Analisi Matematica - corsi B - C - modulo B

lunedì 26 giugno 2017 11:00

1) Si consideri la serie numerica $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Dare la definizione di somma parziale n-esima, s_n.

Si consideri poi $x \in \mathbb{R}$ e la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad (*)$$

Dimostrare che $s_n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Stabilire poi il carattere della serie $(*)$ al variare di x in $\mathbb{R}$.

Si veda, ad esempio, la lezione 5 degli appunti

2) Sia $f(x,y) = (x^2-y^2)\log(x^2-y^2)$

Stabilire su quale insieme f è differenziabile.

Motivare la risposta. Rappresentare inoltre graficamente tale insieme

Si consideri poi $P=(1,0)$.

Dire se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0,f(1,0))$ e in caso positivo calcolarne l'equazione

Osserviamo che f è definita sul sottoinsieme A del piano

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2>0\}$ che è un insieme aperto, Le derivate parziali di f sono date da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\log(x^2-y^2) + (x^2-y^2)\frac{1}{x^2-y^2}\,2x =$$
$$= 2x\left(\log(x^2-y^2)^2 + 1\right)$$

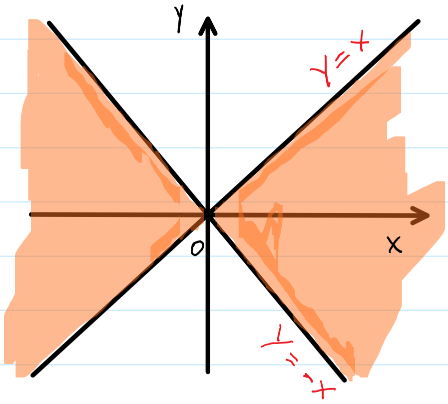
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\log(x^2-y^2) + (x^2-y^2)\frac{1}{x^2-y^2}(-2y)$$
$$= -2y\left(\log(x^2-y^2)+1\right)$$

Entrambe queste funzioni sono continue su A quindi per il Teorema del differenziale f è differenziabile su A.

Per rappresentare graficamente tale insieme osserviamo che

$$x^2-y^2>0 \iff (x-y)(x+y)>0 \iff \begin{cases} y<x \\ y>-x \end{cases} \vee \begin{cases} y>x \\ y<-x \end{cases}$$

Pertanto A è l'insieme ombreggiato in figura



3) Determinare le soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+y = e^x-1 \\ y(0)=-1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata a

$$y''+y = e^x-1 \qquad (*)$$

è $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Per determinare una soluzione particolare consideriamo separatamente le equazioni

$y'' + y = -1$ e $y'' + y = e^x$

$\tilde{y}(x) = k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$ è soluzione se e solo se $k_1 = -1$

$\tilde{y}(x) = k_2 e^x$ è soluzione se e solo se
$k_2 e^x + k_2 e^x = e^x$ cioè
$2k_2 e^x = e^x$ da cui
$k_2 = \frac{1}{2}$

Quindi una soluzione particolare di (*) è $\tilde{y}(x) = \frac{1}{2}e^x - 1$

L'integrale generale dell'equazione (*) è quindi dato da

$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x - 1$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene determinando c_1 e c_2 che soddisfino le condizioni iniziali

$-1 = y(0) = c_1 + \frac{1}{2} - 1$ da cui $c_1 = -\frac{1}{2}$

$y'(x) = +\frac{1}{2}\sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{2}e^x$

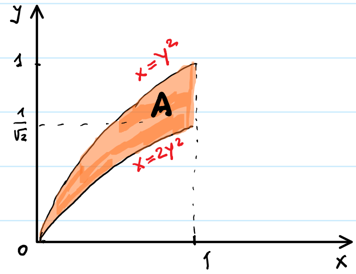
$1 = y'(0) = c_2 + \frac{1}{2}$ da cui $c_2 = \frac{1}{2}$

4) Calcolare il seguente integrale doppio

$\int_A x^2 y^2 \, dx\, dy$ dove A è l'insieme

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 2y^2, \ y > 0 , \ x < 1$

A è il seguente insieme



È un insieme normale rispetto all'asse delle x definito da $0 \le x \le 1$ e $\sqrt{\frac{x}{2}} \le y \le \sqrt{x}$

L'integrale assegnato è quindi uguale a

$$\int_0^1 x^2 \left(\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} y^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \left. \frac{1}{3} y^3 \right|_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^{\frac{7}{2}} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \, \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{9} \left. x^{\frac{9}{2}} \right|_0^1 = \frac{1}{27} \, \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$