Université de Nantes

IUT de Nantes

# Codes Correcteurs

*Auteurs :*
Brewal Henaff
Cédric Berland
Nathan Maraval

*Cours :*
Modélisation
Mathémathique

17 janvier 2016

UNIVERSITÉ DE NANTES

# Sommaire

# 1 Introduction

Ce projet à été réalisé dans le cadre de la formation en Modélisation Mathematique, en DUT Informatique à l'IUT de Nantes.
Il consiste a concevoir un programme permettant l'encodage d'un message binaire, puis par différentes methode que nous expliciterons plus tard, de le décoder et de corriger les possibles erreurs de transmission.

# 2 La théorie

Cette partie couvrira la théorie, les opérations effectués lors de ce projet, que ce soit lors de la transmition, ou bien de la récéption, comme du brouillage qui sera effectué pour pouvoir tester les données.

## 2.1 La détection d'erreur

Il existe plusieurs méthodes pour détecter les erreurs, par exemple associer un mot à une lettre comme utilisé dans l'armée :

exemple : erreur → Echo Romeo Romeo Echo Uniforme Romeo

En informatique on utilise ce qu'on appel des "bits de parité" qui indique indique si le nombre de 1 dans l'octet est pair ou non

exemple : A → 1000001 et ajoutera donc un 0 puisse que il y a deux 1 on obtiendra donc pour A le code suivant "01000001".
Le bits de parité nous permet de savoir si lors de la transmition le message à été modifié, simplement en regardant si le bit de parité correspond toujours au reste du message (si le nombre de 1 est toujours pair).

## 2.2 La correction d'erreur

Les différents exemple ci-dessus ne permettent que de détecter les erreurs. Mais ce qui nous intéresse vraiment c'est la correction des erreurs.
Il existe des moyens simple, par exemple la duplication du message :

"erreur" → eee rrr rrr eee uuu rrr

On répète chaque lettre 3 fois. Pourquoi 3 fois ? Et pas 2 ?
Imaginons que l'on multiplie seulement 2 fois, on reçois le message suivant : "ââgmee", le message de base peut être "âge" mais aussi "âme".

En revanche si l'on multiplie 3 fois on recevra donc un message tel que "âââgmmeee", en supposant qu'il n'y ai eu qu'une erreur, le message envoyer est donc "âme".

Le problème de ce genre de code de correction c'est qu'ils sont très lourd, et coûteux, on transmet trois fois les données, et lorsque l'on voit le poids des données généralement transmissent (images, musiques, vidéos), on s'en rend vite compte.

## 2.3 Le code de Hamming

Depuis 1946, Richard Hamming travaille sur un système de calculateur peu fiable. En effet les données transmises sont souvent corrompus, et la machine finis invariablement par planté. C'est pour y remédier que Hamming va inventer son code correcteur.

### 2.3.1 La distance de Hamming

La distance de Hamming est une notion mathématique, évidemment défini par Hamming, qui permet de quantifier une différence entre deux séquences de symboles.
Par exemple :

Entre 000111 et 100101 on a 2 bits de différences.

→ Une distance de Hamming de 2

Une distance de Hamming va être applicable sur un alphabet finis, avec une même taille de bit pour tous les mots.
Par exemple :

000111 et 0111 ne sont pas comparables.

On définit notre alphabet de taille 4, A = {000000 ; 000111 ; 111000 ; 111111}
La distance de Hamming fais office de code correcteur :

Le mot 0000001 a une distance de 1 avec 000000, de 2 avec 000111, de 4 avec 111000, et de 5 avec 111111.
Il est donc très probable que le mot reçu 000001 soit en fait le mot transmis 000000.

Pour utiliser la distance de Hamming, 2 notions sont importantes : la distance minimal et la capacité de correction.

La distance minimal va être la distance de Hamming entre les mots de l'alphabet, et la capacité de correction va représenter le nombre de bits pouvant être détectés et corrigés.

Pour illustrer cela reprenons nos exemples précédents :

**La duplication du message :**

On reprends le cas où l'on triple chaque symbole (a $\rightarrow$ aaa)

Notre alphabet sera A = {aaa ; bbb ; ccc ; ... ; ddd}

On a donc une distance minimal de 6.

Et une capacité de correction de 1 bit : aab est corrigé en aaa.

**Le bit de parité :**

On a des mots de 3 bits, dont le premier est un bit de parité.

On obtient 4 possibilités : A = {000 ; 101 ; 110 ; 011}

Cette fois la distance minimal est de 2.

Et on a une capacité de détection de 1 bit : 001 est une erreur, cependant il est à 1 de distance entre 000 et 101, donc impossible de corriger.

