

บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

- 2.1 บทนำ
- 2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
- 2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
- 2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
- 2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
- 2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
- 2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

บทนำ

การศึกษาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ มักจะพบปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อยคือ การหาราก (Roots of equation) ของสมการในรูปแบบ

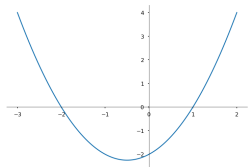
f(x) = 0

พิจารณาฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร $y = f(x)$ การหารากของสมการ หรือคำตอบ (ผลเฉลย) ของสมการ คือค่าของ x ที่ทำให้ $y = f(x) = 0$ เช่น สมการของฟังก์ $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงที่ ดังนั้น รากของสมการนี้คือ

x = (-b ± √(b^2 - 4ac)) / 2a

ตัวอย่างที่ 2.1

จงหารากของสมการ $f(x) = x^2 + x - 2 = 0$



รูปที่ 1: กราฟของสมการ $f(x) = x^2 + x - 2 = 0$

สำหรับระเบียบวิธีการหาค่ารากของสมการ สามารถแบ่งประเภทเป็น 2 ประเภทดังนี้

- ▶ **ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method)**
- ▶ **ระเบียบวิธีแบบเปิด (Open method)**

ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method)

ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method)

ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขตเป็นวิธีที่รู้ค่าคำตอบจะต้องอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งของค่า x จึงทำการกำหนดค่าเริ่มต้นสองค่า คร่อมรากใดรากหนึ่งของสมการ ซึ่งเป็นขอบเขตของช่วงที่จะหารากของสมการ วิธีแบบกำหนดขอบเขต จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้คือ

1. ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2. ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

การคำนวณ 1 ค่าหรือ
หนึ่งของสมการ วิธีแบบ

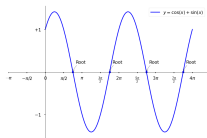
- Iteration Method)
on Method)

- method)
method)
Iteration Method)
on Method)

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

รากของสมการอาจจะมีได้มากกว่าหนึ่งค่า แสดงได้ดังรูป 3



รูปที่ 3: กราฟของฟังก์ชันที่มีรากของสมการหลายราก

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

ตัวอย่างที่ 2.2

จงหารากของสมการต่อไปนี้

$$f(x) = \frac{668.06}{x}(1 - e^{-0.20.146843x}) - 40 \tag{2.1}$$

ในช่วง [4, 20] โดยระเบียบวิธีเชิงกราฟ

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

วิธีทำ แทนค่า x ที่อยู่ช่วง $[4, 20]$ ในสมการที่ (2.1) จะได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 1

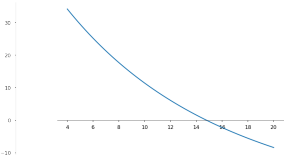
x	$f(x)$
4	34.190
8	17.712
12	6.114
16	-2.230
20	-8.368

ตาราง 1: แสดงการประมาณค่ารากของสมการ

$$f(x) = \frac{668.06}{x}(1 - e^{-0.20 \cdot 146843x}) - 40$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



รูปที่ 4: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการได้เท่ากับ 14.75

จากตารางที่ (2.1) และรูปที่ (4) พบว่า เส้นโค้ง $f(x)$ ตัดแกน x ระหว่าง 12 และ 16 (เครื่องหมายของฟังก์ชันต่างกัน) ดังนั้น รากของสมการมีค่าเท่ากับ 14.75

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

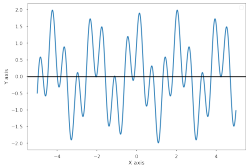
ตัวอย่างที่ 2.3

จงหารากของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[0, 5]$ โดยระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

วิธีทำ จากสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[0, 5]$ สามารถเขียนกราฟได้ดังรูปที่ 5 ซึ่งพบว่า มีรากของสมการหลายรากที่อยู่ในช่วง $[0, 5]$ ถ้าพิจารณาช่วง $[3, 5]$ จะได้รากของสมการซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 6 และพิจารณาช่วง $[4.2, 4.3]$ จะได้รากของสมการซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 7

Navigation icons: back, forward, search, etc.

