1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A (1-(xy)^2)\,dx\,dy \,, \quad \text{con } A=\{(x,y):\ y^2\le x\le 2y^2\,,\ 0\le y\le 1\}$$

L'insieme di integrazione è normale rispetto all'asse delle y quindi

$$\int_A (1-(xy)^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2y^2} 1-(xy)^2\,dx\right)dy = \int_0^1 x\Big|_{y^2}^{2y^2} - \frac{1}{3}x^3y^2\Big|_{y^2}^{2y^2} dx$$

$$= \int_0^1 \left(2y^2-y^2 - \frac{y^2}{3}\left(8y^6-y^6\right)\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y^2 - \frac{7}{3}y^8\right)dy = \frac{1}{3}y^3\Big|_0^1 - \frac{7}{27}y^9\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{7}{27} = \frac{2}{27}$$

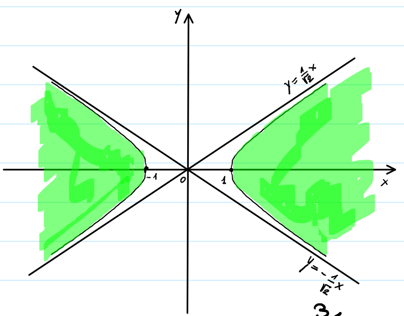
2) Determinare e rappresentare sul piano il dominio della funzione

$$f(x,y) = (x^2-2y^2-1)^{\frac{1}{4}}\,xy$$

Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.
Stabilire che f è differenziabile nell'interno del suo dominio.
Determinare quindi l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(2,0,f(2,0))$

$$\text{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2-2y^2-1\ge 0\}$$

L'equazione $x^2-2y^2=1$ è quella di un iperbole con vertici nei punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ e asintoti le rette $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$



Il dominio di f è quindi la regione di piano in verde ed è un insieme chiuso, illimitato non connesso per archi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}\left(x^2-2y^2-1\right)^{-3/4} 2x\cdot xy + \left(x^2-2y^2-1\right)^{1/4} y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}\left(x^2-2y^2-1\right)^{-\frac{3}{4}}(-4y)\cdot xy + \left(x^2-2y^2-1\right)^{1/4} x$$

Entrambe queste funzioni sono continue nell'interno del dominio, ossia nell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2-2y^2-1>0\}$; per il teorema del differenziale f è quindi differenziabile su tale insieme.

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,0,f(2,0))$ è

$$z = f(2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\,y$$

$$= 0 + 0\cdot(x-2) + 2\sqrt[4]{3}\,y \quad ; \quad \text{cioè} \quad z = 2\sqrt[4]{3}\,y$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = \cos(\omega x) \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \end{cases} , \quad \omega > 0$$

L'omogenea associata ha integrale generale $y(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$

Cerchiamo una soluzione particolare col metodo di similarità. Dato che $i\omega$ è soluzione dell'equazione caratteristica,

$\tilde{y}(x) = x\,(k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x))$

$$\tilde{y}'(x) = k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x) - k_1 \omega x \sin(\omega x) + k_2 \omega x \cos(\omega x)$$
$$= (k_1 + k_2 \omega x)\cos(\omega x) + (k_2 - k_1 \omega x)\sin(\omega x)$$
$$\tilde{y}''(x) = k_2 \omega \cos(\omega x) - \omega(k_1 + k_2 \omega x)\sin(\omega x) - k_1 \omega \sin(\omega x) + \omega(k_2 - k_1 \omega x)\cos(\omega x)$$

Deve quindi essere

$$2k_2\omega \cos(\omega x) - 2k_1 \omega \sin(\omega x) - k_2 \omega^2 x \sin(\omega x) - k_1 \omega^2 x \cos(\omega x) + k_1 \omega^2 x \cos(\omega x) + k_2 \omega^2 x \sin(\omega x) = \cos(\omega x)$$

da cui $\quad 2k_2 \omega \cos(\omega x) - 2k_1 \omega \sin(\omega x) = \cos(\omega x)$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} 2k_2 \omega = 1 \\ -2k_1 \omega = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \frac{1}{2\omega} \end{cases}$$

e $\quad \tilde{y}(x) = x \frac{1}{2\omega} \sin(\omega x)$

L'integrale generale dell'equazione assegnata è quindi

$$y(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x) + \frac{x}{2\omega} \sin(\omega x)$$

$1 = y(0) = c_1$

$$y'(x) = -\omega \sin(\omega x) + c_2 \omega \cos(\omega x) + \frac{1}{2\omega} \sin(\omega x) + \frac{x}{2} \cos(\omega x)$$

$0 = y'(0) = c_2 \omega \quad$ da cui $\quad c_2 = 0$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi $y(x) = \cos(\omega x) + \frac{x}{2\omega} \sin(\omega x)$

4) Dare la definizione di somma parziale n-esima per una serie numerica

Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per la convergenza di una serie a termini positivi

Per la definizione si veda p. 121 del manuale consigliato. Enunciato e dimostrazione del criterio del rapporto a pag. 130