Appello Analisi Matematica II modulo

giovedì 19 gennaio 2017   14:30

1) Stabilire se le funzione

A) $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{x\,(-\log x)^{3/2}}$ è integrabile tra 0 e $\frac{1}{2}$

B) $f(x)=\dfrac{\sin(x^4)}{x\log^{4/3}x}\,dx$ è integrabile tra 0 e $\frac{1}{3}$

A) $\dfrac{\cos^2 x}{x\,(-\log x)^{3/2}} \leq \dfrac{1}{x\,(-\log x)^{3/2}} \quad \forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$

Poiché la funione $\dfrac{1}{x\,(-\log x)^{3/2}}$ è integrabile tra 0 e $\frac{1}{2}$

f è integrabile per il teorema di confronto

B) È analoga, basta osservare che $\dfrac{\sin(x^4)}{x\log^{4/3}x} \leq \dfrac{1}{x\log^{4/3}x}$, $\forall x\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$

2) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

A) $\begin{cases} y' = y\,\mathrm{artg}(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{x^2+1}\,y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Si consideri poi la seguente modifica del problema precedente

A) $\begin{cases} y' = y\,\mathrm{artg}(x) + \sin y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{x^2+1}\,y + \cos y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

È ancora vero che tale problema ha ancora una e una sola soluzione definita su $\mathbb{R}$? Motivare la risposta

A)

$$y(x) = c\,e^{\int \mathrm{artg}\,x\,dx}, \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\int \mathrm{artg}\,x = x\,\mathrm{artg}\,x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

quindi $y(x) = c\,e^{x\,\mathrm{artg}\,x}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

come si vede $y(0) = c$ quindi per $c=1$ ottiene la soluzione del problema

Per il secondo quesito osserviamo che l'equazione è del tipo $y' = f(x,y)$ con $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x,y) = \operatorname{artg}(x)\, y + \sin y$

Poiché $f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ il problema di Cauchy assegnato ha sicuramente una e una sola soluzione in un intorno di $x_0 = 0$

Dato che $|f(x,y)| \leq |\operatorname{artg}(x)\, y| + |\sin y|$

$$\leq \frac{\pi}{2}|y| + 1$$

f è sublineare in y e quindi la soluzione è definita su $\mathbb{R}$.

B) È analoga:

$$y(x) = c e^{\int \frac{x^2}{x^2+1}dx}, \quad c \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - \operatorname{artg} x;$$

quindi $y(x) = c e^{x} e^{-\operatorname{artg} x}$;

$y(0) = c$ e quindi per $c = 1$ si ottiene la soluzione

Per il II quesito: $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+1} y + \cos y$,

$f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $|f(x,y)| \leq \left|\frac{x^2}{x^2+1} y\right| + |\cos y|$

$$\leq 1|y| + 1 = |y| + 1$$

3) Determinare i punti stazionari della funzione

A) $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)xy$

B) $f(x,y) = (1 - x^2 + y^2)xy$

e studiarne la natura

A) $f_x(x,y) = -2x \cdot xy + (1-x^2-y^2)y = y(1-3x^2-y^2)$

$f_y(x,y) = -2y \cdot xy + (1-x^2-y^2)x = x(1-x^2-3y^2)$

$$\begin{cases} y(1-3x^2-y^2)=0 \\ x(1-x^2-3y^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x(1-x^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-3x^2-y^2=0 \\ x(1-x^2-3y^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1=3x^2+y^2 \\ x(3x^2+y^2-x^2-3y^2)=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 1=3x^2+y^2 \\ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\pm 1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1=3x^2+y^2 \\ 2x^2-2y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y)(x+y)=0 \\ 1=3x^2+y^2 \end{cases} \iff$$

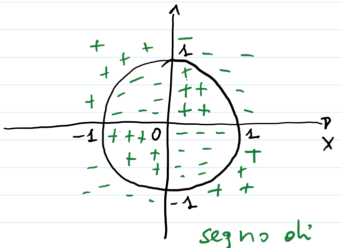
$|\ x=y \qquad y=\pm\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 1 = 3x^2+y^2 \\ 2x^2-2y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y)(x+y)=0 \\ 1=3x^2+y^2\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=y \\ 1=4y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\pm\frac12 \\ x=\pm\frac12\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-y \\ 1=4y^2\end{cases} \quad \begin{cases} y=\pm\frac12 \\ x=\mp\frac12\end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto i punti critici $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(-1,0)$, $P_4(0,1)$, $P_5(0,-1)$
$\left(\frac12,\frac12\right)$, $\left(-\frac12,-\frac12\right)$, $\left(\frac12,-\frac12\right)$, $\left(-\frac12,\frac12\right)$



