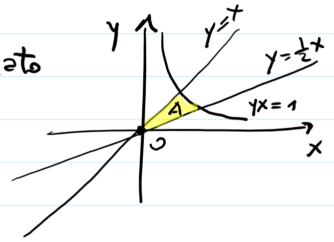
1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \log(xy+1)\,dx\,dy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le xy \le 1 \ \wedge \ \frac{1}{2}x \le y \le x\}$

A è l'insieme rappresentato in figura in giallo



Facciamo un cambio di variabile ponendo

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \qquad \text{quindi} \quad 0 \le u \le 1 \quad e \quad \frac{1}{2} \le v \le 1$$

cioè nel piano (u,v) l'insieme A è mappato dalla trasformazione qui sopra nell'insieme $B = [0,1] \times [\frac{1}{2}, 1]$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2\frac{y}{x} = 2v. \text{ Quindi}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right|^{-1} = \frac{1}{2v}$$

Pertanto $\displaystyle\int_A \log(xy+1)\,dx\,dy = \int_B \log(u+1)\frac{1}{2v}\,du\,dv =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \log(u+1)\,du \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{v}\,dv =$$

$$\frac{1}{2}\log v\Big|_{\frac{1}{2}}^1 \cdot \left(u\log(u+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{u+1}\,du \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - 1 + \log(u+1)\Big|_0^1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - 1 + \log 2\right) =$$

$$= +\frac{1}{2}\log 2 \cdot (2\log 2 - 1)$$

2) Determinare i punti critici della funzione

$f(x,y) = (xy)^4(x-y+1)$ e studiarne la natura

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(xy)^3 y(x-y+1) + (xy)^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(xy)^3 x(x-y+1) - (xy)^4$$

$$\begin{cases} 4(xy)^3 y(x-y+1) + (xy)^4 = 0 \\ 4(xy)^3 x(x-y+1) - (xy)^4 = 0 \end{cases}$$

sommando membro a membro e riscrivendo la 1ª equazione otteniamo:

$$\begin{cases} 4(xy)^3(x-y+1)(x+y) = 0 \\ 4(xy)^3 y(x-y+1) + (xy)^4 = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} xy = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (x-y+1) = 0 \\ (xy)^4 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y = 0 \\ 4x^7(2x+1) + x^8 = 0 \end{cases}$$

tutti i punti dell'asse delle x e quelli dell'asse delle y sono critici

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$P_1 = (0,1)$ e $P_2 = (-1,0)$ sono punti critici

$$\Updownarrow$$

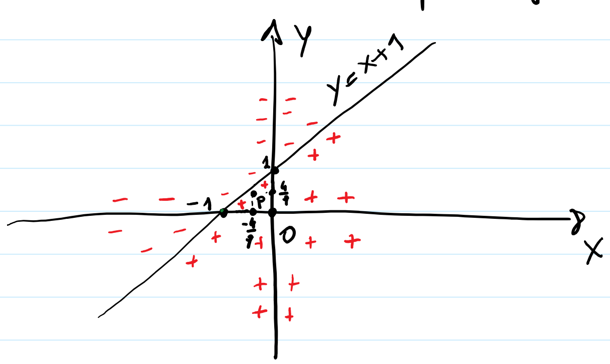
$$\begin{cases} x^7(8x+4+x) = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{4}{9} \\ y = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$(0,0)$ è critico $\qquad P_3 = \left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$

Iniziamo ad analizzare la natura dei punti trovati.
Cominciamo con i punti sugli assi cartesiani. Poiché su ognuno di essi f si annulla, la loro natura dipende dal segno di f in un intorno del punto fissato. Poiché il segno di f dipende solo dal segno di $g(x,y) = x-y+1$



abbiamo per i punti sull'asse delle x, $(\bar{x},0)$, e per quelli sull'asse delle y, $(0,\bar{y})$:

se $\bar{x} > -1 \to$ minimo locale non forte
" $\bar{x} < -1 \to$ massimo " "
$(-1,0)$ è di sella
" $\bar{y} > 1 \to$ massimo " "
" $\bar{y} < 1 \to$ minimo " "
$(0,1)$ è di sella

