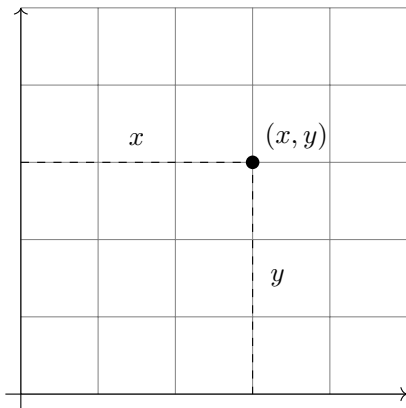


# เส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

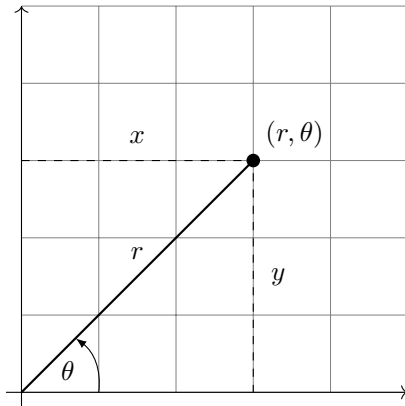
ดร. รัฐพรหม พรหมคำ

แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 2

# ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate System)

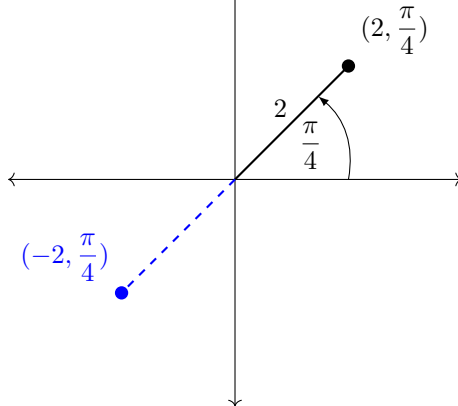


ระบบพิกัดฉาก  
(Cartesian Coordinate System)

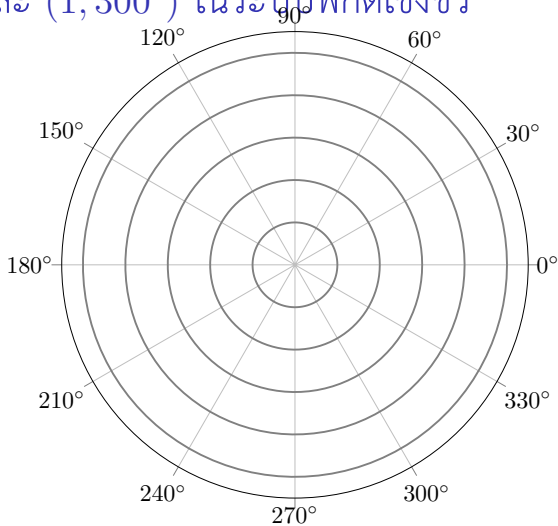


ระบบพิกัดเชิงขั้ว  
(Polar Coordinate System)

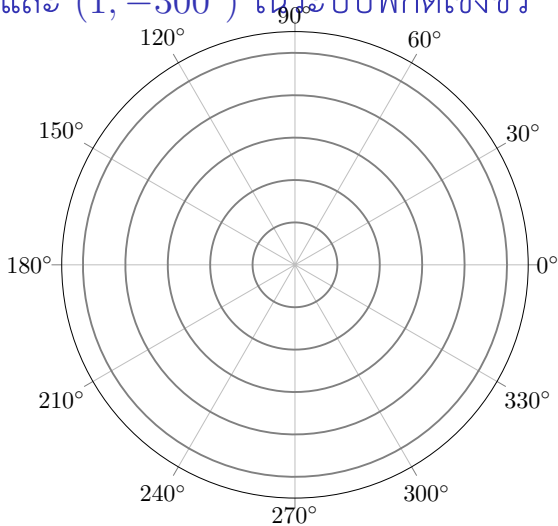
# ตัวอย่าง 1    พิจารณาจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้



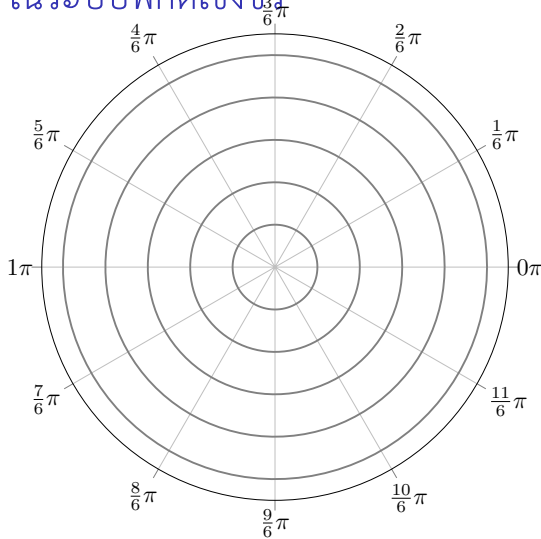
ตัวอย่าง 2 จงลงจุดต่อไปนี้  $(1, 0^\circ)$ ,  $(1, 45^\circ)$ ,  $(1, 90^\circ)$ ,  $(1, 120^\circ)$  และ  $(1, 300^\circ)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



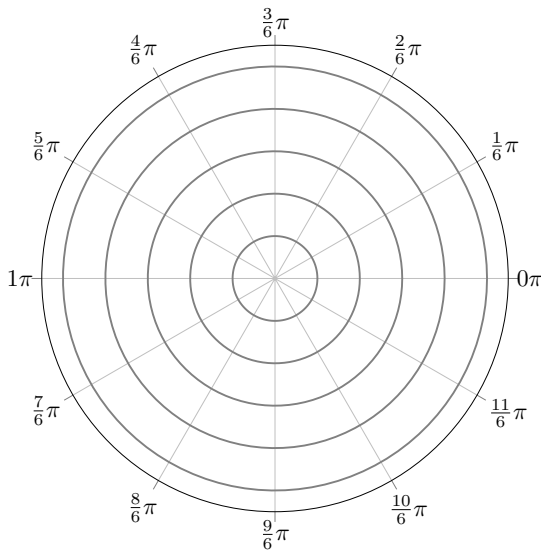
ตัวอย่าง 3 จงลงจุดต่อไปนี้  $(1, 0^\circ)$ ,  $(1, -45^\circ)$ ,  $(1, -90^\circ)$ ,  $(1, -120^\circ)$  และ  $(1, -300^\circ)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



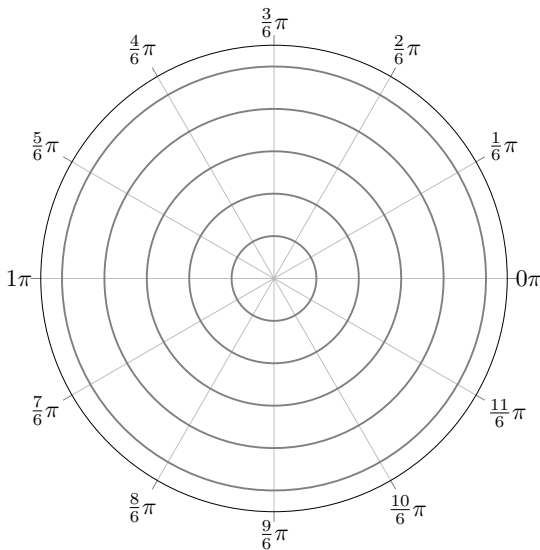
ตัวอย่าง 4 จงลงจุดต่อไปนี้  $(1, 0)$ ,  $(1, \frac{\pi}{2})$ ,  $(1, \pi)$ ,  $(1, \frac{3\pi}{2})$   
และ  $(1, 2\pi)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ตัวอย่าง 5 จงลงจุดต่อไปนี้  $(3, \frac{\pi}{3})$  และ  $(6, \frac{5\pi}{6})$  ในระบบ  
พิกัดเชิงขั้ว

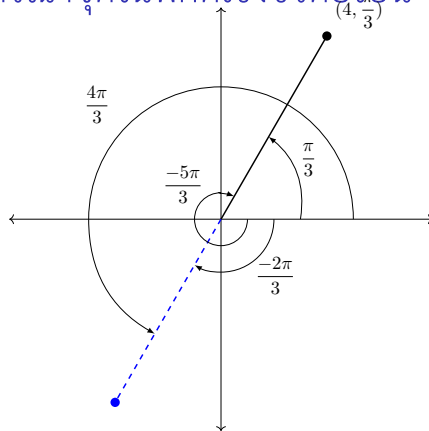


ตัวอย่าง 6 จงลงจุดต่อไปนี้  $(-3, \frac{\pi}{3})$  และ  $(6, -\frac{5\pi}{6})$  ในระบบ  
พิกัดเชิงขั้ว



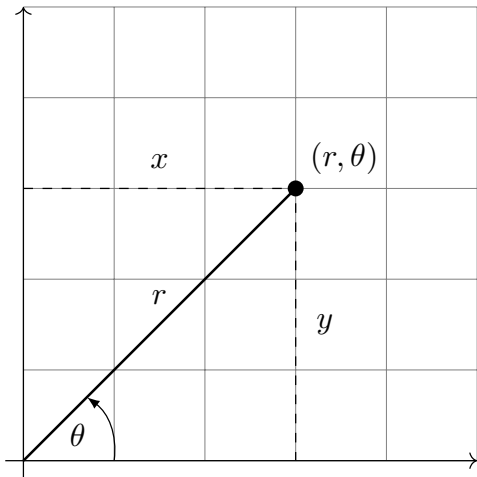


## ตัวอย่าง 7    พิจารณาจุดในพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้



$$\left(4, \frac{\pi}{3}\right) = \left(4, -\frac{5\pi}{3}\right) = \left(-4, \frac{4\pi}{3}\right) = \left(-4, -\frac{2\pi}{3}\right)$$

