

- 1) Stabilire se il seguente integrale converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \log x}{1+x^3} dx$$

La funzione integranda $f(x) = \frac{\sqrt{x} \log x}{1+x^3}$ è definita su

$(0, +\infty)$ ed è ivi continua, dunque $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $\forall 0 < a < b < +\infty$

Poiché f non è definita in 0, f è integrabile su $(0, +\infty)$

se f è integrabile separatamente in $(0, c]$ e in $[c, +\infty)$

qualunque sia $c \in (0, +\infty)$

Studiamo prima $\int_0^c f(x) dx$: poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

dato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log x = 0$, $|f|$ è limitata in un intorno di 0

e quindi f è integrabile su $(0, c]$. Studiamo ora

$$\int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

Dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot f(x) = 0$ e $f > 0$ su $(1, +\infty)$

abbiamo che $f(x) < \frac{1}{x^2}$ ogg. per $x \rightarrow +\infty$

e quindi poiché $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \in \mathbb{R}$ onde $\int_c^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R}$

Dunque l'integrale assegnato converge.

- 2) Stabilire se la funzione $f(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2$

è differenziabile su \mathbb{R}^2 . Calcolare quindi l'equazione

del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, -1)$

Determinare infine i punti critici di f e stabilirne le nature

di f è un polinomio in due variabili quindi è

una funzione di classe C^∞ su \mathbb{R}^2 e dunque è

differenziabile su \mathbb{R}^2 . Nel punto $(0, -1)$ f ha come

tangente al suo grafico di equazione

$$z = f(0, -1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, -1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, -1)(y+1)$$

$$f(0, -1) = 1 - 2 = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4xy^2; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4yx^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) = -4$$

Quindi l'equazione del piano richiesto è

$$z = -1 - 4(y+1)$$

Determiniamo ora i punti critici di f :

$$\begin{cases} 4x^3 - 4xy^2 = 0 \\ x(x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2=y^2 \\ x^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad (0,0,0)$$

$$(x-y)(x+y)=0$$

Determinare ora i punti critici di f :

$$\begin{cases} 4x^3 - 4xy^2 = 0 \\ 4y^3 - 4yx^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - y^2) = 0 \\ y(y^2 - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2=y^2 \\ 0=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} (x-y)(x+y)=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

dunque tutti i punti sulle bisettrici del quadrato sono
punti critici per f .

Studiare la natura: rice quindi $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e considerare
i punti (\bar{x}, \bar{x}) e $(\bar{x}, -\bar{x})$

Osservare che $f(\bar{x}, \pm\bar{x}) = 2$ dunque

$$f(x, y) - f(\bar{x}, \pm\bar{x}) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2;$$

quindi $(x^2 - y^2)^2 \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, i punti $(\bar{x}, \pm\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$

sono tutti di minimo globale per f .

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + \cos(-2x)$$

Eq. omogenea associata:

$$y'' + 3y' + 2y = 0; \quad \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} < \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix}$$

integrale generale: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Soluzione dell'eq. completa:

applichiamo separatamente il metodo di similitudine a

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} \quad \text{e} \quad y'' + 3y' + 2y = \cos(-2x) = \cos(2x)$$

- 2 è soluzione dell'eq. caratteristica
quindi cerchiamo \tilde{y} del tipo

$$\tilde{y}(x) = Kx e^{-2x}$$

$$\tilde{y}'(x) = K e^{-2x} - 2Kx e^{-2x}$$

$$\tilde{y}''(x) = -2K e^{-2x} - 2K e^{-2x} + 4Kx e^{-2x}$$

quindi

$$-4K e^{-2x} + 4Kx e^{-2x} + 3K e^{-2x} - 6Kx e^{-2x} + 2Kx e^{-2x} = e^{-2x}$$

da cui

$$-K e^{-2x} = e^{-2x} \quad \text{e quindi } K = -1$$

cerchiamo \tilde{y} del tipo

$$\tilde{y}(x) = k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)$$

$$\tilde{y}'(x) = -2k_1 \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x)$$

$$\tilde{y}''(x) = -4k_1 \cos(2x) - 4k_2 \sin(2x)$$

quindi

$$-4k_1 \cos(2x) - 4k_2 \sin(2x) - 6k_1 \sin(2x) + 6k_2 \cos(2x) + 2k_1 \cos(2x) + 2k_2 \sin(2x) = \cos(2x)$$

da cui

$$\cos(2x) \cdot [6k_2 - 2k_1] + \sin(2x) \cdot [-2k_2 - 6k_1] = \cos(2x)$$

$$\text{cioè} \quad \begin{cases} 6k_2 - 2k_1 = 1 \\ -2k_2 - 6k_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 = -3k_1 \\ -20k_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{20} \\ k_2 = +\frac{3}{20} \end{cases}$$

quindi una soluzione dell'eq. $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + \cos(-2x)$

$$\tilde{y}(x) = -x e^{-2x} - \frac{1}{20} \cos(2x) + \frac{3}{20} \sin(2x)$$

e il suo integrale generale è dato da

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{3}{20} \sin(2x) - \frac{1}{20} \cos(2x) - x e^{-2x}$$

4) Enunciare e dimostrare il criterio di confronto per le serie numeriche a termini non negativi.

Da esso dedurre il criterio del confronto asintotico

si veda la lezione 31.