

รายวิชา 09131201  
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์  
(Numerical Methods for Computers)  
บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

ผศ.ดร. วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์  
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์  
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนบุรี

July 11, 2023

# Outline

## ① บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

1.1 บทนำ

1.2 ค่าคลาดเคลื่อน(Errors)

1.3 แบบฝึกหัด 1

## ② บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

## ③ บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น

## ④ บทที่ 4 ระบบสมการไม่เชิงเส้น

## ⑤ บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง

## ⑥ บทที่ 6 อนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข

# Table of Contents

## 1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

1.1 บทนำ

1.2 ค่าคลาดเคลื่อน(Errors)

1.3 แบบฝึกหัด 1

## 2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

## 3 บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น

## 4 บทที่ 4 ระบบสมการไม่เชิงเส้น

## 5 บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง

## 6 บทที่ 6 อนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข

# Outline

## ① บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

1.1 บทนำ

1.2 ค่าคลาดเคลื่อน(Errors)

1.3 แบบฝึกหัด 1

## ② บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

## ③ บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น

## ④ บทที่ 4 ระบบสมการไม่เชิงเส้น

## ⑤ บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง

## ⑥ บทที่ 6 อนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข

# บทนำ

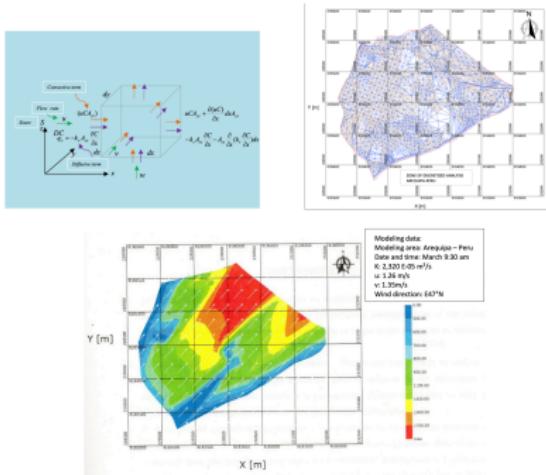
# บทนำ

- What is numerical methods?
- Why is it important?



Figure: <https://learning4live.com>

# บทนำ



**Figure:** Simulation with the finite element method of air pollution with carbon monoxide in the City of Arequipa (Peru)

- [1] A. V. Pérez1 & N. Pérez, Simulation with the finite element method of air pollution with carbon monoxide in the City of Arequipa (Peru), Air Pollution XXIV, 207, 23 (2016)

# บทนำ

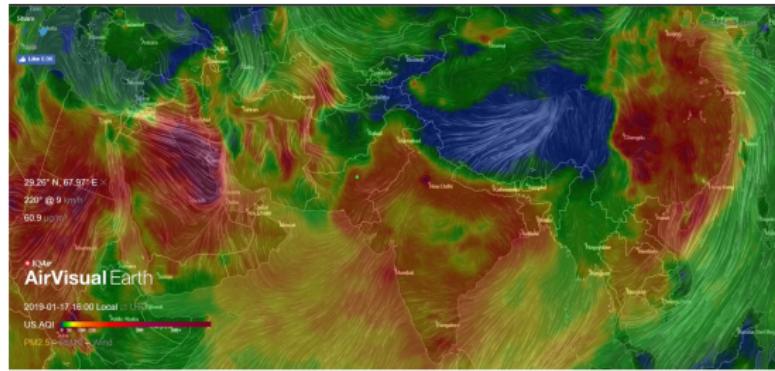


Figure: AirVisual Earth Shows Real Time Air Pollution in 3D

---

[1] <https://forestrypedia.com/airvisual-earth-shows-real-time-air-pollution-in-3d/>

# จุดเริ่มต้นของ Modern numerical analysis

- ในปี คศ. 1947 John von Neumann และ Herman Goldstine ตีพิมพ์ผลงานวิชาการเรื่อง “Numerical Inverting of Matrices of High Order” (Bulletin of the AMS, Nov. 1947) ซึ่งเป็นหนึ่งในงานวิจัยเรื่องแรกๆ ที่ศึกษาข้อผิดพลาดในการปัดเศษ รวมทั้งได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับ “Scientific computing” ซึ่งเป็นแขนงวิชาที่มีความสำคัญอย่างมากในปัจจุบัน



