2):

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[f(x_0) + \Delta f(x_0)\alpha + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}\alpha(\alpha-1) + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)h^4 \right] d\alpha$$

Notice that we have written the polynomial up to the fourth-order term rather than the third-order term as would be expected. The reason for this will be apparent shortly. Also notice that the limits of integration are from x_0 to x_2 . Therefore, when the simplifying substitutions are made (recall Box 21.2), the integral is from $\alpha = 0$ to 2:

$$I = h \int_0^2 \left[f(x_0) + \Delta f(x_0)\alpha + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}\alpha(\alpha-1) + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)h^4 \right] d\alpha$$

which can be integrated to yield

$$I = h \left[\alpha f(x_0) + \frac{\alpha^2}{2} \Delta f(x_0) + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4} \right) \Delta^2 f(x_0) + \left(\frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^2}{6} \right) \Delta^3 f(x_0) + \left(\frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^4}{16} + \frac{11\alpha^3}{72} - \frac{\alpha^2}{8} \right) f^{(4)}(\xi) h^4 \right]_0^2$$

and evaluated for the limits to give

$$I = h \left[2f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{3} + (0)\Delta^3 f(x_0) - \frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)h^4 \right] \quad (\text{B21.3.1})$$

Notice the significant result that the coefficient of the third divided difference is zero. Because $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$ and $\Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$, Eq. (B21.3.1) can be rewritten as

$$I = h \left[\underbrace{\frac{1}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}_{\text{Simpson's 1/3}} - \underbrace{\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)h^5}_{\text{Truncation error}} \right]$$

Thus, the first term is Simpson's 1/3 rule and the second is the truncation error. Because the third divided difference dropped out, we obtain the significant result that the formula is third-order accurate.

รูปที่ 12: Derivation and Error Estimate of Simpson's 1/3 Rule

(Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายของวิธีซิมสัน $1/3$ คือ

$$E_t = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

เมื่อ $h = (b - a)/2$ จะได้

$$E_a = -\frac{(b - a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

ซึ่ง ξ อยู่ในช่วงระหว่าง a และ b

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

ตัวอย่างที่ 6.3

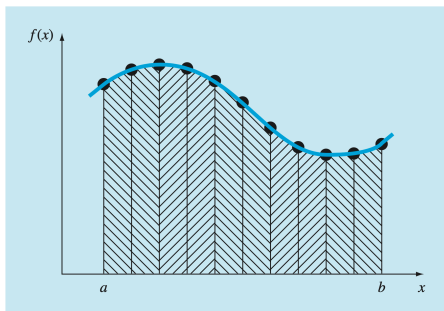
จงใช้วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule) เพื่อประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป
(Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ค่าของการหาค่าปริพันธ์ คือผลบวกของการหาค่าปริพันธ์ในแต่ละส่วน แล้วนำค่าที่ได้ในแต่ละส่วนมาบวกกัน แสดงได้ดังรูป



รูปที่ 13: Graphical representation of the multiple application of Simpson's 1/3 rule. Note that the method can be employed only if the number of segments is even.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

กำหนดให้ $h = \frac{b-a}{n}$ จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

แทนค่า Simpson's 1/3 rule แต่ละช่วง จะได้

$$\begin{aligned} I \cong & 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} \\ & + \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6} \end{aligned}$$

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ดังนั้น

$$I \approx (b - a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n} \quad (6.14)$$

สมการ (6.14) เรียกว่า การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีหาค่าปริพันธ์ด้วยซิมสัน 1/3 หลายรูป หรือการหาค่าปริพันธ์ด้วยการประยุกต์ใช้ซิมสัน 1/3 (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Error of Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป หาได้จากการรวมผลบวกของค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละส่วน แล้วหาค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ จะได้

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} \bar{f}^{(4)}$$

เมื่อ $\bar{f}^{(4)}$ คือ ค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์อันดับสี่

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ตัวอย่างที่ 6.4

จงหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule) ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

เมื่อ $n = 4$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

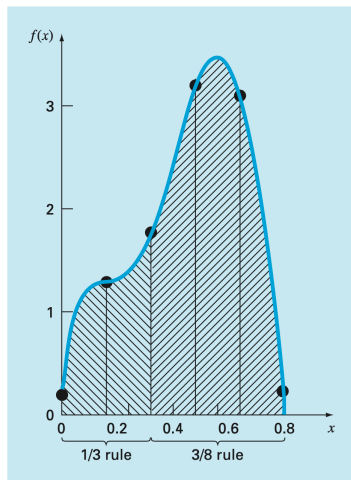
วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 เป็นการหาค่าปริพันธ์ที่มีความคล้ายคลึงกับวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู และวิธีซิมสัน 1/3 คือการหาค่าประมาณด้วยการพิจารณาพื้นที่ใต้กราฟ แต่จะใช้ฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์อันดับสาม โดยพิจารณาจุด 4 จุด

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)



รูปที่ 14: Illustration of how Simpson's 1/3 and 3/8 rules can be applied in tandem to handle multiple applications with odd numbers of intervals.

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

เพื่อหาค่าปริพันธ์ จะได้

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_3(x) dx$$

นั่นคือ

$$I \cong \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

เมื่อ $h = (b - a)/3$ ดังนั้น

$$I = \frac{b - a}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \quad (6.15)$$

สมการ (6.15) เรียกว่า สูตรซิมสัน 3/8 หรือวิธีซิมสัน 3/8

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 3/8 (Error of Simpson's 3/8 Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 3/8 คือ

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)$$

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

ตัวอย่างที่ 6.5

จงหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule) ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

แบบฝึกหัด 6

1. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_0^4 xe^{2x} dx$

- ❶ วิธีวิเคราะห์ (analytically)
- ❷ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู
- ❸ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 4$
- ❹ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน $1/3$
- ❺ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน $1/3$ หลายรูป เมื่อ $n = 4$

พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

2. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_0^{10} (10 + 2x - 6x^2 + 5x^4) dx$

- ❶ วิธีวิเคราะห์ (analytically)
- ❷ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู
- ❸ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 4$
- ❹ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3
- ❺ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป เมื่อ $n = 4$

พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

3. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_0^{\pi} (4 + 2 \sin x) dx$

- ❶ วิธีวิเคราะห์ (analytically)
- ❷ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู
- ❸ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 5$
- ❹ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3
- ❺ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป เมื่อ $n = 5$

พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

4. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_{-2}^2 \int_0^4 (x^3 - 3y^2) dx dy$

- ❶ วิธีวิเคราะห์ (analytically)
- ❷ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 2$
- ❸ วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน $1/3$

พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

5. Evaluate the following integral:

$$\int_{-2}^4 (1 - x - 4x^3 + 2x^5) dx$$

- ❶ analytically
- ❷ single application of the trapezoidal rule;
- ❸ Multiple application trapezoidal rule, with $n = 2, 4$
- ❹ single application of Simpson's 1/3 rule
- ❺ Simpson's 3/8 rule

For each of the numerical estimates (2) through (5) determine the percent relative error based on (1).

Table of Contents

- 1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข
- 2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
- 3 บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)
- 4 บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)
- 5 บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)
- 6 บทที่ 6 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

7 บทที่ 7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