1) - a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{-3}{(-2)^n}$$

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{-3}{(-2)^n} = -3 \sum_{n=5}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-3}{(-2)^5} \sum_{n=5}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$$

$$= \frac{3}{32} \cdot \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^h = \frac{3}{32} \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{16}$$

1) - b) Stabilire il carattere del seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}} \log x} \, dx$$

Sia $c > 1$ e consideriamo dapprima

$$\int_1^{c} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}} \log x} \, dx$$

$$(x-1)^{\frac{1}{2}} \log x = (x-1)^{\frac{1}{2}} \log (1 + (x-1)) \sim (x-1)^{\frac{3}{2}} \text{ per } x \to 1^+$$

Infatti $\displaystyle \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}} \log(1+(x-1))}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\log(1+(x-1))}{x-1} = 1$

quindi $\displaystyle \int_1^{c} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}} \log x}$ ha lo stesso carattere di $\displaystyle \int_1^{c} \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} dx$.

Poiché questo integrale diverge positivamente anche il primo diverge positivamente.

Dato che la funzione integranda è positiva su $(1,+\infty)$ abbiamo quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}} \log x} \, dx = +\infty$$

2) Si consideri la funzione a valori vettoriali di due variabili reali

$$F(x,y) = (xy^2, \cos x, \arcsin(x-y))$$

Se ne determini il dominio e lo si rappresenti sul piano. Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.

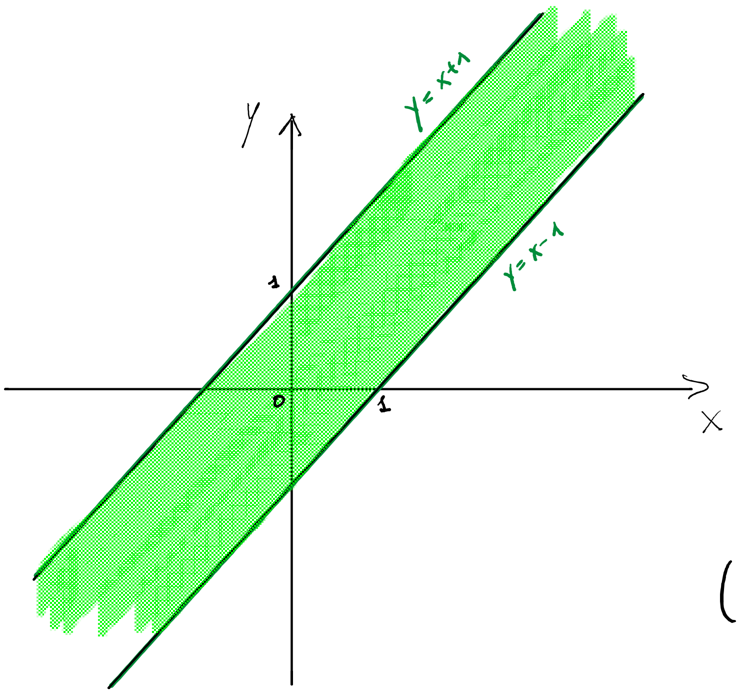
Calcolare la matrice Jacobiana di F nel punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Si consideri poi la curva

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right).$$ Calcolare $(F\circ\gamma)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

La prima e la seconda componente di F sono definite su $\mathbb{R}^2$;
la terza componente è definita se $-1 \leq x-y \leq 1$

cioè $y \geq x-1 \wedge y \leq x+1$



Il dominio di F è quindi l'intersezione dei domini delle tre componenti e dunque coincide col dominio della terza componente. Esso è rappresentato in verde qui a fianco.
Trattasi di un insieme chiuso perché contiene il suo bordo (le rette di equazione $y=x-1$ e $y=x+1$), illimitato, connesso per archi (è convesso).