(a) John von (b) Herman  
Neumann Goldstine

Figure

# การคำนวณเชิงวิทยาศาสตร์ (Scientific computing)

การคำนวณเชิงวิทยาศาสตร์ (Scientific Computing [1]) คืองานคำนวณทางวิทยาศาสตร์ที่เป็นศาสตร์บริสุทธิ์ เป็นงานคำนวณที่ซับซ้อนเกินกว่ามนุษย์จะทำได้ เช่น ต้องการหาค่า  $\pi$  ที่มีขนาด 1 ล้านหลัก หรืองานพิสูจน์ August Möbius กล่าวว่าแผนที่ใดๆ ในโลกก็ตาม เราใช้สีระบายแตกต่างกันในแต่ละประเทศ เราสามารถใช้แค่เพียงสีสีเท่านั้น จะสามารถระบายนายแผนที่ที่ไม่มีประเทศที่มีชายแดนติดกันต้องใช้สีเดียวกัน ทฤษฎีนี้เป็นที่รู้จักกันในชื่อว่าทฤษฎีสีสี่ (four color theorem) นั่นเอง งานเหล่านี้จำเป็นต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ

---

[1] <https://hpc-thai.com/?p=298>

# ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยระเบียบวิธีคำนวณเชิงตัวเลข

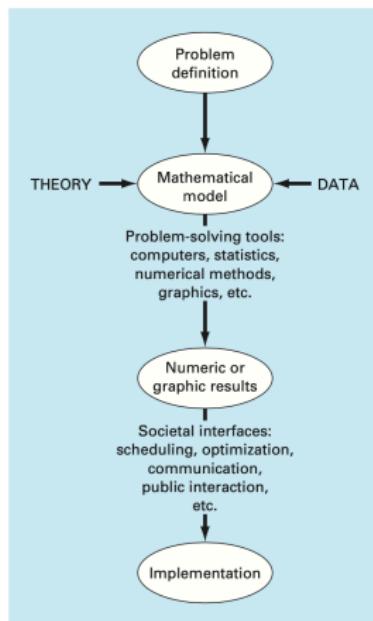


Figure: The engineering problem-solving process [1].

[1] Chapra, Steven C, and Raymond P. Canale. Numerical Methods for Engineers.

# บทนำ

สำหรับคำนวณเชิงตัวเลข จำนวน (numbers) จะมีอยู่ 2 ประเภท ได้แก่ **จำนวนแม่นตรง (exact numbers)** และ **จำนวนโดยประมาณ (approximate numbers)**

## ① จำนวนแม่นตรง (exact numbers) เช่น

- 1, 2, 3, ...
- $1/2, 3/2, \sqrt{2}, \dots$
- $\pi, e, \dots$

## ② จำนวนโดยประมาณ (approximate numbers) เช่น

- $\pi \approx 3.14159265359$
- $e \approx 2.71828182846$

# เลขนัยสำคัญ (Significant figure)

เลขนัยสำคัญ (Significant figure) คือ จำนวนหลักของตัวเลขที่แสดงความเที่ยงตรงของปริมาณที่วัดหรือคำนวณได้ ปกติเลขศูนย์ (0) จะไม่ใช่เลขนัยสำคัญ ยกเว้นมีตัวเลขอื่นมาประกอบ(อยู่ด้านหน้า)จะถือว่าเลขศูนย์กล้ายเป็นเลขนัยสำคัญ เช่น

- 12.3 มีเลขนัยสำคัญ 3 ตัว ได้แก่ 1, 2 และ 3
- 12.30 มีเลขนัยสำคัญ 4 ตัว ได้แก่ 1, 2, 3 และ 0
- 10,023 มีเลขนัยสำคัญ 5 ตัว ได้แก่ 1, 0, 0, 2 และ 3
- 0.0123 มีเลขนัยสำคัญ 3 ตัว ได้แก่ 1, 2 และ 3 (เลข 0 สองตัวแรกไม่มีเลขอื่นอยู่หน้า)

