รายวิชา 09131201
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์
(Numerical Methods for Computers)
บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง และ ดร.รัฐพรหม พรหมคำ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

Outline

บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

1.1 บทนำ

1.2 การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามโดยใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน (Newton Divided Difference Interpolating Polynomials)

1.3 การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)

Table of Contents

บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

1.1 บทนำ

1.2 การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามโดยใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน (Newton Divided Difference Interpolating Polynomials)

1.3 การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)

Outline

บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

1.1 บทนำ

1.2 การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามโดยใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน (Newton Divided Difference Interpolating Polynomials)

1.3 การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)

บทนำ

บทนำ

การประมาณค่าในช่วง (Interpolation) คือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการสร้างฟังก์ชันหรือสมการที่สามารถประมาณค่าระหว่างจุดข้อมูลที่ทราบค่าได้ โดยฟังก์ชันหรือเส้นโค้งที่สร้างขึ้นจากการ Interpolation จะต้องผ่านทุกจุดของข้อมูลที่มีอยู่ ซึ่งทำให้สามารถคาดการณ์ค่าหรือหาค่าระหว่างจุดข้อมูลเหล่านั้นได้อย่างแม่นยำ

บทนำ

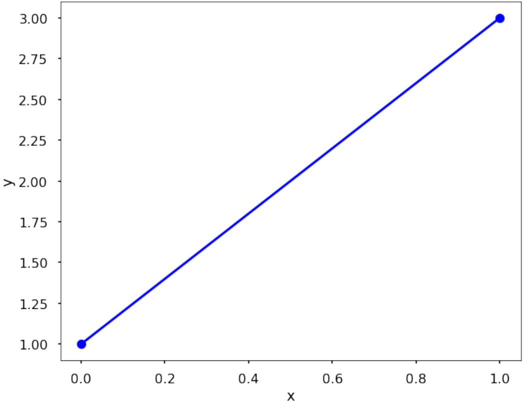
การประมาณค่าในช่วงหรือการหาเส้นโค้งในช่วง คือการสร้างสมการพหุนามที่ผ่านทุกจุดของข้อมูล รูปทั่วไปของสมการพหุนามอันดับที่ n (Order Polynomial) คือ

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{1.1}$$

สมการพหุนามอันดับที่ n คือสมการ (1.1) เพียงสมการเดียวที่ผ่านจุดข้อมูลครบทั้ง $n+1$ จุด

บทนำ

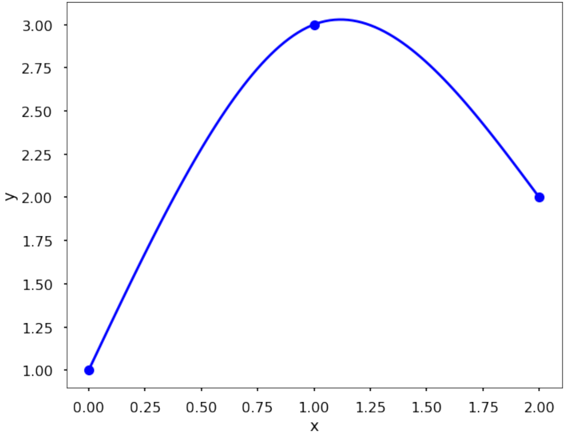
ตัวอย่างเช่น กราฟเส้นตรง (สมการพหุนามอันดับที่หนึ่ง) ที่เชื่อมจุดสองจุด ดังรูปที่ 1 2 เป็นต้น



รูปที่ 1: กราฟของสมการพหุนามอันดับที่ 1 ที่เชื่อมจุดสองจุด

บทนำ

กราฟพาราโบลา (สมการพหุนามอันดับที่สอง) ที่เชื่อมจุดสามจุด ดังรูปที่



รูปที่ 2: กราฟของสมการพหุนามอันดับที่ 2 ที่เชื่อมจุดสามจุด

บทนำ

สำหรับบทนี้ จะกล่าวถึงการประมาณค่าในช่วง 2 วิธี ดังนี้

1. การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามโดยใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน
2. การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามของลากรองจ์

การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามโดยใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน (Newton Divided Difference Interpolating Polynomials)

