1) - a)

Si determino le soluzioni complesse in forma cartesiana dell'equazione

$$2z^6 + z^3 = 0$$

$$z^3(2z^3+1) = 0 \quad \begin{cases} z^3 = 0 \iff z = 0 \\ 2z^3+1 = 0 \iff z^3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$z^3 = -\frac{1}{2} \iff z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right)}, \quad k = 0,1,2$$

Quindi $z_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} e^{i\pi/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} e^{i\pi} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} e^{i\frac{5}{3}\pi} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

1) - b)

Si determini il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione $g \circ f$

con $f(x) = x + e^{\sqrt{x}}$ e $g(x) = x^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

dom $g \circ f$: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + e^{\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \quad \{ x \geq 0$ (se $x \geq 0$, la 2ª disequazione è soddisfatta)

f è strettamente crescente, g è strettamente decrescente

quindi $f \circ f$ è strett. decrescente

Poiché g e f sono continue $g \circ f \in C^0([0,+\infty))$ e

quindi $\operatorname{Im}(g \circ f) = \left(\lim_{x \to +\infty} g \circ f(x),\ g \circ f(0)\right]$

$$= (0, 1]$$

2) Determinare il dominio, gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = x(1 - \log x) + 1$$

Determinare i punti di estremo locale e assoluto per f. Studiare la convessità di f.

Disegnare infine il grafico di f

Sia poi $g(y) = \dfrac{y^{1/3} - 1}{y - 1}$. Si calcoli $\lim_{x \to 0^+} (g \circ f)(x)$

dom f : $x > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x - x\log x + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$$

Quindi la retta $x = 0$ NON È asintoto verticale

Poiché $f \in C^0((0,+\infty))$ non ci sono altri punti in cui cercare asintoti verticali.

Cerchiamo eventuali asintoti orizzontali o obliqui per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x(1 - \log x) + 1 = (+\infty)(-\infty) + 1 = -\infty + 1 = -\infty$$ NO asintoto orizz.

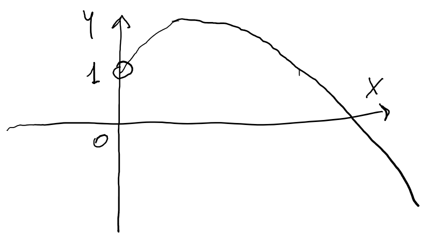
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 - \log x + \frac{1}{x} = 1 - \infty + 0 = -\infty$$ No asintoto obliquo

$$f'(x) = 1 - \log x - x \cdot \frac{1}{x} = -\log x$$

Quindi $f'(x) > 0$ per $x \in (0,1)$ e $f'(x) < 0$ per $x > 1$

Pertanto 1 è un punto di massimo locale forte per f. Poiché f è strettamente crescente in $(0,1]$ e strett. decrescente in $[1,+\infty)$ 1 è anche un punto di massimo assoluto per f

$$f''(x) = -\frac{1}{x} < 0$$ quindi f è strettamente concava.



Poiché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^+} g \circ f(x) = \lim_{x \to 0^+} g(f(x)) \overset{f(x)=y}{=} \lim_{y \to 1} \frac{y^{\frac{1}{3}} - 1}{y - 1}$

$\underline{y - 1 = h}$ $$\lim_{h \to 0} \frac{(h+1)^{\frac{1}{3}} - 1}{h} = \frac{1}{3}$$

3) Calcolare l'integrale

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x - 1| \sin x \, dx$$

$x - 1 > 0$ per $x > 1$, quindi usando la proprietà additiva rispetto al dominio di integrazione otteniamo

$\int^{1}$ $\int^{2\pi}$

al dominio di integrazione otteniamo

$$\int_{-\pi}^{1}(1-x)\sin x\,dx+\int_{1}^{2\pi}(x-1)\sin x\,dx =$$

$$=\int_{-\pi}^{1}\sin x-\int_{-\pi}^{1}x\sin x+\int_{1}^{2\pi}x\sin x-\int_{1}^{2\pi}\sin x\,dx$$

$$=-\cos x\Big|_{-\pi}^{1}+x\cos x\Big|_{-\pi}^{1}-\int_{-\pi}^{1}\cos x-x\cos x\Big|_{1}^{2\pi}+\int_{1}^{2\pi}\cos x+\cos x\Big|_{1}^{2\pi}=$$

$$=-\cancel{\cos 1}-\cancel{1}+\cancel{\cos 1}-\pi-\sin x\Big|_{-\pi}^{1}-2\pi+\cancel{\cos 1}+\sin x\Big|_{1}^{2\pi}+\cancel{1-\cos 1}$$

$$=-3\pi-\sin 1-\sin 1=-2\sin 1-3\pi$$

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione. Dimostrare che la differenza di due primitive di una funzione f definita su un intervallo è costante. Usando questa proprietà determinare la primitiva nulla in $x=1$ della funzione $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Per definizione e dimostrazione richiesta si veda, ad esempio, la lezione 26

Poiché una primitiva di $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ è la funzione $-\dfrac{1}{x+1}$ è sufficiente scegliere $c\in\mathbb{R}$ in modo che

$-\dfrac{1}{x+1}+c=0$ per $x=1$ cioè $-\dfrac{1}{2}+c=0$ cioè

$c=\dfrac{1}{2}$. Quindi la primitiva richiesta è $y=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2}$