1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale periodico f di periodo π definito da

$$f(t) = \begin{cases} 2 & t \in (0, \frac{\pi}{4}] \\ 0 & t \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \\ \sin(4t) & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} f(t)\, e^{-st}\, dt \quad \forall s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, s > 0$$

Quindi

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 e^{-st} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(4t) e^{-st} dt \right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(-\frac{2}{s} e^{-st} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(4t) e^{-st} dt \right)$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(4t)\, e^{-st}\, dt$:

se consideriamo la funzione $g(t) = \sin(4t)\, \chi_{[\frac{\pi}{2}, \pi]}$,

tale integrale è uguale a $\mathcal{L}(g)(s)$

$$g(t) = \sin_+\left(4\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) - \sin_+\left(4(t-\pi)\right)$$

quindi $$\mathcal{L}(g)(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{4}{16+s^2} - e^{-\pi s} \frac{4}{16+s^2} = \frac{4\left(e^{-\frac{\pi}{2}s} - e^{-\pi s}\right)}{16+s^2}$$

Pertanto

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(-\frac{2}{s} e^{-\frac{\pi}{4}s} + \frac{2}{s} + \frac{4\left(e^{-\frac{\pi}{2}s} - e^{-\pi s}\right)}{16+s^2} \right).$$

1) Calcolare per serie

$$\int_0^{\frac{1}{4}} x^3 \sin(x^3)\, dx$$

Poiché $$\sin(x^3) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x^3)^{2k+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^3 \sin(x^3) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{6k+6}$$

Quindi

$$\int_0^{\frac{1}{4}} x^3 \sin(x^3)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^{\frac{1}{4}} x^{6(k+1)} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{6(k+1)+1} x^{6(k+1)+1} \Big|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{6(k+1)+1} \left(\frac{1}{2^2}\right)^{6(k+1)+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{6(k+1)+1} \frac{1}{2^{12(k+1)+2}}$$

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k-2} \left(x + \frac{1}{3}\right)^k$$

$$\lim_k \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_k \frac{1}{|3(k+1)-2|} |3k-2| =$$

$$\lim_k \frac{3k-2}{3(k+1)-2} = 1$$

Quindi $\rho = 1$ e l'intervallo di convergenza della serie è $\left(-\frac{1}{3}-1, -\frac{1}{3}+1\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Studiamo la convergenza della serie negli estremi di tale intervallo

Per $x = -\frac{4}{3}$ otteniamo la serie numerica:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k-2} (-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3k-2}$$

Poiché $\frac{1}{3k-2} \sim \frac{1}{3k}$, tale serie diverge

Per $x = \frac{2}{3}$ otteniamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k-2}$$ che è una serie a segni alterni

Poiché $\frac{1}{3k-2} \to 0$ e $\left\{\frac{1}{3k-2}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ è decrescente,

tale serie converge per il criterio di Leibniz.

In conclusione, la serie assegnata converge in $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$ e dunque, per il teorema di Abel, converge uniformemente su $\left[a, \frac{2}{3}\right]$,

$\forall\ a \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\mathcal{C}^+(4,2)} \frac{\operatorname{Log}_0 z}{(z-(4+i))^4}\, dz ,$$

dove $\mathcal{C}^+(4,2)$ è la circonferenza di centro 4 e raggio 2 orientata nel verso antiorario

Ricordiamo che la selezione principale del logaritmo $\operatorname{Log}_0 z = \log|z| + i\operatorname{Arg} z$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus r_0$, dove $r_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \wedge \operatorname{Re} z \le 0\}$

Poiché $D(4,2) \subset \mathbb{C}\setminus r_0$ e $4+i \in D(4,2)$ possiamo applicare la II formula di rappresentazione di Cauchy

Si osservi che non si possono invece applicare I e II teorema dei residui per calcolare l'integrale in quanto ∞ non è una singolarità isolata per $\operatorname{Log}_0 z/(z-(4+i))^4$ dato che non lo è per $\operatorname{Log}_0 z$!!

$$D^{(3)} \operatorname{Log}_0 z \,\Big|_{z=4+i} = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(4,2)} \frac{\operatorname{Log}_0 z}{(z-(4+i))^4}$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$D^{(3)} \operatorname{Log}_0 z \,\big|_{z=4+i} \cdot \frac{2\pi i}{3!}$$

$$D^{(3)} \operatorname{Log}_0 z = \frac{2}{z^3}$$ quindi

. . .

$$D^{(3)} \operatorname{Log}_0 z \,\big|_{z=2+i} \cdot \frac{2\pi i}{3!} = \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{(4+i)^3}$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra

Si veda, ad esempio, pagg. 94 - 95 degli appunti

5) Dare la definizione di residuo in una singolarità isolata. Calcolare poi il residuo in 0 delle funzioni

a) $f(z) = z^5 \sin \frac{1}{z^2} + \cos z$

b) $g(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z-i)}$

Per la definizione si veda pag. 122 degli appunti

a) Tenendo presente che $\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

e $z^5 \sin \frac{1}{z^2} = z^5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^{2k+1} =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k-3}},$$

abbiamo, sommando,

$$z^5 \sin \frac{1}{z^2} + \cos z = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k-3}}}_{1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}}_{2}$$

Questa è chiaramente una serie di Laurent di centro 0. Quindi il residuo in 0 di f è uguale al coefficiente del termine $1/z$ in tale serie. Dato che la serie 2 ha termini con potenze positive, questo è eventualmente presente solo nella serie 1. Lo è se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $4k-3 = 1$. Dato che per $k=1$ questa uguaglianza è soddisfatta otteniamo che $\operatorname{Res}(f,0) = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}$

b) Possiamo usare il II teorema dei residui:

$$\operatorname{Res}(g,0) = -\operatorname{Res}(g,\infty) - \operatorname{Res}(g,i)$$

$$\operatorname{Res}(g,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2}\, g\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2}\, g\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\, \frac{e^{z^2}}{\left(\frac{1}{z}-i\right)} = -\frac{e^{z^2}}{1-iz}\cdot\frac{1}{z}$$

Questa funzione ha in 0 un polo semplice

quindi $\operatorname{Res}(g,\infty) = \lim_{z\to 0} -z\, \dfrac{e^{z^2}}{1-iz}\cdot\dfrac{1}{z} = -1$

Il punto i è anch'esso un polo semplice per g

Quindi $\operatorname{Res}(g,i) = \lim_{z\to i} (z-i)\, \dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z-i)} = e^{-1}$.

Pertanto $\operatorname{Res}(g,0) = 1 - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e-1}{e}$

6) Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x\in[0,1] \\ 2 & \text{se } x\in(1,2] \end{cases}$$

Usare tale serie per dimostrare che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 2\,dx = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{2\pi k x}{2}\right)dx = \int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx + 2\int_1^2 \cos(k\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{k\pi}\, x\sin(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi x)\,dx + \frac{2}{k\pi}\sin(k\pi x)\Big|_1^2$$

$$= 0 + \frac{1}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x)\Big|_0^1 + 0 = \frac{1}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\frac{2}{k^2\pi^2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{2\pi k x}{2}\right) = \int_0^1 x\sin(k\pi x)\,dx + 2\int_1^2 \sin(k\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\, x\cos(k\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos(k\pi x)\,dx - \frac{2}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{k\pi}(-1)^k + \frac{1}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$= -\frac{1}{k\pi}(-1)^k + 0 - \frac{2}{k\pi} + 2\frac{(-1)^k}{k\pi} =$$

$$= \frac{1}{\ldots}\left((-1)^k - 2\right) = \begin{cases} -\frac{1}{k\pi} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \ldots \end{cases}$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left((-1)^k - 2\right) = \begin{cases} -\dfrac{1}{k\pi} & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\dfrac{3}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier di f è data da

$$\frac{5}{4} + \sum_{h=0}^{+\infty} -\frac{2}{(2h+1)^2\pi^2}\cos((2h+1)\pi x) + \sum_{h=0}^{+\infty} -\frac{1}{2h\pi}\sin(2h\pi x) + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{-3}{(2h+1)\pi}\sin((2h+1)\pi x)$$

Nel punto $x=1$ tale serie deve convergere a

$$\frac{f(1^-)+f(1^+)}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

cioè

$$\frac{5}{4} + \sum_{h=0}^{+\infty} -\frac{2}{(2h+1)^2\pi^2}\overbrace{\cos((2h+1)\pi)}^{=-1\ \forall h} + \sum_{h=0}^{+\infty} -\frac{1}{2h\pi}\overbrace{\sin(2h\pi)}^{0\ \forall h} + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{-3}{(2h+1)\pi}\underbrace{\sin((2h+1)\pi)}_{0\ \forall h} = \frac{3}{2}$$

cioè

$$-\frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{(2h+1)^2\pi^2}$$ da cui

$$\frac{1}{4} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{(2h+1)^2\pi^2} \quad \text{cioè} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(2h+1)^2}$$