รายวิชา 09131201 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์ (Numerical Methods for Computers) บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

July 11, 2022

Outline

Table of Contents

Table of Contents

Outline

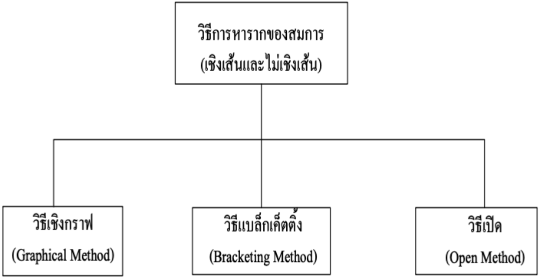
บทนำ

พิจารณาฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร $y = f(x)$ การหาค่ารากของสมการ หรือคำตอบ(ผลเฉลย) ของสมการ คือค่าของ x ที่ทำให้ $y = f(x) = 0$
เช่น สมการของฟังก์ $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงที่ ดังนั้น รากของสมการนี้คือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

บทนำ

วิธีการหาค่ารากของสมการ สามารถแบ่งเป็นกลุ่มใหญ่ๆ ได้ดังนี้



ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method)

ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method) เป็นวิธีที่รู้ว่า คำตอบจะต้องอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งของค่า x จึงทำการกำหนดค่าเริ่มต้นสองค่า คร่อมรากใดรากหนึ่งของสมการ ซึ่งจะเป็นขอบเขตของช่วงที่จะหารากของสมการ วิธีแบบกำหนดขอบเขต จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้คือ

1. ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2. ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ระเบียบวิธีแบบเปิด (Open method)

ระเบียบวิธีแบบเปิด (Open method) การหาค่ารากของวิธีนี้ต้อง กำหนดค่าเดาเริ่มต้นในการคำนวณ 1 ค่าหรือ มากกว่า 1 ค่า โดยไม่จำเป็นต้องคร่อมรากใดรากหนึ่งของสมการ วิธีแบบเปิด จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้คือ

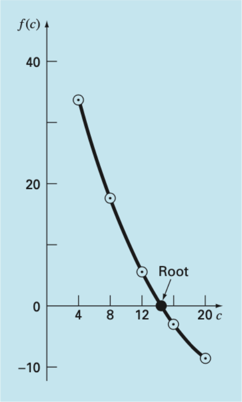
1. ระเบียบวิธีทำซ้ำด้วยจุดตรึง (Fixed Point Iteration Method)
2. ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
3. วิธีเซแคนต์ (Secant Method)

Outline

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

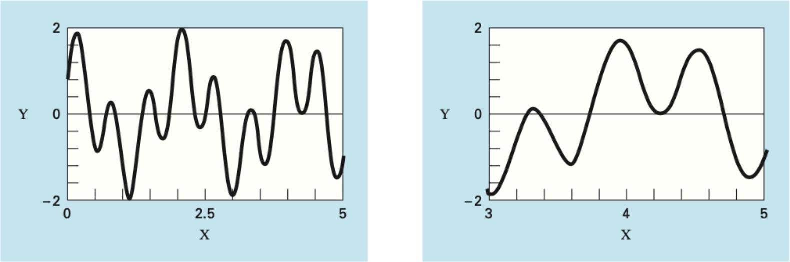
การหาค่ารากของสมการด้วยระเบียบวิธีเชิงกราฟ เป็นการเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ต้องการหาคำตอบ โดยกราฟของฟังก์ชันตัดกับแกน x ที่จุดใด จุดนั้น คือ รากของสมการ



ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

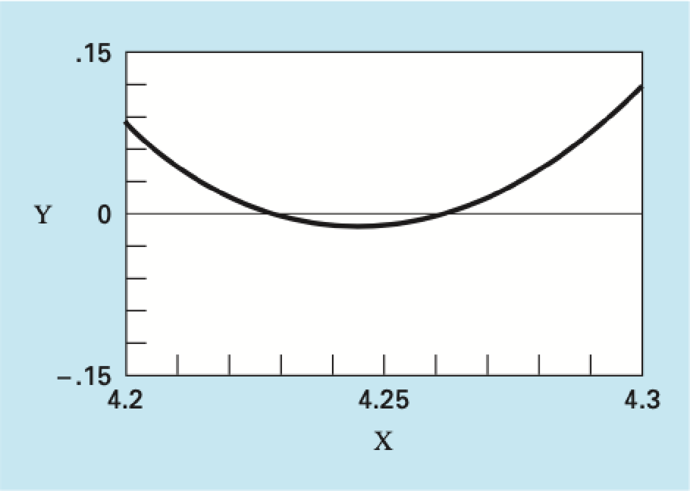
ตัวอย่างที่ 2.1

จงหาค่ารากของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[0, 5]$ โดยระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



