Politecnico di Bari
CUC Ingegneria dell'Informazione
L3 Ingegneria Informatica e Automazione
AA 2007-2008

Corso di Analisi Matematica I - Tracce di esame

Docente: Dott. E. Caponio

A.A 2007/2008 I prova di esonero del 20 Novembre 2007 Traccia A

1) Determinare la rappresentazione esponenziale e calcolare poi le radici quarte del numero complesso
$$\frac{2-\sqrt{3}-(2\sqrt{3}+1)i}{4-2i}.$$

2) Siano $f\colon X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}$. Dimostrare che se f è crescente e g è crescente, $g \circ f$ è anche crescente.

3) Dire motivando la risposta quali delle seguenti funzioni sono solo ingettive e quali anche strettamente monotone. Dove possibile, scrivere la funzione inversa.
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 4-x & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$$
$$g(x) = \frac{1}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{x}}$$
$$h(x) = (\sqrt[3]{x}-1)^3$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno per una funzione avente limite in un punto.

5) Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^{x-1}|x|^e - x^3}{2x^3+\sin(x^3)},$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{4}} \log_3(1+\frac{1}{4x}).$$

A.A 2007/2008 I prova di esonero del 20 Novembre 2007 Traccia B

1) Determinare la rappresentazione esponenziale e calcolare poi le radici terze del numero complesso

$$\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}i}{2i-4}.$$

2) Siano $f\colon X\subset\mathbb{R}\to Y\subset\mathbb{R}$ e $g\colon Y\to\mathbb{R}$. Dimostrare che se f è decrescente e g è crescente, $g\circ f$ è decrescente.

3) Dire motivando la risposta quali delle seguenti funzioni sono solo ingettive e quali anche strettamente monotone. Dove possibile, scrivere la funzione inversa.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+1 & \text{se } 0\le x\le 1\\ 3-\frac{x}{3} & \text{se } 1<x\le 2\end{cases}$$
$$g(x)=\log_{1/4}x-\log_2 x$$
$$h(x)=(\sqrt{x}+2)^5$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno per una funzione avente limite in un punto.

5) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{x-2}|x|^{\sqrt{2}}-2x^2}{x^2-\cos(x^2)},$$
$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}\log_2(1+\frac{1}{2x}).$$

A.A 2007/2008 I prova di esonero del 20 Novembre 2007 Traccia C

1) Determinare la rappresentazione esponenziale e calcolare poi le radici quarte del numero complesso

$$\frac{1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i}{2+2i}.$$

2) Siano $f\colon X\subset\mathbb{R}\to Y\subset\mathbb{R}$ e $g\colon Y\to\mathbb{R}$. Dimostrare che se f è crescente e g è decrescente, $g\circ f$ è decrescente.

3) Dire motivando la risposta quali delle seguenti funzioni sono solo ingettive e quali anche strettamente monotone. Dove possibile, scrivere la funzione inversa.

$$f(x)=\begin{cases}-x-3 & \text{se } 0\le x\le 1\\ 2x-1 & \text{se } 1<x\le 2\end{cases}$$

$$g(x)=2^{-x}-2^{x}$$

$$h(x)=\sqrt[5]{\sqrt{x-1}+1}$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno per una funzione avente limite in un punto.

5) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}|x|^{2\sqrt{2}}-\pi x}{2x-\arctan(2x)},$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{3}}\log_4\Big(1+\frac{1}{3x}\Big).$$

A.A 2007/2008 I prova di esonero del 20 Novembre 2007 Traccia D

1) Determinare la rappresentazione esponenziale e calcolare poi le radici quarte del numero complesso

$$\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}i}{4+2i}.$$

2) Siano $f\colon X\subset\mathbb{R}\to Y\subset\mathbb{R}$ e $g\colon Y\to\mathbb{R}$. Dimostrare che se f è decrescente e g è decrescente, $g\circ f$ è crescente.

