Politecnico di Bari
CdL Ingegneria Informatica e Automazione
CdL Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni
AA 2015-2016

Complementi di Analisi Matematica
Tracce di esame (con svolgimenti)

Docente: Prof. E. Caponio

A.A. 2015/2016 I esonero 12 novembre 2015 Traccia A

1) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione $f(t) = e^{-it}\sin(2t)$ specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definita.

2) Stabilire se $\frac{s+1}{s-i}$ può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.

3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2t) & 0 \le t \le \pi \\ \cos t & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

4) Stabilire qual è la funzione di trasferimento dell'equazione $y'' - 6y' + 9y = 0$. Calcolarne poi la sua antitrasformata.

5) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{nx+1}}$$

converge puntualmente. Calcolarne poi la somma.

A.A. 2015/2016 I esonero 12 novembre 2015 Traccia B

1) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione $f(t) = e^{-t}\cos(3t)$ specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definita.

2) Stabilire se $s^2 - i$ può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.

3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} \cos(3t) & 0 \leq t \leq \pi \\ \sin t & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

4) Stabilire qual è la funzione di trasferimento dell'equazione $y'' + 2y' + y = 0$. Calcolarne poi la sua antitrasformata.

5) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x^2 - 1)^n$$

converge puntualmente. Calcolarne poi la somma.

A.A. 2015/2016 I esonero 12 novembre 2015 Traccia C

1) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione $f(t) = e^{it}t^2$ specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definita.

2) Stabilire se $\dfrac{i-s}{1+s}$ può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.

3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} \sin(3t) & 0 \le t \le 2\pi \\ \cos t & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

4) Stabilire qual è la funzione di trasferimento dell'equazione $y'' - 4y' + 4y = 0$. Calcolarne poi la sua antitrasformata.

5) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

converge puntualmente. Calcolarne poi la somma.

A.A. 2015/2016 I esonero 12 novembre 2015 Traccia D

1) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione $f(t) = e^t t^3$ specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definita.

2) Stabilire se $\dfrac{s^2-1}{s}$ può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.

3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

4) Stabilire qual è la funzione di trasferimento dell'equazione $y'' - 2y' + y = 0$. Calcolarne poi la sua antitrasformata.

5) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{nx-3}$$

converge puntualmente. Calcolarne poi la somma.

Esonero Complementi di Analisi Matematica

giovedì 12 novembre 2015 12:00

1) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione

A) $f(t) = e^{-it} \sin(2t)$

B) $f(t) = e^{-t} \cos(3t)$

C) $f(t) = e^{it} t^2$

D) $f(t) = e^{t} t^3$

specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ converge.

Usando le proprietà della trasformata si ottiene subito

A) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{2}{4+(s+i)^2}$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$

B) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{s+1}{9+(s+1)^2}$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > -1$

C) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{2}{(s-i)^3}$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$

D) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{6}{(s-1)^4}$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 1$

2) Stabilire se la funzione

A) $\dfrac{s+1}{s-i}$

B) $s^2 - i$

C) $\dfrac{i-s}{1+s}$

D) $\dfrac{s^2-1}{s}$

può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.

Motivare la risposta

La risposta è negativa per tutte le tracce poiché:

A) $\lim_{Re s \to +\infty} \frac{s+i}{s-i} = 1 \neq 0$ per s che varia nella retta $x+i\bar{y}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$ fissato

B) fissato $\bar{y} \in \mathbb{R}$, $s = x+i\bar{y}$, $\lim_{Re s \to +\infty} s^2 - i =$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^2 - \bar{y}^2 + 2ix\bar{y} - i = +\infty \neq 0$$

C) $\lim_{Re s \to +\infty} \frac{i-s}{1+s} = -1 \neq 0$ per s che varia nella retta $x+i\bar{y}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$ fissato

D) fissato $\bar{y} \in \mathbb{R}$, $s = x+i\bar{y}$, $\lim_{Re s \to +\infty} \frac{s^2-1}{s} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - \bar{y}^2 + 2ix\bar{y} - 1}{x+i\bar{y}} = +\infty \neq 0$$

3) Calcolare la trasformata del segnale

A) $f(t) = \begin{cases} \sin 2t & 0 \leq t \leq \pi \\ \cos t & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

B) $f(t) = \begin{cases} \cos 3t & 0 \leq t \leq \pi \\ \sin t & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

C) $f(t) = \begin{cases} \sin 3t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \cos t & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

D) $f(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

A) Poiché $f(t) = \sin_+(2t) - \sin_+(2(t-\pi)) - \cos_+(t-\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{2}{4+s^2} - e^{-\pi s}\frac{2}{4+s^2} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{2}{4+s^2} - e^{-\pi s}\frac{2}{4+s^2} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

B) $f(t) = \cos_+(3t) + \cos_+(3(t-\pi)) - \sin_+(t-\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{9+s^2} + e^{-\pi s}\frac{s}{9+s^2} - e^{-\pi s}\frac{1}{1+s^2}$$

C) $f(t) = \sin_+(3t) - \sin_+(3(t-2\pi)) + \cos_+(t-2\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{3}{9+s^2} - e^{-2\pi s}\frac{3}{9+s^2} + e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

D) $f(t) = \cos_+(2t) - \cos_+(2(t-2\pi)) + \sin_+(t-2\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{4+s^2} - e^{-2\pi s}\frac{s}{4+s^2} + e^{-2\pi s}\frac{1}{1+s^2}$$

4) Dire qual'è la funzione di trasferimento dell'equazione

A) $y'' - 6y' + 9y = 0$

B) $y'' + 2y' + y = 0$

C) $y'' - 4y' + 4y = 0$

D) $y'' - 2y' + y = 0$

Calcolarne, poi, la sua antitrasformata.

Per definizione, la funzione di trasferimento è $\frac{1}{P(s)}$ dove $P = P(s)$ è il polinomio caratteristico dell'equazione; quindi:

A) $$\frac{1}{s^2-6s+9} = \frac{1}{(s-3)^2}$$

B) $$\frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

C) $\dfrac{1}{s^2-4s+4} = \dfrac{1}{(s-2)^2}$

D) $\dfrac{1}{s^2-2s+1} = \dfrac{1}{(s-1)^2}$

L'antitrasformata è quindi la funzione

A) te^{3t} B) te^{-t} C) te^{2t} D) te^{t}

5) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

A) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{nx+1}}$

B) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (x^2-1)^n$

C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$

D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{nx-3}$

converge puntualmente. Calcolarne poi la somma.

A) $$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{nx+1}} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3\cdot(3^x)^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^x}\right)^n$$

e quindi converge se e solo se $-1 < \frac{1}{3^x} < 1$

cioè se $x \geq 0$. La sua somma è data da

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} - 1 - \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3^{2x}}\right)$$

B) Converge se e solo se $-1 < x^2-1 < 1$ cioè

$0 < x^2 < 2$ ossia $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$

La sua somma è data da

$$\frac{1}{1-(x^2-1)} - 1 - x^2 + 1 = \frac{1}{2-x^2} - x^2$$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ e quindi

se e solo se $-1 < \dfrac{1}{1+x^2} < 1$ ossia $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

La sua somma è data da

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} - 1 = \frac{1+x^2}{x^2} - 1 = \frac{1}{x^2}$$

D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{nx-3} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} (2^x)^n$ e

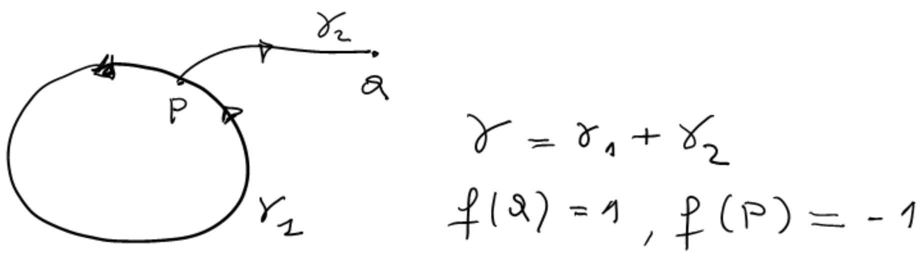
quindi converge se e solo se $2^x < 1$ cioè

se e solo se $x < 0$. La sua somma è data da

$$\frac{1}{8}\,\frac{1}{1-2^x} - \frac{1}{8}$$

A.A. 2015/2016 II esonero - I chance 20 gennaio 2016 Traccia A

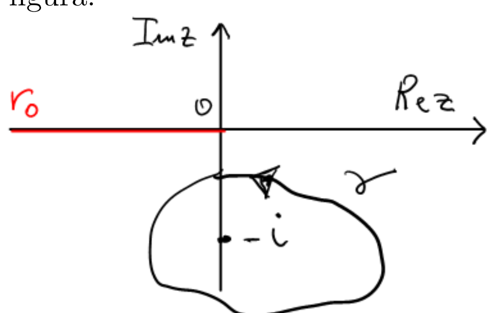
1) Sia ω una forma differenziale esatta definita su $\mathbb{R}^2$ e sia f una sua primitiva. Quanto vale $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva rappresentata in figura? Giustificare la risposta.



2) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{Log}_0 z}{(i+z)^3 z} \mathrm{d}z,$$

dove γ è la curva rappresentata in figura:



3) Calcolare la forma esponenziale del numero complesso $(1+i)^i$.

4) Qual è l'immagine mediante la funzione esponenziale della retta $r_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z = -\pi\}$? Motivare la risposta.