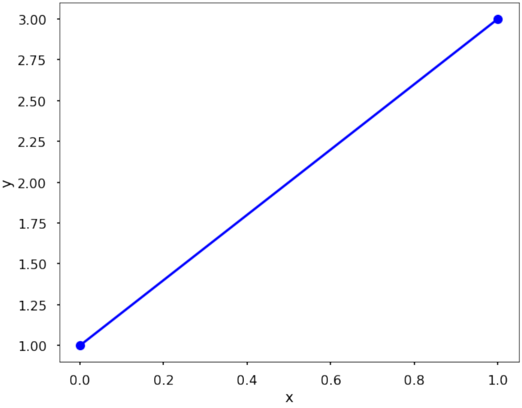
การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามโดยใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน

การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามโดยใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน แบ่งได้ 3 วิธีดังนี้

1. การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)
2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)
3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน (General Form of Newton's Interpolating Polynomials)

การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)

การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น (Linear Interpolation) เป็นวิธีการประมาณค่าในช่วงอย่างง่ายเพื่อจะสร้างสมการเชื่อมจุดสองจุดด้วยสมการเส้นตรง แสดงได้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3: กราฟของสมการพหุนามอันดับที่ 1 ที่เชื่อมจุดสองจุด

การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)

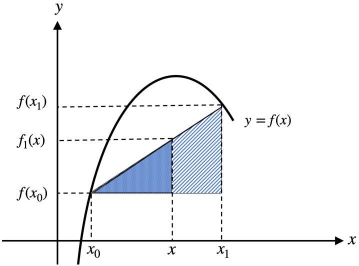
การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นจะพิจารณารูปทั่วไปของสมการเส้นตรง คือ

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

ซึ่งจะพบว่าอันดับสูงสุดของเลขชี้กำลังของสมการ คืออันดับหนึ่ง

1. การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)

การสร้างสมการเส้นตรงจะต้องผ่านจุดทั้งหมด 2 จุด แสดงได้ต่อไปนี้



จากรูป โดยกฎของสามเหลี่ยมคล้าย จะได้

$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ดังนั้น

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad (1.2)$$

ซึ่งเรียก (1.2) ว่า **linear-interpolation formula**

1. การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)

ตัวอย่างที่ 1.1

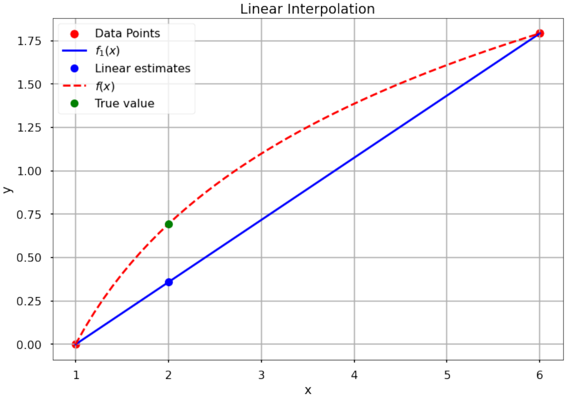
กำหนดให้ $f(x) = \ln x$ จงหาค่าประมาณของ $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น เมื่อ

1. กำหนดให้ $\ln 1 = 0, \ln 6 = 1.7917595$
2. กำหนดให้ $\ln 1 = 0, \ln 4 = 1.3862944$

เมื่อค่าจริงของ $\ln 2 = 0.69314718$

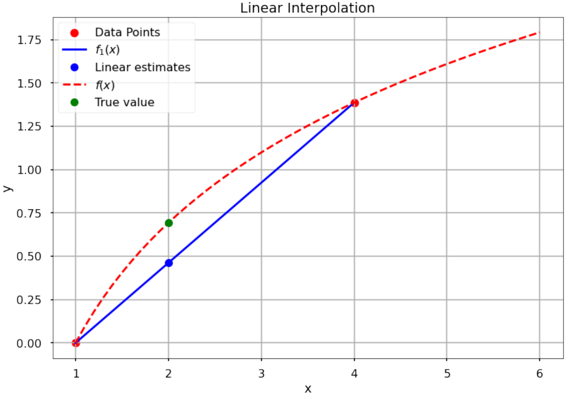
1. การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)

สำหรับกราฟของการประมาณค่า $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นเปรียบเทียบกับกราฟของฟังก์ชันค่าจริง แสดงดังรูปที่ 4 และ 5



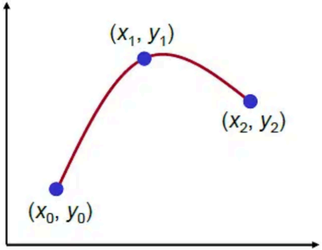
รูปที่ 4: ค่าประมาณของ $\ln 2$ ในกรณีที่ 1 ของตัวอย่างที่ ?? เมื่อ $\ln 1 = 0, \ln 6 = 1.7917595$