### 2.3.2 Le code de Hamming

Maintenant nous allons nous pencher sur une utilisation plus complexe et intéressante de la distance de Hamming : le code de Hamming. C'est un code correcteur actuel, dont la distance minimale est égale à trois et la capacité de correction et de 1 bit corrigé.

Généralement on utilise un code de Hamming C(7,4). C'est à dire que l'on envoie 7 bits et que les 4 premiers contiennent les données à transmettre. Les 3 derniers servent à la détection des erreurs.

Il s'agit en fait d'un code correcteur parfait, c'est à dire qu'il corrige un bit avec le moins d'information possible (ici 3 bits). On peut le vérifier simplement, attention cependant on par du principe qu'il ne peut y avoir au plus qu'un bit erroné :

- On a 5 états possibles : 4 états d'erreurs + 1 état sans erreur
- On va ajouter p bits de correction, ce qui nous rajoute p états d'erreurs

- Or p bits peuvent contenir $2^p$ informations

Ce qui nous donne l'équation à respecter :

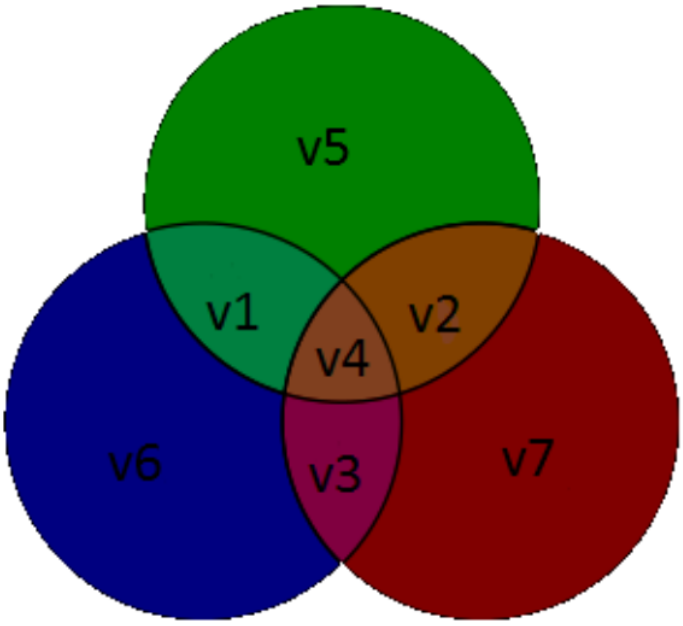
$\rightarrow$ $5 + p = 2^p$

$\rightarrow$ Or $5 + 3 = 2^3$

Ainsi C(7,4) utilise le nombre minimal de bits pour transmettre l'information tout en corrigeant une erreur.

Maintenant voyons comment contenir la correction dans 3 bits !
Ces 3 derniers bits sont en fait l'addition, bit à bit, des 4 autres. En pratique cela donne ça :
Soit $v_1, v_2, \ldots, v_7$ les bits transmit et $u_1, u_2, u_3$ et $u_4$ les bits contenant le message.

$$
\begin{aligned}
v_1 &= u_1, \\
v_2 &= u_2, \\
v_3 &= u_3, \\
v_4 &= u_4, \\
v_5 &= u_1 + u_2 + u_4, \\
v_6 &= u_1 + u_3 + u_4, \\
v_7 &= u_2 + u_3 + u_4,
\end{aligned}
$$




Lorsque l'on reçoit le message (bits $w_1, w_2, \ldots, w_7$), on est face à 8 possibilités :

(0) il n'y a pas d'erreur ;

(1) $w_1$ est erronée ;

(2) $w_2$ est erronée ;

(3) $w_3$ est erronée ;

(4) $w_4$ est erronée ;

(5) $w_5$ est erronée ;

(6) $w_6$ est erronée ;

(7) $w_7$ est erronée.

Grâce aux 3 derniers bits on peut savoir d'où provient l'erreur. Il suffit de les recalculer (bits $W_5, W_6, W_7$) et de les comparer, pour obtenir un des huit cas précédent :

(0) si $w_5 = W_5$ et $w_6 = W_6$ et $w_7 = W_7$ ;

(1) si $w_5 \neq W_5$ et $w_6 \neq W_6$ ;

(2) si $w_5 \neq W_5$ et $w_7 \neq W_7$ ;

(3) si $w_6 \neq W_6$ et $w_7 \neq W_7$ ;

(4) si $w_5 \neq W_5$ et $w_6 \neq W_6$ et $w_7 \neq W_7$ ;
(5) si $w_5 \neq W_5$ ;
(6) si $w_6 \neq W_6$ ;
(7) si $w_7 \neq W_7$.