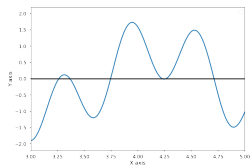
ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



รูปที่ 5: กราฟของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[0, 5]$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

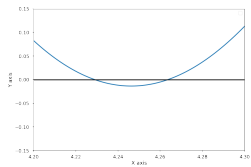
ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



รูปที่ 6: กราฟของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[3, 5]$ (ตัวอย่างที่ 2.3)

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



รูปที่ 7: กราฟของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[3, 5]$ (ตัวอย่างที่ 2.3)

Navigation icons: back, forward, search, etc.

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

- 2.1 บทนำ
- 2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
- 2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
- 2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
- 2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
- 2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
- 2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

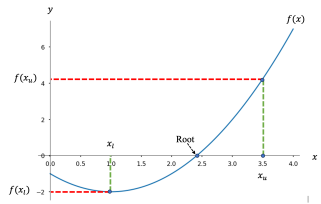
ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

- **วิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)** เป็นวิธีหาค่ารากของสมการทั้งเชิงเส้น และไม่เชิงเส้น ซึ่งวิธีแบ่งครึ่งช่วงนี้เป็นวิธีที่รู้ว่า ค่าตอบจะต้องอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งของค่า x จึงทำการกำหนดค่าเริ่มต้นสองค่า โดยคอมพิวเตอร์หาค่าของสมการ แล้วทำการแบ่งครึ่งช่วงเพื่อหารากของสมการ ซึ่งจะต้องเลือกช่วงที่ค่าฟังก์ชันมีเครื่องหมายตรงข้ามกันเสมอ

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

- กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง x_l ถึง x_u โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$ แล้ว จะมีค่ารากของสมการอย่างน้อยที่สุด 1 ค่า อยู่ระหว่าง x_l ถึง x_u แสดงดังรูปที่ 8

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)



รูปที่ 8: ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง

1. เลือก x_l และ x_u โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$
2. ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

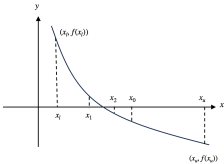
$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

3. ตรวจสอบเงื่อนไข ต่อไปนี้
 - ▶ ถ้า $f(x_l)f(x_r) < 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_l, x_r) ดังนั้น กำหนดให้ $x_u = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
 - ▶ ถ้า $f(x_l)f(x_r) > 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_r, x_u) ดังนั้น กำหนดให้ $x_l = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
 - ▶ ถ้า $f(x_l)f(x_r) = 0$ แล้ว x_r เป็นรากของสมการ และออกจากการคำนวณ

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

กำหนดให้ x_0, x_1, x_2, \dots มีค่าเท่ากับ x_r ในแต่ละรอบของการทำซ้ำ จะเห็นได้ว่า ค่าของ x_r ในแต่ละรอบจะเลื่อนเข้าใกล้รากของสมการ แสดงดังรูปที่ 9



รูปที่ 9: การหาคำตอบของสมการ $f(x)$ ด้วยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ในปัญหาทางปฏิบัติ คำรากของสมการที่ได้จากการคำนวณอาจจะไม่ใช่คำตอบที่แท้จริง (exact) จึงไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r) = 0$ ในกรณีเช่นนี้ เราจำเป็นต้องนำค่าคลาดเคลื่อน (ε) มาเป็นเกณฑ์ตรวจสอบว่า รากของสมการที่ได้เข้าสู่คำตอบที่แท้จริงหรือไม่ โดยพิจารณาร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ : ε_a ซึ่งนิยามดังนี้

$$\varepsilon_a = \frac{|x_r^{\text{New}} - x_r^{\text{Old}}|}{|x_r^{\text{New}}|} \times 100\% \tag{2.2}$$

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ตัวอย่างที่ 2.4

จงหารากของสมการ $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ในช่วง $[0, 1]$ โดยระเบียบวิธี
การแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อน
เปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 0.1%

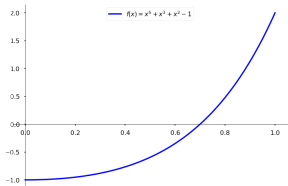
Navigation icons: back, forward, search, etc.

i	x_l	x_u	x_r	ε_a
1	0.0000000000	1.0000000000	0.5000000000	
2	0.5000000000	1.0000000000	0.7500000000	33.3333333333
3	0.5000000000	0.7500000000	0.6250000000	20.0000000000
4	0.6250000000	0.7500000000	0.6875000000	9.0909090909
5	0.6875000000	0.7500000000	0.7187500000	4.3478260870
6	0.6875000000	0.7187500000	0.7031250000	2.2222222222
7	0.6875000000	0.7031250000	0.6953125000	1.1235955056
8	0.6953125000	0.7031250000	0.6992187500	0.5586592179
9	0.6992187500	0.7031250000	0.7011718750	0.2785515320
10	0.6992187500	0.7011718750	0.7001953125	0.1394700139
11	0.6992187500	0.7001953125	0.6997070312	0.0697836778

