1) A- Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(e-2)^n}{e}$$

B- Stabilire se la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n - 2}{n^{3/2} - n}$$

converge

A- È una serie geometrica di ragione $e-2$ moltiplicata per $\frac{1}{e}$

e priva dei primi 3 termini. Poiché $e-2 \in (-1,1)$, essa converge

Per calcolarne la somma osserviamo che

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(e-2)^n}{e} = \frac{1}{e} \cdot (e-2)^3 \cdot \sum_{n=3}^{+\infty} (e-2)^{n-3} = \frac{1}{e}(e-2)^3 \sum_{h=0}^{+\infty} (e-2)^h$$

$$= \frac{(e-2)^3}{e} \cdot \frac{1}{1-(e-2)} = \frac{(e-2)^3}{e} \cdot \frac{1}{3-e}$$

B. $$\left| \frac{\cos n - 2}{n^{3/2} - n} \right| \leq \frac{3}{n^{3/2} - n} \sim \frac{3}{n^{3/2}} \qquad \forall n \geq 2$$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{n^{3/2}} \in \mathbb{R}$, la serie assegnata converge

assolutamente e dunque converge

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \left(x^2 y - e^{\sqrt{x^2 - y^2}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

e rappresentarlo graficamente sul piano.

Stabilire poi che f ha derivata direzionale nel punto $(1,0)$ secondo il versore $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

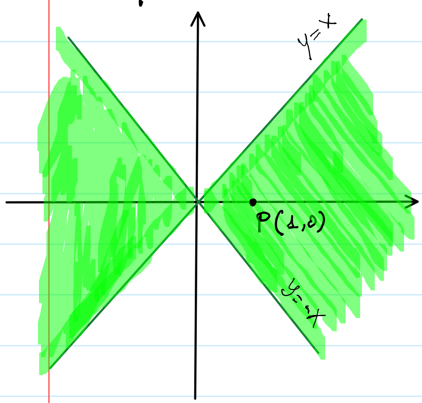
calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

$\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 0\}$

$$x^2 - y^2 \geq 0 \iff (x-y)(x+y) \geq 0 \iff \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$$

Dunque il dominio di f è dato dall'insieme tratteggiato in verde in figura



Come si vede il punto P è interno al dominio di f.

f, inoltre, ha derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^2 y - e^{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2xy - e^{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^2 y - e^{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2 - e^{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{(-2y)}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$$

Queste sono continue nell'interno del dominio di f.
Dunque f è differenziabile in P e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v = \frac{1}{3}(-e)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-e) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{3}(-e)^{-\frac{2}{3}}(1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(e^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{2}{3}}\right)$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = 2e^{-x} - x \qquad (*) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata a $(*)$ è $\lambda^2+\lambda=0$ che ha soluzioni $\lambda=0$ e $\lambda=-1$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

dunque $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Cerchiamo ora una soluzione delle equazioni

$$y'' + y' = 2e^{-x} \qquad (1)$$

Poiché -1 è soluzione dell'equazione caratteristica, applichiamo il metodo di similarità con

$$\tilde{y}_1(x) = kxe^{-x}$$

$$\tilde{y}_1'(x) = ke^{-x} - kxe^{-x}$$

$$\tilde{y}_1''(x) = -2ke^{-x} + kxe^{-x}$$

Quindi

$$-2ke^{-x} + \cancel{kxe^{-x}} + ke^{-x} - \cancel{kxe^{-x}} = 2e^{-x}$$

ossia

$$-ke^{-x} = 2e^{-x} \quad \text{da cui}$$

$$k = -2$$

$$y'' + y' = -x \qquad (2)$$

Poiché 0 è soluzione dell'equazione caratteristica, applichiamo il metodo di similarità con

$$\tilde{y}_2(x) = x(a+bx)$$

$$\tilde{y}_2'(x) = a+bx+bx$$

$$\tilde{y}_2''(x) = 2b$$

Quindi

$$2b + a + 2bx = -x$$

da cui

$$\begin{cases} 2b = -1 \\ 2b+a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ è una soluzione di $(*)$ e dunque il suo integrale generale è $\tilde{y}(x) = c_1 + c_2 e^{-x} - 2xe^{-x} + x\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$

Determiniamo c_1 e c_2 usando le condizioni iniziali:

$$\tilde{y}(0) = c_1 + c_2$$

$$\tilde{y}'(0) = -c_2 - 2 + 1$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

4) Si enunci la formula del cambio di variabili per un integrale doppio. Dimostrare poi che detto $J_\varphi(x,y)$ lo Jacobiano della trasformazione $\varphi = \varphi(x,y)$, lo Jacobiano della trasformazione inversa $\varphi^{-1} = \varphi^{-1}(u,v)$ è dato da

$$\frac{1}{J_\varphi(\varphi^{-1}(u,v))}$$

Si vedano, ad esempio, gli appunti della lezione 24