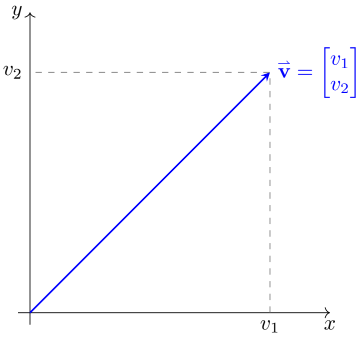
ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

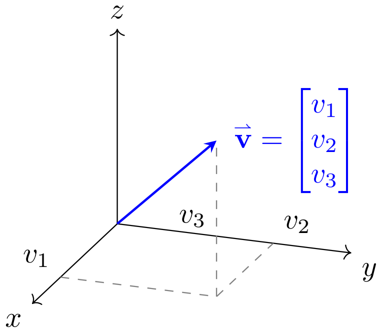
ดร. รัฐพรหม พรหมคำ

แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 2

เวกเตอร์



(a) เวกเตอร์ 2 มิติ



(b) เวกเตอร์ 3 มิติ

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก: การเปรียบเทียบบนระนาบ 2 และ 3 มิติ

สัญกรณ์ของเวกเตอร์ (3 มิติ)

สัญกรณ์แบบเซตมีลำดับ

$$\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \quad \text{หรือ} \quad \vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$$

สัญกรณ์แบบเมทริกซ์

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

การดำเนินการของเวกเตอร์

ให้ $k \in \mathbb{R}$, $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$

Addition

$$\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}$$

Scalar Multiplication

$$k\vec{\mathbf{v}} = k \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ kv_3 \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์หน่วย

กำหนดให้ $\vec{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1 \vec{\mathbf{i}} + v_2 \vec{\mathbf{j}} + v_3 \vec{\mathbf{k}}$$

Dot Product of Vectors

ให้ $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$

Dot Product

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Cross Product of Vectors

ให้ $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$

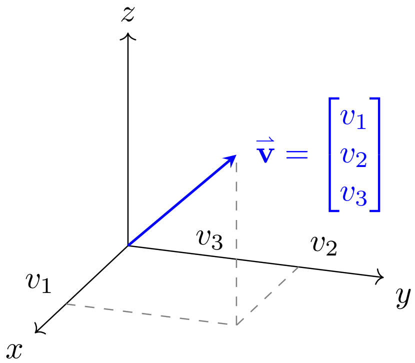
Cross Product

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} & v_1 & w_1 \\ \vec{\mathbf{j}} & v_2 & w_2 \\ \vec{\mathbf{k}} & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

หรือ

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

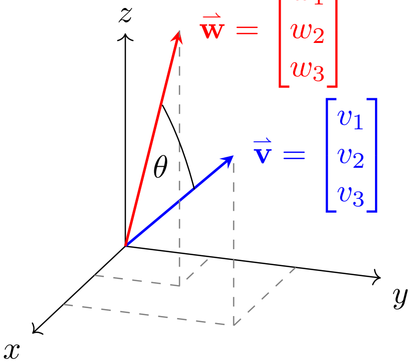
นอร์มของเวกเตอร์



(Euclidean) Norm

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

มุมระหว่างเวกเตอร์



$$\vec{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

การหามุมจากค่า Dot Product

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \|\vec{\mathbf{v}}\| \|\vec{\mathbf{w}}\| \cos(\theta)$$

หรือ

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\| \|\vec{\mathbf{w}}\|}$$

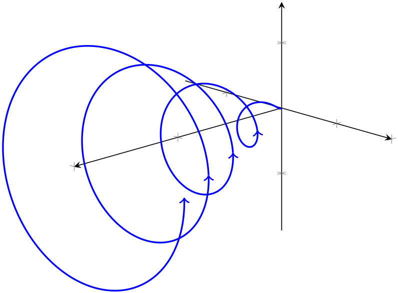
การหามุมจากค่า Cross Product

$$\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\| \|\vec{\mathbf{w}}\| \sin(\theta)$$

หรือ

$$\sin(\theta) = \frac{\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|}{\|\vec{\mathbf{v}}\| \|\vec{\mathbf{w}}\|}$$

ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์



กำหนดให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix} = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\vec{\imath} + g(t)\,\vec{\jmath} + h(t)\,\vec{\mathbf{k}}$$

เราจะเรียก $\vec{\mathbf{r}}$ ว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = (t^2+1)\,\vec{\mathbf{i}} + (2t-3)\,\vec{\mathbf{j}} + 2\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหา

1. $\vec{\mathbf{r}}(1)$
2. $\vec{\mathbf{r}}(2)$
3. $2\vec{\mathbf{r}}(1) - \vec{\mathbf{r}}(2)$
4. $\vec{\mathbf{r}}(1) \cdot \vec{\mathbf{r}}(2)$
5. $\vec{\mathbf{r}}(1) \times \vec{\mathbf{r}}(2)$
6. $\|\vec{\mathbf{r}}(1)\|$

โดเมนของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

กำหนดให้

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = f(t)\,\vec{\mathbf{i}} + g(t)\,\vec{\mathbf{j}} + h(t)\,\vec{\mathbf{k}}$$

โดเมนของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{\mathbf{r}}$ แทนด้วย $D_{\vec{\mathbf{r}}}$ หาได้จาก

$$D_{\vec{\mathbf{r}}} = D_f \cap D_g \cap D_h$$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \dfrac{2}{t}\,\vec{\mathbf{i}} + 3\,\vec{\mathbf{j}} + \sqrt{t+3}\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหาโดเมนของ $\vec{\mathbf{r}}$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \langle \frac{2t}{t^2-4}, \frac{3}{t-1}, \sqrt{4-t} \rangle$ จงหาโดเมนของ $\vec{\mathbf{r}}$

ตัวอย่าง 4 กำหนดให้

$\vec{\mathbf{r}}(t) = 4\ln(t+1)\,\vec{\mathbf{i}} + 3e^{t}\,\vec{\mathbf{j}} + \dfrac{2}{\sqrt{5-2t}}\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหาโดเมนของ $\vec{\mathbf{r}}$

นอร์มของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

กำหนดให้

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = f(t)\,\vec{\mathbf{i}} + g(t)\,\vec{\mathbf{j}} + h(t)\,\vec{\mathbf{k}}$$

นอร์มของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{\mathbf{r}}$ แทนด้วย $\|\vec{\mathbf{r}}\|$ หาได้จาก

$$\|\vec{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{(f(t)^2) + (g(t))^2 + (h(t))^2}$$

ตัวอย่าง 5 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = -5\sin(t)\,\vec{\mathbf{i}} + 5\cos(t)\,\vec{\mathbf{j}} + 12\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\|\vec{\mathbf{r}}\|$

ตัวอย่าง 6 กำหนดให้
$\vec{\mathbf{r}}(t) = -\mathrm{e}^t \sin(3t)\,\vec{\mathbf{i}} + \mathrm{e}^t \cos(3t)\,\vec{\mathbf{j}} + \sqrt{8}\mathrm{e}^t\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\|\vec{\mathbf{r}}\|$

แคลคูลัสของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = f(t)\,\vec{\imath} + g(t)\,\vec{\jmath} + h(t)\,\vec{\mathbf{k}}$

ลิมิต

$$\lim_{t\to t_0} \vec{\mathbf{r}}(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)\vec{\imath} + \left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right)\vec{\jmath} + \left(\lim_{t\to t_0} h(t)\right)\vec{\mathbf{k}}$$

อนุพันธ์

$$r'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\mathbf{k}}$$

ปฏิยานุพันธ์

$$\int \vec{\mathbf{r}}(t)\mathrm{d}t = \left(\int f(t)\mathrm{d}t\right)\vec{\imath} + \left(\int g(t)\mathrm{d}t\right)\vec{\jmath} + \left(\int h(t)\mathrm{d}t\right)\vec{\mathbf{k}}$$

ตัวอย่าง 7 ให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \dfrac{2t}{t-1}\,\vec{\mathbf{i}} + \dfrac{t}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\vec{\mathbf{j}} + \dfrac{\sin(2t)}{t}\,\vec{\mathbf{k}}$

จงหา $\lim\limits_{t\to 0} \vec{\mathbf{r}}(t)$

ตัวอย่าง 8 ให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \dfrac{3}{t^2}\,\vec{\mathbf{i}} + \dfrac{2\ln(t)}{t^2-1}\,\vec{\mathbf{j}} + \cos(\pi t)\,\vec{\mathbf{k}}$
จงหา $\lim\limits_{t\to 0}\vec{\mathbf{r}}(t)$

ตัวอย่าง 9 ให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \dfrac{3}{t^2}\,\vec{\mathbf{i}} + \dfrac{2\ln(t)}{t^2-1}\,\vec{\mathbf{j}} + \cos(\pi t)\,\vec{\mathbf{k}}$

จงหา $\lim\limits_{t\to 1} \vec{\mathbf{r}}(t)$

ตัวอย่าง 10 ให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \langle \dfrac{3t^2}{t^3 - t^2}, \dfrac{3t^2}{t^2 - 1}, \dfrac{1 - \cos(2t)}{t^2} \rangle$
จงหา $\lim\limits_{t \to 0} \vec{\mathbf{r}}(t)$

