1)-a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 \sum_{n=3}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3}$$

$$= -\frac{8}{27} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^j = -\frac{8}{27} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{8}{45}$$

1)-b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n}-1) \sin^{3/2}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(\sqrt{n}-1) \sin^{3/2}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \sqrt{n} \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{1}{n}$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ anche la serie assegnata diverge positivam.

2) Determinare i punti stazionari della funzione

$f(x) = (2x^3 - 2y^2)\, e^{-y^2}$. Stabilire la natura di $(0,0)$.

Stabilire se f ha piano tg. nel punto $(1,-1,f(1,-1))$ e scriverne l'equazione

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi è differenziabile su $\mathbb{R}^2$
Dunque ha piano tg in ogni punto e in particolare in $(1,-1,f(1,-1))$

$$f_x(x,y) = 6x^2 e^{-y^2}$$

$$f_y(x,y) = -4y e^{-y^2} + (2x^3-2y^2)(-2y) e^{-y^2}$$

$$\begin{cases} 6x^2 e^{-y^2} = 0 \\ -4y e^{-y^2} + (2x^3-2y^2)(-2y)e^{-y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ e^{-y^2}(-4y+4y^3)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0\\ 4y(y^2-1)=0\end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \vee y=\pm 1\end{cases}$$

Quindi i punti $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ sono punti critici per f

$$f_{xx}(x,y) = 12x e^{-y^2} \qquad f_{xy}(x,y) = -24xy e^{-y^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = -4e^{-y^2} + 8y^2 e^{-y^2} - 4y(-2y)e^{-y^2} +$$
$$(2x^3-2y^2)(-2)e^{-y^2} + (2x^3-2y^2)4y^2 e^{-y^2}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$; poiché $\det(H_f(0,0)) = 0$

cerchiamo di stabilire la natura di $(0,0)$ studiando il segno di

$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) = (2x^3-2y^2)e^{-y^2}$$

in un intorno di $(0,0)$

Tale segno è lo stesso di $2x^3-2y^2$ che è positivo sull'asse delle x e negativo su quello delle y; quindi $(0,0)$ è di sella

L'equazione del piano tg in $(1,-1,f(1,-1))$ è

$$z = f(1,-1) + f_x(1,-1)(x-1) + f_y(1,-1)(y+1)$$

cioè

$$z = 0 + \frac{6}{e}(x-1) + \frac{4}{e}(y+1)$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' + 2y = t - e^{-t} \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata è $y'' - y' + 2y = 0$
la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$
che ha soluzioni $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

Quindi le soluzioni dell'omogenea associata sono
$$y(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Determiniamo soluzioni particolari di

$y'' - y' + 2y = t$ e $y'' - y' + 2y = e^{-t}$

$\tilde{y}_1(t) = at + b$

$-a + 2at + 2b = t$

$$\begin{cases} -a + 2b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\tilde{y}_1(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$

$\tilde{y}_2(t) = ae^{-t}$

$ae^{-t} + ae^{-t} + 2ae^{-t} = e^{-t}$

$4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$\tilde{y}_2(t) = \frac{e^{-t}}{4}$

L'integrale generale dell'equazione del problema è

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) + \frac{1}{4}(1-e^{-t}) + \frac{t}{2}$$

$$\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y'(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + e^{\frac{1}{2}t} c_2 \frac{\sqrt{7}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{e^{-t}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$y'(0) = \frac{\sqrt{7}}{2} c_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0 \implies c_2 = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$$

la soluzione del problema è quindi

$$y(t) = -e^{\frac{1}{2}t} \frac{3}{2\sqrt{7}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{1}{4}\left(1-e^{-t}\right) + \frac{t}{2}$$

4) Dare una caratterizzazione degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan. Dedurre che un insieme normale è misurabile. Fornire infine un esempio di un insieme limitato del piano che non sia misurabile.

$A \subset \mathbb{R}^2$, limitato, è misurabile se e solo se ∂A è trascurabile (cioè ∂A è misurabile e la sua misura è 0)

Un insieme normale è misurabile perché è limitato e la sua frontiera è costituita da 2 segmenti che sono misurabili di misura nulla e da 2 grafici di funzioni continue che sono anche essi misurabili di misura nulla

Esempio $A := \{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$

infatti $\partial A = [0,1]\times[0,1]$ che non ha misura nulla.