5) Determinare le singolarità della funzione $f(z) = \dfrac{1}{\sin \dfrac{1}{z^3}}$ e stabilire di che tipo sono quelle isolate. Ha senso calcolare il residuo di f all'infinito? In caso affermativo, com'è possibile ottenere concretamente tale residuo?

6) Calcolare

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\gamma(r)} \frac{e^{-z^2}}{z-1} \mathrm{d}z,$$

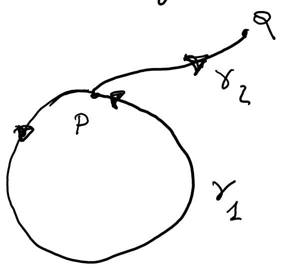
dove $\gamma(r)$ è la semicirconferenza di centro 1 e raggio r con diametro sull'asse dei numeri reali percorsa in senso antiorario. Motivare la risposta.

Esonero Complementi di Analisi Matematica

mercoledì 20 gennaio 2016 11:00

1) Sia ω una forma differenziale definita in $\mathbb{R}^2$ esatta e sia f una sua primitiva.

Quanto vale $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva in figura?



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$f(Q) = 1 \qquad f(P) = -1$

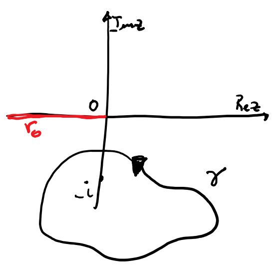
Giustificare la risposta

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega .$$ Poiché ω è esatta $\int_{\gamma_1} \omega = 0$

mentre $$\int_{\gamma_2} \omega = f(Q) - f(P) = 2$$

2) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{Log}_0 z}{(i+z)^3 z}\, dz$$ dove γ è la curva in figura



Poiché la determinazione principale del logaritmo è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus r_0$, la funzione $f(z) = \log_0 z / z$ è olomorfa sul dominio che ha per bordo γ. Dalla seconda formula di rappresentazione di Cauchy otteniamo allora

$$\int_\gamma \frac{\log_0 z}{(i+z)^3 z}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(-i)$$

1 z - log z

$\gamma \ (i+z)^3 z \qquad z:$

$$f'(z) = \frac{\frac{1}{z} z - \mathrm{Log}_0 z}{z^2} = \frac{1 - \mathrm{Log}_0 z}{z^2}$$

$$f''(z) = \frac{-\frac{1}{z} z^2 - (1 - \mathrm{Log}_0 z)\, 2z}{z^4} = - \frac{1 + 2(1 - \mathrm{Log}_0 z)}{z^3}$$

Quindi $f''(-i) = - \dfrac{3 + 2i\frac{\pi}{2}}{i} = - \dfrac{3 + i\pi}{i}$

da cui l'integrale assegnato è uguale $-3\pi - i\pi^2$

3) Calcolare $(1+i)^i$

$$(1+i)^i = e^{i \,\mathrm{Log}_0 (1+i)} = e^{i\left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}} e^{i\log\sqrt{2}}$$

4) Qual è l'immagine mediante la funzione esponenziale della retta r_1 data da tutti i numeri complessi z per cui $\mathrm{Im}\, z = -\pi$?

Se $z \in r_1$ allora $z = x - \pi i$ e quindi $e^z = e^x e^{-i\pi}$; questi sono numeri complessi che hanno argomento principale $-\pi$ e modulo uguale a e^x, quindi $e(r_1)$ è la semiretta uscente dall'origine che forma un ~~angolo~~ uguale a $-\pi$ con il semiasse dei numeri reali positivi, cioè la semiretta r_0 dell'esercizio 2, privata dell'origine.

5) Determinare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z^3}}$$

e stabilire di che tipo sono quelle isolate
Ha senso calcolare il residuo all'infinito?
In caso affermativo come possiamo ottenere concretamente tale residuo?

$$\sin \frac{1}{z^3} = 0 \iff \frac{1}{z^3} = k\pi \iff z = \frac{1}{\sqrt[3]{k\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$ radici cubiche in $\mathbb{C}$

Quindi le singolarità di f sono $\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{k\pi}} \right\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$

0 non è isolata dato che $\left| \frac{1}{\sqrt[3]{k\pi}} \right| = \frac{1}{|\sqrt[3]{k\pi}|}$ ← radice cubica in $\mathbb{R}$

e $\lim_{k \to \pm\infty} \frac{1}{|\sqrt[3]{k\pi}|} = 0$.

Poiché $D \sin\left(\frac{1}{z^3}\right) = \cos\left(\frac{1}{z^3}\right)\left(-\frac{3}{z^4}\right)$

$$D \sin\left(\frac{1}{z^3}\right)\Big|_{z=z_n} = \cos(k\pi) \cdot \left(-\frac{3}{(\sqrt[3]{k\pi})^4}\right)$$ in $\mathbb{C}$

$(-1)^k \left(-\frac{3}{(\sqrt[3]{k\pi})^4}\right) \neq 0$, z_k è uno zero semplice

per la funzione $\sin \frac{1}{z^3}$ e quindi è un polo semplice per f.

Dato che tutte le singolarità di f sono contenute in $D(0,1)$, ∞ è una singolarità isolata per f e quindi ha senso calcolarne il residuo

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) =$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin z^3}$$

0 è un polo di ordine 5 per $-\frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z^3)}$

dato che $\lim_{z\to 0} -z^5 \frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z^3)} = \lim_{z\to 0} -\frac{z^3}{\sin(z^3)} = 1$

Quindi $\mathrm{Res}(f,\infty) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{4!}\left(D^{(4)} \frac{z^3}{\sin z^3}\right)$

6) Calcolare

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma(r)} \frac{e^{-z^2}}{z-1}\,dz$$, dove $\gamma(r)$ è la

semicirconferenza di centro 1 e raggio r con diametro sull'asse dei reali percorsa in senso antiorario. Giustificare la risposta

Poiché $\lim_{z\to 1} (z-1)\frac{e^{-z^2}}{z-1} = \frac{1}{e}$

per il lemma del piccolo arco

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma(r)} \frac{e^{-z^2}}{z-1}\,dz = \frac{1}{e}\pi i$$

(Si osservi che il risultato è indipendente dal fatto che γ sia la semicirconferenza contenuta nel semipiano $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ o quella contenuta in $\mathrm{Im}\, z \leq 0$)

A.A. 2015/2016 I appello 20 gennaio 2016 Traccia A

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale associato alla funzione

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t/2) & t < 2\pi \\ \sin(3t) & t \geq 2\pi \end{cases}$$

specificando quale sia la sua ascissa di convergenza.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2^n}{3^n}(x-1)^n.$$

2) Calcolare

$$\int_{C^+(0,1/2)} \frac{e^{z-1}}{z^2(i+z)^2}\mathrm{d}z,$$

dove $C^+(0,1/2)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1/2 percorsa in senso antiorario

3) Enunciare e dimostrare il teorema di Hermite-Liouville.

4) Determinare le soluzioni dell'equazione $z^i = 1$. Giustificare la risposta.

5) Dare la definizione di residuo all'infinito. Dimostrare poi il II teorema dei residui.

6) Calcolare, usando il metodo dei residui,

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4}\mathrm{d}x.$$

Appello Complementi di Analisi Matematica

mercoledì 20 gennaio 2016 11:00

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale associato alla funzione $f(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{t}{2}\right) & t < 2\pi \\ \sin(3t) & t \geq 2\pi \end{cases}$

specificando la sua ascissa di convergenza

$$f_+(t) = \cos_+\left(\frac{t}{2}\right) + \cos_+\left(\frac{1}{2}(t-2\pi)\right) + \sin_+\left(3(t-2\pi)\right)$$

quindi

$$\mathcal{L}(f_+)(s) = \frac{s}{s^2+\frac{1}{4}} + \frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}e^{-2\pi s} + \frac{3}{s^2+9}e^{-2\pi s}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} s > 0$$

quindi $\sigma(f_+) = 0$

1) Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della serie

ANNI PRECEDENTI AL 2014/15

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2^n}{3^n}(x-1)^n$$

$$\lim_n \frac{|1-2^{n+1}|}{3^{n+1}} \frac{3^n}{|1-2^n|} = \lim_n \frac{2 2^n - 1}{2^n - 1} \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

quindi $\rho = \frac{3}{2}$ per $x = 1 + \frac{3}{2}$ otteniamo

la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2^n}{3^n} \frac{3^n}{2^n}$

Poiché $\frac{1-2^n}{3^n} \frac{3^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} - 1 \longrightarrow -1 \neq 0$

essa non converge

Analogamente per $x = 1 - \frac{3}{2}$ otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2^n}{3^n}\left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1-2^n}{2^n}$$

e poiché $\frac{1-2^n}{2^n}(-1)^n$ non ha limite per $n \to \infty$

e poiché $\dfrac{1-2^n}{2^n}(-1)^n$ non ha limite per $n \to \infty$

anch'essa non converge. Di conseguenza, la serie di potenze assegnata converge puntualmente in $\left(1-\frac{3}{2}, 1+\frac{3}{2}\right)$ e uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

2) Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,\frac{1}{2})} \frac{e^{z-1}}{z^2(z+i)^2}\,dz$$

, dove $\mathcal{C}^+(0,\frac{1}{2})$ è la circonferenza di centro 0 e raggio $\frac{1}{2}$ percorsa in senso antiorario

Poiché la funzione $f(z) = \dfrac{e^{z-1}}{(z+i)^2}$ è olomorfa su $D(0,\frac{1}{2})$ possiamo applicare la I formula di rappresentazione di Cauchy ottenendo

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,\frac{1}{2})} \frac{e^{z-1}}{z^2(z+i)^2} = 2\pi i \, D\, \frac{e^{z-1}}{(z+i)^2}\Big|_{z=0}$$

$$D\,\frac{e^{z-1}}{(z+i)^2} = \frac{e^{z-1}(z+i)^2 - 2(z+i)\,e^{z-1}}{(z+i)^4}$$

quindi l'integrale assegnato è uguale a $2\pi i\left(-\frac{1}{e} - \frac{2i}{e}\right) =$

$= -\dfrac{2\pi i}{e}(1+2i)$

3) Enunciare e dimostrare il Teorema di Hermite-Liouville

Si veda e.g. p. 92 degli appunti

4) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$z^i = 1$$

$$z^i = e^{i\, Log_0 z} = e^{i(\log|z| + i(Arg z))}$$
$$= e^{-Arg z + i \log|z|} = e^{-Arg z} e^{i \log|z|}$$

Dunque deve essere $\begin{cases} \log|z| = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ -Arg z = 0 \end{cases}$

poiché il II membro è uguale a 1

da cui $|z| = e^{2k\pi}$ e $Arg z = 0$

per cui le soluzioni sono reali positive e date da $z = e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

5) Dare la definizione di residuo all'infinito

Dimostrare poi il II teorema dei residui.

