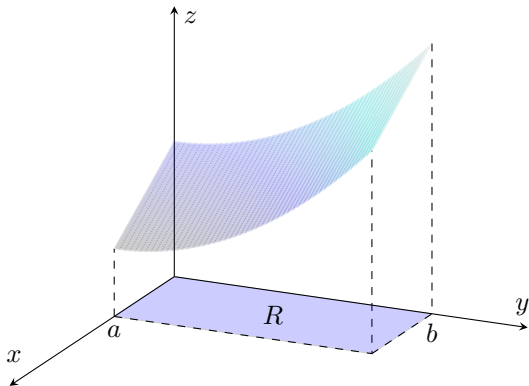


# อินทิกรัลหลายชั้น

ดร. รัฐพรหม พรหมคำ

แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 2

## อินทิกรัลสองชั้น



$$V = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A = \iint_R f(x, y) dA$$

# อินทิกรัลสองชั้น

## Fubini's Theorem

ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน  $R = [a, b] \times [c, d]$  แล้ว

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า  $\iint_R 6xy^2 \, dA$  เมื่อ  $R = [2, 4] \times [1, 2]$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า  $\iint_R 2x - 4y^3 \, dA$  เมื่อ

$$R = [-5, 4] \times [0, 3]$$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่า  $\iint_R x^2 y + \cos(\pi x) + \sin(\pi y) \, dA$  เมื่อ  
 $R = [-2, 1] \times [0, 1]$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่า  $\iint_R \frac{1}{(2x+3y)^2} dA$  เมื่อ  
 $R = [0, 1] \times [1, 2]$

ตัวอย่าง 5 จงหาค่า  $\iint_R xe^{xy} dA$  เมื่อ  $R = [-1, 2] \times [0, 1]$



ตัวอย่าง 6 จงหาค่า  $\iint_R x \cos^2(y) \, dA$  เมื่อ

$$R = [-2, 3] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

ตัวอย่าง 7 จงหาค่า  $\iint_R e^{\frac{x}{y}} dA$  เมื่อ

$$R = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$$

ตัวอย่าง 8 จงหาค่า  $\iint_R 4xy - y^3 \, dA$  เมื่อ  $R$  คือ บริเวณที่ถูก  
ปิดล้อมด้วย  $y = \sqrt{x}$  และ  $y = x^3$

ตัวอย่าง 9 จงหาค่า  $\iint_R 6x^2 - 40y \, dA$  เมื่อ  $R$  คือ บริเวณที่ถูก  
ปิดล้อมด้วยจุด  $(0, 3)$ ,  $(1, 1)$  และ  $(5, 3)$

ตัวอย่าง 10 จงหาค่า  $\iint_R 4 \, dA$  เมื่อ  $R$  คือ บริเวณที่ถูกปิดล้อม  
ด้วย  $y = x^3$ ,  $y = 5 - 4x$ ,  $y = 0$

ตัวอย่าง 11 จงหาค่า  $\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dy dx$

ตัวอย่าง 12 จงเปลี่ยนลำดับปริพันธ์  $\int_0^{16} \int_{\sqrt{y}}^4 (4 - xy) \, dx \, dy$   
โดยไม่ต้องคำนวณค่า

ตัวอย่าง 13 จงหาค่า  $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4 + 1} \, dx \, dy$



ตัวอย่าง 14 จงหาปริมาตรทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว

$z = 16xy + 200$  เหนือระนาบ  $xy$  ที่ถูกล้อมด้วย  $y = x^2$  และ  $y = 8 - x^2$

ตัวอย่าง 15 จงหาปริมาตรทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว  
 $4x + 2y + z = 10, y = 3x, z = 0, x = 0$

ตัวอย่าง 16    จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้โดยการแปลงจากพิกัดฉาก  
เป็นพิกัดเชิงขั้ว

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dA$$

เมื่อ  $D$  คือ พื้นที่ของวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วยและมีจุดศูนย์กลางที่  
จุดกำเนิด

ตัวอย่าง 17    จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้โดยการแปลงจากพิกัดฉาก  
เป็นพิกัดเชิงขั้ว

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA$$

เมื่อ  $D$  คือ พื้นที่ของวงกลมครึ่งล่างของ  $x^2 + y^2 = 16$

ตัวอย่าง 18    จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้โดยการแปลงจากพิกัดฉาก  
เป็นพิกัดเชิงขั้ว

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{4-x^2}} x\sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$$

ตัวอย่าง 19 จงหาค่า  $\iiint_B 8xyz \, dV$  เมื่อ

$$B = [2, 3] \times [1, 2] \times [0, 1]$$

ตัวอย่าง 20 จงหาค่า  $\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{x^2} 2xy^2 z \, dz \, dx \, dy$