1)-a) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+\sin n)^n}{n^{n+1}}$$

Possiamo usare il criterio della radice (osserviamo che la serie è a termini non negativi)

$$\sqrt[n]{\frac{(1+\sin n)^n}{n^{n+1}}} = \frac{1+\sin n}{\sqrt[n]{n}\cdot n} \quad ; \text{ poiché } \sqrt[n]{n} \to 1 \text{ abbiamo}$$

$$\lim_n \frac{1+\sin n}{\sqrt[n]{n}\cdot n} = \lim_n \frac{1+\sin n}{n} = 0$$ e pertanto la serie assegnata converge

1)-b) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{2}{2^n}$$

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{2}{2^n} = 2\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^5}\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-5}} = \frac{1}{2^4}\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{2^h} =$$

$$= \frac{1}{2^4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

2) Sia $f(x,y) = x\,e^{-x^2+y^2}$

Determinare i punti critici di f e studiarne la natura

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2+y^2} - 2x^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,e^{-x^2+y^2}\,2y$$

$$\begin{cases} e^{-x^2+y^2}(1-2x^2) = 0 \\ 2e^{-x^2+y^2}\,xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ 1-2x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ e^{-x^2+y^2} = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

Abbiamo quindi due punti critici $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Poiché $f(x,y) = -f(-x,y)$, possiamo limitarci a studiare la sola natura di P_1

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x\,e^{-x^2+y^2}(1-2x^2) - 4x\,e^{-x^2+y^2} & (1-2x^2)\,2y\,e^{-x^2+y^2} \\ (1-2x^2)\,2y\,e^{-x^2+y^2} & 2e^{-x^2+y^2}x + 4y^2x\,e^{-x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$H_f\left(\frac{1}{\sqrt2},0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt2}e^{-\frac12} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt2}e^{-\frac12} \end{pmatrix}$$

$\det\left(H_f\left(\frac{1}{\sqrt2},0\right)\right) = -4/e < 0$ quindi P_1 è di sella (dunque anche P_2 è di sella).

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale (in forma implicita) dell'equazione

$$y' = xy^2e^{x-1/y}$$

Determinare poi la funzione $y=y(x)$ soluzione che in $x=1$ vale 1.

Si tratta di una equazione a variabili separabili dato che

$$y' = xe^x\, y^2e^{-1/y}.$$

L'unica soluzione singolare è quindi $y\equiv 0$. Supponendo quindi che $y=y(x)$ non si annulli in alcun punto, possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per $y^2e^{-\frac1y}$ ottenendo

$$\frac{y'}{y^2e^{-\frac1y}} = xe^x \quad \text{da cui} \quad \int \frac{e^{\frac1y}}{y^2}\,dy = \int xe^x\,dx$$

cioè $\quad -e^{\frac1y} = xe^x - e^x + c$

ossia $\quad e^{\frac1y} = e^x(1-x) + c. \quad (*)$

Questo è dunque l'integrale generale in forma implicita.

Determiniamo la soluzione $y=y(x)$ che in $x=1$ vale 1. Deve essere:

$y(1)=1$ cioè $e = e\cdot 0 + c$ ossia $c=e$

Da $(*)$, poiché il primo membro è positivo deduciamo che anche $e^x(1-x)+e$ deve essere positivo.

Quindi la soluzione che in 1 è uguale a 1 è

$$y(x) = \frac{1}{\log\left(e^x(1-x)+e\right)}$$

$$y(x) = \frac{1}{\log\left(e^x(1-x)+e\right)}$$

4) Dare la definizione di dominio del piano normale rispetto all'asse delle x. Dimostrare poi che un tale dominio è misurabile

Per la definizione si veda ad esempio pag. 201 del manuale "Elementi di Analisi Matematica due" di N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori 2001.

Per la dimostrazione della misurabilità di un insieme normale si ricordi che un insieme limitato del piano è misurabile se e solo se la sua frontiera è misurabile ed ha misura nulla. Poiché la frontiera di un dominio normale è unione di due segmenti e dei grafici di due funzioni continue e sappiamo che ognuno di questi è misurabile con misura nulla, la tesi è dimostrata.