(a) (b)

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



(c)

Outline

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง x_l ถึง x_u โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$ แล้วจะมีค่ารากของสมการอย่างน้อยที่สุด 1 ค่า อยู่ระหว่าง x_l ถึง x_u

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

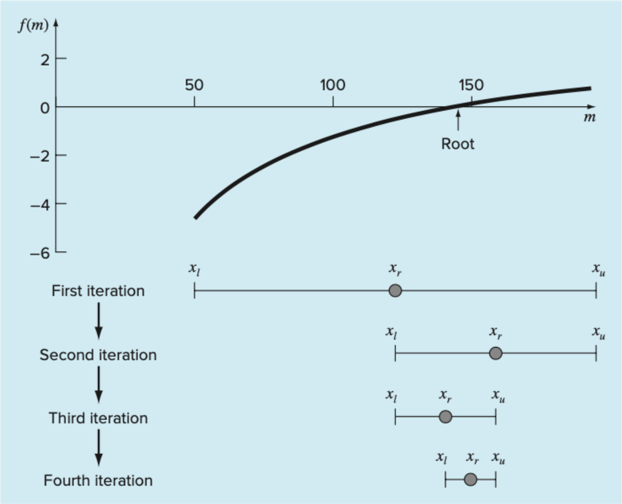
ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง

1. เลือก x_l และ x_u โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$
2. ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

3. ตรวจสอบเงื่อนไข ต่อไปนี้
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) < 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_l, x_r) ดังนั้น กำหนดให้ $x_u = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) > 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_r, x_u) ดังนั้น กำหนดให้ $x_l = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) = 0$ แล้ว x_r เป็นรากของสมการ และออกจากการคำนวณ

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)



ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ตัวอย่างที่ 2.2

จงหารากของสมการ $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ในช่วง $[0, 1]$ โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) กำหนดความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.1

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ตัวอย่างที่ 2.3

จงหารากของสมการ $x^2 + 3x - 9 = 0$ ในช่วง $[-1, 7]$ โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) กำหนดความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 5%

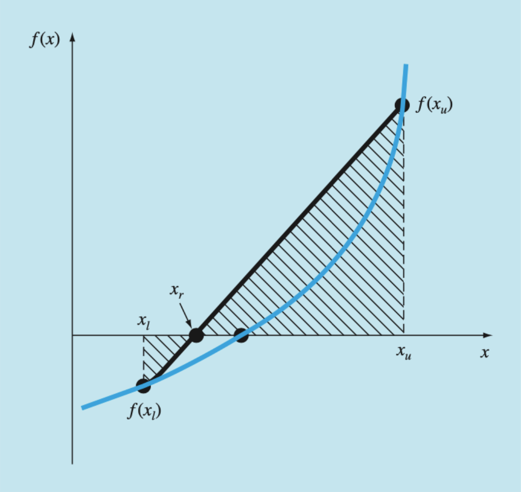
Outline

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method) จะคำนวณรากของสมการจากความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด $(x_l, f(x_l))$ และ $(x_u, f(x_u)$ กับแกน x แทนการแบ่งครึ่งช่วงปิด $[a, b]$ ดังรูปที่ 5

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)



รูปที่ 1: False position method

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

พิจารณาจากรูปที่ 5 และใช้กฎของสามเหลี่ยมคล้าย จะได้

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

1. เลือก x_l และ x_u โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$
2. ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

3. ตรวจสอบเงื่อนไข ต่อไปนี้
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) < 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_l, x_r) ดังนั้น กำหนดให้ $x_u = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) > 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_r, x_u) ดังนั้น กำหนดให้ $x_l = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) = 0$ แล้ว x_r เป็นรากของสมการ และออกจากการคำนวณ

