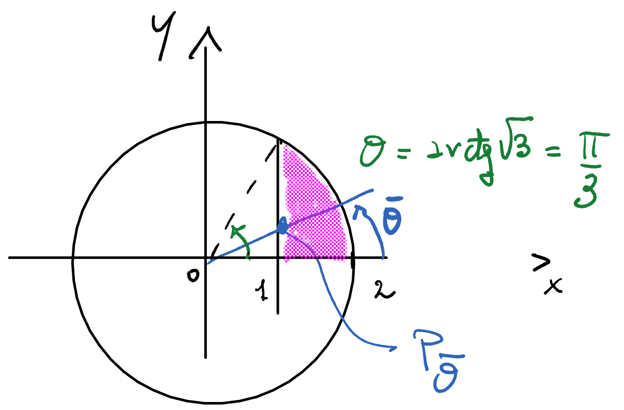
1) Calcolare

$$\int_A y\,(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

dove $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4 \text{ e } x \geq 1 ,\ y \geq 0 \}$




A è l'insieme colorato qui a fianco

Passando alle coordinate polari i punti in A hanno
$\rho < 2$ e $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$

Inoltre fissato $\bar{\theta} \in [0, \frac{\pi}{3}]$ è chiaro che i punti in A sulla semiretta uscente da O e individuata da $\bar{\theta}$ hanno distanza $\rho$ da O che è maggiore o uguale della distanza del punto $P_{\bar{\theta}}$ in figura.
La distanza $\rho_{\bar{\theta}}$ di tale punto da O si ottiene tenendo presente che esso appartiene alla retta $x=1$ quindi $\rho_{\bar{\theta}} \cos\bar{\theta} = 1$ cioè $\rho_{\bar{\theta}} = \frac{1}{\cos\bar{\theta}}$. Dunque per tutti i punti di A si ha che $\frac{1}{\cos\theta} \leq \rho \leq 2$

Quindi

$$\int_A y\,(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} \rho \sin\theta \ \rho^2 \cdot \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$$\int_A y\,(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} \rho\sin\theta\ \ \rho^2\cdot\rho\, d\rho\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\ \ \frac{1}{5}\rho^5\Big|_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\left(\frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{\cos^5\theta}\right)d\theta$$

$$= -\frac{32}{5}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{20}\cos^{-4}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\frac{16}{5} + \frac{32}{5} - \frac{1}{20}(16-1) = \frac{16}{5} - \frac{1}{4} = \frac{59}{20}$$

2) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = (x-y)^2\,(e^x-1)^3$$

Calcolarne il gradiente sul suo dominio
e dimostrare che esso è ortogonale al vettore $(2\log 2,\ 2\log 2 + 6\log^2 2)$
applicato nel punto $(\log 2, 0)$
Determinarne i suoi punti critici e studiarne la natura

$$\nabla f(x,y) = \left(2(x-y)(e^x-1)^3 + (x-y)^2\,3(e^x-1)^2e^x,\ -2(x-y)(e^x-1)^3\right)$$

Nel punto $(\log 2, 0)$ otteniamo $\nabla f(\log 2,0) = (2\log 2 + 6\log^2 2,\ -2\log 2)$

e quindi $\langle \nabla f(\log 2,0),\ (2\log 2,\ 2\log 2 + 6\log^2 2)\rangle = 0$

cioè $\nabla f(\log 2,0) \perp (2\log 2,\ 2\log 2 + 6\log^2 2)$

I punti critici di $f$ sono i punti $(x,y)$ che risolvono

$$\begin{cases} 2(x-y)(e^x-1)^3 + 3(x-y)^2(e^x-1)^2e^x = 0 \\ -2(x-y)(e^x-1)^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y=0 \\ 0=0 \end{cases} \ \vee\ \begin{cases} e^x-1=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

quindi sia la retta $y=x$ che l'asse delle $y$ sono rette di punti critici

Osserviamo che $f(x,x)=0$ e $f(0,y)=0$

Dunque se $(\bar{x},\bar{y})$ è un punto critico, $h(x,y)=f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})=f(x,y)$

Dato che il segno di $f$ dipende solo dal segno di $e^x-1$

deduciamo che preso $(\bar{x},\bar{x})\in r_1$ ($r_1$ retta di equazione $y=x$)

se $\bar{x}>0$, $(\bar{x},\bar{x})$ è un punto di minimo locale (non forte)

" $\bar{x}<0$, " " " " " max " " " ;

i punti dell'asse delle $y$ sono tutti di sella

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+4y = x\left(1+e^{2x}\right) \quad (*) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

l'equazione omogenea associata, cioè $y''+4y=0$ ha integrale generale dato da $y(x)=c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x$, $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa come somma di una soluzione $\tilde{y}_1$ di $y''+4y=x$ e una $\tilde{y}_2$ di $y''+4y=xe^{2x}$

$\tilde{y}_1(x)=ax+b$ quindi $4ax+4b=x$ cioè $\tilde{y}_1(x)=\frac{1}{4}x$

$\tilde{y}_2(x)=(cx+d)e^{2x}$ quindi $\tilde{y}_2'(x)=c\,e^{2x}+(2cx+2d)e^{2x}$

e $\tilde{y}_2''(x)=2ce^{2x}+2ce^{2x}+(4cx+4d)e^{2x}$

Deve quindi essere $8cxe^{2x}+(4c+8d)e^{2x}=xe^{2x}$ da cui

$8cx+4c+8d=x$ cioè $\begin{cases} 8c=1 \\ 4c+8d=0 \end{cases}$ $\begin{cases} c=\frac{1}{8} \\ d=-\frac{1}{16} \end{cases}$

l'integrale generale dell'equazione $(*)$ è quindi

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$$

Cerchiamo ora la soluzione del problema di Cauchy

$$0 = y(0) = c_1 - \frac{1}{16} \iff c_1 = \frac{1}{16}$$

$$1 = y'(0) = 2c_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 2\left(-\frac{1}{16}\right) \iff$$

$$\iff 2c_2 = -\frac{4}{16} + 1 = \frac{3}{4} \iff c_2 = \frac{3}{8}$$

La soluzione è quindi $y(x) = \frac{1}{16}\cos(2x) + \frac{3}{8}\sin(2x) + \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$

4) Dare la definizione di serie numerica e di somma di una serie numerica. Dimostrare che una serie geometrica (in $\mathbb{R}$) è convergente se e solo se la sua ragione è strettamente compresa tra $-1$ e $1$. Ottenere anche l'espressione della somma in tal caso