รายวิชา 09131201
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์
(Numerical Methods for Computers)
บทที่ 6 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข
(Numerical Differentiation)

รศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง และ ดร.รัฐพรหม พรหมคำ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

Table of Contents

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation) คือ การหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยการนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข

ทฤษฎีบท 1.1

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาได้ในช่วงเปิด (a, b) ถ้า x_0 เป็นจุดในช่วงเปิด (a, b) แล้ว อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ รอบจุด x_0 นิยามโดย

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n \quad (1.1)$$

เมื่อ $R_n(x)$ คือเศษเหลือ ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$R_n(x) = f^n(\xi)\frac{(x - x_0)^n}{n!}, \quad x_0 < \xi < x$$

โดยที่ $f^{(n)}$ คือ อนุพันธ์ลำดับที่ n ของฟังก์ชัน $f(x)$

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาได้ในช่วงเปิด (a, b) สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจาณาพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \quad (1.2)$$

เรียกสมการ (1.2) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 0**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาสองพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{1.3}$$

เรียกสมการ (1.3) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 1**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาสามพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \tag{1.4}$$

เรียกสมการ (1.4) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 2**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ** n นิยามโดย

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) = & f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} + R_n \end{aligned} \tag{1.5}$$

เมื่อ R_n คือเศษเหลือสำหรับค่าประมาณ นิยามโดย

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1} \tag{1.6}$$

โดยที่ $\xi \in (x_i, x_{i+1})$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative) คือ การหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข และการนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยแบ่งออกเป็น 3 วิธีดังนี้

1. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)**
2. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the First Derivative)**
3. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)**

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ (1.5) นั่นคือ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} \tag{1.7}$$

จากนิยามของ R_n (1.6) และค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายสำหรับค่าประมาณของสมการ (1.7) จะได้

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i) \tag{1.8}$$

โดยที่ $\xi \in (x_i, x_{i+1})$ หรือสามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = O(x_{i+1} - x_i) \tag{1.9}$$

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ (1.7) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \tag{1.10}$$

เมื่อ

- Δf_i คือ ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับหนึ่ง (First Forward Difference)
- $h = x_{i+1} - x_i$
- $O(h)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายตามอันดับของ h

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the First Derivative)

จากอนุกรมเทย์เลอร์ สามารถพิจารณาช่วงกว้าง h ที่เป็นค่าย้อนหลัง คือ x_i และ x_{i-1} ได้ดังสมการ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} - \cdots$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \tag{1.11}$$

ดังนั้น

$$f'(x_i) = \frac{\nabla f_i}{h} + O(h) \tag{1.12}$$

เมื่อ

- ∇f_i คือ ผลต่างย้อนหลังอันดับหนึ่ง (First Backward Difference)
- $h = x_i - x_{i-1}$
- $O(h)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายตามอันดับของ h

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

จาก

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \cdots$$

และ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} - \cdots$$

จะได้

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)(h) + \frac{2f^{(3)}(x_i)(h)^2}{3!} + \cdots$$

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

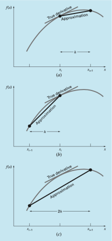
ดังนั้น

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)(h)^2}{6} - \cdots$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2) \qquad (1.13)$$

เราจะเรียกสมการ (1.13) ว่า **ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (centered difference)**



รูปที่ 1: Graphical depiction of (a) forward, (b) backward, and (c) centered finite-divided-difference approximations of the first derivative.