3) Dire motivando la risposta quali delle seguenti funzioni sono solo ingettive e quali anche strettamente monotone. Dove possibile, scrivere la funzione inversa.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+\frac{1}{2} & \text{se } 0\le x\le 1\\ 4x-1 & \text{se } 1<x\le 2\end{cases}$$

$$g(x)=\log x^3-\log_{1/e}x$$

$$h(x)=\sqrt{\sqrt[3]{x+1}-1}$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno per una funzione avente limite in un punto.

5) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi^{x+1}|x|^{\pi}-x^4}{2x^4-\sin(x^4)},$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\log_2(1+\frac{1}{3x}).$$

A.A 2007/2008 Appello e II prova di esonero del 12 Febbraio 2008 Traccia A

1) Determinare le radici quarte di -4.

Rappresentare graficamente nel piano complesso le soluzioni dell'equazione

$$(z-1-i)(\bar{z}-1+i)=2.$$

2) Dare la definizione di funzione ingettiva e di funzione surgettiva. Stabilire se le seguenti funzioni $f\colon X \to [0,+\infty)$ sono ingettive, surgettive, bigettive:

$$X=\mathbb{R}, f(x)=e^{-|x|} \qquad X=[0,+\infty), f(x)=x^2 \qquad X=[0,+\infty), f(x)=x+[x].$$

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+x^2}{1+x^2}\right)^{x^2}.$$

4) Stabilire se esiste una soluzione positiva dell'equazione

$$\arctan\left(\frac{1-x-x^3}{x}\right)=xe^{-x}.$$

5) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

6) Determinare i punti di minimo e di massimo locale e assoluto della funzione

$$f(x)=(x^2+1)e^{\frac{1}{1-x^3}}, \quad x\in[0,1)\cup(1,2].$$

7) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 9 per la funzione $f(x)=\sin(2x^3+x^5)$.

8) Stabilire se il seguente integrale generalizzato converge o diverge:

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\log(x-1)+(x-2)}.$$

A.A 2007/2008 Appello e II prova di esonero del 12 Febbraio 2008 Traccia B

1) Determinare le radici quarte di -2.

Rappresentare graficamente nel piano complesso le soluzioni dell'equazione

$$(z + 2i + 1)(\bar{z} - 2i + 1) = 1.$$

2) Dare la definizione di funzione ingettiva e di funzione surgettiva. Stabilire se le seguenti funzioni $f\colon X \to [0, +\infty)$ sono ingettive, surgettive, bigettive:

$$X = \mathbb{R}, f(x) = e^{-|x|} \qquad X = [0, +\infty), f(x) = x^2 \qquad X = [0, +\infty), f(x) = x + [x].$$

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1 + x^2}{2 + x^2}\right)^x .$$

4) Stabilire se esiste una soluzione negativa dell'equazione

$$\arctan\left(\frac{x - 1}{x^2}\right) = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

5) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

6) Determinare i punti di minimo e di massimo locale e assoluto della funzione

$$f(x) = (x^3 + 3)e^{\frac{1}{1-4x^2}}, \quad x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 3].$$

7) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 8 per la funzione $f(x) = \cos(x^2 - x^4)$.

8) Stabilire se il seguente integrale generalizzato converge o diverge:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - \cos x}{\sqrt{\arctan x + 2x^8}}\mathrm{d}x.$$

A.A 2007/2008 Appello e II prova di esonero del 12 Febbraio 2008 Traccia C

1) Determinare le radici quarte di -8.

