รายวิชา 09131201 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์ (Numerical Methods for Computers) บทที่ 1 ค่าคลาดเคลื่อนและค่าประมาณ (Erorrs and Approximation)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

July 4, 2022

Outline

Table of Contents

Outline

บทนำ

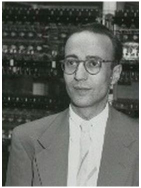
บทนำ

- What is numerical methods?
- Why is it important?

Figure: `https://learning4live.com`

- ในปี คศ. 1947 John von Neumann และ Herman Goldstine ตีพิมพ์ผลงานวิชาการเรื่อง “Numerical Inverting of Matrices of High Order” (Bulletin of the AMS, Nov. 1947) ซึ่งเป็นหนึ่งในงานวิจัยเรื่องแรกๆ ที่ศึกษาข้อผิดพลาดในการปัดเศษ รวมทั้งได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับ “Scientific computing” ซึ่งเป็นแขนงวิชาที่มีความสำคัญอย่างมากในปัจจุบัน

(a) John von Neumann



(b) Herman Goldstine

Figure

Scientific Computing [1] คืองานคำนวณทางวิทยาศาสตร์ที่เป็นศาสตร์บริสุทธิ์ เป็นงานคำนวณที่ซับซ้อนเกินกว่ามนุษย์จะทำได้ เช่น ต้องการหาค่า π ที่มีขนาด 1 ล้านหลัก หรืองานพิสูจน์ August Mobius กล่าวว่าแผนที่ใดๆ ในโลกก็ตาม เราใช้สีระบายแตกต่างกันในแต่ละประเทศ เราสามารถใช้แค่เพียงสี่สีเท่านั้น จะสามารถระบายแผนที่ที่ไม่มีประเทศที่มีชายแดนติดกันต้องใช้สีเดียวกัน ทฤษฎีนี้เป็นที่รู้จักกันในชื่อว่าทฤษฎีสี่สี (four color theorem) นั่นเอง งานเหล่านี้จำเป็นต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ

[1] `https://hpc-thai.com/?p=298`

ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยระเบียบวิธีคำนวณเชิงตัวเลข

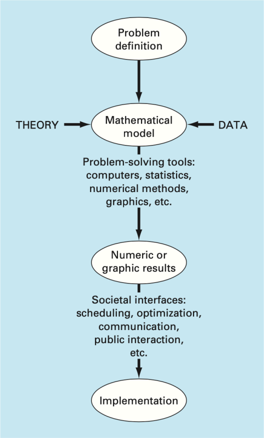


Figure: The engineering problem-solving process [1].

[1] Chapra, Steven C, and Raymond P. Canale. Numerical Methods for Engineers. Seventh Edition. New York: McGraw-Hill 2015.

การตกอย่างอิสระของวัตถุ (Freely falling objects)

Figure: Schematic diagram of the forces acting on a falling parachutist.

The acceleration of a falling object:

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v}$$

where v is velocity (m/s), t is time (s), g is the gravitational constant $(9.81m/s^2)$ and c is *the drag coefficient (สัมประสิทธิ์แรงฉุดของอากาศ)* (kg/s).

Analytical solution:

$$\boxed{v(t) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t})}$$

Outline

ค่าคลาดเคลื่อน (Errors)

ความแม่นยำและความเที่ยงตรง (Accuracy and Precision)

- ความแม่นยำ (Accuracy) คือ สิ่งที่บอกให้ทราบว่าค่าที่คำนวณหรือวัดได้นั้นมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากน้อยเพียงใด
- ความเที่ยงตรง (Precision) คือ ระดับความสม่ำเสมอหรือความคงที่ในการวัดของเครื่องมือวัด เมื่อมีการวัดซ้ำหลายๆ ครั้ง ในสภาพแวดล้อมเดียวกัน

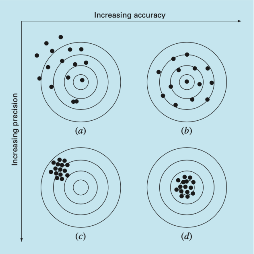


Figure: ความแม่นยำและความเที่ยงตรง [1]

[1] Chapra, Steven C, and Raymond P. Canale. Numerical Methods for Engineers. Seventh Edition. New York: McGraw-Hill, 2015.

