1) - a)

Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} (2-e)^n \quad (*)$$

Tenendo presente che $2 < e < 3$ abbiamo che $-1 < 2-e < 0$ quindi $(*)$ converge essendo una serie geometrica di ragione $(2-e)$ compresa tra -1 e 1

$$\sum_{n=4}^{+\infty} (2-e)^n = (2-e)^4 \sum_{n=4}^{+\infty} (2-e)^{n-4} = (2-e)^4 \sum_{k=0}^{+\infty} (2-e)^k = (2-e)^4 \frac{1}{1-(2-e)} = \frac{(2-e)^4}{e-1}$$

1) - b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log(n^2-1)}{n}$$

Trattasi di una serie a segni alterni dato che $\frac{\log(n^2-1)}{n} > 0 \quad \forall n \geq 2$

Possiamo applicare il criterio di Leibniz

$\frac{\log(n^2-1)}{n} \to 0$ per la gerarchia degli infiniti

Dimostriamo che la successione $\left(\frac{\log(n^2-1)}{n}\right)_{n\geq 2}$ è decrescente studiando la funzione $f(x) = \frac{\log(x^2-1)}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1}\, x - \log(x^2-1)}{x^2}$$

$$f'(x) < 0 \iff \frac{2x^2}{x^2-1} - \log(x^2-1) < 0$$

Osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} - \log(x^2-1) = 2 - \infty = -\infty$ quindi

$f'(x) < 0$ definitivamente per $x \to +\infty$. Di conseguenza $f(x)$ è def. strett. decres. per $x \to +\infty$

e dunque $\left(\frac{\log(n^2-1)}{n}\right)_{n\geq 2}$ è definitivamente strett. decrescente. Dunque

per il criterio di Leibniz la serie è convergente.

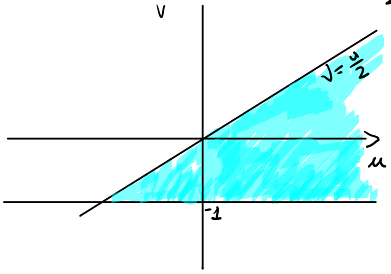
2) Si consideri il campo $X : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad X(u,v) = (u^2 - \log(v+1), \log(u-2v))$

Determinare il dominio A di X e rappresentarlo sul piano (u,v)

Dimostrare che X è differenziabile su A. Calcolare la matrice Jacobiana di X

Si consideri poi la funzione $\varphi(x,y) = xy - x^2$. Stabilire che $\varphi \circ X$ è differenziabile su A. Calcolare $\nabla(\varphi \circ X)(1,0)$

dom X : $\begin{cases} v+1>0 \\ u-2v>0 \end{cases}$ $\begin{cases} v>-1 \\ v<\dfrac{u}{2} \end{cases}$



Il dominio di X è la regione colorata in figura

X è differenziabile su A (che è un insieme aperto) poiché le sue componenti sono differenziabili. $J_X(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -\dfrac{1}{v+1} \\ \dfrac{1}{u-2v} & \dfrac{-2}{u-2v} \end{pmatrix}$

$\varphi\circ X$ è differenziabile in quanto composta da funzioni differenziabili.
Per il teorema sul differenziale delle funzioni composte sappiamo che

$\nabla \varphi\circ X\,(u,v) = \nabla\varphi(X(u,v)) \cdot J_X(u,v)$

quindi $\nabla\varphi\circ X\,(1,0) = \nabla\varphi(X(1,0)) \cdot J_X(1,0)$

$X(1,0) = (1,0)$

$\nabla\varphi(x,y) = (y-2x, x)$ quindi $\nabla\varphi(X(1,0)) = \nabla\varphi(1,0) = (-2,1)$

$J_X(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e dunque

$\nabla(\varphi\circ X)(1,0) = (-2,1)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = (-4+1, 2-2) = (-3,0)$

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma esplicita dell'equazione

$$y' = y\log y \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (*)$$

L'equazione assegnata è a variabili separabili. Le soluzioni singolari sono $y=0$ e $y=1$ ($g(y) = y\log y$ si annulla per $y=0$ e $y=1$)

Possiamo ora supporre che $y(x)\neq 0$ e $y(x)\neq 1$, $\forall x$ dove $y=y(x)$ è definito $(x\neq 1)$

$$\frac{y'}{y\log y} = \frac{1}{(1-x)^2} \iff \int\frac{dy}{y\log y} = \int\frac{1}{(1-x)^2}dx \iff \log|\log y| = \frac{1}{1-x}+c$$

da cui $|\log y| = e^{\frac{1}{1-x}}\, e^{c} \iff \log y = \pm k\, e^{\frac{1}{1-x}}$, $k\in\mathbb{R}$

$\iff y = e^{\pm k\, e^{1/1-x}}$, $k\in\mathbb{R}$

L'integrale generale di $(*)$ in forma esplicita è $y(x) = e^{\pm k e^{\frac{1}{1-x}}}$, $\forall k\in\mathbb{R}$

4) Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \quad ^{2}\, dx$