

# อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

ดร. รัฐพรหม พรหมคำ

แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 2

# อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริงหนึ่งตัวแปร

ถ้า  $y = f(x)$  แล้วอนุพันธ์ของ  $f$  ที่  $x$  กำหนดโดย

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

# อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

## อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร

ถ้า  $z = f(x, y)$  แล้วอนุพันธ์ย่อยของ  $f$  ที่  $(x, y)$  กำหนดโดย

$$f_x(x) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

และ

$$f_y(x) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

ตัวอย่าง 1 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 16$$

ตัวอย่าง 2 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(x, y) = x^5 + 3\sqrt{y} - 10$$

# กฏลูกโซ่

## Chain Rule

ให้  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  และแต่ละ  $x_i = g_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$  จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้  $z = e^{2r} \sin(3\theta)$ ,  $r = st - t^2$ ,  
 $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$  จงหา  $\frac{\partial z}{\partial s}$  และ  $\frac{\partial z}{\partial t}$

ตัวอย่าง 4 กำหนดให้  $z = u^2 - vt$ ,  $t = -\frac{y}{x}$ ,  $u = e^{2x}$  และ  $y = \ln(y)$  จงหา  $\frac{\partial z}{\partial x}$



ตัวอย่าง 5 กำหนดให้  $z = \sin(x^2 + 2y^2)$ ,  $x = -\frac{v}{u}$ ,  $u = e^{2x}$   
และ  $y = 2\sqrt{u}$  จงหา  $\frac{\partial z}{\partial u}$

ตัวอย่าง 6 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(x, y) = x^3y - 10y^2z^3 + 52x - 3 \tan(2y)$$

ตัวอย่าง 7 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(x, y) = x^5 \ln(y^2) + \frac{8}{t^2} - \sqrt[7]{y^2}$$

ตัวอย่าง 8 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(x, y) = \cos\left(\frac{3}{x}\right) e^{x^2 y - 5y^3}$$

ตัวอย่าง 9 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$z = \frac{9u}{u^2 + 5v}$$

ตัวอย่าง 10 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$g(x, y, z) = \frac{x \sin(y)}{z^2}$$

ตัวอย่าง 11 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$z = \sqrt{x^2 + \ln(3x - 5y^2)}$$

ตัวอย่าง 12 จงหา  $\frac{\partial z}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial z}{\partial y}$  เมื่อ  $x^4 z^3 - 5xy^3 z = 3x^2 + y^4$



ตัวอย่าง 13 จงหา  $\frac{\partial z}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial z}{\partial y}$  เมื่อ

$$x^2 \cos(5y - 2z) = 2 - y \sin(8xz)$$

# อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

## อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ตัวอย่าง 14 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองทั้งหมดของฟังก์ชันที่กำหนดโดย  $f(x, y) = \sin(3x) - x^3e^4y + 4y^5$

ตัวอย่าง 15 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองทั้งหมดของฟังก์ชันที่กำหนดโดย  $f(x, y) = 3xe^{-x^3y^3}$

# อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

## อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

$$f_{xyx} = (f_{xy})_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

$$f_{yxx} = (f_{yx})_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

ตัวอย่าง 16 กำหนดให้  $f(x, y) = 2x^3 \sin(y)$  จงหา  $f_{xyx}$  และ  $f_{xyx}(1, \pi)$

ตัวอย่าง 17 กำหนดให้  $f(x, y, z) = z^3 y^2 \ln(x)$  จงหา  $f_{xxxyz}$