1) Stabilire di che natura è il punto stazionario $(0,0)$ per le funzioni

$f(x,y) = x^4 + y^4 + x^2$

$4x^3 + 2x = 0$
$4y^3 = 0$

$\begin{cases} y = 0 \\ x(4x^2+2) \end{cases}$

$g(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

$h(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2 - y^2$

$f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(0,0) = 0$ quindi $(0,0)$ è un minimo (assoluto). Essendo poi l'unico punto stazionario di f esso è anche un minimo forte

$$H_g(0,0) = \left| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right| = 8 > 0 \qquad g_{xx}(0,0) = -2 < 0$$

quindi $(0,0)$ è un massimo locale forte per g

$$H_h(0,0) = \left| \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right| = -8 < 0$$ quindi $(0,0)$ è un punto di sella per h

2) Dimostrare che le funzioni $f(x) = x\cos x$ e $g(x) = e^x - x$ sono linearmente indipendenti

È sufficiente trovare $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. il Wronskiano di f e g in x_0 sia diverso da 0

$f'(x) = \cos x - x\sin x$, $g'(x) = e^x - 1$

$$W(\pi) = \left| \begin{pmatrix} -\pi & e^{\pi} - \pi \\ -1 & e^{\pi} - 1 \end{pmatrix} \right| = \pi - \pi e^{\pi} + e^{\pi} - \pi = e^{\pi}(1-\pi) \neq 0$$

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - y' + y = e^{\frac{x}{2}}\left(x\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Nell'applicazione del metodo di somiglianza per ottenere una soluzione particolare $\bar{y}$, di che tipo deve essere $\bar{y}$?

Le radici del polinomio caratteristico sono $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ cioè

$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$. Poiché $\alpha=\frac{1}{2}$ e $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha+i\beta$ è una di tali radici. Il grado massimo dei polinomi

$p(x)=x$ e $q(x)=-x^2$ è 2 quindi

$$\bar{y}(x) = x\,e^{\frac{x}{2}}\left((ax^2+bx+c)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - (dx^2+ex+f)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

con $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$

4) Stabilire se il seguente problema di Cauchy ha una e una sola soluzione locale

$$\begin{cases} y' = y^2\log yx + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Stabilire inoltre che essa è strettamente crescente in un intorno di 1

Poiché $f(x,y) = y^2\log yx + 1$ è di classe C^∞ in un intorno del punto $(1,1)$, il problema di Cauchy ha una e una sola soluzione locale. Tale soluzione è regolare (di classe C^∞). Poiché

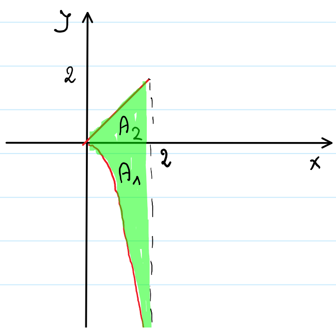
$$y'(1) = (y(1))^2\log(y(1)\cdot 1) + 1 = 1\log 1 + 1 = 1 > 0,$$

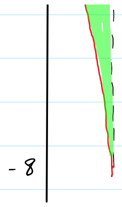
in un intorno di 1, la soluzione ha derivata positiva (essendo y' continua) e dunque essa è strettamente crescente in tale intorno.

5) Invertire l'ordine di integrazione nei seguenti integrali. Calcolare il secondo integrale

- $$\int_0^2\left(\int_{-x^3}^{x} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Poiché il dominio di integrazione è dato da





Questo si può esprimere anche come unione di due domini normali rispetto all'asse delle y

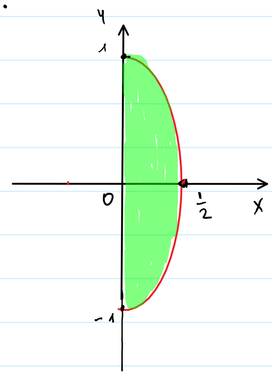
$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -8 \le y \le 0 \ \wedge\ \sqrt[3]{-y} \le x \le 2\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2 \ \wedge\ y \le x \le 2\}$$

$$\int_0 \left(\int_{-x^3}^{x} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_{-8}^{0} \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^{2} f(x,y)\,dx\right) dy + \int_0^2 \left(\int_y^2 f(x,y)\,dx\right) dy$$

- $$\int_{-1}^{1} y \left(\int_0^{\frac{\sqrt{(1-y^2)}}{2}} x\,dx\right) dy$$

La funzione $x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{2}$ ha come grafico il semiellisse contenuto nel I e IV quadrante di equazione $4x^2+y^2=1$:



il dominio di integrazione (in verde) è normale anche rispetto all'asse delle x:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \tfrac{1}{2} \ \wedge\ -\sqrt{1-4x^2} \le y \le \sqrt{1-4x^2}\}$$

Quindi

$$\int_{-1}^{1} y \left(\int_0^{\frac{\sqrt{1-y^2}}{2}} x\,dx\right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} y\,dy\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x \ \frac{1}{2} y^2 \Big|_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x \left(1-4x^2 - \left(-\sqrt{1-4x^2}\right)^2\right) dx = 0$$