# การแปลงพิกัดฉาก/พิกัดเชิงขั้ว



$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

ตัวอย่าง 8 จงแปลงจุด  $(5, 30^\circ)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้วไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก

ตัวอย่าง 9 จงแปลงจุด  $(-3, 60^\circ)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้วไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก

ตัวอย่าง 10 จงแปลงจุด  $(2, -\frac{\pi}{4})$  ในระบบพิกัดเชิงขั้วไปเป็น  
จุดในระบบพิกัดฉาก

ตัวอย่าง 11    จงแปลงจุด  $(-3, 3)$  ในระบบพิกัดฉากไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 12 จงแปลงจุด  $(5\sqrt{3}, 5)$  ในระบบพิกัดฉากไปเป็น  
จุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 13 จงแปลงจุด  $(\frac{3}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2})$  ในระบบพิกัดฉากไป  
เป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ตัวอย่าง 14    จงแปลงจุด  $(-5, 0)$  ในระบบพิกัดฉากไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 15    จงแปลงจุด  $(0, -5)$  ในระบบพิกัดฉากไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 16    จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x - 2y = -3$$

ตัวอย่าง 16 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x - 2y = -3$$

วิธีทำ

$$x - 2y = -3$$

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

ตัวอย่าง 16 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x - 2y = -3$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x - 2y = -3$$

$$(r \cos(\theta)) - 2(r \sin(\theta)) = -3$$

ตัวอย่าง 16 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x - 2y = -3$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x - 2y = -3$$

$$(r \cos(\theta)) - 2(r \sin(\theta)) = -3$$

$$r \cos(\theta) - 2r \sin(\theta) = -3$$

ตัวอย่าง 16 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x - 2y = -3$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x - 2y = -3$$

$$(r \cos(\theta)) - 2(r \sin(\theta)) = -3$$

$$r \cos(\theta) - 2r \sin(\theta) = -3$$

$$r(\cos(\theta) - 2 \sin(\theta)) = -3$$

ตัวอย่าง 16 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x - 2y = -3$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x - 2y = -3$$

$$(r \cos(\theta)) - 2(r \sin(\theta)) = -3$$

$$r \cos(\theta) - 2r \sin(\theta) = -3$$

$$r(\cos(\theta) - 2 \sin(\theta)) = -3$$

$$r = \frac{-3}{\cos(\theta) - 2 \sin(\theta)}$$



ตัวอย่าง 17 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x = y^2 + 3$$

ตัวอย่าง 17 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x = y^2 + 3$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x = y^2 + 3$$

ตัวอย่าง 17 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x = y^2 + 3$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x = y^2 + 3$$

$$r \cos(\theta) = (r \sin(\theta))^2 + 3$$

ตัวอย่าง 17 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x = y^2 + 3$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x = y^2 + 3$$

$$r \cos(\theta) = (r \sin(\theta))^2 + 3$$

$$r \cos(\theta) = r^2 \sin^2(\theta) + 3$$

ตัวอย่าง 18 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$2y = \frac{\sqrt{x}}{3}$$

ตัวอย่าง 18 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$2y = \frac{\sqrt{x}}{3}$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$2y = \frac{\sqrt{x}}{3}$$

ตัวอย่าง 18 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$2y = \frac{\sqrt{x}}{3}$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$2y = \frac{\sqrt{x}}{3}$$

$$2r \sin(\theta) = \frac{\sqrt{r \cos(\theta)}}{3}$$

ตัวอย่าง 18 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$2y = \frac{\sqrt{x}}{3}$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$2y = \frac{\sqrt{x}}{3}$$

$$2r \sin(\theta) = \frac{\sqrt{r \cos(\theta)}}{3}$$

$$6r \sin(\theta) = \sqrt{r \cos(\theta)}$$



ตัวอย่าง 19    จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x^2 + y^2 = 36$$

ตัวอย่าง 19 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x^2 + y^2 = 36$$

วิธีทำ

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

ตัวอย่าง 19 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x^2 + y^2 = 36$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 36 \\(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 &= 36\end{aligned}$$

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

ตัวอย่าง 19 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x^2 + y^2 = 36$$

วิธีทำ

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = 36$$

$$r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = 36$$

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

ตัวอย่าง 19 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x^2 + y^2 = 36$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = 36$$

$$r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = 36$$

$$r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = 36$$

ตัวอย่าง 19 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x^2 + y^2 = 36$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = 36$$

$$r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = 36$$

$$r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = 36$$

$$r^2 (1) = 36$$

ตัวอย่าง 19 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x^2 + y^2 = 36$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = 36$$

$$r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = 36$$

$$r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = 36$$

$$r^2 (1) = 36$$

$$r^2 = 36$$

ตัวอย่าง 19 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x^2 + y^2 = 36$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = 36$$

$$r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = 36$$

$$r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = 36$$

$$r^2 (1) = 36$$

$$r^2 = 6^2$$

$$r = 6$$



ตัวอย่าง 20    จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

ตัวอย่าง 21 จงแปลงจุด  $(x, y)$  ในระบบพิกัดฉาก ไปเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดให้

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

ตัวอย่าง 22 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 2 \cos (\theta)$$

ตัวอย่าง 22 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 2 \cos(\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 2 \cos(\theta)$$

ตัวอย่าง 22 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 2 \cos(\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 2 \cos(\theta)$$

$$r = 2 \cdot \frac{x}{r}$$

ตัวอย่าง 22 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 2 \cos(\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 2 \cos(\theta)$$

$$r = 2 \cdot \frac{x}{r}$$

$$r^2 = 2x$$

ตัวอย่าง 22 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 2 \cos(\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 2 \cos(\theta)$$

$$r = 2 \cdot \frac{x}{r}$$

$$r^2 = 2x$$

$$x^2 + y^2 = 2x$$

ตัวอย่าง 23 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$



ตัวอย่าง 23 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

วิธีทำ

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 23 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

วิธีทำ

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

$$r = 4 \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot \frac{y}{x}$$

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 23 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

$$r = 4 \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot \frac{y}{x}$$

$$r = 4 \cdot \frac{1}{\frac{x}{r}} \cdot \frac{y}{x}$$

ตัวอย่าง 23 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

$$r = 4 \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot \frac{y}{x}$$

$$r = 4 \cdot \frac{1}{\frac{r}{x}} \cdot \frac{y}{x}$$

$$r = 4 \cdot \frac{r}{x} \cdot \frac{y}{x}$$

ตัวอย่าง 23 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

$$r = 4 \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot \frac{y}{x}$$

$$r = 4 \cdot \frac{1}{\frac{r}{x}} \cdot \frac{y}{x}$$

$$r = 4 \cdot \frac{r}{x} \cdot \frac{y}{x}$$

$$1 = 4 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{x}$$

ตัวอย่าง 23 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 4 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

$$r = 4 \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot \frac{y}{x}$$

$$r = 4 \cdot \frac{1}{\frac{x}{r}} \cdot \frac{y}{x}$$

$$r = 4 \cdot \frac{r}{x} \cdot \frac{y}{x}$$

$$1 = 4 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{x}$$

$$x^2 = 4y$$

ตัวอย่าง 24 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

ตัวอย่าง 24 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

วิธีทำ

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



ตัวอย่าง 24 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

วิธีทำ

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

$$r^2 = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 24 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

$$r^2 = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$r^2 = 2 \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r}$$

ตัวอย่าง 24 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

$$r^2 = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$r^2 = 2 \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$r^2 = 2 \cdot \frac{xy}{r^2}$$

ตัวอย่าง 24 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

$$r^2 = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$r^2 = 2 \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$r^2 = 2 \cdot \frac{xy}{r^2}$$

$$r^4 = 2xy$$

ตัวอย่าง 24 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

$$r^2 = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$r^2 = 2 \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$r^2 = 2 \cdot \frac{xy}{r^2}$$

$$r^4 = 2xy$$

$$(r^2)^2 = 2xy$$

ตัวอย่าง 24 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2 = \sin(2\theta)$$

$$r^2 = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$r^2 = 2 \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$r^2 = 2 \cdot \frac{xy}{r^2}$$

$$r^4 = 2xy$$

$$(r^2)^2 = 2xy$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy$$

ตัวอย่าง 25 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 5$$

ตัวอย่าง 25 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 5$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 5$$



ตัวอย่าง 25 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 5$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 5$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

ตัวอย่าง 25 จงแปลงจุด  $(r, \theta)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ไปเป็นจุด  
ในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดให้

$$r = 5$$

วิธีทำ

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 5$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

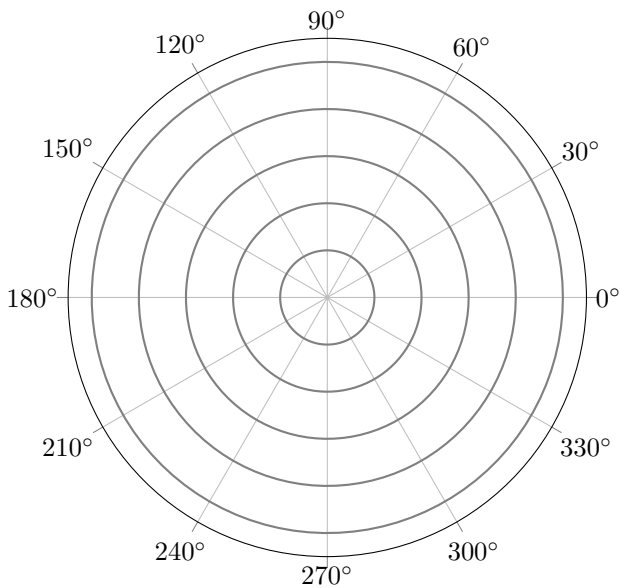
# เส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

