

- 1) Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A xy \, dx dy,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4x, y > x\}$.

7 pts.

- 2) Si consideri la funzione a valori vettoriali

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{y - x^2}}, \arctan(xy), e^{x^2 - y} \right).$$

Determinare il dominio naturale di F e rappresentarlo sul piano specificando se si tratti di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi. Stabilire che F è differenziabile nel punto $(1, 2)$ e calcolarne la matrice Jacobiana in tale punto. Determinare infine $(F \circ \gamma)'(0)$ dove $\gamma(t) = (1 + t, 2 + 3t)$.

9 pts.

- 3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma esplicita dell'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - y) \cos x.$$

Determinare poi la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(\pi/2) = 2$.

8 pts.

- 4) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto asintotico (nel caso di integrali impropri di funzioni definitivamente positive). Usarlo poi per studiare il carattere dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x \log x} dx.$$

6 pts.