

รายวิชา 09131201  
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านการคอมพิวเตอร์  
(Numerical Methods for Computers)  
บทที่ 6 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข  
(Numerical Differentiation)

รศ.ดร.วงศ์วิศรุต เชื่องสตุ่ง และ ดร.รัฐพรหม พรหมคำ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์  
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์  
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

# Table of Contents

## การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

- 1.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)
- 1.2 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)
- 1.3 สูตรการหาค่าอนุพันธ์ที่มีความแม่นยำสูง (High-accuracy Differentiation Formulas)

# การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

**การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)**

# การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation) คือ การหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยการนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

# การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข

## ทฤษฎีบท 1.1

กำหนดให้  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[a, b]$  และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน  $f(x)$  สามารถหาได้ในช่วงเปิด  $(a, b)$  ถ้า  $x_0$  เป็นจุดในช่วงเปิด  $(a, b)$  แล้ว อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน  $f(x)$  รอบจุด  $x_0$  นิยามโดย

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n \quad (1.1)$$

เมื่อ  $R_n(x)$  คือเศษเหลือ ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$R_n(x) = f^{(n)}(\xi) \frac{(x - x_0)^n}{n!}, \quad x_0 < \xi < x$$

โดยที่  $f^{(n)}$  คือ อนุพันธ์ลำดับที่  $n$  ของฟังก์ชัน  $f(x)$

# ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

กำหนดให้  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[a, b]$  และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน  $f(x)$  สามารถหาได้ในช่วงเปิด  $(a, b)$  สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \quad (1.2)$$

เรียกสมการ (1.2) ว่า การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 0

# ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาสองพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (1.3)$$

เรียกสมการ (1.3) ว่า การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ  
1

# ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาสามพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \quad (1.4)$$

เรียกสมการ (1.4) ว่า การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 2



# ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ  $n$  นิยามโดย

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \quad (1.5) \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} + R_n$$

เมื่อ  $R_n$  คือเศษเหลือสำหรับค่าประมาณ นิยามโดย

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_{i+1} - x_i)^{n+1} \quad (1.6)$$

โดยที่  $\xi \in (x_i, x_{i+1})$

# การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

# การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative) คือ การหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข และการนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยแบ่งออกเป็น 3 วิธีดังนี้

1. การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า  
(Forward Difference Approximation of the First Derivative)
2. การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลัง  
(Backward Difference Approximation of the First Derivative)
3. การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง  
(Centered Difference Approximation of the First Derivative)

# การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ (1.5) นั่นคือ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} \quad (1.7)$$

จากนิยามของ  $R_n$  (1.6) และค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายสำหรับค่าประมาณของสมการ (1.7) จะได้

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i) \quad (1.8)$$

โดยที่  $\xi \in (x_i, x_{i+1})$  หรือสามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = O(x_{i+1} - x_i) \quad (1.9)$$

# การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ (1.7) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \quad (1.10)$$

เมื่อ

- ▶  $\Delta f_i$  คือ ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้าอันดับหนึ่ง (First Forward Difference)
- ▶  $h = x_{i+1} - x_i$
- ▶  $O(h)$  คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายตามอันดับของ  $h$

# การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the First Derivative)

จากอนุกรมเทย์เลอร์ สามารถพิจารณาช่วงกว้าง  $h$  ที่เป็นค่าย้อนหลัง คือ  $x_i$  และ  $x_{i-1}$  ได้ดัง  
สมการ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} - \dots$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \quad (1.11)$$

ดังนั้น

$$f'(x_i) = \frac{\nabla f_i}{h} + O(h) \quad (1.12)$$

เมื่อ

- ▶  $\nabla f_i$  คือ ผลต่างย้อนหลังอันดับหนึ่ง (First Backward Difference)
- ▶  $h = x_i - x_{i-1}$
- ▶  $O(h)$  คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายตามอันดับของ  $h$

# การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

จาก

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \dots$$

และ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} - \dots$$

จะได้

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)(h) + \frac{2f^{(3)}(x_i)(h)^2}{3!} + \dots$$

# การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

ดังนั้น

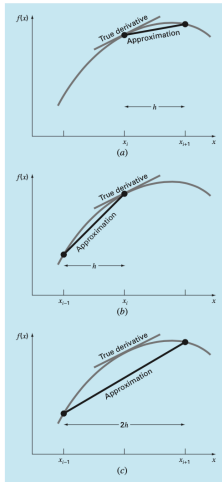
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)(h)^2}{6} - \dots$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - O(h^2) \quad (1.13)$$

เราจะเรียกสมการ (1.13) ว่า **ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง (centered difference)**





รูปที่ 1: Graphical depiction of (a) forward, (b) backward, and (c) centered finite-difference approximations of the first derivative.

## ตัวอย่างที่ 1.1

กำหนดให้  $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$  จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่  $x = 0.5$  (ค่าจริง  $f'(0.5) = -0.9125$ ) เมื่อ  $h = 0.5$  และ  $h = 0.25$  โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสี่บเนื่องข้างหน้า ( $O(h)$ )
2. วิธีผลต่างสี่บเนื่องย้อนหลัง ( $O(h)$ )
3. วิธีผลต่างสี่บเนื่องตรงกลาง ( $O(h^2)$ )

# การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

## การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของอนุกรมเทย์เลอร์สามารถใช้ค่าตัวเลขที่ได้ มาหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงต่อไป และสามารถเขียนอนุกรมเทย์เลอร์แบบไปข้างหน้าสำหรับ  $f(x_{i+2})$  ในพจน์ของ  $f(x_i)$  จะได้

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)(2h)^2}{2!} + \dots \quad (1.14)$$

จากสมการ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \dots$$

ทำการคูณด้วย 2 แล้วนำไปลบกับสมการ (1.14) จะได้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \dots$$

## การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

ดังนั้น

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (1.15)$$

เราจะเรียกว่า สมการ (1.15) ว่า ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้าอันดับสอง  
(**Second Forward Finite Divided Difference**)

## การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

ในทำนองเดียวกัน ผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลังอันดับสอง (Second Backward Finite Divided Difference) คือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2} + O(h) \quad (1.16)$$

และ ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางอันดับสอง (Second centered finite divided difference)

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (1.17)$$

## ตัวอย่างที่ 1.2

กำหนดให้  $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$  จงหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่  $x = 0.5$  เมื่อ  $h = 0.5$  และ  $h = 0.25$  โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า ( $O(h)$ )
2. วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลัง ( $O(h)$ )
3. วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง ( $O(h^2)$ )

# สูตรการหาค่าอนุพันธ์ที่มีความแม่นยำสูง (High-accuracy Differentiation Formulas)



จากอนุกรมเทย์เลอร์

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x_i)(h)^3}{3!} + \dots \quad (1.18)$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2) \quad (1.19)$$

จากผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้าอันดับสอง นั่นคือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (1.20)$$

แทนสมการ (1.20) ในสมการ (1.18) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2) \quad (1.21)$$

ดังนั้น สูตรการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า  
สำหรับความแม่นยำ  $O(h^2)$  คือ

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2) \quad (1.22)$$

ในทำนองเดียวกัน สูตรการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่บเนื่องย้อนหลังสำหรับความแม่นยำ  $O(h^2)$  คือ

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{2h} + O(h^2) \quad (1.23)$$

และ สูตรการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่บเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ  $O(h^4)$  คือ