ตาราง 2: แสดงการคำนวณหารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.4 ด้วยระเบียบวิธี
แบ่งครึ่งช่วง

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)



รูปที่ 10: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 - 1$

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ตัวอย่างที่ 2.5

จงหารากของสมการ $x^2 + 3x - 9 = 0$ ในช่วง $[-1, 7]$ โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) กำหนดร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 5%

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3x - 9$ โดยใช้กระบวนการระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง แสดงค่าของ x_l , x_u และ x_r ได้ดังตารางที่ 3 พร้อมทั้งกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 3x - 9$ แสดงได้ดังรูปที่ 11 ดังนั้นรากของสมการ คือ 1.5625000000

i	x_l	x_u	x_r	ε_a
1	-1.0000000000	7.0000000000	3.0000000000	
2	-1.0000000000	3.0000000000	1.0000000000	200.0000000000
3	1.0000000000	3.0000000000	2.0000000000	50.0000000000
4	1.0000000000	2.0000000000	1.5000000000	33.3333333333
5	1.5000000000	2.0000000000	1.7500000000	14.2857142857
6	1.5000000000	1.7500000000	1.6250000000	7.6923076923
7	1.5000000000	1.6250000000	1.5625000000	4.0000000000

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

- 2.1 บทนำ
- 2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
- 2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
- 2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
- 2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
- 2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
- 2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

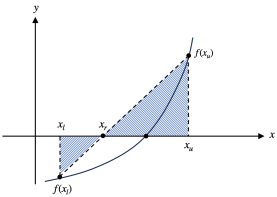
ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method) จะคำนวณรากของสมการจากความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด $(x_l, f(x_l))$ และ $(x_u, f(x_u))$ กับแกน x แทนการแบ่งครึ่งช่วงปิด $[a, b]$ ดังรูปที่ 12

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)



รูปที่ 12: False position method

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

พิจารณาจากรูปที่ 12 และใช้กฎของสามเหลี่ยมคล้าย จะได้

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u} \tag{2.3}$$

ดังนั้น สูตรการหาค่ารากของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ คือ

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \tag{2.4}$$

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

- 1. เลือก x_l และ x_u โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$
- 2. ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

- 3. ตรวจสอบเงื่อนไข ต่อไปนี้
 - 3.1 ถ้า $f(x_l)f(x_r) < 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_l, x_r) ดังนั้น กำหนดให้ $x_u = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
 - 3.2 ถ้า $f(x_l)f(x_r) > 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_r, x_u) ดังนั้น กำหนดให้ $x_l = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
 - 3.3 ถ้า $f(x_l)f(x_r) = 0$ แล้ว x_r เป็นรากของสมการ และออกจากการคำนวณ

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ตัวอย่างที่ 2.6

จงหารากของสมการ $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ในช่วง $[0, 1]$ โดยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method) กำหนดร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 0.1%

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

i	x_l	x_u	x_r	ε_a
1	0.0000000000	1.0000000000	0.3333333333	
2	0.3333333333	1.0000000000	0.5317919075	37.3188405797
3	0.5317919075	1.0000000000	0.6290354316	15.4591489095
4	0.6290354316	1.0000000000	0.6712659174	6.2911708683
5	0.6712659174	1.0000000000	0.6884979332	2.5028420491
6	0.6884979332	1.0000000000	0.6953367364	0.9835239343
7	0.6953367364	1.0000000000	0.6980198915	0.3843952188
8	0.6980198915	1.0000000000	0.6990678088	0.1499020904
9	0.6990678088	1.0000000000	0.6994763428	0.0584057023

ตาราง 4: แสดงการคำนวณหารากสมการในตัวอย่างที่ 2.6 ด้วยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ตัวอย่างที่ 2.7

จงหาคำของสมการ $x^2 + 3x - 9 = 0$ ในช่วง $[-1, 5]$ โดยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ กำหนดค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 5%

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3x - 9$ โดยใช้กระบวนการระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ แสดงค่าของ x_l x_u และ x_r ได้ดังตารางที่ 5 ดังนั้นรากของสมการ คือ 1.8376686475

