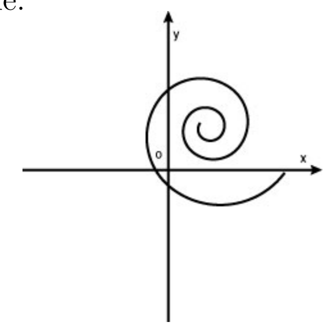
Politecnico di Bari
CUC Ingegneria dell'Informazione
L3 Ingegneria Informatica
AA 2004-2005

Corso di Analisi Matematica I - Tracce di esame

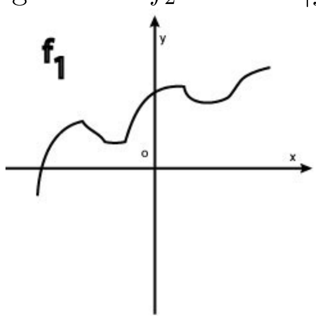
Docenti: Prof.ssa G. Cerami, Dott. E. Caponio

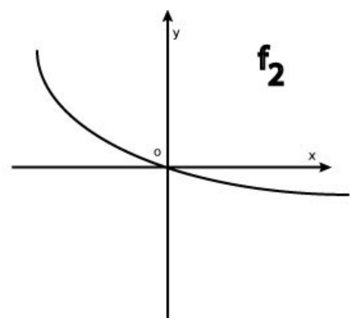
A.A 2004/2005 Esonero 06 Novembre 2004 Traccia A

1) Dire, motivando la risposta, se la curva rappresentata in figura può essere il grafico di una funzione reale di variabile reale.



2) Dire, motivando la risposta, se le funzioni f_1 ed f_2, i cui grafici sono rappresentati in figura, sono invertibili e, in caso di risposta affermativa, disegnare il grafico dell'inversa. Disegnare inoltre il grafico di $f_2 - 1$ e di $|f_2|$.





3) Fornire un esempio di una funzione f per cui risulti $|f| = f$.

4) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}\right) - \log_{\frac{1}{3}}(4^x - 3^x).$$

5) Provare che la funzione $f(x) = \log(x^3 - 1) + 1$ è invertibile. Determinare inoltre la funzione inversa e l'immagine di f.

6) Dimostrare che la successione

$$\left\{\frac{2n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è limitata superiormente e calcolarne l'estremo superiore.

7) Dimostrare che non esiste il limite

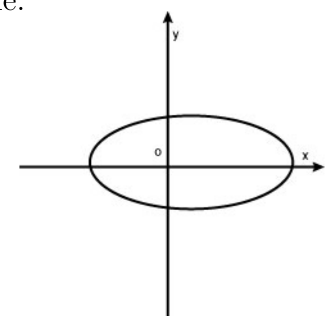
$$\lim_{x\to+\infty} \sin^2 x.$$

8) Calcolare il limite seguente

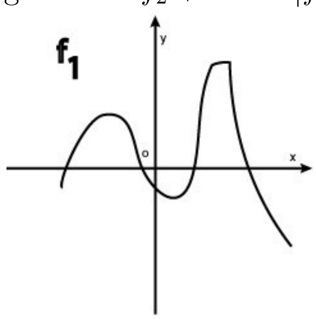
$$\lim_{x\to 0} x^2 \arctan\frac{1}{x} - x^2.$$

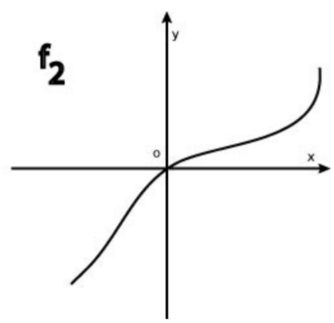
A.A 2004/2005 Esonero 06 Novembre 2004 Traccia B

1) Dire, motivando la risposta, se la curva rappresentata in figura può essere il grafico di una funzione reale di variabile reale.



2) Dire, motivando la risposta, se le funzioni f_1 ed f_2, i cui grafici sono rappresentati in figura, sono invertibili e, in caso di risposta affermativa, disegnare il grafico dell'inversa. Disegnare inoltre il grafico di $f_2 + 1$ e di $|f_2|$.