Rappresentare graficamente nel piano complesso le soluzioni dell'equazione

$$(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=1.$$

2) Dare la definizione di funzione ingettiva e di funzione surgettiva. Stabilire se le seguenti funzioni $f\colon X\to[0,+\infty)$ sono ingettive, surgettive, bigettive:

$$X=\mathbb{R}, f(x)=e^{-|x|} \qquad X=[0,+\infty), f(x)=x^2 \qquad X=[0,+\infty), f(x)=x+[x].$$

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3-x^2}{2-x^2}\right)^x.$$

4) Stabilire se esiste una soluzione negativa dell'equazione

$$\log\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)=\arctan(2^{-x}-1).$$

5) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

6) Determinare i punti di minimo e di massimo locale e assoluto della funzione

$$f(x)=(2-x^2)e^{\frac{1}{x^3-9}}, \quad x\in[-4,-3)\cup(-3,-2].$$

7) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 7 per la funzione $f(x)=\frac{x}{2}\sin(x^2)$.

8) Stabilire se il seguente integrale generalizzato converge o diverge:

$$\int_2^{+\infty}\frac{x-\arctan x}{\sqrt{\sin x+2+x^4}}\mathrm{d}x.$$

A.A 2007/2008 Appello e II prova di esonero del 12 Febbraio 2008 Traccia D

1) Determinare le radici quarte di -6.

Rappresentare graficamente nel piano complesso le soluzioni dell'equazione

$$(z-1+2i)(\bar{z}-1-2i)=2.$$

2) Dare la definizione di funzione ingettiva e di funzione surgettiva. Stabilire se le seguenti funzioni $f\colon X \to [0,+\infty)$ sono ingettive, surgettive, bigettive:

$$X=\mathbb{R}, f(x)=e^{-|x|} \qquad X=[0,+\infty), f(x)=x^2 \qquad X=[0,+\infty), f(x)=x+[x].$$

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-x^2}{3-x^2}\right)^{x^2}.$$

4) Stabilire se esiste una soluzione positiva dell'equazione

$$\log\left(\frac{x^2-x^3}{1-x}\right)=\arctan(2-3^x).$$

5) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

6) Determinare i punti di minimo e di massimo locale e assoluto della funzione

$$f(x)=(27-x^3)e^{\frac{1}{x^2-4}}, \quad x\in[0,2)\cup(2,3].$$

7) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 8 per la funzione $f(x)=\frac{x^2}{2}\cos(x^3)$.

8) Stabilire se il seguente integrale generalizzato converge o diverge:

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + x^{1/3}}.$$

A.A 2007/2008 Appello e II prova di esonero del 26 Febbraio 2008 Traccia A

1) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso

$$\overline{\frac{i-1}{1+\sqrt{2}i}}.$$

Rappresentare poi sul piano complesso le sue radici quadrate.

2) Considerare le funzioni

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}, \qquad f(x) = (x+1)^4 - 1.$$

Disegnare i loro grafici e dire qual è il loro insieme immagine.

3) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} + x \sin\frac{1}{x}.$$

4) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue e usarlo per dimostrare che esistono una soluzione positiva e una negativa dell'equazione

$$x^2 e^{x^2-1} - 1 + x = 0.$$

5) Enunciare il Teorema di Lagrange.

Usarlo poi per dimostrare che la funzione $f(x) = \cos^2 x$ è lipschitziana su $\mathbb{R}$.

6) Determinare gli eventuali punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = (1-x^2)e^{\frac{x-1}{x+\frac{1}{2}}} + x, \quad x \in [-1,0] \setminus \{-\frac{1}{2}\}.$$

Dire, motivando la risposta se f ha punti di estremo assoluto, specificando in caso positivo la loro natura. Disegnare infine il grafico di f.

7) Usando la formula di MacLaurin per la funzione $y = \frac{1}{1+x}$, scrivere la formula di MacLaurin di ordine 8 per

$$f(x) = \frac{x}{1+x^3}.$$

8) Dimostrare che il seguente integrale generalizzato

$$\int_{[0,+\infty)} x^3 e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

è convergente.

A.A 2007/2008 Appello e II prova di esonero del 26 Febbraio 2008 Traccia B

1) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso

$$\overline{\frac{i+1}{\sqrt{2}+i}}.$$

Rappresentare poi sul piano complesso le sue radici quadrate.

