Politecnico di Bari
CUC Ingegneria Civile
L3 Ingegneria Ambientale e del Territorio
AA 2006 - 2007

Corso di Analisi Matematica - Tracce di esame

Docenti: Prof.ssa G. Cerami, Dott. E. Caponio

[1-3.tex] Dare la definizione estremo superiore ed estremo inferiore di una successione.

Determinare estremo superiore ed estremo inferiore (eventualmente massimo e minimo) della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i cui termini sono definiti da

$$a_n = \begin{cases} \log\left(e - \frac{2}{n}\right) & n \text{ dispari} \\ \frac{2n}{n+2} & n \text{ pari} \end{cases}$$

[1-2.tex] Dare la definizione estremo superiore ed estremo inferiore di una successione.

Determinare estremo superiore ed estremo inferiore (eventualmente massimo e minimo) della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i cui termini sono definiti da

$$a_n = \begin{cases} \log\left(2 - \frac{1}{n}\right) & n \text{ dispari} \\ e^{-n} & n \text{ pari} \end{cases}$$

[1-1.tex] Dare la definizione estremo superiore ed estremo inferiore di una successione.

Determinare estremo superiore ed estremo inferiore (eventualmente massimo e minimo) della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i cui termini sono definiti da

$$a_n = \begin{cases} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) & n \text{ dispari} \\ \frac{n-1}{n+1} & n \text{ pari} \end{cases}$$

[2-3.tex] Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

[2-2.tex] Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = x\log\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

[2-1.tex] Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = xe^{\frac{|x+1|}{x}}$$

[3-2.tex] Enunciare il teorema di esistenza degli zeri ed utilizzarlo opportunamente per provare che l'equazione

$$e^x - e = \arctan(-2x) - xe^x$$

ha soluzione unica nell'intervallo $[0,1]$.

[3-1.tex] Enunciare il teorema di esistenza degli zeri ed utilizzarlo opportunamente per provare che l'equazione

$$x^2 - 1 = \log(1+x^2) - 2x$$

ha soluzione unica nell'intervallo $[0,1]$.

[4-2.tex] Dare la definizione di funzione strettamente crescente e di funzione convessa in un intervallo.

Studiare, poi, segno monotonia e convessità, indicando anche punti di minimo, di massimo e di flesso, della funzione

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2} + \sin x.$$

[4-1.tex] Dare la definizione di funzione strettamente crescente e di funzione convessa in un intervallo.

Studiare, poi, segno, monotonia e convessità della funzione, indicando anche punti di minimo, di massimo e di flesso, della funzione

$$f(x) = 2\sin x + \sin(2x).$$

[5-3.tex] Dare la definizione di serie numerica convergente e di serie numerica assolutamente convergente. Studiare poi il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan(3^n)}{2^n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\log(n^2)} - \frac{1}{n^2} \right).$$

[5-2.tex] Dare la definizione di serie numerica convergente e di serie numerica assolutamente convergente. Studiare poi il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(-1)^n n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(e^n)}{3^n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2}{\log(n^4)} - \frac{1}{n^3} \right).$$

[5-1.tex] Dare la definizione di serie numerica convergente e di serie numerica assolutamente convergente. Studiare poi il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos n}{e^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right).$$

[1-3.tex] Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n3^n}}{n+1}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^4}{3^n-1}.$$

[1-2.tex] Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n^4+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)4^n}.$$

[1-1.tex] Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n-1}{n^4}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{2^n+1}.$$

[2-3.tex] Dare la definizione di funzione continua e di funzione derivabile in un punto.
Studiare la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x\log(x^2) & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

[2-2.tex] Dare la definizione di funzione continua e di funzione derivabile in un punto.
Studiare la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

[2-1.tex] Dare la definizione di funzione continua e di funzione derivabile in un punto.
Studiare la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan^2 x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

[3-3.tex] Calcolare il seguente limite, mostrando i passaggi necessari per arrivare al risultato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\log(1+2x^4)}$$

[3-2.tex] Calcolare il seguente limite, mostrando i passaggi necessari per arrivare al risultato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\log(1+2x)}$$

[3-1.tex] Calcolare il seguente limite, mostrando i passaggi necessari per arrivare al risultato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\log(1+3x^2)}$$

[4-2.tex] Enunciare il Teorema del valor medio di Lagrange.
Utilizzarlo, poi, per dimostrare che se f è una funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 3$ e $f(1) = 4$ allora $f(-1) < -2$.

[4-1.tex] Enunciare il Teorema del valor medio di Lagrange.
Utilizzarlo, poi, per dimostrare che se f è una funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 2$ e $f(0) = -3$ allora $f(4) < 5$.

[5-3.tex] Determinare e rappresentare graficamente l'nsieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\log\left(\frac{x+2}{y-1}\right)}{\cos(x^2+y^2)}.$$

[5-2.tex] Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\log\left(\frac{x}{y-1}\right)}{\cos(x^2+y^2)}.$$

[5-1.tex] Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\log\left(\frac{x-1}{y+1}\right)}{\sin(x^2+y^2)}.$$

[6-2.tex] Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 - \log(x-y)$$

e studiarne la natura.
[6-1.tex] Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 + \log(y-x)$$

e studiarne la natura.
[7-3.tex] Calcolare il seguente integrale:

$$\int\!\!\int_A xe^{(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq x+1, \quad -x \leq y \leq -x+1\right\}.$
[7-2.tex] Calcolare il seguente integrale:

$$\int\!\!\int_A y\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x \leq y \leq -x+1, \quad x-1 \leq y \leq x\right\}.$
[7-1.tex] Calcolare il seguente integrale:

$$\int\!\!\int_A x\log(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x+1 \leq y \leq -x+2, \quad x-1 \leq y \leq x\right\}.$

A.A 2006/2007 Appello del 1 Marzo 2007 Traccia A

1) Dare la definizione di serie convergente e di serie divergente negativamente.

Verificare che la successione $\left\{3\sin\frac{1}{2n^{3/2}}\right\}$ è asintotica con la successione $\left\{\frac{3}{2n^{3/2}}\right\}$. Utilizzare questa informazione per studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\sin\frac{1}{2n^{3/2}}$.

2) Enunciare il Teorema di esistenza degli zeri.

Utilizzarlo per provare che l'equazione $x^3 - 1 = x$ ha una soluzione positiva. Dimostrare, infine, che non esistono altre soluzioni positive.

3) Calcolare il seguente limite, scrivendo esplicitamente i passaggi essenziali per giungere al risultato:

$$\lim_{x\to 0^+} (1-\cos^2 x)^{\log(1+x^2)}.$$

4) Dare la definizione di funzione monotona strettamente decrescente in un intervallo.

Studiare poi la monotonia ed individuare gli eventuali punti di minimo e di massimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Tracciare, infine, un grafico qualitativo di f.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \log(|x|(y^2-1)) + \sqrt{\frac{y-x-1}{y+x-1}}.$$

6) Dare la definizione di derivata direzionale in un punto per una funzione di due variabili reali. Enunciare una condizione sufficiente per l'esistenza delle derivata direzionale in un punto secondo una qualsiasi direzione ed enunciare il Teorema di rappresentazione conseguente. Utilizzare, infine, quest'ultimo per calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = 2x\log(x-y) + \sin^2(\pi y)$$

nel punto di coordinate $(0,-1)$, secondo la direzione $v = (1/3, 2\sqrt{2}/3)$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y < x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 1 Marzo 2007 Traccia B

1) Dare la definizione di serie convergente e di serie divergente positivamente.

Verificare che la successione $\left\{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ è asintotica con la successione $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$. Utilizzare questa informazione per studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

2) Enunciare il Teorema di esistenza degli zeri.

Utilizzarlo per provare che l'equazione $x^3 - 3 = x^2$ ha una soluzione positiva. Dimostrare, infine, che non esistono altre soluzioni positive.

3) Calcolare il seguente limite, scrivendo esplicitamente i passaggi essenziali per giungere al risultato:

$$\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)}.$$

4) Dare la definizione di funzione monotona crescente in un intervallo.