Si veda e.g. p. 125 e p. 127 degli appunti

6) Calcolare, usando il metodo dei residui

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4}\, dx$$

Poiché $\dfrac{2x^2}{4+x^4} \sim \dfrac{2}{x^2}$ per $x \to +\infty$, $\dfrac{2x^2}{4+x^4}$

è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4}\, dx$$ dato che

$\dfrac{2x^2}{4+x^4}$ è pari

Calcoliamo dunque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{4+x^4}\, dx$

Sia $f(z) = \dfrac{z^2}{4+z^4}$, estensione a $\mathbb{C}$ dell'integranda

Poiché $\lim_{|z|\to\infty} z\, f(z) = 0$, per il lemma

Poiché $\lim_{|z|\to\infty} z\, f(z) = 0$, per il lemma del grande cerchio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{4+x^4} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)\right)$

dove z_1 e z_2 sono le radici quarte di -4 che appartengono al semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ e dunque $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, $z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$

Sia z_1 che z_2 sono poli semplici per f (dato che sono zeri semplici per il denominatore e il numeratore è non nullo in essi)

quindi $\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{z_1^2}{4 z_1^3} = \frac{1}{4 z_1} = 2^{-\frac{5}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{z_2^2}{4 z_2^3} = \frac{1}{4 z_2} = 2^{-\frac{5}{2}} e^{-i\frac{3}{4}\pi}$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$2\pi i\, 2^{-\frac{5}{2}} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3}{4}\pi} \right) =$$

$$= 2^{-\frac{3}{2}} \pi i \left(-2i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2^{-1} \pi i^2 = \frac{\pi}{2}$$

A.A. 2015/2016 II esonero - II chance 10 febbraio 2016 Traccia A

1) Stabilire quale fra le seguenti forme differenziali non è sicuramente esatta sul suo dominio. Motivare la risposta.

(a) $\dfrac{y}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x - \dfrac{x}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}y,$

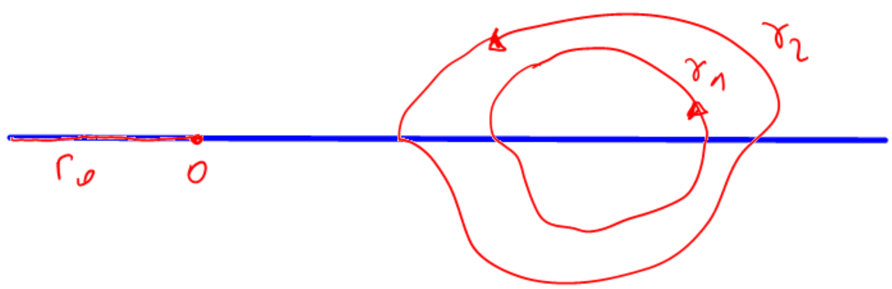
(b) $2xe^{x^2+y^2}\mathrm{d}x + 2ye^{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$

(c) $(\cos(xy) - xy\sin(xy))\mathrm{d}x - x^2\sin(xy)\mathrm{d}y.$

2) Dimostrare che

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{Log}_0 z \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} \mathrm{Log}_0 z \mathrm{d}z,$$

dove γ_1 e γ_2 sono le curve rappresentate in figura, orientate nel verso antiorario:



3) Verificare che i è uno zero di molteplicità 1 per il polinomio $p(z) = 1 - iz - z^4 + z^6$. Che tipo di singolarità è i per la funzione $f(z) = \dfrac{iz}{p(z)}$? Quanto vale il residuo di f in i?

4) Calcolare modulo e argomento principale di $(1+i)^{1-i}$.

5) Scrivere la serie di Laurent di centro 0 della funzione $f(z) = z^{10}e^{-1/z^4}$. In quali punti essa converge a f? (Motivare la risposta). Che tipo di singolarità è 0 per f? (Motivare la risposta). Quanto vale $\mathrm{Res}(f, 0)$?

6) Come è definita la serie di soli seni di una funzione $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ (assolutamente integrabile su $[0, T]$)? Tale serie coincide con la serie di Fourier di f? Motivare la risposta.

Esonero Complementi di Analisi matematica

mercoledì 10 febbraio 2016 11:00

1) Stabilire quali delle seguenti forme differenziali non è esatta
Motivare la risposta

(a) $\dfrac{y}{x^2+y^2+1}\,dx - \dfrac{x}{x^2+y^2+1}\,dy$

(b) $2xe^{x^2+y^2}\,dx + 2ye^{x^2+y^2}\,dy$

(c) $\left(\cos(xy) - xy\sin(xy)\right)dx - x^2\sin(xy)\,dy$

La (a) poiché non è chiusa ((b) e (c) sono chiuse e quindi essendo definite su $\mathbb{R}^2$ sono anche esatte). Infatti

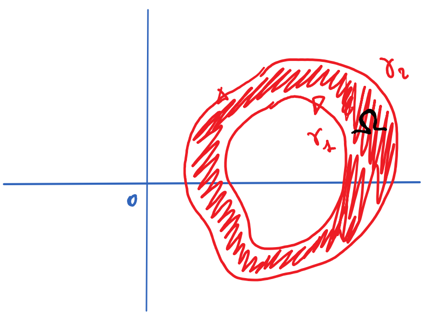
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+1}\right) = \frac{x^2+y^2+1-2y^2}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{x^2-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+1}\right) = \frac{x^2+y^2+1-2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{y^2-x^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Chiaramente la prima funzione non è uguale alla seconda su $\mathbb{R}^2$.

2) Dimostrare che

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{Log}_0 z\,dz = \int_{\gamma_2} \mathrm{Log}_0 z\,dz$$ dove γ_1 e γ_2 sono le curve disegnate in figura orientate nel verso antiorario



La funzione $f(z) = \mathrm{Log}_0 z$ è olomorfa sul dominio Ω che ha come bordo le curve γ_1 e γ_2, per cui

$$0 = \int_{\partial\Omega^+} \mathrm{Log}_0 z\,dz = \int_{\gamma_2^+} \mathrm{Log}_0 z\,dz + \int_{\gamma_1^-} \mathrm{Log}_0 z\,dz$$ e quindi

$$\int_{\gamma_1^+} \mathrm{Log}_0 z\,dz = \int_{\gamma_2^+} \mathrm{Log}_0 z\,dz$$

Oppure si osservi semplicemente che essendo $\mathrm{Log}_0 z$ olomorfa su i domini

T_1 e T_2 che hanno per bordo, rispettivamente, γ_1 e γ_2 si ha, per il teorema di Cauchy-Goursat $\int_{\gamma_1^+} \log_0 z \, dz = 0 = \int_{\gamma_2^+} \log z \, dz$.

3) Si consideri il polinomio

$$p(z) = 1 - iz - z^4 + z^6$$

Si verifichi che i è uno zero per p. Che ordine ha i?

Che tipo di singolarità è $-i$ per la funzione $f(z) = \frac{iz}{p(z)}$?

Quanto vale il residuo di f in i?

$$p(i) = 1 + 1 - 1 + i^2 = 0$$

$$p'(z) = -i - 4z^3 + 6z^5, \quad p'(i) = -i + 4i + 6i = 9i \neq 0$$

quindi i è uno zero semplice. Di conseguenza, dato che il numeratore di f non si annulla in i, i è un polo semplice per f e $\operatorname{Res}(f, i) = \frac{i^2}{p'(i)} = -\frac{1}{9i}$

4) Calcolare modulo e argomento principale di $(1+i)^{1-i}$

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\log_0(1+i)} = e^{(1-i)\left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= e^{\log\sqrt{2} + \pi/4} \, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right)}$$ quindi

$$\left|(1+i)^{1-i}\right| = e^{\log\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}} \quad \text{e} \quad \operatorname{Arg}\left((1+i)^{1-i}\right) = \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}$$

(si osservi che $\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2} \in [-\pi, \pi]$)

5) Scrivere la serie di Laurent di centro 0 della funzione $f(z) = z^{10} e^{-\frac{1}{z^4}}$. In quali punti essa converge a f? (Motivare la risposta) Che tipo di singolarità è 0 per f? (Motivare la risposta). Quanto vale $\operatorname{Res}(f, 0)$?

$$f(z) = z^{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z^4}\right)^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z^{4k-10}}$$

Questa è la serie di Laurent di f ed essendo f olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, essa converge a f $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Poiché contiene infiniti termini del tipo $c_h z^h$ con h negativo, 0 è una singolarità essenziale per f. $\text{Res}(f,0)$ è il coefficiente del termine z^{-1}. Esso si otterrebbe per $k \in \mathbb{N}$ tale che $4k-10=-1$. Questa equazione non ha soluzioni intere, quindi manca nella serie il termine z^{-1}, ossia $a_{-1} = \text{Res}(f,0) = 0$

6) Cosa è la serie di soli seni di una funzione $f:[0,T] \to \mathbb{R}$, f assolutamente integrabile?

