1) - a) Calcolare il numero complesso

$$\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^9$$

$$\frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{5} = \frac{-5i}{5} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

e quindi $$\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^9 = e^{-\frac{9}{2}\pi i} = -i$$

b) Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = (x^2+1)\, e^{\sqrt{-x}}$$

$$\mathrm{dom}\, f = (-\infty, 0]$$

f è il prodotto delle funzioni positive

$g(x) = x^2+1$ e $h(x) = e^{\sqrt{-x}}$;

g è strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$

h è composta da $h_1(x) = \sqrt{-x}$ e $h_2(x) = e^x$

Poiché h_1 è strettamente decrescente e h_2 è strett. crescente

h è strett. decrescente. Dunque f è strett. decrescente

in quanto prodotto di funzioni positive, strett. decrescenti

$f \in C^0((-\infty, 0])$ e quindi

$$\mathrm{Im}\, f = \left[f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = [1, +\infty)$$

2) Determinare dominio, asintoti e punti estremali locali e globali della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + \log(x^2-1)$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + \log(x^2-1)$$

dom f : $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x+1\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \vee x<-1 \\ x\neq -1 \end{cases}$

quindi dom $f = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

$f \in C^0(\text{dom} f)$ quindi gli eventuali asintoti verticali sono da cercare nei punti -1 e 1

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \qquad \left[\frac{-1}{0^-} - \infty = \infty - \infty\right]$$

Cerchiamo di risolvere la forma indeterminata

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1}\left(x + (x+1)\log(x^2-1)\right)$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1}\left[x + (x+1)\left[\log|x+1| + \log(1-x)\right]\right]$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1}\left[x + (x+1)\log|x+1| + (x+1)\log(1-x)\right]$$

$$\lim_{x\to -1^-} (x+1)\log|x+1| = \lim_{x\to -1^-} -|x+1|\log|x+1|$$

$$\underset{=}{|x+1|=t} \lim_{t\to 0^+} -t\log t = 0$$

quindi $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1}\left[x + (x+1)\log|x+1| + (x+1)\log(1-x)\right] = \frac{1}{0^-}(-1) = +\infty$

e dunque $x=-1$ è asintoto verticale

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty$$

quindi la retta $x=1$ è asintoto verticale

Cerchiamo eventuali asintoti orizzontali

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1+\infty = +\infty$ non ha asintoto orizzontale per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0+0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 0\cdot x = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$ quindi f non ha neanche asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 + \infty = +\infty$$ non ha asintoto orizzontale per $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 0\cdot x = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$ non ha asintoto obliquo per $x\to-\infty$

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2x}{x^2-1}$$

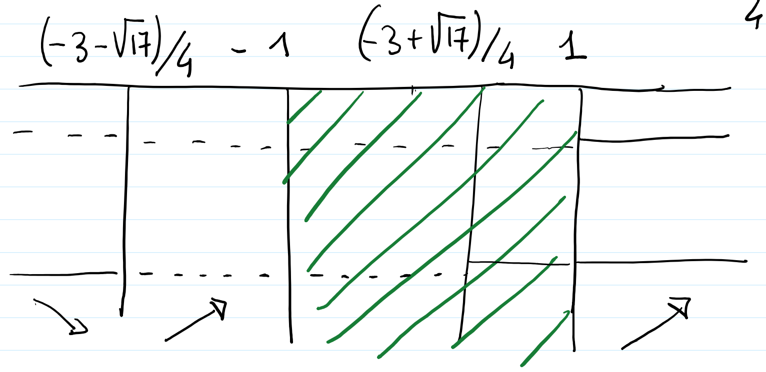
$$= \frac{x^2-1+2x(x+1)^2}{(x^2-1)(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x-1+2x^2+2x)}{(x^2-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(2x^2+3x-1)}{(x^2-1)(x+1)^2}$$; quindi

$$f'(x) > 0 \iff (x+1)(2x^2+3x-1) > 0$$

$$2x^2+3x-1>0 \iff x > \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \lor x < \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$$

quindi



Pertanto f ha un punto di minimo locale in $x = -\frac{3+\sqrt{17}}{4}$

Poiché $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ tale minimo non è globale

3) Calcolare

$1-\sqrt{2}$

3) Calcolare

$$\int \frac{x^2}{2}(2-x^3)^{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\,dx$$

posto $x^3 = t$, $dt = 3x^2\,dx$ otteniamo

$$\int \frac{x^2}{2}(2-x^3)^{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\,dx = \frac{1}{6}\int (2-t)^{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,(2-t)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{6}(2-t)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad t = x^3$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{6}(2-x^3)^{1/\sqrt{2}} + c$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale

Si veda, ad esempio, la lezione 26.

Riguardo all'ultima parte dell'esercizio si osservi che detta $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x e^{-s^2}\,ds$ risulta F derivabile e $F'(x) = e^{-x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e dunque F è strett. crescente.