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ตัวอย่างที่ 2.4

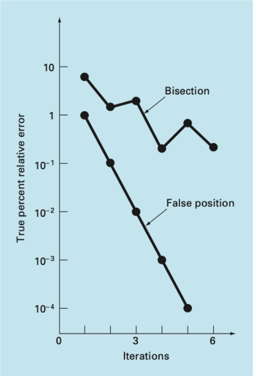
จงหารากของสมการ $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ในช่วง $[0, 1]$ โดยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method) กำหนดความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.1

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ตัวอย่างที่ 2.5

จงหารากของสมการ $x^2 + 3x - 9 = 0$ ในช่วง $[-1, 5]$ โดยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)กำหนดความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 5%

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)



รูปที่ 2: Comparison of the relative errors of the bisection and the false-position methods.

ข้อผิดพลาดของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (Pitfalls of the False-Position Method)

ตัวอย่างที่ 2.6

จงหารากของสมการ $f(x) = x^{10} - 1$ ในช่วง $[0, 1.3]$ โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) และระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ข้อผิดพลาดของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (Pitfalls of the False-Position Method)

Iteration	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	0	1.3	0.65	100.0	35
2	0.65	1.3	0.975	33.3	2.5
3	0.975	1.3	1.1375	14.3	13.8
4	0.975	1.1375	1.05625	7.7	5.6
5	0.975	1.05625	1.015625	4.0	1.6

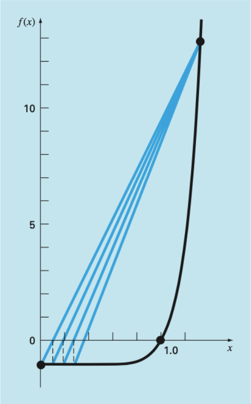
รูปที่ 3: bisection methods.

ข้อผิดพลาดของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (Pitfalls of the False-Position Method)

Iteration	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	0	1.3	0.09430		90.6
2	0.09430	1.3	0.18176	48.1	81.8
3	0.18176	1.3	0.26287	30.9	73.7
4	0.26287	1.3	0.33811	22.3	66.2
5	0.33811	1.3	0.40788	17.1	59.2

รูปที่ 4: False position method

ข้อผิดพลาดของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (Pitfalls of the False-Position Method)



รูปที่ 5: Plot of $f(x) = x^{10} - 1$, illustrating slow convergence of the false-position method

Outline

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ในการหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีนี้อันดับแรกจะต้องแปลงสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูป

$$x = g(x) \tag{2.1}$$

โดยมีสมบัติว่า สำหรับค่า x ใดๆ ถ้า $x = g(x)$ แล้วจะต้องได้ว่า $f(x) = 0$
ตัวอย่างเช่น

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

สามารถเขียนในรูปแบบ ได้ดังนี้

$$x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

ซึ่งสามารถหาค่ารากของสมการได้

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง คือ

$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{2.2}$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, ...$
และค่าคลาดเคลื่อน จะพิจารณาจาก

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

โดยที่ $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ขั้นตอนระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง

1. แปลงสมการ $f(x) = 0$ ให้อยู่ในรูป $x = g(x)$
2. เลือกค่าเริ่มต้น x_0
3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = g(x_i)$
4. นำค่า x_{i+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{i+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ตัวอย่างที่ 2.7

จงหารากของสมการ $e^{-x} - x = 0$ โดยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method) ต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 และกำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

i	x_i	ε_a (%)	ε_t (%)
0	0		100.0
1	1.000000	100.0	76.3
2	0.367879	171.8	35.1
3	0.692201	46.9	22.1
4	0.500473	38.3	11.8
5	0.606244	17.4	6.89
6	0.545396	11.2	3.83
7	0.579612	5.90	2.20
8	0.560115	3.48	1.24
9	0.571143	1.93	0.705
10	0.564879	1.11	0.399

