1. Векторы. Свойства векторов.

Def Упорядоченный набор чисел $(a_1, a_2, ..., a_n)$ называется (арифметическим) вектором

Обозначение $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$

Свойства

- $\vec{a} = \vec{b} \iff \forall\, a_i, b_i : a_i = b_i$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} : \forall\, c_i = a_i + b_i \implies \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\lambda \in R(C) : \lambda\vec{a} = \vec{b} : \forall\, b_i : b_i = \lambda \cdot a_i$
- $\lambda \in R(C) : \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

Def $\vec{\emptyset} = (0, 0, ..., 0)$ — нулевой вектор

Def $\vec{a}'$ — противоположный вектор для $\vec{a}$

$\vec{a}' + \vec{a} = \vec{\emptyset}$

$\vec{a} = -\vec{a}'$

2. Линейная зависимость системы векторов. Базис.

Def Линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, где $\lambda, \mu \in C$

Если есть множество (система) векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\} = \{\vec{a}_i\}_{i=1}^n$ имеет больше двух элеметов, то линейная комбинация $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{a}_i$

Def $\{\vec{a}_i\}_{i=1}^n$ $\lambda_i \in C$

- если $\exists\lambda_i \neq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{a}_i = \vec{\emptyset}$, то такая система называется линейно зависимой.
- если $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{a}_i = 0 \iff \forall\lambda_i = 0$, то такая система называется линейно независимой.

Любые два компланарных вектора на плоскости составляют линейно зависимую систему. Любые некомпланарные — линейно независимы.

3. Скалярное произведение векторов и его свойства.

Def Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — число (scalar)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ одной размерности)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$

Note Если вектор умножается на себя, говорят о возведении в квадрат, то есть $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$

Def Модуль вектора $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

$\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ — единичный вектор (орт)

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \implies$ они называются ортогональными

Можно вычислить угол между прямыми $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Def

- Проекция т. M на прямую l — точка, образованная пересечением l и $\perp$-ом к l через M.
- Проекция вектора $\vec{AB}$ на ось l — длина вектора $\vec{A'B'}$ со знаком $" + "$, если $\vec{A'B'} \upuparrows \vec{l}$ и $" - "$ в противном случае.

Def Проекция $\vec{a}$ на $\vec{b}$ — проекция $\vec{a}$ на ось $\vec{l}, \vec{l} \upuparrows \vec{b}$

$|\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \alpha$

$\vec{a}'$ — проекция $\vec{a}$ на $\vec{b}$

В декартовой записи $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

4. Векторное и смешанное произведение векторов. Свойства.

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ — векторное произведение; результат — вектор.

Свойства

- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- Площадь параллелограмма: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Геометрически векторное произведение определяется через угол:

Def $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$

$\vec{c} \perp \vec{a}$

$\vec{c} \perp \vec{b}$

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ — смешанное произведение.

Объем параллелепипеда: $V = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ($"+"$ — если правая тройка, $"-"$ — если левая)

Объем тетраэдра: $V = \pm \frac{1}{6} \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ($"+"$ — если правая тройка, $"-"$ — если левая)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (векторы ортогональны)

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (векторы коллинеарны)

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны

5. Определители 2-го и 3-го порядка. Разложение определителя по элементам строки.

Def Матрица — таблица коэффициентов СЛАУ

Def Минор M_{ij} — определитель, получаемый из исходного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}; M_{1,3} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix}; M_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

Def Алгебраическое дополнение $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$

Th Разложение определителя по элементам строки/столбца:

$$detA = \sum_{\substack{i=const \\ j=1}}^{n} a_{i,j} \cdot A_{i,j} = \sum_{\substack{j=const \\ i=1}}^{n} a_{i,j} \cdot A_{i,j}$$

6. Свойства определителей.

- $\lambda|A| = |A|\lambda = \begin{vmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{1,1} & a_{1,2} \\ \lambda a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$

- $|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$

- Любые две строки (столбца) определителя можно сложить, записав результат в одну из них. Значение определителя при этом не изменится.

Note Сложение проходит по элементам, $"-"$ — частный случай $"+"$.

