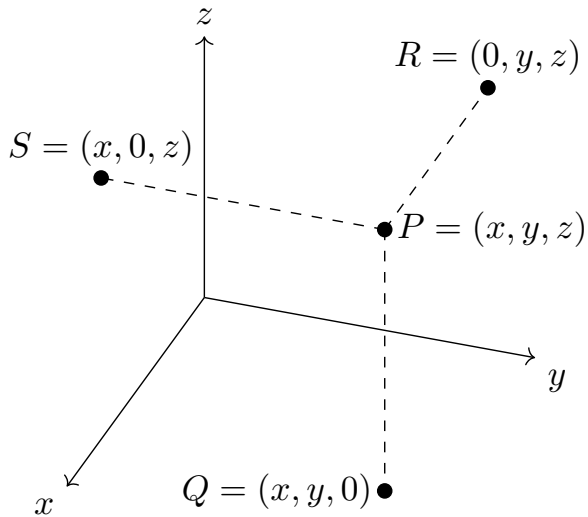


ปริภูมิสามมิติ

ดร. รัฐพรหม พรหมคำ

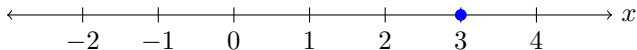
แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 2

พิกัดฉากสามมิติ

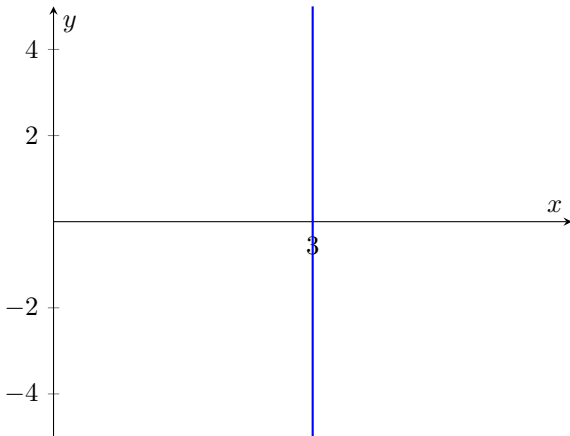


ตัวอย่าง 1 จงวาดกราฟ $x = 3$ บนระนาบ \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 และ \mathbb{R}^3