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h} + O(h^4) \quad (1.24)$$

First Derivative

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Error

$$O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

$$O(h^2)$$

Second Derivative

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$$O(h)$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

$$O(h^2)$$

Third Derivative

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

$$O(h)$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$$

$$O(h^2)$$

Fourth Derivative

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

$$O(h)$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$$

$$O(h^2)$$

รูปที่ 2: Forward finite-divided-difference formulas

First Derivative

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}$$

Error

$$O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1})) + f(x_{i-2}))}{2h}$$

$$O(h^2)$$

Second Derivative

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1})) + f(x_{i-2}))}{h^2}$$

$$O(h)$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1})) + 4f(x_{i-2})) - f(x_{i-3}))}{h^2}$$

$$O(h^2)$$

Third Derivative

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1})) + 3f(x_{i-2})) - f(x_{i-3}))}{h^3}$$

$$O(h)$$

$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1})) + 24f(x_{i-2})) - 14f(x_{i-3})) + 3f(x_{i-4}))}{2h^3}$$

$$O(h^2)$$

Fourth Derivative

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1})) + 6f(x_{i-2})) - 4f(x_{i-3})) + f(x_{i-4}))}{h^4}$$

$$O(h)$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1})) + 26f(x_{i-2})) - 24f(x_{i-3})) + 11f(x_{i-4})) - 2f(x_{i-5}))}{h^4}$$

$$O(h^2)$$

รูปที่ 3: Backward finite-divided- difference formulas

First Derivative

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$

Error

$$O(h^2)$$

$$O(h^4)$$

Second Derivative

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2}$$

$$O(h^2)$$

$$O(h^4)$$

Third Derivative

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{8h^3}$$

$$O(h^2)$$

$$O(h^4)$$

Fourth Derivative

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^4}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{6h^4}$$

$$O(h^2)$$

$$O(h^4)$$

## รูปที่ 4: Centered finite-divided- difference formulas

### ตัวอย่างที่ 1.3

กำหนดให้  $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$  จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่  $x = 0.5$  เมื่อ  $h = 0.25$  โดยใช้วิธี high-accuracy divided-difference ต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสี่บเนื่องข้างหน้า ( $O(h^2)$ )
2. โดยวิธีผลต่างสี่บเนื่องย้อนหลัง ( $O(h^2)$ )
3. โดยวิธีผลต่างสี่บเนื่องตรงกลาง ( $O(h^4)$ )

# แบบฝึกหัด

- กำหนดให้  $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$  จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่  $x = 2$  เมื่อ  $h = 0.2$  โดยใช้วิธีต่อไปนี้
  - วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้าสำหรับความแม่นยำ  $O(h)$
  - วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลังสำหรับความแม่นยำ  $O(h)$
  - วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางสำหรับความแม่นยำ  $O(h^2)$
- กำหนดให้  $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$  จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่  $x = 2$  เมื่อ  $h = 0.2$  โดยใช้วิธีต่อไปนี้
  - วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้าสำหรับความแม่นยำ  $O(h^2)$
  - วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลังสำหรับความแม่นยำ  $O(h^2)$
  - วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางสำหรับความแม่นยำ  $O(h^4)$
- กำหนดให้  $f(x) = x^2 \cos x$  จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่  $x = 0.4$  เมื่อ  $h = 0.1$  โดยใช้วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางสำหรับความแม่นยำ  $O(h^4)$
- กำหนดให้  $f(x) = e^x + x$  จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่  $x = 2$  เมื่อ  $h = 0.2$  โดยใช้วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางสำหรับความแม่นยำ  $O(h^4)$
- จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1, 2, 3 และ 4 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข



# เฉลยแบบฝึกหัด

1. 1.1 312.80000000000004,  $\varepsilon = 10.53\%$   
1.2 255.19999999999996,  $\varepsilon = 9.82\%$   
1.3 284.00000000000002,  $\varepsilon = 0.35\%$
2. 2.1 281.00000000000009,  $\varepsilon = 0.7067\%$   
2.2 281.0,  $\varepsilon = 0.7067\%$   
2.3 283.00000000000003,  $\varepsilon = 1.0043 \times 10^{-13}\%$
3. 0.67450391
4. 8.38866013