1) a) Calcolare $\sqrt[3]{27i}$ in forma cartesiana

$|27i| = 27 \quad Arg(27i) = \frac{\pi}{2}$ quindi

$$\sqrt[3]{27i} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right)\right), \; k = 0,1,2$$

$$= \begin{cases} 3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i & (\text{per } k=0) \\ -3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i & (\text{per } k=1) \\ -3i & (\text{per } k=2) \end{cases}$$

b) dom f : $x^3 + 1 > 0 \iff x > -1$

f è somma delle funzioni

$g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^3+1)$ che è strett. decrescente in quanto composto da $g_1(x) = x^3+1$ strettamente crescente e $g_2(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ strettamente decrescente

e

$h(x) = e^{-x+1} = e \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^x$ che è strettamente decrescente

Quindi anche f è strettamente decrescente

$$\text{Im} f := f((-1,+\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

2) dom f: $\frac{2+x^2}{x^2-4} > 0 \iff x^2-4>0 \iff x>2 \vee x<-2$

$f \in C^0((-\infty,-2) \cup (2,+\infty))$ quindi gli unici

asintoti verticali sono da cercare in 2 da dx e in -2 da sx

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)^x = (+\infty)^2 = +\infty$$ dunque la retta $x=2$ è asintoto verticale a dx

$$\lim_{x\to -2^-} \left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)^x = (+\infty)^{-2} = 0$$ $x=-2$ non è asintoto

$$\lim_{x\to -2^-}\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)^x = (+\infty)^{-2} = 0 \quad x=-2 \text{ non è asintoto}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x^2+2}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\log\left(1+\frac{6}{x^2-4}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2-4}\,\frac{\log\left(1+\frac{6}{x^2-4}\right)}{\frac{6}{x^2-4}} = 0\cdot 1 = 0$$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$ e dunque la retta $y=1$ è asintoto orizzontale per $x\to+\infty$. In modo analogo si vede che la stessa retta è asintoto orizzontale anche per $x\to-\infty$.

f è derivabile sul suo dominio, quindi in $x_0=4$ il grafico di f ammette retta tangente

$$f'(x) = e^{x\log\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)}\left(\log\frac{x^2+2}{x^2-4} + x\,\frac{x^2-4}{x^2+2}\,\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+2)}{(x^2-4)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)^x\left(\log\frac{x^2+2}{x^2-4} - \frac{12x^2}{(x^2+2)(x^2-4)}\right)$$

$$f'(4) = \left(\frac{3}{2}\right)^4\left(\log\frac{3}{2} - \frac{12\cdot 16}{18\cdot 12}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4\left(\log\frac{3}{2}-\frac{8}{9}\right) < 0$$

L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0=4$ è

$$y = f(4)+f'(4)(x-4) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \left(\frac{3}{2}\right)^4\left(\log\frac{3}{2}-\frac{8}{9}\right)(x-4)$$

Poiché $f'(4)<0$ e f' è continua dal teorema della permanenza del segno delle funzioni continue si ha che $f'(x)<0$ in un intorno di $x_0=4$ e quindi f è strettamente decrescente in tale intorno.

3) $$\int x \,\mathrm{artg}\, x^2 \overset{x^2=t\,;\, dt=2x\,dx}{=} \frac{1}{2}\int \mathrm{artg}\, t \, dt = \frac{1}{2} t \,\mathrm{arctg}\, t - \frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t^2}\, dt$$
$$= \frac{1}{2} t \,\mathrm{arctg}\, t - \frac{1}{4}\log(1+t^2) + c = \frac{1}{2} x^2 \mathrm{arctg}\, x^2 - \frac{1}{4}\log(1+x^4) + c$$

4) Si veda ad esempio, p. 106 e pagg. 112-113 del manuale Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori Ed.