1) - a) Calcolare $(1-\sqrt{3}i)^9$

Scriviamo $1-\sqrt{3}i$ in forma polare:

$|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$. Cerchiamo un argomento di $1-\sqrt{3}i$

$\begin{cases} 2\cos\theta = 1 \\ 2\sin\theta = -\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ da cui $\theta = -\frac{\pi}{3}$;

quindi $1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ e quindi

$(1-\sqrt{3}i)^9 = 2^9\left(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)\right) = -2^9$

1) - b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$f(x) = \operatorname{arctg}\left(e^{-x^2+1}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(x^{\sqrt{2}}\right)$

dom f: $\begin{cases} x^{\sqrt{2}} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\{ x > 0$; dom $f = (0,+\infty)$

f è somma delle funzioni $f_1(x) = \operatorname{arctg}\left(e^{-x^2+1}\right)$ e $f_2(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^{\sqrt{2}}\right)$

$f_1 = x \in (0,+\infty) \longmapsto -x^2+1 \longmapsto e^{-x^2+1} \longmapsto \operatorname{arctg}\left(e^{-x^2+1}\right)$

poiché $x \in (0,+\infty) \mapsto -x^2+1$ è strett. decrescente, f_1 è strett. decrescente dato che le altre due funzioni componenti sono strett. crescenti

$f_2 = x \in (0,+\infty) \mapsto x^{\sqrt{2}} \longmapsto \log_{\frac{1}{2}}\left(x^{\sqrt{2}}\right)$

anche f_2 è strett. decrescente in quanto ha componente interna strett. crescente e componente esterna strett. decrescente.

Dunque f è strett. decrescente.

$f \in C^0((0,+\infty))$ e quindi $\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \operatorname{arctg} 0 - \infty = -\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \operatorname{arctg} e + \infty = +\infty$

cioè $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

2) Determinare il dominio e gli asintoti della funzione

$f(x) = \left|\log(9-x^2) - 1\right|$

Determinarne poi, gli eventuali punti di minimo e massimo locale e assoluto.

$f(x) = |\log(9-x^2) - 1|$

Determinarne poi, gli eventuali punti di minimo e massimo locale e assoluto.

Scrivere infine la formula di McLaurin di ordine 2, con il resto di Peano, per f

dom f: $\quad 9 - x^2 > 0 \iff -3 < x < 3$; $\quad$ dom $f = (-3,3)$

$f \in C^0((-1,1))$ quindi gli unici asintoti da cercare sono gli eventuali asintoti verticali in -3 e 3

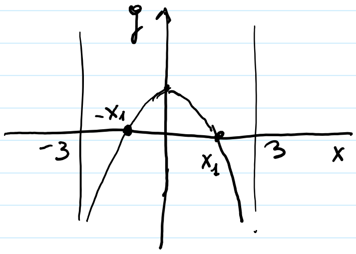
$$\lim_{x \to \pm 3} \log(9-x^2) - 1 = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to \pm 3} f(x) = +\infty$$

quindi $x=3$ e $x=-3$ sono asintoti verticali per f

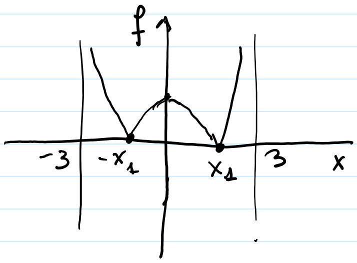
Detta $g(x)$ la funzione $g(x) = \log(9-x^2) - 1$

$g'(x) = \frac{1}{9-x^2}(-2x)$ quindi g è strett. crescente per $x<0$ e strett. decrescente per $x>0$, g ha un massimo (assoluto) in $x=0$

$g(0) = \log(9) - 1 > 0$



Da questo deduciamo che f ha il seguente grafico



quindi f ha un massimo locale in $x=0$ e punti di minimo assoluto in x_1 e $-x_1$ essendo questi gli zeri di g:

$$\log(9-x^2) - 1 = 0 \iff 9 - x^2 = e \iff x = \pm\sqrt{9-e}$$

f è sicuramente derivabile due volte in 0 dato che $g(0) > 0$

$f'(0) = 0$ dato che 0 è un massimo locale interno al dominio di f. Se $x \neq x_1, x_2$:

$f'(x) = \text{sign}(g(x)) \cdot g'(x)$ e

$$f''(x) = \overbrace{\text{sign}(g(x))'}^{=0} g'(x) + \text{sign}(g(x))\, g''(x) = \text{sign}(g(x))\, g''(x)$$

$$\text{sign}(g(x)) \frac{-2(9-x^2) + 2x(-2x)}{(9-x^2)^2} = \text{sign}(g(x)) \frac{-18 + 2x^2 - 4x^2}{(9-x^2)^2} = -\text{sign}(g(x)) \frac{4x^2+18}{9-x}$$

Poiché $g(0) > 0$ $\quad \text{sign}(g(0)) = 1$ e dunque $f''(0) = -\frac{18}{9} = -2$

Poiché $g(0) > 0$ $\mathrm{sign}(g(0)) = 1$ e dunque $f''(0) = -\frac{18}{9} = -2$

Dunque la formula di Maclaurin di ordine 2 per f col resto di Peano è

$$f(x) = \log 9 - 1 - \frac{2}{2}x^2 + o(x^2) = \log 9 - 1 - x^2 + o(x^2), \quad \text{per } x \to 0$$

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 t^2 \operatorname{arctg} t \, dt$$

$$\int_0^1 t^2 \operatorname{arctg} t \, dt = \frac{1}{3}t^3 \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}\, dt$$

$$\frac{t^3}{1+t^2} = t - \frac{t}{1+t^2}$$ quindi

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 t\, dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\log(1+t^2)\Big|_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2\right)$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log 2$

4) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi

Fornire un esempio di una funzione continua che non soddisfa la tesi del Teorema

Si veda, ad esempio p. 171-172 del manuale di riferimento

È chiaro che la funzione continua non deve essere definita su un intervallo

ad esempio $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ è chiaramente continua in $[0,1] \cup \{2\}$

ma non assume alcun valore strett. compreso tra 0 e 1 che sono gli unici valori assunti da f.