รูปที่ 6: ตัวอย่างที่ 2.7

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ข้อสังเกต 2.1

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงเป็นการจัดสมการให้อยู่ในรูป $x = g(x)$ โดยทั่วไปสามารถจัดสมการ $x = g(x)$ ได้หลายรูป เช่น $x = \dfrac{x^2+3}{2}$ หรือ $x = \sqrt{2x-3}$ และพบว่า $g(x)$ มีหลายฟังก์ชัน ซึ่งจะพิจารณาได้อย่างไรว่าจะเลือกฟังก์ชันไหนในการหาค่ารากของสมการด้วยวิธีทำซ้ำอย่างง่ายที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้า เงื่อนไขที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้า คือ $|g'(x)| < 1$ ดังนั้นจะสามารถเลือกฟังก์ชันใดก็ได้ที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าเสมอ เมื่อ $|g'(x)| < 1$

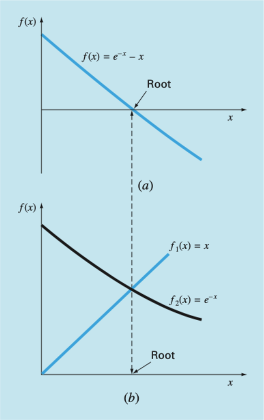
การลู่เข้า และการลู่ออก (Convergence and Divergence)

วิธีเชิงกราฟสองเส้น (Two Curve Graphical Method) เป็นวิธีการเขียนกราฟโดยนำการเขียนกราฟของสองฟังก์ชันมาพิจารณา โดยที่จากการหาค่ารากของสมการด้วยวิธีการทำซ้ำอย่างง่ายสมการที่ใช้คือ $x = g(x)$ ดังนั้นในการพิจารณากราฟจะมี 2 สมการ คือ $y = x$ และ $y = g(x)$ โดยอาศัยหลักการที่กราฟสองเส้นตัดกัน ตรงบริเวณจุดตัดกันของกราฟ คือค่ารากของสมการนั้นเอง

การลู่เข้า และการลู่ออก (Convergence and Divergence)

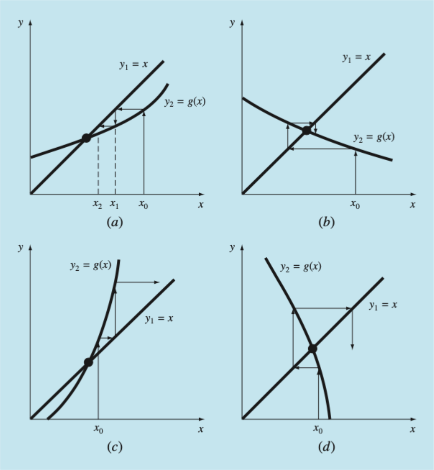
จาก ตัวอย่างที่ 2.7 จะได้ $e^{-x} - x = 0$ นั่นคือ $x = e^{-x}$ กำหนดให้ $y = f_1(x) = x$ และ $y = f_2(x) = e^{-x}$ เมื่อนำทั้ง 2 สมการมาเขียนกราฟ ค่าของสมการคือ ค่า x ที่ทำให้ $y = f_1(x) = f_2(x)$ หรือค่า x ที่จุดตัดกันของกราฟ 2 เส้น ดังรูป

การลู่เข้า และการลู่ออก (Convergence and Divergence)



รูปที่ 7: กราฟแสดงการหาค่ารากของสมการ $e^{-x} - x = 0$ ด้วยวิธีเชิงกราฟ

การลู่เข้า และการลู่ออก (Convergence and Divergence)

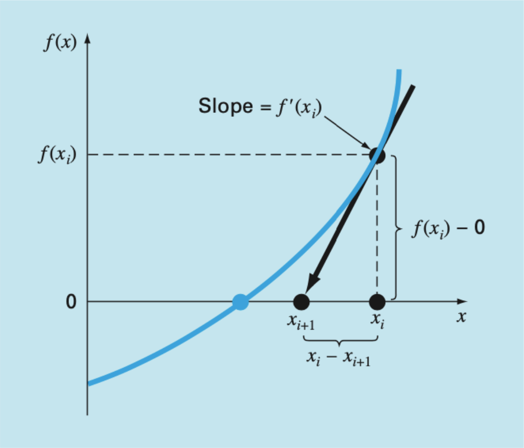


รูปที่ 8: กราฟแสดงลักษณะการลู่เข้าและลู่ออก

Outline

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)



รูปที่ 9: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยอาศัยความชัน

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

จากรูปที่ 9 พิจารณาความชัน ของฟังก์ชันที่จุด $(x_i, f(x_i))$ จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