Доказательство

$\square\ |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}+a_{2,1} & a_{1,2}+a_{2,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{2,2}(a_{1,1}+a_{2,1}) - a_{2,1}(a_{1,2}+a_{2,2}) = a_{2,2}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1} - a_{2,1}a_{1,2} - a_{2,1}a_{2,2} = a_{2,2}a_{1}$

- Объединяя свойства 1 и 3 получим следующее: если к строке определителя прибавить любую другую строку домноженную на $\lambda(\lambda \neq 0)$ значение $|A|$ не изменится, то есть:

$\square\ |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} a_{1,1}+\lambda a_{2,1} & a_{1,2}+\lambda a_{2,2} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \begin{vmatrix} a_{1,1}+\lambda a_{2,1} & a_{1,2}+\lambda a_{2,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = |A|\ \blacksquare$

Note Следствием из предыдущих свойств будет то, что определитель с равными (пропорциональными) строками (столбцами) равен $"0"$

- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Note Матрицы, определитель которых равен нулю называются вырожденными матрицами. Еще один особый тип матриц — единичный, их определитель равен $"1"$.

7. Определители 2-го и 3-го порядка. Теорема Крамера.

$\sphericalangle$ СЛАУ размерности 3:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (**)$$

Введем следующие определители:

$$\Delta = |A| \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

Для системы другого порядка формула сохраняет свой вид

Th Крамера:

$\Delta \neq 0 \Longleftrightarrow \exists!$ решение СЛАУ $(**)$, при чем $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$

8. Системы координат. Преобразования сдвига и поворота.

Note Для организации задания положения точки в пространстве необходимо задать начало отсчета, масштаб и направление, при этом, однозначность достигается если количество чисел, определяющих положение точки равно размерности пространства.

- Декартова система координат (прямоугольная)

(x, y) — упорядоченный набор чисел

$d = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$ — расстояние между точками

- Полярная система координат (угловая)

(ρ, φ)

$\varphi \in [0, 2\pi)$

Переход декартова $\leftrightarrow$ полярная

$(x, y) \to (\rho, \varphi)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \frac{x}{\rho} \\ \sin\varphi = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

$(\rho, \varphi) \to (x, y)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Преобразования сдвига и поворота

- Сдвиг

$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ будем искать точку (x_0, y_0) так, чтобы упростить исходное выражение

Координаты начала отсчета в новой системе: (x_0, y_0)

- Поворот

Найдем новые координаты в виде разложения по базису:

$$\begin{cases} x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ Y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

9. Плоскость и ее уравнения.

Уравнения плоскости:

- Векторное $(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{n} = 0$
- Через точку $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
- Общее $Ax + By + Cz + D = 0$
- В отрезках [отсекаемых на осях в декартовой системе координат] $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$
- Нормальное $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, где $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, выбирается так, чтобы свободный член был с $" - "$

10. Прямая в пространстве и ее уравнения.

Уравнения прямой:

- Общее $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$
- Векторное $\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda\vec{S}$
- Каноническое $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$
- Параметрическое $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

11. Прямая на плоскости: уравнения через две точки, каноническое, параметрическое.

- Через две точки $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$
- Каноническое $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$
- Параметрическое $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$

12. Прямая на плоскости: уравнения каноническое, общее, в отрезках.

- Каноническое $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$
- Общее $Ax + By + D = 0$

- В отрезках [отсекаемых на осях в декартовой системе координат] $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

13. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей и прямых в пространстве.

- Необходимое и достаточное условие параллельности плоскостей: система $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ не имеет решений
- Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей: перпендикулярность их векторов ($\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$)
- Необходимое и достаточное условие параллельности прямых: параллельность направляющих векторов ($\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$)
- Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых: ортогональность направляющих векторов, при этом они лежат в одной плоскости ($\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = 0$ и $\vec{s}_1 \vec{s}_2 \vec{a} = 0$)

14. Эллипс. Определение, вывод уравнения, характеристики.

Def Эллипс — геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных постоянно.

Вывод уравнения

$$r_1 + r_2 = const = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \mid \uparrow^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$(x-c)^2 - (x+c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \mid : 4$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc \mid \uparrow^2$$

$$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2xc + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$a^2 - c^2 = b^2$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — каноническое уравнение эллипса.