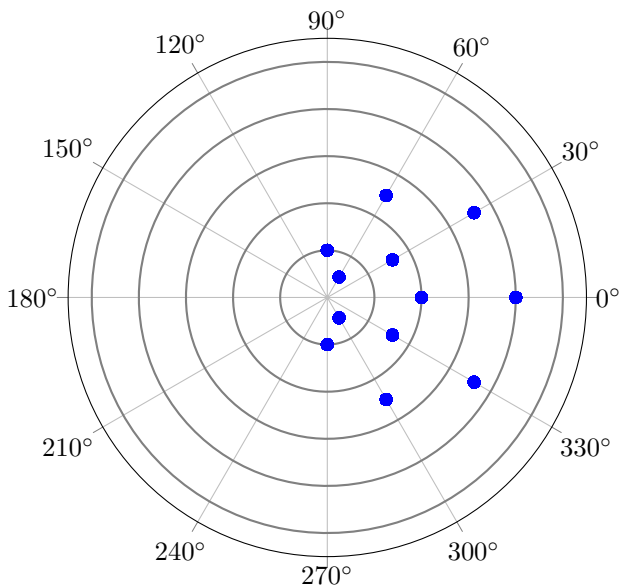
พิจารณากากราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

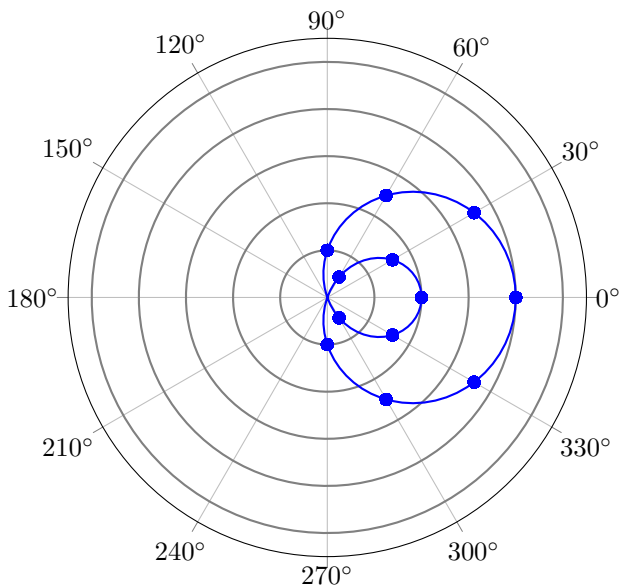
$$r = 1 + 3 \cos(\theta)$$

$\theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$
$r$	4	3.6	2.5	1	-0.5	-1.6

$\theta$	$180^\circ$	$210^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$330^\circ$
$r$	-2	-1.6	-0.5	1	2.5	3.6

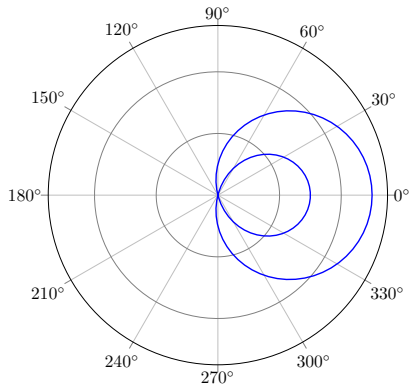






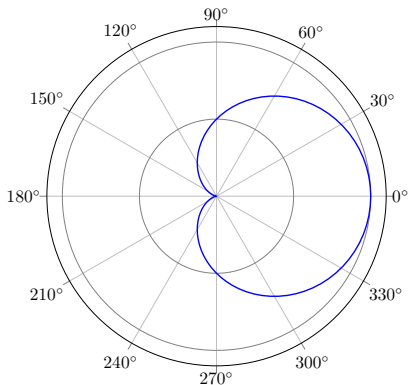
# เส้นโค้งลิมาซอง (Limacons)

$$r = a \pm b \sin(\theta) \quad \text{หรือ} \quad r = a \pm b \cos(\theta) \quad (a > 0, b > 0)$$



Limacon with inner loop

$$\frac{a}{b} < 1$$

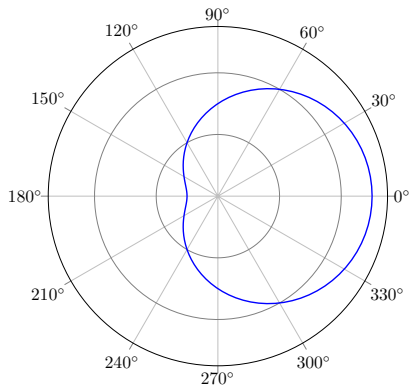


Cardioid

$$\frac{a}{b} = 1$$

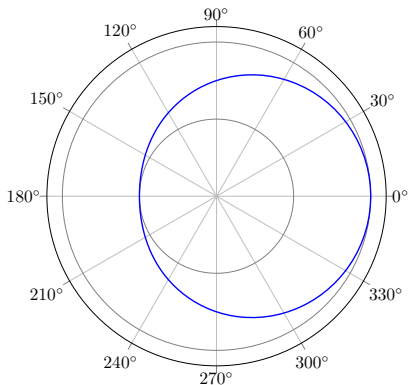
# เส้นโค้งลิมาซอง (Limacons)

$$r = a \pm b \sin(\theta) \quad \text{หรือ} \quad r = a \pm b \cos(\theta) \quad (a > 0, b > 0)$$



Dimpled Limacon

$$1 < \frac{a}{b} < 2$$



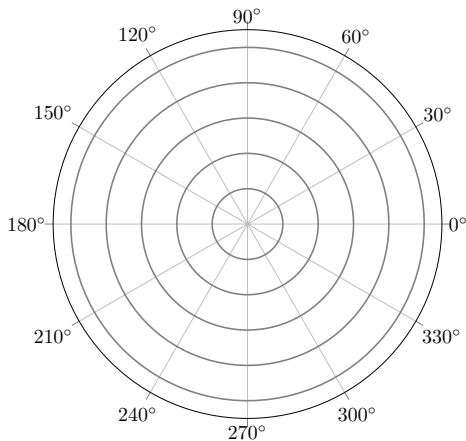
Convex Limacon

$$\frac{a}{b} \geq 2$$



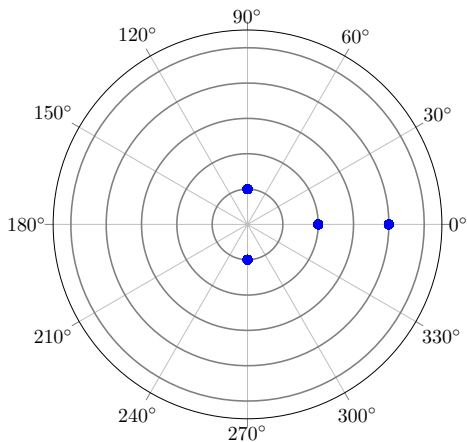
## ตัวอย่าง 26 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 1 + 3 \cos(\theta)$$



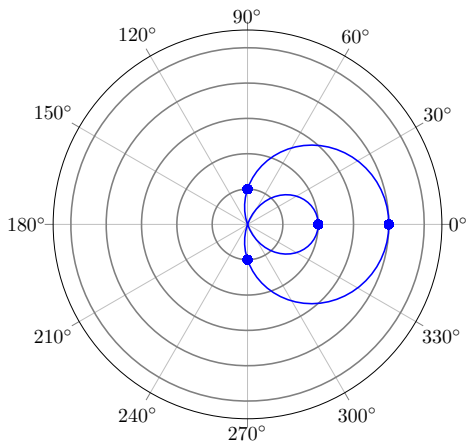
$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

# วิธีทำ



$\theta$	$r = 1 + 3 \cos(\theta)$
$0^\circ$	4
$90^\circ$	1
$180^\circ$	-2
$270^\circ$	1

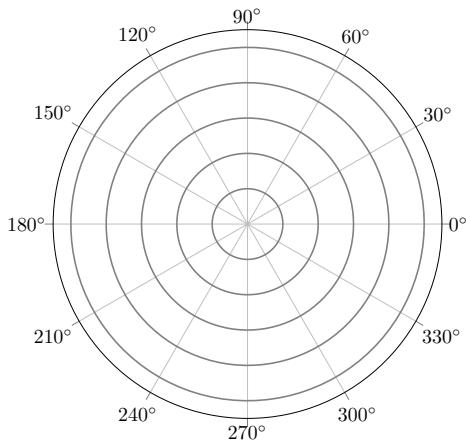
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 1 + 3 \cos(\theta)$
$0^\circ$	4
$90^\circ$	1
$180^\circ$	-2
$270^\circ$	1

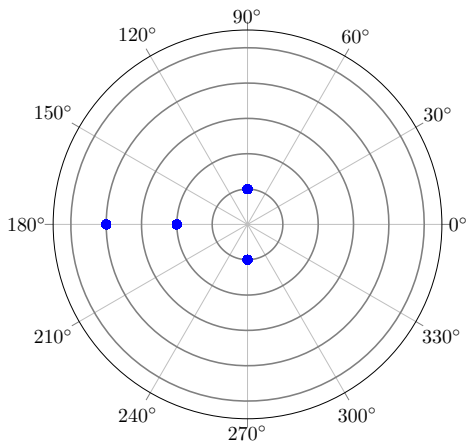
## ตัวอย่าง 27 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 1 - 3 \cos(\theta)$$