เพราะฉะนั้น รูปแบบทั่วไปคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.3}$$

ซึ่งสมการ (2.3) เรียกว่า **สูตรนิวตันราฟสัน (Newton-Raphson formula)**

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ขั้นตอนระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน

1. หาฟังก์ชันที่ต้องการหาค่ารากของสมการจาก $f(x) = 0$
2. เลือกค่าเริ่มต้น x_0
3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
4. นำค่า x_{i+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{i+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ตัวอย่างที่ 2.8

จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) ต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 และกำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

i	x_i	ε_t (%)
0	0	100
1	0.500000000	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.0000220
4	0.567143290	$< 10^{-8}$

รูปที่ 10

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ตัวอย่างที่ 2.9

จงหารากของสมการ $e^x \sin(x) - 1 = 0$ โดยระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0.5$ และความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 1%

Outline

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

จากระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน นั่นคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.4}$$

จะเห็นได้ว่า ระเบียบวิธีนิวตันราฟสันต้องมีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งในบางฟังก์ชันมีรูปแบบที่ซับซ้อนและหาอนุพันธ์ได้ลำบาก ทำให้การหาค่ารากของสมการจะยุ่งยากมากขึ้น เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าว ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method) จะแทนค่า $f'(x_i)$ ในสมการ (2.4) โดยการประมาณค่าที่สามารถคำนวณได้ง่ายขึ้น

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

เนื่องจาก อนุพันธ์ของฟังก์ชันนิยามโดย

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

สำหรับ h มีค่าน้อยมากๆ จะได้

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $x = x_i$ และ $h = x_{i-1} - x_i$ จะได้

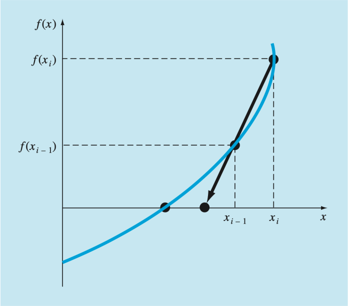
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \tag{2.5}$$

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

แทนค่า (2.5) ใน (2.4) จะได้

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \tag{2.6}$$

ซึ่งสมการ (2.6) เรียกว่า **สูตรเซแคนต์ (Secant formula)**



รูปที่ 11: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ขั้นตอนระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

1. หาฟังก์ชันที่ต้องการหาค่ารากของสมการจาก $f(x) = 0$
2. เลือกค่าเริ่มต้น x_0
3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$
4. นำค่า x_{i+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

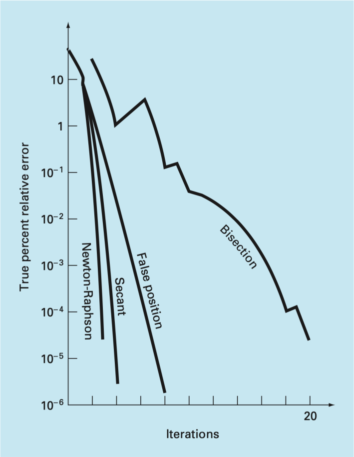
และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{i+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ตัวอย่างที่ 2.10

จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method) กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_{-1} = 0$ และ $x_0 = 1$ ต้องการความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 5%

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)



รูปที่ 12: Comparison of the true percent relative errors ϵ_t for the methods to determine the roots of $f(x) = e^{-x} - x$

Comparison of Convergence of the Secant and False-Position Techniques

ตัวอย่างที่ 2.11

จงหารากของสมการ $f(x) = \ln x$ โดยระเบียบวิธีเซแคนต์ และระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_l = x_{i-1} = 0.5$ และ $x_u = x_i = 5$

Comparison of Convergence of the Secant and False-Position Techniques

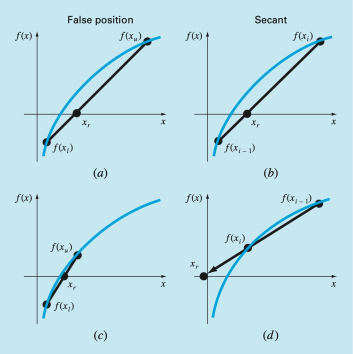
Iteration	x_l	x_u	x_r
1	0.5	5.0	1.8546
2	0.5	1.8546	1.2163
3	0.5	1.2163	1.0585

รูปที่ 13: the false-position method

Iteration	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}
1	0.5	5.0	1.8546
2	5.0	1.8546	−0.10438

รูปที่ 14: the secant method

Comparison of Convergence of the Secant and False-Position Techniques



รูปที่ 15: Comparison of the false-position and the secant methods. The first iterations (a) and (b) for both techniques are identical. However, for the second iterations (c) and (d), the points used differ. As a consequence, the secant method can diverge, as indicated in (d).

