Svolgimento della prova del 10 Aprile 2025 – Traccia A

1) (a) Determiniamo la forma esponenziale del numero complesso $z = \frac{(1+2i)^3}{(1-i)^2}$:

Per $1+2i$: $|1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$; $\arg(1+2i) = \arctan(2/1) = \arctan(2)$. Quindi $1+2i = \sqrt{5}e^{i\arctan(2)}$.
Per $1-i$: $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; $\arg(1-i) = \arctan(-1/1) = -\arctan(1) = -\pi/4$. Quindi $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

Pertanto:

$$z = \frac{(1+2i)^3}{(1-i)^2} = \frac{(\sqrt{5})^3 e^{3i\arctan(2)}}{(\sqrt{2})^2 e^{-2i\pi/4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} e^{i(3\arctan(2)+\pi/2)}.$$

Le radici quinte sono quindi:

$$z_k = \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}}{2}} e^{i\frac{3\arctan(2)+\pi/2+2k\pi}{5}}$$

per $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(b) Per la successione $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ con $n \geq 1$, studiamo prima la monotonia:

Per verificare se la successione è monotona, calcoliamo $a_{n+1} - a_n$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)-(2n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2n^2+3n+1-(2n^2+3n-2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Quindi la successione è strettamente crescente e dunque

$$\sup_{n\geq 1} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$$

Per l'estremo inferiore, essendo la successione strettamente crescente, il primo termine $a_1 = \frac{2\cdot 1-1}{1+1} = \frac{1}{2}$ è il minimo. Quindi l'estremo inferiore è $\frac{1}{2}$, che appartiene all'insieme dei valori della successione (è minimo).

2) Per il dominio di $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) + \sqrt{x^2-4}$, dobbiamo considerare:

1) Per il logaritmo: $\frac{x-1}{x+8} > 0$ Questo accade quando numeratore e denominatore hanno lo stesso segno: $x-1 > 0$ e $x+8 > 0 \Rightarrow x > 1$ e $x > -8 \Rightarrow x > 1$ oppure $x-1 < 0$ e $x+8 < 0 \Rightarrow x < 1$ e $x < -8 \Rightarrow x < -8$ Quindi $x \in (-\infty, -8) \cup (1, +\infty)$.

2) Per la radice quadrata: $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq -2$ o $x \geq 2$.

Combinando le condizioni, il dominio è $(-\infty, -8) \cup [2, +\infty)$.

Per gli asintoti:

Notiamo che f è continua sul suo dominio e quindi l'unico punto in cui cercare asintoti verticale è $x = -8$. Studiamo il limite per $x \to -8^-$:

$$\lim_{x\to -8^-} f(x) = \lim_{x\to -8^-} \log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) + \lim_{x\to -8^-} \sqrt{x^2-4}$$

Per il primo termine, poiché

$$\lim_{x\to -8^-} \frac{x-1}{x+8} = -\frac{9}{0^-} = +\infty,$$

abbiamo che

$$\lim_{x\to -8^-} \log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) = +\infty.$$

Il secondo termine è continuo; quindi f ha un asintoto verticale a sinistra in $x = 8$. Per gli asintoti orizzontali e obliqui, studiamo il comportamento di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$:

Osserviamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) = \log 1 = 0.$$

Poiché

$$\sqrt{x^2-4} = |x|\sqrt{1-4/x},$$

è chiaro che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty.$$

Quindi f non ha asintoti orizzontali. Vediamo se ammette asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{o(1)}{x} + \frac{|x|\sqrt{1-4/x}}{x}\right) = 0 \pm 1 = \pm 1$$

Per completare lo studio degli asintoti obliqui, calcoliamo:

Per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) + \sqrt{x^2-4} - x\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) + \lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2-4} - x]\end{aligned}$$

Per il primo termine, sappiamo già che $\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) = 0$.

Per il secondo termine:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2-4} - x] &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2-4}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x\cdot 2} = 0.\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = 0 + 0 = 0.$$

Analogamente si vede che $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x] = 0$.