Вывод уравнения эксцентриситета:

$$r_2^2 - r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 + y^2 = 2c \cdot 2x = 4xc$$

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$\begin{cases} r_2 - r_1 = \frac{2cx}{a} \\ r_2 + r_1 = 2a \end{cases} \iff \begin{cases} r_1 = a - \frac{c}{a}x \\ r_2 = a + \frac{c}{a}x \end{cases}$$

Обозначим $\frac{c}{a} = \varepsilon$ — эксцентриситет

$$r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Вывод уравнения директрисы:

Задача: найти уравнения прямых, таких что $\frac{r_{1,2}}{d} = const$, где $d = \rho(M, line)$

$$r_1 : \frac{r_1}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{l - x} = \frac{\varepsilon(\frac{a}{\varepsilon} - x)}{l - x} = \varepsilon$$

Таким образом, одно из уравнений $x = \frac{a}{\varepsilon}$, второе — $x = -\frac{a}{\varepsilon}$

Таким образом, эксцентриситет — отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса и некоторой прямой (директрисы), для окружности отношение принято $= 0$.

15. Гипербола. Определение, вывод уравнения, характеристики.

Def Гипербола — геометрическое место точки, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек постоянен.

Вывод уравнения

$|r_2 - r_1| = 2a$

$|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}| = 2a$

Обе части ≥ 0, так как $a \geq 0$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \mid \uparrow^2$

$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2$

$(x-c)^2-(x+c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$-4xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \mid : 4$

$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -a^2 - xc \mid \uparrow^2$

$a^2(x^2+2xc+c^2+y^2) = a^4 + 2a^2xc + c^2x^2$

$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$

$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$

$c^2 - a^2 = b^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — каноническое уравнение гиперболы.

Выразим y:

$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$

$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$

Если $x \to \infty \implies \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \to 1 \implies y \to \frac{b}{a}x$

$y = \pm\frac{b}{a}x$ — уравнение асимптот гиперболы.

Эксцентриситет

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$, так как $c > a$

Директриса

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$

16. Парабола. Определение, вывод уравнения, характеристики.

Def Парабола — геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой (точка — фокус, прямая — директриса).

Вывод уравнения

$r = d$

$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = \sqrt{(x+\frac{p}{2})^2} \mid \uparrow^2$

$(x-\frac{p}{2})^2+y^2 = (x+\frac{p}{2})^2$

$y^2 = 2xp$ — каноническое уравнение.

Параметр p — параболический параметр.

Эксцентриситет

$\varepsilon = \frac{r}{d}$

17. Общее уравнение кривых 2-го порядка. Сведение к каноническим уравнениям эллипса и гиперболы (центральные кривые).

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ — общее уравнение кривых второго порядка.

Def Центральная кривая — кривая, имеющая один центр (эллипс, гипербола)

- Сдвиг

$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ будем искать точку (x_0, y_0) так, чтобы упростить исходное выражение

$A(x' + x_0)^2 + B(x' + x_0)(y' + y_0) + C(y' + y_0)^2 + D(x' + x_0) + E(y' + y_0) + F = 0$

Сгруппируем слагаемые с x' и y' первой степени

При x':

$2Ax_0 + By_0 + D = 0$

При y':

$Bx_0 + 2Cy_0 + E = 0$

$\begin{cases} 2Ax_0 + By_0 = -D \\ Bx_0 + 2Cy_0 = -E \end{cases}$ задача найти x_0, y_0

$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2$

Для центральных кривых $\Delta \neq 0$

Координаты начала отсчета в новой системе: (x_0, y_0)

- Поворот

Найдем угол α, на который надо повернуть оси координат, чтобы упростить уравнение:

$\begin{cases} x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$

Переобозначим

$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + G = 0$

Подставим

$A(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + B(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + C(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 + G = 0$

Выберем α так, чтобы сумма слагаемых с $XY = 0$:

$-2A\cos\alpha\sin\alpha - B\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha + 2C\cos\alpha\sin\alpha = 0$

$-A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha = 0$

$(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0$

Решая относительно α находим угол поворота, позволяющий свести уравнение к следующему виду (после переобозначения) $\beta X^2 + \gamma Y^2 + \delta = 0$

18. Общее уравнение кривых 2-го порядка. Сведение к каноническому уравнению параболы (нецентральные кривые).

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ — общее уравнение кривых второго порядка.