ตัวอย่าง 11 กำหนดให้

$\vec{\mathbf{r}}(t) = (3t+1)\,\vec{\mathbf{i}} + \left(2t^2 - 5t\right)\vec{\mathbf{j}} + \left(4t^3 - 2\right)\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}\,'(t)$

ตัวอย่าง 12 กำหนดให้

$\vec{\mathbf{r}}(t) = \sin(3t)\,\vec{\mathbf{i}} + \cos(3t)\,\vec{\mathbf{j}} + (-4)\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}\,'(t)$

ตัวอย่าง 13 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \langle \cos(\mathrm{e}^{2t}), -\sin(\mathrm{e}^{2t}), 5\mathrm{e}^{2t} \rangle$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}\,'(0)$

ตัวอย่าง 14 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \langle \mathrm{e}^{-t}, 3\mathrm{e}^{-t}, t\mathrm{e}^{-t} \rangle$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}\,'(0)$

ตัวอย่าง 15 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = 2t^3\,\vec{\mathbf{i}} + 5e^{2t}\,\vec{\mathbf{j}} + \ln(t)\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}\,''(t)$

ตัวอย่าง 16 กำหนดให้
$\vec{\mathbf{r}}(t) = \left(t^2 + 2t\right)\,\vec{\mathbf{i}} + \mathrm{e}^{-t}\vec{\mathbf{j}} + \sin(2t)\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}\,'(0)$ และ $\vec{\mathbf{r}}\,''(0)$

ตัวอย่าง 17 กำหนดให้

$\vec{\mathbf{r}}(t) = \sin(3t^2)\,\vec{\mathbf{i}} + \cos(3t^2)\,\vec{\mathbf{j}} + 4t^2\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\|$

ตัวอย่าง 18 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}(t) = (2t-5)\,\vec{\mathbf{i}} + t^2\,\vec{\mathbf{j}} + 4\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\displaystyle\int \vec{\mathbf{r}}(t)\mathrm{d}t$

ตัวอย่าง 19 จงหา $\int \left(t^2 \vec{\mathbf{i}} + \frac{3}{t^2} \vec{\mathbf{j}} + 6\sqrt{t}\, \vec{\mathbf{k}} \right) \mathrm{d}t$

ตัวอย่าง 20 จงหา $\int \left((3t-1)^3 \vec{\mathbf{i}} + \mathrm{e}^{2t} \vec{\mathbf{j}} + 3\mathrm{e}^{-t} \vec{\mathbf{k}} \right) \mathrm{d}t$

ตัวอย่าง 21 จงหา $\displaystyle\int \left(\ln(t)\,\vec{\mathbf{i}} + t\mathrm{e}^{2t}\,\vec{\mathbf{j}} + \sec(2\pi)\,\vec{\mathbf{k}}\right) \mathrm{d}t$

ตัวอย่าง 22 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}'(t) = 5\,\vec{\mathbf{i}} + (4t-3)\,\vec{\mathbf{j}} + 6t^2\,\vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}(t)$

ตัวอย่าง 23 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}'(t) = 5\,\vec{\mathbf{i}} + (4t-3)\,\vec{\mathbf{j}} + 6t^2\,\vec{\mathbf{k}}$ และ $\vec{\mathbf{r}}(1) = 6\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}(t)$

ตัวอย่าง 24 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}'(t) = \cos(t)\,\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\,\vec{\mathbf{j}}$ และ $\vec{\mathbf{r}}(\pi) = \vec{\mathbf{i}} + 3\,\vec{\mathbf{j}}$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}(t)$

ตัวอย่าง 25 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}'(t) = 2t\,\vec{\mathbf{i}} + \mathrm{e}^{3t}\,\vec{\mathbf{j}} + (1-t)\,\vec{\mathbf{k}}$ และ $\vec{\mathbf{r}}(0) = \vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}(t)$

ตัวอย่าง 26 กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}'(t) = \langle \mathrm{e}^{t}, 2t, \ln(t) \rangle$ และ $\vec{\mathbf{r}}(0) = \langle \mathrm{e}, 0, 0 \rangle$ จงหา $\vec{\mathbf{r}}(t)$