Tale serie coincide con la serie di Fourier di f? Motivare la risposta

È la serie di Fourier della estensione dispari di f su $[-T,T]$

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t\in[0,T] \\ -f(-t), & t\in[-T,0) \end{cases}$$

Quindi i suoi coefficienti sono dati da

$$b_k = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{f}(t)\sin\left(\frac{2\pi k t}{2T}\right) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\tilde{f}(t)\sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right)dt$$

e la serie di seni è $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right)$

La serie di Fourier di f invece avrà in generale anche i coefficienti

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \quad k\geq 1$$

e i coefficienti b_k definiti da

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \quad k\geq 1$$

La serie è quindi $\displaystyle a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$

e non coincide con la serie di soli seni di f.

A.A. 2015/2016 Appello 10 febbraio 2016 Traccia A

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale g periodico di periodo π associato alla funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(2t)$.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $[0, 1]$ della successione di funzioni:

$$f_n(t) = \frac{te^{-nt}}{1 + n^2t^2}.$$

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) x^n$.

3) Dare la definizione di funzione armonica su un aperto del piano e di armonica coniugata di una funzione armonica. Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza di una armonica coniugata.

4) Calcolare

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z - i)^2 z} \mathrm{d}z,$$

dove $C^+(0, 2)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata nel verso antiorario.

5) Dimostrare che se z_0 è un polo di ordine $m > 1$ per una funzione f allora

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(m - 1)!} D^{m-1} \big((z - z_0)^m f(z) \big) \right).$$

6) Sia $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \in [-1, 0] \\ e^x & x \in (0, 2] \end{cases}$$

e siano $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ i coefficienti di Fourier di f. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)$.

Appello Complementi di Analisi Matematica

mercoledì 10 febbraio 2016 11:00

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale g periodico di periodo π associato alla

AA 2014-16 funzione $f: [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(2t)$

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{1-e^{-s\pi}} \int_0^{\pi} e^{-st} \cos(2t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-s\pi}} \mathcal{L}\Big(\cos_+(2t) - \cos_+\big(2(t-\pi)\big)\Big)(s)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(\frac{s}{4+s^2} - e^{-\pi s} \frac{s}{4+s^2} \right) = \frac{s}{4+s^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} s > 0$$

Oppure semplicemente si osservi che il segnale periodico g coincide con $\cos_+(2t)$ e quindi $\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(\cos_+(2t))$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$ (Attenzione! se si osserva che $g(t) = \cos_+(2t)$, allora per ricavare $\mathcal{L}(g)(s)$ non usiamo la formula sulla trasformata di un segnale periodico e quindi non ci fattore $\frac{1}{1-e^{-\pi s}}$ non compare!

Cioè $\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \mathcal{L}(\cos_+(2t)) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{s}{4+s^2}$ è sbagliato!)

1)

AA precedenti Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $f_n(t) = \dfrac{t\, e^{-nt}}{1+n^2t^2}$

Osserviamo che $\lim_n f_n(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$. Cerchiamo dunque di stabilire se f_n converge uniformemente a 0 su $[0,1]$

Poiché $\left| \dfrac{t\, e^{-nt}}{1+n^2t^2} \right| \le \underbrace{t\, e^{-nt}}_{g_n(t)}$ $\forall t \in [0,1]$,

possiamo cercare di stabilire che posto $M_n := \max_{t\in[0,1]} t\, e^{-nt}$

$M_n \to 0$, $n \to \infty$.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, $g_n'(t) = e^{-nt} - nt\, e^{-nt} = e^{-nt}(1-nt)$

Per cui g_n è crescente tra $[0, \frac{1}{n}]$ e decrescente tra $[\frac{1}{n}, 1]$

M_n è quindi uguale a $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} e^{-1} \xrightarrow{n} 0$

Dunque $C_n = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t)| \le M_n = \frac{1}{en}$ e quindi anche $C_n \xrightarrow{n} 0$

cioè f_n converge uniformemente su $[0,1]$ a 0

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n^2} x^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\sin\frac{1}{(n+1)^2}}{n \sin\frac{1}{n^2}} = \frac{(n+1)^2 \sin\frac{1}{(n+1)^2}}{n^2 \sin\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n} 1 .$$

Il raggio di convergenza della serie è quindi 1 e l'intervallo di convergenza $(-1,1)$. Per $x=1$ otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\frac{1}{n^2}$$; poiché $n \sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ essa non converge

Per $x=-1$ otteniamo

$$\sum (-1)^n n \sin\frac{1}{n^2} .$$ Cerchiamo di stabilire se le ipotesi del criterio di Leibniz sono soddisfatte:

Ovviamente $n \sin\frac{1}{n^2} \to 0$. Consideriamo ora la funzione

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x^2} \; ; \quad f'(x) = \sin\frac{1}{x^2} + x \cos\frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$
$$= \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$$

Osserviamo che per $x>1$ $\cos\frac{1}{x^2} > 0$ e quindi su $(1,+\infty)$

$$f'(x) < 0 \iff \operatorname{tg}\frac{1}{x^2} < \frac{2}{x^2}$$

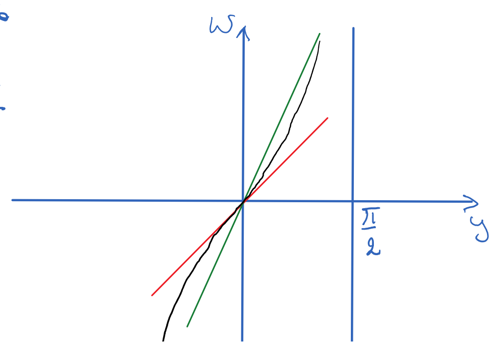
Se poniamo $\frac{1}{x^2} = y$ questa equivale a $\operatorname{tg} y < 2y$

che per $y < \delta$ con $\delta > 0$ piccolo, cioè per $x > \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

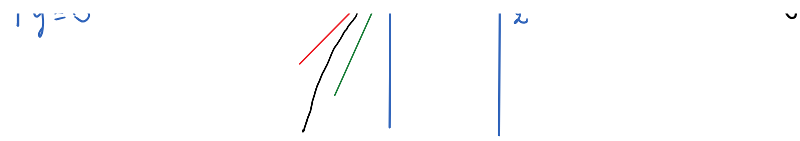
è soddisfatta dato

che $D \operatorname{tg} y\big|_{y=0} = 1$

$D\, 2y\big|_{y=0} = 2$



$w = y$
$w = 2y$
$w = \operatorname{tg} y$



Pertanto la successione $n \sin\frac{1}{n^2}$ è definitivamente decrescente e quindi per il criterio di Leibniz la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n \sin\frac{1}{n^2}$ converge.

In definitiva, l'insieme di convergenza puntuale è $[-1, 1)$ e si ha convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo $[-1, a]$, con $-1 \leq a < 1$

3) Dare la definizione di funzione armonica e di armonica coniugata di una funzione armonica. Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza di una armonica coniugata

Si veda, ad esempio, p. 96-97 appunti

4) Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,2)} \frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-i)^2 z} \, dz$$

dove $\mathcal{C}^+(0,2)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata nel verso antiorario

$$f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-i)^2 z}$$

ha due singolarità 0 e i. i è un polo di ordine 2, 0 una singolarità essenziale. Entrambe le singolarità appartengono a $D(0,2)$

Possiamo quindi usare il I e il II teorema dei residui per calcolare $\int_{\mathcal{C}^+(0,2)} f(z)\,dz$

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,2)} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,-i) + \mathrm{Res}(f,0)\right) = -2\pi i \,\mathrm{Res}(f,\infty)$$

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$\text{Res}(f,\infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\,\frac{\sin z}{\left(\frac{1}{z}-i\right)^2\frac{1}{z^2}} = -\frac{1}{z^2}\,\frac{\sin z}{\frac{(1-iz)^2}{z^4}} = -\frac{z^2\sin z}{(1-iz)^2}$$

Come si vede 0 non è una singolarità per $-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$

per cui $\text{Res}(f,\infty) = 0$ e l'integrale assegnato è anch'esso nullo

5) Dimostrare se z_0 è un polo di ordine m per f

$$\text{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(m-1)!}\,D^{(m-1)}\left((z-z_0)^m f(z)\right)\right)$$

Si veda, ad esempio, p. 124 degli appunti

6) Sia $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, & x\in[-1,0] \\ e^x & x\in(0,2] \end{cases}$

e siano $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ i coefficienti di Fourier di f.

Calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)$

Dalla identità di Parseval: $\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f^2(x)\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}a_k^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}b_k^2\right)$

per cui $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2) = 2\left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f^2(x)\,dx - a_0^2\right)$

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f^2(x)\,dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{2} f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0}(x-1)^2\,dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{2}e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}(x-1)^3\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{6}e^{2x}\Big|_{0}^{2} = -\frac{1}{9}+\frac{8}{9}+\frac{1}{6}(e^4-1)$$

$$= \frac{7}{9}-\frac{1}{6}+\frac{e^4}{6} = \frac{11}{18}+\frac{e^4}{6}$$

$$a_0^2 = \left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f(x)\,dx\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}(x-1)\,dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{2}e^x\,dx\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{6}(x-1)^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{3}e^x\Big|_{0}^{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{6}-\frac{4}{6}+\frac{1}{3}e^2-\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^2\right) = \left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}e^2\right)^2$$

$$= \left(-\frac{[illegible]}{2} - \frac{[illegible]}{3} + \frac{[illegible]}{3}[illegible] \right) - \left([illegible]\frac{[illegible]}{6} \quad 3[illegible] \right)$$

$$= \frac{25}{36} - \frac{10}{18}e^2 + \frac{1}{9}e^4$$

Donque $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 = 2\left(\frac{11}{18} + \frac{e^4}{6} - \frac{25}{36} - \frac{1}{9}e^4 + \frac{5}{9}e^2 \right)$

$$= 2\left(-\frac{1}{12} + \frac{e^4}{18} + \frac{5}{9}e^2 \right) =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{e^4}{9} + \frac{10}{9}e^2$$

A.A. 2015/2016 Appello 22 aprile 2016 Traccia A

1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di Laplace di un segnale periodico.

6 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Enunciare il Teorema di integrazione termine a termine. usarlo poi per calcolare per serie il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

6 pts.

2) Stabilire se la serie di potenze in $\mathbb{C}$ data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}}(z-1)^n.$$

converge nel punto $z = 2i$.

8 pts.

3) Enunciare il Principio di identità delle funzioni olomorfe e fornire, poi, almeno una sua applicazione.

6 pts.

4) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}}{x^2+e^2} \mathrm{d}x.$$

8 pts.

5) Calcolare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi/2] \\ -1 & x \in (\pi/2, \pi] \end{cases}$$

Dimostrare poi, usando tale serie, che $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$.

8 pts.

Appello Complementi di Analisi Matematica

venerdì 22 aprile 2016 14:30

1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di un segnale periodico

Si vedano ad esempio gli appunti nella mia pagina web riguardanti la trasformata di Laplace

Anni precedenti

1) Enunciare il teorema di integrazione termine a termine. Usarlo poi per calcolare per serie l'integrale: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx$

Poiché $\displaystyle \sin(x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{x^{4k+2}}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Integrando termine a termine otteniamo dunque

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 x^{4k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{4k+1}$$

2) Stabilire se la serie di potenze in $\mathbb{C}$ data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} (z-1)^n$$ converge nel punto $z = 2i$

Poiché $\displaystyle \lim_n \sqrt[n]{\frac{n}{3^{n+1}}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}}{3^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{3}$ il raggio di convergenza della serie è 3

Quindi la serie converge nel disco $D(1,3)$

Poiché $|2i - 1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} < 3$, $2i \in D(1,3)$

e la serie assegnata converge in $z = 2i$

3) Enunciare il "principio di identità per le funzioni olomorfe e fornire, poi, almeno una sua applicazione

Si veda, ad esempio, p. 80 degli appunti. Possibili applicazioni:

∞

la somma della serie $\sum_{k=0} \frac{z^k}{k!}$ è l'unica estensione olomorfa su $\mathbb{C}$ della funzione reale $y=e^x$; $\sin^2 z+\cos^2 z = 1$ $\forall z\in\mathbb{C}$, etc.

4) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+e^2}\,dx$$

L'integranda è una funzione reale a valori in $\mathbb{C}$

$$\left|\frac{e^{2ix}}{x^2+e^2}\right| = \frac{1}{x^2+e^2} \sim \frac{1}{x^2}\ ,$$ quindi è assolutamente

integrabile su $\mathbb{R}$ e dunque integrabile.

La sua estensione complessa è la funzione

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2+e^2}$$

Poiché $\frac{1}{z^2+e^2} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$, possiamo applicare il lemma di Jordan nel

semipiano dei numeri complessi con parte immaginaria positiva

Gli zeri della funzione al denominatore sono le radici quadrate

di $-e^2$ cioè ie e $-ie$

Appartiene al semipiano dei numeri complessi con parte

immaginaria positiva solo ie

che è un polo semplice, quindi

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i2z}}{z^2+e^2}, ie\right) = \lim_{z\to ie} (z-ie)\frac{e^{2iz}}{z^2+e^2} = \frac{e^{2i(ie)}}{D(z^2+e^2)\big|_{z=ie}}$$

$$= \frac{e^{-2e}}{2ie}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+e^2} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+e^2}, ie\right) = 2\pi i\,\frac{e^{-2e}}{2ie} = \pi e^{-2e-1}$$

5) Calcolare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ -1 & x\in(\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \\ -1 & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

Dimostrare poi, usando tale serie, che $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin(kx)\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(kx) dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{2}{k\pi} \left(- \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + 1 + \cos(k\pi) - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{2}{k\pi} \left(- 2\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + 1 + (-1)^k \right)$$

Poiché $\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 0$ se k è dispari ed è uguale a $(-1)^h$ se $k = 2h$

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \frac{4}{2h\pi}\left(-(-1)^h + 1\right) & \text{se } k = 2h \end{cases}$$

Quindi la serie di soli seni di f è data da

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{h\pi}\left(-(-1)^h + 1\right) \sin(2hx)$$

Per $x = \frac{\pi}{4}$ la serie converge a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Quindi $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{2}{h\pi}\left(-(-1)^h + 1\right) \sin\left(h\frac{\pi}{2}\right) = 1$; poiché

$$\sin\left(h\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^m & \text{se } h = 2m+1 \\ 0 & \text{se } h = 2m \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi} (2) (-1)^m = 1 \quad \text{cioè} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 4}{(2m+1)} = \pi$$

ovvero $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$

A.A. 2015/2016 Appello 16 giugno 2016 Traccia A

1) Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t^2, & t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

7 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-n}}{n+1}(x-2)^n.$$

7 pts.

2) Sia f la funzione data da

$$f(z) = e^{\bar{z}}.$$

Determinare l'immagine mediante f dell'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z = \frac{\pi}{2}\}$ e disegnarla sul piano.

4 pts.

3) Enunciare la I Formula di rappresentazione di Cauchy.

Calcolare poi

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{(z-i)(z-2i)(z-3i)}{(z+i)^4} dz,$$

dove $C^+(0,2)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata in senso antiorario.

7 pts.

4) Dare la definizione di residuo.

Calcolare poi il residuo in 0 della funzione $f(z) = ze^{-i/(3z)}$.

6 pts.

5) Enunciare e dimostrare il I Teorema dei residui.

5 pts.

6) Usare l'identità di Parseval con la funzione $f(x) = x-1$, $x \in [1,3)$, estesa per periodicità con periodo 2 su $\mathbb{R}$, per dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{6}$.

7 pts.

Da AA 2014-15

1) Usando la trasformata di Laplace determinare il segnale che risolve:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t^2, & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Prendendo la trasformata di entrambi i membri dell'equazione, otteniamo:

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1 + (2+s)}{s^2 + 2s + 1} + \frac{\mathcal{L}(t_+^2)(s)}{s^2+2s+1}$$

$$= \frac{2 + (s+1)}{s^2+2s+1} + \mathcal{L}(t_+^2)(s) \cdot \mathcal{L}(y_0(t)),$$

dove $y_0 = y_0(t)$ è la soluzione fondamentale dell'equazione.

Poiché $\frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$, $y_0(t) = (te^{-t})_+$

Quindi $\mathcal{L}(t_+^2)(s) \cdot \mathcal{L}((te^{-t})_+) = \mathcal{L}(t_+^2 * (te^{-t})_+)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2 + (s+1)}{(s+1)^2}\right)(t) = 2te^{-t} + e^{-t}$$

quindi $y(t) = 2te^{-t} + e^{-t} + (t_+^2) * (te^{-t})\ (t)$

$$= 2te^{-t} + e^{-t} + \int_0^t (t-u)e^{u-t}\, u^2\, du$$

$$\int_0^t (t-u)e^{u-t} u^2 du = \int_0^t (-u^3) e^{u-t} du + t\int_0^t u^2 e^{u-t} du$$

$$= -u^3 e^{u-t}\Big|_0^t + 3\int_0^t u^2 e^{u-t} du + t\int_0^t u^2 e^{u-t} du$$

$$= -t^3 + (3+t)\int_0^t u^2 e^{u-t} du$$

$$\int_0^t u^2 e^{u-t} du = u^2 e^{u-t}\Big|_0^t - 2\int_0^t u e^{u-t} du =$$

$$= t^2 - 2ue^{u-t}\Big|_0^t + 2\int_0^t e^{u-t} du$$

$$= t^2 - 2t + 2e^{u-t}\Big|_0^t = t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t}$$

Quindi

$$y(t) = \left(2te^{-t} + e^{-t} - t^3 + (3+t)(t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t})\right) H(t)$$

$$= ($$

$$= (-5e^{-t} + t^2 - 4t + 6)\, H(t)$$

Pre AA 2014-2015

1) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} e^{-n} (x-2)^n$$

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{e}$$

Quindi il raggio di convergenza della serie è $\rho = e$

Per $x = 2 + e$ si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} e^{-n} e^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$ che converge (per il criterio di Leibniz)

Per $x = 2 - e$ si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} e^{-n} (-e)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} e^{-n} (-1)^n e^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$ che diverge positivamente

Quindi l'insieme di convergenza puntuale è $(2-e, 2+e]$

Per il Teorema di Abel

la serie converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $[2-e+\varepsilon, 2+e]$

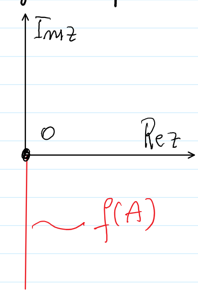
con $0<\varepsilon<2e$.