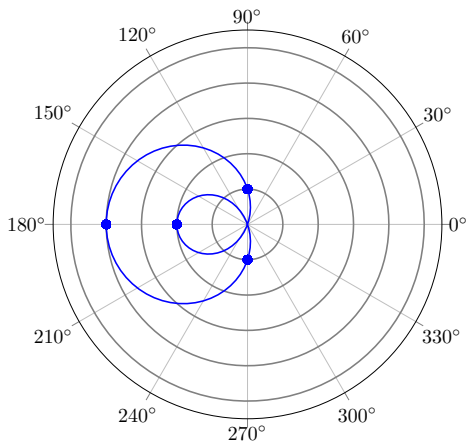
$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

# วิธีทำ



$\theta$	$r = 1 - 3 \cos(\theta)$
$0^\circ$	$-2$
$90^\circ$	$1$
$180^\circ$	$4$
$270^\circ$	$1$

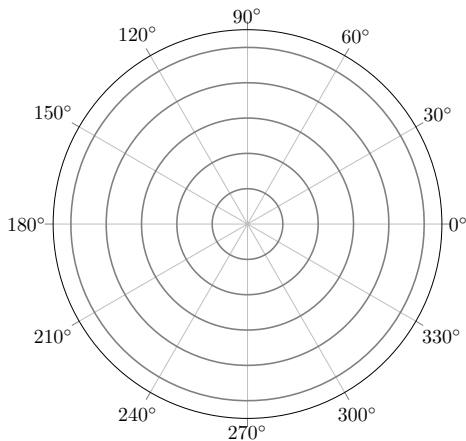
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 1 - 3 \cos(\theta)$
$0^\circ$	$-2$
$90^\circ$	$1$
$180^\circ$	$4$
$270^\circ$	$1$

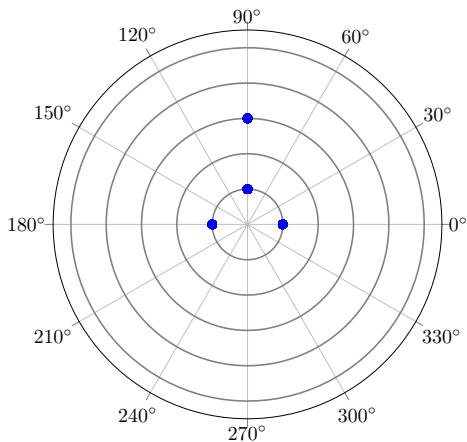
## ตัวอย่าง 28 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 1 + 2 \sin(\theta)$$



$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

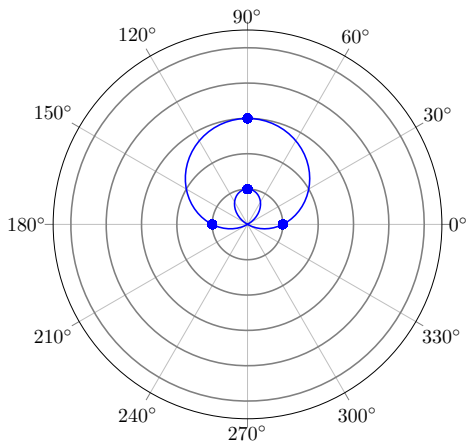
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 1 + 2 \sin(\theta)$
$0^\circ$	1
$90^\circ$	3
$180^\circ$	1
$270^\circ$	-1



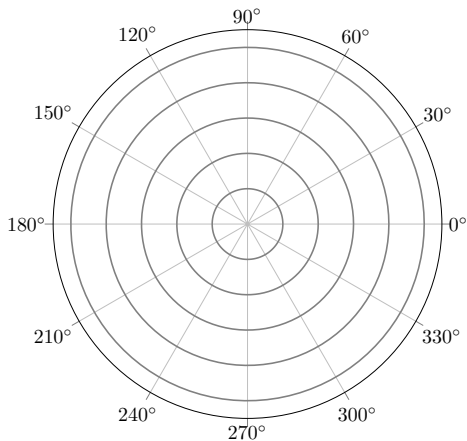
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 1 + 2 \sin(\theta)$
$0^\circ$	1
$90^\circ$	3
$180^\circ$	1
$270^\circ$	-1

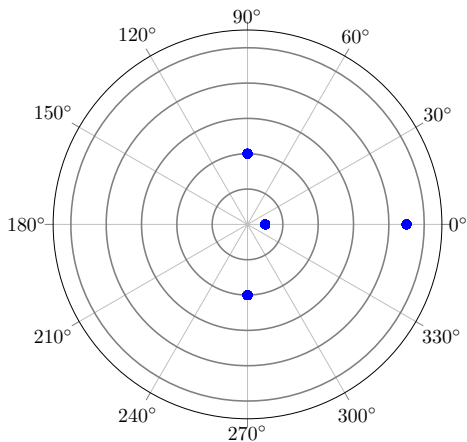
## ตัวอย่าง 29 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = -2 + 2.5 \cos(\theta)$$



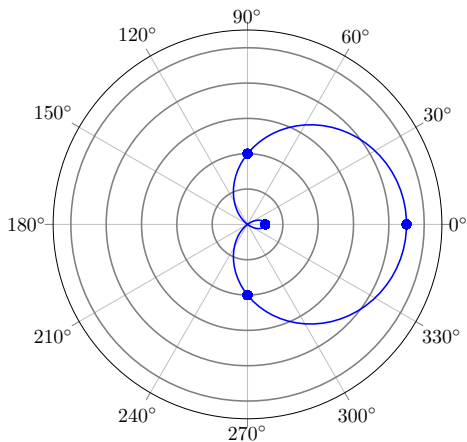
$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

# วิธีทำ



$\theta$	$r = -2 + 2.5 \cos(\theta)$
$0^\circ$	0.5
$90^\circ$	-2
$180^\circ$	-4.5
$270^\circ$	-2

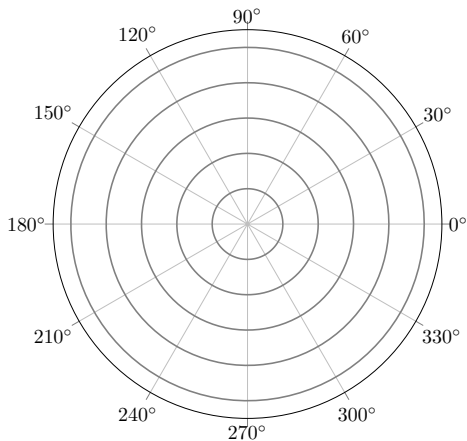
# วิธีทำ



$\theta$	$r = -2 + 2.5 \cos(\theta)$
$0^\circ$	0.5
$90^\circ$	-2
$180^\circ$	-4.5
$270^\circ$	-2

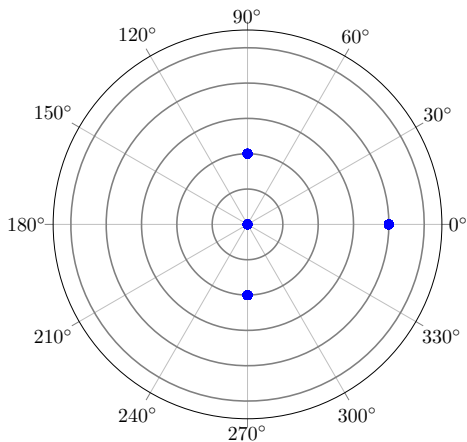
# ตัวอย่าง 30 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 2 + 2 \cos (\theta)$$



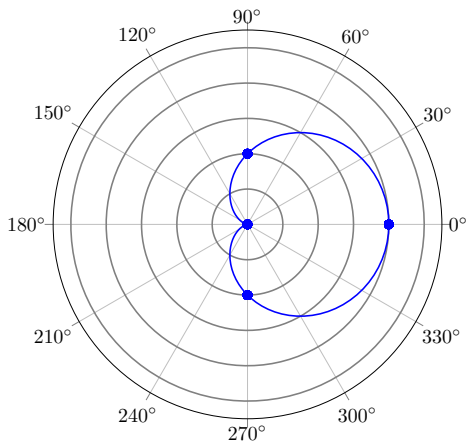
$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

# วิธีทำ



$\theta$	$r = 2 + 2 \cos(\theta)$
0°	4
90°	2
180°	0
270°	2

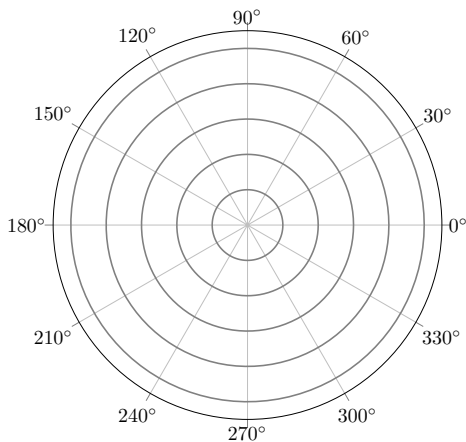
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 2 + 2 \cos(\theta)$
$0^\circ$	4
$90^\circ$	2
$180^\circ$	0
$270^\circ$	2

