Имеются следующие базовые объекты:

- учителя $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$
- учебные группы $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$
- временные слоты на период составления расписания $S = \{s_1, \ldots, s_p\}$

Множество слотов S при этом состоит из d отрезков, каждый размером в p_d, соответствующих дням, т.е. $p = d \cdot p_d$ $(d, p_d \in \mathbb{N})$. Несмотря на то, что d в общем случае произвольное, будем иногда называть период составления расписания *неделей*.

Для множества X будем через $X_\perp$ обозначать множество $X \cup \{\perp\}$, где $\perp$ - некоторое специальное значение, не входящее ни в одно из рассматриваемых нами множеств.

Нужно составить *расписание* $A \in G_\perp^{n \times p}$, где $a_{i,k}$ означает группу, которой во время s_k должен преподавать учитель t_i, либо, если $a_{i,k} = \perp$, что этот учитель в это время свободен. Расписание должно удовлетворять следующим *жёстким требованиям* (используется нотация Айверсона):

- Так как мы составляем расписание с точки зрения учителей, то автоматически выполняется, что каждый учитель в каждый слот преподаёт не более чем одной группе. Аналогичное же правило для групп нужно потребовать дополнительно:
  $\forall i_1 = \overline{1,n}, i_2 = \overline{i_1+1,n}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,p}$ $[a_{i_1,k} = g_j \wedge a_{i_2,k} = g_j] = 0$ $(hard_1(A))$
- Задана матрица $R \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n \times m}$. Учитель t_i должен провести у группы g_j ровно $r_{i,j}$ занятий за неделю, то есть $\forall i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ $\sum_{k=1}^{p} [a_{i,k} = g_j] = r_{i,j}$ $(hard_2(A))$
- Задана матрица $F \in \{0,1\}^{n \times p}$, где $f_{i,k}$ задаёт доступность учителя t_i во время s_k. Нужно, чтобы выполнялось $\forall i = \overline{1,n}, k = \overline{1,p}$ $[a_{i,k} \neq \perp] \leq f_{i,k}$ $(hard_3(A))$

Введём вспомогательную функцию k, определённую для $x \in \{1, \ldots, d\}$ и $y \in \{1, \ldots, p_d\}$ как $k(x,y) = (x-1)p_d + y$, то есть сопоставляющую номеру дня и номеру слота внутри дня глобальный номер этого слота.

Жёсткие требования определяют множество *допустимых* решений, на котором мы уже будем стремиться как можно лучше в некотором смысле удовлетворить *мягким требованиям*. Введём некоторые функции.

- Учителям удобнее разместить свои занятия по возможности компактнее, то есть минимизировать количество *дырок* — пустых слотов, по обе стороны от которых в этот день у этого преподавателя есть занятия. Таким образом, $\forall i = \overline{1,n}$ и для расписания A определим функцию $\text{holes}_i(A) = \sum_{x=1}^{d} \sum_{y=1}^{p_d} \left([a_{i,k(x,y)} = \perp] \cdot \left[\sum_{y_1=1}^{y-1} \sum_{y_2=y+1}^{p_d} [a_{i,k(x,y_1)} \neq \perp \wedge a_{i,k(x,y_2)} \neq \perp] > 0 \right] \right)$
- Даже если учитель может провести занятие в какое-то время, оно может быть для него неудобным, то есть имеется мягкая версия требования $hard_3$. Эти *удобства* будут задаваться с помощью аналогичной по формату матрицы $C \in \{0,1\}^{n \times p}$, где $c_{i,k} = 1$, если учителю t_i *удобно* провести занятие во время s_k. Таким образом, $\forall i = \overline{1,n}$ и для расписания A определим функцию $\text{inconvenient}_i(A) = \sum_{k=1}^{p} [a_{i,k} \neq \perp] \cdot [c_{i,k} = 0]$

Назначим первой разновидности мягких требований некоторый вес w_1, а второй некоторый вес w_2. Например, можно положить $w_1 = 1, w_2 = 3$, но для общей постановки константы несущественны. В итоге получаем следующую задачу:

$$\text{minimize}_{A \in G_{\perp}^{n \times p}} \quad L(A) = \sum_{i=1}^{n} \left(w_1 \cdot \text{holes}_i(A) + w_2 \cdot \text{inconvenient}_i(A) \right)$$

$$s.t. \quad \text{hard}_1(A) \wedge \text{hard}_2(A) \wedge \text{hard}_3(A)$$