Def Нецентральная кривая — кривая, не имеющая центра (парабола)

- Сдвиг

$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ будем искать точку (x_0, y_0) так, чтобы упростить исходное выражение

$A(x'+x_0)^2+B(x'+x_0)(y'+y_0)+C(y'+y_0)^2+D(x'+x_0)+E(y'+y_0)+F=0$

Сгруппируем слагаемые с x' и y' первой степени

При x':

$2Ax_0+By_0+D=0$

При y':

$Bx_0+2Cy_0+E=0$

$\begin{cases}2Ax_0+By_0=-D\\Bx_0+2Cy_0=-E\end{cases}$ задача найти x_0, y_0

$\Delta=\begin{vmatrix}2A & B\\B & 2C\end{vmatrix}=4AC-B^2$

Для центральных кривых $\Delta=0$

Координаты начала отсчета в новой системе: (x_0, y_0)

- Поворот

Найдем угол α, на который надо повернуть оси координат, чтобы упростить уравнение:

$\begin{cases}x'=X\cos\alpha-Y\sin\alpha\\y'=X\sin\alpha+Y\cos\alpha\end{cases}$

Переобозначим

$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+G=0$

Подставим

$A(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)^2+B(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)+C(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)^2+G=0$

Выберем α так, чтобы сумма слагаемых с $XY=0$:

$-2A\cos\alpha\sin\alpha-B\sin^2\alpha+B\cos^2\alpha+2C\cos\alpha\sin\alpha=0$

$-A\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha+C\sin 2\alpha=0$

$(C-A)\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha=0$

Решая относительно α находим угол поворота, позволяющий свести уравнение к следующему виду (после переобозначения) $\beta X^2+\gamma Y^2+\delta=0$

19. Матрицы: определения, действия с матрицами.

Def Матрица — таблица коэффициентов СЛАУ

Def Если $m=n$, матрица называется квадратной.

Для квадратной матрицы вводится понятие главной и побочной диагонали

Def Матрица *полностью* состоящая из нулей называется нулевой.

Def $\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\cdots & & \ddots & \\0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ — единичная матрица

Свойства и действия

- $A=B \Longleftrightarrow a_{i,j}=b_{i,j}$
- $A+B=C: c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$
    - $A+B=B+A$
    - $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $\lambda\in R;\ \lambda A=C: c_{i,j}=\lambda a_{i,j}$
    - $\lambda A=A\lambda$
    - $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
  - $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $A' : A + A' = \emptyset$

  $A' = -A$
- $A \cdot B = C : c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$

  $A \cdot B \neq B \cdot A$

  $\emptyset \cdot A = A \cdot \emptyset$

  $E \cdot A = A \cdot E$
  - $(A + B)C = AC + BC$
  - $C(A + B) = CA + CB$
  - $\lambda(AB) = (\lambda A)B$
  - $(AB)C = A(BC)$

20. Обратная матрица. Существование и единственность обратной матрицы.

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \end{pmatrix}^T$ — обратная матрица для матрицы A.

Th Единственность обратной матрицы

Если существует $B : BA = E; C : AC = E \Longrightarrow B = C$

$\square$ $B = BE = B(AC) = (BA)C = C$ $\blacksquare$

$B = C = A^{-1}$

$A^{-1}A = AA^{-1} = E $

Th Существование обратной матрицы

Если $|A| \neq 0 \Longleftrightarrow \exists A^{-1}$

$\square$ $\Longleftarrow$ Дано: $\exists A^{-1}$? $\Longrightarrow |A| \neq 0$

$\exists A^{-1} : AA^{-1} = E$, по свойству определителя: $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1$, тогда ни один из определителей слева не равен нулю.

$\Longrightarrow$ Дано: $|A| \neq 0$? $\Longrightarrow \exists A^{-1}$

Будем доказывать на примере матрицы 2x2:

$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

Составим $B = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{\Delta} & \frac{A_{2,1}}{\Delta} \\ \frac{A_{1,2}}{\Delta} & \frac{A_{2,2}}{\Delta} \end{pmatrix}$, где $A_{i,j}$ — алгебраическое дополнение.

$\Delta = |A| \neq 0$

Убедимся, что $B = A^{-1}$:

$AB = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} & a_{1,1}a_{1,2} - a_{1,1}a_{1,2} \\ a_{2,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{2,2} & a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\blacksquare$

21. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы.

$\sphericalangle$ произвольную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \end{pmatrix}$. В ней можно выделить квадратные матрицы и вычислить их определители. Выберем из найденных определителей ненулевой наивысшего порядка.

Def Ранг матрицы — наивысший порядок ненулевого минора матрицы.

Def Элементарные преобразования — преобразования строк и столбцов матрицы, не меняющие ее ранга.

Def Матрицы, получаемые элементарными преобразованиями называются эквивалентными.