2) Considerare le funzioni

$$f(x) = \sqrt[5]{x+1}, \qquad f(x) = (x-1)^2 + 2.$$

Disegnare i loro grafici e dire qual è il loro insieme immagine.

3) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} + x^2 \left(\cos\frac{1}{x} - 1 \right).$$

4) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue e usarlo per dimostrare che esistono una soluzione positiva e una negativa dell'equazione

$$xe^{x-1} - 1 + x^2 = 0.$$

5) Enunciare il Teorema di Lagrange.

Usarlo poi per dimostrare che la funzione $f(x) = \sin^2 x$ è lipschitziana su $\mathbb{R}$.

6) Determinare gli eventuali punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = (x^2-2)e^{\frac{x-3}{x-2}} + x - 2, \quad x \in [\sqrt{2}, 4] \setminus \{2\}.$$

Dire, motivando la risposta se f ha punti di estremo assoluto, specificando in caso positivo la loro natura. Disegnare infine il grafico di f.

7) Usando la formula di MacLaurin per la funzione $y = \frac{1}{1+x}$, scrivere la formula di MacLaurin di ordine 7 per

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

8) Dimostrare che il seguente integrale generalizzato

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-|x|} \mathrm{d}x$$

è convergente.

A.A 2007/2008 Appello e II prova di esonero del 26 Febbraio 2008 Traccia C

1) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso

$$\overline{\frac{2i-1}{\sqrt{2}+i}}.$$

Rappresentare poi sul piano complesso le sue radici quadrate.

2) Considerare le funzioni

$$f(x) = \sqrt[3]{x-2}, \qquad f(x) = (x+2)^2 - 1.$$

Disegnare i loro grafici e dire qual è il loro insieme immagine.

3) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x-2} + x \sin\frac{1}{x}.$$

4) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue e usarlo per dimostrare che esistono una soluzione positiva e una negativa dell'equazione

$$(x-1)e^x + \frac{1}{2} + x^2 = 0.$$

5) Enunciare il Teorema di Lagrange.

Usarlo poi per dimostrare che la funzione $f(x) = \sin x \cos x$ è lipschitziana su $\mathbb{R}$.

6) Determinare gli eventuali punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = (9-x^2)e^{\frac{x+1}{x+2}} + x, \quad x \in [-3, 0] \setminus \{-2\}.$$

Dire, motivando la risposta se f ha punti di estremo assoluto, specificando in caso positivo la loro natura. Disegnare infine il grafico di f.

7) Usando la formula di MacLaurin per la funzione $y = \frac{1}{1+x}$, scrivere la formula di MacLaurin di ordine 11 per

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^3}.$$

8) Dimostrare che il seguente integrale generalizzato

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

è convergente.

A.A 2007/2008 Appello e II prova di esonero del 26 Febbraio 2008 Traccia D

1) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso

$$\overline{\frac{i+1}{2-\sqrt{2}i}}.$$

Rappresentare poi sul piano complesso le sue radici quadrate.

2) Considerare le funzioni

$$f(x) = \sqrt[5]{x+2}, \qquad f(x) = (x-2)^4 + 1.$$

Disegnare i loro grafici e dire qual è il loro insieme immagine.

3) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1} + x^2\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right).$$

4) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue e usarlo per dimostrare che esistono una soluzione positiva e una negativa dell'equazione

$$x^2 e^{x-1} - 1 - x = 0.$$

5) Enunciare il Teorema di Lagrange.

Usarlo poi per dimostrare che la funzione $f(x) = \sin(2x)$ è lipschitziana su $\mathbb{R}$.

6) Determinare gli eventuali punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = (x^2-4)e^{\frac{x-5}{x-3}} + x - e, \quad x \in [2,5] \setminus \{3\}.$$

Dire, motivando la risposta se f ha punti di estremo assoluto, specificando in caso positivo la loro natura. Disegnare infine il grafico di f.

