

1) Determinare il carattere delle serie

A)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(\sqrt{n-1}) \cdot \left(1 - \cos^2 \frac{1}{n}\right) \quad (*)$

B)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\sqrt{n-1}) \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (**)$

A)  $0 \leq \arctan \sqrt{n-1} \left(1 - \cos^2 \frac{1}{n}\right) \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{1}{n} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}$

quindi (\*) converge per il teorema di confronto in quanto  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$

B)  $0 \leq |\sin(\sqrt{n-1})| \left|1 - \cos \frac{1}{n}\right| \leq 1 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$   
quindi (\*\*) converge per lo stesso motivo dell'osservazione A)

2) Determinare i punti stazionari della funzione

A)  $f(x,y) = (x-y)^2 \frac{x}{y}$  e studiarne la natura

B)  $f(x,y) = (y-x)^2 \frac{y}{x}$  "

A)  $\text{dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

$f'_x(x,y) = 2(x-y) \frac{x}{y} + \frac{(x-y)^2}{y}$

$f'_y(x,y) = -2(x-y) \frac{x}{y} - \frac{(x-y)^2}{y^2} x$

ottenute sommando  
membri a membro  
(1) e (2)

$$\begin{cases} 2(x-y) \frac{x}{y} + \frac{(x-y)^2}{y} = 0 & (1) \\ -2(x-y) \frac{x}{y} - \frac{(x-y)^2}{y^2} x = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) = 0 \\ 2(x-y) \frac{x}{y} + x \frac{(x-y)^2}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 (y-x) = 0 \\ x(x-y)(2y+x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=0 \\ y=0 \\ y=-x \end{cases}$$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

in cui la funzione  
non è definita

quindi tutti i punti della retta  $y=x$  (tranne  $(0,0)$ ) sono critici

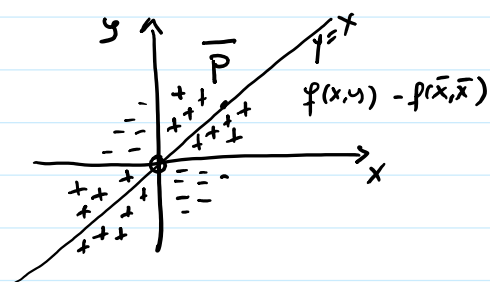
Il punto  $(0,0)$  non è accettabile come soluzione in quanto  $f$  non è definito in  $(0,0)$

Studiamo le nature dei punti della retta  $r: y=x$

Sia  $\bar{p} \in r - \{0\}$ ,  $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{x})$ ,  $\bar{x} \neq 0$ ;  $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$

$$\text{quindi } f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{x}) = f(x, y) = (x-y)^2 \frac{x}{y} \geq 0$$

se e solo se  $\bar{x} \geq 0 \wedge \bar{y} > 0$  o  $\bar{x} \leq 0 \wedge \bar{y} < 0$



Dunque ogni punto di  $r - \{0\}$  è di minimo locale non forte

B) È analogo ad A)

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$A) \begin{cases} y'' + y' + y = x^2 - 1 \\ y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$B) \begin{cases} y'' + y' + y = xe^x \\ y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \end{cases}$$

A) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è  $e^{-\frac{1}{2}x} \left( c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di similitudine

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c,$$

$$\tilde{y}'(x) = 2ax + b,$$

$$\tilde{y}''(x) = 2a.$$

Dunque deve essere  $2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2 - 1$   
cioè, uguagliando i coefficienti dei due polinomi al I e al II membro

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ 2a + b + c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 + 2 - 2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Dunque } \tilde{y}(x) = x^2 - 2x - 1$$

L'integrale generale dell'equazione  $y'' + y' + y = x^2 - 1$  è quindi

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left( c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + x^2 - 2x - 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Determiniamo le costanti  $c_1$  e  $c_2$  in modo che siano soddisfatte le condizioni iniziali  $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0$

Per  $x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$  otteniamo imponendo che  $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0$  otteniamo

$$c_2 e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 1 = 0 \quad (1)$$

$$y'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \left( c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + e^{-\frac{1}{2}x} \left( -c_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + 2x - 2$$

$$y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \cdot c_2 - e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2} c_1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Da } (1) \text{ otteniamo } c_2 = \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{3}\right) e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$$

Da (1) determino  $C_2 = \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\right) e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

e sostituisco in (2)

$$-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} C_1 + 2\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2 = 0$$

$$\text{da cui } C_1 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$$

B) È analogo ad A)

4) Calcolare

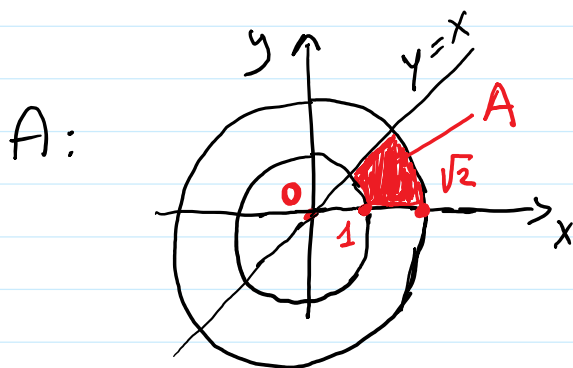
$$A) \int_A \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy$$

$$\text{dove } A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2, y < x, y > 0 \right\}$$

$$B) \int_A \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) dx dy$$

$$\text{dove } A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2, y > x, x > 0 \right\}$$

A)



In coordinate polari l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( 1 + \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta} \rho \right) d\rho d\theta = \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 \theta} \rho d\rho d\theta = \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \rho d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \\
&= \frac{1}{2} (2-1) \cdot \left. \tan \theta \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

B)  $\bar{E}$  analoga od A)