Analisi Matematica -- corso C -- modulo A

martedì 16 gennaio 2024 08:30

1) - a) Determinare le radici terze del numero complesso

$$z = \frac{\overline{1+i}\,(1+i)}{(1-i)^2}$$

$$z = \frac{(1-i)(1+i)}{(1-i)^2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

quindi $\sqrt[3]{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k}$, $k = 0, 1, 2$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \,,\; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \,,\; -i \right\}$$

1) - b)

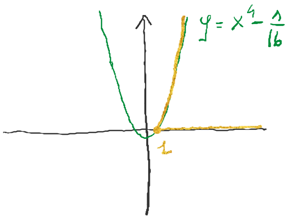
Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{3^{\sqrt{x-1}}} + \log_{\frac{1}{3}}\left(x^4 - \frac{1}{16} \right)$$

dom f : $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^4 - \frac{1}{16} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x < -\frac{1}{2} \;\vee\; x > \frac{1}{2} \end{cases}$ $\Big\{ \; x \geq 1$

dom $f = [1, +\infty)$.

Osserviamo che su tale insieme la funzione $h(x) = x^4 - \frac{1}{16}$ è strett. crescente



e quindi $f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(x^4 - \frac{1}{16}\right)$ è strett. decrescente in quanto composta

da una funzione strett. decrescente e una strett. crescente.

$f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x-1}}$ e quindi è strett. decrescente in quanto

composta anche essa da una strett. decres. e una strett. crescente

In definitiva, f è strett. decrescente poiché somma di funzioni strett. decrescenti.

$f \in C^0([1, +\infty))$ e quindi $\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) \,,\, f(1) \right] = \left(-\infty \,,\, 1 + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{15}{16}\right) \right]$

2) Determinare il numero di zeri reali del polinomio

$p(x) = x^9 - 3x^3 + 1$. Quanti di questi sono positivi

Calcolare poi $\lim_{x \to x_1^+} e^{1/p(x)} \cdot p(x)$

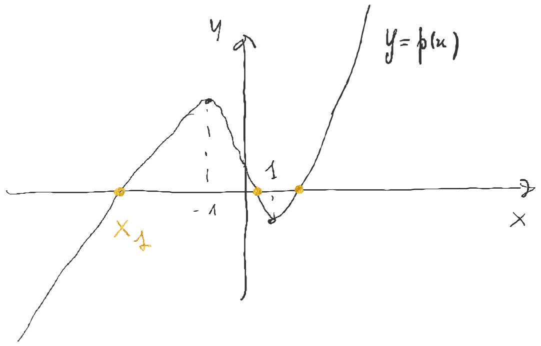
dove x_1 è il minimo tra gli zeri di p.

$$p'(x) = 9x^8 - 9x^2 = 9x^2(x^6 - 1)$$

Quindi $p'(x) > 0$ per $x > 1 \lor x < -1$ e di conseguenza p è strett. crescente su $(-\infty, -1)$ e su $(1, +\infty)$ quindi -1 è un max locale forte per p e 1 è un minimo locale forte di p.

$p(-1) = 3$ e $p(1) = -1$. Inoltre $p(0) = 1$

pertanto p ha grafico di questo tipo:



gli zeri reali sono 3 e quelli positivi 2

Dato che $\lim_{x \to x_1^+} p(x) = 0^+$

abbiamo $\lim_{x \to x_1^+} e^{1/p(x)} p(x) \overset{p(x)=y}{=\!=} \lim_{y \to 0^+} e^{\frac{1}{y}} y \overset{\frac{1}{y}=t}{=\!=} \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

3) Calcolare la media integrale di $f(t) = |t-2|\cos t$ sull'intervallo $[\pi/2, \pi]$

Bisogna calcolare $\dfrac{1}{\pi - \frac{\pi}{2}} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |t-2|\cos t\, dt$; poiché $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ abbiamo:

$$\frac{2}{\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{2} (2-t)\cos t + \int_{2}^{\pi} (t-2)\cos t \, dt\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\, 2\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2} - t\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \sin t\, dt + t\sin t\Big|_{2}^{\pi} - \int_{2}^{\pi} \sin t\, dt - 2\sin t\Big|_{2}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{2\sin 2} - 2 - \cancel{2\sin 2} + \frac{\pi}{2} - \cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2} - \cancel{2\sin 2} + \cos t\Big|_{2}^{\pi} + \cancel{2\sin 2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-2 + \frac{\pi}{2} - \cos 2 - 1 - \cos 2\right] = \frac{-6 + \pi - 4\cos 2}{\pi}$$

4) Enunciare la formula di Taylor di ordine n e centro x_0.
Scrivere poi la formula di Maclaurin di ordine 7 per la funzione

$$f(x) = x \sin(x^2)$$

Per l'enunciato, si veda ad esempio, il Th. 7.34 a pag. 217 del manuale consigliato

Dato che $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin(x^2) = x^2 - \dfrac{x^6}{6} + o(x^6)$

e quindi $x \sin x^2 = x^3 - \dfrac{x^7}{6} + o(x^7)$