Pertanto le rette $y = \pm x$ sono asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$.

Per la monotonia in $[2, +\infty)$, calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\log\left(\frac{x-1}{x+8}\right)\right] + \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2-4}\right] \\ &= \frac{(x+8)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1}{(x-1)(x+8)} + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{9}{(x-1)(x+8)} + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}.\end{aligned}$$

Per $x \geq 2$, entrambi gli addendi sono positivi, quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [2, +\infty)$, il che significa che f è strettamente crescente in questo intervallo.

Poiché f è strettamente crescente in $[2, +\infty)$, fa ha in $x = 2$ un punto di minimo locale.

3) Per calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x\sqrt{x}}{x-1}\mathrm{d}x$, poniamo $t = \sqrt{x}$, quindi $x = t^2$ e $dx = 2t\,dt$.

L'integrale diventa:

$$\int \frac{x\sqrt{x}}{x-1}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2\cdot t}{t^2-1}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^4}{t^2-1}\,dt.$$

Riscriviamo la frazione:

$$\frac{t^4}{t^2-1} = \frac{t^4 - t^2 + t^2}{t^2-1} = \frac{t^2(t^2-1)+t^2}{t^2-1} = t^2 + \frac{t^2}{t^2-1}.$$

Quindi

$$2\int \frac{t^4}{t^2-1}\,dt = 2\int \left(t^2 + \frac{t^2}{t^2-1}\right)\,dt = 2\int t^2\,dt + 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt.$$

Per il primo integrale

$$2\int t^2\,dt = 2\cdot\frac{t^3}{3} = \frac{2t^3}{3}.$$

Per il secondo:

$$\frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2-1+1}{t^2-1} = 1 + \frac{1}{t^2-1}.$$

E quindi

$$2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = 2\int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)\,dt = 2t + 2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt.$$

Per $\int \frac{1}{t^2-1}\,dt$, utilizziamo la scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1},$$

da cui

$$1 = A(t+1) + B(t-1).$$

Per $t=1$: $1 = A\cdot 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.
Per $t=-1$: $1 = B\cdot(-2) \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$.
Pertanto

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right),$$

e dunque

$$2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = 2\cdot\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\,dt = \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt$$
$$= \log|t-1| - \log|t+1| = \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|.$$

Combinando tutti i risultati:

$$2\int \frac{t^4}{t^2-1}\,dt = \frac{2t^3}{3} + 2t + \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Sostituendo $t = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{x\sqrt{x}}{x-1}\,dx = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} + 2\sqrt{x} + \log\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C = \frac{2x^{3/2}}{3} + 2\sqrt{x} + \log\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C.$$

4) Teorema della media integrale per funzioni continue:
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$. Allora esiste almeno un punto $c \in [a,b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

ovvero, il valore medio della funzione f sull'intervallo $[a, b]$, definito come

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

è uguale al valore della funzione in almeno un punto $c \in [a, b]$.

Dimostrazione: Poiché f è continua su $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass, f ammette minimo m e massimo M in $[a, b]$. Quindi, per ogni $x \in [a, b]$, abbiamo $m \leq f(x) \leq M$. Integrando questa disuguaglianza da a a b:

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a).$$

Dividendo per $(b-a)$:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Dato che f è continua e assume tutti i valori nell'intervallo $[m, M]$ (per il teorema dei valori intermedi), esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Calcolo del valore medio di $f(x) = x^3e^{-x^2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$:

Osserviamo che $f(x) = x^3e^{-x^2}$ è una funzione dispari, poiché $f(-x) = (-x)^3e^{-(-x)^2} = -x^3e^{-x^2} = -f(x)$. Quando una funzione dispari e integrabile è integrata su un intervallo simmetrico rispetto all'origine, l'integrale è nullo; quindi, il valore medio della funzione $f(x) = x^3e^{-x^2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ è 0.