

บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)

100%

Linear Regression)

ession)

1. Linear Regression)

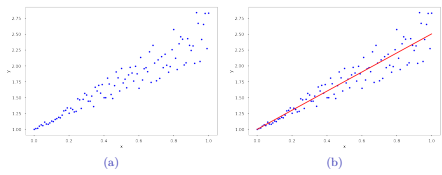
Linear Regression)

region)

1. Linear Regression)

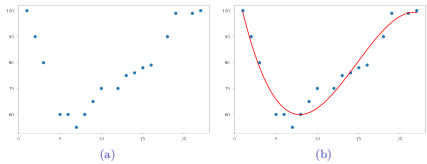
Navigation icons: back, forward, search, etc.

การสร้างเส้นโค้งที่เหมาะสม (Curve fitting) คือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการหาเส้นโค้งหรือฟังก์ชันที่เหมาะสมที่สุดในการแสดงผลของจุดข้อมูลที่ได้รับการสังเกตหรือการทดลองทางวิทยาศาสตร์ต่าง ๆ โดยจุดมุ่งหมายคือการหาสมการทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับข้อมูลให้มากที่สุด



รูปที่ 1: แผนภาพการกระจาย (Scatter Plot)

Navigation icons: back, forward, search, etc.



รูปที่ 2: แผนภาพการกระจาย (Scatter Plot)

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Curve fitting แบ่งได้เป็นสองประเภทหลัก ดังนี้

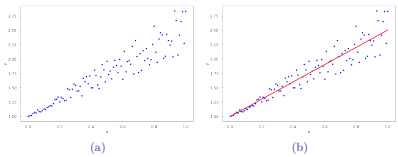
- ▶ **การถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression):** เป็นการสร้างเส้นโค้งที่เหมาะสมที่ไม่จำเป็นต้องผ่านทุกจุดของข้อมูล โดยวิธีนี้จะพยายามหาฟังก์ชันที่ลดค่าความแตกต่างระหว่างจุดข้อมูลจริงกับค่าที่ฟังก์ชันคาดการณ์ให้มีค่าน้อยที่สุดในเชิงกำลังสอง (เช่น เส้นตรงหรือเส้นโค้งที่แสดงถึงแนวโน้มของข้อมูล)
- ▶ **การประมาณค่าในช่วง (Interpolation):** เป็นการสร้างเส้นโค้งที่เหมาะสมซึ่งต้องผ่านทุกจุดของข้อมูล วิธีนี้มักใช้ในกรณีที่ข้อมูลมีความถูกต้องสูงและต้องการฟังก์ชันที่สามารถประมาณค่าได้อย่างแม่นยำระหว่างจุดข้อมูลต่าง ๆ

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

การหาเส้นสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)
เป็นระเบียบวิธีในการประมาณค่าการหาเส้นสมการที่เหมาะสมด้วยการสร้าง
เส้นตรงเพื่อประมาณค่าเซตของจุดหรือข้อมูล



รูปที่ 3: แผนภาพการกระจาย (Scatter Plot)

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)

- สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$
- ▶ กำหนดให้ (x_i, y_i) เป็นเซตของจุดข้อมูล
 - ▶ กำหนดให้ $\hat{y}_i = f(x)$ เป็นเส้นโค้งที่เหมาะสมกับเซตของจุดข้อมูล
 - ▶ ณ ตำแหน่ง $x = x_i$ พิกัดที่กำหนดคือ y_i นั่นคือคู่อันดับ (x_i, y_i) และค่าของฟังก์ชันที่สอดคล้องกันบนเส้นโค้งที่เหมาะสมคือ $f(x_i)$
 - ▶ ถ้า e_i คือค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า ณ ตำแหน่ง $x = x_i$ แล้ว

$$e_i = y_i - f(x_i) \tag{1.1}$$

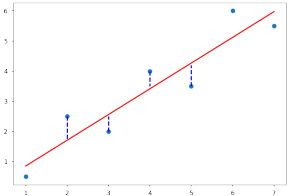
สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)

ถ้าเรากำหนดให้

$$\begin{aligned} S_r &= [y_1 - f(x_1)]^2 + [y_2 - f(x_2)]^2 + \cdots + [y_n - f(x_n)]^2 \\ &= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