Infine studiamo la natura del punto $P = \left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$

$$f_{xx}(x,y) = 12(xy)^2 y^2(x-y+1) + 4(xy)^3 y + 4(xy)^3 y =$$

$$= 12(xy)^2 y^2 (x-y+1) + 8(xy)^3 y$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 12(xy)^3(x-y+1) + 4(xy)^3(x-y+1) - 4(xy)^3 y + 4(xy)^3 x$$
$$= 16(xy)^3(x-y+1) + 4(xy)^3(x-y)$$

$$f_{yy}(x,y) = 12(xy)^2 x^2 (x-y+1) - 4(xy)^3 x - 4(xy)^3 x =$$
$$= 12(xy)^2 x^2 (x-y+1) - 8(xy)^3 x$$

$$f_{xx}\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right) = 12\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{4}{9}\right)^7 = \left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{4}{3} - \frac{32}{9}\right) = -\frac{20}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^6 = -5\left(\frac{4}{9}\right)^7$$

$$f_{xy}\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right) = -16\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{1}{9}\right) + 4\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{8}{9}\right) =$$
$$= \left(\frac{4}{9}\right)^6\left(-\frac{16}{9} + \frac{32}{9}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)^6 \frac{16}{9} = 4\left(\frac{4}{9}\right)^7$$

$$f_{yy}\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right) = 12\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{4}{9}\right)^7 = -5\left(\frac{4}{9}\right)^7$$

$$H_f\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right) = \begin{pmatrix} -5\left(\frac{4}{9}\right)^7 & 4\left(\frac{4}{9}\right)^7 \\ 4\left(\frac{4}{9}\right)^7 & -5\left(\frac{4}{9}\right)^7 \end{pmatrix}$$

$\left|H_f\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)\right| = 25\left(\frac{4}{9}\right)^{14} - 16\left(\frac{4}{9}\right)^{14} > 0$ quindi $P\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)$ è di massimo locale forte

Allo stesso risultato si può giungere osservando che f è nulla sul bordo del triangolo di vertici $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ ed è positiva al suo interno. P è interno a tale triangolo e quindi per il teorema di Weierstrass P deve necessariamente essere il punto di massimo della restrizione di f a tale triangolo.

3) Determinare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y \log y)\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$y' = (y \log y)\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ è un'equazione a variabili separabili

Essa ammette un'unica soluzione singolare data da $y(x) = 1$, $\forall x \in (-1,1)$

Dato che in 0, la soluzione è uguale a 2, possiamo escludere che $y(x) = 1$ sia la soluzione cercata e possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per $y \log y$ (osserviamo anche che la soluzione sarà > 1) ottenendo

$$\frac{y'}{y \log y} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{quindi} \quad \int \frac{dy}{y \log y} = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

cioè $\quad \log(\log y) = \int \frac{x\,dx}{} = -\sqrt{1-x^2} + c$

cioè $\log(\log y) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$

Poiché $y(0) = 2$ otteniamo $\log(\log 2) = -1 + C$ da cui

$C = 1 + \log(\log 2)$

Quindi $\log y = e^{-\sqrt{1-x^2}+1}\, e^{\log(\log 2)} = e^{-\sqrt{1-x^2}+1} \cdot \log 2$

cioè $y(x) = e^{\log 2 \cdot e^{-\sqrt{1-x^2}+1}} = \left(e^{\log 2}\right)^{e^{-\sqrt{1-x^2}+1}} = 2^{e^{1-\sqrt{1-x^2}}}$

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat per una funzione di due variabili reali

Si veda, ad esempio, pag. 73-74 del manuale Fusco, Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica due", Liguori Editore