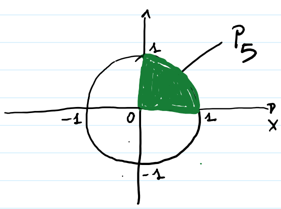
segno di $f(x,y)-f(P_i)$
$i=1,\dots,5$

Poiché $1-x^2-y^2 \geq 0 \iff (x,y) \in \overline{D(0,1)}$ otteniamo subito la natura dei primi 5 punti critici tenendo presente che

$$f(0,0)=f(1,0)=f(-1,0)=f(0,1)=f(0,-1)=0$$

Come si vede dalla figura sono tutti punti di sella

Poiché $f(-x,-y)=f(x,y)$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, la natura di $P_7\left(-\frac12,-\frac12\right)$ è la stessa di $P_6\left(\frac12,\frac12\right)$. Analogamente, dato che $f(x,-y)=f(-x,y)=-f(x,y)$ la natura di $P_8\left(\frac12,-\frac12\right)$ e $P_9\left(-\frac12,\frac12\right)$ è opposta (salvo nel caso in cui si tratti di punti di sella) a quella di $P_6\left(\frac12,\frac12\right)$



Consideriamo il settore circolare T in verde nella figura qui accanto. T è compatto e sui punti del suo bordo f è uguale a 0. Dato che $f(P_5)>0$ per il teorema di Weierstrass applicato f_T, P_6 è un punto di massimo locale forte.
Allo stesso risultato si giunge calcolando la matrice Hessiana di f in P_6

Infine, per quanto osservato sopra, P_7 è un massimo locale forte
P_8 e P_9 sono minimi locali forti.

B) $f_x(x,y) = -2x\,xy + (1-x^2+y^2)y = y(1-3x^2+y^2)$

$f_y(x,y) = 2y\,xy + (1-x^2+y^2)x = x(1-x^2+3y^2)$

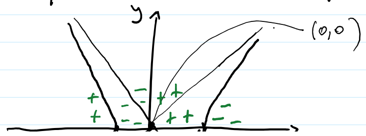
$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=\pm1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(1-3x^2+y^2)=0 \\ x(1-x^2+3y^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-3x^2+y^2=0 \\ x(1-x^2+3y^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1=3x^2-y^2 \\ x(2x^2+2y^2)=0 \end{cases}$$

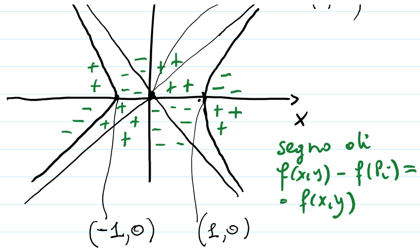
$$\iff \begin{cases} x=0 \\ 1=-y^2 \end{cases} \emptyset$$

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)=0 \\ 1=3x^2-y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \wedge y=0 \\ 1=0 \end{cases} \emptyset$$

I punti critici di f sono dunque $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(-1,0)$



Come per la traccia A, dato che $f(P_1)=f(P_2)=P_3(-1,0)$, poniamo



come per la traccia, dato che $f(P_1) = f(P_2) = P_3(-1,0)$, possiamo stabilire la natura di tali punti analizzando il segno di $f(x,y) - f(P_i) = f(x,y)$.

Poiché $1 - x^2 + y^2 \geq 0$ nella parte di piano connessa (contenente $(0,0)$) delimitata dall'iperbole $x^2 - y^2 = 1$, P_1, P_2 e P_3 sono di sella.

4) Calcolare

A) $\displaystyle\int_A x^2 \cos(xy)\,dx\,dy$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi,\ 1 \leq y \leq \frac{\pi}{x}\}$

B) $\displaystyle\int_A \frac{x^2 \cos x}{\cos^2(xy)}\,dx\,dy$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq y \leq \frac{\pi}{4x}\}$

A)
$$\int_A x^2 \cos(xy)\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \left(\int_1^{\frac{\pi}{x}} x \cos(xy)\,dy \right) dx = \int_0 x \sin(xy) \Big|_1^{\frac{\pi}{x}} dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x(\sin \pi - \sin x)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x\,dx = x \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x$$

$$= -\pi - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\pi + 1$$

B)
$$\int_A \frac{x^2 \cos x}{\cos^2(xy)}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \left(\int_1^{\frac{\pi}{4x}} \frac{x}{\cos^2(xy)}\,dy \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \ \mathrm{tg}(xy) \Big|_1^{\frac{\pi}{4x}} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{tg}\, x \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (x \cos x - x \sin x)\,dx$$

$$= x \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx + x \cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x =$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{6}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$