Possibile svolgimento della prova del 15 gennaio 2026 – Modulo B

1) **(a)** Per la linearità dell'operatore di serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{8}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{8}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Si tratta di due serie geometriche di ragione $q_1 = 1/4$ e $q_2 = 1/2$. Poiché entrambe le ragioni sono in modulo minori di 1, le serie convergono. Ricordando che $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$ (poiché la somma parte da $n = 1$), otteniamo:

$$S_1 = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}, \quad S_2 = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

La somma totale è $S = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

(b) Studiamo il comportamento asintotico del termine generale $a_n = \frac{\arctan(n)}{n^\alpha \sqrt{n+1}}$. Per $n \to +\infty$:

$$\arctan(n) \to \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{n+1} \sim \sqrt{n} = n^{1/2}.$$

Quindi:

$$a_n \sim \frac{\pi/2}{n^\alpha \cdot n^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}.$$

La serie data si comporta come la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^\beta}$ con $\beta = \alpha + 1/2$. Tale serie converge se e solo se $\beta > 1$, ovvero:

$$\alpha + \frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}.$$

La serie diverge per $\alpha \leq 1/2$.

2) Le derivate parziali di $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 2$ sono:

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Per trovare i punti critici poniamo $\nabla f = 0$:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \implies y = x^2 \\ 3y^2 - 3x = 0 \implies y^2 = x \end{cases}$$

Sostituendo la prima nella seconda: $(x^2)^2 = x \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0$. Le soluzioni reali sono $x = 0$ e $x = 1$.

- Se $x = 0 \implies y = 0$. Punto critico $P_1(0, 0)$.
- Se $x = 1 \implies y = 1$. Punto critico $P_2(1, 1)$.

Calcoliamo la matrice Hessiana:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Analizziamo i punti:

- In $P_1(0, 0)$: $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. $\det(H) = -9 < 0$. Poiché il determinante è negativo, $(0, 0)$ è un punto di **sella**.
- In $P_2(1, 1)$: $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. $\det(H) = 36 - 9 = 27 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$. $(1, 1)$ è un punto di **minimo locale**.

Per il piano tangente nel punto $(1,2)$: Calcoliamo $f(1,2) = 1+8-6+2 = 5$. Calcoliamo il gradiente in $(1,2)$:

$$f_x(1,2) = 3(1)^2 - 3(2) = -3, \quad f_y(1,2) = 3(2)^2 - 3(1) = 12 - 3 = 9.$$

L'equazione del piano è:

$$z = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$$
$$z = 5 - 3(x-1) + 9(y-2) \implies z = -3x + 9y - 10.$$

3) L'equazione differenziale è $y'' - 3y' + 2y = (x-1)e^x$.

1. Omogenea associata: $y''-3y'+2y = 0$. Polinomio caratteristico: $\lambda^2-3\lambda+2 = 0 \implies (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$. Soluzioni: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Integrale generale omogenea: $y_o(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}$.

2. Soluzione particolare: Il termine noto è $f(x) = (x-1)e^x$. Poiché il coefficiente dell'esponenziale $\alpha = 1$ coincide con la radice λ_1 del polinomio caratteristico (con molteplicità $m = 1$), cerchiamo una soluzione particolare della forma:

$$y_p(x) = x \cdot (Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned}
y_p' &= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x \\
y_p'' &= (2Ax + 2A + B)e^x + (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x \\
&= (Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B)e^x
\end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione completa $y'' - 3y' + 2y = (x-1)e^x$:

$$\begin{aligned}
e^x\Big[&(Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B) \\
&- 3(Ax^2 + (2A+B)x + B) \\
&+ 2(Ax^2 + Bx)\Big] = (x-1)e^x
\end{aligned}$$

Semplificando e raccogliendo i termini per potenze di x:

- Coefficiente di x^2: $A - 3A + 2A = 0$ (si annulla come deve essere).
- Coefficiente di x: $(4A+B) - 3(2A+B) + 2B = 4A + B - 6A - 3B + 2B = -2A$.
- Termine noto: $(2A + 2B) - 3B = 2A - B$.

Uguagliando ai coefficienti di $(x-1)e^x$:

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - B = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -1/2 \\ 2(-1/2) - B = -1 \implies -1 - B = -1 \implies B = 0 \end{cases}$$

La soluzione particolare è quindi:

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2e^x.$$

L'integrale generale è:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^x.$$

3. Problema di Cauchy: Imponiamo le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

$$y(0) = c_1 + c_2 - 0 = 0 \implies c_1 = -c_2.$$

Calcoliamo la derivata $y'(x)$:

$$y'(x) = c_1e^x + 2c_2e^{2x} - \frac{1}{2}(2xe^x + x^2e^x) = c_1e^x + 2c_2e^{2x} - xe^x - \frac{1}{2}x^2e^x.$$

$$y'(0) = c_1 + 2c_2 - 0 - 0 = 1 \implies c_1 + 2c_2 = 1.$$

Sostituendo $c_1 = -c_2$:
$$-c_2 + 2c_2 = 1 \implies c_2 = 1 \implies c_1 = -1.$$
La soluzione del problema di Cauchy è:
$$y(x) = -e^x + e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 e^x.$$

4) **Definizione:** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{int}(A)$. f si dice differenziabile in x_0 se esiste un vettore $a_{x_0} \in \mathbb{R}^n$ tale che:
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a_{x_0} \cdot h}{\|h\|} = 0.$$
Tale vettore a_{x_0} è unico e coincide con il gradiente $\nabla f(x_0)$.

Teorema: Se f è differenziabile in x_0, allora f è continua in x_0. **Dimostrazione:** Dalla definizione di differenziabilità, possiamo scrivere per $h \to 0$:
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot h + o(\|h\|).$$
Passando al limite per $h \to 0$:
$$\lim_{h \to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \to 0}(\nabla f(x_0) \cdot h + o(\|h\|)) = 0 + 0 = 0.$$
Quindi $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, ovvero f è continua in x_0. $\square$

Esempio: Un esempio possibile è dato dalla funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Èssa è continua su tutto il suo dominio, che è l'intero piano $\mathbb{R}^2$, poiché è composta dalla funzione radice quadrata e dal polinomio $x^2 + y^2$. Quindi f è continua anche nel punto $(0, 0)$.

Tuttavia, verifichiamo che **non è differenziabile** in $(0, 0)$. Condizione necessaria per la differenziabilità è l'esistenza delle derivate parziali nel punto (che costituirebbero il vettore $a_{(0,0)} = \nabla f(0, 0)$ della definizione). Calcoliamo la derivata parziale rispetto a x in $(0, 0)$ mediante il limite del rapporto incrementale:
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t}.$$
Il limite destro è 1, mentre il limite sinistro è -1. Poiché i limiti sono diversi, il limite non esiste e quindi non esiste la derivate parziale rispetto ad x in $(0, 0)$. Pertanto, nello stesso punto, la definizione di differenziabilità non può essere soddisfatta.