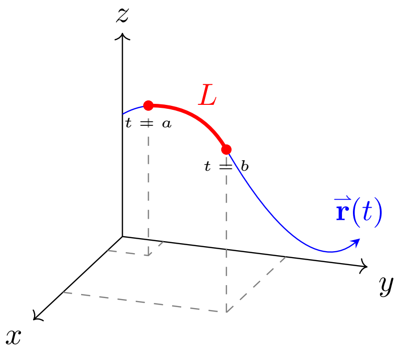
ตัวอย่าง 27 จงหา $\displaystyle\int_1^2 \left(6t\,\vec{\mathbf{i}} + 3t^2\,\vec{\mathbf{j}} + 2\,\vec{\mathbf{k}}\right) \mathrm{d}t$

ตัวอย่าง 28 จงหา $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(2t\,\vec{\mathbf{i}}-\vec{\mathbf{j}}-(t^2+1)\,\vec{\mathbf{k}}\right)\mathrm{d}t$

ตัวอย่าง 29 จงหา $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin(2t)\,\vec{\mathbf{i}} + \cos(2t)\,\vec{\mathbf{k}}\right) \mathrm{d}t$

ตัวอย่าง 30 จงหา $\int_1^4 \langle 0, \sqrt{t}, -\frac{3}{t^2} \rangle \mathrm{d}t$

ความยาวส่วนโค้ง (Arc Length)



กำหนดให้ $\vec{\mathbf{r}}(t)$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ นั่นคือ

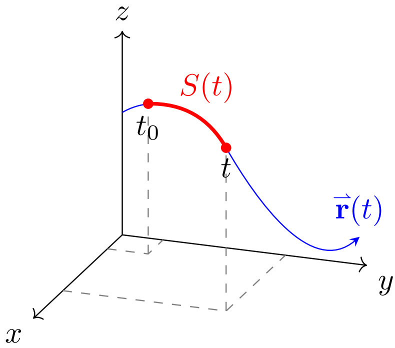
1. $\lim_{t\to t_0} \vec{\mathbf{r}}\,'(t) = \vec{\mathbf{r}}\,'(t_0)$ สำหรับทุกค่า $t_0 \in D_{\vec{\mathbf{r}}}$
2. $\vec{\mathbf{r}}\,'(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$ สำหรับทุกค่า $t \in \mathbb{R}$

ความยาวส่วนโค้ง

$$L = \int_a^b \|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\| \mathrm{d}t$$

ตัวอย่าง 31 จงหาความยาวส่วนโค้งของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = 3\sin(2t)\,\vec{\mathbf{i}} + 3\cos(2t)\,\vec{\mathbf{j}} + 0\,\vec{\mathbf{k}}$ เมื่อ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ความยาวส่วนโค้งในรูปสมการพาราเมตริก



ฟังก์ชันค่าจริง S แสดงความยาวส่วนโค้งของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{\mathbf{r}}$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ โดยมีจุด $t = t_0$ เป็นจุดอ้างอิงเริ่มต้น

ความยาวส่วนโค้ง

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{\mathbf{r}}\,'(u)\| \mathrm{d}u$$

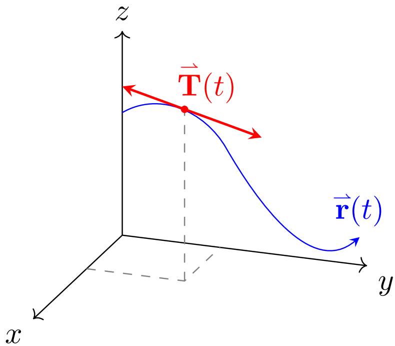
ตัวอย่าง 32 จงหาสมการพาราเมตริกที่แสดงถึงความยาวส่วนโค้งของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = 3\sin(2t)\,\vec{\mathbf{i}} + 3\cos(2t)\,\vec{\mathbf{j}} + 0\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่จุด t ใด ๆ โดยใช้ $t = 0$ เป็นจุดอ้างอิงเริ่มต้น

ตัวอย่าง 33 จงหาสมการพาราเมตริกที่แสดงถึงความยาวส่วนโค้งของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \cos(3t^2)\,\vec{\mathbf{i}} + \sin(3t^2)\,\vec{\mathbf{j}} + 4t^2\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่จุด t ใด ๆ โดยใช้ $t = 0$ เป็นจุดอ้างอิงเริ่มต้น

ตัวอย่าง 34 จงหาสมการพาราเมตริกที่แสดงถึงความยาวส่วนโค้งของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \sin(\mathrm{e}^t)\,\vec{\mathbf{i}} + \cos(\mathrm{e}^t)\,\vec{\mathbf{j}} + \sqrt{3}\mathrm{e}^t\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่จุด t ใด ๆ โดยใช้ $t = 0$ เป็นจุดอ้างอิงเริ่มต้น

