รายวิชา 09131201 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์ (Numerical Methods for Computers) บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

July 28, 2022

Outline

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Outline

บทนำ

บทนำ

บทนำ

ถ้าหากคาดว่าชุดข้อมูลถูกต้อง และมีความต้องการได้เส้นสมการที่มีค่าต่อเนื่องเหมาะสมที่ผ่านทุกๆ จุดของข้อมูล วิธีการหาเส้นสมการที่เหมาะสมนี้ เรียกว่า **การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)**

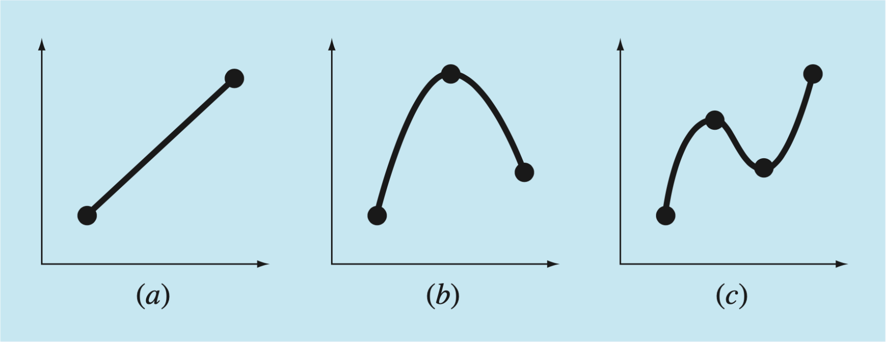
บทนำ

การประมาณค่าในช่วงหรือการหาเส้นโค้งในช่วง คือการสร้างสมการพหุนามที่ผ่านทุกจุดของข้อมูล รูปทั่วไปของสมการพหุนามอันดับที่ n (Order Polynomial) คือ

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \tag{5.1}$$

สมการพหุนามอันดับที่ n คือสมการ (5.1) เพียงสมการเดียวที่ผ่านจุดข้อมูลครบทั้ง $n+1$ จุด

บทนำ



รูปที่ 1: Examples of interpolating polynomials: (a) first-order (linear) connecting two points, (b) second- order (quadratic or parabolic) connecting three points, and (c) third-order (cubic) connecting four points.

บทนำ

การประมาณค่าในช่วงมีดังนี้

1. การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีนิวตัน (Newton Divided Difference Interpolating Polynomials)
2. การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)
3. การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสไปน์ (Spline Interpolation)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีนิวตัน (Newton Divided Difference Interpolating Polynomials)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีนิวตัน (Newton Divided Difference Interpolating Polynomials)

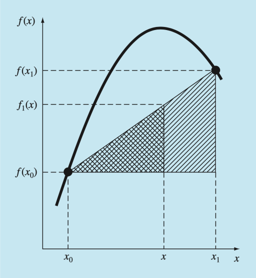
การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีนิวตัน (Newton Divided Difference Interpolating Polynomials)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีนิวตัน แบ่งได้ดังนี้

1. การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)
2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)
3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน (General Form of Newton's Interpolating Polynomials)

1. การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)

การประมาณค่าเชิงเส้นตรง ให้พิจารณารูปทั่วไปของสมการเส้นตรง คือ $f(x) = a_0 + a_1 x$ ซึ่งจะพบว่าอันดับสูงสุดของสมการ คืออันดับหนึ่ง ดังนั้นการสร้างสมการเส้นตรงจะต้องผ่านจุดทั้งหมด 2 จุด ดังนี้



รูปที่ 2: Graphical depiction of linear interpolation. The shaded areas indicate the similar triangles used to derive the linear-interpolation formula.

1. การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)

จากรูป โดยกฎของสามเหลี่ยมคล้าย จะได้

$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ดังนั้น

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \tag{5.2}$$

ซึ่งเรียก (5.2) ว่า **linear-interpolation formula**

1. การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)

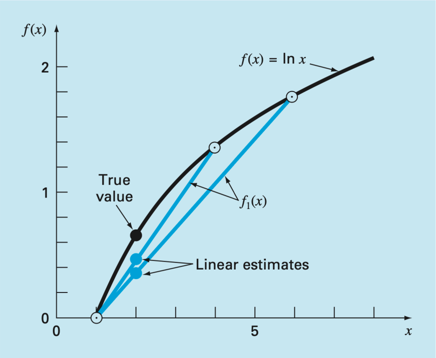
ตัวอย่างที่ 5.1

กำหนดให้ $f(x) = \ln x$ จงหาค่าโดยประมาณของ $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าเชิงเส้นตรง เมื่อ

1. กำหนดให้ $\ln 1 = 0, \ln 6 = 1.7917595$
2. กำหนดให้ $\ln 1 = 0, \ln 4 = 1.3862944$

เมื่อค่าจริงของ $\ln 2 = 0.69314718$

1. การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)



รูปที่ 3: Two linear interpolations to estimate $\ln 2$. Note how the smaller interval provides a better estimate.

2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)

รูปทั่วไปของสมการพหุนามอันดับสอง คือ $f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$
ถ้ามีข้อมูล 3 จุด คือ $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ จะเขียนแทนเส้นโค้งผ่านจุดทั้ง 3 ด้วยสมการพหุนามอันดับสอง โดย พิจารณาจาก

$$
\begin{aligned}
f_2(x) =& b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \\
=& b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 + b_2x_0x_1 - b_2xx_0 - b_2xx_1 \\
=& (b_0 + b_1x_0 + b_2x_0x_1) + (b_1 - b_2x_0 - b_2x_1)x + b_2x^2
\end{aligned}
$$

หรือสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

เมื่อ

$$a_0 = b_0 + b_1x_0 + b_2x_0x_1, \quad a_1 = b_1 - b_2x_0 - b_2x_1, \quad a_2 = b_2$$

2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)

เมื่อทั้ง 3 จุด สอดคล้องกับ $f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$
นั่นคือ $f_2(x_0) = f(x_0)$, $f_2(x_1) = f(x_1)$, $f_2(x) = f(x_2)$

1. เมื่อ $x = x_0$ จะได้ $f_2(x_0) = f(x_0) = b_0$
2. เมื่อ $x = x_1$ จะได้ $b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
3. เมื่อ $x = x_2$ จะได้ $f_2(x) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$ แทน $b_0 = f(x_0)$ และ $b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ จะได้

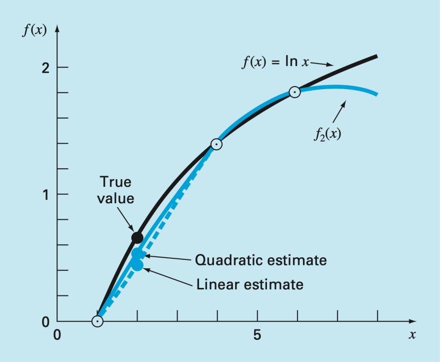
$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)

ตัวอย่างที่ 5.2

จงหาค่าประมาณของ $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง เมื่อกำหนดข้อมูล 3 จุด ดังนี้ $\ln 1 = 0, \ln 4 = 1.386294, \ln 6 = 1.791759$ เมื่อค่าจริงของ $\ln 2 = 0.69314718$

2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)



รูปที่ 4: The use of quadratic interpolation to estimate ln 2. The linear interpolation from $x = 1$ to 4 is also included for comparison.

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน (General Form of Newton's Interpolating Polynomials)

รูปทั่วไปของสมการพหุนามอันดับที่ n ผ่านจุดข้อมูล $n+1$ จุด คือ

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + b_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{5.3}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} b_0 &= f(x_0) \\ b_1 &= f[x_1, x_0] \\ b_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\ &\vdots \\ b_n &= f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0] \end{aligned}$$

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน (General Form of Newton's Interpolating Polynomials)

เมื่อ $f[\ \cdot\ ]$ แทนผลต่างจากการแบ่งย่อยจำกัด (finite divided differences) นั่นคือ

- $f[x_i, x_j]$ คือ ผลต่างจากการแบ่งย่อยอันดับที่ 1 (first finite divided difference) นิยามโดย

