1) Calcolare la trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione dei segnali
$f_1(t) = \cos_+[2(t-1)]$, $f_2(t) = H(t-2)$, dove H è la funzione di Heaviside
specificando il suo dominio

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2)(s) = \mathcal{L}(f_1)(s) \cdot \mathcal{L}(f_2)(s) \quad \forall s > \max\{\sigma(f_1), \sigma(f_2)\}$$

Poiché $\mathcal{L}(\cos_+(2t)) = \dfrac{s}{s^2+4}$ $\forall s \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re} s > 0$ e $\mathcal{L}(f(t-t_0)) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}(f(t))(s)$,
$\forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > \sigma(f)$

abbiamo che $\mathcal{L}(\cos_+(2(t-1))) = e^{-s}\dfrac{s}{s^2+4}$ $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$

Analogamente $\mathcal{L}(H(t-2)) = \dfrac{e^{-2s}}{s}$ $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$

Quindi $\mathcal{L}(f_1 * f_2)(s) = e^{-s}\dfrac{s}{s^2+4} \cdot e^{-2s} \cdot \dfrac{1}{s} = \dfrac{e^{-3s}}{s^2+4}$ $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$

1) Anni precedenti

Usando il teorema di integrazione termine a termine calcolare per serie

$$\int_0^2 e^{-(x-1)^2}\, dx$$

$$e^{-(x-1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-(x-1)^2\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^{2k}}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi
$$\int_0^2 e^{-(x-1)^2}\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^2 (x-1)^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1} (x-1)^{2k+1} \Big|_0^2 =$$

$$= \sum^{+\infty} (-1)^k \qquad - (-1)^{2k+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1} \left(1 - (-1)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2}{2k+1}$$

2) Stabilire se la serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] (z-(1-i))^n \quad \text{converge in } z = 1 - \frac{i}{2}$$

$$a_n = \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0 \quad \forall n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1 \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{n+1}{n} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\quad} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\quad} \cdot \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

Quindi il raggio di convergenza della serie è 1

Poiché $\left| 1-\frac{i}{2} - (1-i) \right| = \left| \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$ la serie converge

nel punto $1-\frac{i}{2}$

3) Dimostrare che se z_0 è uno zero di molteplicità m per f olomorfa su $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ allora esso è un polo di ordine m per $\frac{1}{f}$

Poiché z_0 ha molteplicità finita, esso è uno zero isolato per f; dunque $\frac{1}{f}$ ha in z_0 una singolarità isolata. Inoltre poiché esiste $g \in H(\Omega)$ t.c. $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0) \neq 0$, abbiamo che

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m \frac{1}{(z-z_0)^m g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} \neq 0$$

Dunque z_0 è un polo di ordine m per f

4) Calcolare i residui nelle singolarità al finito e all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}} z}{(z-i)(z+i)^2}$$

Le singolarità al finito di f sono $\{i, -i, 0\}$

i è un polo semplice, $-i$ è un polo di ordine 2, 0 è una singolarità essenziale

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{e^{-\frac{1}{z^2}} z}{(z+i)^2} = \frac{e \cdot i}{-4} = -\frac{e}{4} i$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \to -i} D\left((z+i)^2 f(z) \right) = \lim_{z \to -i} D\left(\frac{e^{-\frac{1}{z^2}} z}{z-i} \right) =$$

$$= \lim_{z \to -i} \frac{\left(\frac{2}{z^3} e^{-\frac{1}{z^2}} z + e^{-\frac{1}{z^2}} \right)(z-i) - e^{-\frac{1}{z^2}} z}{(z-i)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{i} e(-i) + e \right)(-2i) + ei}{-4} = \frac{2ei + ei}{-4} = -\frac{3}{4} e i$$

Poiché 0 è una singolarità essenziale, calcoliamo prima il residuo all'infinito

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{e^{-z^2} \cdot \frac{1}{z}}{\left(\frac{1-iz}{z}\right)\left(\frac{1+iz}{z}\right)^2} = -\frac{e^{-z^2}}{(1-iz)(1+iz)^2}$$

Poiché $\lim_{z\to 0} -\frac{e^{-z^2}}{(1-iz)(1+iz)^2} = -1 \neq 0$ 0 è una singolarità eliminabile per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$. Quindi $\operatorname{Res}(f,\infty) = 0$

Per il II teorema dei residui $\operatorname{Res}(f,0) = -\operatorname{Res}(f,\infty) - \operatorname{Res}(f,i) - \operatorname{Res}(f,-i)$

$$= 0 + \frac{e}{4} i + \frac{3}{4} e i = ei$$

5) Enunciare e dimostrare il teorema di Hermite-Liouville. Fornire poi almeno una sua conseguenza.

Si veda, ad esempio, pagg 92-93 degli appunti

6) Scrivere la serie di soli seni della funzione

$f(x) = x^2, \quad x \in [0,2]$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^2 \sin\left(\frac{2k\pi x}{4}\right) x^2 \, dx = \int_0^2 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) x^2 \, dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) x^2 \Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 2x \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} 4\cos(k\pi) + \frac{8}{(k\pi)^2} x \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 - \frac{8}{(k\pi)^2} \int_0^2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx$$

$$= -\frac{8}{k\pi}(-1)^k + \frac{8}{(k\pi)^2}\left(2\sin(k\pi) - 0\right) + \frac{16}{(k\pi)^3} \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1} + 0 + \frac{16}{(k\pi)^3}\left(\cos(k\pi) - 1\right) = \frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right)$$

Dunque la serie richiesta è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right)$$

Per $x = 1$ otteniamo tale serie converge a $f(1) = 1$,

dunque $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad (*)$

dunque $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3} \left((-1)^k - 1\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{2} \right) \quad (*)$

Osserviamo che per k pari $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$, per k dispari $k = 2h+1$
$\sin\left((2h+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^h$;

osserviamo anche che per k dispari

$$\frac{8}{k\pi}(-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{8}{k\pi} - \frac{32}{(k\pi)^3}$$

Dunque la serie $(*)$ diventa

$\sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{8}{(2h+1)\pi} - \frac{32}{((2h+1)\pi)^3} \right) (-1)^h$ ed ha somma 1

quindi $\sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2h+1)\pi} - \frac{4}{((2h+1)\pi)^3} \right) (-1)^h = \frac{1}{8}$