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

i	x_l	x_u	x_r	ε_a
1	-1.0000000000	5.0000000000	0.5714285714	
2	0.5714285714	5.0000000000	1.3833333333	58.6919104991
3	1.3833333333	5.0000000000	1.6962699822	18.4485165794
4	1.6962699822	5.0000000000	1.8028943030	5.9140638789
5	1.8028943030	5.0000000000	1.8376686475	1.8923076540

ตาราง 5: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.7 ด้วยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ข้อสังเกต 2.1

จากตัวอย่าง 2.5 และ ตัวอย่าง 2.7 พบว่า ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ลูเข้าหารากของสมการได้เร็วกว่าระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง เมื่อเทียบจำนวนรอบของการทำซ้ำ โดยที่ค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต่อน้อยกว่า 5% ($\varepsilon_a < 5\%$)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ถึงแม้ว่าระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ดูเหมือนจะเป็นวิธีแบบกำหนดขอบเขตที่
ลู่เข้าหาคำรากของสมการได้รวดเร็ว แต่ก็บางกรณีที่วิธีนี้ก็ทำงานได้ไม่ดี ซึ่งมี
บางกรณีที่ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วงให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.8

จงหาคำรากของสมการ $f(x) = x^{10} - 1$ ในช่วง $[0, 1.3]$ โดยระเบียบวิธีการ
แบ่งครึ่งช่วง และระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

- ▶ กำหนดให้ $f(x) = x^{10} - 1$ โดยใช้ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง จะได้
ผลลัพธ์ดังตารางที่ 6 และระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ จะได้ผลลัพธ์ดัง
ตารางที่ 7
- ▶ จากตารางที่ 6 พบว่า เมื่อทำซ้ำรอบที่ 5 ค่า ϵ_a มีค่าเท่ากับ 0.468750
% ในขณะที่ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ เมื่อทำซ้ำรอบที่ 5 ค่า ϵ_a มีค่า
เท่ากับ 52.741685 ซึ่งแสดงดังตารางที่ 7
- ▶ ดังนั้นจะเห็นได้ว่า ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วงลู่เข้าหาคำรากของสมการ
ได้เร็วกว่าระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

i	x_l	x_u	x_r	ε_a	ε_t
0	0.000000	1.300000	0.650000	100.000000	35.000000
1	0.650000	1.300000	0.975000	33.333333	2.500000
2	0.975000	1.300000	1.137500	14.285714	13.750000
3	0.975000	1.137500	1.056250	7.692308	5.625000
4	0.975000	1.056250	1.015625	4.000000	1.562500
5	0.975000	1.015625	0.995313	2.040816	0.468750

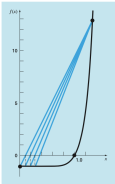
ตาราง 6: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.8 ด้วยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

i	x_l	x_u	x_r	ε_a	ε_t
0	0.000000	1.300000	0.094300	100.000000	90.570040
1	0.094300	1.300000	0.181759	48.118299	81.824113
2	0.181759	1.300000	0.262874	30.857040	73.712599
3	0.262874	1.300000	0.338105	22.250800	66.189490
4	0.338105	1.300000	0.407878	17.106298	59.212208
5	0.407878	1.300000	0.472583	13.691820	52.741685

ตาราง 7: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.8 ด้วยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)



รูปที่ 13: แสดงการเข้าสู่ค่ารากของการของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method) ของตัวอย่างที่ 2.8

Navigation icons: back, forward, search, etc.

แบบฝึกหัด 2.1

- จงหาคำรากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนดทศนิยม 3 ตำแหน่ง
 - $x^2 - 4x + 9 = 0$
 - $x^3 + x^2 - 1 = 0$
 - $5x \log_{10} x - 6 = 0$
 - $x^2 + x - \cos x = 0$
- จงหาคำรากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีวางผิดที่ เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนดทศนิยม 3 ตำแหน่ง
 - $x^3 + x^2 + x + 7 = 0$
 - $x^3 - x - 4 = 0$
 - $x = 3x^{-x}$
 - $x \tan x + 1 = 0$
- จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาคำรากของสมการ
- จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาคำรากของสมการ

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

กำหนดให้ x_0 เป็นค่ารากโดยประมาณของสมการ 2.5 แล้วแทนค่า x_0 ในสมการ 2.5 จะได้การประมาณค่าครั้งที่ 1 ดังนี้

$$x_1 = g(x_0)$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการข้างต้น จะได้

$$x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2), \dots, x_{i+1} = g(x_i)$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots$