Cependant ce code ne permet de détecter et corriger qu'une seule erreur. Nous allons le voir au niveau des matrices :

**Matrice génératrice $G_h$ :**
Notre matrice génératrice :

$$G_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice génératrice reflète ce qui est dit plus haut : en vert on a les 4 bits du message, puis les 3 bits de corrections en rouge. L'intérêt d'une telle matrice est de pouvoir être utilisé facilement par un programme, en effet une simple multiplication matricielle suffit pour encoder le message. Ainsi pour coder mon message M = {1011}, je fais M.Gh = {1011010} = C

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M.Gh = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Décoder le message est très simple puisque l'on connaît les bits du message, ici les 4 premiers. C {1011010} → M {1011}

Il s'agit maintenant de pouvoir détecter et corriger les erreurs, pour cela on va s'aider d'une matrice de contrôle :

**Matrice de contrôle $H$ :**
Notre matrice de contrôle :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notre matrice de contrôle doit répondre à la propriété suivante :
M est un mot de l'alphabet si, et uniquement si H . C = 0
Donc on peux déjà vérifier si le message encodé est valide ou non. On va appeler **syndrome** le résultat de la multiplication matricielle entre le message reçu et la matrice de contrôle. Si le syndrome est non nul, alors on a une erreur de transmission.
On appelle S le syndrome calculé avec C le message reçu :

Si S != 0, C contient un bit erroné.
Le mot correct M cherché diffère de C par un mot Z tel que :
C = M + Z
Il s'agit de trouver ici quel bit est représenter par chaque syndrome S, pour ensuite pour le corrigé avec le message correcteur Z.
Or on a :

- M + C = M + M +Z = Z
- C . H = S
- Z . H = (M + C) . H = M . H + C . H = 0 + C . H = S

On obtient donc le même syndrome pour le message reçu et son message correcteur, ce qui va nous permettre dans la pratique de créer un index où l'on va retenir le message correcteur associer à chaque syndrome. Avec un Hamming (7,4), on a un syndrome de 3 bits, donc un index de taille 8. Sachant que le syndrome 0 sera toujours associer à un message correct, donc un message correcteur Z = $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$.

Pour résumer

- si le syndrome est nul, le message est bon.
- si le syndrome est non nul, alors on regarde dans l'index le bit associé à ce syndrome et on le corrige.

**bit de parité :**
Comme vu précédemment on peux ajouter un bit de parité à un correcteur pour détecter des erreurs plus d'erreurs.
Dans notre cas présent on va passer du code de Hamming(7, 4) au code de Hamming (8,4). La distance de Hamming minimal va passer de 3 à 4, et on va pouvoir détecter 2 bits d'erreurs.
En effet dans le cas ou 2 bits sont modifié, on va obtenir un syndrome non nul car le message est erroné, et pourtant le bit de parité sera exact, car c'est un nombre pair d'erreur. Dans ce cas le message devra être renvoyé.
Cependant l'erreur est indétectable avec 3 bits erronés.

Pour résumer

- syndrome nul et bit de parité bon $\rightarrow$ pas d'erreur
- syndrome non nul et bit de parité faux $\rightarrow$ 1 erreur corrigeable par le syndrome
- syndrome non nul et bit de parité bon $\rightarrow$ 2 erreurs, retransmission nécessaire
- syndrome nul et bit de parité faux $\rightarrow$ 1 erreur corrigeable par le syndrome

# 3 Notre code

Nous avons mis en place un code capable de simuler la transmission d'un message en utilisant un code de Hamming (8,4). Pour cela nous utilisons 4 étapes, représenté par 4 fichiers texte :

- le premier va contenir le message voulant être envoyé
- le second va contenir le message codé avec notre Hamming(8,4)
- le troisième va imiter une transmission avec du bruit en changeant des bits aléatoires
- le dernier va contenir le message décoder et corriger si nécessaire

## 3.1 L'envoi du message

Ici on part du fichier avec le message en clair, afin de faire une multiplication matricielle avec la matrice génératrice, et on met le résultat d'en le fichier pour le message encodé.

On peux voir que la matrice est stocké en variable global. On est obligé de se mettre d'accords entre l'émetteur et le receveur sur la matrice utilisé.

Ensuite la méthode hamming va permettre d'encoder un caractère donné. Ce pendant le code de Hamming(8,4) marche avec 4 bits de données, il faut donc diviser les informations entre out[0] et out[1].
Ensuite on fais un produit matricielle avec la matrice et le message, en utilisant l'opérateur bit à bit &.
Par exemple : a donne 0110 0001 en ASCII
On va donc encodé 0110, puis 0001, ce qui va nous donner 16 bits au final.

