1) A- Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(e-2)^n}{e}$$

B- Stabilire se la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n - 2}{n^{3/2} - n}$$

converge

A- È una serie geometrica di ragione $e-2$ moltiplicata per $\frac{1}{e}$

e priva dei primi 3 termini. Poiché $e-2 \in (-1,1)$, essa converge

Per calcolarne la somma osserviamo che

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(e-2)^n}{e} = \frac{1}{e} \cdot (e-2)^3 \cdot \sum_{n=3}^{+\infty} (e-2)^{n-3} = \frac{1}{e}(e-2)^3 \sum_{h=0}^{+\infty} (e-2)^h$$

$$= \frac{(e-2)^3}{e} \cdot \frac{1}{1-(e-2)} = \frac{(e-2)^3}{e} \cdot \frac{1}{3-e}$$

B. $\left| \frac{\cos n - 2}{n^{3/2} - n} \right| \leq \frac{3}{n^{3/2} - n} \sim \frac{3}{n^{3/2}} \quad \forall n \geq 2$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{n^{3/2}} \in \mathbb{R}$, la serie assegnata converge

assolutamente e dunque converge

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \left(x^2 y - e^{\sqrt{x^2 - y^2}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

e rappresentarlo graficamente sul piano.

Stabilire poi che f ha derivata direzionale nel punto $(1,0)$ secondo il versore $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

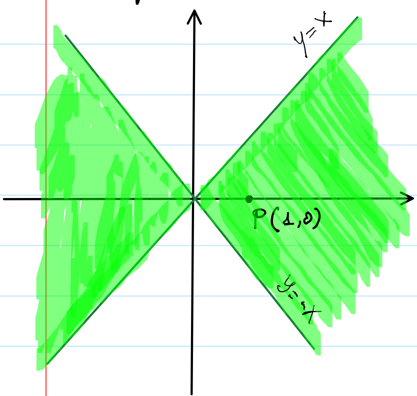
calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2-y^2\geq 0\}$$

$$x^2-y^2\geq 0 \iff (x-y)(x+y)\geq 0 \iff \begin{cases} x-y\geq 0\\ x+y\geq 0\end{cases} \vee \begin{cases} x-y<0\\ x+y<0\end{cases}$$

Dunque il dominio di f è dato dall'insieme tratteggiato in verde in figura



Come si vede il punto P è interno al dominio di f.

f, inoltre, ha derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^2y - e^{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2xy - e^{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^2y - e^{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2 - e^{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{(-2y)}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$$

Queste sono continue nell'interno del dominio di f. Dunque f è differenziabile in P e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot v = \frac{1}{3}(-e)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-e)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{3}(-e)^{-\frac{2}{3}}(1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(e^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{2}{3}}\right)$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = 2e^{-x} - x \qquad (*)\\ y(0) = 1\\ y'(0) = 0\end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata a $(*)$ è $\lambda^2+\lambda=0$ che ha soluzioni $\lambda=0$ e $\lambda=-1$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dunque $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Cerchiamo ora una soluzione delle equazioni

$$y''+y' = 2e^{-x} \qquad (1)$$

Poiché -1 è soluzione dell'equazione caratteristica, applichiamo il metodo di similarità con

$$\tilde{y}_1(x) = Kxe^{-x}$$

$$\tilde{y}_1'(x) = Ke^{-x} - Kxe^{-x}$$

$$\tilde{y}_1''(x) = -2Ke^{-x} + Kxe^{-x}$$

Quindi

$$-2Ke^{-x} + \cancel{Kxe^{-x}} + Ke^{-x} - \cancel{Kxe^{-x}} = 2e^{-x}$$

ossia

$$-Ke^{-x} = 2e^{-x}$$ da cui

$$K = -2$$

$$y''+y' = -x \qquad (2)$$

Poiché 0 è soluzione dell'equazione caratteristica, applichiamo il metodo di similarità con

$$\tilde{y}_2(x) = x(a+bx)$$

$$\tilde{y}_2'(x) = a+bx+bx$$

$$\tilde{y}_2''(x) = 2b$$

Quindi

$$2b + a + 2bx = -x$$

da cui

$$\begin{cases} 2b = -1 \\ 2b+a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ è una soluzione di $(*)$ e dunque il suo integrale generale è $\tilde{y}(x) = c_1 + c_2 e^{-x} - 2xe^{-x} + x\left(1-\frac{1}{2}x\right)$

Determiniamo c_1 e c_2 usando le condizioni iniziali:

$$\tilde{y}(0) = c_1 + c_2$$

$$\tilde{y}'(0) = -c_2 - 2 + 1$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

4) Calcolare

$$\int_A \frac{2xy}{x^2-y^2}\, dx\, dy$$

dove A è l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \frac{x}{2}\}$

$$\int_A \frac{2xy}{x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 x \left(\int_0^{x/2} \frac{2y}{x^2-y^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 x \left(-\log|x^2-y^2| \Big|_0^{\frac{x}{2}} \right) dx$$

$$= -\int_0^1 x \left(\log\left(\frac{3}{4}x^2\right) - \log x^2 \right) dx \qquad (*)$$

Osserviamo che $x\left(\log \frac{3}{4}x^2 - \log x^2\right)$ è integrabile su $[0,1]$ in quanto $x\left(\log \frac{3}{4}x^2 - \log x^2\right) \longrightarrow 0$ per $x \to 0^+$

Dunque $(*) = -\int_0^1 x \log\left(\frac{3}{4}x^2 / x^2\right) = -\log\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 =$

$= -\frac{1}{2} \log \frac{3}{4}$