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง คือ

$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{2.6}$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots$
และค่าคลาดเคลื่อน จะพิจารณาจาก

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

โดยที่ $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ขั้นตอนระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง

- 1. แปลงสมการ $f(x) = 0$ ให้อยู่ในรูป $x = g(x)$
- 2. เลือกค่าเริ่มต้น x_0
- 3. คำนวณค่า $x_{i+1} = g(x_i)$
- 4. นำค่า x_{i+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{i+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ตัวอย่างที่ 2.9

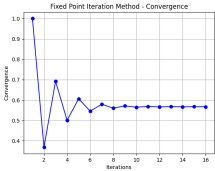
จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงอย่างง่าย (Simple Fixed-point Iteration Method) ต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 และกำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$ (ค่าจริง $= 0.56714329$)

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

i	x_i	ε_a	ε_t
0	0	-	100.00000000
1	1.00000000	100.00000000	76.32228356
2	0.36787944	171.82818285	35.13465686
3	0.69220063	46.85363946	22.05039533
4	0.50047350	38.30914659	11.75536952
5	0.60624354	17.44678968	6.89424450
⋮	⋮	⋮	⋮
12	0.56641473	0.35556841	0.12846081
13	0.56755664	0.20119652	0.07288234
14	0.56690891	0.11425564	0.04132608
15	0.56727623	0.06475157	0.02344067
16	0.56706790	0.03673877	0.01329322

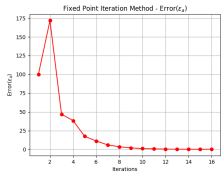
ตาราง 8: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)



รูปที่ 14: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9

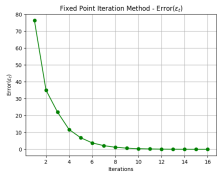
ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)



รูปที่ 15: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ϵ_n) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วย
ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)



รูปที่ 16: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ϵ_n) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วย
ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ข้อสังเกต 2.2

- ▶ ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงเป็นการจัดสมการให้อยู่ในรูป $x = g(x)$ โดยทั่วไปสามารถจัดรูปสมการ $x = g(x)$ ได้หลายรูปแบบ เช่น กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 4x + 6$ จัดรูปจะได้ $x = \frac{x^2 + 6}{4}$ หรือ $x = \sqrt{4x - 6}$ จะเห็นได้ว่า $g(x)$ มีหลายฟังก์ชัน
- ▶ ซึ่งจะทราบได้อย่างไรว่าจะเลือกฟังก์ชันใดในการหาคำรากของสมการ ด้วยวิธีทำซ้ำอย่างง่ายที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้า ดังนั้น จำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าสู่รากของสมการ โดยเงื่อนไขดังกล่าวคือ $|g'(x)| < 1$
- ▶ ดังนั้น จะสามารถเลือกฟังก์ชันใดก็ได้ที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าเสมอ เมื่อ $|g'(x)| < 1$

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ตัวอย่างที่ 2.10

จากตัวอย่างที่ 2.9 นั่นคือ $g(x) = e^{-x}$ จะได้

$$g'(x) = -e^{-x}$$

สำหรับ $x \in [0, 1]$ จะได้ $|g'(x)| < 1$
ดังนั้น $g(x) = e^{-x}$ สำหรับ $x \in [0, 1]$ ให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าเสมอ

วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)

สำหรับการหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีเชิงกราฟสองเส้นนี้ อันดับแรกจะต้องแปลง สมการดังกล่าวให้อยู่ในรูป

$$f_1(x) = f_2(x)$$

ดังนั้นในการพิจารณากราฟจะมี 2 สมการ คือ

$$y_1 = f_1(x) \text{ และ } y_2 = f_2(x)$$

โดยการสร้างกราฟของฟังก์ชัน y_1 และ y_2 ซึ่งอาศัยหลักการที่กราฟของฟังก์ชันสองฟังก์ชันตัดกัน ตรงบริเวณจุดตัดกันของกราฟ คือ คำรากของสมการ ซึ่งเราจะเรียกวิธีนี้ว่า **วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)**

วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)

ตัวอย่างที่ 2.11

จงหารากของสมการ $e^{-x} - x = 0$ โดยใช้วิธีเชิงกราฟสองเส้น

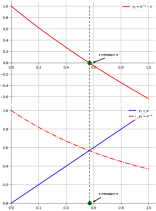
วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
0	0	1.00000000
0.2	0.2	0.81873075
0.4	0.4	0.67032005
0.6	0.6	0.54881164
0.8	0.8	0.44932896
1	1	0.36787944

ตาราง 9: แสดงค่าจากการคำนวณด้วยวิธีเชิงกราฟสองเส้นของตัวอย่างที่ 2.9

Navigation icons: back, forward, search, etc.

วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)



รูปที่ 17: กราฟแสดงการหาค่ารากของสมการ $e^{-x} - x = 0$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Outline

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

- 2.1 บทนำ
- 2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
- 2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
- 2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
- 2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
- 2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
- 2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

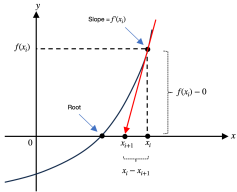
ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้น (Newton Raphson Method)

ระเบียบวิธีนี้จะกำหนดค่าเริ่มต้นเพียงค่าเดียวเพื่อที่จะหาคำรากของสมการ นั่นคือ ถ้า x_i เป็นค่าเริ่มต้นของการประมาณค่ารากของสมการ แล้วสมการเส้นสัมผัสที่จุด $(x_i, f(x_i))$ จะตัดแกน x ที่จุด x_{i+1} โดยจุดดังกล่าวจะเป็นการประมาณค่ารากของสมการที่ถูกปรับปรุงให้ดีขึ้นจากจุดเดิม ดังรูปที่ 18

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้น (Newton Raphson Method)



รูปที่ 18: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยอาศัยความชัน

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

จากรูปที่ 18 พิจารณาความชัน ของฟังก์ชันที่จุด $(x_i, f(x_i))$ จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

เพราะฉะนั้น รูปแบบทั่วไปคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.7}$$

ซึ่งสมการ (2.7) เรียกว่า **สูตรนิวตันราฟสัน (Newton-Raphson formula)**

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ขั้นตอนระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน

- 1. หาฟังก์ชันที่ต้องการหาค่ารากของสมการจาก $f(x) = 0$
- 2. เลือกค่าเริ่มต้น x_0
- 3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
- 4. นำค่า x_{i+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{i+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ตัวอย่างที่ 2.12

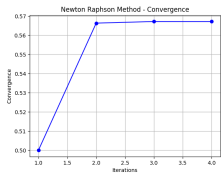
จงหาค่าของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) ต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 และกำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$ (ค่าจริง = 0.56714329)

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

i	x_i	ε_a	ε_t
0	0	-	100.00000000
1	0.50000000	100.00000000	11.83885822
2	0.56631100	11.70929098	0.14675071
3	0.56714317	0.14672871	0.00002203
4	0.56714329	0.00002211	0.00000007

ตาราง 10: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.12

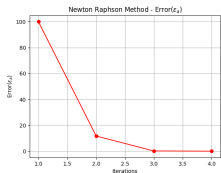
ระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้น (Newton Raphson Method)



รูปที่ 19: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้นของตัวอย่างที่ 2.12

Navigation icons: back, forward, search, etc.

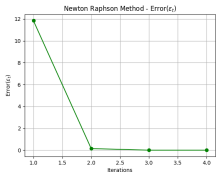
ระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้น (Newton Raphson Method)



รูปที่ 20: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ϵ_n) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้นของตัวอย่างที่ 2.12

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้น (Newton Raphson Method)



รูปที่ 21: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ϵ_t) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วย
ระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้นของตัวอย่างที่ 2.12

ระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้น (Newton Raphson Method)

ตัวอย่างที่ 2.13

จงหารากของสมการ $e^x \sin(x) - 1 = 0$ โดยระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้น
(Newton Raphson Method) กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0.5$ และ
ต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในด้านที่ 3

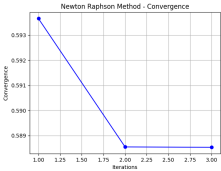
ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

i	x_i	ε_a
1	0.59366571	15.77751665
2	0.58854847	0.86946781
3	0.58853274	0.00267138

ตาราง 11: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.13

Navigation icons: back, forward, search, etc.