แล้ว **วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method)** เป็นการทำให้ผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อน (S_r) มีค่าน้อยที่สุด

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)



รูปที่ 4

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)

จากรูปที่ 4 กำหนดให้

$$\hat{y} = a_0 + a_1x \tag{1.3}$$

เป็นสมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่เหมาะสมที่สุดกับเซตของจุดข้อมูล (x_i, y_i) สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n$
พิจารณา ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า ณ ตำแหน่ง x_i นั่นคือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1x_i)$$

จาก (1.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_r &= [y_1 - (a_0 + a_1x_1)]^2 + [y_2 - (a_0 + a_1x_2)]^2 + \dots + [y_n - (a_0 + a_1x_n)]^2 \\ &= e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

นั่นคือ

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{1.5}$$

เมื่อ n คือจำนวนจุดข้อมูล
เพื่อหาค่าผลรวมของค่าคลาดเคลื่อน (S_r) ที่มีค่าน้อยที่สุด โดยใช้หลักการหาค่าต่ำสุด (Minimization) ดังนั้น การหาค่าต่ำสุดของ (S_r) เปรียบเทียบกับตัวไม่ทราบค่า a_0 และ a_1 จะได้

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = 0 \tag{1.6}$$

และ

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = 0 \tag{1.7}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

จาก (1.5) จะได้

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) \tag{1.8}$$

และ

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n ([y_i - a_0 - a_1 x_i] x_i) \tag{1.9}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

จาก (1.8) และ $\sum_{i=1}^n a_0 = na_0$ จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n a_0 - \sum_{i=1}^n a_1 x_i &= 0 \\ na_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_1 &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \tag{1.10}$$

จาก (1.9) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n a_0 x_i - \sum_{i=1}^n a_1 x_i^2 &= 0 \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a_1 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned} \tag{1.11}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

ดังนั้น

$$\begin{cases} na_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) a_1 &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) a_1 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (1.12)$$

เราจะเรียกสมการ (1.12) ว่า **สมการปกติ (normal equations)**

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

โดยการแก้ระบบสมการ (1.12) เพื่อหาค่า a_0 และ a_1 จะได้

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} \quad (1.13)$$

และ

$$a_1 = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad (1.14)$$

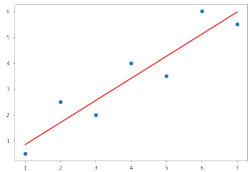
เมื่อ \bar{y} และ \bar{x} คือ ค่าเฉลี่ยของ y และ x ตามลำดับ

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

วิธีทำ จากโจทย์จะได้

- ▶ $n = 7$
- ▶ $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 119.5$
- ▶ $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140$
- ▶ $\sum_{i=1}^7 x_i = 28$ ดังนั้น $\bar{x} = \frac{28}{7} = 4$
- ▶ $\sum_{i=1}^7 y_i = 24$ ดังนั้น $\bar{y} = \frac{24}{7} = 3.428571$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย



รูปที่ 5

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

ตัวอย่างที่ 1.2

จงหาสมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่ใช้ประมาณค่าของข้อมูลต่อไปนี้

$(1, 0.6), (2, 2.4), (3, 3.5), (4, 4.8), (5, 5.7)$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

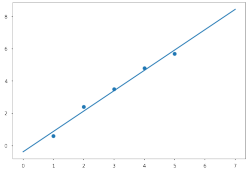
x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0.6	1	0.6
2	2.4	4	4.8
3	3.5	9	10.5
4	4.8	16	19.2
5	5.7	25	28.5
15	17.0	55	63.6

ตาราง 2: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.2

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

Navigation icons: back, forward, search, etc.

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย



รูปที่ 6: กราฟของสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายของตัวอย่างที่ 1.2

Navigation icons: back, forward, search, etc.

คุณภาพของเส้นสมการที่เหมาะสม

เนื่องจากเส้นโค้งของสมการถดถอยเชิงเส้นไม่ผ่านทุกจุดของข้อมูล จึงจำเป็นต้องมีการประเมินสมการถดถอยเชิงเส้น ดังนั้น การพิจารณาคุณภาพของสมการถดถอยเชิงเส้น (Quantification of Error of Linear Regression) ต้องพิจารณาสองสิ่งต่อไปนี้

- 1. ผลรวมกำลังสองของค่าความคลาดเคลื่อนรอบเส้นถดถอย $y = a_0 + a_1 x$ (Sum of Squares of Residuals about Regression Line):

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \tag{1.15}$$

คุณภาพของเส้นสมการที่เหมาะสม

- 2. ค่าความคลื่อนมาตรฐานของการประมาณค่า (Standard Error of Estimate):

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n - 2}} \tag{1.16}$$

- 3. ผลรวมกำลังสองของค่าความคลาดเคลื่อนรอบค่าเฉลี่ย \bar{y} (Sum of Squares of Residuals about the Mean \bar{y}):

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2 \tag{1.17}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงคำนวณหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.3 จะได้ สมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่ใช้ประมาณค่า คือ $\hat{y} = 0.07142857 + 0.8392857x$ ซึ่งสามารถนำมาสร้างตารางได้ดังตารางที่ 3

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - a_0 - a_1x_i)^2$
1	0.5	8.5765	0.1687
2	2.5	0.8622	0.5625
3	2.0	2.0408	0.3473
4	4.0	0.3265	0.3265
5	3.5	0.0051	0.5896
6	6.0	6.6122	0.7972
7	5.5	4.2908	0.1993
\sum	24.0	22.7143	2.9911

ตาราง 3: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.3

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์ (Simple Linear Regression in Matrix Form)

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 🔄 📄 📑

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression in Matrix Form) โดยอาศัยหลักของเมทริกซ์ เมื่อข้อมูลขนาดใหญ่ การนำเมทริกซ์มาประยุกต์ในการหาสมการถดถอยจะช่วยให้การคำนวณง่ายขึ้นเมื่อนำไปเขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 🔄 📄 📑

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

จากความสัมพันธ์ระหว่างสมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย และค่าคลาดเคลื่อน นั่นคือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1 x_i) \tag{1.20}$$

จะได้ว่า

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + e_i \tag{1.21}$$

สำหรับ $i \in \{1, 2, ..., n\}$ จากสมการ (1.21) จะได้

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 + e_1 \tag{1.22}$$

$$y_2 = a_0 + a_1 x_2 + e_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_0 + a_1 x_n + e_n$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

จากสมการ (1.22) เขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 x_1 \\ a_0 + a_1 x_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

ดังนั้น สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์ (Simple Linear Regression in Matrix Form) คือ

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}a + e \tag{1.25}$$

เมื่อ

- ▶ \mathbf{X} ถูกเรียกว่า the design matrix.
- ▶ a คือ the vector of parameters
- ▶ e คือ the error vector
- ▶ \mathbf{Y} คือ the response vector

โดยที่

$$\mathbf{Y}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{n \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, a_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, e_{n \times 1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

กำหนดให้ \mathbf{X}^T เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of a matrix) จากสมการ (1.26) จะได้

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}$$
$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})[a] = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

จะสังเกตเห็นว่า $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})a = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ สอดคล้องกับสมการปกติ นั่นคือ

$$\begin{aligned} na_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) a_1 &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) a_1 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

ดังนั้น จะพิจารณา $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})a = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ โดยนำอินเวอร์สของ $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})$ นั่นคือ $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ คูณตลอดสมการ จะได้

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})a = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^T \mathbf{Y})$$

เนื่องจาก $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} = I$ ดังนั้น

$$a = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \tag{1.27}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

จากสมการ (1.26) และสมการ (1.27) จะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

และ

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

ต่อไป จะแสดงว่า $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = a$ จากสมการ(1.27) จะได้

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \frac{1}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

จาก (1.28) (1.13) และ (1.14) จะได้

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ \frac{\bar{y} - a_1 \bar{x}}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \\ &= a \end{aligned}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

ดังนั้น สมการปกติของสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์ คือ

$$a = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} \tag{1.29}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 1.4

จงหาสมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่ใช้ประมาณค่าของข้อมูลต่อไปนี้

i	1	2	3	4	5
x_i	2.10	6.22	7.17	10.52	13.68
y_i	2.90	3.83	5.98	5.71	7.74

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

แบบฝึกหัด

1. จากข้อมูลต่อไปนี้ จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

x	1	2	3	4	5	6
y	2.4	3.1	3.5	4.2	5.0	6.0

2. จากข้อมูลต่อไปนี้ จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

x	0	1	2	3	4
y	1.0	2.9	4.8	6.7	8.6

- 3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
- 4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
- 5. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
- 6. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

เฉลยแบบฝึกหัด

- 1. $\hat{y} = 1.59333333 + 0.69714286x$
- 2. $\hat{y} = 1 + 1.9x$
- 3. $-5.70434783x_2$
- 4. $r = 0.99140039$
- 5. $r = 1$

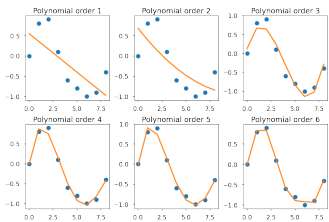
สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ ได้กล่าวถึงวิธีการสร้างสมการเชิงเส้นอย่างง่ายโดยใช้สมการถดถอย เมื่อกราฟของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นตรง แต่ในบางครั้งการใช้สมการเชิงเส้นกับข้อมูลในทางวิศวกรรมหรือวิทยาศาสตร์อาจให้ผลลัพธ์ที่ไม่ดีมากนัก ดังรูปที่ 7 ดังนั้น ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมการถดถอยพหุนามอันดับที่ m (m^{th} Polynomial Regression)

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)



รูปที่ 7: สมการถดถอยพหุนาม

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมการถดถอยพหุนามอันดับที่ m (m^{th} Polynomial Regression) รูปทั่วไปของสมการถดถอยพหุนามอันดับที่ m คือ

$$\hat{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

ซึ่งเป็นสมการที่เหมาะสมที่สุดกับเซตของจุดข้อมูล (x_i, y_i) สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ โดยที่ ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า ณ ตำแหน่ง x_i นั่นคือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m)$$

ซึ่งสามารถเขียน ผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อนได้ ดังต่อไปนี้

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m))^2$$

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

เพื่อหาค่าต่ำสุด ดังนั้น

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum x_i^2 (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m) = 0$$

⋮

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2 \sum x_i^m (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m) = 0$$

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

ดังนั้นสมการปกติ คือ

$$a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + \cdots + a_m \sum x_i^m = \sum y_i \tag{1.30}$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \cdots + a_m \sum x_i^{m+1} = \sum x_i y_i \tag{1.31}$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + \cdots + a_m \sum x_i^{m+2} = \sum x_i^2 y_i \tag{1.32}$$

⋮

$$\tag{1.33}$$

$$a_0 \sum x_i^m + a_1 \sum x_i^{m+1} + a_2 \sum x_i^{m+2} + \cdots + a_m \sum x_i^{2m} = \sum x_i^m y_i \tag{1.34}$$

$$\tag{1.35}$$

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

ข้อสังเกต 1.1

ค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าประมาณของสมการถดถอยพหุนาม คือ

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n - (m + 1)}}; \quad r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

เมื่อ m คือ อันดับของสมการพหุนาม

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

ตัวอย่างที่ 1.5

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสองที่เหมาะสมกับ

ข้อมูลที่กำหนดให้

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	2.1	7.7	13.6	27.2	40.9	61.1

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

จากโจทย์ จะได้

$$\begin{aligned} m &= 2 \quad \sum x_i = 15 \quad \sum x_i^4 = 979 \\ n &= 6 \quad \sum y_i = 152.6 \quad \sum x_i y_i = 585.6 \\ \bar{x} &= 2.5 \quad \sum x_i^2 = 55 \quad \sum x_i^2 y_i = 2488.8 \\ \bar{y} &= 25.433 \quad \sum x_i^3 = 225 \end{aligned}$$

จากสมการ (1.30) จะได้

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152.6 \\ 585.6 \\ 2488.8 \end{bmatrix}$$

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

โดยใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ จะได้
 $a_0 = 2.47857, a_1 = 2.35929, a_2 = 1.86071$
ดังนั้น สมการถดถอยพหุนามอันดับสอง คือ
 $\hat{y} = 2.47857 + 2.35929x + 1.86071x^2$