7) Usando la formula di MacLaurin per la funzione $y = \frac{1}{1+x}$, scrivere la formula di MacLaurin di ordine 13 per

$$f(x) = \frac{x}{1-x^4}.$$

8) Dimostrare che il seguente integrale generalizzato

$$\int_{(-\infty,0]} x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

è convergente.

A.A 2007/2008 Appello del 28 Aprile 2008 Traccia A

1) Rappresentare sul piano complesso l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$(z-1+i)(\bar{z}-1-i)=4.$$

2) Stabilire se le seguenti funzioni sono invertibili e in caso affermativo scrivere, se possibile, la legge della funzione inversa specificando quale sia il suo insieme di definizione:

$$f(x)=2x^4\cos(x^2), \quad x\in\mathbb{R}; \qquad\qquad g(x)=\sin(x^3)-2, \quad x\in\left[-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}},\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right].$$

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x)=\frac{\sin(\sqrt{1-x})}{x\log_{1/3}(2x-1)}.$$

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x^2-2x}+x^2}{x-1}.$$

5) Enunciare il Teorema di Lagrange. Usarlo poi per dimostrare che una funzione $f\colon I\to\mathbb{R}$, con $I\subset\mathbb{R}$ intervallo, avente derivata positiva è strettamente crescente in I.

6) Dare la definizione di funzione convessa. Enunciare almeno una condizione necessaria e sufficiente perché una funzione $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile, sia convessa in (a,b).

7) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 4 per la funzione $f(x)=e^{3-2x}$.

8) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\sin^3x\cos^2x\,\mathrm{d}x.$$

A.A 2007/2008 Appello del 28 Aprile 2008 Traccia B

1) Rappresentare sul piano complesso l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$(z-2-i)(\bar{z}-2+i)=1.$$

2) Stabilire se le seguenti funzioni sono invertibili e in caso affermativo scrivere, se possibile, la legge della funzione inversa specificando quale sia il suo insieme di definizione:

$$f(x)=2x^3\sin x, \quad x\in\mathbb{R}; \qquad\qquad g(x)=\cos(x^2)+2, \quad x\in[0,\sqrt{\pi}].$$

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x)=\frac{\arctan(\sqrt{2-x})}{x^2\log_4(3x-4)}.$$

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(2x^2-x\sqrt{4x^2+3x}\right).$$

5) Enunciare il Teorema di Lagrange. Usarlo poi per dimostrare che una funzione $f\colon I\to\mathbb{R}$, con $I\subset\mathbb{R}$ intervallo, avente derivata negativa è strettamente decrescente in I.

6) Dare la definizione di funzione convessa. Enunciare almeno una condizione necessaria e sufficiente perché una funzione $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile, sia convessa in (a,b).

7) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 4 per la funzione $f(x)=e^{2-3x}$.

8) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\cos^4 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x.$$

A.A 2007/2008 Appello del 1 Luglio 2008 Traccia A

1) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso

$$2\frac{2-i}{i+1}e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

2) Determinare, se esistono, estremo superiore, estremo inferiore, minimo e massimo assoluto delle seguenti funzioni:

$$f\colon(-3,1]\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\begin{cases}2-x & \text{se } x\in(-3,0)\\ 3+x & \text{se } x\in[0,1]\end{cases}$$

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=-2^{-x+1}$$

3) Enunciare e dimostrare il teorema di Bolzano.

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\log^2 x-\log x}}{x-x^3}.$$

5) Enunciare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

Stabilire, poi, che la funzione

$$f(x)=3^{x^5}+x^3$$

è invertibile, verificare che le altre ipotesi del teorema sono soddifatte e calcolare quindi la derivata dell'inversa in $y_0=4$.

6) Dare la definizione di primitiva di una funzione.

Dire, motivando la risposta, se ogni funzione ammette una primitiva e, nel caso in cui una primitiva esista, se essa è unica.