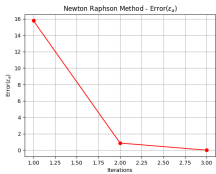
ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)



รูปที่ 22: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.13

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้น (Newton Raphson Method)



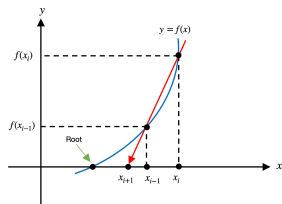
รูปที่ 23: แสดงค่าลดเคลื่อน (ε_n) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วย
ระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้นของตัวอย่างที่ 2.13

แบบฝึกหัด 2.2

- จงหาคำรากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีจุดตรึงอย่างง่าย เมื่อ
ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนด
ทศนิยม 4 ตำแหน่ง
 - $e^x = 3x$
 - $x = \frac{1}{(x+1)^2}$
 - $1+x^2 = x^3$
 - $x - \sin x = 0.5$
- จงหาคำรากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีนิวตันกราฟเส้น เมื่อ
ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนด
ทศนิยม 3 ตำแหน่ง
 - $x^{\sin 2} - 4 = 0$
 - $e^x = 4x$
 - $x^3 - 5x + 3 = 0$
 - $xe^x = \cos x$
- จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาคำราก
ของสมการ
- จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาคำราก
ของสมการ

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)



รูปที่ 24: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยระเบียบวิธีเซแคนต์

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ขั้นตอนระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

- 1. หาฟังก์ชันที่ต้องการหาค่ารากของสมการจาก $f(x) = 0$
- 2. เลือกค่าเริ่มต้น x_0
- 3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$
- 4. นำค่า x_{i+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{i+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ตัวอย่างที่ 2.14

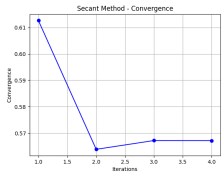
จงหาค่าของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method) กำหนดให้ $\epsilon_s = 0.05\%$ และค่าเริ่มต้น $x_{-1} = 0$ และ $x_0 = 1$ (ค่าจริง = 0.56714329)

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

i	x_i	ϵ_a	ϵ_t
1	0.61269984	63.21205588	8.03263436
2	0.56383839	8.66586039	0.58272766
3	0.56717036	0.58747239	0.00477277
4	0.56714331	0.00476984	0.00000293

ตาราง 12: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

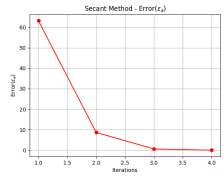
ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)



รูปที่ 25: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

Navigation icons: back, forward, search, etc.

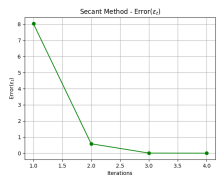
ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)



รูปที่ 26: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ϵ_a) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

Navigation icons: back, forward, search, etc.

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)



รูปที่ 27: แสดงค่าลดเคลื่อน (ϵ_i) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วย
ระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

Comparison of Convergence of the Secant and
False-Position Techniques

ตัวอย่างที่ 2.15

จงหารากของสมการ $f(x) = \ln x$ โดยระเบียบวิธีเซแคนต์ และระเบียบวิธี
วางตัวผิดที่ กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_l = x_{i-1} = 0.5$ และ $x_u = x_i = 5$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = \ln x = 0$ $x_l = x_{i-1} = 0.5$ และ $x_u = x_i = 5$

โดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์ และระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ สามารถหาคำรากของ
สมการได้ดังตารางที่ 13 และ 14 จะเห็นได้ว่า เมื่อใช้ระเบียบวิธีวางตัวผิดที่
ในการประมาณคำรากของสมการจะเข้าสู่ค่าตอบ ส่วนการคำนวณโดยใช้
ระเบียบวิธีเซแคนต์จะลู่ออกจากคำตอบ



รูปที่ 28: การเปรียบเทียบร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t) ของทุกระเบียบวิธี เพื่อหาคำรากของ $f(x) = e^{-x} - x$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาคำรากของสมการ $x^{2.2} = 69$ ที่อยู่ในช่วง $[5, 8]$ โดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์ เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05%
2. จงหาคำรากของฟังก์ชัน $f(x) = \cos x - x$ โดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์ กำหนดค่าเริ่มต้น $x_{-1} = 0.5$ และ $x_0 = \pi/4$ เมื่อค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต้องน้อยกว่า 0.00000004
3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาคำรากของสมการ
4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาคำรากของสมการ

เฉลยแบบฝึกหัด

1. 6.85236.
2. 0.73908518

Navigation icons: back, forward, search, etc.