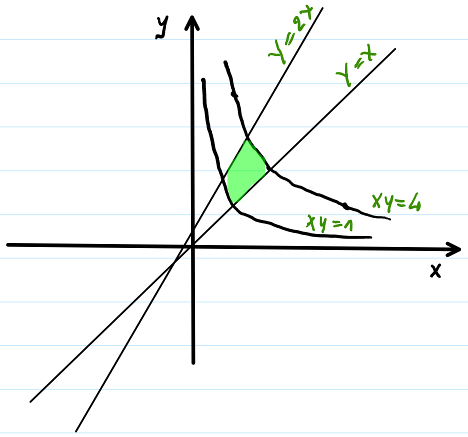
TRACCIA A

1) Calcolare $\int_A \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, dove $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le xy \le 4,\ x \le y \le 2x\}$

L'insieme A è rappresentato in figura dalla porzione di piano in verde



Conviene cambiare coordinate:

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases}$$

Quindi $1 \le u \le 4$ e $1 \le v \le 2$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v \quad \text{quindi}$$

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{1}{2v}$$

Nelle coordinate $\{u,v\}$ l'integrale è uguale a

$$\int_{[1,4]\times[1,2]} \frac{1}{v^2}\cdot\frac{1}{2v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^4 du \cdot \int_1^2 \frac{1}{v^3}\,dv = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{v^2}\Big|_1^2\right) = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}+1\right) = \frac{9}{16}$$

2) Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2y)}{2x^2+y}$.

Determinarne il dominio e calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Stabilire che f è differenziabile nel suo dominio. Determinare, infine, l'equazione del piano tangente al suo grafico in $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1\right)$

$\text{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Poiché $\sin(x^2y) \sim x^2y$ per $(x,y)\to(0,0)$,

calcoliamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^2+y^2}$. Dato che per $x=0$ (e $y=0$) f è costante

di costante valore 0, se il suo limite esiste nel punto $(0,0)$ deve essere uguale a 0

Dato che $2x^2+y^2 \ge x^2+y^2$ abbiamo che

$$0 \le \left|\frac{x^2y}{2x^2+y^2}\right| = \frac{|xy||x|}{2x^2+y^2} \le \frac{|xy|}{x^2+y^2}|x| \le 1\cdot|x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^2+y^2} = 0 \left(= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{2x^2+y^2} \right)$

f è differenziabile sul suo dominio per il teorema del differenziale totale dato che è rapporto di due funzioni di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Esiste dunque il piano tangente al grafico di f in $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1\right)$

La sua equazione è

$$z = f\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, 1\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, 1\right)\left(x - \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, 1\right)(y-1)$$

$$f\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, 1\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi+1} = \frac{1}{\pi+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\cos(x^2y)\cdot 2xy\,(2x^2+y^2) - \sin(x^2y)\cdot 4x}{(2x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, 1\right) = \frac{0 - \sin\frac{\pi}{2}\cdot 4\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{(\pi+1)^2} = -\frac{2\sqrt{2\pi}}{(\pi+1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos(x^2y)\cdot x^2\cdot(2x^2+y^2) - \sin(x^2y)\cdot 2y}{(2x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, 1\right) = \frac{0 - 2\sin\frac{\pi}{2}}{(\pi+1)^2} = -\frac{2}{(\pi+1)^2}$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \cos x - x & (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'omogenea associata ad $(*)$ ha integrale generale

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione di $(*)$ col metodo di similarità

Consideriamo separatamente le due equazioni

$y'' + y = \cos x$

Poiché i è soluzione dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata, cerchiamo $\tilde{y}_1$ del tipo

$\tilde{y}_1(x) = x\,(a\cos x + b\sin x)$

$\tilde{y}_1'(x) = a\cos x + b\sin x + x(-a\sin x + b\cos x)$

$\tilde{y}_1''(x) = -a\sin x + b\cos x - a\sin x + b\cos x + x(-a\cos x - b\sin x)$

e $y'' + y = -x$

$\tilde{y}_2(x) = ax + b$:

$ax + b = -x$ e quindi

$a = -1 \quad b = 0$

cioè $\tilde{y}_2(x) = -x$

Quindi

$-2a\sin x + 2b\cos x + x\,(a\cos x - a\cos x + b\sin x - b\sin x) = \cos x$

cioè

$-2a\sin x + 2b\cos x = \cos x$ da cui $a = 0$ e $b = +\frac{1}{2}$

Dunque la funzione $\tilde{y}(x) = \frac{1}{2}x\sin x - x$ è soluzione di (*)

Cerchiamo la soluzione del problema di Cauchy assegnato:

$0 = y(0) = c_1 + 0$ da cui $c_1 = 0$. Tenendo presente che $c_1 = 0$

$y'(x) = c_2\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x - 1$

$0 = y'(x) = c_2 - 1$ da cui $c_2 = 1$. Quindi la soluzione cercata è

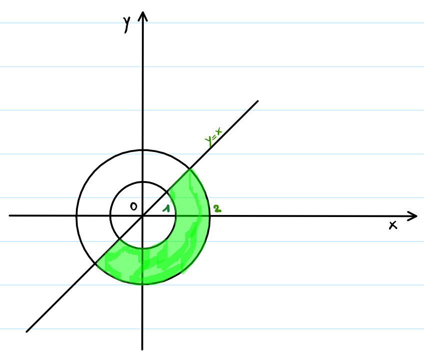
$y(x) = \sin x + \frac{1}{2}x\sin x - x$

h) Si veda p. 124 del manuale consigliato

TRACCIA B

1) Calcolare $\displaystyle\int_A \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \le x\}$

L'insieme A è rappresentato in figura dalla porzione di piano in verde



In coordinate polari esso è dato da

$-\frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ e $1 \le \rho \le 2$;

l'integrale è quindi uguale a

$$\int_{[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}] \times [1,2]} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, d\theta \cdot \int_1^2 \rho \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\rho^2 \Big|_1^2 \cdot \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{3}{2} \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, d\theta = \cos\theta \sin\theta \Big|_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos^2\theta) d\theta$$

$$= \pi - \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, d\theta$$

da cui $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}$

2) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = (x^2+y^2-1)(x-y)^2$ e studiarne la natura.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(x-y)^2 + (x^2+y^2-1)\, 2(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(x-y)^2 + (x^2+y^2-1)(-2(x-y))$$

$$\begin{cases} 2x(x-y)^2 + (x^2+y^2-1)\, 2(x-y) = 0 \\ 2y(x-y)^2 + (x^2+y^2-1)(-2(x-y)) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y)^2(x+y) = 0 \\ 2x(x-y)^2 + 2(x^2+y^2-1)(x-y) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x-y=0 \\ 0=0 \end{cases}$ quindi tutti i punti della retta $b: y=x$ sono critici

$\vee$

$$\iff \begin{cases} -y = x \\ 8x\,x^2 + 2(2x^2-1)2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y = x \\ 16x^3 - 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y = x \\ 4x(4x^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (0,0) \text{ (già ottenuto sopra)}$$

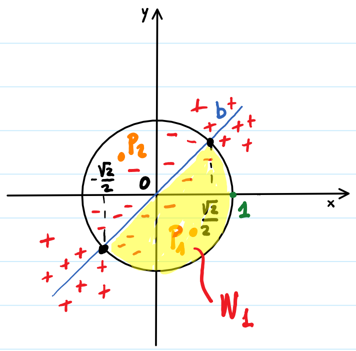
$$\begin{cases} x = \pm\frac{1}{2} \\ y = \mp\frac{1}{2} \end{cases} \quad P_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ e } P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ sono punti critici}$$

Sia $(\bar{x},\bar{y}) \in b$; cerchiamo di stabilire la natura di $(\bar{x},\bar{y})$ usando la definizione di punto di estremo locale

$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y)$; occorre quindi studiare il segno di f in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$

Poiché il segno di f coincide con quello della funzione x^2+y^2-1

Poiché il segno di f coincide con quello della funzione x^2+y^2-1 otteniamo:



Per $\bar{x} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\bar{x} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\bar{x}, \bar{y})$ è di minimo locale;

per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \bar{x} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\bar{x}, \bar{y})$ è di massimo locale;

i punti $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sono di sella.

Per studiare la natura di P_1 e P_2 possiamo usare il metodo della matrice Hessiana oppure possiamo osservare che detto W_1 il semidisco chiuso in giallo in figura, $f_{|W_1}$ è continua quindi per il teorema di Weierstrass $f_{|W_1}$ ha minimo e massimo assoluto. Poiché $f_{|\partial W_1} = 0$ ed f non è costante su W_1 necessariamente il punto critico P_1 deve essere di minimo o di massimo forte: dato che $f(P_1) < 0$, è di minimo.

Con un ragionamento analogo si dimostra che anche P_2 è un min. locale forte

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma implicita dell'equazione $y' = \frac{y+1}{y} \log x$. $(*)$

Quanto vale in $x = e$ la soluzione che soddisfa $y(e) = 1$?

Trattasi di un'equazione a variabili separabili, $y' = g(y)\, h(x)$

$g(y) = \frac{y+1}{y}$ si annulla per $y = -1$, quindi la funzione costante

$y(x) = -1$ (definita su $(0, +\infty)$, dove è definita $h = h(x)$) è l'unica soluzione singolare. Possiamo ora dividere per $g(y)$ entrambi i membri dell'equazione e integrare

$$\int \frac{y}{y+1}\, dy = \int \log x \quad \text{da cui}$$

$$y - \int \frac{1}{1+y}\, dy = x \log x - x + c$$

e quindi l'integrale generale in forma implicita è dato da $y - \log|1+y| = x \log x - x + c$

Per la soluzione che soddisfa $y(e) = 1$, sostituendo tale valore al II membro dell'equazione $(*)$, otteniamo

$$y'(e) = \frac{y(e)+1}{y(e)} \log e = \frac{2}{1} \cdot 1 = 2$$

4) Si veda pag. 130 del manuale consigliato