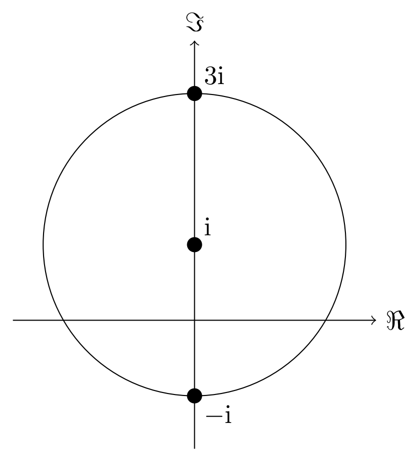
Possibile svolgimento della prova del 15 gennaio 2026 – modulo A

1) **(1a)** L'equazione

$$|z - \mathrm{i}|^2 = 4$$

è l'equazione della circonferenza di centro i e raggio 2 nel piano complesso (la distanza di z da i è uguale a $|z - i|$) la quale interseca l'asse dei numeri immaginari puri nei punti

$$z = 3\mathrm{i}, \qquad z = -\mathrm{i}.$$



(1b) Gli elementi di A sono tutti i valori della successione

$$a - n = \frac{3 - 2n}{n} = -2 + \frac{3}{n}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Poiché per $n \geq 1$ vale $0 < \frac{3}{n} \leq 3$, si ha

$$-2 < -2 + \frac{3}{n} \leq 1,$$

quindi A è limitato inferiormente e superiormente. Inoltre $\frac{3}{n}$ è strettamente decrescente e tende a 0, dunque la successione $a_n = -2 + \frac{3}{n}$ è strettamente decrescente e

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -2.$$

Ne segue

$$\sup A = a_1 = 1 \quad \text{(ed è il massimo di } A), \qquad \inf A = -2 \quad \text{(ma non è il minimo di } A).$$

2) Si consideri

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-2}} - e^{\frac{1}{x-5}} - \sqrt[3]{e}\,\log(x-1).$$

Dominio. Le due funzioni esponenziali richiedono $x \neq 2$ e $x \neq 5$, mentre il logaritmo richiede $x - 1 > 0$, cioè $x > 1$. Dunque

$$\mathrm{dom}(f) = (1, 2) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty).$$

Asintoti.

- Per $x \to 1^+$ si ha $\log(x-1) \to -\infty$ e quindi $-\sqrt[3]{e}\,\log(x-1) \to +\infty$, mentre le due funzioni esponenziali hanno limite finito. Quindi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty,$$

ossia $x = 1$ è asintoto verticale (a destra).

- Per $x \to 2^-$, $\frac{1}{x-2} \to -\infty$ dunque $e^{1/(x-2)} \to 0$, e gli altri termini ammettono limite finito; quindi
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0 - e^{-1/3} - \sqrt[3]{e}\,\log 1 = -e^{-1/3}.$$
Per $x \to 2^+$ invece $\frac{1}{x-2} \to +\infty$ e $e^{1/(x-2)} \to +\infty$, mentre gli altri termini ammettono gli stessi limiti finiti precedenti; quindi
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty.$$
Ne segue che $x = 2$ è solo asintoto verticale da destra.
- Per $x \to 5^-$ si ha $\frac{1}{x-5} \to -\infty$ dunque $e^{1/(x-5)} \to 0$ e
$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = e^{1/3} - 0 - \sqrt[3]{e}\,\log 4 = \sqrt[3]{e}\,(1 - \log 4) \in \mathbb{R}.$$
Per $x \to 5^+$ invece $\frac{1}{x-5} \to +\infty$ e quindi $-e^{1/(x-5)} \to -\infty$, mentre gli altri termini ammettono gli stessi limiti finiti precedenti; dunque
$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = -\infty,$$
cioè $x = 5$ è solo asintoto verticale da destra.
- Per $x \to +\infty$ si ha $e^{1/(x-2)} \to 1$ ed $e^{1/(x-5)} \to 1$, dunque $e^{1/(x-2)} - e^{1/(x-5)} \to 0$, mentre $-\sqrt[3]{e}\,\log(x-1) \to -\infty$. Quindi
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty,$$
per cui non c'è asintoto orizzontale.
- Vediamo se f ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Per $x \to +\infty$ si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/(x-2)}}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$; analogamente per l'altro termine esponenziale, mentre $\frac{-\sqrt[3]{e}\,\log(x-1)}{x} \to 0$ per la gerarchia degli infiniti. Quindi
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$
e poiché
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 0\cdot x = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
non c'è neanche asintoto obliquo.

Esistenza di uno zero in $(2, 5)$. La funzione f è continua in $(2, 5)$ (è somma di funzioni che sono composte da funzioni continue sull'intervallo $(2, 5)$). Poiché
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$
e
$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \sqrt[3]{e}\,(1 - \log 4) < 0$$
per l'estensione del teorema degli zeri al caso di funzioni continue su intervalli aperti esiste $\xi \in (2, 5)$ tale che $f(\xi) = 0$.

3) La media integrale su $[-1, 1]$ di
$$f(x) = (1 - 2x^3)^5 x^2$$
è
$$\frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} (1-2x^3)^5 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-2x^3)^5 x^2\,\mathrm{d}x.$$
Per calcolare l'integrale poniamo $u = 1 - 2x^3$, quindi $\mathrm{d}u = -6x^2\mathrm{d}x$ e $x^2\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\mathrm{d}u$. Quando $x = -1$, $u = 1 - 2(-1)^3 = 3$; per $x = 1$, $u = 1 - 2 = -1$. Quindi
$$\int_{-1}^{1} (1-2x^3)^5 x^2\,\mathrm{d}x = \int_{3}^{-1} u^5\Big(-\frac{1}{6}\mathrm{d}u\Big) = \frac{1}{6}\int_{-1}^{3} u^5\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\Big[\frac{u^6}{6}\Big]_{-1}^{3} = \frac{1}{36}(3^6 - 1).$$
Dunque la media integrale richiesta è
$$\frac{1}{72}(3^6 - 1).$$

4) **Teorema (derivata della funzione inversa).** Per enunciato e dimostrazione si vedano per esempio le slides della lezione 18.

Applicazione. Sia $f(x) = \log x + 2x$; f ha dominio $(0, +\infty)$ ed è continua sul suo dominio. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0 \quad \forall x > 0,$$

quindi f è strettamente crescente e quindi invertibile su $(0, +\infty)$. Per $y_0 = 2$ cerchiamo x_0 tale che $f(x_0) = 2$:

$$\log x_0 + 2x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1$$

(poiché $\log 1 = 0$). Quindi, per il teorema,

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$