1. การประมาณค่าเชิงเส้นตรง (Linear Interpolation)



รูปที่ 5: ค่าประมาณของ $\ln 2$ ในกรณีที่ 2 ของตัวอย่างที่ **??** เมื่อ $\ln 1 = 0, \ln 4 = 1.3862944$

2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)



รูปทั่วไปของสมการพหุนามอันดับสอง คือ $f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ถ้ามีข้อมูล 3 จุด คือ $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ จะเขียนแทนเส้นโค้งผ่านจุดทั้ง 3 ด้วยสมการพหุนามอันดับสอง โดย พิจารณาจาก

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{1.3}$$

2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)

สังเกตว่าแม้ว่าสมการ (1.3) อาจดูเหมือนจะแตกต่างจากสมการพหุนามทั่วไป (1.1) แต่ทั้งสองสมการนี้สมมูลกัน ซึ่งแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} f_2(x) =& b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \\ =& b_0 + b_1 x - b_1 x_0 + b_2 x^2 + b_2 x_0 x_1 - b_2 x x_0 - b_2 x x_1 \\ =& (b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1) + (b_1 - b_2 x_0 - b_2 x_1) x + b_2 x^2 \end{aligned}$$

หรือสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1, \\ a_1 &= b_1 - b_2 x_0 - b_2 x_1, \\ a_2 &= b_2 \end{aligned}$$

2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)

เมื่อทั้ง 3 จุด สอดคล้องกับ $f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$
นั่นคือ $f_2(x_0) = f(x_0)$, $f_2(x_1) = f(x_1)$, $f_2(x) = f(x_2)$

1. เมื่อ $x = x_0$ จากสมการ (1.3) จะได้ $f_2(x_0) = f(x_0) = b_0$ นั่นคือ

$$b_0 = f(x_0) \tag{1.4}$$

2. เมื่อ $x = x_1$ และ $b_0 = f(x_0)$ จากสมการ (1.3) จะได้

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{1.5}$$

2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)

1. แทนค่าสมการ (1.4) และ สมการ (1.5) ในสมการ (1.3) เมื่อ $x = x_2$ จะได้

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \tag{1.6}$$

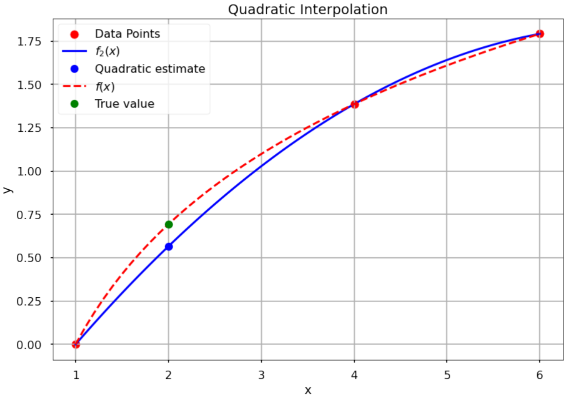
ตัวอย่างที่ 1.2

จงหาค่าประมาณของ $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง เมื่อกำหนดข้อมูล 3 จุด ดังนี้

$$\ln 1 = 0, \ln 4 = 1.386294, \ln 6 = 1.791759$$

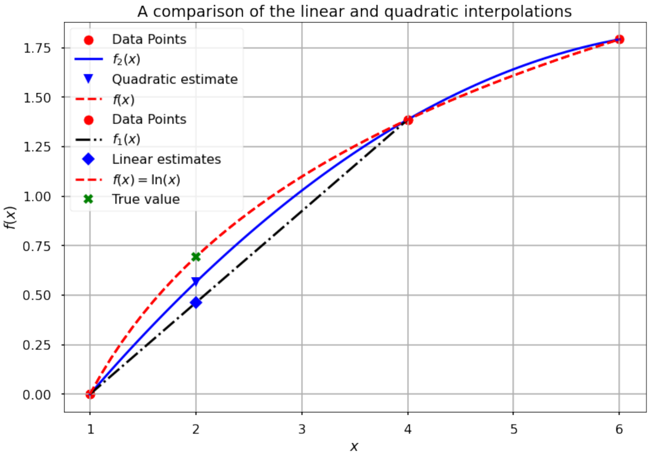
เมื่อค่าจริงของ $\ln 2 = 0.69314718$

2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)



