



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี  
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
การสอบย่อย ภาคการศึกษา 2/2566

รหัสวิชา 09-113-306 พีชคณิตนามธรรม	วันอังคาร ที่ 20 กุมภาพันธ์ 2567 เวลา 13.00 – 14.00 น.	คะแนนเต็ม 15 คะแนน 10 %
---------------------------------------	---	----------------------------

ชื่อ-นามสกุล.....รหัสนักศึกษา.....  
เลขที่นั่งตามใบเซ็นชื่อ..... คณะ .....วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.... สาขาวิชา .....  
ชื่ออาจารย์ผู้สอน .....ผศ.ดร. ปริญญวัฒน์ ชูสุวรรณ.....

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีจำนวน 2 ข้อ รวม 15 คะแนน
2. เขียนชื่อ-นามสกุล รหัสนักศึกษา ด้วยตัวบรรจงทุกหน้า
3. ไม่อนุญาตให้นำเอกสารเข้าและออกจากห้องสอบ
4. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณ
5. ปิดเครื่องมือสื่อสารทุกชนิด
6. ห้ามแยกกระดาษข้อสอบออกจากกัน
7. ทุจริต ในการสอบจะถูกดำเนินการตามข้อบังคับของมหาวิทยาลัย

ข้อ	1	2	รวม
คะแนน			

ชื่อ-นามสกุล.....รหัสนักศึกษา.....

1. ให้  $K \trianglelefteq H$  และ  $H \trianglelefteq G$  จงแสดงว่า  $xKx^{-1} \trianglelefteq H$  สำหรับทุก  $x \in G$  (8 คะแนน)

พิสูจน์. สมมติให้  $K \trianglelefteq G$  และ  $H \trianglelefteq G$

ให้  $x \in G$  เนื่องจาก

$$e = xex^{-1} \in xKx^{-1} \quad \mathbf{0.5 \text{ คะแนน}}$$

เพราะฉะนั้น

$$xKx^{-1} \neq \emptyset \quad \mathbf{0.5 \text{ คะแนน}}$$

ให้  $k_1, k_2 \in K$  ซึ่ง  $xk_1x^{-1}, xk_2x^{-1} \in xKx^{-1}$

เราจึงได้ว่า

$$(xk_1x^{-1})(xk_2x^{-1})^{-1} = xk_1x^{-1}xk_2^{-1}x^{-1} = xk_1k_2^{-1}x^{-1} \in xKx^{-1} \quad \mathbf{2 \text{ คะแนน}}$$

ดังนั้น

$$xKx^{-1} \leq H \quad \mathbf{1 \text{ คะแนน}}$$

ให้  $h \in H$

เราจะแสดงว่า

$$hxKx^{-1}h^{-1} \subseteq xKx^{-1}$$

เนื่องจาก

$$H \trianglelefteq G$$

เราจึงได้ว่า

$$x^{-1}hx \in x^{-1}Hx = H \quad \mathbf{1 \text{ คะแนน}}$$

เนื่องจาก

$$K \trianglelefteq H \text{ และ } x^{-1}hx \in H$$

เพราะฉะนั้น

$$x^{-1}hxK(x^{-1}hx)^{-1} \subseteq K \quad \mathbf{1 \text{ คะแนน}}$$

นั่นคือ

$$hxKx^{-1}h^{-1} \subseteq xKx^{-1} \quad \mathbf{1 \text{ คะแนน}}$$

ดังนั้น

$$xKx^{-1} \leq H \quad \mathbf{1 \text{ คะแนน}}$$

สำหรับทุก  $x \in G$



ชื่อ-นามสกุล.....รหัสนักศึกษา.....

2. จงสร้างกรุปผลหารของ  $\mathbb{Z}$  เมื่อเทียบกับ  $4\mathbb{Z}$  พร้อมทั้งสร้างตารางเคลีย์แสดงกรุปผลหารของ  $\mathbb{Z}$  เมื่อเทียบกับ  $4\mathbb{Z}$  (7 คะแนน)

พิสูจน์. พิจารณากรุป  $\mathbb{Z}$  เนื่องจาก  $\mathbb{Z}$  เป็นกรุปอาบีเลียน  
จะได้ว่า

$$4\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z} \quad \mathbf{1 \text{ คะแนน}}$$

ดังนั้น

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{4\mathbb{Z}, 1 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}, 3 + 4\mathbb{Z}\} \quad \mathbf{2 \text{ คะแนน}}$$

เราสามารถอธิบายการดำเนินการบนกรุป  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$  ได้ดังตารางเคลีย์นี้

+	$4\mathbb{Z}$	$1 + 4\mathbb{Z}$	$2 + 4\mathbb{Z}$	$3 + 4\mathbb{Z}$	<b>1 คะแนน</b>
$4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$	$1 + 4\mathbb{Z}$	$2 + 4\mathbb{Z}$	$3 + 4\mathbb{Z}$	
$1 + 4\mathbb{Z}$	$1 + 4\mathbb{Z}$	$2 + 4\mathbb{Z}$	$3 + 4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$	
$2 + 4\mathbb{Z}$	$2 + 4\mathbb{Z}$	$3 + 4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$	$1 + 4\mathbb{Z}$	<b>3 คะแนน</b>
$3 + 4\mathbb{Z}$	$3 + 4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$	$1 + 4\mathbb{Z}$	$2 + 4\mathbb{Z}$	