Studiare la monotonia ed individuare gli eventuali punti di minimo e di massimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ xe^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Tracciare, infine, un grafico qualitativo di f.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \log(|y|(x^2 - 1)) + \sqrt{\frac{y - x + 1}{y + x + 1}}.$$

6) Dare la definizione di derivata direzionale in un punto per una funzione di due variabili reali. Enunciare una condizione sufficiente per l'esistenza delle derivata direzionale in un punto secondo una qualsiasi direzione ed enunciare il Teorema di rappresentazione conseguente. Utilizzare, infine, quest'ultimo per calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x, y) = ye^{x^2 - y} + \cos^2(\pi x)$$

nel punto di coordinate $(-1, 0)$, secondo la direzione $v = (1/4, \sqrt{15}/4)$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \left(\frac{y^2 x}{x^2 + y^2} - 3\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ x < y,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 1 Marzo 2007 Traccia C

1) Dare la definizione di serie convergente e di serie divergente positivamente.

Verificare che la successione $\left\{2\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$ è asintotica con la successione $\left\{\frac{2}{\sqrt{n}}\right\}$. Utilizzare questa informazione per studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

2) Enunciare il Teorema di esistenza degli zeri.

Utilizzarlo per provare che l'equazione $x^4 - 3 = x$ ha una soluzione reale. Dimostrare, infine, che le soluzioni reali sono solo due.

3) Calcolare il seguente limite, scrivendo esplicitamente i passaggi essenziali per giungere al risultato:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{e^x - 1}.$$

4) Dare la definizione di funzione monotona decrescente in un intervallo.

Studiare la monotonia ed individuare gli eventuali punti di minimo e di massimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Tracciare, infine, un grafico qualitativo di f.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y^2 - y}{|x|}} + \log\left(\frac{y-x}{y-x+1}\right).$$

6) Dare la definizione di derivata direzionale in un punto per una funzione di due variabili reali. Enunciare una condizione sufficiente per l'esistenza delle derivata direzionale in un punto secondo una qualsiasi direzione ed enunciare il Teorema di rappresentazione conseguente. Utilizzare, infine, quest'ultimo per calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = x\arctan(x-y) + \cos^2(\pi x)$$

nel punto di coordinate $(0,-2)$, secondo la direzione $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} - 2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x,\ y < x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 1 Marzo 2007 Traccia D

1) Dare la definizione di serie convergente e di serie divergente positivamente.

Verificare che la successione $\left\{\frac{2n^2-1}{n^3+1}\right\}$ è asintotica con la successione $\left\{\frac{2}{n}\right\}$. Utilizzare questa informazione per studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^3+1}$.

2) Enunciare il Teorema di esistenza degli zeri.

Utilizzarlo per provare che l'equazione $x^4 - 1 = x^3$ ha una soluzione reale. Dimostrare, infine, che le soluzioni reali sono solo due.

3) Calcolare il seguente limite, scrivendo esplicitamente i passaggi essenziali per giungere al risultato:

$$\lim_{x\to 0^+} (1-\cos^2 x)^{e^{x^2}-1}.$$

4) Dare la definizione di funzione monotona strettamente crescente in un intervallo.

Studiare la monotonia ed individuare gli eventuali punti di minimo e di massimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Tracciare, infine, un grafico qualitatio di f.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-x}{|y|}} + \log\left(\frac{y-x}{y-x-1}\right).$$

6) Dare la definizione di derivata direzionale in un punto per una funzione di due variabili reali. Enunciare una condizione sufficiente per l'esistenza delle derivata direzionale in un punto secondo una qualsiasi direzione ed enunciare il Teorema di rappresentazione conseguente. Utilizzare, infine, quest'ultimo per calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = x\sin(x-\pi y) + x^2$$

nel punto di coordinate $(0,-1)$, secondo la direzione $v = (2/3, \sqrt{5}/3)$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \left(\frac{x^3 y}{x^2+y^2} - 1\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x,\ 0 < y,\ y < x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 4 Maggio 2007 Traccia A

1) Dare la definizione di serie numerica e di serie convergente

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\frac{1}{3^n}-1)3^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2-2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1+\log(n^3)}{n^{5/2}}.$$

2) Dare la definizione di funzione pari e di funzione dispari.

Stabilire quali fra le seguenti funzioni sono pari, dispari, nè pari nè dispari:

$$f(x)=|x|-\cos x, \qquad g(x)=\frac{2x}{1+x^2}, \qquad h(x)=3^{\sin x}, \qquad k(x)=\frac{2+x}{|x|}.$$

3) Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{2x-1}}.$$

4) Dare la definizione di punto di minimo assoluto e di minimo relativo per una funzione.