3) Fornire un esempio di una funzione f per cui risulti $|f| = f$.

4) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}\right) - \arccos\left(\frac{1}{2^{2x+1}}\right).$$

5) Provare che la funzione $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$ è invertibile. Determinare inoltre la funzione inversa e l'immagine di f.

6) Dimostrare che la successione

$$\left\{\frac{\frac{1}{2}n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

è limitata superiormente e calcolarne l'estremo superiore.

7) Dimostrare che non esiste il limite

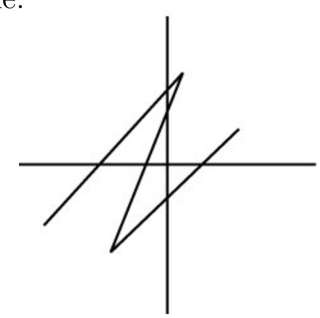
$$\lim_{x \to +\infty} \tan x.$$

8) Calcolare il limite seguente

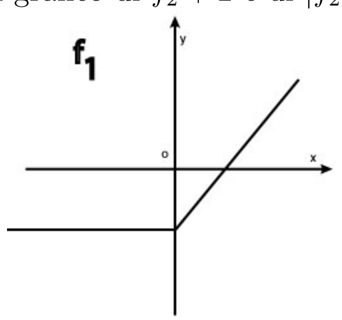
$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} \sin\frac{1}{x} - x - 1.$$

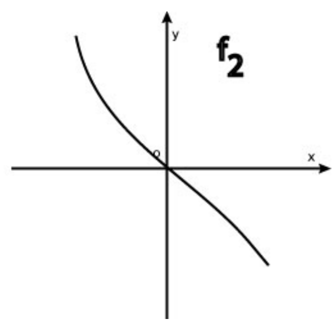
A.A 2004/2005 Esonero 06 Novembre 2004 Traccia C

1) Dire, motivando la risposta, se la curva rappresentata in figura può essere il grafico di una funzione reale di variabile reale.



2) Dire, motivando la risposta, se le funzioni f_1 ed f_2, i cui grafici sono rappresentati in figura, sono invertibili e, in caso di risposta affermativa, disegnare il grafico dell'inversa. Disegnare inoltre il grafico di $f_2 + 2$ e di $|f_2|$.





3) Fornire un esempio di una funzione f per cui risulti $|f| = f$.

4) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}\right) - \log_{\frac{1}{2}}(3^x - 5^x).$$

5) Provare che la funzione $f(x) = \frac{1}{4^{2x^3-1}} + 1$ è invertibile. Determinare inoltre la funzione inversa e l'immagine di f.

6) Dimostrare che la successione

$$\left\{\frac{n-2}{\sqrt{n^2+1}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è limitata superiormente e calcolarne l'estremo superiore.

7) Dimostrare che non esiste il limite

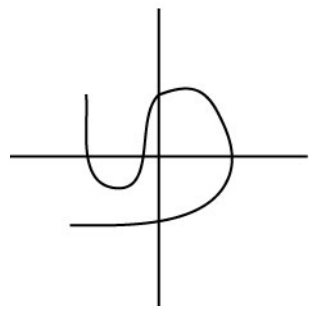
$$\lim_{x\to+\infty} \sin x + 1.$$

8) Calcolare il limite seguente

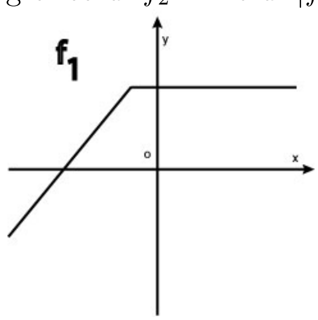
$$\lim_{x\to 0} x \arctan\frac{1}{x} + x^3 - 2.$$

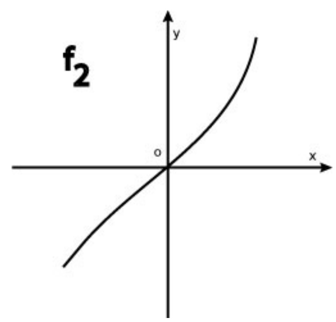
A.A 2004/2005 Esonero 06 Novembre 2004 Traccia D

1) Dire, motivando la risposta, se la curva rappresentata in figura può essere il grafico di una funzione reale di variabile reale.



