1) - a) sia $\theta \in [-\pi, \pi)$. Determinare in forma esponenziale le radici quinte del numero complesso

$$\frac{(2i-1)\overline{(2i-1)}\left(\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)\right)}{\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)}$$

$$(2i-1)\overline{(2i-1)} = |2i-1|^2 = 4+1=5$$
$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) = e^{i3\theta}$$
$$\cos(2\theta)+i\sin(2\theta) = e^{i2\theta}$$

Quindi il numero assegnato è uguale a $5e^{i3\theta} \cdot e^{-i2\theta} = 5e^{i\theta}$

$$\sqrt[5]{5e^{i\theta}} = \sqrt[5]{5}\, e^{i\frac{\theta}{5}+\frac{2\pi}{5}k}, \quad k=0,1,2,3,4.$$

1) - b)

Determinare dominio, tipo di monotonia e immagine della funzione

$f(x) = \log_2(\arctg(1-x))$

dom f: $\arctg(1-x) > 0 \iff 1-x > 0 \iff x < 1$

quindi dom $f = (-\infty, 1)$

f è composta da $x \in (-\infty, 1) \mapsto 1-x$ strett. decrescente e dalle funzioni $y = \arctg x$ e $y = \log_2 x$ entrambe strett. crescenti

Quindi f è strettamente decrescente

Poiché f è composta da funzioni continue è continua su $(-\infty, 1)$ e quindi $\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x \to 1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = \left(-\infty, \log_2 \frac{\pi}{2}\right)$

2) Si consideri la funzione $f(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}} - x$

Se ne determini il dominio e gli eventuali asintoti.

Si determini la miglior approssimazione lineare di f in 0

Si studi infine la convessità di f.

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $f \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$ quindi l'unico punto in cui cercare asintoti verticali è $x = -1$

Poiché $\lim_{x \to -1^+} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$, allora $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

" $\lim_{x \to -1^-} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$, " $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0 + 1 = 1$

Quindi $x = -1$ è solo asintoto verticale a dx per f

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e^{-1} \mp \infty = \mp \infty$; f non ha quindi asintoti orizzontali

Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} e^{\frac{1-x}{1+x}} - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (-1 \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) + x = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{e}$$

Quindi la retta $y = -x + \frac{1}{e}$ è asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

Poiché f è derivabile sul suo dominio, esiste la sua miglior approssimazione lineare in $x = 0$ data da

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto f(0) + f'(0)\, x$$

$$f(0) = e$$

$$f'(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}} \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} - 1 = e^{\frac{1-x}{1+x}} \frac{-2}{(1+x)^2} - 1$$

Quindi $f'(0) = -2e - 1$ e dunque la miglior approssimazione lineare di f in 0 è la funzione affine $x \in \mathbb{R} \mapsto e - (2e+1)x$

$$f''(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}} \left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right)^2 + e^{\frac{1-x}{1+x}} \frac{4(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$= e^{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{(1+x)^4} \left[4 + 4 + 4x\right]$$

Quindi $f''(x) > 0 \iff 8 + 4x > 0 \iff x > -2$

Pertanto f è strett. concava su $(-\infty, -2)$ e strett. convessa su $(-2, -1)$ e su $(-1, +\infty)$

3) Si calcoli la media integrale della funzione $f(x) = x \log(1 + \sqrt{x})$ sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Calcoliamo $\int_0^{\frac{1}{2}} x \log(1 + \sqrt{x})\, dx$.

Posto $\sqrt{x} = t$, quindi $dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

e quindi $dx = 2\sqrt{x}\, dt = 2t\, dt$ otteniamo:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2t^3 \log(1+t)\, dt = \frac{1}{2} t^4 \log(1+t) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^4}{1+t}\, dt$$

$$= \frac{1}{8} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{8} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{8} t^4 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{6} t^3 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{4} t^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2} \log(1+t) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{8} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{32} + \frac{1}{12\sqrt{2}} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{3}{8} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{5}{32} + \frac{7}{12\sqrt{2}}$$

Quindi la media integrale richiesta è $2\left(-\frac{3}{8} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{5}{32} + \frac{7}{12\sqrt{2}}\right)$

4) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per le funzioni continue.