1) Stabilire il carattere delle seguenti serie

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2}(n^{10}-n^7)$; b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \log(2+\cos^2 n)\left(e^{-\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$

a) è una serie a termini positivi ;

$$n^2 e^{-n^2}(n^{10}-n^7) \longrightarrow 0 \quad \text{quindi} \quad e^{-n^2}(n^{10}-n^7) < \frac{1}{n^2} \text{ d.f.}$$

positivi per $x \to +\infty$

Per il teorema di confronto la serie (a) converge

b) È una serie a termini negativi dato che $2+\cos^2 n \geq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

e quindi

$\log(2+\cos^2 n) \geq \log 2 > 0$, $\forall n$ e inoltre

$e^{-\frac{1}{n^2+1}} < 1$, $\forall n$ e quindi $e^{-\frac{1}{n^2+1}}-1<0$, $\forall n$

Possiamo quindi studiare $-\log(2+\cos^2 n)\left(e^{-\frac{1}{n^2+1}}-1\right) = \log(2+\cos^2 n)\left(1-e^{-\frac{1}{n^2+1}}\right) > 0$, $\forall x$.

$\log(2+\cos^2 n) \leq \log 3$ quindi

$$\log(2+\cos^2 n)\left(1-e^{-\frac{1}{n^2+1}}\right) \leq \log 3\left(1-e^{-\frac{1}{n^2+1}}\right) \sim \log 3 \cdot \left(\frac{1}{n^2+1}\right) \sim \log 3 \cdot \frac{1}{n^2}$$

Dunque per i criteri del confronto asintotico e del confronto applicati successivamente la serie (b) converge.

2) Stabilire se esiste il piano tangente nel punto $(1,0,f(1,0))$ al grafico della funzione

$f(x,y) = e^{-x^2}(x^2+yx)$ e, in caso affermativo scriverne l'equazione

Determinare i punti estremali di f.

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi per il teorema del differenziale totale

è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. In particolare, essendo

f differenziabile in $(1,0)$ e dunque esiste il piano

tangente al suo grafico in $(1,0,f(1,0))$

$f(1,0) = 1/e$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2}(-2x)(x^2+yx) + e^{-x^2}(2x+y) \ ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -\frac{2}{e}+\frac{2}{e} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-x^2}x \ ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{1}{e}$$

quindi l'equazione richiesta è

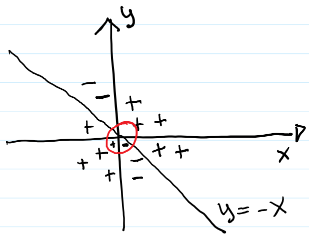
$$z = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}y$$

Cerchiamo ora i punti stazionari di f

$$\begin{cases} e^{-x^2}\left((-2x)(x^2+yx)+2x+y\right)=0 \\ e^{-x^2}x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^{-x^2}\left((-2x)(x^2+yx)+2x+y\right)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$ l'unico punto stazionario di f è $O(0,0)$

$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) = e^{-x^2}x(x+y)$. Il segno di $f(x,y)-f(0,0)$



dipende solo dal segno di $x(x+y)$

Come si vede non esiste alcun intorno di $(0,0)$ in cui $f(x,y) - f(0,0)$ abbia un segno definito e dunque $(0,0)$ è di sella

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^{x+2} \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ che ha l'unica soluzione doppia $\lambda = 1$, quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x$;
il termine noto è $e^{x+2} = e^2 \overset{\alpha = 1}{e^x}$; poiché $\alpha = 1$ coincide con la soluzione dell'equazione caratteristica che è doppia, dobbiamo cercare una soluzione dell'equazione completa del tipo

$$\bar{y}(x) = Ax^2 e^x$$

$$\bar{y}'(x) = 2Axe^x + Ax^2e^x$$

$$\bar{y}''(x) = 2Ae^x + 2Axe^x + 2Axe^x + Ax^2e^x = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x$$

quindi $2Ae^x + \cancel{4Axe^x} + \cancel{Ax^2e^x} - \cancel{4Axe^x} - \cancel{2Ax^2e^x} + \cancel{Ax^2e^x} = e^2e^x$

da cui $2Ae^x = e^2e^x$ e quindi $A = e^2/2$

L'integrale generale dell'equazione assegnata è dunque

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + \frac{e^2}{2}x^2e^x$$

$0 = y(0) = c_1$ da cui $c_1 = 0$; quindi $y'(x) = c_2e^x + c_2xe^x + e^2xe^x + \frac{e^2}{2}x^2e^x$

$0 = y'(0) = c_2$; la soluzione del problema di Cauchy è dunque proprio $\bar{y}(x) = \frac{e^2}{2}x^2e^x$

4) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione reale di più variabili reali. Dimostrare poi che se $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in A$, A aperto, allora $\forall$ versore v $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$

Per la definizione, p. 328-29 del manuale di riferimento; per la dimostrazione si veda p. 334