1) Stabilire se i seguenti integrali generalizzati convergono o meno

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)^{3/2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)dx$

a) l'integrando è continuo in $(1,+\infty)$ quindi è integrabile in ogni intervallo $[a,b]\subset(1,+\infty)$

Poiché

$$\frac{\sin(x-1)}{(x-1)^{3/2}} \sim \frac{1}{(x-1)^{1/2}} \quad \text{per } x\to 1^+ \text{ e quindi}$$

$\displaystyle\int_1^{a} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)^{3/2}}\,dx$ converge qualunque sia $a>1$

Inoltre $\left|\dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)^{3/2}}\right| \le \dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ e dunque

$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)^{3/2}}\,dx$ converge assolutamente e quindi converge.

b) l'integrando è continuo in $[1,+\infty)$ e quindi è integrabile in $[1,\omega]$, $\forall \omega>1$.

Poiché $1-\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \dfrac{1}{2x^4}$ per $x\to+\infty$

l'integrale assegnato converge

2) Determinare e rappresentare nel piano il dominio della funzione

$$f(x,y) = \log\left(2-x^2-2y^2\right)/\arcsin x$$

Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi

Stabilire se esiste il piano tg. al grafico di f nel punto $\left(\frac12, 0, f\left(\frac12,0\right)\right)$ e in caso affermativo scriverne l'equazione

dom f:

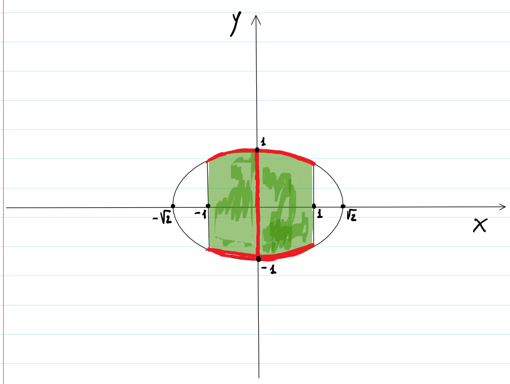
$$\begin{cases} 2-x^2-2y^2>0 \\ -1\le x\le 1 \\ \arcsin x \ne 0 \end{cases} \quad \text{quindi}$$

$$\begin{cases} 2 > x^2+2y^2 \\ -1\le x\le 1 \\ x\ne 0 \end{cases}$$

l'equazione $2=x^2+2y^2$ rappresenta un ellisse di centro $(0,0)$

e vertici $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$

Il dominio di f è quindi l'insieme colorato in verde nella figura qui accanto.



Gli archi di ellisse e il segmento in rosso non fanno parte del dominio. Si tratta quindi di un insieme né aperto, né chiuso, limitato e non connesso per archi.

Poiché f è rapporto delle funzioni $g(x,y) = \log(2-x^2-2y^2)$ e $h(x,y) = \arcsin x$, entrambe di classe C^∞ nell'interno del proprio dominio, f è di classe C^∞ nell'interno del suo dominio. $\left(\frac{1}{2},0\right) \in \overset{\frown}{\text{dom} f}$ e quindi f è differenziabile in tale punto. Dunque il grafico di f ha piano tg. nel punto $\left(\frac{1}{2},0,f\left(\frac{1}{2},0\right)\right)$ di equazione

$$z = f\left(\frac{1}{2},0\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},0\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},0\right) y$$

$$f\left(\frac{1}{2},0\right) = \log\left(2-\frac{1}{4}\right) \Big/ \arcsin\frac{1}{2} = \log\frac{7}{4} \Big/ \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{-2x}{2-x^2-2y^2}\arcsin x - \log(2-x^2-y^2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},0\right) = \left(\frac{-1}{\frac{7}{4}}\,\frac{\pi}{6} - \log\left(\frac{7}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) \Big/ \frac{\pi^2}{6^2}$$

$$= -\frac{24}{7}\cdot\frac{1}{\pi} - \frac{72}{\sqrt{3}}\log\left(\frac{7}{4}\right)\frac{1}{\pi^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4y}{2-x^2-2y^2}\cdot\frac{1}{\arcsin x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},0\right) = 0$$

Quindi l'eq. del piano tg. richiesta è

$$z = \frac{6}{\pi}\log\left(\frac{7}{4}\right) - \left(\frac{24}{7\cdot\pi} + \frac{72}{\sqrt{3}\pi^2}\log\left(\frac{7}{4}\right)\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

3)

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = x^2 - 1 + e^{-x} \qquad (*) \\ y(-1) = 0 \\ y'(-1) = 1 \end{cases}$$

L'eq. omogenea associata a $(*)$ è $y''+y'=0$ che ha equazione caratteristica $\lambda^2+\lambda=0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=-1$

Dunque l'integrale generale dell'eq. omogenea è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare delle equazioni:

$$y'' + y' = x^2 - 1$$

Poiché 0 è soluzione dell'equazione caratteristica

$$\tilde{y}_1(x) = x(ax^2+bx+c)$$

$$\tilde{y}_1'(x) = ax^2+bx+c + 2ax^2+bx$$

$$\tilde{y}''(x) = 2ax+b+4ax+b = 6ax+2b$$

Deve quindi essere

$$6ax+2b+3ax^2+2bx+c = x^2-1$$

ovvero

$$3ax^2+(6a+2b)x+2b+c = x^2-1$$

da cui

$$\begin{cases} 3a=1 \\ 6a+2b=0 \\ 2b+c=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

$$y''+y' = e^{-x}$$

Poiché -1 è soluzione dell'equazione caratteristica

$$\tilde{y}_2(x) = Kx e^{-x}$$

$$\tilde{y}_2'(x) = Ke^{-x} - Kxe^{-x}$$

$$\tilde{y}_2''(x) = -Ke^{-x} - Ke^{-x} + Kxe^{-x}$$

Deve quindi essere

$$\cancel{Kxe^{-x}} - 2Ke^{-x} + Ke^{-x} - \cancel{Kxe^{-x}} = e^{-x}$$

cioè $-Ke^{-x} = e^{-x}$ da cui

$K=-1$; quindi

$$\tilde{y}_2(x) = -xe^{-x}$$

$2b + c = -1 \quad \Big| \quad c = 1$

quindi $\tilde{y}_1(x) = x\left(\frac{1}{3}x^2 - x + 1\right)$

Pertanto l'integrale generale di $(*)$ è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - xe^{-x}$$

$$0 = y(-1) = c_1 + c_2 e - \frac{1}{3} - 1 - 1 + e$$
$$= c_1 + c_2 e + e - \frac{7}{3}$$

$$y'(x) = -c_2 e^{-x} + x^2 - 2x + 1 - e^{-x} + xe^{-x}$$

$$1 = y'(-1) = -c_2 e + 1 + 2 + 1 - e - e = -c_2 e + 4 - 2e$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1 + c_2 e = \frac{7}{3} - e \\ c_2 e = 3 - 2e \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = 3/e - 2 \\ c_1 = -3 + 2e + \frac{7}{3} - e = \frac{-2}{3} + e \end{cases}$$

La soluzione del problema è quindi

$$y(x) = -\frac{2}{3} + e + \left(\frac{3}{e} - 2\right)e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - xe^{-x}$$

4) Dimostrare che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Si veda la lezione 45