# การบวกและการลบเลขนัยสำคัญ[1]

ให้บวกลบข้อมูลตามปกติ แล้วเมื่อได้ผลลัพธ์ให้บันทึกโดยมีจำนวนตำแหน่งทศนิยมเท่ากับตำแหน่งทศนิยมของข้อมูลหลักที่มีจำนวนตำแหน่งทศนิยมน้อยที่สุด เช่น

$$\textcircled{1} \quad 2.12 + 3.895 + 5.4156 = 11.4306$$

⇒ มีทศนิยมน้อยที่สุดคือ 2 ตำแหน่ง ดังนั้น ผลลัพธ์ คือ 11.43

$$\textcircled{2} \quad 15.7962 + 6.31 - 16.8 = 5.3062$$

⇒ มีทศนิยมน้อยที่สุดคือ 1 ตำแหน่ง ดังนั้น ผลลัพธ์ คือ 5.3

---

[1] <http://www.rmutphysics.com>

# การคูณและการหารเลขนัย[1]

ให้คูณ-หารข้อมูลตามปกติ แล้วเมื่อได้ผลลัพธ์ให้บันทึก โดยมีจำนวนค่านัยสำคัญเท่าจำนวนเลขนัยสำคัญของข้อมูลหลักที่มีจำนวนค่านัยสำคัญน้อยที่สุด เช่น

$$① \quad 4.3211 \times 5.1 = 22.03761$$

⇒ มีจำนวนเลขนัยสำคัญน้อยที่สุด คือ 2 ตัว ดังนั้น ผลลัพธ์ คือ 22

$$② \quad 0.6214 \div 4.25 = 0.1374778$$

⇒ มีจำนวนเลขนัยสำคัญน้อยที่สุด คือ 3 ตัว ดังนั้น ผลลัพธ์ คือ 0.137

---

[1] <http://www.rmutphysics.com>

# Outline

## ① บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

1.1 บทนำ

1.2 ค่าคลาดเคลื่อน(Errors)

1.3 แบบฝึกหัด 1

## ② บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

## ③ บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น

## ④ บทที่ 4 ระบบสมการไม่เชิงเส้น

## ⑤ บทที่ 5 การประมาณค่าในช่วง

## ⑥ บทที่ 6 อนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข

# ค่าคลาดเคลื่อน (Errors)

# ความแม่นยำและความเที่ยงตรง (Accuracy and Precision)

- ความแม่นยำ (Accuracy) คือ สิ่งที่บอกให้ทราบว่าค่าที่คำนวณหรือวัดได้นั้นมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากน้อยเพียงใด
- ความเที่ยงตรง (Precision) คือ ระดับความสม่ำเสมอหรือความคงที่ในการวัดของเครื่องมือวัด เมื่อมีการวัดซ้ำหลายครั้ง ในสภาพแวดล้อมเดียวกัน

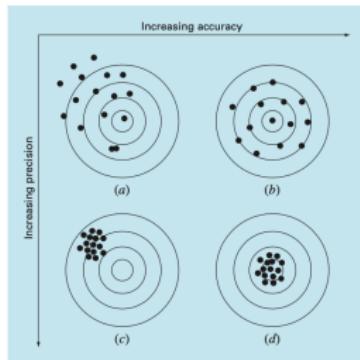


Figure: ความแม่นยำและความเที่ยงตรง [1]

[1] Chapra, Steven C, and Raymond P. Canale. Numerical Methods for Engineers. Seventh Edition. New York: McGraw-Hill, 2015.

# ประเภทของค่าคลาดเคลื่อน (Errors)

เราสามารถแบ่งประเภทของค่าคลาดเคลื่อนในการคำนวณเชิงตัวเลขได้ 5 ประเภท คือ

- ① ค่าคลาดเคลื่อนจากข้อมูลเบื้องต้น
- ② ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (truncation error)\*\*\*
- ③ ค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (round-off error)\*\*\*
- ④ ค่าคลาดเคลื่อนแพร่ขยาย (propagated error)
- ⑤ ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดของมนุษย์

# ค่าคลาดเคลื่อนจากข้อมูลเบื้องต้น

ในการวัดทางวิทยาศาสตร์ซึ่งเป็นแหล่งของข้อมูล ที่จะนำมาคำนวณมักจะมีค่าคลาดเคลื่อนอยู่เสมอ สิ่งนี้เป็นเรื่องธรรมชาติและคอมพิวเตอร์ไม่มีส่วนเกี่ยวข้องแต่ผู้คำนวณต้องไม่ลืมที่จะระมัดระวังและระลึกถึงในการประผลขั้นสุดท้าย

# ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (truncation error)

เกิดจากการตัดทอนจำนวนพจน์ของการคำนวณ(อนุกรมอนันต์) ให้เป็นพจน์จำกัด เช่น

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$

เป็นต้น

# ค่าคลาดเคลื่อนจากการปิดเศษ (round-off error)

เกี่ยวข้องกับการเก็บค่าตัวเลขในคอมพิวเตอร์ ซึ่งค่าผลลัพธ์ที่ได้มีทศนิยมมากเกินกว่าที่จะเก็บบันทึกไว้ได้ เช่น ค่า