Outline

ระเบียบวิธีการหาค่ารากของสมการที่มีหลายค่า (Multiple Roots Method)

ระเบียบวิธีการหาค่ารากของสมการที่มีหลายค่า (Multiple Roots Mrthod)

พิจารณาฟังก์ชัน

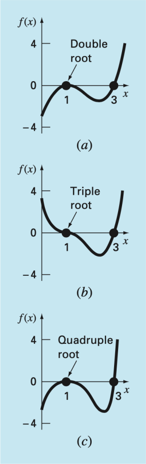
$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1) \tag{2.7}$$

ถ้า $f(x) = 0$ จะได้ว่า สมการ (2.7) มีค่ารากของสมการ 2 ค่า คือ 3 และ 1 โดยค่า 1 จะมีค่าซ้ำกัน 2 ครั้ง (Double Roots)
พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)(x-1) \tag{2.8}$$

สมการ (2.8) มีค่ารากของสมการ 4 ราก และจะมีค่า 1 ซ้ำกันจำนวน 3 ครั้ง (Triple Roots) ซึ่งแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

ระเบียบวิธีการหาค่ารากของสมการที่มีหลายค่า (Multiple Roots Method)



รูปที่ 16: กราฟแสดงการค่ารากของสมการที่มีค่ารากซ้ำกันหลายค่า

ระเบียบวิธีการหาค่ารากของสมการที่มีหลายค่า (Multiple Roots Method)

เนื่องจากการหาค่ารากของสมการด้วยวิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีนิวตันราฟสัน เป็นวิธีที่นิยมใช้มากที่สุด ดังนั้นการหาค่ารากของสมการที่ซ้ำกันหลายครั้ง จะนำวิธีนิวตันราฟสันมาปรับปรุง

ในปี 1978 Ralston and Rabinowitz ได้นิยามฟังก์ชัน $u(x)$ ซึ่งเป็นอัตราส่วนของฟังก์ชันต่ออนุพันธ์ของฟังก์ชัน แสดงได้ดังนี้

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

จะได้ว่า

$$u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

จากนิวตันราฟสัน นั่นคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}$$

ระเบียบวิธีการหาค่ารากของสมการที่มีหลายค่า (Multiple Roots Method)

ดังนั้น

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)} \tag{2.9}$$

ซึ่งสมการ (2.9) เรียกว่า ระเบียบวิธีนิวตันราฟสันปรับปรุง (Modified Newton-Raphson Method)

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสันปรับปรุง (Modified Newton-Raphson Method

ขั้นตอนระเบียบวิธีนิวตันราฟสันปรับปรุง

1. หาฟังก์ชันที่ต้องการหาค่ารากของสมการจาก $f(x) = 0$
2. เลือกค่าเริ่มต้น x_0
3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$
4. นำค่า x_{i+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{i+1} คือค่าราก ของสมการที่ต้องการ

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสันปรับปรุง (Modified Newton-Raphson Method

ตัวอย่างที่ 2.12

จงหารากของสมการ $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ โดยระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน และระเบียบวิธีนิวตันราฟสันปรับปรุง 1) เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ 2) เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 4$

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสันปรับปรุง (Modified Newton-Raphson Method

i	x_i	ε_t (%)
0	0	100
1	0.4285714	57
2	0.6857143	31
3	0.8328654	17
4	0.9133290	8.7
5	0.9557833	4.4
6	0.9776551	2.2

รูปที่ 17: Newton-Raphson Method

i	x_i	ε_t (%)
0	0	100
1	1.105263	11
2	1.003082	0.31
3	1.000002	0.00024

รูปที่ 18: Modified Newton-Raphson Method

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสันปรับปรุง (Modified Newton-Raphson Method