Studiare poi il segno e la monotonia della funzione

$$f(x)=\frac{2\log|x|-1}{3x},$$

individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2-1)^{1/2}\log_{1/2}(x-y+1)}.$$

Dire inoltre, motivando la risposta, se l'insieme di definizione è aperto o chiuso.

6) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto $P(x_0,y_0)$ di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Stabilire, poi, se la funzione

$$f(x,y)=e^{-x^2y}\tan(x-y)$$

è differenziabile nel punto nel punto P di coordinate $(1,1)$ e in tal caso scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P.

7) Rappresentare nel piano l'insieme

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x,\ \frac{1}{2x}\le y\le\frac{1}{x},\ x\le y\le 2x\right\}.$$

Calcolare poi l'integrale

$$\iint_A \frac{xy^3-y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2006/2007 Appello del 4 Maggio 2007 Traccia B

1) Dare la definizione di serie numerica e di serie divergente positivamente.

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2-\frac{1}{4^n})4^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+\pi}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(n+1)+\log^2 n}{n^{7/2}}.$$

2) Dare la definizione di funzione pari e di funzione dispari.

Stabilire quali fra le seguenti funzioni sono pari, dispari, nè pari nè dispari:

$$f(x)=\frac{1-x^2}{x}, \qquad g(x)=|\sin x|-x^2, \qquad h(x)=2^{\cos x}, \qquad k(x)=(x-1)|x|.$$

3) Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x)=(1-x)e^{-\frac{1}{3x-1}}.$$

4) Dare la definizione di punto di massimo assoluto e di punto di massimo relativo per una funzione.

Studiare poi il segno e la monotonia della funzione

$$f(x)=\frac{1-3\log|x|}{2x},$$

individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y)=\frac{1}{(1-y^2)^{1/2}\log_{1/3}(x+y-1)}.$$

Dire inoltre, motivando la risposta, se l'insieme di definizione è aperto o chiuso.

6) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Stabilire, poi, se la funzione

$$f(x,y)=\log(x^2-y)\tan(xy)$$

è differenziabile nel punto P di coordinate $(0,-1)$ e in tal caso scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P.

7) Rappresentare nel piano l'insieme

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x,\ \frac{1}{x}\le y\le\frac{2}{x},\ \frac{x}{3}\le y\le x\right\}.$$

Calcolare poi l'integrale

$$\iint_A \frac{x^2y^4-y^2}{x^2}\sin\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2006/2007 Appello del 4 Maggio 2007 Traccia C

1) Dare la definizione di serie numerica e di serie divergente negativamente.

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(e-\frac{1}{e^n}\right)e^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n^3-\pi}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-2+n\log n}{n^{5/2}}.$$

2) Dare la definizione di funzione pari e di funzione dispari.

Stabilire quali fra le seguenti funzioni sono pari, dispari, nè pari nè dispari:

$$f(x)=x2^x, \qquad g(x)=\cos x-x^2, \qquad h(x)=\frac{(1+x^4)}{x^3}, \qquad k(x)=(x-1)(x+1).$$

3) Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x)=(x-2)e^{-\frac{1}{x-1}}.$$

4) Dare la definizione di punto di minimo assoluto e di punto di minimo relativo per una funzione.

Studiare poi il segno e la monotonia della funzione

$$f(x)=\frac{\log|2x|-1}{x},$$

individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y)=\frac{1}{(y^2-4)^{1/2}\log_{1/2}(2x-y+1)}.$$

Dire inoltre, motivando la risposta, se l'insieme di definizione è aperto o chiuso.

6) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Stabilire, poi, se la funzione

$$f(x,y)=e^{2x-y^2}\tan(xy)$$

è differenziabile nel punto nel punto P di coordinate $(-1,0)$ e in tal caso scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P.

7) Rappresentare nel piano l'insieme

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0,\ \frac{2}{x}\le y\le\frac{1}{x},\ x\le y\le\frac{x}{2}\right\}.$$

Calcolare poi l'integrale

$$\iint_A \frac{xy^3-y^2}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2006/2007 Appello del 4 Maggio 2007 Traccia D

1) Dare la definizione di serie numerica e di serie indeterminata.