- $\pi = 3.14159265358979323846 \dots$
- $e = 2.71828182845904523536 \dots$

เป็นค่าตัวเลขที่เก็บไม่สามารถแทนค่าด้วยจำนวนที่แท้จริงได้ จึงมีค่าคลาดเคลื่อนจากการปิดเศษเกิดขึ้น

# ค่าคลาดเคลื่อนแพร่ขยาย (propagated error)

ในการคำนวณแต่ละขั้นตอนจาก ค่าคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดจากการคำนวณเองแล้ว ค่าคลาดเคลื่อนที่มีอยู่เดิมอาจถูกขยายเพิ่ม มากขึ้นจากการกระทำ บวก ลบ คูณ และหารในคอมพิวเตอร์ บางครั้งค่าคลาดเคลื่อนจะถูกขยาย ต่อเนื่องกันจนกระทึ่ง ผลลัพธ์สุดท้ายผิดพลาดโดยสิ้นเชิง ซึ่งเป็นเรื่องที่ต้องระมัดระวัง

# ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดของมนุษย์

ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดของมนุษย์เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากผู้คำนวณเอง เช่น

- การคำนวณผิดพลาด
- การใส่เครื่องหมายผิด
- การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีส่วนผิดพลาดและไม่ได้ตรวจสอบอย่างละเอียด เป็นต้น

# ค่าคลาดเคลื่อน

ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข เกิดจากการนำค่าประมาณ (Approximation) มาใช้แทนค่าจริง

โดยที่ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อน (error) ค่าจริง (exact value) และค่าประมาณ (approximate value) สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบสมการต่อไปนี้

$$\text{ค่าจริง} = \text{ค่าประมาณ} + \text{ค่าคลาดเคลื่อน} \quad (1.1)$$

กำหนดให้  $E_t$  แทน ค่าคลาดเคลื่อน จะได้

$$E_t = \text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ} \quad (1.2)$$

# ค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute Error : $E_{abs}$ )

ค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ คือ ขนาดของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงกับค่าประมาณ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของค่าสัมบูรณ์ นิยามดังนี้

$$E_{abs} = | \text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ} | \quad (1.3)$$

## ค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error : $E_{rel}$ )

ค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ คือ อัตราส่วนของคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงกับค่าประมาณ เมื่อเทียบกับค่าจริง นิยามดังนี้

$$E_{rel} = \frac{|\text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}|}{|\text{ค่าจริง}|} \text{ หรือ } E_{rel} = \frac{E_{abs}}{|\text{ค่าจริง}|} \quad (1.4)$$

หรือ คิดเป็นร้อยละ จะได้

$$\varepsilon_t = \frac{|\text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}|}{|\text{ค่าจริง}|} \times 100\% \quad (1.5)$$

ซึ่งเรียกว่า ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ( $\varepsilon_t$ )

ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ :  $\varepsilon_a$

ค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ :  $E_a$  นิยามดังนี้

$$E_a = \frac{|\text{ค่าประมาณสุดท้าย} - \text{ค่าประมาณก่อนสุดท้าย}|}{|\text{ค่าประมาณสุดท้าย}|} \quad (1.6)$$

ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ :  $\varepsilon_a$  นิยามดังนี้

$$\varepsilon_a = \frac{|\text{ค่าประมาณสุดท้าย} - \text{ค่าประมาณก่อนสุดท้าย}|}{|\text{ค่าประมาณสุดท้าย}|} \times 100\% \quad (1.7)$$

## ตัวอย่างที่ 1.1

กำหนดให้ ค่าจริง = 0.4357 และ ค่าประมาณ = 0.4364  
จงหาค่าต่างๆ ต่อไปนี้

- ① คลาดเคลื่อน ( $E$ )
- ② ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ( $E_{abs}$ )
- ③ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ( $E_{rel}$ )
- ④ ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ( $\varepsilon_t$ )

## ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้: $\varepsilon_s$

โดยทั่วไปแล้วจะมีการกำหนดขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในการคำนวณแต่ละครั้ง โดยควบคุมให้ค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ต่ำกว่าค่าที่กำหนด  $\varepsilon_s$  นั้นคือจะหยุดการคำนวณเมื่อค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ต่ำกว่า  $\varepsilon_s$  เพราะฉะนั้น  $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$  ดังนั้น ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ ( $\varepsilon_s$ ) นิยามโดย