2) Dire, motivando la risposta, se le funzioni f_1 ed f_2, i cui grafici sono rappresentati in figura, sono invertibili e, in caso di risposta affermativa, disegnare il grafico dell'inversa. Disegnare inoltre il grafico di $f_2 - 2$ e di $|f_2|$.





3) Fornire un esempio di una funzione f per cui risulti $|f| = f$.

4) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{2x^2+x-1}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{3^{4x-1}}\right).$$

5) Provare che la funzione $f(x) = \frac{1}{9^{x^5-1}} - 1$ è invertibile. Determinare inoltre la funzione inversa e l'immagine di f.

6) Dimostrare che la successione

$$\left\{\frac{3n-1}{\sqrt{n^2+1}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è limitata superiormente e calcolarne l'estremo superiore.

7) Dimostrare che non esiste il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \cos^2 x.$$

8) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x} - x^2 + 1.$$

A.A 2004/2005 Esonero 13 Dicembre 2004 Traccia A

1) Enunciare il Teorema di Waierstrass, corredandolo con un esempio. Fornire poi un esempio di una funzione definita in tutto $\mathbb{R}$, non continua e che sia dotata di massimo assoluto e di minimo assoluto.

2) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann su $[a,b]$, tale che $f(x) \geq 0$, per ogni $x \in (a,b)$. Dimostrare che $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

3) Stabilire per quali valori dei parametri reali a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\log(-x) + 1 & \text{per } x < 0 \\ ax^2 + b & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

è derivabile in $\mathbb{R}$.

4) Determinare gli asintoti e gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} e^{-\frac{1}{x-1}}.$$

5) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_{e^\pi}^{1} \frac{\sin(\log x)}{x} \mathrm{d}x$$

A.A 2004/2005   Esonero 13 Dicembre 2004   Traccia B

1) Enunciare il Teorema di Rolle, corredandolo con un esempio. Fornire poi un esempio di una funzione definita su un intervallo $[a, b]$, continua, che assuma lo stesso valore in a e in b e che abbia derivata mai nulla.

2) Siano $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili secondo Riemann su $[a, b]$, tali che $f(x) \leq g(x)$, per ogni $x \in (a, b)$. Dimostrare che $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

3) Stabilire per quali valori dei parametri reali a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + b & \text{per } x \leq 0 \\ x^3 \log x - 2 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

è derivabile in $\mathbb{R}$.

4) Determinare gli asintoti e gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} e^{-\frac{1}{x+2}}.$$

5) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_{e^\pi}^{1} \frac{\cos(\log x)}{x} \mathrm{d}x$$

A.A 2004/2005 Appello 13 Dicembre 2004 Traccia A

1) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ iniettiva. Cosa si può dire di $f^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$?

2) Scrivere la definizione di successione divergente negativamente e provare che una tale successione è limitata superiormente.

3) Dare la definizione di derivabilità in un punto e in un insieme, per una funzione reale di variabile reale. Dimostrare, inoltre, che una funzione derivabile è continua.

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione. Dire, giustificando la risposta, se la continuità è una condizione necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente per l'esistenza di una primitiva.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{-x^2+2x-1}{2^{\sqrt{1-2x}} - 2^x}}.$$

6) Dimostrare che l'equazione $(x^2-1)e^x - x^3 = 0$ ha almeno una soluzione positiva.

7) Determinare gli asintoti e gli eventuali punti di minimo e massimo relativo per la funzione

$$f(x) = \log|x+1| + \frac{x^2}{x+1}.$$

8) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_e^1 \frac{1}{x(1+\log^2 x)}\mathrm{d}x$$

A.A 2004/2005 Appello 13 Dicembre 2004 Traccia B

1) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ surgettiva. Cosa si può dire di $f^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$?

2) Scrivere la definizione di successione divergente positivamente e provare che una tale successione è limitata inferiormente.

3) Dare la definizione di derivabilità in un punto e in un insieme, per una funzione reale di variabile reale. Dimostrare, inoltre, che una funzione derivabile è continua.

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione. Dire, giustificando la risposta, se la continuità è una condizione necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente per l'esistenza di una primitiva.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{-4x^2 + 4x - 1}{2^{\sqrt{1-6x}} - 2^x}}.$$

6) Dimostrare che l'equazione $(\sqrt[3]{x} - 1)e^x - x^2 = 0$ ha almeno una soluzione positiva.

7) Determinare gli asintoti e gli eventuali punti di minimo e massimo relativo per la funzione

$$f(x) = \log|x-1| - \frac{x^2}{x-1}.$$

8) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_e^1 \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} \mathrm{d}x$$

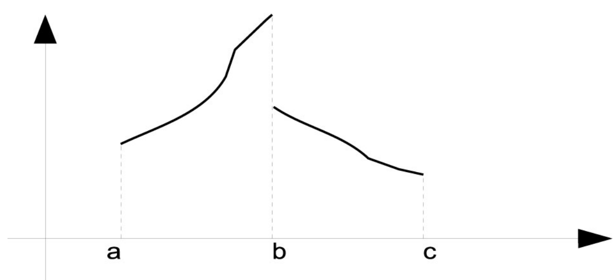
A.A 2004/2005 Appello 7 Gennaio 2005 Traccia A

1) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto, e siano f e g funzioni reali definite in A. Provare che se f e g sono decrescenti anche la funzione $f+g$ è decrescente.

2) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue e utilizzarlo per provare che se $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è continua e tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ e $f(0)=1$, allora l'equazione $f(x)=\frac{1}{2}$ ha almeno due soluzioni.

3) Enunciare il Teorema di Fermat. Dire, poi, corredando la risposta con esempi, se è una condizione necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente per l'esistenza di un punto di massimo o di minimo.

4) Sia $f\colon [a,c]\to\mathbb{R}$ la funzione il cui grafico è rappresentato in figura. Dire, motivando la risposta, se f è integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[a,c]$.



5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

6) Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{7/3}\log\sqrt{x}}{1-\cos x}.$$

7) Verificare che il punto $x=0$ è un punto stazionario della funzione $f(x)=\cos^2 x-e^{-ax^2}$ e determinare, al variare del parametro reale a, la sua natura.

8) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_1^3 (x-2)\log(x+3)\mathrm{d}x.$$

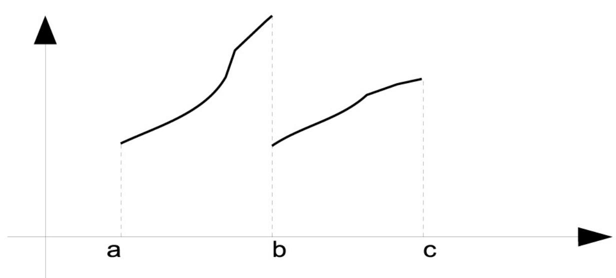
A.A 2004/2005 Appello 7 Gennaio 2005 Traccia B

1) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto, e siano f e g funzioni reali definite in A. Provare che se f e g sono strettamente decrescenti anche la funzione $f+g$ è strettamente decrescente.

2) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue e utilizzarlo per provare che se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ e $f(0) = 0$, allora l'equazione $f(x) = \frac{1}{3}$ ha almeno due soluzioni.

3) Enunciare il Teorema di Fermat. Dire, poi, corredando la risposta con esempi, se è una condizione necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente per l'esistenza di un punto di massimo o di minimo.

4) Sia $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ la funzione il cui grafico è rappresentato in figura. Dire, motivando la risposta, se f è integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[a,c]$.



5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3}} \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

6) Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{4/3} \log \sqrt[4]{x}}{\sin x}.$$

7) Verificare che il punto $x = 0$ è un punto stazionario della funzione $f(x) = \sin x \cos x - x - e^{-ax^2}$ e determinare, al variare del parametro reale a, la sua natura.

8) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_0^2 (x-1)\log(x+2)\mathrm{d}x.$$

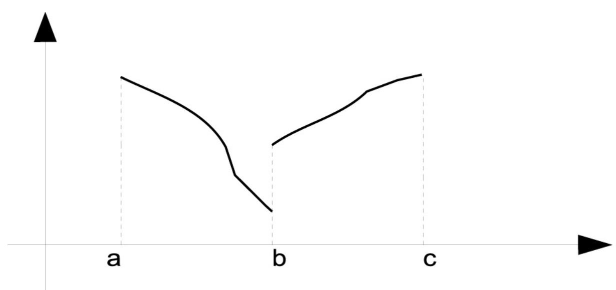
A.A 2004/2005 Appello 7 Gennaio 2005 Traccia C

1) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto, e siano f e g funzioni reali definite in A. Provare che se f e g sono crescenti anche la funzione $f+g$ è crescente.

2) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue e utilizzarlo per provare che se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ e $f(0)=0$, allora l'equazione $f(x) = -\frac{1}{4}$ ha almeno due soluzioni.

3) Enunciare il Teorema di Fermat. Dire, poi, corredando la risposta con esempi, se è una condizione necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente per l'esistenza di un punto di massimo o di minimo.

4) Sia $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ la funzione il cui grafico è rappresentato in figura. Dire, motivando la risposta, se f è integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[a,c]$.



5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - 2\right)^{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

6) Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{5/3}\log\sqrt{x}}{\tan x}.$$

7) Verificare che il punto $x=0$ è un punto stazionario della funzione $f(x) = \sin^2 x - e^{-ax^2}$ e determinare, al variare del parametro reale a, la sua natura.

8) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_0^2 (x-1)e^{2-x}\mathrm{d}x.$$

A.A 2004/2005 Appello 12 Febbraio 2005 Traccia A

1) Scrivere la definizione di punto di accumulazione e di punto isolato per un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Determinare, poi, i punti di accumulazione e i punti isolati dell'insieme

$$A = \{\tfrac{1}{i+1} \;:\; i \in \mathbb{N}\} \cup (\tfrac{1}{2}, 1).$$

2) Scrivere la definizione di successione limitata e dimostrare, poi, che se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono limitate, tale è anche la successione $\left\{\frac{a_n b_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Enunciare il Teorema di Lagrange. Farne uso, poi, per dimostrare che

$$\forall x, y \in [\tfrac{1}{4}, +\infty) \;:\; |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le |x - y|.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale per funzioni continue. Dire poi, motivando la risposta, se due funzioni $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ aventi stessa media integrale sono uguali.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\arccos(e - e^x)}.$$

6) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

7) Determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f\colon [-\sqrt{2}, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{e^{2-x^2} - e^{x^2-1}}{2}.$$

8) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x.$$

A.A 2004/2005 Appello 12 Febbraio 2005 Traccia B

1) Scrivere la definizione di punto di accumulazione e di punto isolato per un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Determinare, poi, i punti di accumulazione e i punti isolati dell'insieme

$$A = \{\tfrac{1}{i^2} \ : \ i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup (\tfrac{1}{4}, 1).$$

2) Scrivere la definizione di successione limitata e dimostrare, poi, che se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono limitate, tale è anche la successione $\left\{\frac{a_n - b_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Enunciare il Teorema di Lagrange. Farne uso, poi, per dimostrare che

$$\forall x, y \in [1, +\infty) \ : \ |\log x - \log y| \leq |x - y|.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale per funzioni continue. Dire poi, motivando la risposta, se una funzione $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ non continua e avente media nulla ha almeno uno zero.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\arcsin(1 - e^x)}.$$

6) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + 2\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$$

7) Determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f \colon [-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\arctan(2 - x^2) - \arctan(x^2 - 1)}{2}.$$

8) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_0^1 \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 4} \mathrm{d}x.$$

A.A 2004/2005 Appello 12 Febbraio 2005 Traccia C

1) Scrivere la definizione di punto di accumulazione e di punto isolato per un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Determinare, poi, i punti di accumulazione e i punti isolati dell'insieme

$$A = \{\tfrac{1}{i^3} \ : \ i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup (\tfrac{1}{8}, 1).$$