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\pi-\frac{\pi}{2^n}\right)2^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n^2-e}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+n+n\log(n^2)}{n^{5/2}}.$$

2) Dare la definizione di funzione pari e di funzione dispari.

Stabilire quali fra le seguenti funzioni sono pari, dispari, nè pari nè dispari:

$$f(x)=(x-2)^2, \qquad g(x)=e^{|x|}-\cos x, \qquad h(x)=x^3 3^x, \qquad k(x)=\frac{x}{2+x^4}.$$

3) Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x)=(x+3)e^{-\frac{1}{2x+1}}.$$

4) Dare la definizione di punto di massimo assoluto e di punto di massimo relativo per una funzione.

Studiare poi il segno e la monotonia della funzione

$$f(x)=\frac{2-\log|x|}{2x},$$

individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2-4)^{1/2}\log_{1/4}(x-2y+1)}.$$

Dire inoltre, motivando la risposta, se l'insieme di definizione è aperto o chiuso.

6) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Stabilire, poi, se la funzione

$$f(x,y)=e^{xy^2}\tan(x+y)$$

è differenziabile nel punto nel punto P di coordinate $(-1,1)$ e in tal caso scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P.

7) Rappresentare nel piano l'insieme

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0,\ \frac{1}{x}\le y\le\frac{1}{2x},\ 2x\le y\le x\right\}.$$

Calcolare poi l'integrale

$$\iint_A \frac{x^2y^4+y^2}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2006/2007 Appello del 2 Luglio 2007 Traccia A

1) Dare la definizione di successione divergente negativamente.
Verificare poi, usando la definizione, che

$$\lim_{n\to+\infty} \log \frac{1}{n} = -\infty.$$

2) Stabilire il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} - \sin(n^2)}{(n-1)^{3/2}}.$$

3) Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax-2a)}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \\ 4^{-\frac{1}{x-2}} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

4) Enunciare il teorema della media integrale.
Applicarlo poi per stabilire (senza calcolare l'integrale!) che

$$\int_{-7}^{-1} \frac{\sin(x^2 + \sqrt[5]{x} + x)}{3} \mathrm{d}x$$

non può essere minore di -2.

5) Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, limitato in $\mathbb{R}^n$. Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \frac{\arcsin(x^2 - y^2)}{\sqrt[4]{3 - x^2 - y^2}}.$$

Dire inoltre, motivando la risposta, se l'insieme di definizione è aperto, chiuso, limitato.

6) Determinare gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x, y) = (x-1)^4 + (y+1)^4 - 2(x-y-2)^2 + 2.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x-y}{(x^2-y^2)^2+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme del piano

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x - y \le 2,\ 0 \le x + y \le 1\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 2 Luglio 2007 Traccia B

1) Dare la definizione di successione divergente positivamente.

Verificare poi, usando la definizione, che

$$\lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty.$$

2) Stabilire il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{n} - \frac{1}{4}}{(n-2)^{5/4}}.$$

3) Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 2^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

4) Enunciare il teorema della media integrale.

Applicarlo poi per stabilire (senza calcolare l'integrale!) che

$$\int_{-3}^{-1} \frac{\cos(x^4 + \sqrt[3]{x} + x^2)}{6} \mathrm{d}x$$

non può essere maggiore di $\frac{1}{3}$.

5) Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, limitato in $\mathbb{R}^n$. Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\arccos(y^2 - x^2)}{\sqrt[6]{2 - x^2 - y^2}}.$$

Dire inoltre, motivando la risposta, se l'insieme di definizione è aperto, chiuso, limitato.

6) Determinare gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x,y) = (x-2)^4 + (y-1)^4 - 2(x-y-1)^2 + 1.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{y-x}{(y^2-x^2)^2+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme del piano

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x - y \le 0,\ 0 \le x + y \le 2\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 2 Luglio 2007 Traccia C

1) Dare la definizione di successione convergente.

Verificare poi, usando la definizione, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

2) Stabilire il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} - \cos(n^3)}{(n-1)^{4/3}}.$$

3) Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin(ax)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

4) Enunciare il teorema della media integrale.