ตัวอย่างที่ 1.1

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ (ค่าจริง $f'(0.5) = -0.9125$) เมื่อ $h = 0.5$ และ $h = 0.25$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า ($O(h)$)
2. วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง ($O(h)$)
3. วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง ($O(h^2)$)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของอนุกรมเทย์เลอร์สามารถใช้ค่าตัวเลขที่ได้ มาหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงต่อไป และสามารถเขียนอนุกรมเทย์เลอร์แบบไปข้างหน้าสำหรับ $f(x_{i+2})$ ในพจน์ของ $f(x_i)$ จะได้

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)(2h)^2}{2!} + \cdots \qquad (1.14)$$

จากสมการ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \cdots$$

ทำการคูณด้วย 2 แล้วนำไปลบกับสมการ (1.14) จะได้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \cdots$$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

ดังนั้น

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \qquad (1.15)$$

เราจะเรียกว่า สมการ (1.15) ว่า **ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับสอง (Second Forward Finite Divided Difference)**

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

ในทำนองเดียวกัน **ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังอันดับสอง (Second Backward Finite Divided Difference)** คือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h) \qquad (1.16)$$

และ **ผลต่างสืบเนื่องตรงกลางอันดับสอง (Second centered finite divided difference)**

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \qquad (1.17)$$

ตัวอย่างที่ 1.2

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ เมื่อ $h = 0.5$ และ $h = 0.25$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า $(O(h))$
2. วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง $(O(h))$
3. วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง $(O(h^2))$

สูตรการหาค่าอนุพันธ์ที่มีความแม่นยำสูง (High-accuracy Differentiation Formulas)

จากอนุกรมเทย์เลอร์

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x_i)(h)^3}{3!} + \cdots \quad (1.18)$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2) \quad (1.19)$$

จากผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับสอง นั่นคือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (1.20)$$

แทนสมการ (1.20) ในสมการ (1.18) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2) \quad (1.21)$$

ดังนั้น **สูตรการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าสำหรับความแม่นยำ** $O(h^2)$ คือ

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2) \quad (1.22)$$

ในทำนองเดียวกัน **สูตรการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังสำหรับความแม่นยำ** $O(h^2)$ คือ

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} + O(h^2) \qquad (1.23)$$

และ **สูตรการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ** $O(h^4)$ คือ

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i+1}) + f(x_{i-2})}{12h} + O(h^4) \quad (1.24)$$

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

รูปที่ 2: Forward finite-divided-difference formulas

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

รูปที่ 3: Backward finite-divided- difference formulas

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$	$O(h^2)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$	$O(h^4)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$	$O(h^2)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$	$O(h^4)$

รูปที่ 4: Centered finite-divided- difference formulas

ตัวอย่างที่ 1.3

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ เมื่อ $h = 0.25$ โดยใช้วิธี high-accuracy divided-difference ต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า $(O(h^2))$
2. โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง $(O(h^2))$
3. โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง $(O(h^4))$

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 2$ เมื่อ $h = 0.2$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้
   - 1.1 วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าสำหรับความแม่นยำ $O(h)$
   - 1.2 วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังสำหรับความแม่นยำ $O(h)$
   - 1.3 วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ $O(h^2)$
2. กำหนดให้ $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 2$ เมื่อ $h = 0.2$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้
   - 2.1 วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าสำหรับความแม่นยำ $O(h^2)$
   - 2.2 วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังสำหรับความแม่นยำ $O(h^2)$
   - 2.3 วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ $O(h^4)$
3. กำหนดให้ $f(x) = x^2 \cos x$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.4$ เมื่อ $h = 0.1$ โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ $O(h^4)$
4. กำหนดให้ $f(x) = e^x + x$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 2$ เมื่อ $h = 0.2$ โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลางสำหรับความแม่นยำ $O(h^4)$
5. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1, 2, 3 และ 4 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข

เฉลยแบบฝึกหัด

1. 1.1 312.8000000000004, $\varepsilon = 10.53\%$
   1.2 255.19999999999996, $\varepsilon = 9.82\%$
   1.3 284.0000000000002, $\varepsilon = 0.35\%$
2. 2.1 281.0000000000009, $\varepsilon = 0.7067\%$
   2.2 281.0, $\varepsilon = 0.7067\%$
   2.3 283.0000000000003, $\varepsilon = 1.0043 \times 10^{-13}\%$
3. 0.67450391
4. 8.38866013