Элементарными преобразованиями любую матрицу можно свести к виду, когда в главной диагонали находятся все $"1"$, а все остальные места занимают $"0"$. Этот вид называется каноническим. Для квадратной невырожденной матрицы канонической будет E матрица.

Приведение к каноническому виду — один из способов определения вырожденности.

Если определитель матрицы не равен нулю, ранг матрицы равен ее размерности.

22. Системы линейных уравнений: определения, матричный вид. Теорема Кронекера-Капелли.

Def СЛАУ называется совместной, если имеет решение.

Def Слау называется определенной, если имеет 1 решение.

Th

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Тогда

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Если $rang\ A = rang\ \tilde{A} \iff \exists$ решения.

$rang\ A = rang\ \tilde{A} = n \iff \exists!$ решение.

□ Запишем систему

$$X_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \cdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \cdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \cdots + X_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \cdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Обозначим $A^1, A^2, \cdots, A^n$ — столбцы основной матрицы.

$\longrightarrow$ Если $rang\ A = rang\ \tilde{A} \implies \exists$ решение.

Пусть $rang\ A = rang\ \tilde{A} = r$

Согласно одному из определений ранга, это количество линейно независимых столбцов матрицы. A содержит r линейно независимых столбцов, так же как и $\tilde{A} \implies$ столбец B не входит в набор линейно независимых, а это значит, что он может быть выражен как линейная комбинация линейно независимых (базисных) столбцов матрицы A, то есть $\exists$ такие числа $(c_1, c_2, \cdots, c_n) : B = c_1A^1 + c_2A^2 + \cdots + c_nA^n$, то есть $\exists$ решение СЛАУ

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\longleftarrow$: $\exists$ решение $\implies rang\ A = rang\ \tilde{A}$

$\exists$ числа $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ — решение СЛАУ: $c_1A^1 + c_2A^2 + \cdots + c_nA^n = B$ — верно.

Пусть $rang\ A = r$, так как B выражен линейной комбинацией векторов $(A^1, A^2, \cdots, A^n) \implies B$ — линейно зависим по отношению к системе векторов A. Значит $\tilde{A}$ имеет то же количество линейно независимых векторов, что и $A \implies rang\ A = rang\ \tilde{A} = r$ ■

23. Системы линейных уравнений: однородные и неоднородные системы. Линейный оператор и его свойства.

Def

- $AX = B; B \neq \emptyset$ — неоднородная СЛАУ
- $AX = B; B = \emptyset$ — однородная СЛАУ

Def Правило L, по которому элементу x сопоставляется элемент из того же пространства и которое подчиняется свойствам линейности:

$$\begin{cases} L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) \\ L(\lambda x) = \lambda L(x) \end{cases}$$

называется линейным оператором.

В решении СЛАУ применение линейного оператора равносильно умножению A на вектор X

Th1 Пусть X_1, X_2 — решения однородной СЛАУ. Тогда $Z = c_1X_1 + c_2X_2$, где c_1, c_2 — произвольные числа, Z — решение однородной СЛАУ

□ X_1, X_2 — решения $\Longrightarrow L[X_1] = \emptyset, L[X_2] = \emptyset$

$L[Z] = L[c_1X_1 + c_2X_2] = c_1L[X_1] + c_2L[X_2] = \emptyset$ ■

Th Пусть Z — решение однородной СЛАУ ($AZ = 0$) и X^* — частное решение неоднородной СЛАУ ($AX^* = B$), тогда $X = Z + X^*$ — частное решение неоднородной СЛАУ.

$L[X] = L[Z + X^*] = L[Z] + L[X^*] = B$

24. Системы линейных уравнений: однородные и неоднородные системы. Структура общего решения. Фундаментальная система решений.

Def

- $AX = B; B \neq \emptyset$ — неоднородная СЛАУ
- $AX = B; B = \emptyset$ — однородная СЛАУ

Def

$AX = \emptyset$

$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ линейно независимые решения A и $\forall\ X_i = \sum\limits_{j=1}^{k} C_jX_j;\ X_j \in \{X_1, X_2, \cdots, X_k\}$, тогда $\{X_1, X_2, \cdots, X_k\}$ — фундаментальная система решений (ФСР).

ФСР — базис решений однородной СЛАУ

Структура ФСР: $X = X_0 + \tilde{X}$ (общее решение линейной неоднородной системы состоит из общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы)