Université de Nantes

IUT de Nantes

Codes Correcteurs

Auteurs :
Brewal Henaff
Cédric Berland
Nathan Maraval

Cours :
Modélisation
Mathémathique

17 janvier 2016

UNIVERSITÉ DE NANTES

Sommaire

1 Introduction

Ce projet à été réalisé dans le cadre de la formation en Modélisation Mathematique, en DUT Informatique à l'IUT de Nantes.
Il consiste a concevoir un programme permettant l'encodage d'un message binaire, puis par différentes methode que nous expliciterons plus tard, de le décoder et de corriger les possibles erreurs de transmission.

2 La théorie

Cette partie couvrira la théorie, les opérations effectués lors de ce projet, que ce soit lors de la transmition, ou bien de la récéption, comme du brouillage qui sera effectué pour pouvoir tester les données.

2.1 La détection d'erreur

Il existe plusieurs méthodes pour détecter les erreurs, par exemple associer un mot à une lettre comme utilisé dans l'armée :

exemple : erreur $\rightarrow$ Echo Romeo Romeo Echo Uniforme Romeo

En informatique on utilise ce qu'on appel des “bits de parité” qui indique indique si le nombre de 1 dans l'octet est pair ou non

exemple : A $\rightarrow$ 1000001 et ajoutera donc un 0 puisse que il y a deux 1 on obtiendra donc pour A le code suivant “01000001”.
Le bits de parité nous permet de savoir si lors de la transmition le message à été modifié, simplement en regardant si le bit de parité correspond toujours au reste du message (si le nombre de 1 est toujours pair).

2.2 La correction d'erreur

Les différents exemple ci-dessus ne permettent que de détecter les erreurs. Mais ce qui nous intéresse vraiment c'est la correction des erreurs.
Il existe des moyens simple, par exemple la duplication du message :

“erreur” $\rightarrow$ eee rrr rrr eee uuu rrr

On répète chaque lettre 3 fois. Pourquoi 3 fois ? Et pas 2 ?
Imaginons que l'on multiplie seulement 2 fois, on reçois le message suivant : “ââgmee”, le message de base peut être “âge” mais aussi “âme”.

En revanche si l'on multiplie 3 fois on recevra donc un message tel que “âââgmmeee”, en supposant qu'il n'y ai eu qu'une erreur, le message envoyer est donc “âme”.

Le problème de ce genre de code de correction c'est qu'ils sont très lourd, et coûteux, on transmet trois fois les données, et lorsque l'on voit le poids des données généralement transmissent (images, musiques, vidéos), on s'en rend vite compte.

2.3 Le code de Hamming

Depuis 1946, Richard Hamming travaille sur un système de calculateur peu fiable. En effet les données transmises sont souvent corrompus, et la machine finis invariablement par planté. C'est pour y remédier que Hamming va inventer son code correcteur.

2.3.1 La distance de Hamming

La distance de Hamming est une notion mathématique, évidemment défini par Hamming, qui permet de quantifier une différence entre deux séquences de symboles.
Par exemple :

Entre 000111 et 100101 on a 2 bits de différences.

$\rightarrow$ Une distance de Hamming de 2

Une distance de Hamming va être applicable sur un alphabet finis, avec une même taille de bit pour tous les mots.
Par exemple :

000111 et 0111 ne sont pas comparables.

On définit notre alphabet de taille 4, A = {000000 ; 000111 ; 111000 ; 111111}
La distance de Hamming fais office de code correcteur :

Le mot 0000001 a une distance de 1 avec 000000, de 2 avec 000111, de 4 avec 111000, et de 5 avec 111111.
Il est donc très probable que le mot reçu 000001 soit en fait le mot transmis 000000.

Pour utiliser la distance de Hamming, 2 notions sont importantes : la distance minimal et la capacité de correction.

La distance minimal va être la distance de Hamming entre les mots de l'alphabet, et la capacité de correction va représenter le nombre de bits pouvant être détectés et corrigés.

Pour illustrer cela reprenons nos exemples précédents :

La duplication du message :

On reprends le cas où l'on triple chaque symbole (a $\rightarrow$ aaa)

Notre alphabet sera A = {aaa ; bbb ; ccc ; ... ; ddd}

On a donc une distance minimal de 6.

Et une capacité de correction de 1 bit : aab est corrigé en aaa.

Le bit de parité :

On a des mots de 3 bits, dont le premier est un bit de parité.

On obtient 4 possibilités : A = {000 ; 101 ; 110 ; 011}

Cette fois la distance minimal est de 2.

Et on a une capacité de détection de 1 bit : 001 est une erreur, cependant il est à 1 de distance entre 000 et 101, donc impossible de corriger.

2.3.2 Le code de Hamming

Maintenant nous allons nous pencher sur une utilisation plus complexe et intéressante de la distance de Hamming : le code de Hamming. C'est un code correcteur actuel, dont la distance minimale est égale à trois et la capacité de correction et de 1 bit corrigé.

Généralement on utilise un code de Hamming C(7,4). C'est à dire que l'on envoie 7 bits et que les 4 premiers contiennent les données à transmettre. Les 3 derniers servent à la détection des erreurs.

Il s'agit en fait d'un code correcteur parfait, c'est à dire qu'il corrige un bit avec le moins d'information possible (ici 3 bits). On peut le vérifier simplement, attention cependant on par du principe qu'il ne peut y avoir au plus qu'un bit erroné :

- On a 5 états possibles : 4 états d'erreurs + 1 état sans erreur
- On va ajouter p bits de correction, ce qui nous rajoute p états d'erreurs
- Or p bits peuvent contenir 2^p informations

Ce qui nous donne l'équation à respecter :

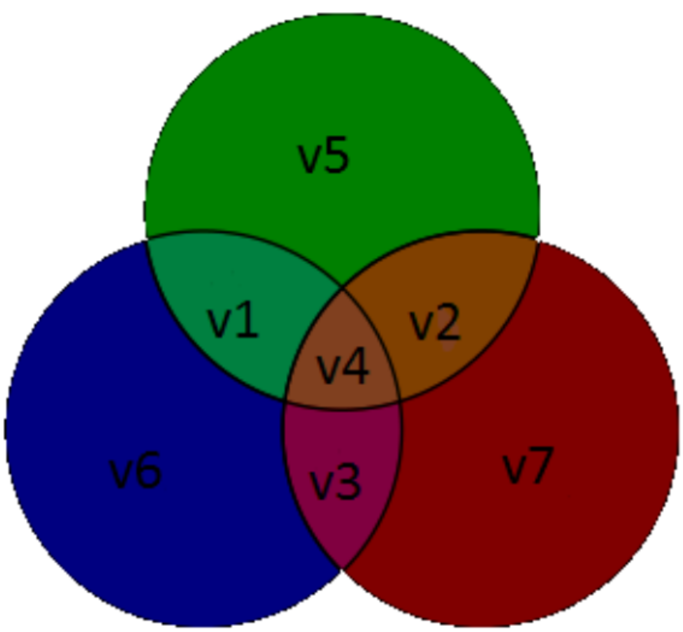
$\rightarrow$ $5 + p = 2^p$

$\rightarrow$ Or $5 + 3 = 2^3$

Ainsi C(7,4) utilise le nombre minimal de bits pour transmettre l'information tout en corrigeant une erreur.

Maintenant voyons comment contenir la correction dans 3 bits !
Ces 3 derniers bits sont en fait l'addition, bit à bit, des 4 autres. En pratique cela donne ça :
Soit $v_1, v_2, \ldots, v_7$ les bits transmit et u_1, u_2, u_3 et u_4 les bits contenant le message.

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1, \\
v_2 &= u_2, \\
v_3 &= u_3, \\
v_4 &= u_4, \\
v_5 &= u_1 + u_2 + u_4, \\
v_6 &= u_1 + u_3 + u_4, \\
v_7 &= u_2 + u_3 + u_4,
\end{aligned}$$



Lorsque l'on reçoit le message (bits $w_1, w_2, \ldots, w_7$), on est face à 8 possibilités :

(0) il n'y a pas d'erreur ;
(1) w_1 est erronée ;
(2) w_2 est erronée ;
(3) w_3 est erronée ;
(4) w_4 est erronée ;
(5) w_5 est erronée ;
(6) w_6 est erronée ;
(7) w_7 est erronée.

Grâce aux 3 derniers bits on peut savoir d'où provient l'erreur. Il suffit de les recalculer (bits W_5, W_6, W_7) et de les comparer, pour obtenir un des huit cas précédent :

(0) si $w_5 = W_5$ et $w_6 = W_6$ et $w_7 = W_7$;
(1) si $w_5 \neq W_5$ et $w_6 \neq W_6$;
(2) si $w_5 \neq W_5$ et $w_7 \neq W_7$;
(3) si $w_6 \neq W_6$ et $w_7 \neq W_7$;
(4) si $w_5 \neq W_5$ et $w_6 \neq W_6$ et $w_7 \neq W_7$;
(5) si $w_5 \neq W_5$;
(6) si $w_6 \neq W_6$;
(7) si $w_7 \neq W_7$.

Cependant ce code ne permet de détecter et corriger qu'une seule erreur. Nous allons le voir au niveau des matrices :

Matrice génératrice G_h :
Notre matrice génératrice :

$$G_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice génératrice reflète ce qui est dit plus haut : en vert on a les 4 bits du message, puis les 3 bits de corrections en rouge. L'intérêt d'une telle matrice est de pouvoir être utilisé facilement par un programme, en effet une simple multiplication matricielle suffit pour encoder le message. Ainsi pour coder mon message M = {1011}, je fais M.Gh = {1011010} = C

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M.Gh = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Décoder le message est très simple puisque l'on connaît les bits du message, ici les 4 premiers. C {1011010} $\rightarrow$ M {1011}

Il s'agit maintenant de pouvoir détecter et corriger les erreurs, pour cela on va s'aider d'une matrice de contrôle :

Matrice de contrôle :
Notre matrice de contrôle :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \tag{1}$$

Notre matrice de contrôle doit répondre à la propriété suivante :
M est un mot de l'alphabet si, et uniquement si H . C = 0
Donc on peux déjà vérifier si le message encodé est valide ou non. On va appeler **syndrome** le résultat de la multiplication matricielle entre le message reçu et la matrice de contrôle. Si le syndrome est non nul, alors on a une erreur de transmission.
On appelle S le syndrome calculé avec C le message reçu :

Si S != 0, C contient un bit erroné.
Le mot correct M cherché diffère de C par un mot Z tel que :
C = M + Z
Il s'agit de trouver ici quel bit est représenter par chaque syndrome S, pour ensuite pour le corrigé avec le message correcteur Z.
Or on a :

- M + C = M + M +Z = Z
- C . H = S
- Z . H = (M + C) . H = M . H + C . H = 0 + C . H = S

On obtient donc le même syndrome pour le message reçu et son message correcteur, ce qui va nous permettre dans la pratique de créer un index où l'on va retenir le message correcteur associer à chaque syndrome. Avec un Hamming (7,4), on a un syndrome de 3 bits, donc un index de taille 8. Sachant que le syndrome 0 sera toujours associer à un message correct, donc un message correcteur Z = $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$.

Pour résumer

- si le syndrome est nul, le message est bon.
- si le syndrome est non nul, alors on regarde dans l'index le bit associé à ce syndrome et on le corrige.

bit de parité :
Comme vu précédemment on peux ajouter un bit de parité à un correcteur pour détecter des erreurs plus d'erreurs.
Dans notre cas présent on va passer du code de Hamming(7, 4) au code de Hamming (8,4). La distance de Hamming minimal va passer de 3 à 4, et on va pouvoir détecter 2 bits d'erreurs.
En effet dans le cas ou 2 bits sont modifié, on va obtenir un syndrome non nul car le message est erroné, et pourtant le bit de parité sera exact, car c'est un nombre pair d'erreur. Dans ce cas le message devra être renvoyé.
Cependant l'erreur est indétectable avec 3 bits erronés.

Pour résumer

- syndrome nul et bit de parité bon $\rightarrow$ pas d'erreur
- syndrome non nul et bit de parité faux $\rightarrow$ 1 erreur corrigeable par le syndrome
- syndrome non nul et bit de parité bon $\rightarrow$ 2 erreurs, retransmission nécessaire
- syndrome nul et bit de parité faux $\rightarrow$ 1 erreur corrigeable par le syndrome

3 Notre code

3.1 L'envoi du message

Test de code :

```c
int GMatrix[4][8] = {{1,1,0,1,1,0,0,0},
                     {0,1,1,1,0,1,0,0},
                     {1,0,1,1,0,0,1,0},
                     {1,1,1,0,0,0,0,1}} ;
char G[4] ;
void init_generators() {
 for (int i=0; i < 4; ++i) {
   G[i] = 0 ;
   for (int j=0; j < 8; ++j)
     if (GMatrix[i][j]) G[i] |= (1 << (7-j)) ;
 }
}

 void hamming(char c, char out[2]) {
   out[0] = out[1] = 0;
   for (int i=0; i < 4; ++i) {
     if (c & (1 << i))
       out[1] ^= G[i] ;
     if (c & (1 << (i+4)))
       out[0] ^= G[i] ;
   }
 }
```

`printf("Sur une ligne")`

3.2 Le brouillage

Afin de pouvoir tester notre code dans des conditions d'erreurs réelles, nous utilisons un programme permettant de brouiller certains bits, aléatoirements. Ce brouillage nous permet de tester notre code décodeur, étant donné que la probabilité d'un brouillage dû au code d'encodage est extremement faible.

Pour se faire, nous utilisons le code transmit.c, qui simule une transmition de message (comme par example l'envois d'un message à un satelite en orbite, ce qui peut engendrer de nombreuses erreurs).

3.3 La réception et le décodage du message

4 d'assault

Comments can be added to the margins of the document using the todo command, as shown in the example on the right. You can also add inline comments too :

Here's a comment in the margin!

This is an inline comment.

4.1 Tables and Figures

Use the table and tabular commands for basic tables — see Table **??**, for example. You can upload a figure (JPEG, PNG or PDF) using the files menu. To include it in your document, use the includegraphics command as in the code for Figure **??** below.

4.2 Mathematics

LaTeX is great at typesetting mathematics. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ and $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$, and let

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_i^n X_i$$

denote their mean. Then as n approaches infinity, the random variables $\sqrt{n}(S_n - \mu)$ converge in distribution to a normal $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

4.3 Lists

You can make lists with automatic numbering . . .

1. Like this,
2. and like this.

…or bullet points …

— Like this,

— and like this.

We hope you find writeLaTeX useful, and please let us know if you have any feedback using the help menu above.

A Annexe 1