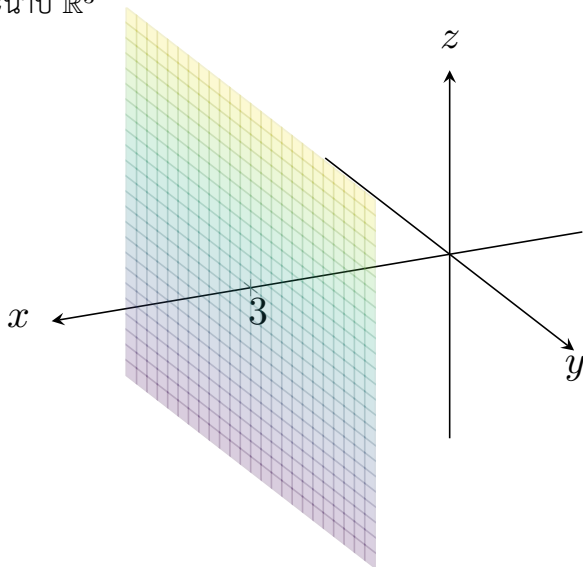
วิธีทำ

 $x = 3$ บนระนาบ \mathbb{R} 

วิธีทำ

 $x = 3$ บนระนาบ \mathbb{R}^2 

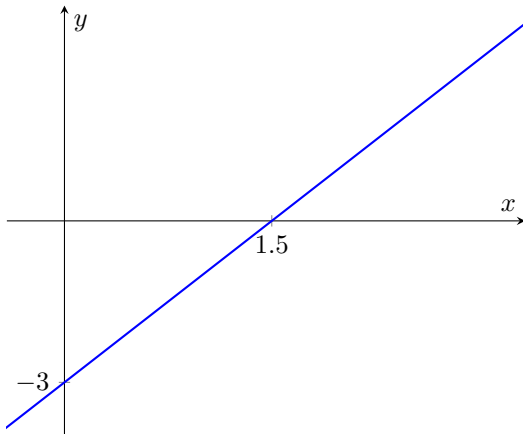
วิธีทำ

 $x = 3$ บนระนาบ \mathbb{R}^3 

ตัวอย่าง 2 จงวาดกราฟ $y = 2x - 3$ บนระนาบ \mathbb{R}^2 และ \mathbb{R}^3

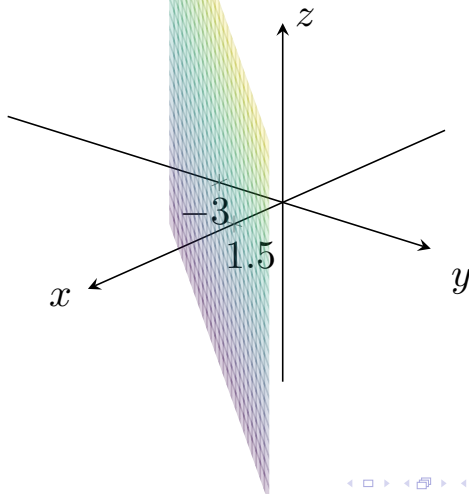
วิธีทำ

$$y = 2x - 3 \text{ บนระนาบ } \mathbb{R}^2$$



วิธีทำ

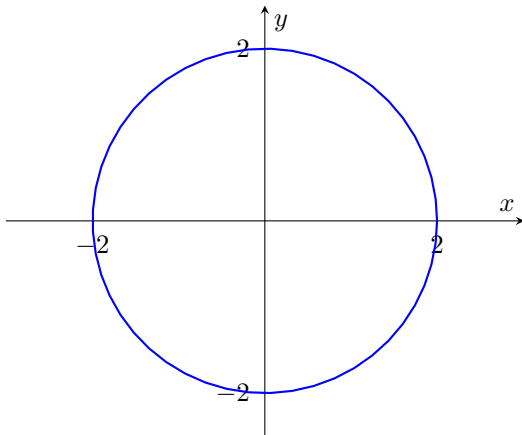
$$y = 2x - 3 \text{ บนระนาบ } \mathbb{R}^3$$



ตัวอย่าง 3 จงวาดกราฟ $x^2 + y^2 = 4$ บนระนาบ \mathbb{R}^2 และ \mathbb{R}^3

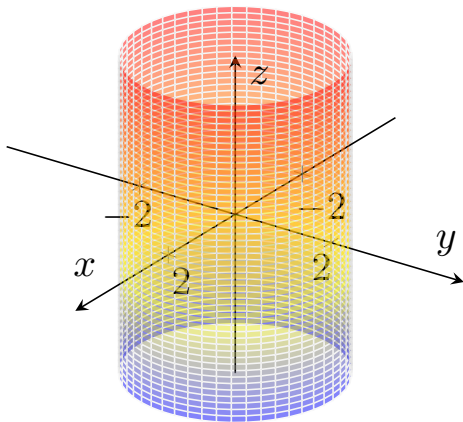
วิธีทำ

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ บนระนาบ } \mathbb{R}^2$$



วิธีทำ

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ บนระนาบ } \mathbb{R}^3$$



เส้นตรงในระนาบสามมิติ

พิจารณา

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}$$

$$\vec{a} = t \vec{v}$$

จะได้ว่า

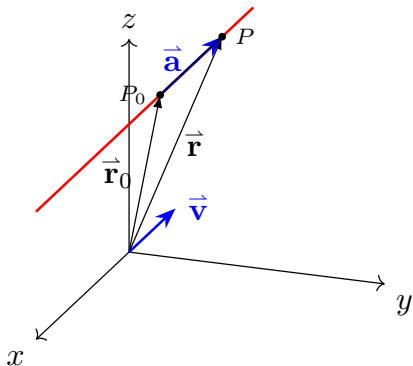
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

