1) - a) Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso

$$z=\left(2^{\frac{1}{32}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right)^{16}$$

Usando la formula di De Moivre per la potenza di un numero complesso in forma trigonometrica otteniamo

$$z = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot 16\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 16\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ quindi $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\operatorname{Im} z = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'insieme immagine delle funzioni

$$f(x) = \left(x^3+1\right)^{\sqrt{2}}-1\ ; \qquad g(x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(1+\sqrt{2}^{\,x-1}\right)$$

dom f : $x^3+1\geq 0 \iff x\geq -1$ quindi dom $f=[-1,+\infty)$

f è composta dalle funzioni $f_1(x) = x^3+1$ e $f_2(x) = x^{\sqrt{2}}+1$

Esse sono entrambe strettamente crescenti quindi f è strett. crescente

Poiché $f\in C^0((-1,+\infty))$, Im f è un intervallo e dato che

f è strettamente crescente Im $f = \left[f(-1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [-1,+\infty)$

dom g: $1+\sqrt{2}^{\,x-1} > 0$ che è soddisfatto $\forall x\in\mathbb{R}$.

g è composta dalle funzioni $g_1(x) = 1+\sqrt{2}^{\,x-1}$ e $g_2(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

g_1 è strettamente crescente e g_2 è strettamente decrescente quindi

g è strettamente decrescente.

Poiché $g\in C^0(\mathbb{R})$, Im g è un intervallo e dato che

g è strettamente decrescente esso è l'intervallo

$$\left(\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to-\infty} g(x)\right) = \left(-\infty, \log_{\frac{1}{3}} 1\right) = (-\infty, 0)$$

2) Stabilire per quale valore $\bar{a}$ del parametro $a\in\mathbb{R}$ esiste il limite per $x\to 1$ della funzione

$$f_a(x) = \begin{cases} (x-1)^a\log^2(x-1)+a & \text{per } x>1\\ \dfrac{\sin(2x-2)}{4x-4} & \text{per } x<1\end{cases}$$

Si consideri poi la funzione f_1; si cerchino gli asintoti orizzontali e obliqui $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ di f_1

Dimostrare infine che, f_1 ha un minimo locale stretto in $x=2$

$$\lim_{x \to 1^-} f_a(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sin(2x-2)}{4x-4} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sin(2(x-1))}{4(x-1)} \overset{y=x-1}{=\!=} \lim_{y \to 0^-} \frac{\sin 2y}{2 \cdot 2y} = \frac{1}{2}$$

Affinché il limite di f_a esista in $x=1$ anche $\lim_{x \to 1^+} f_a$ deve essere uguale a $\frac{1}{2}$

Poiché per $a>0$, $\lim_{x \to 1^+} (x-1)^a \log^2(x-1) \overset{y=x-1}{=\!=} \lim_{y \to 0^+} y^a \log^2 y = 0$

e quindi $\lim_{x \to 1^+} (x-1)^a \log^2(x-1) + a = a$, deve essere $\bar{a} = \frac{1}{2}$

Cerchiamo ora gli asintoti orizzontali ed, eventualmente, quelli obliqui di f_1

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-1) \log^2(x-1) + 1 = [+\infty + 1] = +\infty$$ Non c'è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)\log^2(x-1) + 1}{x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)}{x} \log^2(x-1) + \frac{1}{x} = [1 \cdot (+\infty) + 0] = +\infty$$ non c'è neanche asintoto obliquo per $x \to +\infty$

Poiché $\left| \frac{\sin(2(x-1))}{4(x-1)} \right| \leq \frac{1}{4|x-1|}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4|x-1|} = 0$

abbiamo che $\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin(2(x-1))}{4(x-1)} = 0$

quindi la retta $y=0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

Per $x > 1$, abbiamo:

$$f_1'(x) = \log^2(x-1) + (x-1)\, 2\log(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$= \log^2(x-1) + 2\log(x-1)$$

In particolare $f_1'(2) = 0$

Per $x>1$,

$$f_1''(x) = 2\log(x-1) \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-1}$$

$$f_1''(2) = 0 + 2$$

Poiché $f_1'(2) = 0$ e $f_1''(2) > 0$, 2 è un minimo locale stretto per f_1

3) Calcolare

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arctg}^2 x \, dx \qquad e \qquad \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x \, dx$$

Poiché la funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arctg}^2 x$ è pari, il primo integrale è uguale a

integrale è uguale

$$2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arctg}^2 x \, dx \underset{dy = \frac{1}{1+x^2}dx}{\overset{y=\operatorname{arctg} x}{=\!=}} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2 \, dy = \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{3 \cdot 2^5}$$

Poiché la funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x$ è dispari, il secondo integrale è nullo

4) Dare la definizione di funzione monotona crescente e di funzione derivabile in un punto di un intervallo

Dimostrare poi che una funzione f derivabile su un intervallo I è monotona crescente se e solo se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Per le definizione si vede, rispettivamente, p. 37 e p. 182 del manuale consigliato

Si guardi poi la dimostrazione del Teorema 7.21 del manuale consigliato