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

- $f[x_i, x_j, x_k]$ คือ ผลต่างจากการแบ่งย่อยอันดับที่ 2 (second finite divided difference) นิยามโดย

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน (General Form of Newton's Interpolating Polynomials)

- $f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0]$ คือ ผลต่างจากการแบ่งย่อยอันดับที่ n (nth finite divided difference) นิยามโดย

$$f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

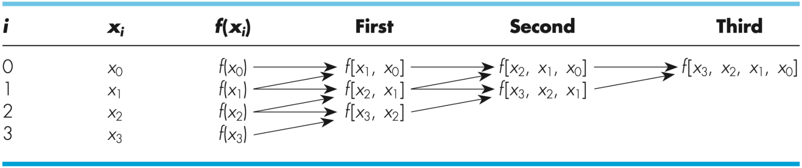
จะได้สูตรการประมาณค่าในช่วงพหุนามอันดับที่ n ของนิวตัน ดังนี้

$$\begin{aligned} f_n(x) = & b_0 + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] \\ & + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0] \end{aligned} \quad (5.4)$$

ซึ่งเรียก (5.4) ว่า Newton's divided-difference interpolating polynomial

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน (General Form of Newton's Interpolating Polynomials)

ซึ่งสามารถแสดงผลต่างจากการแบ่งย่อยอันดับต่างๆ ได้ดังตารางต่อไปนี้



รูปที่ 5: Graphical depiction of the recursive nature of finite divided differences.

ค่าคลาดเคลื่อนของสมการพหุนามด้วยวิธีนิวตัน (Error of Newton's Interpolating Polynomials)

การหาค่าคลาดเคลื่อนของสมการพหุนามอันดับ n ด้วยวิธีนิวตัน(nth Order Newton's Interpolating Polynomial) สามารถหาได้โดยการประมาณด้วยค่าอนุพันธ์อันดับที่ $n+1$ ที่จุด x_{n+1} คือ

$$R_n = f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน (General Form of Newton's Interpolating Polynomials)

ตัวอย่างที่ 5.3

กำหนดข้อมูล 4 จุดดังตาราง จงหาสมการพหุนามโดยกำหนดให้ใช้ทุกจุดของข้อมูล

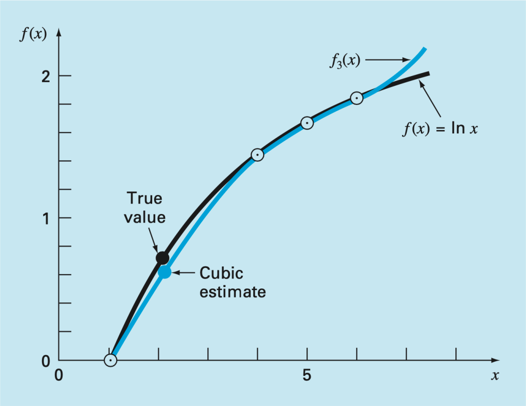
x	1	3	6	10
$f(x)$	2	10	15	50

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน (General Form of Newton's Interpolating Polynomials)

ตัวอย่างที่ 5.4

จงหาค่าประมาณของ $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีนิวตันอันดับที่ 3 เมื่อกำหนดข้อมูล 4 จุด ดังนี้ $\ln 1 = 0, \ln 4 = 1.386294$, $\ln 5 = 1.609438$, $\ln 6 = 1.791759$

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน (General Form of Newton’s Interpolating Polynomials)



รูปที่ 6: The use of cubic interpolation to estimate ln 2.

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ คือการประมาณค่าในช่วงที่เปลี่ยนรูปมาจากการหาสมการพหุนามด้วยวิธีนิวตัน และสามารถเขียนได้ด้วย

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \tag{5.5}$$

เมื่อ

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{5.6}$$

($\prod$ = "product of.")

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)

ตัวอย่างเช่น พหุนามอันดับที่ 1 :

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

พหุนามอันดับที่ 2 :

$$\begin{aligned} f_2(x) =& \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)} f(x_1) \\ &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \end{aligned}$$

จะสังเกตเห็นว่าแต่ละพจน์ของ $L_i(x)$ จะเป็น 1 เมื่อ $x = x_i$ และมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $x = x_j; i \neq j$

ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ (Error of Lagrange Interpolating Polynomials)

ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ สามารถประมาณค่าได้ด้วย

$$R_n \approx f[x, x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)

ตัวอย่างที่ 5.5

จงหาค่าประมาณของ $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์อันดับที่ 1 และ ลากรองจ์อันดับที่ 2 เมื่อกำหนดข้อมูล 3 จุด ดังนี้
$\ln 1 = 0, \ln 4 = 1.386294, \ln 6 = 1.791759$

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสไปน์ (Spline Interpolation)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสไปน์ (Spline Interpolation)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสไปน์ (Spline Interpolation)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสไปน์ เป็นการประมาณค่าชุดข้อมูลทั้งชุดที่ต้องใช้รูปสมการที่เหมือนกัน โดยการหาสมการจะพิจารณาระหว่างจุด 2 จุดของข้อมูลใดๆ ด้วยสมการหนึ่งสมการ และกระทำต่อเนื่องเรื่อยๆ จนครบชุดข้อมูล และที่จุดต่อของแต่ละสมการค่าของฟังก์ชันจะต้องต่อเนื่อง

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสไปน์ (Spline Interpolation)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีสไปน์ (Spline Interpolation) แบ่งได้ดังนี้

1. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามเชิงเส้นด้วยวิธีสไปน์ (Linear Spline Interpolation)
2. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์ (Quadratic Spline Interpolation)
3. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสามด้วยวิธีสไปน์ (Cubic Spline Interpolation)

1. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามเชิงเส้นด้วยวิธีสไปน์ (Linear Spline Interpolation)

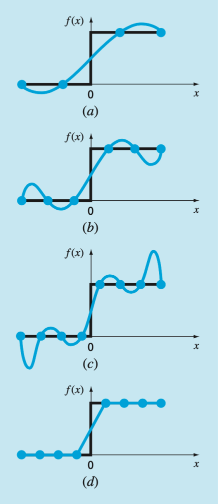
การประมาณค่าระหว่างจุด 2 จุดของข้อมูลใดๆ ด้วยสมการเส้นตรง ($y = ax + b$) ดังนั้นจากกลุ่มข้อมูล $n+1$ จุด จะได้สมการเส้นตรง n สมการซึ่งประกอบด้วย

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + m_0(x - x_0), \quad x_0 \leq x \leq x_1 \\ f(x) =& f(x_1) + m_1(x - x_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ &\vdots \\ f(x) =& f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}), \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned}$$

เมื่อ m_i เป็นความชันของเส้นตรง นิยามโดย

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Using Columns



รูปที่ 7

Parts (a) through (c) indicate that the abrupt change induces oscillations in interpolating polynomials. In contrast, because it is limited to third-order curves with smooth transitions, a linear spline (d) provides a much more acceptable approximation.

1. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามเชิงเส้นด้วยวิธีสไปน์ (Linear Spline Interpolation)

ข้อสังเกต 5.1

การประมาณค่าระหว่างจุด 2 จุดของข้อมูลใดๆ ด้วยสมการเส้นตรง หรือกำลังหนึ่ง ด้วยวิธีสไปน์ (Linear Spline Interpolation) คือจุดต่อของเส้นตรงที่ไม่ต่อเนื่อง ดังนั้นจึงควรใช้สมการพหุนามอันดับที่สูงขึ้น

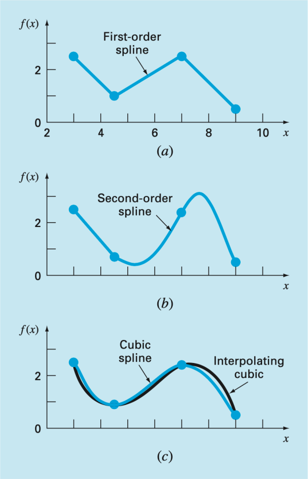
1. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามเชิงเส้นด้วยวิธีสไปน์ (Linear Spline Interpolation)

ตัวอย่างที่ 5.6

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงประมาณค่าสมการเส้นตรงด้วยวิธีสไปน์ (Linear Spines) ของฟังก์ชันที่ $x = 5$

x	3.0	4.5	7.0	9.0
$f(x)$	2.5	1.0	2.5	0.5

Using Columns

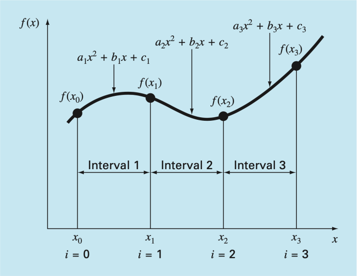


รูปที่ 8

Spline fits of a set of four points. (a) Linear spline, (b) quadratic spline, and (c) cubic spline, with a cubic interpolating polynomial also plotted.

2. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์ (Quadratic Spline Interpolation)

การประมาณค่าระหว่างจุด 2 จุดของข้อมูลใด ๆ ด้วยสมการพหุนามอันดับสอง ($y = ax^2 + bx + c$) พิจารณาดังรูป



รูปที่ 9: Notation used to derive quadratic splines. Notice that there are n intervals and $n + 1$ data points. The example shown is for $n = 3$.

2. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์ (Quadratic Spline Interpolation)

สำหรับช่วง i ใดๆ รูปทั่วไปของสมการพหุนามอันดับสอง คือ

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

ดังนั้นถ้าข้อมูล $n+1$ จุด จะต้องสร้างสมการ n สมการ และเนื่องจากแต่ละสมการมีตัวแปรไม่ทราบค่า 3 ตัว คือ a, b และ c ดังนั้นสมการ n สมการจะมีตัวแปรไม่ทราบค่า $3n$ ตัวแปร

2. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์ (Quadratic Spline Interpolation)

สมการพหุนามอันดับสองจำนวน $3n$ สมการ สร้างจากเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

1. **ค่าของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันที่ต่อกันจะเท่ากันที่จุดต่อหรือจุดต่อภายใน (Interior Knot)** ซึ่งจุดเชื่อมภายในมีทั้งหมด $n-1$ จะได้

$$\begin{aligned} a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} &= f(x_{i-1}) \\ a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i &= f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

สำหรับ $i = 2, 3, ..., n$ จากเงื่อนไขนี้จะได้ $2n-2$ สมการ

2. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์ (Quadratic Spline Interpolation)

2. **ฟังก์ชันแรกและฟังก์ชันสุดท้ายจะต้องผ่านจุดปลายทั้งสอง** จะได้

$$
\begin{aligned}
a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 &= f(x_0) \\
a_nx_n^2 + b_nx_n + c_n &= f(x_n)
\end{aligned}
$$

2. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์ (Quadratic Spline Interpolation)

3. **อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันที่จุดต่อจะต้องเท่ากัน**
จากฟังก์ชัน $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะได้ $f'(x) = 2ax + b$
ดังนั้น จากเงื่อนไขนี้ จะได้

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_ix_{i-1} + b_i$$

สำหรับ $i = 2, 3, ..., n$ จะได้ $n - 1$ สมการ

2. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์ (Quadratic Spline Interpolation)

4. **สมมติให้อนุพันธ์อันดับสองที่จุดแรกมีค่าเท่ากับศูนย์**
จากฟังก์ชัน $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะได้ $f''(x) = 2a$
ดังนั้น

$$a_1 = 0$$

2. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์ (Quadratic Spline Interpolation)

ตัวอย่างที่ 5.7

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์ (Quadratic Spline Interpolation) ของฟังก์ชันที่ $x = 5$

x	3.0	4.5	7.0	9.0
$f(x)$	2.5	1.0	2.5	0.5

3. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสามด้วยวิธีสไปน์ (Cubic Spline Interpolation)

การประมาณค่าระหว่างจุด 2 จุดของข้อมูลใด ๆ ด้วยสมการพหุนามอันดับสาม $(y = ax^3 + bx^2 + cx + d)$
สำหรับช่วง i ใดๆ รูปทั่วไปของสมการพหุนามอันดับสาม คือ