2) Determinare l'immagine mediante la funzione f, dell'insieme $A=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2}\}$, dove $f(z) = e^{\bar{z}}$. Rappresentare sul piano $f(A)$.

Osserviamo che $\quad z\in A \iff z = x + i\frac{\pi}{2}, \; x\in\mathbb{R}$

quindi $f(z) = e^{x - i\frac{\pi}{2}} = e^{x}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i e^{x}$

Poiché $e^x > 0$, $f(A)$ è la semiretta uscente dall'origine coincidente con il semiasse dei numeri immaginari puri con parte immaginaria negativo



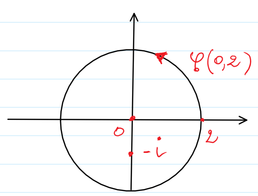
3) Enunciare la "I formula di rappresentazione di Cauchy"

Calcolare poi

$$\int_{\gamma^+(0,2)} \frac{(z-i)(z-2i)(z-3i)}{(z+i)^4}\, dz$$

dove $\gamma^+(0,2)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata in senso antiorario

Per l'enunciato della I formula di rappresentazione di Cauchy si veda, ad esempio, p. 69 degli appunti



Poiché $-i$ è interno al disco $D(0,2)$ e la funzione $f(z) = (z-i)(z-2i)(z-3i)$ è olomorfa su $\mathbb{C}$ possiamo usare la II formula di rappresentazione di Cauchy

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $\frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-i)$

Poiché f è un polinomio di grado 3 il cui monomio di grado 3 è z^3 la sua derivata terza è costante ed uguale a 6. Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\frac{2\pi i}{6}\, 6 = 2\pi i$$

4) Dare la definizione di residuo.

Calcolare poi il residuo in 0 della funzione

$$f(z) = z\, e^{-\frac{i}{3z}}$$

Per la definizione si veda ad esempio p. 122 degli appunti

Lo sviluppo in serie di Laurent di centro 0 per f è dato da

$$z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{-i}{3z}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{(-i)^k}{3^k z^{k-1}} =$$

$$= z - \frac{i}{3} - \frac{1}{9\cdot 2}\cdot\frac{1}{z} + \dots$$

Quindi $\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{1}{18}$

5) Enunciare e dimostrare il I teorema dei residui.

Si veda ad esempio p. 123 degli appunti

6) Usare l'identità di Parseval e la funzione

$f(x) = x-1$, $x \in [1,3)$ estesa per periodicità, con periodo 2, su $\mathbb{R}$

per dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{6}$

Determiniamo i coefficienti di Fourier di f

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_1^3 x-1 = \frac{1}{4}(x-1)^2\Big|_1^3 = 1$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_1^3 (x-1)\cos\left(\frac{2\pi}{2}kx\right)dx = \int_1^3 (x-1)\cos(k\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{k\pi}(x-1)\sin(k\pi x)\Big|_1^3 - \frac{1}{k\pi}\int_1^3 \sin(k\pi x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\sin(3k\pi) + \frac{1}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x)\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\sin(2k\pi + k\pi) + \frac{1}{k^2\pi^2}\left(\cos(3k\pi) - \cos(k\pi)\right)$$

$$= \frac{2}{k\pi}\sin(2k\pi)\cos(k\pi) + \frac{2}{k\pi}\sin(k\pi)\cos(2k\pi) +$$

$$+ \frac{1}{k^2\pi^2}\cos(2k\pi + k\pi) - \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{k^2\pi^2}\left(\cos(2k\pi)\cos(k\pi) - \sin(2k\pi)\sin(k\pi)\right) - \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}$$

$1 \quad (-1)^k \quad (-1)^k$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{k^2\pi^2}\left(\cos(2k\pi)\cos(k\pi) - \dots\right) \dots \frac{\dots}{k^2\pi^2}$$

$$= \frac{1}{k^2\pi^2}(-1)^k - \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2} = 0$$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_1^3 (x-1)\sin\left(\frac{2\pi}{2}kx\right)dx = \int_1^3 (x-1)\sin(k\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}(x-1)\cos(k\pi x)\Big|_1^3 + \frac{1}{k\pi}\int_1^3 \cos(k\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos(3k\pi) + \frac{1}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)\Big|_1^3 =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}(-1)^k + 0 = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}$$

L'identità di Parseval per f è quindi data da:

$$\frac{1}{2}\int_1^3 (x-1)^2 = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}\right)^2$$

$$\frac{1}{6}(x-1)^3\Big|_1^3 = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^2\pi^2}$$

$$\frac{1}{6}8 = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}$$

$$\frac{4}{3} - 1 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}$$ da cui $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{6}$$

A.A. 2015/2016 Appello 11 luglio 2016 Traccia A

1) Calcolare la trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione dei segnali $f_1(t) = \cos_+ \big(2(t-1)\big)$, $f_2(x) = H(t-2)$ (dove H è la funzione di Heaviside), specificandone il dominio.

6 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Calcolare per serie

$$\int_0^2 e^{-(x-1)^2} \mathrm{d}x.$$

6 pts.

2) Stabilire se la serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\big((1+1/n)^n\big)\big(z-(1-i)\big)^n,$$

converge in $z = 1 - i/2$.

5 pts.

3) Dimostrare che se z_0 è uno zero di molteplicità m per f funziona olomorfa su un aperto Ω, $z_0 \in \Omega$, allora esso è un polo di ordine m per la funzione $1/f$.

5 pts.

4) Calcolare i residui nelle singolarità al finito e all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{e^{-1/z^2} z}{(z-i)(z+i)^2}.$$

—

8 pts.

5) Enunciare e dimostrare il teorema di Hermite-Liouville. Fornire poi almeno una sua conseguenza.

5 pts.

6) Scrivere la serie di soli seni della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0,2]$. Usarla, poi per stabilire che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2h+1)\pi} - \frac{4}{\big((2h+1)\pi\big)^3}\right)(-1)^h = \frac{1}{8}.$$

7 pts.

1) Calcolare la trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione dei segnali

$f_1(t) = \cos_+[2(t-1)]$, $f_2(t) = H(t-2)$, dove H è la funzione di Heaviside

specificando il suo dominio

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2)(s) = \mathcal{L}(f_1)(s) \cdot \mathcal{L}(f_2)(s) \quad \forall s > \max\{\sigma(f_1), \sigma(f_2)\}$$

Poiché $\mathcal{L}(\cos_+(2t)) = \frac{s}{s^2+4}$ $\forall s \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Re}\, s > 0$ e $\mathcal{L}(f(t-t_0)) = e^{-t_0 s} \mathcal{L}(f(t))(s)$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > \sigma(f)$

abbiamo che $\mathcal{L}(\cos_+(2(t-1))) = e^{-s} \frac{s}{s^2+4}$ $\forall s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > 0$

Analogamente $\mathcal{L}(H(t-2)) = \frac{e^{-2s}}{s}$ $\forall s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > 0$

Quindi $\mathcal{L}(f_1 * f_2)(s) = e^{-s} \frac{s}{s^2+4} \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{e^{-3s}}{s^2+4}$ $\forall s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > 0$

1) Anni precedenti

Usando il teorema di integrazione termine a termine calcolare per serie

$$\int_0^2 e^{-(x-1)^2} \, dx$$

$$e^{-(x-1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-(x-1)^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^{2k}}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi
$$\int_0^2 e^{-(x-1)^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^2 (x-1)^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1} (x-1)^{2k+1} \Big|_0^2 =$$

$$= \sum^{+\infty} (-1)^k \qquad - (-1)^{2k+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1} (1 - (-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2}{2k+1}$$

2) Stabilire se la serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] (z-(1-i))^n \quad \text{converge in } z = 1 - \frac{i}{2}$$

$$a_n = \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0 \quad \forall n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1 \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{n+1}{n} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

Quindi il raggio di convergenza della serie è 1

Poiché $\left| 1-\frac{i}{2} - (1-i) \right| = \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ la serie converge

nel punto $1-\frac{i}{2}$

3) Dimostrare che se z_0 è uno zero di molteplicità m per f olomorfa su $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ allora esso è un polo di ordine m per $\frac{1}{f}$

Poiché z_0 ha molteplicità finita, esso è uno zero isolato per f; dunque $\frac{1}{f}$ ha in z_0 una singolarità isolata. Inoltre poiché esiste $g \in H(\Omega)$ t.c. $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0) \neq 0$, abbiamo che $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m \frac{1}{f(z)} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m \frac{1}{(z-z_0)^m g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} \neq 0$

Dunque z_0 è un polo di ordine m per f

4) Calcolare i residui nelle singolarità al finito e all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}} z}{(z-i)(z+i)^2}$$

Le singolarità al finito di f sono $\{i, -i, 0\}$

i è un polo semplice, $-i$ è un polo di ordine 2, 0 è una singolarità essenziale

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{e^{-\frac{1}{z^2}} z}{(z+i)^2} = \frac{e \cdot i}{-4} = -\frac{e}{4} i$$

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z\to -i} D\left((z+i)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to -i} D\left(\frac{e^{-\frac{1}{z^2}} z}{z-i}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -i} \frac{\left(\frac{2}{z^3} e^{-\frac{1}{z^2}} z + e^{-\frac{1}{z^2}}\right)(z-i) - e^{-\frac{1}{z^2}} z}{(z-i)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{i} e(-i) + e\right)(-2i) + ei}{-4} = \frac{2ei + ei}{-4} = -\frac{3}{4} e i$$