7) Dire, motivando la risposta, quali tra le seguenti funzioni

$$\frac{1}{x^3}, \qquad x^2, \qquad \sin^3 x, \qquad x^3,$$

è il primo termine della formula di MacLaurin della funzione $f(x)=\dfrac{\sin x^3}{x}$.

8) Dimostrare che il seguente integrale generalizzato diverge positivamente:

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{\log^{\frac{1}{2}} x}\,\mathrm{d}x.$$

A.A 2007/2008 Appello del 1 Luglio 2008 Traccia B

1) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso

$$-i\frac{i-1}{2+i}e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

2) Determinare, se esistono, estremo superiore, estremo inferiore, minimo e massimo assoluto delle seguenti funzioni:

$$f\colon [-2,3) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x \in [-2,0) \\ \frac{x}{2}-2 & \text{se } x \in [0,3) \end{cases}$$

$$f\colon (-\infty,2) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x+2).$$

3) Enunciare e dimostrare il teorema di Bolzano.

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\log x + \log^3 x}}{x^2 - x}.$$

5) Enunciare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

Stabilire, poi, che la funzione

$$f(x) = \arctan(x^3) + x^7$$

è invertibile, verificare che le altre ipotesi del teorema sono soddifatte e calcolare quindi la derivata dell'inversa in $y_0 = \frac{\pi}{4} + 1$.

6) Dare la definizione di primitiva di una funzione f.

Dare delle condizioni sufficienti perché f abbia primitiva. Dire motivando la risposta, nel caso in cui una primitiva esista, se essa è unica.

7) Dire, motivando la risposta, quali tra le seguenti funzioni

$$\frac{1}{x^2}, \qquad e^{x^2}, \qquad x^4, \qquad x^2,$$

è il primo termine della formula di MacLaurin della funzione $f(x) = x^2 e^{x^2} - x^2$.

8) Dimostrare che il seguente integrale generalizzato diverge positivamente:

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{\log^{\frac{1}{3}} x}\,\mathrm{d}x.$$

A.A 2007/2008 Appello del 16 Luglio 2008 Traccia A

1) Determinare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{8\sqrt{2}-4\sqrt{2}i}{3+i}.$$

2) Dire, motivando la risposta, quali fra le seguenti funzioni sono strettamente monotone:

$$f(x)=2^{x^2+1},\ x\geq 0; \qquad g(x)=2^{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}; \qquad h(x)=\arctan(\log_{\frac{1}{2}}(x-1))-x.$$

3) Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni continue. Usarlo poi per stabilire che la seguente equazione ha una soluzione positiva e una negativa:

$$\sqrt{2}-2^x-2^{-x}=-3.$$

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4-1}{x^4+x}\right)^{x^2}.$$

5) Dare la definizione di punto di massimo locale forte per una funzione. Enunciare poi il teorema di Fermat.

6) Studiare monotonia e convessità della funzione:

$$f(x)=x^3-2x+x^2+2|x|.$$

7) Scrivere il polinomio di MacLaurin di ordine 4 per la funzione

$$f(x)=e^{\sin(x^2)}.$$

8) Calcolare

$$\int_{-1}^{0}x^2e^{-x}\mathrm{d}x.$$

A.A 2007/2008 Appello del 16 Luglio 2008 Traccia B

1) Determinare le radici quarte del numero complesso

$$-\frac{8\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{1+3i}.$$

2) Dire, motivando la risposta, quali fra le seguenti funzioni sono strettamente monotone:

$$f(x)=\log(x^2+1),\ x\geq 0;\quad g(x)=\log(x^2+1),\ x\in\mathbb{R};\quad h(x)=\arccos(\sin x),\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

3) Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni continue. Usarlo poi per stabilire che la seguente equazione ha una soluzione positiva e una negativa:

$$3^x+3^{-x}+\pi x=3.$$

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)^x.$$

5) Dare la definizione di punto di minimo locale forte per una funzione. Enunciare poi il teorema di Fermat.