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d$$

ดังนั้นถ้าข้อมูล $n+1$ จุด จะต้องสร้างสมการ n สมการ และเนื่องจากแต่ละสมการมีตัวแปรไม่ทราบค่า 4 ตัว คือ a, b, c และ d ดังนั้นสมการ n สมการจะมีตัวแปรไม่ทราบค่า $4n$ ตัวแปร

3. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสามด้วยวิธีสไปน์ (Cubic Spline Interpolation)

สมการพหุนามอันดับสองจำนวน $4n$ สมการ สร้างจากเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

1. ค่าของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันที่ต่อกันจะเท่ากันที่จุดต่อ
2. ฟังก์ชันแรกและฟังก์ชันสุดท้ายจะต้องผ่านจุดปลายทั้งสอง
3. อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันที่ต่อกันจะเท่ากันที่จุดต่อ
4. อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันที่ต่อกันจะเท่ากันที่จุดต่อ
5. อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันที่ผ่านจุดปลายทั้งสองเท่ากับศูนย์

3. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสามด้วยวิธีสไปน์ (Cubic Spline Interpolation)

สำหรับอีกวิธีหนึ่งในการหาค่า a_i, b_i, c_i, d_i คือการใช้ความสัมพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่สอง ของฟังก์ชันบนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ซึ่งมีรูปแบบเชิงเส้น โดยใช้สูตรดังนี้

$$
\begin{aligned}
(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\
= \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i))] + \frac{6}{x_i - x_{i+1}}[f(x_{i+1}) - f(x_i))]
\end{aligned}
$$

3. การประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสามด้วยวิธีสไปน์ (Cubic Spline Interpolation)

ตัวอย่างที่ 5.8

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์ (Quadratic Spline Interpolation) ของฟังก์ชันที่ $x = 5$

x	3.0	4.5	7.0	9.0
$f(x)$	2.5	1.0	2.5	0.5

แบบฝึกหัด 5

1. จงหาค่าใกล้เคียงของ $\log 4$ โดยวิธีการประมาณค่าเชิงเส้นตรงด้วยวิธีนิวตัน
    1. เมื่อกำหนด $\log 3 = 0.4771213, \log 5 = 0.6989700$
    2. เมื่อกำหนด $\log 3$ และ $\log 4.5 = 0.6532125$
    3. จงหาร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในข้อ 1.1 และ 1.2 เมื่อค่าจริงของ $\log 4 = 0.6020600$

แบบฝึกหัด 5

2. จากโจทย์ข้อ 1 จงหาค่า $\log 4$ โดยวิธีการประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีนิวตัน และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (กำหนด $\log 3, \log 4.5, \log 5$)

แบบฝึกหัด 5

3. จากโจทย์ข้อ 1 จงหาค่า $\log 4$ โดยวิธีการประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสามด้วยวิธีนิวตัน เมื่อกำหนดเพิ่มอีก 1 จุด คือ $\log 3.5 = 0.5440680$ และค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (กำหนด $\log 3, \log 3.5, \log 4.5, \log 5$)
4. จากโจทย์ข้อ 1-3 โดยวิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์

แบบฝึกหัด 5

5. Given these data

x	1.6	2	2.5	3.2	4	4.5
$f(x)$	2	8	14	15	8	2

รูปที่ 10

Calculate $f(2.8)$ using Newton's interpolating polynomials of order 1 through 3. Choose the sequence of the points for your estimates to attain the best possible accuracy.

6. Repeat Prob. 4. using Lagrange polynomials of order 1 through 3.

แบบฝึกหัด 5

7. จากข้อมูลที่กำหนดให้ต่อไปนี้

x	1	2	3	5	6
$f(x)$	4.75	4.0	5.25	19.75	36

จงเขียนสมการการประมาณค่าสมการพหุนามอันดับสองด้วยวิธีสไปน์

แบบฝึกหัด 5

8. Develop quadratic splines for the first five data points in Prob. 5 and predict $f(3.4)$ and $f(2.2)$.

Table of Contents

Table of Contents