อนุพันธ์ระบุทิศทาง

ดร. รัฐพรหม พรหมคำ

แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 2

เกรเดียนต์

บทนิยาม

กำหนดให้ $z = f(x, y)$ เราจะนิยาม **เกรเดียนต์ของ** f โดยเวกเตอร์

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = f_x \vec{\mathbf{i}} + f_y \vec{\mathbf{j}}$$

บทนิยาม

กำหนดให้ $z = f(x, y, z)$ เราจะนิยาม **เกรเดียนต์ของ** f โดยเวกเตอร์

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = f_x \vec{\mathbf{i}} + f_y \vec{\mathbf{j}} + f_z \vec{\mathbf{k}}$$

ตัวอย่าง 1 จงหาเกรเดียนต์ของ $f(x, y) = x\cos(y)$

ตัวอย่าง 2 จงหาเกรเดียนต์ของ $f(x, y) = xe^{xy}$

ตัวอย่าง 3 จงหาเกรเดียนต์ของ $f(x, y, z) = x^2z + y^3z^2 - xyz$

ตัวอย่าง 4 จงหาเกรเดียนต์ของ $f(x, y, z) = \sin(yz) + \ln(x^2)$

อนุพันธ์ระบุทิศทาง

บทนิยาม

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x, y)$ ในทิศทางของเวกเตอร์หน่วย $\vec{\mathbf{u}} = \langle a, b \rangle$ จะถูกเรียกว่า **อนุพันธ์ระบุทิศทาง** กำหนดโดยสัญกรณ์ $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(x, y)$ และถูกนิยามโดย

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + ah, y + bh) - f(x, y)}{h}$$

อนุพันธ์ระบุทิศทางในรูปอนุพันธ์ย่อย

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(x, y) = af_x(x, y) + bf_y(x, y)$$

อนุพันธ์ระบุทิศทางในรูปเกรเดียนต์

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(x, y) = \nabla f \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

อนุพันธ์ระบุทิศทาง

บทนิยาม

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x, y, z)$ ในทิศทางของเวกเตอร์หน่วย $\vec{\mathbf{u}} = \langle a, b, c \rangle$ จะถูกเรียกว่า **อนุพันธ์ระบุทิศทาง** กำหนดโดยสัญกรณ์ $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(x, y, z)$ และถูกนิยามโดย

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + ah, y + bh, z + ch) - f(x, y, z)}{h}$$

อนุพันธ์ระบุทิศทางในรูปอนุพันธ์ย่อย

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(x, y, z) = af_x(x, y) + bf_y(x, y) + cf_z(x, y)$$

อนุพันธ์ระบุทิศทางในรูปเกรเดียนต์

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(x, y) = \nabla f \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

ตัวอย่าง 5 กำหนด $f(x, y, z) = x^2z + y^3z^2 - xyz$ จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางของ $\vec{\mathbf{v}} = \langle -1, 0, 3 \rangle$

ตัวอย่าง 6 กำหนด $f(x, y) = x\cos(y)$ จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางของ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, 1\rangle$

ตัวอย่าง 7 กำหนด $f(x, y, z) = \sin(yz) + \ln(x^2)$ จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางของ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1, 1, -1 \rangle$