# ตัวอย่าง 31 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

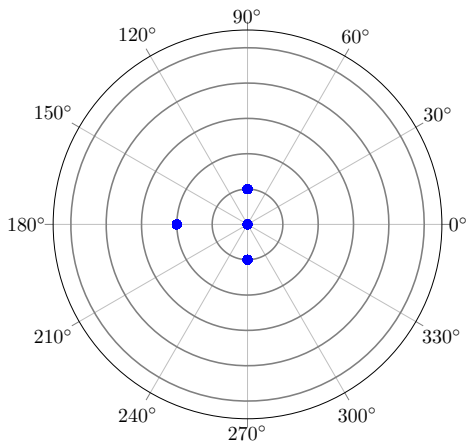
$$r = 1 - \cos(\theta)$$



$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

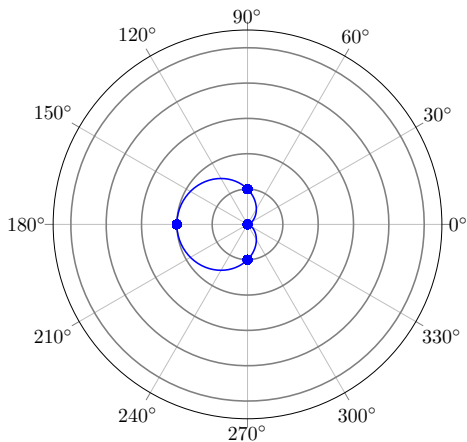


# วิธีทำ



$\theta$	$r = 1 - \cos(\theta)$
$0^\circ$	0
$90^\circ$	1
$180^\circ$	2
$270^\circ$	1

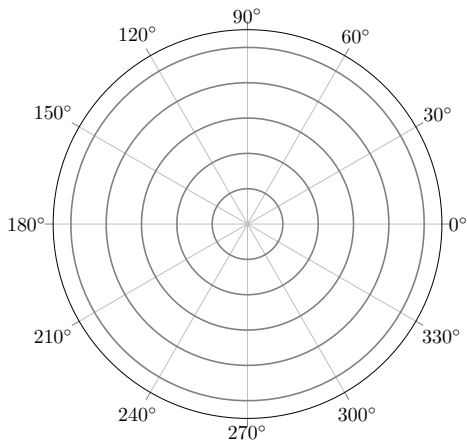
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 1 - \cos(\theta)$
$0^\circ$	0
$90^\circ$	1
$180^\circ$	2
$270^\circ$	1

## ตัวอย่าง 32 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

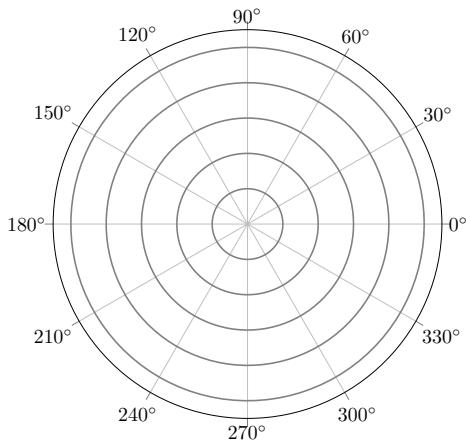
$$r = 1.5 + 1.5 \cos(\theta)$$



$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

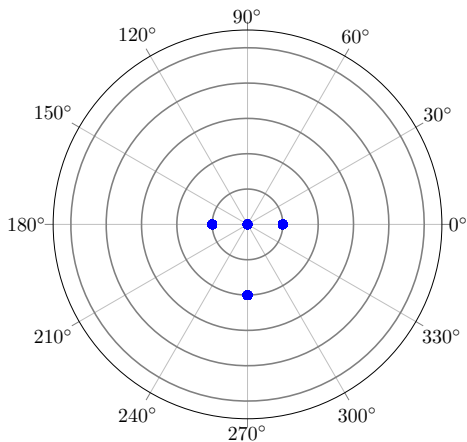
## ตัวอย่าง 33 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = -1 - \sin(\theta)$$



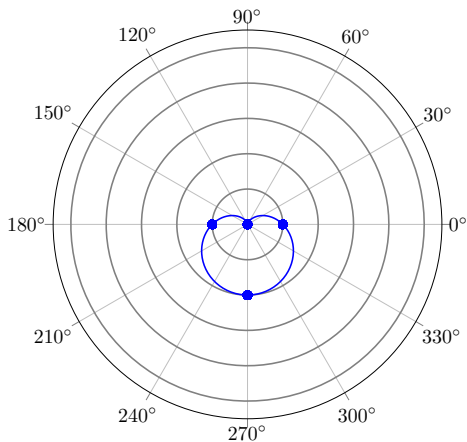
$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

# วิธีทำ



$\theta$	$r = -1 - \sin(\theta)$
$0^\circ$	-1
$90^\circ$	-2
$180^\circ$	-1
$270^\circ$	0

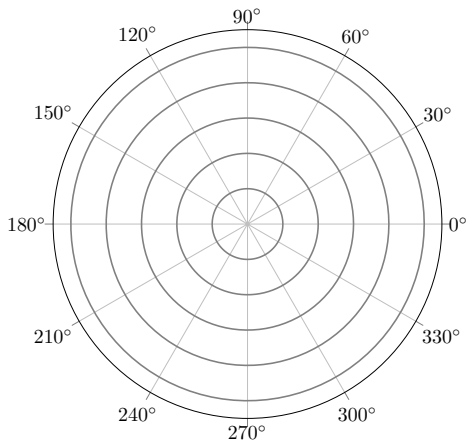
# วิธีทำ



$\theta$	$r = -1 - \sin(\theta)$
$0^\circ$	-1
$90^\circ$	-2
$180^\circ$	-1
$270^\circ$	0

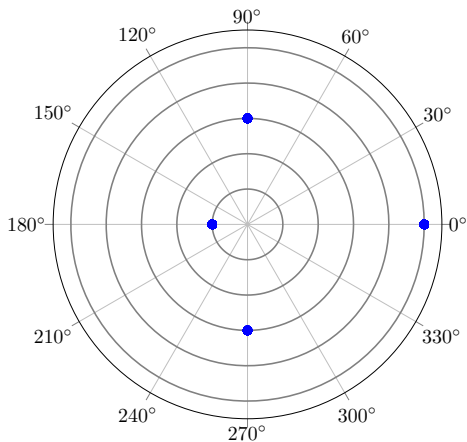
# ตัวอย่าง 34 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 + 2 \cos(\theta)$$



$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

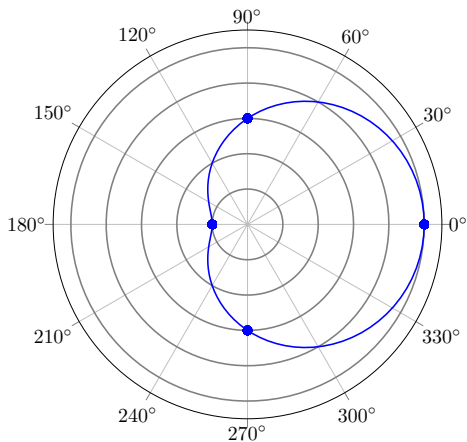
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 3 + 2 \cos(\theta)$
$0^\circ$	5
$90^\circ$	3
$180^\circ$	1
$270^\circ$	3



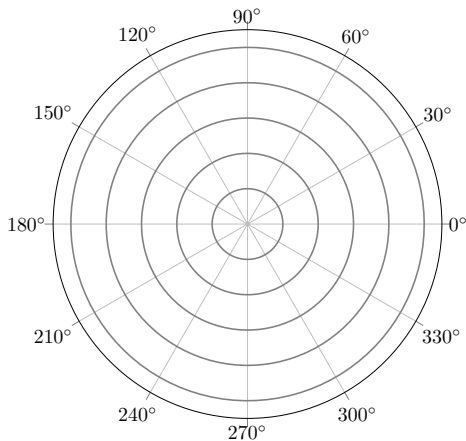
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 3 + 2 \cos(\theta)$
$0^\circ$	5
$90^\circ$	3
$180^\circ$	1
$270^\circ$	3

## ตัวอย่าง 35 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

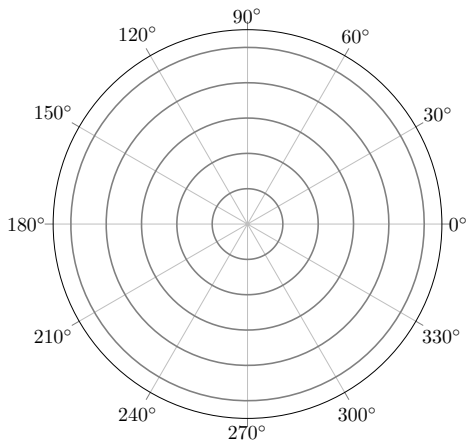
$$r = -2 - 1.5 \cos(\theta)$$



$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

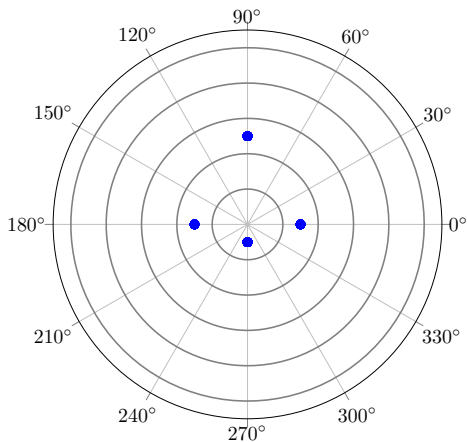
## ตัวอย่าง 36 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 1.5 + \sin(\theta)$$



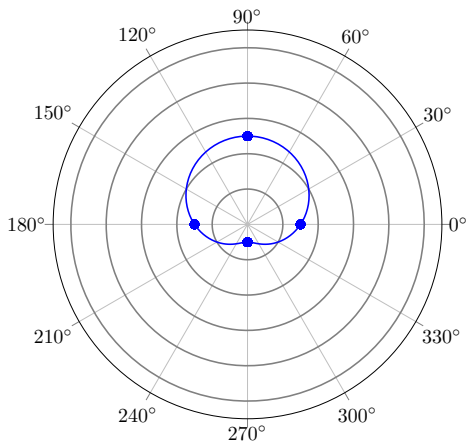
$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