รูปที่ 6: การประมาณค่าในช่วงด้วยสมการพหุนามอันดับสองของตัวอย่างที่ 1.2

2. การประมาณค่าด้วยสมการพหุนามอันดับสอง (Quadratic Interpolation)



รูปที่ 7: การเปรียบเทียบการประมาณค่าของ $\ln 2$ ด้วยการประมาณค่าในช่วงด้วยสมการพหุนามอันดับสองและการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน (General Form of Newton's Interpolating Polynomials)

รูปทั่วไปของสมการพหุนามอันดับที่ n ผ่านจุดข้อมูล $n+1$ จุด คือ

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \tag{1.7}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
b_0 &= f(x_0) \\
b_1 &= f[x_1, x_0] \\
b_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\
&\vdots \\
b_n &= f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1, x_0]
\end{aligned}$$

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน

เมื่อ $f[\,\cdot\,]$ แทนผลต่างจากการแบ่งย่อยจำกัด (finite divided differences) นั่นคือ

- $f[x_i, x_j]$ คือ ผลต่างจากการแบ่งย่อยอันดับที่ 1 (first finite divided difference) นิยามโดย

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

- $f[x_i, x_j, x_k]$ คือ ผลต่างจากการแบ่งย่อยอันดับที่ 2 (second finite divided difference) นิยามโดย

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน

- $f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0]$ คือ ผลต่างจากการแบ่งย่อยอันดับที่ n (nth finite divided difference) นิยามโดย

$$f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

ดังนั้น สูตรการประมาณค่าในช่วงพหุนามอันดับที่ n ของนิวตัน ดังนี้

$$\begin{aligned} f_n(x) =& b_0 + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] \\ & + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0] \end{aligned} \tag{1.8}$$

จะเรียกสมการ (1.8) ว่า **การประมาณค่าในช่วงเชิงพหุนามโดยใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน (Newton's divided-difference interpolating polynomial)**

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน

ซึ่งสามารถแสดงผลต่างจากการแบ่งย่อยอันดับต่างๆ ได้ดังตารางต่อไปนี้

i	x_i	$f(x_i)$	ลำดับที่ 1	ลำดับที่ 2	ลำดับที่ 3
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1 x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

ตาราง 1: ผลต่างการแบ่งย่อยอันดับต่างๆ

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน

ตัวอย่างที่ 1.3

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาค่าของ $f(3)$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงของนิวตันอันดับที่ 3

x	1	2	5	7
$f(x)$	2	4	8	10

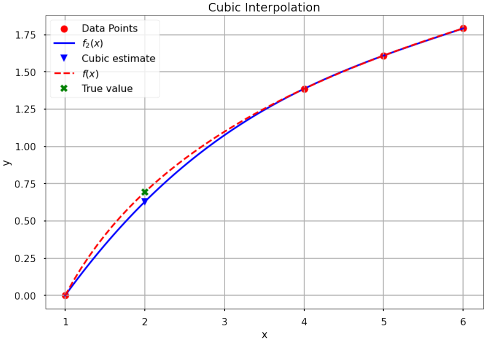
ตัวอย่างที่ 1.4

จงหาค่าประมาณของ $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีนิวตันอันดับที่ 3 เมื่อกำหนดข้อมูล 4 จุด ดังนี้

$$\ln 1 = 0, \ln 4 = 1.386294, \ln 5 = 1.609438, \ln 6 = 1.791759$$

3. รูปทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน

จากรูปที่ 8 จะเห็นได้ว่า ค่าประมาณของ $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงของนิวตันอันดับที่ 3 มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่า เมื่อพิจารณาจำนวนจุดข้อมูล 4 จุด



รูปที่ 8: การประมาณค่า $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงของนิวตันอันดับที่ 3

แบบฝึกหัด

1. จากข้อมูลต่อไปนี้ จงประมาณค่าของ $\log 4$ โดยการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นของนิวตัน
   - 1.1 เมื่อกำหนด $\log 3 = 0.4771213$ และ $\log 5 = 0.6989700$
   - 1.2 เมื่อกำหนด $\log 3 = 0.4771213$ และ $\log 4.5 = 0.6532125$
   - 1.3 จงหาร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในข้อ 1.1 และ 1.2 พร้อมทั้งหาร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t) เมื่อค่าจริงของ $\log 4 = 0.6020600$
2. จากข้อมูลต่อไปนี้ จงประมาณค่าของ $\log 10$ โดยการประมาณค่าในช่วงของนิวตันอันดับที่ 2 เมื่อกำหนด $\log 8 = 0.9030900$, $\log 9 = 0.9542425$ และ $\log 11 = 1.0413927$
3. จากข้อมูลต่อไปนี้ จงประมาณค่าของ $\log 10$ โดยการประมาณค่าในช่วงของนิวตันอันดับที่ 3 เมื่อกำหนด $\log 8 = 0.9030900$, $\log 9 = 0.9542425$, $\log 11 = 1.0413927$ และ $\log 12 = 1.0791812$
4. กำหนดตารางแสดงค่าของฟังก์ชันดังนี้