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2$
0	2.1	544.44	0.14332
1	7.7	314.47	1.00286
2	13.6	140.03	1.08158
3	27.6	3.12	0.80491
4	40.9	239.22	0.61951
5	61.1	1272.11	0.09439
\sum	152.6	22.7143	3.74657

ตาราง 4: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.5

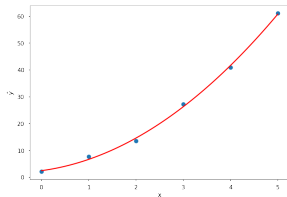
สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

จากตารางที่ 4 จะได้ สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of Determination) คือ

$$r^2 = \frac{2513.39 - 3.74657}{2513.39} = 0.99851$$

หรือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient) คือ $r = 0.99925$

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)



รูปที่ 8: กราฟของสมการถดถอยพหุนามอันดับที่ 2 ของตัวอย่างที่ 1.5

[illegible]

สมการถดถอยพหุนามในรูปแบบเมทริกซ์

โดยใช้กระบวนการเดียวกันกับหัวข้อ 1 จะได้ สมการปกติของสมการถดถอยพหุนามในรูปแบบเมทริกซ์ (Polynomial Regression in Matrix Form) คือ

$$a = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

เมื่อ X^T คือ transpose of the matrix

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

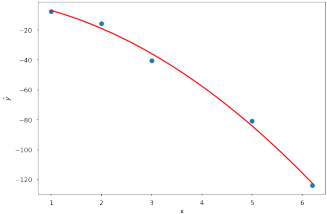
ตัวอย่างที่ 1.6
จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสองที่เหมาะสมกับข้อมูลที่กำหนดให้

x_i	1	2	3.5	5	6.2
y_i	-7.500	-15.600	-40.500	-80.700	-123.876

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

Navigation icons: back, forward, search, etc.

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)



รูปที่ 9

Navigation icons: back, forward, search, etc.

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร (Multiple Linear Regression)

◀ ▶ ↺ ⌂ 🔍

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมการถดถอยพหุนามอันดับที่ m (m^{th} Polynomial Regression) รูปแบบของสมการถดถอยพหุนามอันดับที่ m คือ

$$\hat{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

ซึ่งเป็นสมการที่เหมาะสมที่สุดกับเซตของจุดข้อมูล (x_i, y_i) สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ โดยที่ ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า ณ ตำแหน่ง x_i คือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m)$$

ซึ่งสามารถเขียน ผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อนได้ ดังต่อไปนี้

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m))^2$$

◀ ▶ ↺ ⌂ 🔍

ยตัวแปรที่มีตัวแปรอิสระ

$$-a_mx_m \quad (1.44)$$

ส่วน (partial -

$\cdot + a_m x_m)$

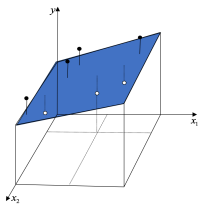


ตัวแปร ตัวอย่างเช่น y
 2 ตัวแปร เมื่อกล่าวหาเข้าให้

(1.45) _____

ใน 3 มิติที่มีลักษณะเป็น

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร



รูปที่ 10: กราฟแสดงลักษณะเป็นระนาบของสมการ $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + e$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

พิจารณา (x_{1i}, x_{2i}, y_i) สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ จะเห็นได้ว่า

$$y_i = a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + e_i$$

ซึ่งผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อน คือ

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i})^2$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

เพื่อหาค่าต่ำสุด ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_r}{\partial a_0} &= -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) = 0 \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_1} &= -2 \sum x_{1i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) = 0 \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_2} &= -2 \sum x_{2i} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i}) = 0\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการปกติ คือ

$$\begin{aligned}a_0 n + a_1 \sum x_{1i} + a_2 \sum x_{2i} &= \sum y_i \\ a_0 \sum x_{1i} + a_1 \sum x_{1i}^2 + a_2 \sum x_{1i} x_{2i} &= \sum x_{1i} y_i \\ a_0 \sum x_{2i} + a_1 \sum x_{1i} x_{2i} + a_2 \sum x_{2i}^2 &= \sum x_{2i} y_i\end{aligned}$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i} y_i \\ \sum x_{2i} y_i \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