6) Studiare monotonia e convessità della funzione:

$$f(x)=x^3-x^2+3x+3|x|.$$

7) Scrivere il polinomio di MacLaurin d1 ordine 6 per la funzione

$$f(x)=\log(1+\sin(x^3)).$$

8) Calcolare

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

A.A 2007/2008 Appello del 11 Settembre 2008 Traccia A

1) Determinare le soluzioni, nel campo dei numeri complessi, dell'equazione

$$z^6 = 2z^3 - 1.$$

2) Stabilire quali fra le seguenti funzioni sono iniettive:

$$f(x) = e^{|x|} - x^2; \qquad g(x) = e^x + x^3; \qquad h(x) = x^6 - x^3 - 2x + 1.$$

3) Stabilire se esistono una soluzione positiva e una negativa dell'equazione:

$$1 + x \log|x| = x^2.$$

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to \pi^-} \tan x \log(\pi^2 - x^2).$$

5) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x}\right) - x.$$

6) Enunciare il Teorema di Rolle. Usarlo, poi, per dimostrare che una funzione $f \colon I \to \mathbb{R}$, derivabile due volte nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e avente un punto di minimo e uno di massimo all'interno di I, ha almeno un punto in cui si annulla la derivata seconda.

7) Scrivere il polinomio di Taylor di centro il punto $x_0 = 1$ e di ordine 4 per la funzione

$$f(x) = \sqrt{2 + x^2 - 2x}.$$

8) Calcolare

$$\int x \cos(2x-1) \mathrm{d}x.$$

A.A 2007/2008 Appello del 11 Settembre 2008 Traccia B

1) Determinare le soluzioni, nel campo dei numeri complessi, dell'equazione

$$z^8 = 4z^4 - 4.$$

2) Stabilire quali fra le seguenti funzioni sono iniettive:

$$f(x) = |x| \cos x - x^2; \qquad g(x) = \log x + e^x; \qquad h(x) = x^8 - x^5 + x^2 - 1.$$

3) Stabilire se esistono una soluzione positiva e una negativa dell'equazione:

$$x^2 \log |x| = x + 2.$$

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 2\pi} \sin x \log(x - 2\pi)^2.$$

5) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x) = xe^{\frac{x^2+4}{x}}.$$

6) Enunciare il Teorema di Rolle. Usarlo poi per dimostrare che una funzione $f \colon I \to \mathbb{R}$, derivabile due volte nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e avente due punti di minimo all'interno di I, ha almeno un punto in cui si annulla la derivata seconda.

7) Scrivere il polinomio di Taylor di centro il punto $x_0 = -1$ e di ordine 4 per la funzione

$$f(x) = \sqrt{2 + x^2 + 2x}.$$

8) Calcolare

$$\int x \sin(5x + 2) \mathrm{d}x.$$

A.A 2007/2008 Appello del 21 Novembre 2008 Traccia A

1) Determinare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{8i+4}{2-i}$$

2) Dare la definizione di estremo inferiore e di minimo assoluto per una funzione. Determinare estremo superiore ed inferiore ed eventualmente massimo e minimo assoluto della funzioni

$$f(x) = \frac{-2}{\frac{1}{2} + |x-3|}, \qquad g(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$

3) Enunciare il teorema dei valori intermedi e dimostrarlo usando il teorema degli zeri per le funzioni continue.

4) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to +\infty} x \log\left(\frac{1+x}{1+2x}\right) - x \log\frac{1}{2}.$$

5) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = xe^{\frac{2x+1}{x-1}}.$$

6) Enunciare il teorema di Lagrange. Usarlo per dimostrare che per ogni $a \geq \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4} + 1 - a \leq \arctan a \leq -\frac{\pi}{4} + 1 + a.$$

7) Scrivere il polinomio di MacLaurin di ordine 9 per la funzione

$$f(x) = xe^{x^3 - 3}.$$

8) Stabilire se il seguente integrale generalizzato è convergente

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^4(3 + \sin(2x-1))} \mathrm{d}x.$$