1) -a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

quindi si tratta di una serie geometrica di ragione $-\frac{1}{2}$ privata dei primi tre termini

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \sum_{n=3}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} =$$

$$= -\frac{1}{8} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\frac{1}{8} \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12}$$

1) -b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left( \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} - \arcsin\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) \right)$$

$$\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{e poiché} \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \in \mathbb{R}$$

anche $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^{3/2}} \in \mathbb{R}$

$$\arcsin\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) \sim \frac{1}{n^{2/3}} \quad \text{e poiché} \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}} = +\infty$$

anche $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) = +\infty$

La serie assegnata è quindi divergente negativamente poiché differenza di una serie convergente e di una divergente positivamente

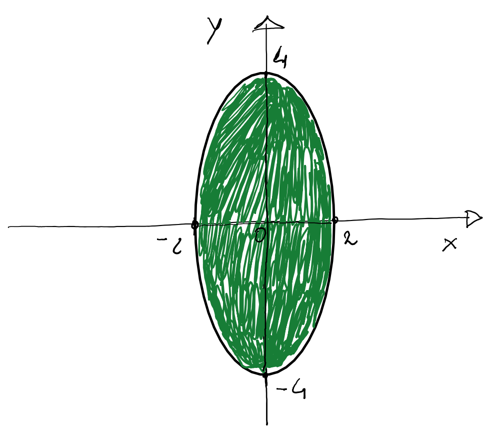
2) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{\sqrt{16-4x^2-y^2}}$$

Si determini il dominio di $f$ e lo si rappresenti nel piano. Si dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi, compatto.
Stabilire che $f$ è differenziabile nell'interno del suo dominio e si determini l'equazione del piano tangente al grafico di $f$ nel punto $(1,0,f(1,0))$.
Dire infine perché $f$ ha minimo e massimo assoluto e determinare l'unico punto di massimo assoluto posseduto da $f$.

$$\text{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16-4x^2-y^2 \geq 0\}$$

L'equazione $16-4x^2-y^2=0$ rappresenta una ellisse con centro nell'origine e vertici sugli assi cartesiani




Il dominio di $f$ è la regione interna all'ellisse bordo incluso.
Si tratta quindi di un insieme chiuso, limitato, connesso per archi, compatto

Poiché f è composta da un polinomio, dalla funzione radice quadrata e dalla funzione esponenziale di base e è una funzione di classe $C^\infty$ in tutti i punti interni al dominio dato da in tali punti $16-4x^2-y^2>0$
quindi per il teorema del differenziale f è differenziabile in tutti i punti interni del dominio

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\sqrt{16-4x^2-y^2}} \ \frac{1}{2} \ \frac{-8x}{\sqrt{16-4x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\sqrt{16-4x^2-y^2}} \ \frac{1}{2} \ \frac{-2y}{\sqrt{16-4x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -e^{\sqrt{12}} \ \frac{4}{\sqrt{12}} = -e^{\sqrt{12}} \ \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$$

$$f(1,0) = e^{\sqrt{12}}$$

quindi l'equazione del piano tg richiesto è

$$z = e^{\sqrt{12}} - e^{\sqrt{12}} \frac{2}{\sqrt{3}} (x-1)$$

$f \in C^0(\text{dom} f)$ e poiché dom f è compatto
f ha minimo e max assoluto per il teorema di Weierstrass
Osserviamo che $f_{|\partial \text{dom} f}(x,y) = e^0 = 1$
cioè f è costante sul bordo del dominio
All'interno del dominio le derivate parziali di f si annullano entrambe solo nell'origine $(0,0)$
Poiché $f(0,0) = e^4 > 1$ tal punto stazionario è di massimo assoluto (tutti i punti sul bordo del dominio sono di minimo assoluto)

3) Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = \cos(2t) + t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y' = -2y + \cos(2t) + t$$

$$y(t) = e^{-2t}\left( c + \int e^{2t}(\cos(2t) + t)\,dt \right)$$

$$\int e^{2t}\cos(2t)\,dt = \frac{1}{2} e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{2}\int e^{2t}\, 2\sin(2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{2} e^{2t}\sin(2t) - \int e^{2t}\cos(2t)\,dt \Rightarrow$$

$$2\int e^{2t}\cos(2t)\,dt = \frac{e^{2t}}{2}(\cos(2t) + \sin(2t)) \quad \text{da cui}$$

$$\int e^{2t}\cos(2t)\,dt = \frac{e^{2t}}{4}(\cos(2t) + \sin(2t))$$

$$\int e^{2t}\, t\,dt = \frac{1}{2} e^{2t} t - \frac{1}{2}\int e^{2t}\,dt = \frac{1}{2} e^{2t} t - \frac{1}{4} e^{2t} = \frac{e^{2t}}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Quindi

$$y(t) = e^{-2t}\left( c + \frac{e^{2t}}{2}\left[\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\sin(2t)}{2} + t - \frac{1}{2}\right]\right)$$

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow c + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

Quindi la soluzione è $y(t) = e^{-2t}\, \frac{e^{2t}}{2}\left[\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\sin(2t)}{2} + t - \frac{1}{2}\right])$

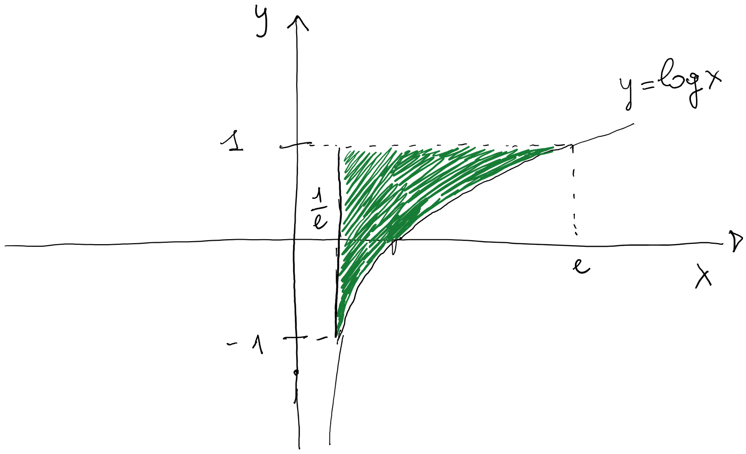
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\sin(2t)}{2} + t - \frac{1}{2}\right]$$

4) Per le formule si veda, ad esempio, la lezione 43.

$\int^{1} \int^{e^{y}}$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{\frac{1}{e}}^{e^{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Il dominio di integrazione è quindi normale rispetto all'asse delle $y$ ed è l'insieme qui rappresentato in verde




Esso è normale anche rispetto all'asse delle $x$ infatti è dato da $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ e $\log x \leq y \leq 1$,

quindi $$\int_{-1}^{1}\left(\int_{\frac{1}{e}}^{e^{y}} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\int_{\log x}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx$$