Applicarlo poi per stabilire (senza calcolare l'integrale!) che

$$\int_{-7}^{-1} \frac{\sin(x^2 + \sqrt[5]{x} + x)}{3} \mathrm{d}x$$

è minore di 2.

5) Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, connesso in $\mathbb{R}^n$. Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\arcsin(2x^2 + \frac{1}{2}y^2)}{\sqrt[4]{-1 - x^2 + y^2}}.$$

Dire inoltre, motivando la risposta, se l'insieme di definizione è aperto, chiuso, connesso.

6) Determinare gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x,y) = (x+2)^4 + y^4 - 2(x - y + 2)^2 - 1.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{y + x}{(x-y)(x+y-2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme del piano

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x + y \le 0,\ 1 \le x - y \le 2\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 2 Luglio 2007 Traccia D

1) Dare la definizione di successione convergente.
Verificare poi, usando la definizione, che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=0.$$

2) Stabilire il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(n^4)-\frac{1}{4}}{(n-1)^{7/4}}.$$

3) Stabilire per quali valori del parametro $a\in\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x-1}} & \text{se } x<1\\ 0 & \text{se } x=1\\ \frac{\sin(ax-a)}{x-1} & \text{se } x>1\end{cases}$$

è continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

4) Enunciare il teorema della media integrale.
Applicarlo poi per stabilire (senza calcolare l'integrale!) che

$$\int_{-3}^{-1}\frac{\cos(x^4+\sqrt[3]{x}+x^2)}{6}\mathrm{d}x$$

non può essere minore di $-\frac{1}{3}$.

5) Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, connesso in $\mathbb{R}^n$. Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y)=\frac{\arcsin(\frac{1}{2}x^2+y^2)}{\sqrt[4]{x^2-y^2-1}}.$$

Dire inoltre, motivando la risposta, se l'insieme di definizione è aperto, chiuso, connesso.

6) Determinare gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x,y)=x^4+(y-1)^4-2(x-y+1)^2+1.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\iint_A\frac{x-y}{(x+y)(1-x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme del piano

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\le x+y\le -1,\ -1\le x-y\le 0\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 17 Luglio 2007 Traccia A

1) Dare la definizione di estremo inferiore di un insieme di numeri reali.

Determinare estremo superiore ed inferiore (eventualmente massimo e minimo) di

$$\left\{\frac{3n-6}{2n^2-8n+8}\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}}.$$

2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{\sin 3x}.$$

3) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x}e^x & \text{se } x>0\\ 1-x^2 & \text{se } x\le 0\end{cases}$$

4) Enunciare il Teorema di derivazione delle funzioni inverse e utilizzarlo, dopo averne verificato le ipotesi, per calcolare la derivata in $y=e$ della funzione inversa $f^{-1}(y)$ di

$$f(x)=\sqrt{x}e^x.$$

5) Scrivere la definizione di derivata direzionale per una funzione di due variabili reali.

Stabilire che la funzione

$$f(x,y)=\frac{\arctan(xy)}{x^2-y^2},$$

ha derivate direzionali secondo una qualsiasi direzione in ogni e punto del suo insieme di definizione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$, dove $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

6) Determinare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione

$$y''-(1+\alpha)y'+\alpha y=e^x.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x}{y}\tan(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme del piano

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x\le y\le x,\ \frac{2}{x}\le y\le\frac{1}{x}\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 17 Luglio 2007 Traccia B

1) Dare la definizione di estremo superiore di un insieme di numeri reali.

Determinare estremo superiore ed inferiore (eventualmente massimo e minimo) di

$$\left\{\frac{4-n^2}{6+3n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}.$$

3) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\geq 0\\ \frac{x-1}{x}e^{-x} & \text{se } x<0\end{cases}$$

4) Enunciare il Teorema di derivazione delle funzioni inverse e utilizzarlo, dopo averne verificato le ipotesi, per calcolare la derivata in $y=3$ della funzione inversa $f^{-1}(y)$ di

$$f(x)=1+2x+\log x.$$

5) Scrivere la definizione di derivata direzionale per una funzione di due variabili reali.

Stabilire che la funzione

$$f(x,y)=\frac{\sin(x^2y^2)}{x-y},$$

ha derivate direzionali secondo una qualsiasi direzione in ogni e punto del suo insieme di definizione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(\pi,0)$, dove $v=\left(\frac{1}{2},-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$.

