

1)-a) Risolvere la seguente equazione in  $\mathbb{C}$  esprimendo le soluzioni in base esponenziale  
 $z^6 + 2e^{-i\pi/3}z = 0$

Mettenendo in evidenza  $z$  otteniamo

$$z(z^5 + 2e^{-i\pi/3}) = 0 \quad \text{le cui soluzioni sono}$$

$$z = 0 \quad \text{e} \quad z = \sqrt[5]{-2e^{-i\pi/3}}$$

Notando che la base esponenziale di 0 è 0, mentre

$$\sqrt[5]{-2e^{-i\pi/3}} = \sqrt[5]{2 \cdot e^{-i\pi} \cdot e^{-i\pi/3}} = 2^{1/5} e^{-i(\frac{4}{5}\pi + \frac{2\pi k}{5})}, \quad k=0,1,2,3,4$$

b) Determinare insieme di definizione e monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = e^{-(x+2)^2} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\text{dom} f = (0, +\infty)$$

$f$  è prodotto delle funzioni positive

$$f_1(x) = e^{-(x+2)^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$f_1(x) = x \in (0, +\infty) \mapsto -(x+2)^2 \mapsto e^{-(x+2)^2}$$

perché la funzione  $y(x) = -(x+2)^2$  la grafico

mostro che per  $x > 0$  è strettamente crescente;

quindi  $f_1$  è strett. decrescente su  $(0, +\infty)$  in

quanto comporta che una funzione strett. decrescente e  
 una strett. crescente.

$f_2$  è anch'essa composta da una funzione strett. decrescente

su  $(0, +\infty)$  (cioè  $x \in (0, +\infty) \mapsto \frac{1}{x}$ ) e una strett. crescente

(cioè  $x \in (0, +\infty) \mapsto \sqrt{x}$ ) e dunque è strett. decrescente.

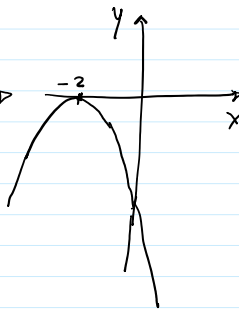
$f$  in quanto prodotto di due funzioni positive strett. decrescente

è strett. decrescente. Poiché  $f$  è continua, abbiamo

$$\text{immagine tale che } \text{im} f = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

2) Determinare il dominio e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{2 \arctan(\cos^3 x) - x^{1/3}}{x^{1/3} + \pi^{1/3}}$$



Stabilire che  $f$  è derivabile in  $\pi$  e scrivere l'equazione della retta tg al suo grafico nel punto  $(\pi, f(\pi))$

domf:  $x^{\frac{1}{3}} + \pi^{\frac{1}{3}} \neq 0$  cioè  $x \neq -\pi$ ; domf =  $(-\infty, -\pi) \cup (-\pi, +\infty)$

$f \in C^0(\text{domf})$  quindi dobbiamo solo stabilire se  $f$  ha asintoti verticali in  $x = -\pi$  e asintoti orizzontali ed eventualmente obliqui per  $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \frac{\arctan(\cos^3 \pi) + \pi^{\frac{1}{3}}}{0^+} = \frac{-\frac{\pi}{4} + \pi^{\frac{1}{3}}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = \frac{-\frac{\pi}{4} + \pi^{\frac{1}{3}}}{0^-} = -\infty$$

quindi la retta  $x = -\pi$  è asintoto verticale sia a dx che a sx per  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\arctan(\cos^3 x)}{x^{\frac{1}{3}}} - 1 \right)}{x^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \left( \frac{\pi}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \right)} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

quindi la retta  $y = -1$  è asintoto orizzontale per  $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\arctan(\cos^3 x)}{x^{\frac{1}{3}}} - 1 \right)}{x^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \left( \frac{\pi}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \right)} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

quindi la retta  $y = -1$  è anche asintoto orizzontale per  $x \rightarrow +\infty$

Poiché  $f$  è il quoziente di funzioni derivabili su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (si ricordi che  $y = x^{\frac{1}{3}}$  non è

derivabile in  $x = 0$ )  $f$  è derivabile in  $x = \pi$ ;

$$f'(x) = \frac{\left( \frac{1}{1+\cos^6 x} 3 \cos^2 x (-\sin x) - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \right) (x^{\frac{1}{3}} + \pi^{\frac{1}{3}}) - (\arctan(\cos^3 x) - x^{\frac{1}{3}}) \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{(x^{\frac{1}{3}} + \pi^{\frac{1}{3}})^2}$$

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= \left( 0 - \frac{1}{3} \pi^{-\frac{2}{3}} \right) 2\pi^{\frac{1}{3}} - \left( -\frac{\pi}{4} - \pi^{\frac{1}{3}} \right) \frac{1}{3} \pi^{-\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{2}{3} \pi^{-\frac{1}{3}} + \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{12} + \frac{\pi^{-\frac{1}{3}}}{3} = \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{12} - \frac{\pi^{-\frac{1}{3}}}{3} \end{aligned}$$

$$f(\pi) = \frac{-\frac{\pi}{4} - \pi^{\frac{1}{3}}}{2\pi^{\frac{1}{3}}}$$

quindi l'equazione della retta tg richiesta è

$$y = -\frac{\pi + 4\pi^{\frac{1}{3}}}{8\pi^{\frac{1}{3}}} + \left( \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{12} - \frac{\pi^{-\frac{1}{3}}}{3} \right) (x - \pi)$$

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin x}{\cos x + 1} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \sin x}{\cos x + 1} dx$$

Poniamo  $\cos x = t$ ,  $dt = -\sin x dx$  e quindi per sostituzione

l'integrale assegnato è uguale a

$$-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{t}{t+1} dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \log(t+1) \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \log \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

4) Enunciare e dimostrare la formula di Taylor di ordine  $n$  col resto di Peano

Usare la formula di Maclaurin di  $e^x$  per dimostrare

$$\text{che } e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \quad (\square)$$

Per enunciato e dimostrazione si veda la lezione 24

$$\text{Poiché } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

sostituendo  $x$  con  $-\frac{x^2}{2}$  otteniamo

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \quad \text{da cui segue } (\square)$$