# วิธีทำ



$\theta$	$r = 1.5 + \sin(\theta)$
$0^\circ$	1.5
$90^\circ$	2.5
$180^\circ$	1.5
$270^\circ$	0.5

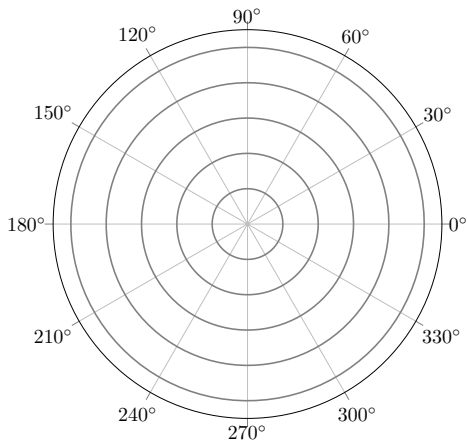
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 1.5 + \sin(\theta)$
$0^\circ$	1.5
$90^\circ$	2.5
$180^\circ$	1.5
$270^\circ$	0.5

# ตัวอย่าง 37 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

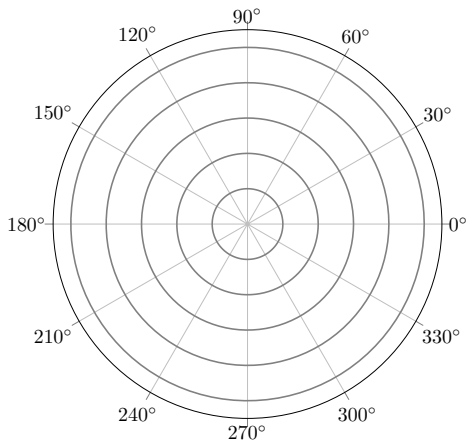
$$r = 2.5 - 2 \sin(\theta)$$



$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

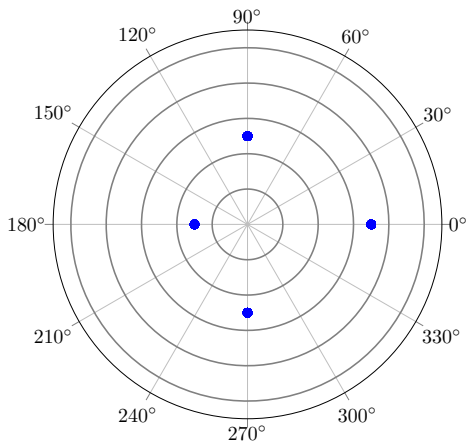
# ตัวอย่าง 38 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 5 + 2 \cos(\theta)$$



$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

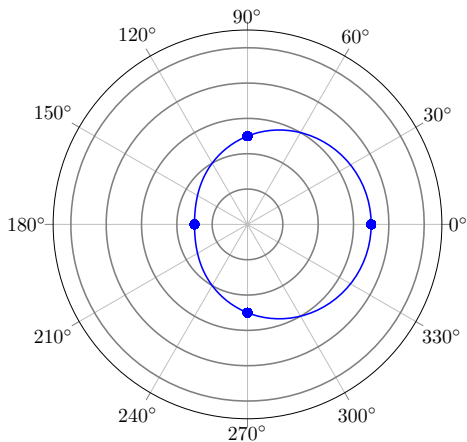
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 5 + 2 \cos(\theta)$
$0^\circ$	7
$90^\circ$	5
$180^\circ$	3
$270^\circ$	5



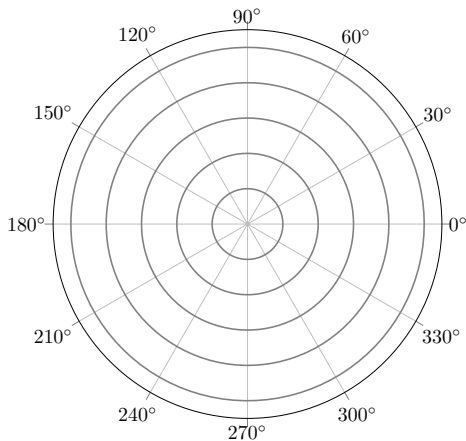
# วิธีทำ



$\theta$	$r = 5 + 2 \cos(\theta)$
$0^\circ$	7
$90^\circ$	5
$180^\circ$	3
$270^\circ$	5

# ตัวอย่าง 39 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

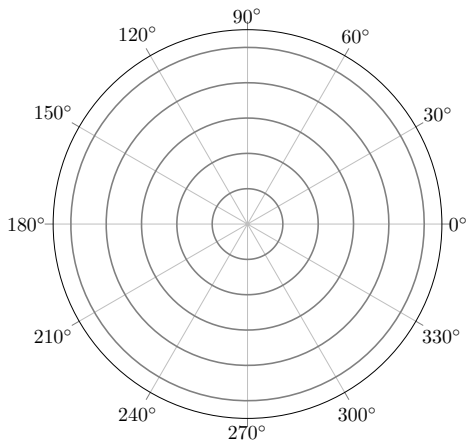
$$r = 4 - 2 \cos(\theta)$$



$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

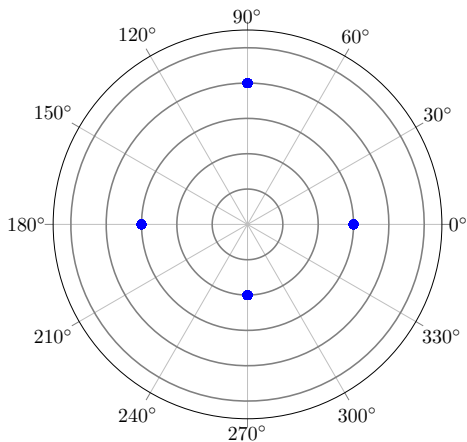
# ตัวอย่าง 40 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = -3 + \sin(\theta)$$



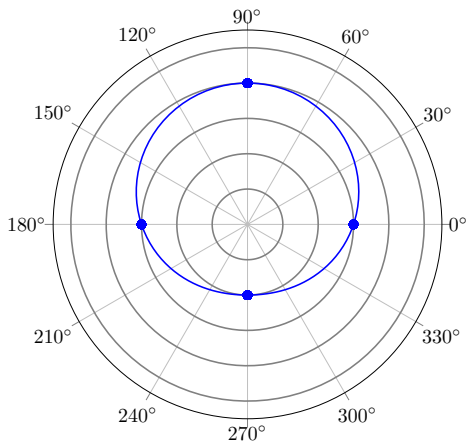
$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

# วิธีทำ



$\theta$	$r = -3 + \sin(\theta)$
$0^\circ$	-3
$90^\circ$	-2
$180^\circ$	-3
$270^\circ$	-4

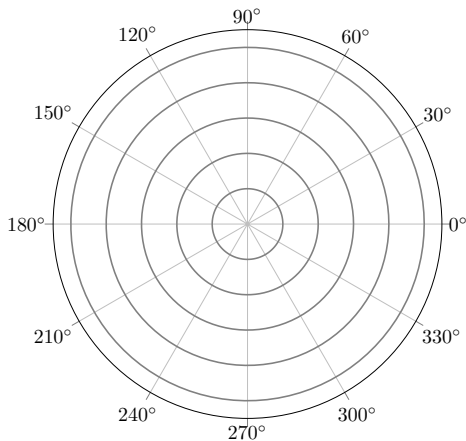
# วิธีทำ



$\theta$	$r = -3 + \sin(\theta)$
$0^\circ$	$-3$
$90^\circ$	$-2$
$180^\circ$	$-3$
$270^\circ$	$-4$

# ตัวอย่าง 41 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

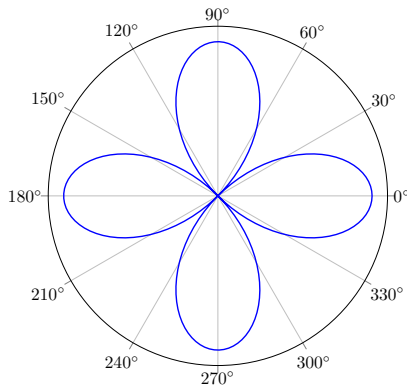
$$r = 2 - \sin(\theta)$$



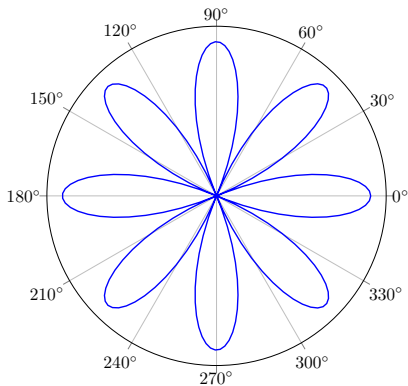
$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$r$				

# เส้นโค้งกลีบกุหลาบ (Rose Curves)

$$r = a \sin(n\theta) \quad \text{หรือ} \quad r = a \cos(n\theta) \quad (a > 0, n \in \mathbb{Z}_+)$$



