Possibile svolgimento della prova del 7 febbraio 2025 – Modulo B

1) (a) La serie assegnata è geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$ e quindi converge perché $|-\frac{2}{3}| < 1$. La somma della serie è:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{16}{81} \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{135}$$

(b) Per la seconda serie, osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi dato che $n \geq 4$. Studiamo il comportamento del termine generale:

$$\frac{\log n}{n^2 \sqrt{\log(\log n)}} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log(\log n)}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

Il primo fattore è infinitesimo per la gerarchia degli infiniti e il secondo pure perché il denominatore tende a $+\infty$.

Quindi definitivamente:

$$\frac{\log(n)}{n^2 \sqrt{\log(\log(n))}} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

Per il criterio del confronto, poiché la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ è convergente (in quanto $3/2 > 1$), anche la serie data è convergente.

2) Calcoliamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-x^2-y^2} + (x^2+y^2-4)(-2x)e^{-x^2-y^2} = 2x(5-x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-x^2-y^2} + (x^2+y^2-4)(-2y)e^{-x^2-y^2} = 2y(5-x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$$

I punti critici si trovano risolvendo il sistema:

$$2x(5-x^2-y^2) = 0$$

$$2y(5-x^2-y^2) = 0$$

La prima equazione è soddisfatta da $x = 0$ o $x^2 + y^2 = 5$, ovvero da tutti i punti della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{5}$; Notiamo che se $x = 0$, la seconda equazione oltre che da $y = 0$, è soddisfatta da $y^2 = 5$ ovvero $y = \pm\sqrt{5}$, ma i punti critici $(0, \pm\sqrt{5})$ sono anch'essi punti di $\mathcal{C}$. Chiaramente se $x^2 + y^2 = 5$ la seconda equazione è anche soddisfatta. In definitiva i punti critici sono $(0,0)$ e i punti di $\mathcal{C}$.

Per studiare la natura dei punti critici:

1) In $(0,0)$, calcoliamo la matrice hessiana:

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Poiché entrambi gli autovalori sono positivi, $(0,0)$ è un punto di minimo locale forte.

2) Per i punti sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 5$, osserviamo che la funzione si può riscrivere in coordinate polari:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r^2-4)e^{-r^2} = g(r),$$

quindi in coordinate polari f dipende dalla sola variabile r (è cioè una funzione radiale)

Studiamo il segno della derivata di g:

$$g'(r) = 2r(1-r^2+4)e^{-r^2};$$

dato che $r > 0$ il suo segno dipende solo dal segno $5 - r^2$ che è positivo su $(0, \sqrt{5})$ e negativo per $r > \sqrt{5}$. Quindi g ha un massimo in $r = \sqrt{5}$, e di conseguenza tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 5$ sono punti di massimo relativo (non forti) per f.

Per il piano tangente in $(1, 0)$, intanto esso sicuramente esiste perché $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi differenziabile dappertutto. Calcoliamo:

$$f(1,0) = (-3)e^{-1}$$

$$f_x(1,0) = 2 \cdot 4e^{-1} = 8e^{-1}$$

$$f_y(1,0) = 0$$

L'equazione del piano tangente è:

$$z = -3e^{-1} + 8e^{-1}(x-1) + 0(y-0)$$

che si può riscrivere come:

$$z = 8e^{-1}x - 11e^{-1}$$

3) Per risolvere il problema di Cauchy, cerchiamo prima la soluzione generale dell'equazione omogenea:

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = -2 \pm i$$

Quindi la soluzione omogenea è:

$$y_h(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

Per trovare una soluzione particolare, usiamo il metodo di somiglianza. Poiché il termine noto è te^{-t}, cerchiamo una soluzione della forma:

$$y_p(t) = (at + b)e^{-t}$$

dove a e b sono costanti da determinare. Calcoliamo:

$$y_p'(t) = (a - at - b)e^{-t}$$

$$y_p''(t) = (-2a + at + b)e^{-t}$$

Sostituendo nell'equazione:

$$(-2a + at + b)e^{-t} + 4(a - at - b)e^{-t} + 5(at + b)e^{-t} = te^{-t}$$

Raccogliendo e^{-t}:

$$(-2a + at + b + 4a - 4at - 4b + 5at + 5b)e^{-t} = te^{-t}$$

Raccogliendo i termini in t otteniamo:

$$(2at + 2a + 2b)e^{-t} = te^{-t}$$

Uguagliando i coefficienti dei due polinomi di grado 1 al primo e al secondo membro otteniamo:

$$2a = 1$$

$$2a + 2b = 0$$

Da cui:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

Quindi la soluzione particolare è:

$$y_p(t) = \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{-t}$$

La soluzione generale è:

$$y(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{-t}$$

Usando le condizioni iniziali:

$$y(0) = 1 \implies c_1 - \frac{1}{2} = 1$$

$$y'(0) = 0 \implies -2c_1 + c_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Da cui:

$$c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = 2$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(t) = e^{-2t}\left(\frac{3}{2}\cos t + 2\sin t\right) + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{-t}.$$

4) Un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse x se esistono un intervallo $[a, b]$ e due funzioni continue $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $\varphi_1 \leq \varphi_2$ tali che:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

Per un tale insieme, se $f \in C^0(A)$, vale la formula di riduzione:

$$\iint_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

Per l'insieme A dato, limitato dalle curve $y = x^2$ e $y = 2x$, considerandolo come normale rispetto all'asse x, e ricavando l'ascissa del secondo punto di intersezione delle curve (quella del primo punto di intersezione è 0 ovviamente) si trova $x = 2$. Quindi:

$$\iint_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} f(x, y)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

Per invertire l'ordine di integrazione, consideriamo A come normale rispetto all'asse y. Dato che $y \geq 0$, (l'insieme si trova nel primo quadrante), le equazioni $y = x^2$ e $y = 2x$ diventano:

$$x = \sqrt{y} \quad \text{e} \quad x = \frac{y}{2}$$

Si ha $y \in [0, 4]$ e $\sqrt{y} \geq \frac{y}{2}$. Quindi la formula di riduzione diventa:

$$\iint_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$$