Possibile svolgimento della prova del 24 febbraio 2026 – modulo A

1) (a) Consideriamo $w = \sqrt{3} - i$. Il suo modulo è $|w| = \sqrt{3+1} = 2$. L'argomento θ deve soddisfare $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ e $\sin\theta = -1/2$, dunque $\theta = -\pi/6$. In forma esponenziale $w = 2e^{-i\pi/6}$. Calcoliamo la potenza quarta:

$$w^4 = (2e^{-i\pi/6})^4 = 16\, e^{-i\,4\pi/6} = 16\, e^{-i\,2\pi/3}.$$

Sostituendo nell'espressione di z:

$$z = \frac{16\, e^{-i\,2\pi/3}}{16\, e^{i\,\pi/3}} = e^{i(-2\pi/3-\pi/3)} = e^{-i\pi}.$$

Poiché $e^{-i\pi} = -1$, cerchiamo le radici cubiche di -1. In forma esponenziale $z = e^{i\pi}$. Le radici sono date da $z_k = e^{i(\pi+2k\pi)/3}$ per $k = 0, 1, 2$:

$$k = 0 \implies z_0 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad k = 1 \implies z_1 = e^{i\pi} = -1, \quad k = 2 \implies z_2 = e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Sia $x_n = \arctan\left(\frac{1-2n}{n+1}\right)$ per $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$. Studiamo l'argomento $b_n = \frac{1-2n}{n+1}$. Possiamo scriverlo come:

$$b_n = \frac{-2(n+1)+3}{n+1} = -2 + \frac{3}{n+1}.$$

Al crescere di n, il denominatore aumenta, quindi la frazione $\frac{3}{n+1}$ decresce. Pertanto la successione b_n è strettamente decrescente. Poiché la funzione $\arctan(t)$ è strettamente crescente, la successione composta x_n è strettamente decrescente.

– Il massimo (e quindi l'estremo superiore) è assunto per il primo valore $n = 0$:

$$\max A = \sup A = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

– Per l'estremo inferiore, calcoliamo il limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-2 + \frac{3}{n+1}\right) = -2 \implies \inf A = \lim_{n\to+\infty} x_n = \arctan(-2).$$

Non essendo raggiunto (la successione è strettamente decrescente), non esiste minimo.

2) Sia $f(x) = (x+2)\, e^{\frac{x}{x-1}}$.

- Dominio: $x - 1 \neq 0 \implies D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
- Asintoti:

  Poiché

  $$\lim_{x\to1^\pm} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty,$$

  abbiamo

  $$\lim_{x\to1^+} (x+2)e^{\frac{x}{x-1}} = 3(+\infty) = +\infty \quad \text{(Asintoto verticale a dx } x = 1\text{)}.$$

  $$\lim_{x\to1^-} (x+2)e^{\frac{x}{x-1}} = 3 \cdot 0 = 0.$$

  Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty \cdot e = \pm\infty$ e quindi non ci sono asintoti orizzontali. Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui:

  $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x} e^{\frac{x}{x-1}} = 1 \cdot e^1 = e.$$

  Calcoliamo $q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - ex]$. Prima manipoliamo l'esponente: $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, quindi $e^{\frac{x}{x-1}} = e \cdot e^{\frac{1}{x-1}}$.

  $$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left[(x+2)e \cdot e^{\frac{1}{x-1}} - ex\right] = e \lim_{x\to\pm\infty} \left[(x+2)e^{\frac{1}{x-1}} - x\right].$$

Riscriviamo $x + 2$ come $(x - 1) + 3$ e sommiamo e sottraiamo 1 dentro le parentesi quadre per raccogliere il termine $(x - 1)$:

$$= e \lim_{x\to\pm\infty} \left[(x-1)\left(e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right) + 3e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right].$$

Ponendo $t = \frac{1}{x-1}$ (che tende a 0 per $x \to \pm\infty$), il primo termine diventa il limite notevole:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^t - 1) = 1.$$

Quindi $q = e(1 + 3 - 1) = 3e$ e la retta $y = ex + 3e$ è asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