Poiché 0 è una singolarità essenziale, calcoliamo prima il residuo all'infinito

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{e^{-z^2} \cdot \frac{1}{z}}{\left(\frac{1-iz}{z}\right)\left(\frac{1+iz}{z}\right)^2} = -\frac{e^{-z^2}}{(1-iz)(1+iz)^2}$$

Poiché $\lim_{z\to 0} -\frac{e^{-z^2}}{(1-iz)(1+iz)^2} = -1 \neq 0$ $\;0$ è una singolarità eliminabile per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$. Quindi $\mathrm{Res}(f,\infty) = 0$

Per il II teorema dei residui $\mathrm{Res}(f,0) = -\mathrm{Res}(f,\infty) - \mathrm{Res}(f,i) - \mathrm{Res}(f,-i)$

$$= 0 + \frac{e}{4} i + \frac{3}{4} e i = e i$$

5) Enunciare e dimostrare il teorema di Hermite-Liouville

Fornire poi almeno una sua conseguenza

Si veda, ad esempio, pagg 92-93 degli appunti

6) Scrivere la serie di soli seni della funzione

$f(x) = x^2, \quad x \in [0,2]$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_0^2 \sin\left(\frac{2k\pi x}{4}\right) x^2\, dx = \int_0^2 \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right) x^2\, dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2} x\right) x^2 \Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2 2x \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} 4\cos(k\pi) + \frac{8}{(k\pi)^2} x \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 - \frac{8}{(k\pi)^2}\int_0^2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx$$

$$= -\frac{8}{k\pi}(-1)^k + \frac{8}{(k\pi)^2}\left(2\sin(k\pi) - 0\right) + \frac{16}{(k\pi)^3}\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1} + 0 + \frac{16}{(k\pi)^3}\left(\cos(k\pi) - 1\right) = \frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right)$$

Dunque la serie richiesta è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right)$$

Per $x = 1$ otteniamo tale serie converge a $f(1) = 1$,

dunque $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad (*)$

dunque $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1}+\frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k-1\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ $(*)$

Osserviamo che per k pari $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)=0$, per k dispari $k=2h+1$
$\sin\left((2h+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^h$;

osserviamo anche che per k dispari

$$\frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1}+\frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k-1\right)=\frac{8}{k\pi}-\frac{32}{(k\pi)^3}$$

Dunque la serie $(*)$ diventa
$\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{8}{(2h+1)\pi}-\frac{32}{((2h+1)\pi)^3}\right)(-1)^h$ ed ha somma 1

quindi $\displaystyle\sum_{h=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2h+1)\pi}-\frac{4}{((2h+1)\pi)^3}\right)(-1)^h=\frac{1}{8}$

A.A. 2015/2016 Appello 9 settembre 2016 Traccia A

1) Siano f il segnale periodico di periodo 2 definito dalla funzione $t \in [0,2] \mapsto t^2$, estesa per periodicità su $[0,+\infty)$ con periodo 2, e g il segnale $g(t) = \cos_+(t-2)$. Calcolare la trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione di f e g.

7 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(t)\sqrt{nt}}{n^2+1},$$

dove f è una funzione limitata su $[0,a]$, $a>0$, converge uniformemente su $[0,a]$.

7 pts.

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n + 4^n}{4^n - 2^n}(x-1)^n.$$

7 pts.

3) Dare la definizione di funzione armonica su un aperto del piano. Dimostrare poi che la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa su un aperto sono ivi armoniche.

5 pts.

4) Ricavare la serie di Maclaurin della funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$. Determinare, poi, $D^{(8)}f(0)$.

6 pts.

5) Enunciare e dimostrare la I formula di rappresentazione di Cauchy.

5 pts.

6) Calcolare

$$\int_{\partial^+ Q} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z-\frac{i}{2})(z+\frac{1}{4})(z-\frac{1}{4})}\mathrm{d}z,$$

dove Q è il quadrato di vertici $-1-i,\ -1+i,\ 1+i,\ 1-i$.

6 pts.

Appello Complementi di Analisi Matematica

venerdì 9 settembre 2016 09:00

1) Siano f il segnale periodico di periodo 2 definito dalla funzione $t \in [0,2] \mapsto t^2$ (estesa per periodicità) e g il segnale $\cos_+(t-2)$

Calcolare la trasformata di Laplace del segnale $f * g$

Poiché $\mathcal{L}(f*g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\,\mathcal{L}(g)(s) \quad \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0$

è sufficiente calcolare la trasformata di Laplace di f e g

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} t^2\, dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \Big|_0^2 + \frac{2}{s} \int_0^2 e^{-st} t\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\frac{4}{s} e^{-2s} - \frac{2}{s^2} t e^{-st} \Big|_0^2 + \frac{2}{s^2} \int_0^2 e^{-st} \right.$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\frac{4}{s} e^{-2s} - \frac{4}{s^2} e^{-2s} - \frac{2}{s^3} e^{-2s} + \frac{2}{s^3} \right)$$

$$\mathcal{L}(\cos_+(t-2))(s) = e^{-2s} \mathcal{L}(\cos_+(t))(s) = e^{-2s} \frac{s}{s^2+1}$$

1) Dimostrare che la serie

Anni precedenti

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(t) \frac{\sqrt{nt}}{n^2+1} \qquad (*)$$

dove f è una funzione limitata su $[0,a]$ $a>0$, converge uniformemente su $[0,a]$

È sufficiente dimostrare che $(*)$ converge totalmente su $[0,a]$

A tale scopo si osservi che

$$\left| f(t) \frac{\sqrt{nt}}{n^2+1} \right| \le L \frac{\sqrt{nt}}{n^2+1} \le L \sqrt{a} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \quad \forall t \in [0,a]$$

dove $L = \sup_{t\in[0,a]} |f(t)| \in \mathbb{R}$.

Poiché $L\sqrt{a} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim L\sqrt{a} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} L\sqrt{a} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

converge e quindi $(*)$ converge totalmente e uniformemente su $[0,a]$

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n-3^n+4^n}{4^n-2^n}(x-1)^n$$

$$\frac{\frac{2^{n+1}-3^{n+1}+4^{n+1}}{4^{n+1}-2^{n+1}}}{\frac{2^n-3^n+4^n}{4^n-2^n}} = \frac{1+\frac{1}{2^{n+1}}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2^{n+1}}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$\frac{1+\frac{1}{2^{n+1}}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2^{n+1}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}-\left(\frac{3}{4}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Quindi il raggio di convergenza è 1
l'intervallo di convergenza è $(0,2)$
Per $t=2$ otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n-3^n+4^n}{4^n-2^n}$$

Poiché $\frac{2^n-3^n+4^n}{4^n-2^n} \longrightarrow 1$ essa diverge positivamente (in quanto è a termini positivi)

Per $t=0$ otteniamo:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n-3^n+4^n}{4^n-2^n}(-1)^n \quad (*)$$

Poiché $\frac{2^{2k}-3^{2k}+4^{2k}}{4^{2k}-2^{2k}}(-1)^{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

la successione che la definisce non converge a 0 e quindi $(*)$ non converge.
Dunque l'insieme di convergenza puntuale della serie assegnata coincide con l'intervallo di convergenza $(0,2)$. La serie converge uniformemente

su ogni intervallo chiuso contenuto in $[0,2]$.

3) Dare la definizione di funzione armonica
Dimostrare poi che la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche

Si veda, ad esempio, p. 31 degli appunti

4) Ricavare la serie di Maclaurin della funzione

$f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$. Determinare, poi, $D^{(8)} f(0)$

Poiché $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \forall x \in (-1,1)$

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1-(-x^4)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^4)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

e quindi $\dfrac{x^2}{1+x^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k+2}$

Dunque $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k+2}$ è la serie di Maclaurin di f

In particolare $\dfrac{D^{(8)} f(0)}{8!}$ è uguale al coefficiente di x^8 in tale serie. L'esponente 8 si otterrebbe per $4k+2=8$ cioè $k=\frac{3}{2}$, che non è intero. Questo ci consente di concludere che nella serie $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k+2}$ non è presente il termine di esponente 8

Dunque $D^{(8)} f(0) = 0$.

5) Enunciare e dimostrare la I formula di rappresentazione di Cauchy

Si vedano, ad esempio, pagg. 69-70 degli appunti

6) Calcolare

$$\int_{\partial^+ \Omega} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z-\frac{i}{2})(z+\frac{1}{4})(z-\frac{1}{4})} \, dz \qquad (*)$$

$$\int_{\partial^+ Q} \ldots \frac{\ldots}{\left(z-\frac{i}{2}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

dove Q è il quadrato di vertici $-1-i$, $-1+i$, $1+i$, $1-i$

Le singolarità della funzione integranda sono tutte contenute all'interno di Q. Dal I e dal II teorema dei residui otteniamo quindi che

$(*) = -2\pi i \, \text{Res}(f, \infty)$, dove f è la funzione integranda

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{-z}}{\left(\frac{1}{z}-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{4}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{-z}}{\left(1-\frac{zi}{2}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\left(1-\frac{z}{4}\right)\cdot\frac{1}{z^3}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) =$$

$$= \frac{-z e^{-z}}{\left(1-\frac{zi}{2}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\left(1-\frac{z}{4}\right)}$$

Questa funzione non ha in 0 una singolarità

$$\left(\text{dato che } \exists \lim_{z\to 0} -\frac{z e^{-z}}{\left(1-\frac{zi}{2}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\left(1-\frac{z}{4}\right)} \; (=0) \in \mathbb{C}\right)$$

e quindi $\text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$

cioè $(*) = 0$.

A.A. 2015/2016 Appello 9 novembre 2016 Traccia A

1) Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = H(t-3), \quad t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

7 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Si consideri la successione $f_n(t) = t^{n-1} - \frac{t^n}{n}, \quad n \geq 2$. Se ne studi la convergenza puntuale e e uniforme nell'intervallo $[0,1]$.

7 pts.

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2+1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n.$$

6 pts.

3) Com'è definita la funzione seno in campo complesso. Qual è la sua relazione con la stessa funzione in campo reale?

5 pts.

4) Determinare le singolarità al finito e la loro natura per la funzione $f(z) = 1/(z^2(1-\cos z))$.

6 pts.

5) Dimostrare che se z_0 è un polo di ordine $k > 1$ per $f \in H(D'(z_0, r))$, $r > 0$, allora $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} D^{(k-1)} \big((z-z_0)^k f(z)\big)$.

5 pts.

6) Calcolare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1/2) \\ 2x & \text{se } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Stabilire poi che

$$3 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{((2h+1)\pi)^2}$$

7 pts.

1) Usando la trasformata di Laplace determinare il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = H(t-3), & t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(H(t-3))(s) \cdot \frac{1}{P(s)} \quad \text{dove } P(s) = s^2+s+1$$

quindi $y(t) = \big(y_0(t) * H(t-3)\big)(t)$ dove y_0 è la soluzione fondamentale dell'equazione $y'' + y' + y = 0$, $t \geq 0$:

$$y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right)(t)$$

$$\frac{1}{P(s)} = \frac{1}{(s-s_1)(s-\bar{s}_1)} \quad \text{dove } s_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-\bar{s}_1)} = \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{\bar{a}_1}{s-\bar{s}_1}$$

$$a_1 = \lim_{s \to s_1} s-s_1 \cdot \frac{1}{P(s)} = \lim_{s \to s_1} \frac{1}{s-\bar{s}_1} = \frac{1}{\sqrt{3} i} = -\frac{1}{\sqrt{3}} i$$

quindi
$$y_0(t) = -\frac{1}{\sqrt{3}} i\, e_+^{s_1 t} + \frac{1}{\sqrt{3}} i\, e_+^{\bar{s}_1 t} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} i\, e_+^{-\frac{1}{2}t} \cdot \left(-e^{\frac{\sqrt{3}}{2} i t} + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} i t}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} i\, e_+^{-\frac{1}{2}t} \cdot 2i \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e_+^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

Quindi $y(t)$ è il segnale che per $t > 0$ è dato da

$$y(t) = \int_0^t H(\tau-3) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau .$$

Dunque
$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 3 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau \end{cases}$$

Calcoliamo
$$\int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau \qquad (*)$$

$$(*) = e^{\frac{1}{2}\tau} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right)\Big|_3^t - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} \int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}\tau} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right)\Big|_3^t$$
$$- \frac{1}{3}\int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau$$

Quindi
$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)(*) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right)$$

Pertanto
$$y(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t}\, H(t-3)$$
$$= \left(1 - e^{-\frac{t-3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t-3}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right)\right) H(t-3)$$

$$= \left(1 - e^{\frac{}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right)\right) H(t-3)$$

1) Pre AA 2014-2015

Si consideri la successione

$$f_n(t) = t^{n-1} - \frac{t^n}{n}, \quad n \geq 2$$

Se ne studi convergenza puntuale e uniforme nell'intervallo $[0,1]$

$f_n(1) = 1 - \frac{1}{n} \ \forall n \geq 2$ quindi $f_n(1) \to 1$

se $\bar{t} \in [0,1)$ $\quad f_n(\bar{t}) = \bar{t}^{\,n-1} - \frac{\bar{t}^{\,n}}{n} \longrightarrow 0$

Dunque f_n converge puntualmente alla funzione $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 1 \\ 0 & \text{se } t \in [0,1) \end{cases}$

su $[0,1]$. Poiché f non è continua su $[0,1]$ mentre f_n sono ivi continue $\forall n \geq 2$, f_n non converge uniformemente a f su $[0,1]$

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2+1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{(-1)(-1)^n + n+1}{(n+1)^2+1} \, \frac{n^2+1}{(-1)^n + n} = 1$$

quindi $\rho = 1$

L'intervallo di convergenza della serie è $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Per $x = -\frac{1}{2}$ la serie diventa

$$(*) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}(-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n n}{n^2+1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}}_{1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}}_{2}$$

1: $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ quindi 1 converge

2: $\frac{n}{n^2+1} \xrightarrow{n} 0$ e $\frac{n}{n^2+1}$ è decrescente per $n \geq 2$ quindi 2 converge

per il criterio di Leibniz

Pertanto $(*)$ converge

Per $x = \frac{3}{2}$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$;

poiché $\frac{(-1)^n + n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ essa diverge

In conclusione, la serie assegnata converge puntualmente su $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e uniformemente su ogni intervallo del tipo

$\left[-\frac{1}{2}, \quad a\right]$ con $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3) Com'è definita la funzione seno in campo complesso?
Qual è la sua relazione con la stessa funzione in campo reale?

Si vede pag 83 degli appunti

4) Determinare le singolarità al finito e la loro natura per la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-\cos z)}$$

f ha singolarità nel punto 0 e in z tali $1-\cos z = 0$

Poiché $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ deve essere $e^{iz}+e^{-iz} = 2$

cioè $e^{2iz} + 1 - 2e^{iz} = 0$ posto $e^{iz} = w$

questa equazione diviene $w^2 - 2w + 1 = 0$ da cui $w = 1$

ossia $e^{iz} = 1$ cioè $iz + 2k\pi i = 0$ da cui $z = -2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Poiché $1 - \cos z = 1 - 1 + \frac{z^2}{2} + o(z^2) = \frac{z^2}{2} + o(z^3)$, si ha

$$\lim_{z\to 0} z^4 f(z) = \lim_{z\to 0} z^4 \frac{1}{\frac{z^4}{2} + z^2 o(z^2)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^4}{z^4} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{o(z^2)}{z^2}} = 2 \neq 0$$

Quindi 0 è un polo di ordine 4 per f.

Analizziamo ora i punti $z_h = 2h\pi$, $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Poiché $D(1-\cos z)\Big|_{z=2h\pi} = \sin z\Big|_{z=2h\pi} = 0$, $\forall h$

e $D^2(1-\cos z)\Big|_{z=2h\pi} = \cos z\Big|_{z=2h\pi} = 1 \neq 0$, $\forall h$

Abbiamo che $1-\cos z = \frac{1}{2}(z-2h\pi)^2 + o((z-2h\pi)^2)$ per $z \to 2h\pi$

Risulta
$$\lim_{z\to 2h\pi} (z-2h\pi)^2 f(z) = \lim_{z\to 2h\pi} (z-2h\pi)^2 \frac{1}{z(z-2h\pi)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{o((z-2h\pi)^2)}{(z-2h\pi)^2}\right)}$$
$$= \lim_{z\to 2h\pi} \frac{1}{z\left(\frac{1}{2} + \frac{o((z-2h\pi)^2)}{(z-2h\pi)^2}\right)} = \frac{1}{2h\pi \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{h\pi} \neq 0 \quad \text{per } h \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

Quindi $z_h = 2h\pi$ è un polo di ordine 2

5) Dimostrare che se z_0 è un polo di ordine $k > 1$ per $f \in H(D'(z_0, r))$, $r > 0$
allora $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!} D^{(k-1)}\left((z-z_0)^k f(z)\right)$

Si vede pag 124 degli appunti

6) Calcolare la serie di soli seni della funzione

f ... $\{ 1$ se $x \in [0, \frac{1}{2})$

6) Calcolare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Stabilire poi che

$$3 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{((2h+1)\pi)^2}$$

Il grafico di $f(x)$ è il seguente

La sua estensione dispari $\tilde{f}$ su $[-1, 1]$ ha quindi discontinuità in tutti i punti $x \in \mathbb{Z}$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{2} x\right) dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x)\, dx =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(k\pi x)\, dx + 4 \int_{\frac{1}{2}}^{1} x \sin(k\pi x)\, dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} \cos(k\pi x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{4x}{k\pi} \cos(k\pi x) \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{4}{k\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos(k\pi x)\, dx$$

$$= -\frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi} - \frac{4}{k\pi} \cos(k\pi) + \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{4}{(k\pi)^2} \sin(k\pi x) \Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= -\frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi} - \frac{4}{k\pi} (-1)^k + \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{4}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{k\pi} \left(1 - 2(-1)^k\right) - \frac{4}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Per k pari $(k = 2h)$

$$b_{2h} = -\frac{1}{h\pi}$$

$$b_{2h} = -\frac{1}{h\pi}$$

Per k dispari $(h = 2h+1)$

$$b_{2h+1} = \frac{6}{(2h+1)\pi} - \frac{4}{((2h+1)\pi)^2}(-1)^h$$

Per cui la serie di soli seni di f è data da

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \sin(k\pi x) \qquad (*)$$

Per $x = \frac{1}{2}$ tale serie converge a $f(\frac{1}{2}) = 1$

Poiché $\sin(k\pi \cdot \frac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1 \end{cases}$

tutti i termini di indice k pari in $(*)$ sono nulli

e quindi otteniamo

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{(2h+1)\pi} - \frac{4(-1)^h}{((2h+1)\pi)^2} \right)(-1)^h = 1$$

Poiché entrambe le serie

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{6}{(2h+1)\pi}(-1)^h \quad \text{e} \quad \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{((2h+1)\pi)^2} \quad \text{convergono}$$

otteniamo

$$3\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \frac{1}{2} + 2\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{((2h+1)\pi)^2}$$