Possibile svolgimento della prova del 15 gennaio 2024 – Modulo B

1) La regione A è limitata dalle rette $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ e dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ nel primo quadrante. Per calcolare l'integrale è conveniente passare alle coordinate polari:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Lo Jacobiano della trasformazione è r. L'integranda diventa:

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^2} = \sin\theta\cos\theta$$

Per i limiti di integrazione:

- La circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ diventa $r = 2$
- La retta $y = x$ corrisponde a $\theta = \pi/4$
- La retta $y = \sqrt{3}x$ corrisponde a $\theta = \pi/3$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_0^2 r\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_0^2 r\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right) \\
&= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \left[-\cos^2\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2) Ricerca dei punti critici:

Per trovare i punti critici, calcoliamo e annulliamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y^2+1) - 2xy^3 = 2x(y^2+1-y^3) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(2y-3y^2) = 0$$

Dal sistema:

$$\begin{cases} 2x(y^2+1-y^3) = 0 \\ x^2(2y-3y^2) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione:

- $x = 0$ oppure
- $y^2 + 1 - y^3 = 0$

Se $x = 0$ la seconda equazione diviene l'identità $0 = 0$ e quindi qualsiasi y_0 fornisce un punto critico della forma $(0, y_0)$.

Dalla seconda equazione:

- $x = 0$ oppure
- $2y - 3y^2 = 0 \Rightarrow y(2-3y) = 0 \Rightarrow y = 0$ o $y = \frac{2}{3}$

$x = 0$ è già stato analizzato sopra. Se $y = 0$ la prima equazione diviene $2x = 0$, quindi $(0, 0)$ è un punto critico ma rientra tra i punti della retta $x = 0$ già determinata. Infine, sostituendo $y = \frac{2}{3}$ nella prima equazione, otteniamo: $x^2\big((\frac{2}{3})^2 + 1 - (\frac{2}{3})^3\big) = 0$ e quindi il punto $(0, 2/3)$ che appartiene alla retta $x = 0$

In definitiva i punti critici sono tutti e soli quelli della retta $x = 0$.

Poiché $f(0, y) = 0$ la loro natura si può studiare indagando il segno di $f(x, y)$ ovvero di $x^2(y^2 + 1 - y^3)$ che dipende solo dal segno di $p(y) = y^2 + 1 - y^3$. Poichè $p'(y) = 2y - 3y^2$, p è strettamente decrescente su $(-\infty, 0)$ e su $(2/3, +\infty)$. Dato che $p(0) = 1 > 0$, p ha un unico zero $\bar{y}$ (nell'intervallo $(2/3, +\infty)$). Pertanto $p(y) > 0$ se $y < \bar{y}$ e $p(y) < 0$ se $y > \bar{y}$. Quindi $(0, \bar{y})$ è un punto di sella e i punti $(0, y)$ con $y < \bar{y}$ sono di minimo locale mentre quelli con $y > \bar{y}$ sono di massimo locale.

Piano tangente:

Il piano tangente ha equazione:

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1)$$

Calcoliamo le derivate parziali nel punto $(1, 1)$:

$$f_x(1, 1) = 2$$

$$f_y(1, 1) = -1$$

Quindi l'equazione del piano tangente è:

$$z = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) = 1 + 2x - 2 - y + 1 = 2x - y$$

3) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

Le cui radici sono $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$, quindi:

$$y_h(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

è l'integrale generale dell'omogenea associata. Per trovare una soluzione particolare, usiamo il metodo di similarità:

$$y_p(t) = A \sin(2t) + B \cos(2t)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale:

$$(-4A \sin(2t) - 4B \cos(2t)) + 4(2A \cos(2t) - 2B \sin(2t)) + 5(A \sin(2t) + B \cos(2t)) = 2 \sin(2t)$$

Raccogliendo:

$$(A - 8B) \sin(2t) + (B + 8A) \cos(2t) = 2 \sin(2t)$$

Quindi:

$$A - 8B = 2$$

$$B + 8A = 0$$

Risolvendo il sistema:

$$A = \frac{2}{65}, \quad B = -\frac{16}{65}$$

La soluzione generale è:

$$y(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{2}{65} \sin(2t) - \frac{16}{65} \cos(2t)$$

Usando le condizioni iniziali:

$$y(0) = 1 \implies c_1 - \frac{16}{65} = 1$$

$$y'(0) = 0 \implies -2c_1 + c_2 + \frac{4}{65} = 0$$

Risolvendo il sistema qui sopra otteniamo c_1 e c_2.

4) Il criterio dell'integrale afferma che data una serie a termini non negativi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, dove $a_n = f(n)$ con f funzione decrescente e positiva su $[n_0, +\infty)$, la serie converge se e solo se converge l'integrale improprio $\int_{n-0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Per la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, applichiamo il criterio con $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$; se $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^\omega;$$

se $\alpha = 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to+\infty} \log(\omega).$$

L'integrale quindi converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leq 1$. Quindi la serie armonica generalizzata converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leq 1$.