



Politecnico di Bari - CUC Ingegneria dell'Informazione
Laurea Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Programma di Complementi di Analisi Matematica
AA 2009-2010 Docente: Dr. E. Caponio

La presenza dell'abbreviazione (nodim) a fianco di una voce del programma indica che relativamente a tale argomento non sono state date dimostrazioni a lezione.

Spazi metrici

Esempi di distanze: distanza euclidea, metrica discreta, distanza integrale di ordine 1 e di ordine 2, distanze lagrangiane. Topologia indotta dalla metrica. Convergenza di una successione. Successioni di Cauchy. Completezza di uno spazio metrico.

Successioni di funzioni

Spazi di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme. Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. La convergenza uniforme come convergenza in un opportuno spazio di funzioni munito di metrica lagrangiana.

Teorema sullo scambio dei limiti e sue conseguenze (continuità del limite uniforme di una successione di funzioni continue; scambio dei limiti per una funzione di due variabili reali).

Teorema di passaggio al limite sotto l'operatore derivata (*nodim*) e teorema di passaggio al limite sotto l'operatore integrale.

Serie di funzioni

Convergenza puntuale e convergenza uniforme. Esempi (serie geometrica). Traduzione alle serie di funzioni del criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Convergenza assoluta e convergenza totale. Relazioni fra le varie nozioni di convergenza.

Spazi normati ed estensione della nozione di serie agli spazi normati: distanza indotta da una norma, esempi di norme (norma euclidea, norme matriciali, norma del "sup"), successioni di Cauchy in uno spazio normato, spazi di Banach. Serie in uno spazio normato.

Dai teoremi di scambio dei limiti del limite con l'operatore di derivata e di integrale per le successioni di funzioni ai teoremi sulla continuità della somma di una serie di funzioni continue, di derivazione e integrazione termine a termine.

Serie di potenze nel campo dei numeri complessi

Generalità. Raggio di convergenza e disco di convergenza. Teoremi per il calcolo del raggio di convergenza. Convergenza totale e uniforme sui compatti contenuti nel disco di convergenza. Teorema di Abel (*nodim*).

Funzioni complesse di variabile complessa

Parte reale e parte immaginaria di una funzione complessa. Nozione di limite, di continuità. Funzioni olomorfe. Operazioni con le derivate, derivata di una funzione

composta, derivata di una funzione inversa. Raggio di convergenza della serie delle derivate di una serie di potenze. Derivabilità della somma di una serie di potenze. Relazione tra i coefficienti della serie e i valori nel centro delle derivate successive della somma.

Serie di Taylor nel campo dei numeri reali

Nozione di funzione analitica. Condizioni affinché una funzione reale sia analitica in un intervallo. Analiticità di alcune funzioni reali elementari. Calcolo per serie di alcuni integrali. Funzione degli errori.

Funzioni olomorfe

Condizioni di Cauchy-Riemann. Esempi. Funzioni intere.

Integrale di una curva regolare a tratti a valori nel campo dei numeri complessi. Integrale di una funzione complessa lungo una curva regolare a tratti e sua interpretazione come coppia di integrali di due forme differenziali associate alla funzione.

Convenzione sull'orientamento della frontiera di un dominio regolare. Teorema di Cauchy-Goursat (*nodim*). Formula di rappresentazione di Cauchy. Funzioni complesse analitiche. Analiticità di una funzione olomorfa e seconda formula di rappresentazione di Cauchy. Applicazioni delle formule di Cauchy al calcolo di integrali di funzioni olomorfe lungo curve. Zeri di una funzione olomorfa. Ordine di uno zero. Zeri isolati. Equivalenza per uno zero tra l'essere isolato e avere ordine finito. Principio di identità per le funzioni olomorfe. Estensione olomorfa. Estensioni olomorfe di alcune funzioni elementari reali (esponenziale, seno, coseno). Formula di Eulero. Logaritmo di un numero complesso. Funzioni multivoche. Determinazione principale del logaritmo. Continuità e derivabilità della determinazione principale del logaritmo: piano complesso tagliato. Potenza con esponente complesso.

Teorema di Hermite-Liouville. Teorema fondamentale dell'algebra.

Serie di Laurent

Serie numeriche bilatere (analogia con nozione di integrale improprio sulla retta reale) Insieme di convergenza di una serie di Laurent. Disco bucato e piano complesso bucato. Univocità dei coefficienti nello sviluppo in serie di Laurent. Sviluppabilità in serie di Laurent di una funzione olomorfa su una corona circolare. Singolarità isolate. Classificazione delle singolarità isolate. Caratterizzazione di singolarità eliminabili, poli e singolarità essenziali. Teorema di Picard (*nodim*). Residuo in un punto singolare. I Teorema dei residui. Metodi per il calcolo del residuo in un punto singolare. Singolarità all'infinito e residuo all'infinito. II Teorema dei residui. Calcolo di alcuni integrali attraverso il metodo dei residui: lemma di Jordan, integrali trigonometrici, integrali impropri sulla retta reale di funzioni aventi al più un numero finito di discontinuità, integrali di tipo Fourier, integrali di Fresnel.

Spazi di Hilbert e serie di Fourier

Spazi con prodotto scalare. Definizione ed esempi: lo spazio ℓ_2 delle successioni a valori complessi aventi serie dei moduli al quadrato convergente. Norma indotta da un prodotto scalare. Regola del parallelogramma. Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Continuità del prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Sistemi ortonormali. Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (*nodim*). Basi numerabili. Spazi di Hilbert separabili. Caratterizzazione degli spazi di Hilbert separabili. Identità di Parseval. ℓ_2 come modello di ogni spazio di Hilbert separabile. Serie di Fourier relativa ad un sistema ortonormale.

Cenni sullo spazio di Hilbert L^2 $([-\pi, \pi])$ e serie di Fourier in L^2 $([-\pi, \pi])$ (*nodim*). Polinomi trigonometrici. Riduzione del caso di una funzione definita nell'intervallo $[0, T]$ (o più in generale $[a, b]$) a quello dell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Condizioni sufficienti per la convergenza puntuale e uniforme ad f della serie di Fourier di f (*nodim*). Il software SAGE per calcolare e visualizzare somme parziali della serie di Fourier di una funzione. Esempi.

Testi di riferimento

- M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa "Analisi Matematica 2", Zanichelli, 2008.
- C. D. Pagani, S. Salsa "Analisi Matematica", volume 2, Zanichelli, 1991 (*per approfondimenti*).
- P. Marcellini, C. Sbordone, "Esercitazioni di Matematica", Il volume, parte prima, Liguori Editore, 1995.
- G. Di Fazio, M. Frasca "Metodi Matematici per l'Ingegneria", Monduzzi Editore, 2003.
- M. Giaquinta, G. Modica, "Note di Metodi Matematici per Ingegneria Informatica", Pitagora Editrice, 2007 (*per approfondimenti*).

Bari, 12/07/2010



Dott. E. Caponio