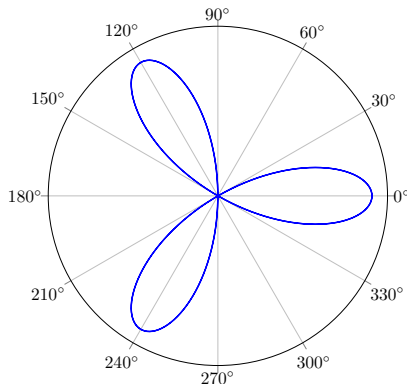
Rose Curve  
 $n = 2$



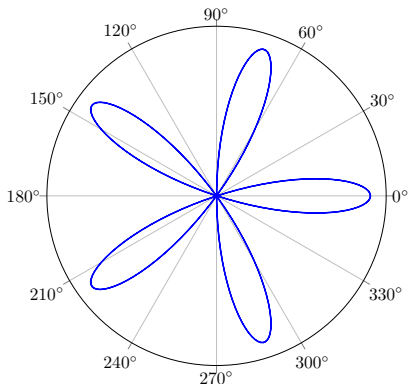
Rose Curve  
 $n = 4$

# เส้นโค้งกลีบกุหลาบ (Rose Curves)

$$r = a \sin(n\theta) \quad \text{หรือ} \quad r = a \cos(n\theta) \quad (a > 0, n \in \mathbb{Z}_+)$$



Rose Curve  
 $n = 3$

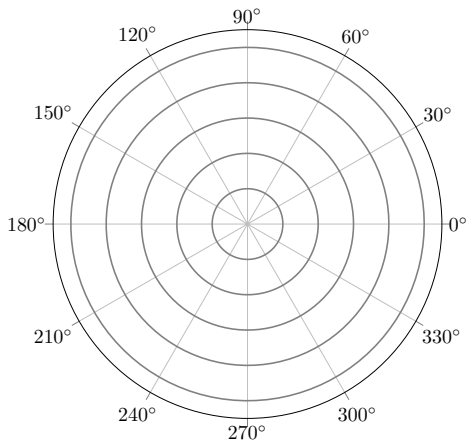


Rose Curve  
 $n = 5$



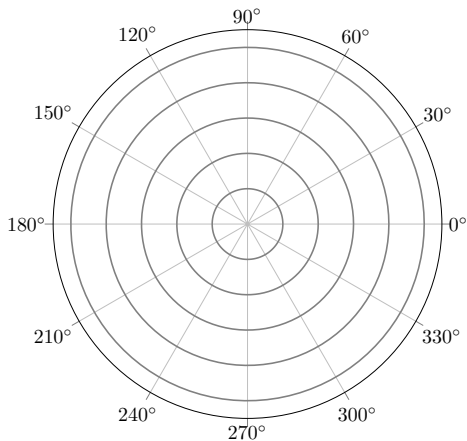
## ตัวอย่าง 42 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 2 \cos(3\theta)$$



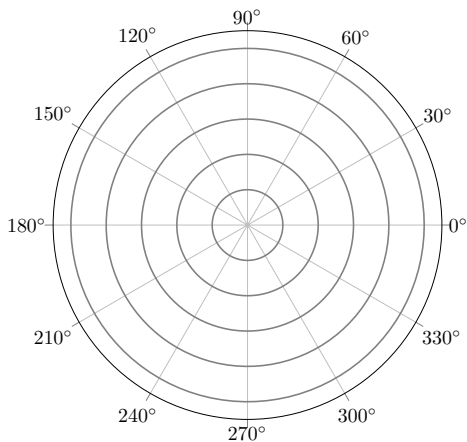
## ตัวอย่าง 43 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 2 \sin(\theta)$$



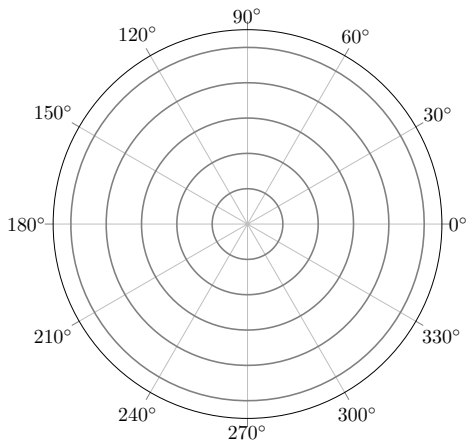
## ตัวอย่าง 44 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 \sin(5\theta)$$



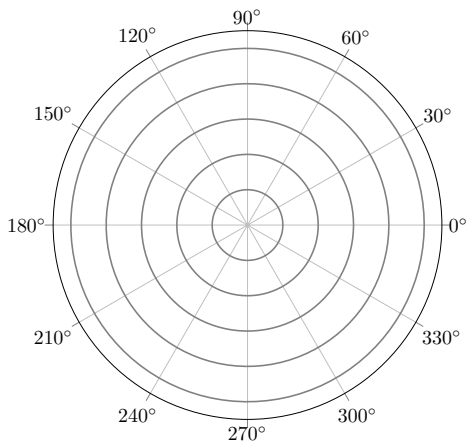
## ตัวอย่าง 45 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = -2 \sin(3\theta)$$



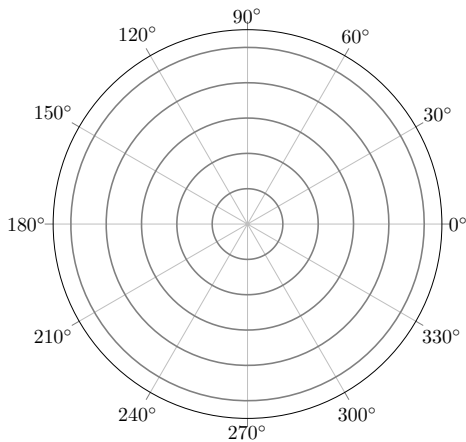
## ตัวอย่าง 46 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 \cos(2\theta)$$



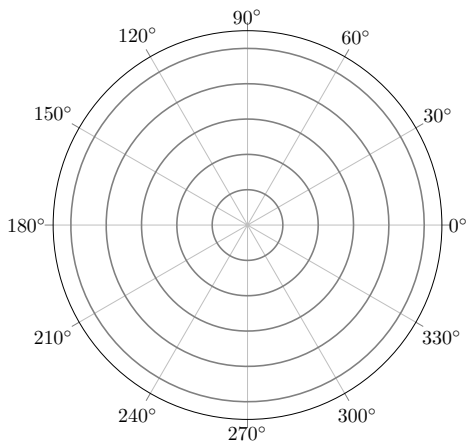
## ตัวอย่าง 47 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = \sin(2\theta)$$



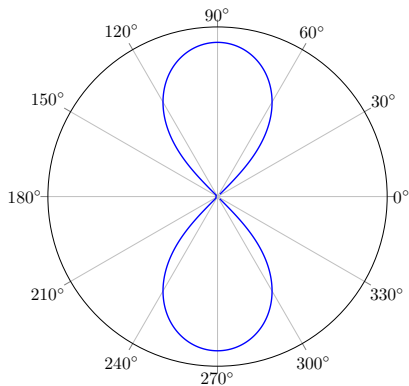
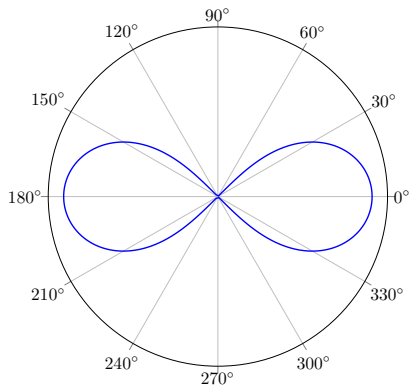
## ตัวอย่าง 48 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 \cos(4\theta)$$



# เส้นโค้งเลมนิสเคต (Lemniscates)

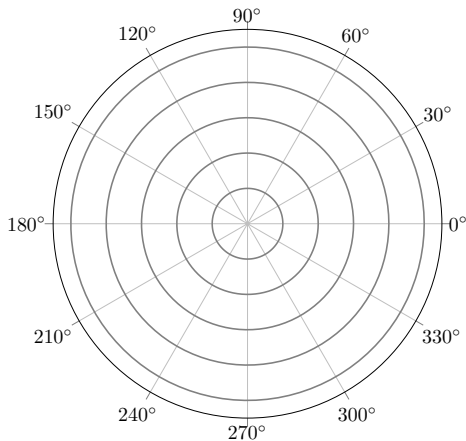
$$r^2 = \pm a^2 \sin(2\theta) \quad \text{หรือ} \quad r^2 = \pm a^2 \cos(2\theta) \quad (a > 0)$$





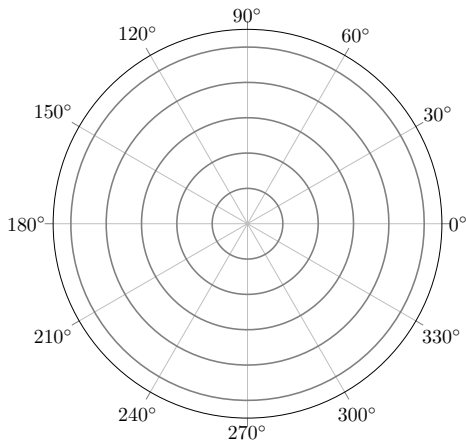
## ตัวอย่าง 49 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r^2 = 9 \cos(2\theta)$$



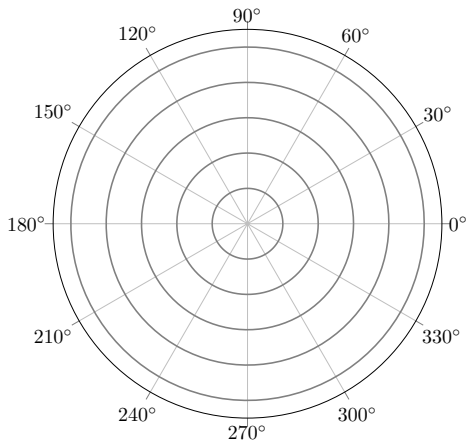
## ตัวอย่าง 50 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r^2 = -9 \cos(2\theta)$$