$$= \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle$$

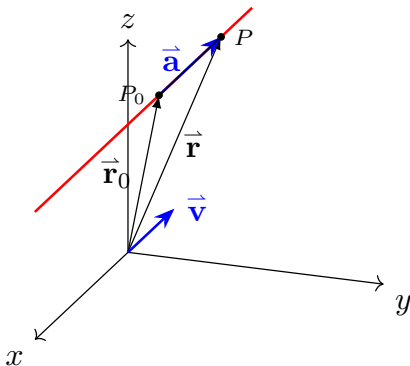
นั่นคือ

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle$$

$$= \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$



เส้นตรงในระนาบสามมิติ



สมการเส้นตรงแบบอิงตัวแปร
เสริม

$$x = x_0 + ta$$

$$y = y_0 + tb$$

$$z = z_0 + tc$$

สมการเส้นตรง

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ตัวอย่าง 4 จงเขียนสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, -1, 3)$
และ $(1, 4, -3)$

สมการระนาบสามมิติ

พิจารณา

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

จะได้ว่า

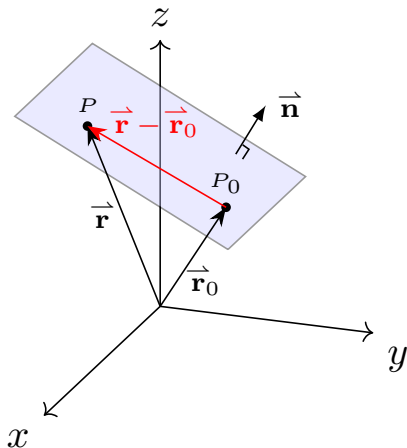
$$\langle a, b, c \rangle \cdot (\langle x, y, z \rangle - \langle x_0, y_0, z_0 \rangle) = 0$$

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

นั่นคือ

สมการระนาบ

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

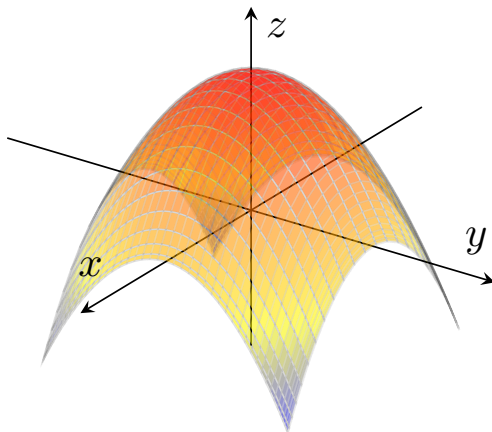


ตัวอย่าง 5 จงเขียนสมการระนาบที่ผ่านจุด
 $P = (1, -2, 0)$, $Q = (3, 1, 4)$ และ $R = (0, -1, 2)$

ตัวอย่าง 6 จงพิจารณาว่าเส้นตรง $\vec{r} = \langle 5, 2 - 5, 10 + 4t \rangle$ ตั้งฉากหรือขนานกับระนาบที่กำหนดโดย $-x + 2z = 10$

พื้นผิวของสมการกำลังสอง

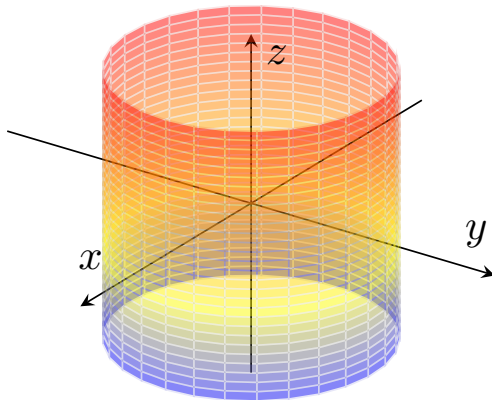
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$



