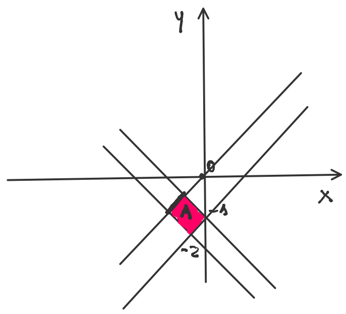
1) Calcolare

$$\int_A \frac{x-y}{(x+y)^2}\,dx\,dy, \quad \text{where } A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2<x+y<-1,\ -1<y-x<0\}$$

L'insieme A è il seguente




Introducendo il cambio di variabili

$\begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases}$ e osservando che $-2<x+y<-1$ e $-1<y-x<0$

l'insieme A nel piano $\{u,v\}$ corrisponde al quadrato $Q=[-2,-1]\times[-1,0]$

$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ il cui determinante è 2

Otteniamo quindi $\displaystyle\int_A \frac{x-y}{(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_Q \frac{-v}{u^2}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\frac{1}{u^2}\,du\cdot\int_{-1}^{0} v\,dv =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}\Big|_{-2}^{-1}\right)\frac{1}{2}v^2\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

2) Determinare il dominio della funzione

$f(x,y) = \cos^2(xy)(x-\log y)^2$

stabilendo se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, convesso.

Stabilire che $f$ è di classe $C^\infty$ sul suo dominio.

Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di $f$ nel punto $(0,1,f(0,1))$

Determinare infine i punti di minimo assoluto di $f$ e rappresentarli sul piano

dom f : $y>0$ ; è un semipiano aperto e quindi anche illimitato e convesso

$f\in C^\infty(\text{dom} f)$ in quanto ha chiaramente derivate parziali di qualunque ordine

e questi sono funzioni continue su dom f (basta notare che f è il prodotto

di due funzioni: $(x,y)\in \text{dom} f \mapsto xy \mapsto \cos(xy) \mapsto (\cos(xy))^2$

e $(x,y)\in\text{dom} f \mapsto x-\log y \mapsto (x-\log y)^2$

che sono composte da funzioni $C^\infty$ sul dominio di f )

L'equazione del piano tangente richiesto è

$$z = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1)$$

$f(0,1) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\cos(xy)\sin(xy)\, y\, (x-\log y)^2 + \cos^2(xy)\, 2\,(x-\log y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\cos(xy)\sin(xy)\, x\, (x-\log y)^2 + \cos^2(xy) \cdot 2(x-\log y)\left(-\frac{1}{y}\right)$$

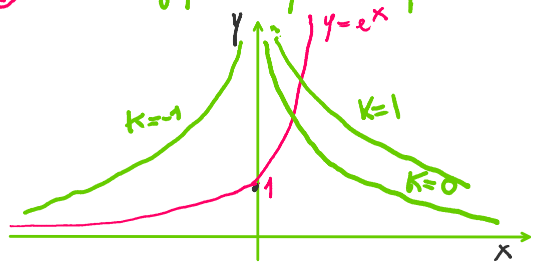
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0 + 0 = 0$$

Quindi l'equazione è $z=0$ (si noti che il punto $(0,1)$ è un punto critico di $f$)

Poiché $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \operatorname{dom} f$ è chiaro che i punti di minimo assoluto per $f$ sono quelli per cui $f(x,y)=0$ ovvero $xy = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ① e $x = \log y$ ②

① è una famiglia di iperboli equilatere riferite agli assi cartesiani; poiché il dom $f$ è il semipiano delle ordinate positive, dobbiamo considerare per ogni $k \in \mathbb{Z}$ solo un ramo di tali iperboli

② $x = \log y \iff y = e^x$ quindi sono tutti i punti del grafico della funzione $y = e^x$




3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'' + 8y = \cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$2y'' + 8y = \cos(2x) \iff y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$\lambda^2 + 4 = 0 \iff \lambda = \pm 2i$ quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è

$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$ , $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dato che $\pm i$ è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\tilde{y}(x) = x\,(k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x))$

$\tilde{y}'(x) = k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x) - 2k_1 x \sin(2x) + 2x k_2 \cos(2x)$

$\tilde{y}''(x) = -2k_1 \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x) - 2k_1 \sin(2x) - 4k_1 x \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x) - 4k_2 x \sin(2x)$.

Quindi $-4k_1 \sin(2x) + 4k_2 \cos(2x) = \tilde{y}'' + 4\tilde{y} = \frac{1}{2}\cos(2x)$, da cui

$$\begin{cases} 4k_2 = \frac{1}{2} \\ -4k_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

cioè $\tilde{y}(x) = \frac{x}{8}\sin(2x)$. Quindi l'integrale generale dell'eq. assegnata è

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{x}{8}\sin(2x)$$

$$0 = y(0) = c_1$$

$$y'(x) = 2c_2 \cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{x}{4}\cos(2x)$$

$0 = y'(0) = 2c_2$ da cui $c_2 = 0$ quindi $\tilde{y}(x) = \frac{x}{8}\sin(2x)$ è anche la soluzione del problema di Cauchy.

4) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione di più variabili. Dimostrare che se $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in \mathring{A}$ allora $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ $\forall v$, versore in $\mathbb{R}^n$.

Definizione.

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathring{A}$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$, versore.

Si dice che $f$ ha derivata direzionale in $x_0$ secondo la direzione $v$ se

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione:

Supponiamo che $f$ sia differenziabile in $x_0 \in \mathring{A}$.

Sappiamo quindi che

$$f(x_0+tv) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), tv \rangle + o(|tv|)$$

e quindi $$\frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} = \langle \nabla f(x_0), v \rangle + \frac{o(|t|)}{t}$$

Poiché $\lim_{t\to 0} \left( \langle \nabla f(x_0), v \rangle + \frac{o(|t|)}{t} \right) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$

concludiamo che $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$