$\forall (x,y) \in \mathring{\mathrm{dom}\, f}$ abbiamo

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ -\sin x & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \end{pmatrix}$$

In particolare $J_F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\sin\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Poiché sia F che γ sono differenziabili

prodotto righe × colonne

$$(F\circ\gamma)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = J_F\left(\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= J_F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{4}/\sqrt{2} \\ \cos\frac{\pi}{4}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\sin\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/2 \sin 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos(2t) \quad (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Eq. omogenea associata: $y'' + 4y = 0$ il cui integrale generale è

$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$, $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Poiché $2i$ è soluzione dell'equazione caratteristica

cerchiamo, con il metodo di similarità, una cerchiamo, con il metodo di somiglianza, una soluzione particolare del tipo

$$\tilde{y}(t) = t\left(k_1\cos(2t) + k_2\sin(2t)\right)$$

$$\tilde{y}'(t) = k_1\cos(2t) + k_2\sin(2t) - 2k_1 t\sin(2t) + 2k_2 t\cos(2t)$$

$$\tilde{y}''(t) = -2k_1\sin(2t) + 2k_2\cos(2t) - 2k_1\sin(2t) - 4k_1 t\cos(2t) + 2k_2\cos(2t) - 4k_2 t\sin(2t)$$

Imponendo che $\tilde{y}$ risolva $(*)$ otteniamo

$$-2k_1\sin(2t) + 2k_2\cos(2t) - 2k_1\sin(2t) \cancel{- 4k_1 t\cos(2t)} + 2k_2\cos(2t) \cancel{- 4k_2 t\sin(2t)} \cancel{+ 4tk_1\cos(2t)} \cancel{+ 4tk_2\sin(2t)} = \cos(2t)$$

da cui

$$-4k_1\sin(2t) + 4k_2\cos(2t) = \cos(2t).$$

Deve quindi essere $k_1 = 0$ e $4k_2 = 1$ cioè $k_2 = \frac{1}{4}$.

Pertanto $\tilde{y}(t) = \frac{1}{4}t\sin(2t)$

e l'integrale generale di $(*)$ è dato da

$$y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{t}{4}\sin(2t), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

La soluzione del problema si ottiene determinando c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$ in modo che siano soddisfatte le condizioni iniziali

$$0 = y(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Dato che c_1 deve essere uguale a 0

$$y'(t) = 2c_2\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t\cos(2t)$$

$$y'(t) = 2c_2\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t\cos(2t)$$

$$1 = \varphi'(0) = 2c_2 \iff c_2 = \frac{1}{2}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

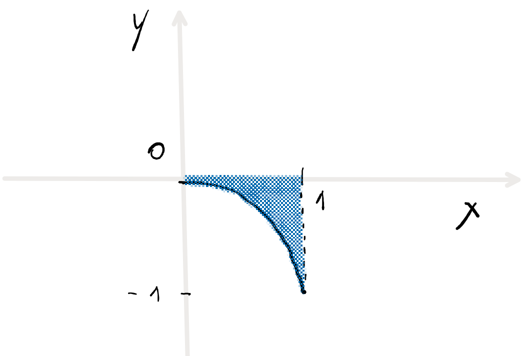
$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{t}{4}\sin(2t)$$

4) Enunciare la formula di riduzione per un integrale doppio su un dominio normale rispetto all'asse delle x.

Sia poi $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.
Invertire l'ordine di integrazione

$$\int_0^1 \left(\int_{-x^2}^0 f(x,y)\, dy \right) dx \qquad (\square)$$

Per l'enunciato si veda, ad esempio, il teorema 14.17-(i) a p. 422 del manuale consigliato.



Il dominio di integrazione in $(\square)$ è la regione di piano in blu qui a fianco. Chiaramente trattasi di un insieme normale anche rispetto all'asse delle y:

$$-1 \le y \le 0 \ \wedge\ \sqrt{-y} \le x \le 1$$

Quindi

$$\int_0^1 \left(\int_{-x^2}^0 f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\int_{\sqrt{-y}}^1 f(x,y)\, dx \right) dy$$