พื้นผิวทรงกระบอก

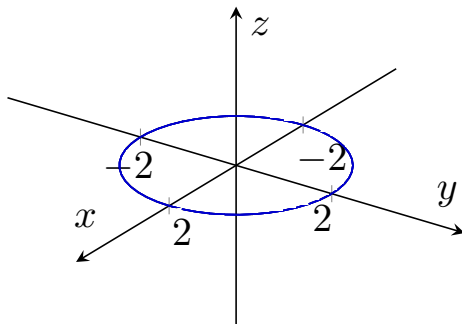
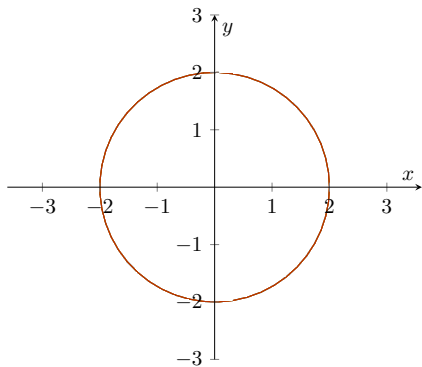
สมการพื้นผิวทรงกระบอก

ทรงกระบอกหน้าตัดกลม จุดศูนย์กลางหน้าตัด $(h, k, 0)$

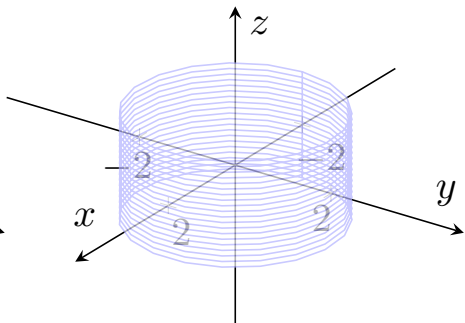
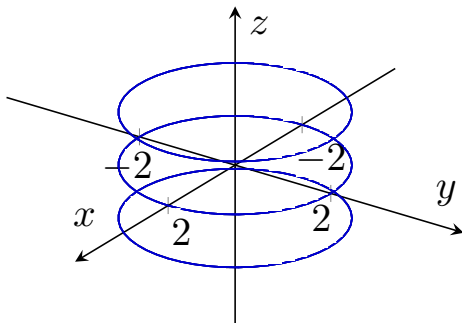
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$


ตัวอย่าง 7 จงวาดพื้นที่วงรีที่บอก $x^2 + y^2 = 4$

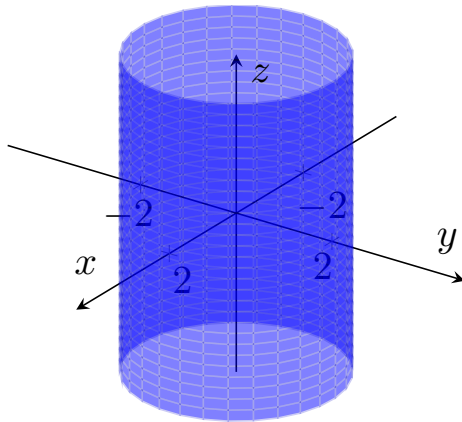
วิธีทำ



วิธีทำ



วิธีทำ



ตัวอย่าง 8 จงวาดพื้นผิวทรงกระบอก $x^2 + z^2 = 25$

ตัวอย่าง 9 จงวาดพื้นผิวทรงกระบอก $y^2 + z^2 = 1$

ตัวอย่าง 10 จงวาดพื้นที่ผิวทรงกระบอก $(x - 4)^2 + y^2 = 4$

ตัวอย่าง 11 จงวาดพื้นผิวทรงกระบอก
 $(y - 3)^2 + (z + 2)^2 = 1$

ตัวอย่าง 12 จงวาดพื้นผิวทรงกระบอก

$$x^2 + z^2 - 2x - 4z + 4 = 0$$

ตัวอย่าง 13 จงวาดเส้นพาราโบลา

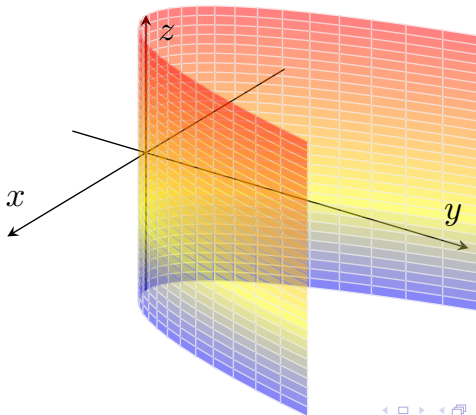
$$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$$