Using an initial guess of $x_0 = 4$ gives the following results:

i	**Standard**	ε_t (%)	**Modified**	ε_t (%)
0	4	33	4	33
1	3.4	13	2.636364	12
2	3.1	3.3	2.820225	6.0
3	3.008696	0.29	2.961728	1.3
4	3.000075	0.0025	2.998479	0.051
5	3.000000	2×10^{-7}	2.999998	7.7×10^{-5}

รูปที่ 19

แบบฝึกหัด 2

1. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5.9$$

(ค่าจริง คือ 0.953503) จงหาค่ารากของสมการ

1.1 โดยวิธีเชิงกราฟ
1.2 โดยใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วง กำหนดค่าเริ่มต้น $x_l = 2.5$ และ $x_u = 3.5$ โดย $\epsilon_s = 1\%$
1.3 โดยใช้วิธีวางผิดที่ กำหนดค่าเริ่มต้น $x_l = 2.5$ และ $x_u = 3.5$ โดย $\epsilon_s = 1\%$
1.4 โดยใช้นิวตันราฟสัน กำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 3.5$ โดย $\epsilon_s = 1\%$
1.5 โดยใช้วิธีเซแคนต์ กำหนดค่าเริ่มต้น $x_{i-1} = 2.5$ และ $x_i = 3.5$ โดย $\epsilon_s = 1\%$

แบบฝึกหัด 2

2. กำหนดฟังก์ชัน

$$\ln x = 0.6$$

จงหาค่ารากของสมการ

2.1 โดยวิธีเชิงกราฟ

2.2 โดยใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วง โดยทำซ้ำ 3 ครั้ง กำหนดค่าเริ่มต้น $x_l = 1$ และ $x_u = 2$ โดย $\epsilon_s = 1\%$

2.3 โดยใช้วิธีวางผิดที่ โดยทำซ้ำ 3 ครั้ง กำหนดค่าเริ่มต้น $x_l = 1$ และ $x_u = 2$ โดย $\epsilon_s = 1\%$

2.4 จงหาว่าวิธีใดจะให้ค่าคลาดเคลื่อนลดลงได้เร็วกว่า

แบบฝึกหัด 2

3. จงหาค่า square root ของ 11 (เฉพาะค่าบวก)
   - 3.1 โดยใช้วิธีวางผิดที่ กำหนดค่าเริ่มต้น $x_l = 3$ และ $x_u = 3.4$ โดย $\epsilon_s = 0.5\%$
   - 3.2 โดยใช้นิวตันราฟสัน กำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 3$ โดย $\epsilon_s = 0.5\%$
   - 3.3 โดยใช้วิธีเซแคนต์ กำหนดค่าเริ่มต้น $x_{i-1} = 3$ และ $x_i = 4$ โดย $\epsilon_s = 0.5\%$

แบบฝึกหัด 2

4. จงหารากของสมการ $f(x) = x^3 - 3x - 2$ จงหาค่ารากของสมการโดยใช้วิธีนิวตันราฟสัน และวิธีนิวตันราฟสันปรับปรุง โดยกำหนดความถูกต้องในทศนิยมตำแหน่งที่ 2 และให้กำหนดค่าเริ่มต้นตามต้องการ

Assignment

จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ ด้วย Python Program โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1.1 วิธีแบ่งครึ่งช่วง กำหนดค่าเริ่มต้น $x_l = 0$ และ $x_u = 1$ โดยต้องการความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 1%

1.2 วิธีวางผิดที่ กำหนดค่าเริ่มต้น $x_l = 0$ และ $x_u = 1$ โดยต้องการความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 1%

1.3 วิธีนิวตันราฟสัน กำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 1$ โดยต้องการความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 1%

1.4 วิธีเซแคนต์ กำหนดค่าเริ่มต้น $x_{i-1} = 0$ และ $x_i = 1$ โดยต้องการความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 1%

1.5 จงเปรียบเทียบผลเฉลยทั้ง 4 วิธี โดยการวาดกราฟ พร้อมทั้งวิเคราะห์หาวิธีที่ดีที่สุด

Table of Contents

Table of Contents

XX

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents