1)-a) Determinare la rappresentazione cartesiana delle soluzioni dell'equazione

$$\frac{2i+z}{2i} = z$$

$$\frac{2i+z}{2i} = z \iff 2i+z = z\,2i$$

$$z(2i-1) = 2i$$

$$z = \frac{2i}{2i-1} = \frac{2i(-1-2i)}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

1)-b) Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log(1-x)\right) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$$

dom f:
$$\begin{cases} 1-x>0 \\ x+2>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<1 \\ x>-2 \end{cases}$$

Quindi f è definita sull'intervallo $(-2,1)$

Osserviamo che la funzione $x\in\mathbb{R} \mapsto 1-x$ è strett. decrescente su $\mathbb{R}$ quindi lo è anche su $(-2,1)$. Le funzioni $y=\log x$ e $y=\operatorname{arctg} x$ sono strettamente crescenti sui loro rispettivi domini quindi la funzione $y=\operatorname{arctg}(\log(1-x))$ è strettamente decrescente su $(-2,1)$ in quanto composta da due funzioni strettamente crescenti e una strettamente decrescente.

La funzione $x\in\mathbb{R}\mapsto x+2$ è strettamente crescente e dunque anche la sua restrizione a $(-2,1)$ lo è; la funzione $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ è strettamente decrescente e quindi $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$ è strettamente decrescente su $(-2,1)$.

Poiché somma di due funzioni strettamente decrescenti, f è strettamente decrescente

Poiché f è anche continua su $(-2,1)$, $\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -2^+} f(x)\right)$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} + \underbrace{(-1)}_{=\log_{\frac{1}{3}} 3}, +\infty\right)$$

2) [illegible]

$\log_{\frac{1}{3}} 3$

2) Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ e sia A il suo dominio.

Determinarne A. Calcolarne la derivata e studiare gli asintoti della funzione derivata (su $\mathring{A}$). Cosa si può dire della derivabilità di f in x=1 e dell'esistenza della retta tangente al suo grafico in x=1?

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+2} \geq 0 \right\} = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$$

$$\forall x \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty), \quad f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Pertanto f' ha per asintoto orizzontale la retta y=0 sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

$\lim_{x \to -2^-} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \frac{1}{(x+2)^2}$: si presenta nella forma $0 \cdot \infty$

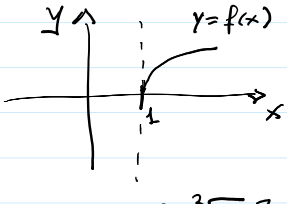
osservando che $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{-x-2}}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{(-x-2)^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{(-x-2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \frac{1}{(x+2)^2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{(-x-2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{3}{2} \cdot (+\infty) \cdot \frac{1}{9} = +\infty$$

Dunque f' ha asintoto verticale x=-2 a sx e asintoto verticale x=1 a dx.

Poiché $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$, f è dotata di derivata nel punto 1 nel senso che $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty$. La retta tangente al grafico di f nel punto x=1 è quindi la retta verticale x=1.



3) Calcolare la media integrale di $f(x) = x^2 \cos^2(x^3)$ sull'intervallo $[0, \sqrt[3]{\pi}]$
$\sqrt[3]{\pi}$

3) Calcolare la media integrale di $f(x) = x^2\cos^2(x^3)$ sull'intervallo $[0, \sqrt[3]{\pi}]$

La media integrale di f su $[0, \sqrt[3]{\pi}]$ è: $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos^2(x^3)\, dx$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos^2(x^3)\, dx \underset{dt = 3x^2 dx}{\overset{x^3 = t}{=}} \frac{1}{3\sqrt[3]{\pi}} \int_0^{\pi} \cos^2(t)\, dt =$$

Calcoliamo $\int_0^{\pi} \cos^2(t)\, dt$:

$$\int_0^{\pi} \cos^2(t)\, dt = \left(\cos t \sin t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt \right) =$$

$$= \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t)\, dt = \pi - \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt \ ; \text{ quindi}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2(t) = \frac{\pi}{2} \quad \text{e dunque} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos(x^3)\, dx = \frac{1}{6}\, \pi^{2/3}$$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema degli Zeri per le funzioni continue.

Si vedano pagg. 169-170 del manuale consigliato.