1) -a)

Determinare il coniugato del numero complesso

$$\left(e^{-i\frac{\pi}{2}+1}\right)^3(2-i)$$

$$\left(e^{-i\frac{\pi}{2}+1}\right)^3(2-i) = \left(e\, e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^3(2-i)$$

$$= e^3 e^{-i\frac{3}{2}\pi}(2-i)$$

$$= e^3 i(2-i) = 2ie^3+e^3$$

$$\overline{2ie^3+e^3} = e^3-2e^3 i$$

1)-b) Si consideri la funzione

$$f(x)=\operatorname{artg}\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right)$$

Determinarne il dominio

stabilire poi il tipo di monotonia della funzione $f\circ f$

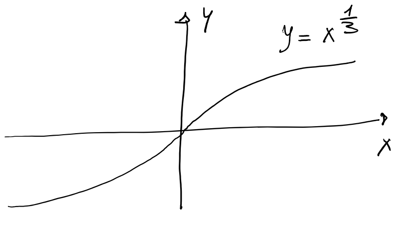
e determinarne l'immagine

dom $f = \mathbb{R}$

f è composta dalla funzione $y=-x^{\frac{1}{3}}+1$

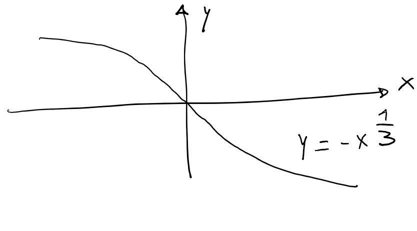
che è strettamente decrescente essendo una traslazione della funzione $y=-x^{\frac{1}{3}}$

che è strett. decrescente



e dalla funzione

$y=\operatorname{artg} x$ che è strett. crescente; quindi f è strett. decrescente



e dunque $f\circ f$ è strett. crescente

Poiché $f\in C^0(\mathbb{R})$, $f\circ f\in C^0(\mathbb{R})$

e quindi $\operatorname{Im}(f\circ f) = \left(\lim_{x\to-\infty} f\circ f(x), \lim_{x\to+\infty} f\circ f(x)\right)$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{artg}\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right) = \lim_{y\to-\infty} \operatorname{artg} y = -\frac{\pi}{2}$

e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{artg}\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right) = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{artg} y = \frac{\pi}{2}$

abbiamo che $\lim_{x\to+\infty} f\circ f(x) \overset{y=f(x)}{=} \lim_{y\to-\frac{\pi}{2}} f(y) = \operatorname{artg}\left(1+\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right)$

abbiamo che $\lim_{x\to+\infty} f\circ f(x) \overset{y=f(x)}{=\!=} \lim_{y\to-\frac{\pi}{2}} f(y) = \operatorname{artg}\left(1+\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right)$

e $\lim_{x\to-\infty} f\circ f(x) \overset{y=f(x)}{=\!=} \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} f(y) = \operatorname{artg}\left(1-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right)$

quindi $\operatorname{Im}(f\circ f) = \left(\operatorname{artg}\left(1-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right), \operatorname{artg}\left(1+\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right)\right)$

2) Determinare il dominio e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Stabilire poi che f è strettamente concava nell'intervallo $(1,+\infty)$

dom f : $x^2-1>0 \iff x>1 \vee x<-1$

quindi dom $f = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$f\in C^0(\operatorname{dom} f)$ e quindi gli asintoti verticali sono da cercare solo nei punti $x=1$ (a dx) e $x=-1$ (a sx)

Notiamo che $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} & \text{se } x>1 \\ -\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{-x-1}} = -\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} & \text{se } x<-1 \end{cases}$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = 0$ $x=1$ non è asintoto verticale

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} -\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \overset{y=\frac{x-1}{x+1}}{=\!=} \lim_{y\to+\infty} -\sqrt{y} = -\infty$

$\lim_{x\to-1^-} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$

quindi la retta $x=-1$ è asintoto verticale a sx per f.

Asintoti orizzontali:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \sqrt{1} = 1$

quindi la retta $y=1$ è asintoto orizz. per $x\to+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = -\sqrt{1} = -1$

quindi la retta $y=-1$ è asintoto orizzontale per $x\to-\infty$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}\,(x+1)^{3/2}}$$

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x-1}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x-1)(x+1)^3}$$

Osserviamo che per $x>1$, numeratore e denominatore di

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x-1}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x-1)(x+1)^3}$$

sono positivi e quindi $f''(x)<0$ per $x>1$ da cui segue che f è strett. concava.

3) Calcolare

$$\int_{-2}^{2} \log(x^2+|x|+1)\,dx$$

Poiché l'integrando è pari, l'integrale assegnato è uguale a

$$2\int_0^2 \log(x^2+x+1)\,dx = 2x\log(x^2+x+1)\Big|_0^2 - 2\int \frac{x}{x^2+x+1}(2x+1)\,dx$$

$$= 4\log 7 - 2\int_0^2 \frac{2x^2+x}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+x & x^2+x+1 \\ \hline 2x^2+2x+2 & 2 \\ \hline -x-2 & \end{array}$$

Quindi

$$\int_0^2 \frac{2x^2+x}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^2 2\,dx - \int_0^2 \frac{x+2}{x^2+x+1}$$

$$= 4 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= 4 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= 4 - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1)\Big|_0^2 + \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= 4 - \frac{1}{2}\log 7 + 2\int_0^2 \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}$$

$$= 4 - \frac{1}{2}\log 7 + 2\int_0^2 \frac{dx}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= 4 - \frac{1}{2}\log 7 + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{1}{2}\log 7 + \sqrt{3}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$5\log 7 - 4 - \sqrt{3}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale

Si veda, ad esempio, la lezione 26.