

# ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ดร. รัฐพรหม พรหมคำ

แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 2

# ลิมิตของฟังก์ชัน

## ลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงหนึ่งตัวแปร

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

# ลิมิตของฟังก์ชัน

## ลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) \quad \text{หรือ} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

ตัวอย่าง 1    จงหาค่า  $\lim_{(x,y) \rightarrow (5,1)} \frac{xy}{x+y}$

ตัวอย่าง 2    จงหาค่า  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{3x^2 + y^2}{x - y}$

ตัวอย่าง 3    จงหาค่า  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{2x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2}$

ตัวอย่าง 4     จงหาค่า  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + 3y^4}$

ตัวอย่าง 5     จงหาค่า  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$



ตัวอย่าง 6 จงหาค่า  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,0,4)} \frac{x^3 - ze^2y}{6x + 2y - 3z}$

# ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

## บทนิยาม (ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน)

ฟังก์ชัน  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  เมื่อ  $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$  จะต่อเนื่องที่  $(a, b) \in A \times B$  ถ้า

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

ตัวอย่าง 7 ฟังก์ชันที่กำหนดโดย  $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$   
ต่อเนื่องที่  $(1, 1)$  หรือไม่

ตัวอย่าง 8 ฟังก์ชันที่กำหนดโดย  $f(x, y) = \frac{3x + 2y}{x + y + 1}$  ต่อเนื่อง  
ที่  $(5, -3)$  หรือไม่

ตัวอย่าง 9 ฟังก์ชันที่กำหนดโดย  $f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{x^2 - 4y^2}$  ต่อเนื่อง  
ที่  $(2, 1)$  หรือไม่

ตัวอย่าง 10 ฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x^2 - 4y^2} & \text{ถ้า } (x, y) \neq (2, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{ถ้า } (x, y) = (2, 1) \end{cases}$$

ต่อเนื่องที่  $(2, 1)$  หรือไม่

## ตัวอย่าง 11 ฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - 4y}{6y + 7x} & \text{ถ้า } x = y = 0 \\ x + y & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

ต่อเนื่องที่  $(0, 0)$  หรือไม่

## ตัวอย่าง 12 กำหนดให้

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3y^2 - 3x^2}{2y^2 - xy - x^2} & \text{ถ้า } (x, y) \neq (1, 1) \\ 2kx - y^2 & \text{ถ้า } (x, y) = (1, 1) \end{cases}$$

จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้  $f$  ต่อเนื่องที่  $(1, 1)$