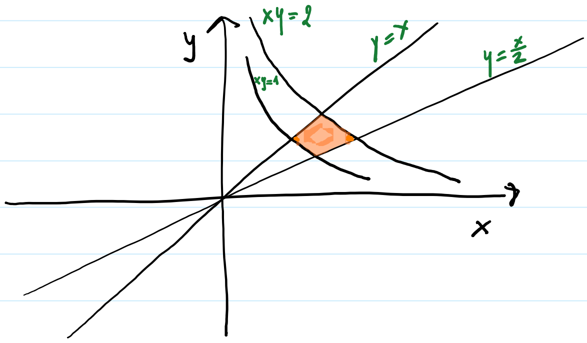
1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A xy \log\left(\frac{y}{x}\right) dx\,dy$$

dove A è l'insieme definito da $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<xy<2 \text{ e } \frac{x}{2}<y<x\}$

L'insieme A è qui rappresentato in arancione



Come si vede $x>0$ su A; conviene introdurre le variabili

$xy = u$ e $\frac{y}{x} = v$

Ovviamente $1<u<2$ e $\frac{1}{2}<v<1$ quindi nel piano uv A corrisponde ad un rettangolo

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2\frac{y}{x} = 2v$$

Quindi $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{1}{2v}$

L'integrale diviene

$$\int_{[1,2]\times[\frac{1}{2},1]} u \log v \cdot \frac{1}{2v}\, du\, dv$$; l'integranda è ora a

variabili separabili e quindi otteniamo

variabili separabili e quindi otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_1^2 u\,du \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\log v}{v}\,dv = \frac{1}{4}u^2\Big|_1^2 \cdot \frac{1}{2}\log^2 v\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{8}(4-1)\left(-\log^2\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{8}(\log 2)^2$$

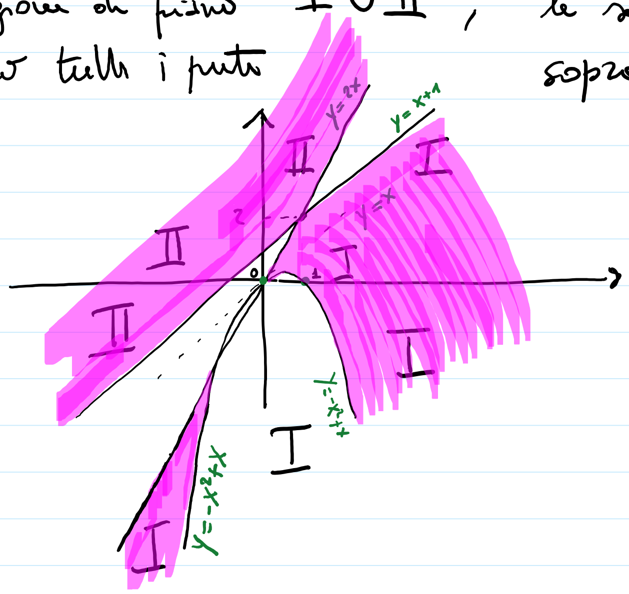
2) Determinare e rappresentare sul piano il dominio della funzione

$$f(x,y) = \log\left(\frac{x-y+1}{2x-y}\right) + \sqrt{x^2-x+y}$$

Dire poi se tale insieme è aperto, chiuso, compatto, connesso per archi.
Stabilire che f è differenziabile nei punti interni al suo dominio.
Calcolare infine la direzione di massima crescita per f nel punto $(1,1)$

$$\text{dom} f: \quad \begin{cases} \dfrac{x-y+1}{2x-y} > 0 \\[2ex] x^2-x+y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{cases} x-y+1>0 \\ 2x-y>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y+1<0 \\ 2x-y<0 \end{cases} \\[2ex] y \geq x-x^2 \end{cases}$$

L'unione delle soluzioni dei primi due sistemi è data dalla regione di piano $I \cup II$; le soluzioni della seconda disequazione sono tutti i punti sopra la parabola di equazione $y=-x^2+x$



L'intersezione di tali regioni è colorata in viola. Si osservi che la retta tg alla parabola di equazione $y=-x^2+x$ nel punto $(0,0)$ ha equazione $y=x$.

Si tratta dunque di un insieme né aperto (ci sono punti della parabola $y=-x^2+x$ che appartengono al dominio e non sono ovviamente interni) né chiuso (i punti della retta $y=x+1$

sono di frontiera per il dominio ma non vi appartengono). Non è compatto in quanto non è chiuso né limitato. Non è connesso per archi (nessun punto delle regioni I o II può essere comune con un punto dell'altra regione con una curva continua contenuta nel dominio).

f è differenziabile nei punti interni del suo dominio in quanto è ivi derivabile parzialmente con derivate parziali continue.

La direzione di massima crescita nel punto $(0,1)$ è data da

$$v = \frac{\nabla f(0,1)}{|\nabla f(0,1)|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x-y}{x-y+1} \; \frac{2x-y-2(x-y+1)}{(2x-y)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-x+y}}(2x-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x-y}{x-y+1} \; \frac{-(2x-y)+(x-y+1)}{(2x-y)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-x+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

quindi $v = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma esplicita per l'equazione

$$y' = y^2 e^{\frac{x-1}{2}} - y^2$$

$$y' = y^2\left(e^{\frac{x-1}{2}} - 1\right)$$

l'unica soluzione singolare è quindi la funzione costante $y(x)=0$

$$\frac{y'}{y^2} = e^{\frac{x-1}{2}} - 1 \longrightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2}\,dx = \int \left(e^{\frac{x-1}{2}} - 1\right)dx \quad \text{da cui}$$

$$-\frac{1}{y} = 2e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}} - x + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

e quindi $y = \dfrac{1}{x - 2e^{-1/2}e^{x/2} + c}$, $c \in \mathbb{R}$

4) Sia $f \in C^0([0,+\infty))$. Ricordare la definizione di $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente.

Dimostrare poi che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \in \mathbb{R}$

Per la definizione si veda la lezione 28;
per l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, la lezione 30