พื้นผิวพาราโบลา

สมการพื้นผิวพาราโบลา

พื้นผิวทรงพาราโบลา จุดยอด $(h, k, 0)$ ความยาวโฟกัส c หน่วย

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$



ตัวอย่าง 14 จงวาดพื้นผิวพาราโบลา $x^2 = 4y$

ตัวอย่าง 15 จงวาดพื้นผิวพาราโบลา $x^2 = 4z$

ตัวอย่าง 16 จงวาดพื้นผิวพาราโบลา $y^2 = 4x$

ตัวอย่าง 17 จงวาดพื้นผิวพาราโบลา $y^2 = 4z$

ตัวอย่าง 18 จงวาดพื้นผิวพาราโบลา $x^2 = 4x$

ตัวอย่าง 19 จงวาดพื้นผิวพาราโบลา $z^2 = 4y$

ตัวอย่าง 20 จงวาดพื้นผิวพาราโบลา $(x - 1)^2 = 2y$

ตัวอย่าง 21 จงวาดพื้นผิวพาราโบลา $y = x^2 + 1$

ตัวอย่าง 22 จงวาดพื้นที่พาราโบลา $y^2 + 6y + 9 = 2x - 8$

ตัวอย่าง 23 จงวาดพื้นผิวพาราโบลา $y^2 + 2y - 8z - 15 = 0$

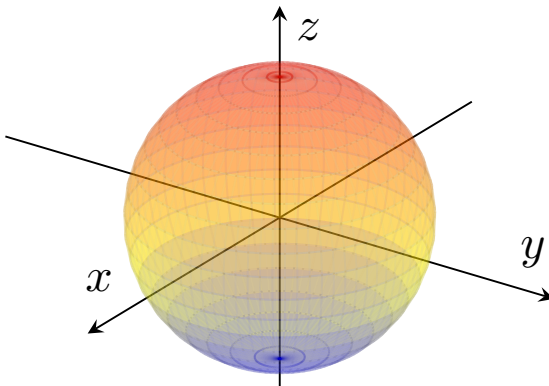
ตัวอย่าง 24 จงวาดพื้นผิวพาราโบลา $-9x + z^2 - 6z + 9 = 0$

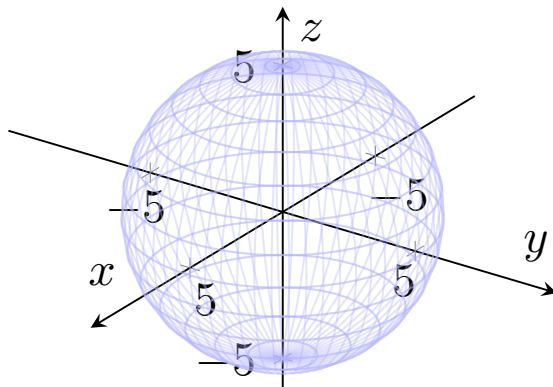
พื้นผิวทรงกลม

สมการพื้นผิวทรงกลม

ทรงกลมรัศมี r จุดศูนย์กลาง (h, k, v)

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - v)^2 = r^2$$



ตัวอย่าง 25 จงวาดกราฟ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ทรงกลมรัศมี 5 หน่วย และมีศูนย์กลางที่จุด $(0, 0, 0)$ 

ตัวอย่าง 26 จงวาดกราฟ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

ตัวอย่าง 27 จงวาดกราฟ $(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 1$

ตัวอย่าง 28 จงวาดกราฟ $x^2 + (y + 4)^2 + z^2 = 9$

ตัวอย่าง 29 จงวาดกราฟ $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 4$

ตัวอย่าง 30 จงวาดกราฟ $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 15 = 0$

ตัวอย่าง 31 จงวาดกราฟ $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 12 = 0$

ตัวอย่าง 32 จงวาดกราฟ $x^2 + y^2 + z^2 + 8z - 20 = 0$

ตัวอย่าง 33 จงวาดกราฟ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$

ตัวอย่าง 34 จงวาดกราฟ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 8z - 4 = 0$$

ตัวอย่าง 35 จงวาดกราฟ

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 25 = 0$$