ตัวอย่าง 35 จงหาสมการพาราเมตริกที่แสดงถึงความยาวส่วนโค้งของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \mathrm{e}^t \cos(t)\,\vec{\mathbf{i}} + \mathrm{e}^t \sin(t)\,\vec{\mathbf{j}} + 0\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่จุด t ใด ๆ โดยใช้ $t = 0$ เป็นจุดอ้างอิงเริ่มต้น

เวกเตอร์สัมผัส (Tangent Vectors)



เวกเตอร์สัมผัสหน่วย

$$\vec{\mathbf{T}}(t) = \frac{\vec{\mathbf{r}}\,'(t)}{\|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\|}$$

เวกเตอร์ปกติหน่วย

$$\vec{\mathbf{N}}(t) = \frac{\vec{\mathbf{T}}\,'(t)}{\|\vec{\mathbf{T}}\,'(t)\|}$$

ตัวอย่าง 36 จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วยและเวกเตอร์ปกติหน่วยของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = 4\cos(t)\,\vec{\mathbf{i}} + 0\,\vec{\mathbf{j}} + 4\sin(t)\,\vec{\mathbf{k}}$

ตัวอย่าง 37 จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วยและเวกเตอร์ปกติหน่วยของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \sin(\mathrm{e}^t)\,\vec{\mathbf{\imath}} - \cos(\mathrm{e}^t)\,\vec{\mathbf{\jmath}} + \mathrm{e}^t\,\vec{\mathbf{k}}$

ตัวอย่าง 38 จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วยและเวกเตอร์ปกติหน่วยของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = 6\cos(2t)\,\vec{\mathbf{i}} + 6\sin(2t)\,\vec{\mathbf{j}} - 5t\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่ $t = \dfrac{\pi}{2}$

ตัวอย่าง 39 จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วยและเวกเตอร์ปกติหน่วยของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = 6\cos(2t)\,\vec{\mathbf{i}} + 6\sin(2t)\,\vec{\mathbf{j}} - 5t\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่ $t = \dfrac{\pi}{2}$

ตัวอย่าง 40 จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วยและเวกเตอร์ปกติหน่วย ของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \sin(\ln t)\,\vec{\mathbf{\imath}} - \cos(\ln t)\,\vec{\mathbf{\jmath}} + \ln t\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่ $t = 1$

ตัวอย่าง 41 จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วยและเวกเตอร์ปกติหน่วยของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \mathrm{e}^t\,\vec{\mathbf{\imath}} + \mathrm{e}^t \cos(t)\,\vec{\mathbf{\jmath}} + \mathrm{e}^t \sin(t)\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่ $t = 0$

ความโค้ง (Curvature)

ความโค้งของเส้นโค้ง $\vec{\mathbf{r}}$ ที่จุด $t \in \mathbb{R}$:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{\mathbf{T}}\,'(t)\|}{\|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\|} = \frac{\|\vec{\mathbf{r}}\,'(t) \times \vec{\mathbf{r}}\,''(t)\|}{\|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\|^3} \quad \text{เมื่อ } \|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\| \neq 0$$

รัศมีความโค้งของเส้นโค้ง $\vec{\mathbf{r}}$ ที่จุด $t \in \mathbb{R}$:

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} \quad \text{เมื่อ } \kappa(t) \neq 0$$

ตัวอย่าง 42 จงหาความโค้งและรัศมีความโค้งของ
$\vec{\mathbf{r}}(t) = 2t\,\vec{\mathbf{\imath}} + t^2\,\vec{\mathbf{\jmath}} + \dfrac{t^3}{3}\,\vec{\mathbf{k}}$

ตัวอย่าง 43 จงหาความโค้งและรัศมีความโค้งของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = \mathrm{e}^{3t}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathrm{e}^{-t}\,\vec{\mathbf{j}} + 2\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่ $t = 0$

ตัวอย่าง 44 จงหาความโค้งและรัศมีความโค้งของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = 5\cos(t)\,\vec{\mathbf{\imath}} + 0\,\vec{\mathbf{\jmath}} + 4\sin(t)\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่ $t = \pi$

ตัวอย่าง 45 จงหาความโค้งและรัศมีความโค้งของ

$\vec{\mathbf{r}}(t) = \mathrm{e}^{t}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathrm{e}^{-t}\,\vec{\mathbf{j}} + t\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่ $t = 0$

ตัวอย่าง 46 จงหาความโค้งและรัศมีความโค้งของ $\vec{\mathbf{r}}(t) = t\cos(t)\,\vec{\mathbf{i}} + t\sin(t)\,\vec{\mathbf{j}} + t\,\vec{\mathbf{k}}$ ที่ $t = 0$