1) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{k^{2/3}}\right)+\log\left(1-\frac{1}{k^{2/3}}\right)}{2k^{-1/2}-1}$$

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{k^{2/3}}\right)+\log\left(1-\frac{1}{k^{2/3}}\right)}{2k^{-1/2}-1} = \frac{\log\left(1-\frac{1}{k^{4/3}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{k}}-1} \sim \frac{1}{k^{4/3}}$$

Poiché $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{4/3}} \in \mathbb{R}$ anche la serie di partenza converge

2) Si consideri la funzione

$f(x,y) = \operatorname{arctg}^2(y-x)\cdot(y-2x+1)^3$

Stabilire se esiste la derivata direzionale nel punto $(1,0)$ secondo la direzione $v=\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ ed in caso affermativo calcolarla. Determinare infine gli eventuali punti estremali di f.

f è una funzione di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ in quanto prodotto di $g(x,y) = \operatorname{arctg}^2(y-x)$ che è C^∞ poiché composta dal polinomio $y-x$ e dal quadrato della funzione arctg e del polinomio $h(x,y) = (y-2x+1)^3$. Dunque f è

differenziabile in ogni punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e dunque esiste $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \langle \nabla f(1,0), v\rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\operatorname{arctg}(y-x)\cdot\left(-\frac{1}{1+(y-x)^2}\right)(y-2x+1)^3 - \operatorname{arctg}^2(y-x)\, 6\,(y-2x+1)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\operatorname{arctg}(y-x)\,\frac{1}{1+(y-x)^2}(y-2x+1)^3 + \operatorname{arctg}^2(y-x)\, 3\,(y-2x+1)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2\operatorname{arctg}(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) - \operatorname{arctg}^2(-1)\, 6\cdot 1 = -\frac{\pi}{4} - 6\frac{\pi^2}{16} = -\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2\operatorname{arctg}(-1)\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) + \operatorname{arctg}^2(-1)\cdot 3\cdot 1 = -\frac{\pi}{4} + 3\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3\pi}{4}-1\right)$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \frac{\pi}{16}\left(1+\frac{3}{2}\pi\right) + \frac{\sqrt{15}}{16}\pi\left(\frac{3}{4}\pi - 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(1+\frac{3}{2}\pi + \frac{\sqrt{15}\cdot 3}{4}\pi - \sqrt{15}\right)$$

Dato che $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ i suoi eventuali punti estremali devono essere punti critici. Cerchiamoli:

$$\begin{cases} 2\operatorname{arctg}(y-x)\cdot\left(-\frac{1}{1+(y-x)^2}\right)(y-2x+1)^3 - \operatorname{arctg}^2(y-x)\, 6\,(y-2x+1)^2 = 0 \\ 2\operatorname{arctg}(y-x)\,\frac{1}{1+(y-x)^2}(y-2x+1)^3 + \operatorname{arctg}^2(y-x)\, 3\,(y-2x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro e riscrivendo la 2ª equazione otteniamo

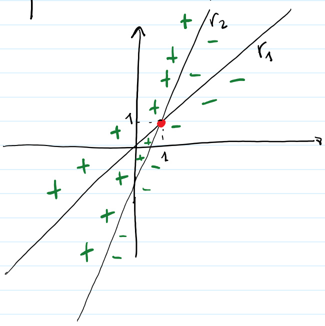
$$\begin{cases} -3\operatorname{arctg}^2(y-x)\,(y-2x+1)^2 = 0 \\ 2\operatorname{arctg}(y-x)\,\frac{1}{1+(y-x)^2}(y-x+2)^3 + \operatorname{arctg}^2(y-x)\, 3\,(y-x+2)^2 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(y-x)=0 \\ 0=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y-2x+1=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-x=0 \\ 0=0 \end{cases} \vee \quad ''$$

Quindi le rette di equazione $r_1: y=x$ e $r_2: y=2x-1$ sono rette di punti critici. Poiché se $(\bar{x},\bar{y})\in r_1 \cup r_2$ $f(\bar{x},\bar{y})=0$, il segno di $f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})$ coincide con quello di f. Il segno di f dipende solo da quello del polinomio $y-2x+1$:



Il punto di intersezione tra r_1 e r_2 ha coordinate $\begin{cases} y-x=0 \\ y-2x+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x \\ x=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$

quindi se $(\bar{x},\bar{y})\in r_1$ e $\bar{x}>1$

$f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})=f(x,y)<0$ in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$ che è quindi di max locale non forte;

se $(\bar{x},\bar{y})\in r_1$ e $\bar{x}<1$

$f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})=f(x,y)>0$ in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$ che è quindi di min locale non forte;

il punto $(1,1)$ così come tutti i punti della retta r_2 è di sella in quanto $f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})=f(x,y)$ non ha un segno definito in alcun intorno di $(\bar{x},\bar{y})\in r_2$.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+\pi^2 y = \cos(\pi t)+1 \quad (*) \\ y(0)=0=y'(0) \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata all'eq. $(*)$ è

$\lambda^2+\pi^2=0$ che ha discriminante negativo. L'omogenea associata ha dunque integrale generale

$$y(t)=c_1\cos(\pi t)+c_2\sin(\pi t)$$

Cerchiamo una soluzione particolare di $(*)$

Il termine noto è $f(t)=\cos(\pi t)+1$; possiamo applicare il metodo di similarità separatamente a

$$y''+\pi^2 y=1 \qquad e \qquad y''+\pi^2 y=\cos(\pi t)$$

Per la prima, deve essere $\tilde{y}(t)=k$ cioè $\pi^2 k=1$ da cui

$$k=\frac{1}{\pi^2}$$

Per la seconda dato che $i\pi$ è soluzione dell'equazione

$K = \frac{1}{\pi^2}$

Per la seconda dato che $i\pi$ è soluzione dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata, cerchiamo $\tilde{y}_2(t)$ del tipo

$$\tilde{y}_2(t) = x\left(K_1 \cos(\pi t) + K_2 \sin(\pi t)\right)$$

$$\tilde{y}_2'(t) = k_1 \cos(\pi t) + k_2 \sin(\pi t) + x\left(-\pi K_1 \sin(\pi t) + \pi k_2 \cos(\pi t)\right)$$

$$= \cos(\pi t)\left[K_1 + \pi K_2 x\right] + \sin(\pi t)\left[K_2 - \pi k_1 x\right]$$

$$\tilde{y}_2''(t) = -\pi \sin(\pi t)\left[K_1 + \pi k_2 x\right] + \cos(\pi t)\,\pi k_2$$
$$+ \pi \cos(\pi t)\left[K_2 - \pi K_1 x\right] - \sin(\pi t)\,\pi K_1$$

Quindi

$$-\pi \sin(\pi t)\left[K_1 + \cancel{\pi k_2 x}\right] + \cos(\pi t)\,\pi k_2$$
$$+ \pi \cos(\pi t)\left[K_2 - \cancel{\pi K_1 x}\right] - \sin(\pi t)\,\pi K_1$$
$$+ \cancel{\pi^2 k_1 x \cos(\pi t)} + \cancel{\pi^2 k_2 x \sin(\pi t)} = \cos(\pi t)$$

$$\Leftrightarrow -2K_1 \pi \sin(\pi t) + 2k_2\pi \cos(\pi t) = \cos(\pi t)$$

Deve quindi essere $-2k_1\pi = 0$ e $2k_2\pi = 1$ da cui $K_1 = 0$ e $K_2 = \frac{1}{2\pi}$. La soluzione particolare cercata è dunque

$$\tilde{y}_2(t) = \frac{t}{2\pi} \sin(\pi t)$$

Quindi l'integrale generale di $(*)$ è dato da

$$y(t) = c_1 \cos(\pi t) + c_2 \sin(\pi t) + \frac{t}{2\pi}\sin(\pi t) + \frac{1}{\pi^2}$$

$0 = y(0) = c_1 + \frac{1}{\pi^2}$ da cui $c_1 = -\frac{1}{\pi^2}$

e quindi $y'(t) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t) + c_2\pi\cos(\pi t) + \frac{\sin(\pi t)}{2\pi} + \frac{t}{2}\cos(\pi t)$

$0 = y'(0) = c_2\pi$ e dunque $c_2 = 0$

La soluzione del problema è quindi

$$y(t) = -\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{t}{2\pi}\sin(\pi t) + \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2}\left(1 - \cos(\pi t) + \frac{\pi}{2}t \sin(\pi t)\right)$$

4) Enunciare la caratterizzazione di un insieme misurabile in relazione alla sua frontiera. Dare la definizione di insieme normale rispetto all'asse delle x e spiegare perché è misurabile.

Si vede la lezione 43