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\% \quad \text{เมื่อ } n \text{ คือ ตำแหน่งของเลขนัยสำคัญที่น้อยที่สุด} \quad (1.8)$$

## ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้: $\varepsilon_s$

โดยทั่วไปแล้วจะมีการกำหนดขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในการคำนวณแต่ละครั้ง โดยควบคุมให้ค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ต่ำกว่าค่าที่กำหนด  $\varepsilon_s$  นั้นคือจะหยุดการคำนวณเมื่อค่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ต่ำกว่า  $\varepsilon_s$  เพราะฉะนั้น  $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$  ดังนั้น ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ ( $\varepsilon_s$ ) นิยามโดย

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\% \quad \text{เมื่อ } n \text{ คือ ตำแหน่งของเลขนัยสำคัญที่น้อยที่สุด} \quad (1.8)$$

- $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$  หมายความว่า ค่าประมาณที่ได้จะมีค่าร้อยละของความถูกต้องของเลขนัยสำคัญอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่  $n$  หรือในทางสถิติ เรียกว่า การยอมรับได้ในระดับนัยสำคัญที่  $\varepsilon_s$

# Error Estimates for Iterative Methods

## ตัวอย่างที่ 1.2

จงประมาณค่า  $e^{0.5}$  โดยใช้อนุกรมแมคคลอร์น (Maclaurin series expansion) และต้องการความถูกต้องของเลขนัยสำคัญอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 เมื่อกำหนดค่าจริงของ  $e^{0.5} = 1.648721\dots$  (กำหนดให้ใช้ทศนิยม 5 ตำแหน่ง) โดยที่ อนุกรมแมคคลอร์นของ  $e^x$  คือ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

# ทบทวน: อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

กำหนดให้  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[a, b]$  และอนุพันธ์ทุกอันดับของ ฟังก์ชัน  $f(x)$  สามารถหาได้ในช่วงเปิด  $(a, b)$  ถ้า  $x_0$  เป็นจุดในช่วงเปิด  $(a, b)$  แล้ว อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน  $f(x)$  ณ จุดเดียว ในช่วงเปิดนี้ นิยามโดย

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots$$

โดยที่  $f^{(n)}$  คือ อนุพันธ์ลำดับที่  $n$  ของฟังก์ชัน  $f(x)$

กรณีที่  $x_0 = 0$  อนุกรมอนันต์ข้างต้นจะเรียกว่า อนุกรมแมคคลอร์ein (Maclaurin series)

Function	Maclaurin Series
$e^x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (\text{if } -1 < x < 1)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (\text{if } -1 < x \leq 1)$

Figure: Maclaurin Series.

Terms	Result	$\varepsilon_t$ (%)	$\varepsilon_a$ (%)
1	1	39.3	
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.645833333	0.175	1.27
5	1.648437500	0.0172	0.158
6	1.648697917	0.00142	0.0158

Figure: แสดงการหาค่าประมาณของ  $e^{0.5}$

# แบบฝึกหัด 1

1. จงหาค่าคลาดเคลื่อน ( $E$ ) ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ( $E_{abs}$ ) ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ( $E_{rel}$ ) และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ( $\varepsilon_t$ ) จากข้อต่อไปนี้
  - 1.1 ค่าจริง = 10,000 และ ค่าประมาณ = 9,999
  - 1.2 ค่าจริง =  $\pi$  และ ค่าประมาณ =  $22/7$
  - 1.3 ค่าจริง =  $e$  และ ค่าประมาณ = 2.718
  - 1.4 ค่าจริง =  $\sqrt{2}$  และ ค่าประมาณ = 1.414

# แบบฝึกหัด 1

2. จงประมาณค่า  $\cos(\pi/3)$  โดยใช้อนุกรมแมคคลอร์ein (Maclaurin series expansion) และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตัวแหน่งที่ 2 เมื่อ กำหนดค่าจริงของ  $\cos(\pi/3) = 0.5$  (กำหนดให้ใช้ทศนิยม 5 ตำแหน่ง) โดยที่ อนุกรมแมคคลอร์einของ  $\cos x$  คือ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

# แบบฝึกหัด 1

3. จงประมาณค่า  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$  โดยใช้อนุกรมแมคคลอร์อิน (Maclaurin series expansion) และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในทำแหน่งที่ 2 เมื่อกำหนดค่าจริงของ  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  (กำหนดให้ใช้ทศนิยม 5 ทำแหน่ง) โดยที่ อนุกรมแมคคลอร์อินของ  $\sin x$  คือ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$