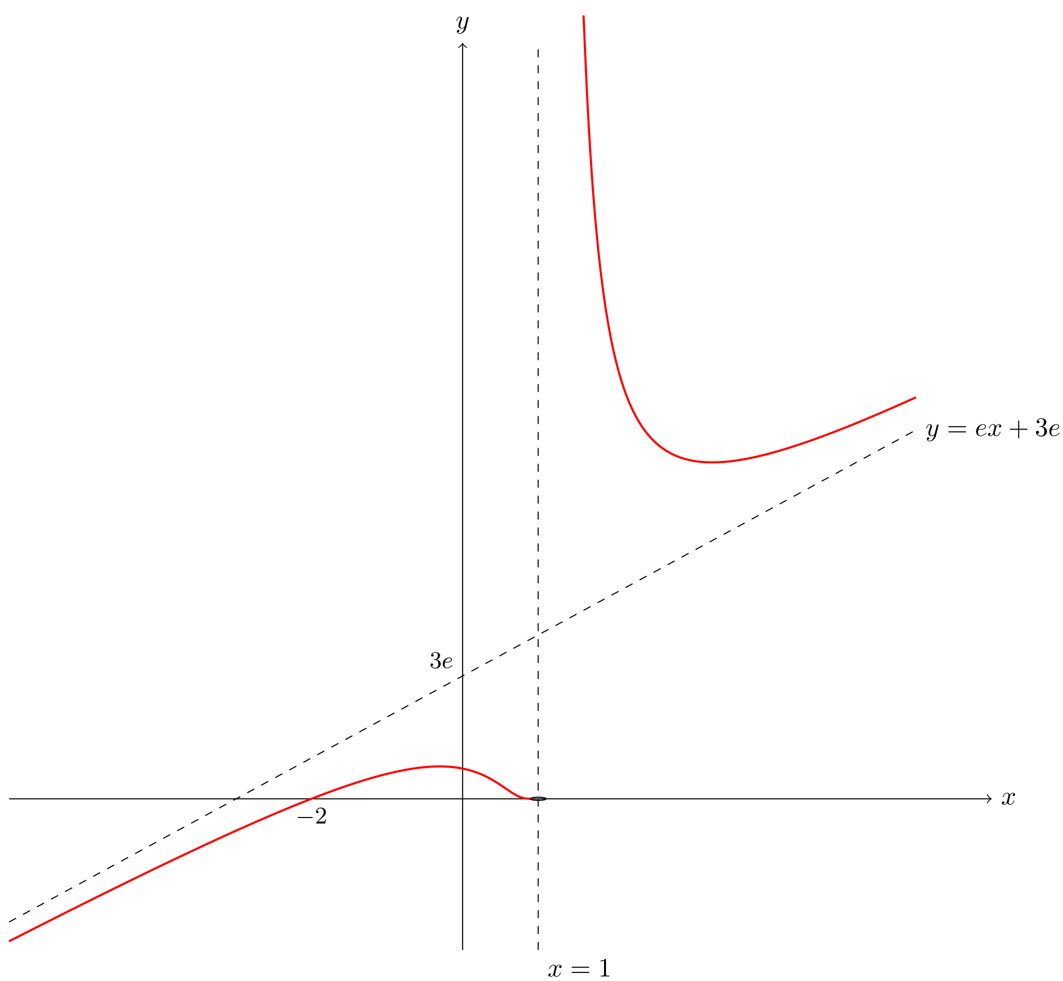
- Monotonia: Deriviamo $f(x)$:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{x}{x-1}} + (x+2)e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x}{x-1}} \left(1 - \frac{x+2}{(x-1)^2}\right).$$

Studiando il segno del termine tra parentesi:

$$\frac{(x-1)^2 - x - 2}{(x-1)^2} \geq 0 \iff x^2 - 2x + 1 - x - 2 \geq 0 \iff x^2 - 3x - 1 \geq 0.$$

Zeri: $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. La funzione cresce esternamente agli zeri. Max locale in $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$. Min locale in $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.



3) Dobbiamo calcolare:

$$I = \int_0^1 \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x.$$

Il denominatore ha $\Delta < 0$. Completiamo il quadrato: $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$. Scriviamo il numeratore come derivata della base (a meno della costante 2) $(x+1)$ più una costante: $x+3 = (x+1)+2$.

$$I = \int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

Primo integrale:

$$\int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+4).$$

Secondo integrale: è riconducibile all'arcotangente. Ricordando che $\int \frac{1}{t^2+a^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan(t/a)$, qui $a = 2, t = x+1$.

$$\int \frac{2}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2}\ln 8 + \arctan 1\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 5 + \arctan\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} + \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4) Per l'enunciato si vedano ad esempio le slide della lezione 24.

Sviluppiamo il numeratore fino all'ordine 4:

- Per il coseno: $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$. Posto $t = 2x$:

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

- Per l'esponenziale: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$. Posto $t = -2x^2$ (che è già di ordine 2, quindi basta $o(t^2)$ per avere $o(x^4)$):

$$e^{-2x^2} = 1 + (-2x^2) + \frac{(-2x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4).$$

Calcoliamo la differenza:

$$\begin{aligned} \cos(2x) - e^{-2x^2} &= \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) - \left(1 - 2x^2 + 2x^4\right) + o(x^4) \\ &= \left(\frac{2}{3} - 2\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Il limite diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{4}{3}.$$