ข้อสังเกต 1.2

ค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าประมาณของสมการถดถอยพหุนาม คือ

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n - (m + 1)}}$$

เมื่อ *m* คือ อันดับของสมการพหุนาม

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

ตัวอย่างที่ 1.7

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร (Multiple Linear Regression)

<i>x</i> ₁	0	2	2.5	1	4	7
<i>x</i> ₂	0	1	2	3	6	2
<i>y</i>	5	10	9	0	3	27

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

	y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	$x_1 x_2$	$x_1 y$	$x_2 y$
	5	0	0	0	0	0	0	0
	10	2	1	4	1	2	20	10
	9	2.5	2	6.25	4	5	22.5	18
	0	1	3	1	9	3	0	0
	3	4	6	16	36	24	12	18
	27	7	2	49	4	14	189	54
Σ	54	16.5	14	76.25	54	48	243.5	100

ตาราง 5: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.7

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

จากสมการ 1.46 และตารางที่ 5 จะได้

$$\begin{bmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{bmatrix}$$

โดยใช้วิธีกำจัดแบบเกาส์ จะได้ $a_0 = 5, a_1 = 4, a_2 = -3$
ดังนั้น สมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย คือ $\hat{y} = 5 + 4x_1 - 3x_2$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์ (Multiple Linear Regression in Matrix Form)

Navigation icons: back, forward, search, etc.

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

จากสมการทั่วไปของสมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรที่มีตัวแปรอิสระ m ตัว นั่นคือ

$$y_i = a_0 + a_1x_{i1} + a_2x_{i2} + \cdots + a_mx_{im} + e_i \tag{1.47}$$

สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ จากสมการ (1.47) จะได้

$$y_1 = a_0 + a_1x_{11} + a_2x_{12} + \cdots + a_mx_{1m} + e_1 \tag{1.48}$$

$$y_2 = a_0 + a_1x_{21} + a_2x_{22} + \cdots + a_mx_{2m} + e_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_0 + a_1x_{n1} + a_2x_{n2} + \cdots + a_mx_{nm} + e_n$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

จากสมการ (1.48) เขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1x_{11} + a_2x_{12} + \cdots + a_mx_{1m} \\ a_0 + a_1x_{21} + a_2x_{22} + \cdots + a_mx_{2m} \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_{n1} + a_2x_{n2} + \cdots + a_mx_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

ดังนั้น สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์ (Multiple Linear Regression in Matrix Form) คือ

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{a} + \mathbf{e} \tag{1.50}$$

โดยที่

$$\mathbf{Y}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{n \times (m+1)} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}, \tag{1.51}$$

$$\mathbf{a}_{(m+1) \times 1} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.52}$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

โดยใช้กระบวนการเดียวกันกับหัวข้อ 1 จะได้ สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์ (Multiple Linear Regression in Matrix Form) คือ

$$a = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{1.53}$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 1.8
จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร (Multiple Linear Regression)

x_1	0	2	2.5	1	4	7
x_2	0	1	2	3	6	2
y	5	10	9	0	3	27

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

1. จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสอง

x	0	1	2	3	4
y	1	0	3	10	21

2. จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสอง

x	0	1	2	3	4	5	6
y	71	89	67	43	31	18	9

3. จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

x_1	0	1	1	2	2	3	3	4	4
x_2	0	1	2	1	2	1	2	1	2
y	15.1	17.9	12.7	25.6	20.5	35.1	29.7	45.4	40.2

แบบฝึกหัด

- 1. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
- 2. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
- 3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 3 จงหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
- 4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสอง และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
- 5. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสอง และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

เฉลยแบบฝึกหัด

- 1. $\hat{y} = 1 - 3x + 2x^2$
- 2. $\hat{y} = 81.93 - 8.28x - 0.78x^2$
- 3. $\hat{y} = 14.46086957 + 9.02521739x_1 - 5.70434783x_2$
- 4. $r = 1$
- 5. $r = 0.9503421$
- 6. $r = 0.9977592$