2) Scrivere la definizione di successione limitata e dimostrare, poi, che se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono limitate, tale è anche la successione $\left\{\frac{a_n+b_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Enunciare il Teorema di Lagrange. Farne uso, poi, per dimostrare che

$$\forall x, y \in (-\infty, 0] \ : \ |e^x - e^y| \leq |x - y|.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale per funzioni continue. Dire poi, motivando la risposta, se una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ avente media integrale positiva assume solo valori maggiori o uguali a 0.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{-\arctan(1 - \log x)}.$$

6) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}(1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}}.$$

7) Determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f\colon [-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{(2-x^2)^{\frac{1}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{2}.$$

8) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{x^2 - 2x + 1}\mathrm{d}x.$$

A.A 2004/2005 Appello 04 Aprile 2005 Traccia A

1) Scrivere la definizione di funzione limitata superiormente. Fornire, poi, un esempio di una funzione limitata superiormente e non dotata di massimo.

2) Scrivere la definizione di funzione pari. Dimostrare che una funzione pari non può avere discontinuità di prima specie in 0.

3) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dire, giustificando la risposta, se

- f è necessariamente discontinua in 0;
- f è integrabile in $[5, 15]$.

4) Fornire un esempio di una funzione integrabile secondo Riemann e non continua.

5) Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x \to +\infty} (\cos x - \sin x) \frac{x-1}{x-2x^2}.$$

6) Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - \log x.$$

7) Determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} + x^2\right).$$

8) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

A.A 2004/2005 Appello 04 Aprile 2005 Traccia B

1) Scrivere la definizione di funzione limitata inferiormente. Fornire, poi, un esempio di una funzione limitata inferiormente e non dotata di minimo.

2) Scrivere la definizione di funzione dispari. Dimostrare che se esiste il limite in 0 di una funzione dispari allora tale limite è uguale a 0.

3) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dire, giustificando la risposta, se

- f è necesseriamente discontinua in 0;
- f è integrabile in $[-4, -1]$.

4) Fornire un esempio di una funzione integrabile secondo Riemann e non continua.

5) Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to+\infty} (2\sin x + 1)\frac{x^2+1}{x-x^3}.$$

6) Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^3}\right) + \log x.$$

7) Determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right).$$

8) Calcolare l'integrale seguente:

$$\int_0^{\sqrt{3/2}} \sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x.$$

A.A 2004/2005 Appello 25 Maggio 2005 Traccia A

1) Sia $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente e tale che, per ogni $x \in A$, $f(x) < 0$. Dimostrare che la funzione $\dfrac{1}{f}$ è strettamente decrescente. Provare, con un controesempio, che la tesi precedente non sussiste se f cambia di segno in A.

2) Enunciare il teorema di confronto per i limiti di funzioni. Calcolare poi $\lim_{x\to 0} f(x)$, sapendo che $f^2(x) \leq |x|^{1/2}$.

3) Dare due esempi di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e che soddisfi:

a) $f'(x) < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

b) $f'(x) < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

4) Sia $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile in $[0,2]$ e sia C la sua media integrale. Calcolare i valori che la funzione

$$g(x) = \int_0^x (f(s) - C)\mathrm{d}s$$

assume nei punti $x = 0$ e $x = 2$.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \arccos\left[\left(\frac{1-x^2}{x}\right)^{1/2}\right].$$

6) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e di massimo relativo della funzione

$$f(x) = \log|x+1| + \frac{x}{x+2}.$$

7) Calcolare i punti stazionari della funzione

$$f(x) = 3x - \sin(3x)$$

e studiarne la natura.

8) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x-2}{x^3+1}\mathrm{d}x.$$

A.A 2004/2005 Appello 25 Maggio 2005 Traccia B

1) Sia $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente decrescente e tale che, per ogni $x \in A$, $f(x) < 0$. Dimostrare che la funzione $\dfrac{1}{f}$ è strettamente crescente. Provare, con un controesempio, che la tesi precedente non sussiste se f cambia di segno in A.

2) Enunciare il teorema di confronto per i limiti di funzioni. Calcolare poi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, sapendo che $|(1+x)f(x)| \le x^2$.