- 0110 → 1100 0110
- 0001 → 1101 1000

En vert : le message est mis (attention à l'envers)
En rouge : les bits de correction propre à Hamming(7,4)
En bleu : le bit de parité.
Au final le caractère a : en ASCII 0110 0001 → 1101 1000 1100 0110

## 3.2 Le brouillage

Afin de pouvoir tester notre code dans des conditions d'erreurs réelles, nous utilisons un programme permettant de brouiller certains bits, aléatoirements. Ce brouillage nous permet de tester notre code décodeur, étant donné que la probabilité d'un brouillage dû au code d'encodage est extremement faible. Pour se faire, nous utilisons le code transmit.c, qui simule une transmition de message (comme par example l'envois d'un message à un satelite en orbite, ce qui peut engendrer de nombreuses erreurs).

## 3.3 La réception et le décodage du message

### void syndrom

```
void syndrom(){
  int leader[7][7] = {
  {0,0,0,0,0,0,1},
  {0,0,0,0,0,1,0},
  {0,0,0,0,1,0,0},
  {0,0,0,1,0,0,0},
  {0,0,1,0,0,0,0},
  {0,1,0,0,0,0,0},
  {1,0,0,0,0,0,0}};

  int tmp[3] = {0,0,0};
  int index;
  for(int k = 0; k < 7; k++){
  //  printf("===============\n");
    for(int i = 0; i < 3; i++){
      for(int j = 0; j < 7; j++){
        tmp[i] ^= leader[k][j] & GMatrixControl[j][i];
        //printf("tmp[%d]: %d, leader : %d, GMatrixControl : %d\n", i, tmp[i], i
      }
    }
      //printf("Syndrome n°%d : [%d, %d, %d]\n", k, tmp[0], tmp[1], tmp[2]);
    index = tmp[0] + 2*tmp[1] + 4*tmp[2];
    for (int i = 0; i < 3; i++) {
      tmp[i] = 0;
```

```
      }
      synd[index] = k+1;
    }

    printf("index syndromes\n");
    for(int i = 0; i < 8; i++) {
      printf ("index : %d    bit erreur : %d\n", i, synd[i]);
    }
    printf("\n");
  }
```

Comme dit précédemment, le but est ici de se créer un index répertoriant tous les syndrome, avec la solution pour corriger l'erreur, qui sera le tableau **synd**. Pour cela il va falloir calculer le syndrome avec les 7 possibilités de bits erronés, d'où le tableau **leader**.
Une fois le syndrome obtenu, on calcul sa somme qui fera office d'indice pour **synd**, et on y place le numéro du bit concerné.

### int hamming

```
int hamming(char msgEncode[8]) {
  int octetErrone = 0;
  int syndrome[3] = {0,0,0};
  int index;
  //On calcule le syndrome
  for(int i = 0; i < 3; i++){
    for(int j = 0; j < 7; j++){
      syndrome[i] ^= msgEncode[j] & GMatrixControl[j][i];
      //printf("tmp[%d]: %d, leader : %d, GMatrixControl : %d\n", i, tmp[i], le
    }
  }
  index = syndrome[0] + 2*syndrome[1] + 4*syndrome[2];

  int parite = 0;
  //On regarde le bit de parité
  for (int k = 0; k <= 6; k++) {
    parite ^= msgEncode[k];
  }
```

```
    //Si pas un index nulle
    if (index == 0) {
      if(msgEncode[7] == parite) {
        //printf("Le message est intacte\n");
      } else {
        printf("L'index est a 0, alors que le bit de parité n'est pas respecté. (c
        msgEncode[7] ^= 1;
        printf("////////////////////////////////////////////////////////////////////
      }
    //Sinon on répare l'erreur
    } else {
      if(msgEncode[7] != parite) {
        printf("Le message a un bit mal transmis, il est corrigé\n");

        printf("bits recu :  ");
        for (int i = 0; i < 8; i++) {
          printf("%d", bits_recu[i]);
        }
        printf("   8-synd[index]  : %d   ", 8-synd[index]);

        msgEncode[7-synd[index]] ^= 1;



      } else {
        printf("Problème : Le message contient trop d'erreurs\n");
        octetErrone = 1;
      }
    }
    return octetErrone;
  }
```

Cette méthode va permettre de vérifier les erreurs et les corriger si possible. Pour cela on va d'abords regarder les 2 informations nécessaire : le syndrome et le bit de parité.
Comme vu précédemment, on ne touche à rien si le message est correcte, o le corrige si le syndrome est non nul ou le bit de parité faux, et on n'indique

que le message n'est pas corrigeable si le syndrome est non nul et le bit de parité bon.

Ensuite il suffit d'utiliser cette méthode en boucle, puis de récupérer les 4 bits d'informations pour décoder un message.