1)-a) Calcolare il coniugato del prodotto di numeri complessi

$$z_1 = \frac{1}{e} e^{-i\frac{\pi}{8}} \quad e \quad z_2 = e^{2-i}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{e} e^{-i\pi/8} \cdot e^2 e^{-i} = e\, e^{-i\left(\frac{\pi}{8}+1\right)}$$

pertanto $\overline{z_1 \cdot z_2} = e\, e^{i\left(\frac{\pi}{8}+1\right)}$ (infatti il coniugato di $e^{i\alpha}$ è $e^{-i\alpha}$ dato che $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ e $e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$
$= \cos\alpha - i\sin\alpha$)

1)-b) Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = \log_{\frac{1}{e}}(e^x - e) + \log(2-x)$$

dom f:

$$\begin{cases} e^x - e > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^x > e \\ x < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases} \quad \text{quindi } \operatorname{dom} f = (1,2)$$

la funzione $x \in (1,2) \mapsto e^x - e$ è strettamente crescente e quindi

$x \in (1,2) \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(e^x - e)$ è strett. decrescente

la funzione $x \in (1,2) \mapsto 2-x$ è strett. decrescente e quindi

$x \in (1,2) \mapsto \log(2-x)$ è strett. decrescente; f è dunque strettamente decrescente ed, essendo continua, si ha che $f((1,2)) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x)\right) =$
$= (-\infty, +\infty)$

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \log(1+x) \big/ 2-x$$

Se ne determini il dominio e gli asintoti

Si verifichi che 0 è un punto stazionario e si dimostri che non è di estremo locale

dom f:
$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 2 \end{cases} \quad \text{quindi } \operatorname{dom} f = (-1,2) \cup (2,+\infty)$$

Poiché f è prodotto di funzioni continue su $(-1,2) \cup (2,+\infty)$,

$$\left(f(x) = x^2 \cdot \log(1+x) \cdot \frac{1}{2-x} \right)$$

essa è continua su $(-1,2) \cup (2,+\infty)$. Gli eventuali asintoti verticali sono quindi da cercarsi solo nei punti $x=-1$ e $x=2$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \left\{ 1 \cdot (-\infty) \cdot \frac{1}{3} \right\} = -\infty$$ quindi la retta $x=-1$ è asintoto verticale a dx

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \left\{ 4 \cdot \log 3 \cdot \frac{1}{0^+} \right\} = +\infty$$ quindi la retta $x=2$ è asintoto verticale a sx

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \left\{ 4 \cdot \log 3 \cdot \frac{1}{0^-} \right\} = -\infty$$ quindi la retta $x=2$ è asintoto verticale a dx

Cerchiamo ora gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2-x} \log(1+x) = \{ -\infty \cdot (+\infty) \} = -\infty;$$ f non ha asintoto orizzontale

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x-x^2} \log(1+x) = \{ -1 \cdot (+\infty) \} = -\infty;$$ f non ha neanche asintoto obliquo

Ovviamente f è derivabile sul suo dominio e

$$f'(x) = \frac{\left(2x \log(1+x) + \frac{x^2}{1+x}\right)(2-x) + x^2 \log(1+x)}{(2-x)^2}$$

$$f'(0) = \frac{0 \cdot 2 + 0}{4} = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Per verificare che 0 non è un punto di estremo locale per f (cioè non è né di minimo né di massimo locale) è sufficiente studiare il segno di

$$f(x) - f(0) \quad \text{in un intorno di } 0$$

$$f(x) - f(0) = f(x) - 0 = \frac{x^2 \log(1+x)}{2-x}$$

Osserviamo che la funzione $\frac{x^2}{2-x}$ è non negativa in un intorno di 0 (dato che $x^2 \geq 0$ e $2-x > 0$ se $x < 2$)

Quindi il segno di $f(x) - f(0) = f(x)$ dipende dal fattore $\log(1+x)$ che è positivo per $x>0$ e negativo per $x \in (-1,0)$. Poiché

$f(x)-f(0)$ non ha un segno definito in un intorno di 0 deduciamo,

per definizione di estremo locale, che 0 non è né di minimo, né di massimo locale.

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 x^2 \sin(2\pi x)\, dx$$

Integrando per parti due volte di seguito otteniamo

$$\int_0^1 x^2 \sin(2\pi x)\, dx = -\frac{x^2}{2\pi}\cos(2\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 x\cos(2\pi x) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi) + 0 + \frac{1}{2\pi^2}\, x\sin(2\pi x)\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \sin(2\pi x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi} + 0 + \frac{1}{2\pi^3}\cos(2\pi x)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi^3} - \frac{1}{2\pi^3} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}$$

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione. Dimostrare poi che per una funzione continua f su $[a,b]$, se F è una primitiva di f allora $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

Per la definizione, si veda p. 246, DEF. 8.13 del manuale; per la dimostrazione richiesta si veda p. 247.