3) Dare due esempi di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e che soddisfi:

a) $f'(x) < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

b) $f'(x) < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

4) Sia $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile in $[0,2]$ e sia $C \neq 0$ la sua media integrale. Calcolare i valori che la funzione

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{C}\mathrm{d}s$$

assume nei punti $x = 0$ e $x = 2$.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \arcsin\left[\left(\frac{2-x}{x^2}\right)^{1/2}\right].$$

6) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e di massimo relativo della funzione

$$f(x) = \log|x-2| + \frac{x-1}{x}.$$

7) Calcolare i punti stazionari della funzione

$$f(x) = 4x - \cos(4x)$$

e studiarne la natura.

8) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x-3}{x^3-1}\mathrm{d}x.$$

A.A 2004/2005 Appello 04 Luglio 2005 Traccia A

1) Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2} + x^4$, e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Determinare la legge delle funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

2) Enunciare il Teorema di Waierstrass. Mostrare poi, con un controesempio, che la tesi del teorema non sussiste, in generale, se si considera una funzione non continua.

3) Dimostrare, usando il Teorema di Lagrange, che una funzione, definita su un intervallo non vuoto e ivi derivabile con derivata nulla, è costante.

4) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $G(x) = \int_a^b (s^2 - 1)\mathrm{d}s - (b - a)(x^2 - 1)$. Verificare che il valore dell'integrale $\int_a^b G(x)\mathrm{d}x$ non dipende dagli estremi a e b.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{e^{-x^2} - e^{-x^2} \sin x}.$$

6) Stabilire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x - \alpha)^3 + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \beta \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è derivabile in 0.

7) Determinare gli asintoti e studiare la monotonia della funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x - 1|} + \arctan x.$$

8) Calcolare l'integrale

$$\int_2^1 \frac{2 \log x}{(x + 1)^3} \mathrm{d}x.$$

A.A 2004/2005 Appello 04 Luglio 2005 Traccia B

1) Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \arctan(x^4)$, e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Determinare la legge delle funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

2) Enunciare il Teorema di Waierstrass. Mostrare poi, con un controesempio, che la tesi del teorema non sussiste, in generale, se si considera un intervallo aperto.

3) Dimostrare, usando il Teorema di Lagrange, che una funzione, derivabile su un intervallo non vuoto e che assume lo stesso valore negli estremi di tale intervallo, deve avere derivata nulla in almeno un punto interno all'intervallo.

4) Sia $a, \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e sia $G(x) = \int_a^{2a} \log(e^s - 1)\mathrm{d}s - a\log(e^x - 1)$. Verificare che il valore dell'integrale $\int_a^{2a} G(x)\mathrm{d}x$ non dipende da a.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log(2e^{-x} - e^{-x}\cos x).$$

6) Stabilire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 4(x-2)^2 - \alpha & \text{se } x \geq 0 \\ (\beta - 1)\arctan x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è derivabile in 0.

7) Determinare gli asintoti e studiare la monotonia della funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x-2|} - \log x.$$

8) Calcolare l'integrale

$$\int_2^1 \frac{\log(x+1)}{x^3}\mathrm{d}x.$$

A.A 2004/2005 Appello 21 Settembre 2005 Traccia A

1) Considerare le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\arctan x + \pi}$, e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Determinare la legge delle funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

2) Enunciare il Teorema della permanenza del segno del segno. Si consideri, poi, un intervallo aperto I contenente il punto x_0 ed una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Cosa si può dire del segno di f in un intorno del punto x_0? Corredare la risposta con esempi.

3) Dare la definizione di punto di flesso. Si consideri, poi, una funzione reale f derivabile due volte su un intervallo aperto I e si enunci una condizione necessaria perché f abbia un punto di flesso in $x_0 \in I$.

4) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e si consideri la funzione integrale $G(x) = \int_a^x f(s)\mathrm{d}s$. Se f è positiva cosa si può dire sul segno e sulla monotonia di G. Giustificare le risposte.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \big(2x \log(x^2-1)\big)^{\sqrt{3}}$$

6) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{(x-\sqrt{2})^2 - \sin(x^2-2)}{\tan[(x-\sqrt{2})^2] + \sqrt{2}x - 2}$$

7) Determinare i punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2\arctan(e^{x^2}).$$

8) Calcolare l'integrale

$$\int_1^{\pi} (x^2 \log(x^2) - x\cos x) dex.$$