6) Determinare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione

$$y''+\alpha y'=e^{3x}.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x}{y}\arctan(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme del piano

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x\leq y\leq x,\ \frac{2}{x}\leq y\leq\frac{1}{x}\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 17 Settembre 2007 Traccia A

1) Dare la definizione di minimo di un insieme.

Stabilire poi, quali dei seguenti insiemi ha minimo e nel caso calcolarlo:

$$A = \left\{ 3 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x-1} > 1 \right\},$$
$$C = \mathbb{N} \cap [\frac{1}{2}, e].$$

2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^{x+\frac{1}{x}} - \log x}{1 - x^2}.$$

3) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \log\left(|x|^3\right) - x.$$

4) Enunciare il Teorema di Lagrange.

Applicarlo, poi, per dimostrare che una funzione definita su un intervallo aperto e avente derivata nulla è costante.

5) Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, connesso.

Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \left(\frac{9x^2 - y^2}{x - y^2 + 1} \right)^{xy}.$$

Dire, motivando la risposta, se tale insieme è aperto, chiuso, connesso.

6) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Determinare poi l'insieme su cui la funzione

$$f(x, y) = \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}} + y^2}}{3x - y + 1}$$

è differenziabile.

7) Calcolare l'integrale

$$\iint_A (x - y - 1) \log(x^2 - y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme del piano

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x < y < 2 - x,\ x - 2 < y < x - 1 \right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 17 Settembre 2007 Traccia B

1) Dare la definizione di massimo di un insieme.

Stabilire poi, quali dei seguenti insiemi ha massimo e nel caso calcolarlo:

$$A = \left\{2 - \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \colon \sqrt{x-2} < 1\right\},$$
$$C = \mathbb{Z} \cap [-e, e].$$

2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{x-\frac{1}{x}} + \log x}{2 - x^2}.$$

3) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x) = x - 2x^2 + \log(|x|^5).$$

4) Enunciare il Teorema di Lagrange.

Applicarlo, poi, per dimostrare che una funzione definita su un intervallo aperto e avente derivata nulla è costante.

5) Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, connesso.

Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \left(\frac{4y^2 - x^2}{x - y^2 - 1}\right)^{y-x}.$$

Dire, motivando la risposta, se tale insieme è aperto, chiuso, connesso.

6) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Determinare poi l'insieme su cui la funzione

$$f(x,y) = \frac{3^{\frac{1}{\sqrt{y}} - x^2}}{x + 2y - 3}.$$

è differenziabile.

7) Calcolare l'integrale

$$\iint_A (x + y - 1)\log(x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme del piano

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2 - x < y < 3 - x,\ x - 2 < y < x - 1\right\}.$$

A.A 2006/2007 Appello del 26 Novembre 2007 Traccia A

1) Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)n}{(2-\sin n)2^n}.$$

2) Determinare dominio ed immagine delle seguenti funzioni:

$$f(x) = (2^x - 1)^{\frac{1}{4}},$$
$$g(x) = \sin(e^x),$$
$$h(x) = \frac{x}{|x|}(2x-1).$$

Dire anche, motivando la risposta, quali sono invertibili e in caso positivo scrivere la funzione inversa.

3) Enunciare il Teorema di Waierstrass. Fornire un esempio di una funzione che non soddisfa entrambe le ipotesi del teorema ma che ha massimo e minimo assoluto.

4) Studiare insieme di definizione, asintoti, monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x) = \frac{|x-1| - x}{x-1} e^x.$$

5) Rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{(x-1)(y-2)}\,\log(y - x + 2).$$

Dire, motivando la risposta, se tale insieme è aperto o chiuso, né chiuso né aperto.

6) Dare la definizione di derivata direzionale ed enunciare una condizione sufficiente per l'esistenza della derivata direzionale secondo un qualsiasi versore. Data la funzione

$$f(x,y) = y^3 e^{2x^2},$$

stabilire se esiste la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1)$ secondo un qualsiasi versore v. Stabilire, inoltre, per quali versori $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1)$ è nulla e per quali è massima.

7) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{y^2 e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme del piano

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4 < x^2 + y^2 < 9,\ \sqrt{3}\,x < y, 0 < y \right\}.$$