x	1.6	2	2.5	3.2	4	4.5
$f(x)$	2	8	14	15	8	2

จงหาค่าของ $f(2.8)$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงของนิวตันอันดับที่ 5

เฉลยแบบฝึกหัด

1. 1.1 0.58804565, $\varepsilon_t = 2.3277\%$
   1.2 0.59451543, $\varepsilon_t = 1.2531\%$
2. 1.0003434
3. 1.0000449
4. 15.5349143

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์
(Lagrange Interpolating Polynomials)

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์

การประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials) เป็นการประมาณค่าในช่วงที่ปรับสูตรมาจากการประมาณในช่วงค่าด้วยวิธีนิวตัน เพื่อหลีกเลี่ยงการใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อย ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \tag{1.9}$$

เมื่อ

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1.10}$$

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์

ตัวอย่างเช่น พหุนามอันดับที่ 1 :

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \tag{1.11}$$

พหุนามอันดับที่ 2 :

$$\begin{aligned} f_2(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)} f(x_1) \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \end{aligned} \tag{1.12}$$

จะสังเกตเห็นว่าแต่ละพจน์ของ $L_i(x)$ จะเป็น 1 เมื่อ $x = x_i$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อ $x = x_j$ โดยที่ $i \neq j$

การประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีลากรองจ์

ตัวอย่างที่ 1.5

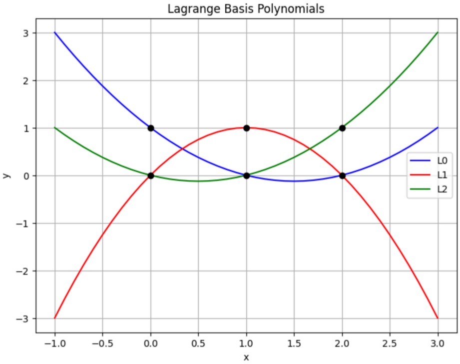
จงหาค่าประมาณของ $\ln 2$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์อันดับที่ 1 และ ลากรองจ์อันดับที่ 2 เมื่อกำหนดข้อมูล 3 จุด ดังนี้

$\ln 1 = 0, \ln 4 = 1.386294, \ln 6 = 1.791759$

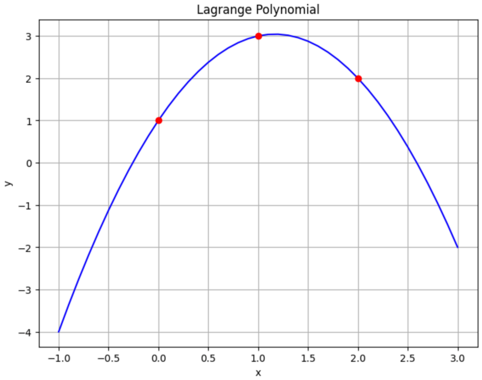
ตัวอย่างที่ 1.6

จงหาฟังก์ชันค่าประมาณ $f_2(x)$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์อันดับที่ 2 เมื่อกำหนดข้อมูลดังนี้

x	0	1	2
y	1	3	2



Lagrange Basis Polynomials
3
2
1
0
−1
−2
−3
y
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x
L0
L1
L2


Lagrange Polynomial
y
x
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

แบบฝึกหัด

1. กำหนดตารางแสดงค่าของฟังก์ชันดังนี้

x	1	2	3	5	7	8
$f(x)$	3	6	19	99	291	444

   จงหาค่าของ $f(4)$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้

   1.1 การประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์อันดับที่ 1
   1.2 การประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์อันดับที่ 2
   1.3 การประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์อันดับที่ 5

2. กำหนดตารางแสดงค่าของฟังก์ชันดังนี้

x	0	1	3	4	5
$f(x)$	0	1	81	256	625

   จงหาค่าของ $f(2)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์

3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 และ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอน โดยใช้การประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์

เฉลยแบบฝึกหัด

1. 1.1 59.0
   1.2 45.0
   1.3 47.999999
2. 16.0