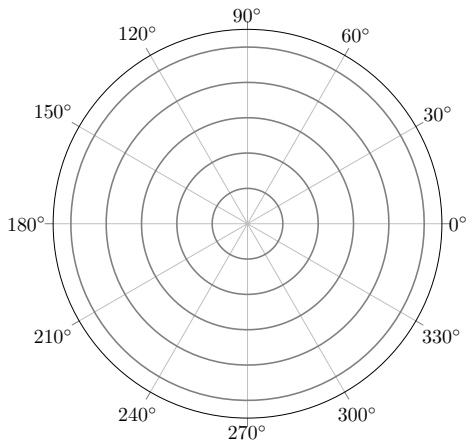
## ตัวอย่าง 51 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r^2 = 4 \sin(2\theta)$$



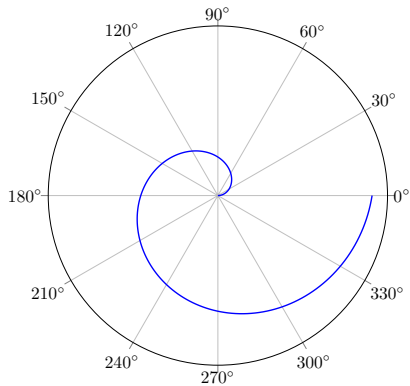
## ตัวอย่าง 52 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r^2 = -4 \sin(2\theta)$$

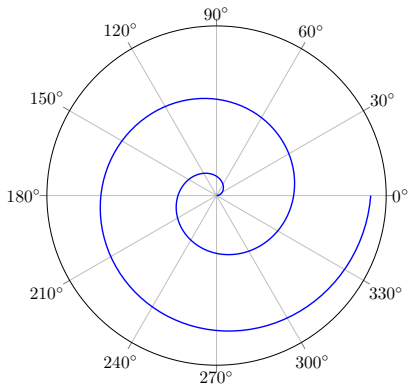


# เส้นโค้งเวียนก้นหอย (Spirals)

$$r = a\theta \quad (a > 0)$$



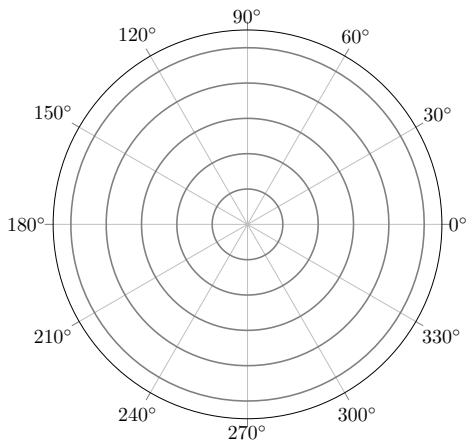
$$0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$



$$0^\circ \leq \theta \leq 720^\circ$$

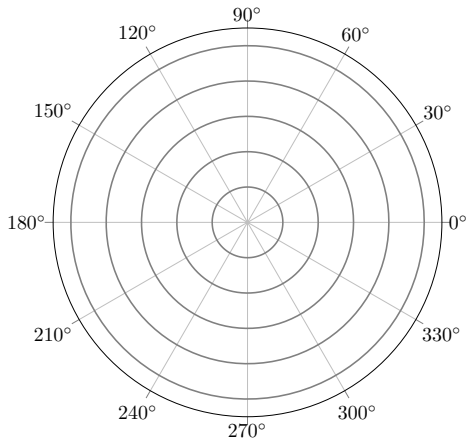
## ตัวอย่าง 53 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 0.5\theta \text{ เมื่อ } 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$



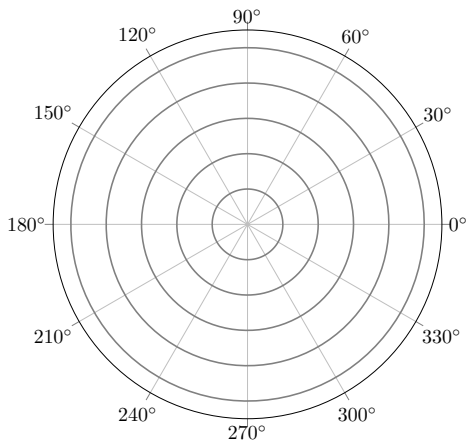
## ตัวอย่าง 54 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = \theta \text{ เมื่อ } 0^\circ \leq \theta \leq 720^\circ$$



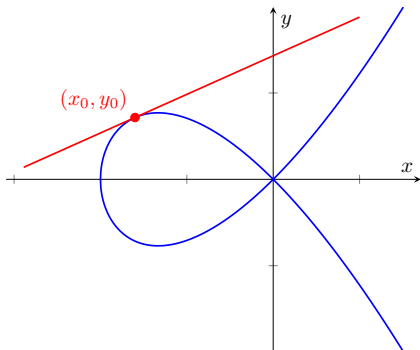
## ตัวอย่าง 55 จงวาดกราฟสมการต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 4\theta \text{ เมื่อ } \theta < 0$$





# เส้นสัมผัสเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(x_0, y_0)$ :

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(x_0, y_0)$ :

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

จาก  $x = r\cos(\theta)$  และ  $y = r\sin(\theta)$  เราจะกำหนดให้  $r = f(\theta)$  ดังนั้น

$$x = f(\theta) \cos(\theta) \text{ และ } y = f(\theta) \sin(\theta)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} \\ &= \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{d}{d\theta} (f(\theta) \sin(\theta)) \cdot \frac{1}{\frac{d}{d\theta} (f(\theta) \cos(\theta))} \\ &= \frac{f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)}{f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta)} \\ &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 56 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = \sin(2\theta) \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{4}$$

ตัวอย่าง 56 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = \sin(2\theta) \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{4}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \sin(2\theta) \\ &= \cos(2\theta) \frac{d}{d\theta} 2\theta \\ &= \cos(2\theta) \cdot 2 \\ &= 2 \cos(2\theta)\end{aligned}$$

## ตัวอย่าง 56 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = \sin(2\theta) \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{4}$$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)}$$

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \sin(2\theta) \\ &= \cos(2\theta) \frac{d}{d\theta} 2\theta \\ &= \cos(2\theta) \cdot 2 \\ &= 2 \cos(2\theta)\end{aligned}$$

## ตัวอย่าง 56 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = \sin(2\theta) \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{4}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \sin(2\theta) \\ &= \cos(2\theta) \frac{d}{d\theta} 2\theta \\ &= \cos(2\theta) \cdot 2 \\ &= 2 \cos(2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{2 \cos(2\theta) \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{2 \cos(2\theta) \cos(\theta) - r \sin(\theta)}\end{aligned}$$

## ตัวอย่าง 56 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = \sin(2\theta) \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{4}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \sin(2\theta) \\ &= \cos(2\theta) \frac{d}{d\theta} 2\theta \\ &= \cos(2\theta) \cdot 2 \\ &= 2 \cos(2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{2 \cos(2\theta) \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{2 \cos(2\theta) \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{2 \cos(2\theta) \sin(\theta) + \sin(2\theta) \cos(\theta)}{2 \cos(2\theta) \cos(\theta) - \sin(2\theta) \sin(\theta)}\end{aligned}$$

## ตัวอย่าง 56 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = \sin(2\theta) \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{4}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \sin(2\theta) \\ &= \cos(2\theta) \frac{d}{d\theta} 2\theta \\ &= \cos(2\theta) \cdot 2 \\ &= 2 \cos(2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{2 \cos(2\theta) \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{2 \cos(2\theta) \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{2 \cos(2\theta) \sin(\theta) + \sin(2\theta) \cos(\theta)}{2 \cos(2\theta) \cos(\theta) - \sin(2\theta) \sin(\theta)} \\ m &= \frac{2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4})}{2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{4})}\end{aligned}$$



## ตัวอย่าง 56 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = \sin(2\theta) \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{4}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \sin(2\theta) \\ &= \cos(2\theta) \frac{d}{d\theta} 2\theta \\ &= \cos(2\theta) \cdot 2 \\ &= 2 \cos(2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{2 \cos(2\theta) \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{2 \cos(2\theta) \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{2 \cos(2\theta) \sin(\theta) + \sin(2\theta) \cos(\theta)}{2 \cos(2\theta) \cos(\theta) - \sin(2\theta) \sin(\theta)} \\ m &= \frac{2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4})}{2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{0 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{0 - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 57 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 - 2 \cos(\theta) \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่าง 58 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 4 \cot(2\theta) \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{6}$$

ตัวอย่าง 59    จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = \frac{2}{3\theta} \text{ ที่ } \theta = \pi$$

ตัวอย่าง 60 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว  
 $r = 3$  ที่  $\theta = \frac{\pi}{3}$

ตัวอย่าง 60 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d3}{d\theta} \\ &= 0\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 60 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{d3}{d\theta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 60 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{0 \cdot \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{0 \cdot \cos(\theta) - r \sin(\theta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d3}{d\theta} \\ &= 0\end{aligned}$$



ตัวอย่าง 60 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d3}{d\theta} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{0 \cdot \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{0 \cdot \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{r \cos(\theta)}{-r \sin(\theta)} = -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 60 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d3}{d\theta} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{0 \cdot \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{0 \cdot \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{r \cos(\theta)}{-r \sin(\theta)} = -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 60 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d3}{d\theta} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{0 \cdot \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{0 \cdot \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{r \cos(\theta)}{-r \sin(\theta)} = -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\end{aligned}$$

$$m = -\frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{\sin(\frac{\pi}{3})}$$

ตัวอย่าง 60 จงหาความชันของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = 3 \text{ ที่ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{d3}{d\theta} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{0 \cdot \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{0 \cdot \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \\ &= \frac{r \cos(\theta)}{-r \sin(\theta)} = -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\end{aligned}$$

$$m = -\frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{\sin(\frac{\pi}{3})} = -\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$