ประเภทของค่าคลาดเคลื่อน (Errors)

เราสามารถแบ่งประเภทของค่าคลาดเคลื่อนในการคำนวณเชิงตัวเลขได้ 5 ประเภท คือ

1. ค่าคลาดเคลื่อนจากข้อมูลเบื้องต้น
2. ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (truncation error)***
3. ค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (round-off error)***
4. ค่าคลาดเคลื่อนแพร่ขยาย (propagated error)
5. ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดของมนุษย์

ค่าคลาดเคลื่อนจากข้อมูลเบื้องต้น

ในการวัดทางวิทยาศาสตร์ซึ่งเป็นแหล่งของข้อมูล ที่จะนำมาคำนวณมักจะมีค่าคลาดเคลื่อนอยู่เสมอ สิ่งนี้เป็นเรื่องธรรมชาติและคอมพิวเตอร์ไม่มีส่วน เกี่ยวข้องแต่ผู้คำนวณต้องไม่ลืมที่จะระมัดระวังและระลึกถึงในการแปรผลขั้นสุดท้าย

ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (truncation error)

เกิดจากการตัดทอนจำนวนพจน์ของการคำนวณ(อนุกรมอนันต์) ให้เป็นพจน์จำกัด เช่น

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} \ldots$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} \ldots$

เป็นต้น

ค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (round-off error)

เกี่ยวข้องกับการเก็บค่าตัวเลขในคอมพิวเตอร์ ซึ่งค่าผลลัพธ์ที่ได้มีทศนิยมมากเกินกว่าที่จะเก็บบันทึกไว้ได้ เช่น ค่า

- $\pi = 3.14159265358979323846\ldots$
- $e = 2.71828182845904523536\ldots$

เป็นค่าตัวเลขที่เก็บไม่สามารถแทนค่าด้วยจำนวนที่แท้จริงได้ จึงมีค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเกิดขึ้น

ค่าคลาดเคลื่อนแพร่ขยาย (propagated error)

ในการคำนวณแต่ละขั้นนอกจาก ค่าคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดจากการคำนวณเองแล้ว ค่าคลาดเคลื่อนที่มีอยู่เดิมอาจถูกขยายเพิ่ม มากขึ้นจากการกระทำ บวก ลบ คูณ และหารในคอมพิวเตอร์ บางครั้งค่าคลาดเคลื่อนจะถูกขยาย ต่อเนื่องกันจนกระทั่งผลลัพธ์สุดท้ายผิดพลาดโดนสิ้นเชิง ซึ่งเป็นเรื่องที่ต้องระมัดระวัง

ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดของมนุษย์

ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดของมนุษย์เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากผู้คำนวณเอง เช่น

- การคำนวณผิดพลาด
- การใส่เครื่องหมายผิด
- การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีส่วนผิดผลาดและไม่ได้ตรวจสอบอย่างละเอียด เป็นต้น

ค่าคลาดเคลื่อน

ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข เกิดจากการนำค่าประมาณ (Approximation) มาใช้แทนค่าจริง

โดยที่ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อน (error) ค่าจริง (exact value) และค่าประมาณ (approximate value) สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบสมการต่อไปนี้

$$\text{ค่าจริง} = \text{ค่าประมาณ} + \text{ค่าคลาดเคลื่อน} \quad (1.1)$$

กำหนดให้ E_t แทน ค่าคลาดเคลื่อน จะได้

$$E_t = \text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ} \quad (1.2)$$

ค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute Error : E_{abs})

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ คือ ขนาดของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงกับค่าประมาณ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของค่าสัมบูรณ์ นิยามดังนี้

$$E_{abs} = |\ \text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}\ | \tag{1.3}$$

ค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error : E_{rel})

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ คือ อัตราส่วนของคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงกับค่าประมาณเมื่อเทียบกับค่าจริง นิยามดังนี้

$$E_{rel} = \frac{|\text{ ค่าจริง } - \text{ ค่าประมาณ }|}{|\text{ ค่าจริง }|} \text{ หรือ } E_{rel} = \frac{E_{abs}}{|\text{ ค่าจริง }|} \tag{1.4}$$

หรือ คิดเป็นร้อยละ จะได้

$$\varepsilon_t = \frac{|\text{ ค่าจริง } - \text{ ค่าประมาณ }|}{|\text{ ค่าจริง }|} \times 100\% \tag{1.5}$$

ซึ่งเรียกว่า ร้อยละของค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t)

ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ : ε_a

ค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ : E_a นิยามดังนี้

$$E_a = \frac{|\text{ ค่าประมาณสุดท้าย } - \text{ ค่าประมาณก่อนสุดท้าย }|}{|\text{ ค่าประมาณสุดท้าย }|} \tag{1.6}$$

ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ : ε_a นิยามดังนี้

$$\varepsilon_a = \frac{|\text{ ค่าประมาณสุดท้าย } - \text{ ค่าประมาณก่อนสุดท้าย }|}{|\text{ ค่าประมาณสุดท้าย }|} \times 100\% \tag{1.7}$$

ตัวอย่างที่ 1.1

กำหนดให้ ค่าจริง $= 0.4357$ และ ค่าประมาณ $= 0.4364$
จงหาค่าต่างๆ ต่อไปนี้

1. คลาดเคลื่อน (E)
2. ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (E_{abs})
3. ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (E_{rel})
4. ร้อยละของค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t)

ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้: ε_s

โดยทั่วไปแล้วจะมีการกำหนดขอบเขตของค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในการคำนวณแต่ละครั้ง โดยควบคุมให้ค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ต่ำกว่าค่าที่กำหนด ε_s นั่นคือจะหยุดการคำนวณเมื่อค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ต่ำกว่า ε_s เพราะฉะนั้น $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ดังนั้น ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (ε_s) นิยามโดย

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\% \quad \text{เมื่อ } n \text{ ตำแหน่งที่} \tag{1.8}$$

- $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ หมายความว่า ค่าประมาณที่ได้จะมีค่าร้อยละของความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ n

อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาได้ในช่วงเปิด (a,b) ถ้า x_0 เป็นจุดในช่วงเปิด (a,b) แล้ว อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ณ จุดใดๆ ในช่วงเปิดนี้ นิยามโดย

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f\,'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n \end{aligned} \tag{1.9}$$

โดยที่ $f^{(n)}$ คือ อนุพันธ์ลำดับที่ n ของฟังก์ชัน $f(x)$ และ

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt \tag{1.10}$$

เมื่อ t คือตัวแปรอิสระ สมการ (1.9) เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์** หรือสูตรของเทย์เลอร์ ถ้าตัดเศษเหลือ คือสมการ (1.10) ทิ้งแล้ว สมการ (1.9) คือค่าประมาณฟังก์ชันพหุนามด้วยอนุกรมเทย์เลอร์

อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

กรณีที่ $x_0 = 0$ อนุกรมอนันต์ข้างต้นจะเรียกว่า อนุกรมแมคคลอรีน (Maclaurin series) เช่น

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

ตัวอย่างที่ 1.2

จงประมาณค่า $e^{0.5}$ โดยใช้อนุกรมแมคคลอรีน (Maclaurin series expansion) และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 เมื่อกำหนดค่าจริงของ $e^{0.5} = 1.648721...$ (กำหนดให้ใช้ทศนิยม 5 ตำแหน่ง) โดยที่ อนุกรมแมคคลอรีนของ e^x คือ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Terms	Result	ε_t (%)	ε_a (%)
1	1	39.3	
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.645833333	0.175	1.27
5	1.648437500	0.0172	0.158
6	1.648697917	0.00142	0.0158

Figure: แสดงการหาค่าประมาณของ $e^{0.5}$

แบบฝึกหัด 1

1. จงหาค่าคลาดเคลื่อน (E) ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (E_{abs}) ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (E_{rel}) และร้อยละของค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t) จากข้อต่อไปนี้
   1.1 ค่าจริง $= 10{,}000$ และ ค่าประมาณ $= 9{,}999$
   1.2 ค่าจริง $= \pi$ และ ค่าประมาณ $= 22/7$
   1.3 ค่าจริง $= e$ และ ค่าประมาณ $= 2.718$
   1.4 ค่าจริง $= \sqrt{2}$ และ ค่าประมาณ $= 1.414$

แบบฝึกหัด 1

2. จงประมาณค่า $\cos(\pi/3)$ โดยใช้อนุกรมแมคคลอรีน (Maclaurin series expansion) และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 2 เมื่อกำหนดค่าจริงของ $\cos(\pi/3) = 0.5$ (กำหนดให้ใช้ทศนิยม 5 ตำแหน่ง) โดยที่อนุกรมแมคคลอรีนของ $\cos x$ คือ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

แบบฝึกหัด 1

3. จงประมาณค่า $\sin(\frac{\pi}{2})$ โดยใช้อนุกรมแมคคลอรีน (Maclaurin series expansion) และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 2 เมื่อกำหนดค่าจริงของ $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ (กำหนดให้ใช้ทศนิยม 5 ตำแหน่ง) โดยที่ อนุกรมแมคคลอรีนของ $\sin x$ คือ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents