Serie di funzioni

Definizioni

- Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **converge puntualmente su $B \subset A$** se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente su B e in tal caso la funzione $f: B \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ si chiama somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ e si scrive $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

- Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **converge uniformemente su $B \subset A$** se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su B.

- Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **diverge positivamente su $B \subset A$** se $\forall x \in B$ $\lim_n s_n(x) = +\infty$ (ossia se $\forall x \in B$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(f_n(x))$ diverge positivamente)

Analogamente $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ diverge negativamente (resp. è indeterminata) su $B \subset A$ se $\forall x \in B$, $\lim_n s_n(x) = -\infty$ ($\forall x \in B$, non esiste $\lim_n s_n(x)$)
(ossia se $\forall x \in B$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(f_n(x)) = -\infty$ ($\forall x \in B$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(f_n(x))$ è indeterminata))

DEF. Convergenza assoluta:

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$; $\forall n$ $f_n : A \to \mathbb{R}$; si dice che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ conv. assolutamente su $B \subseteq A$

se $\forall x \in B$: $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$, cioè se la serie numerica

$\sum_{n=0}^{+\infty} (f_n(x))$ converge assolutamente $\forall x \in B$

DEF. convergenza totale

Sia $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, successione di funzioni

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente su $B \subseteq A$ se

$\exists \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.c.

a) $|f_n(x)| \leq c_n$, $\forall x \in B$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ (quindi $c_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

b) $\sum_n c_n$ è convergente (quindi $c_n \xrightarrow{n} 0$)

Oss

La migliore possibile fra le successioni $\{c_n\}$ che potrebbero verificare la b)

è quella di sup di $|f_n|$: $c_n = \sup_{x \in B} |f_n(x)|$

Le seguenti relazioni tra le diverse nozioni di convergenza sussistono:

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & \text{CONV. UNIF.} & \Rightarrow & \\ \text{CONV. TOTALE} & & & & \text{CONV. PUNTUALE} \\ & \searrow & \text{CONV. ASSOLUTA} & \nearrow & \end{array}$$

Fra queste l'unica implicazione non immediata è CONV. TOTALE $\Rightarrow$ CONV. UNIFORME

Al fine di dimostrarlo ricordiamo il

Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora

f_n converge uniformemente su $B \subseteq A$ ad una funzione $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se e solo se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n, m > \nu \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in B}$$

Dunque per dimostrare che la convergenza totale su B implica quella uniforme su B, possiamo equivalentemente dimostrare che la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soddisfa il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme.

Sia quindi $\varepsilon > 0$ e valutiamo $|s_n(x) - s_m(x)|$, $n, m \in \mathbb{N}$; possiamo assumere che $n > m$, allora $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ e $s_m(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$

quindi

$$|s_m(x) - s_n(x)| = |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots + f_n(x)|$$

$$\leq |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \dots + |f_n(x)| \quad (*)$$

Ma per ogni $n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq c_n$ $\forall x \in B$ quindi

$$(*) \leq c_{m+1} + c_{m+2} + \dots + c_n$$

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge, la sua successione delle somme parziali $\{s_n^c\}$ è di Cauchy e quindi per $\varepsilon > 0$ fissato sopra $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall \, n, m > \nu$ $|s_n^c - s_m^c| < \varepsilon$. Ma $|s_n^c - s_m^c| = |c_{m+1} + c_{m+2} + \dots + c_n|$ $(\square)$

se $n > m$ e, tenendo presente che $c_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$(\square)$ è uguale a $c_{m+1} + c_{m+2} + \dots + c_n$.

Quindi $|s_m(x) - s_n(x)| \leq c_{m+1} + c_{m+2} + \dots + c_n < \varepsilon$, $\forall x \in B$

e $\forall \, {}^{n}_{m} > \nu$ $\blacksquare$

Teorema sulla continuità della somma

Si consideri $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f_n continua su A, $\forall n \in \mathbb{N}$

se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge unif. su $B \subseteq$ allora $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ è continua su B

dim: La successione delle somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$

è una successione di funzioni continue su A; $s_n \to f$ uniformemente su B

e quindi per il teorema sulla continuità del limite di una succ. di funzioni

continue, f è una funzione continua su B.

Teorema di integrazione termine a termine

Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ successione di funzioni continue su $[a,b]$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su $[a,b]$ a f allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \quad (*)$$

(Poiché $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, la $(*)$ può essere scritta così $\boxed{\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx}$)

dim

Poiché $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_n$ è continua e $s_n \to f$ unif. su $[a,b]$ per ipotesi, dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale abbiamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_n \int_a^b s_n(x)\,dx = \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Teorema di derivazione termine a termine

Si consideri $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$; $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f_n \in C^1((a,b))$

Se

1) $\exists x_0 \in B$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty}(f_n(x_0))$ converge in x_0

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente su (a,b) a $g : (a,b) \to \mathbb{R}$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge unif. su (a,b) e detta f la sua somma si ha che f è derivabile su (a,b) e $\boxed{f'(x) = g(x) \quad \forall x \in B}$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)}$$

dim

Fare come esercizio (usando il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata)

Esempi ed esercizi

serie geometrica: sia $n \in \mathbb{N}$ e

consideriamo la funzione $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n$.

Al variare di n in $\mathbb{N}$ otteniamo così una successione di funzioni definite su $\mathbb{R}$

La serie associata a tale successione, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, si chiama

serie geometrica e sappiamo che converge puntualmente $\forall x \in (-1,1)$,

La sua somma è la funzione $x \in (-1,1) \mapsto 1/_{1-x}$.

Sappiamo anche che essa

diverge positivamente per $x \geq 1$ ed è indeterminata per $x \leq -1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge anche assolutamente su $(-1,1)$. Infatti $\sum_{n=0}^{+\infty} |x^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n$

che converge, come sappiamo, se e solo se $|x| < 1$

Essa non converge totalmente su $(-1,1)$ dato che $\sup_{x \in (-1,1)} |x^n| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

e la serie definita dalla successione costante di costante valore 1 diverge positivamente

La convergenza è però totale su ogni intervallo del tipo $[-a, a]$, $0 \leq a < 1$

dato che $\sup_{x \in [-a,a]} |x^n| = a^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ converge poiché è anch'essa

una serie geometrica di ragione $0 \leq a < 1$.

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ quindi converge $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

su quali insiemi la convergenza è totale?

se $a > 0$ e $|x| \geq a$ allora $\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{a}$ e $\frac{1}{n^2|x|} \leq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n^2}$. Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n^2} < +\infty$

la convergenza è totale su gli insiemi del tipo

$(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$;

Non c'è convergenza totale su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, infatti $\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left| \frac{1}{n^2 x} \right| = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

dato che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{n^2 |x|} = +\infty$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^n}$ (*). Fissiamo x e applichiamo il criterio della radice

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 |x|^n}} = \frac{1}{|x|} \cdot 1 = \frac{1}{|x|}$$

Quindi se $\frac{1}{|x|} < 1$ cioè se $|x| > 1$ la (*) converge assolutamente

Se $|x| < 1$, (*) non converge assolutamente e dunque se $0 < x < 1$ neanche converge; se $-1 < x < 0$, possiamo scrivere

$$(*) = \sum_n \frac{1}{n^2 (-(-x))^n} = \sum_n (-1)^n \frac{1}{n^2 (-x)^n}$$

Poiché la successioni estratte da $(-1)^n \frac{1}{n^2(-x)^n}$ aventi indici pari e quella degli indici dispari convergono rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$, il termine generale della (*) cioè $(-1)^n \frac{1}{n^2(-x)^n}$ non tende a 0 e dunque (*) non converge per $x \in (-1, 0)$.

Se $x=1$, $(*)$ diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge

mentre se $x=-1$, $(*)$ diventa $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ che converge.

In definitiva l'insieme di convergenza puntuale è dato da

$(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$. Poiché se $|x| \geq 1$

$\left|\frac{1}{n^2 x^n}\right| = \frac{1}{n^2 |x|^n} \leq \frac{1}{n^2}$, la convergenza è totale nello stesso

insieme.

- Studiare la convergenza puntuale e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{x^n}\right).$$

Calcolarne, inoltre, la somma.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{x^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \sum_{n=}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n$$

Sono serie geometriche

Insieme di definizione delle f_n è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Devono quindi essere soddisfatte le seguenti condizioni per la convergenza puntuale

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{x}{2} < 1 \\ -1 < \dfrac{1}{x} < 1 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x>0 : \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \quad \{ x > 1 \\ x<0 : \begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \quad \{ x < -1 \end{cases}$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale è $(-2,-1) \cup (1,2)$.

Poiché una serie geometrica converge totalmente su ogni intervallo del tipo

$[-a,a] \subset (-1,1)$, $0<a<1$, possiamo affermare che entrambe le serie (le cui somme ci dà la serie di potenze) convergono totalmente su insiemi del tipo $[a,b] \cup [c,d]$ con $[a,b] \subset (-2,-1)$ e $[c,d] \subset (1,2)$

Infine $\forall x \in (-2,-1) \cup (1,2)$ la somma delle prime serie è

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - 1 \quad \text{mentre quella della seconda è} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1$$

↳ si tenga presente che si parte da 1 quindi dalla somma della serie geometrica di ragione $\frac{x}{2}$ bisogna togliere il primo termine della serie, cioè $\left(\frac{x}{2}\right)^0 = 1$. Analogamente per la seconda serie

Quindi la somma della serie assegnata è $s(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - 1 - \left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1\right)$

$$= \frac{2}{2-x} - \frac{x}{x-1}, \quad x \in (-2,-1) \cup (1,2)$$

- Studiare la convergenza totale su $\mathbb{R}$ della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+x^2)\,n^2}$

Poiché $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{(-1)^n}{(1+x^2)\,n^2}\right| \le \frac{1}{(1+x^2)\,n^2} \le \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{c_n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge la convergenza è totale su $\mathbb{R}$

– Studiare la convergenza totale su $(0,+\infty)$ della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{n^2 e^{x^2-1}}{\sqrt{x}}\right)\frac{(n-1)\log(n^2-1)}{n^{5/2}}$$

Poiché $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ e $\forall x \in (0,+\infty)$

$$\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{n^2 e^{x^2-1}}{\sqrt{x}}\right)\frac{(n-1)\log(n^2-1)}{n^{5/2}}\right| \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{(n-1)\log(n^2-1)}{n^{5/2}},$$

basta dimostrare che $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n-1)\log(n^2-1)}{n^{5/2}}$ è convergente. A tal fine si può applicare il criterio degli infinitesimi. Sia $1<\alpha<\frac{3}{2}$ e studiamo

$$n^{\alpha}\frac{(n-1)\log(n^2-1)}{n^{5/2}} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{5/2-\alpha-1}} \xrightarrow{n} 0$$

poiché $\frac{5}{2}-\alpha-1>0$. ∎

– Usando il teorema di derivazione termine a termine calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-t)^{n-2}$$

(Vedere le tracce di esame dell'AA 10-11 per lo svolgimento di questi due esercizi)

La topologia euclidea di $\mathbb{C}$

Ricordiamo che $\forall z \in \mathbb{C}$ il modulo di z è $|z| := \sqrt{\mathrm{Re}\, z^2 + \mathrm{Im}\, z^2}$

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Si chiama disco aperto di centro z_0 e raggio r l'insieme $D(z_0, r) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \}$

Si chiama disco chiuso di centro z_0 e raggio r l'insieme $\overline{D(z_0, r)} = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}$.

Il bordo di $D(z_0, r)$ (e anche di $\overline{D(z_0, r)}$) è la circonferenza di centro z_0 e raggio r.

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$. Un insieme $V \subset \mathbb{C}$ si dice intorno di z_0 se $\exists r > 0$ t.c. $D(z_0, r) \subset V$. L'insieme degli intorni di un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ sarà indicato con $\mathcal{I}(z_0)$.

Sia $\{ z_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una successione in $\mathbb{C}$ diciamo che z_n converge a $z \in \mathbb{C}$ e scriviamo $\lim_n z_n = z$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \nu : |z_n - z| < \varepsilon$

Possiamo anche considerare la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ che indica come nel caso delle serie numeriche in $\mathbb{R}$ la coppia di successioni in $\mathbb{C}$ $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dove $\forall n \in \mathbb{N}$ $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$. (Si osservi che poiché $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato le nozioni di $+\infty$ e $-\infty$ non hanno senso e dunque anche quelle di successione o serie divergente)

FUNZIONI COMPLESSE DI VARIABILE COMPLESSA

Analisi reale studia:

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Analisi complessa studia:

$f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Sia $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si ricordi che $\mathbb{C}$ è bigettivo a $\mathbb{R}^2$ per cui f può anche essere vista (almeno per alcuni aspetti) come funzione da $A \subset \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$.

Si chiamano parte reale e parte immaginaria di $f: A \to \mathbb{C}$ le componenti di f, come funzione da A in $\mathbb{R}^2$, ossia le funzioni

$\mathrm{Re} f: A \to \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{Re} f(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ e $\mathrm{Im} f: A \to \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{Im} f(z) = \mathrm{Im}(f(z))$

Possiamo quindi scrivere $f = \mathrm{Re} f + i \,\mathrm{Im} f$ poiché $f(z) = \mathrm{Re} f(z) + i \,\mathrm{Im} f(z)$

Esempi: $f(z) = z_0 \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (funzione costante di costante valore z_0);

$f(z) = z$ $\forall z \in \mathbb{C}$ (identità); sia $k \in \mathbb{N}$, $f(z) = z^k$ (potenza di ordine k);

sia $a_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_0 z$ $\forall z \in \mathbb{C}$ (funzione lineare);

$f(z) = a_0 z^k$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$;

$f(z) = \bar{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (coniugio; è la simmetria del piano rispetto all'asse dei reali)

$f(z) = 1/z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Quest'ultima funzione è uguale a $z \mapsto \frac{1}{z\bar{z}} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$

Vediamo quali sono la sua parte reale e immaginaria

Se $z = x + iy$ allora $\frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$

e dunque la sua parte reale è la funzione che $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}$,
la sua parte immaginaria è $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longmapsto \frac{-y}{x^2+y^2}$

Poiché la topologia su $\mathbb{C}$ definita dagli intorni introdotti sopra coincide con la topologia euclidea in $\mathbb{R}^2$ (una volta che abbiamo identificato $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$), possiamo tranquillamente estendere le nozioni di limite e di continuità per una funzione complessa di variabile complessa.

Sia $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sia x_0 punto di accumulazione per A diciamo che $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$\forall z \in \underbrace{D'(z_0, \delta)}_{} \cap A \quad : \quad |f(z) - \ell| < \varepsilon$$

Disco bucato di centro z_0 e raggio δ

$$D'(z_0,\delta) = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta \}$$

Osserviamo che come per una successione non ha senso scrivere che $\lim_{z \to z_0} f(z) = +\infty \ (o -\infty)$ né ha senso calcolare limiti per $z \to +\infty$ o per $z \to -\infty$

Però possiamo definire il limite per $|z| \to \infty$. Si consideri

$f : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$, dove A è un insieme limitato di $\mathbb{C}$ o $A = \emptyset$

diremo che $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$\forall z \in (\mathbb{C} \setminus D(0,\delta)) \cap (\mathbb{C} \setminus A) : |f(z) - \ell| < \varepsilon$$

Così come ha senso dire che $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ perché $|f|$ è una funzione REALE di variabile complessa.

Definizione: sia $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diciamo che f è <u>continua in $z_0 \in A$</u> se z_0 è un punto isolato di A oppure (cioè nel caso in cui z_0 è di accumulazione per A) se $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definizione di funzione derivabile o olomorfa in un punto

$f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A aperto, $z_0 \in A$, f è derivabile in z_0 o, si dice anche, f è olomorfa in z_0 se

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

Il valore di questo limite si indica con

$f'(z_0)$ o $Df(z_0)$ o $Df\big|_{z=z_0}$ o $\frac{df}{dz}(z_0)$

Se $f : A \to \mathbb{C}$ è derivabile in A (cioè è derivabile $\forall z \in A$) si dice che

f è OLOMORFA su A

Si dimostra facilmente (come nel caso delle funzioni reali di variabile reale) che se $f(z) = a_0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ allora $Df(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$Dz\big|_{z\, z_0} = 1$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$.

Inoltre se $A \subset \mathbb{C}$ è aperto e

$f, g : A \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in A$ e se f, g sono derivabili in z_0

anche $f+g$, fg, f/g $(g(z_0) \neq 0)$ sono derivabili in z_0 e si ha

$$D(f+g)(z_0) = Df(z_0) + Dg(z_0)$$

$$D(fg)(z_0) = Df(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0)\, Dg(z_0)$$

$$D\left(f/g\right)(z_0) = \frac{Df(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, Dg(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Se A e B sono aperti di $\mathbb{C}$ e

$f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad g : B \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(A) \subset B$. Consideriamo la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{C}$, $g \circ f(z) = g(f(z))$

Se $z_0 \in A$, f derivabile in z_0, g derivabile in $f(z_0)$ allora anche $g \circ f$ è derivabile in z_0 e si ha: $D(g \circ f)(z_0) = Dg(f(z_0)) \cdot Df(z_0)$

Possiamo quindi dedurre dal principio di induzione e dalle regole di derivazione di un prodotto che $\forall n \in \mathbb{N}$: $D z^n \big|_{z=z_0} = n z_0^{n-1}$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$,

E quindi dalle regole di derivazione di un quoziente, $D z^k \big|_{z=z_0} = k z_0^{k-1}$ $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

Come nel caso di funzioni reali di variabile reale abbiamo

Prop f è olomorfa in z_0 $\Rightarrow$ f continua in z_0.

dim

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \iff f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0), \text{ per } z \to z_0$$

dove $o(z-z_0)$ è una qualunque funzione della variabile z tale che $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{o(z-z_0)}{z-z_0} = 0$

Quindi

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \Big(f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)(z-z_0)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{o(z-z_0)}_{\downarrow\, 0} \Big) = f(z_0).$$

Teor (Condizioni di Cauchy-Riemann)

$z_0 = x_0 + i y_0 \equiv (x_0, y_0)$, $z = x + iy \equiv (x, y)$

$f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ $\quad f(z) = u(z) + i v(z)$

Ω ↳ aperto in $\mathbb{C}$

f è derivabile in z_0 $\iff$ u, v sono differenziabili in z_0 e

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0) \end{cases}$$

inoltre $\quad f'(z_0) = f_x(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0) = u_x(z_0) - i u_y(z_0)$

dim $\Rightarrow$

Dobbiamo dimostrare che la parte reale u e la parte immaginaria v di f, come funzioni reali di due variabili reali sono differenziabili in $z_0 \equiv (x_0, y_0)$.

Dire che u è differenziabile in z_0 equivale a dire che u ha derivate parziali $u_x(x_0, y_0)$ e $u_y(x_0, y_0)$ e che la seguente uguaglianza è vera

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + u_x(x_0,y_0)(x-x_0) + u_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$

dove $o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right) = o(|z-z_0|)$ indica una qualunque funzione infinitesima

in $z_0 \equiv (x_0, y_0)$ di ordine superiore rispetto a $|z-z_0|$ cioè

$$\lim_{z \to z_0} \frac{o(|z-z_0|)}{|z-z_0|} = 0$$

Denotiamo $f'(z_0)$ con $a+ib$. Quindi

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{z \to z_0} a+ib \iff f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)$$

osserviamo che $\lim_{z \to z_0} \dfrac{o(z-z_0)}{z-z_0} = 0 \iff \lim_{z \to z_0} \dfrac{|o(z-z_0)|}{|z-z_0|} = 0 \iff \lim_{z \to z_0} \dfrac{o(z-z_0)}{|z-z_0|} = 0$

quindi $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|)$

e cioè

$$u(z) - i v(z) = u(z_0) + i v(z_0) + (a+ib)\big((x-x_0) + i(y-y_0)\big) + o(|z-z_0|)$$

$$= u(z_0) + i\,v(z_0) + a(x-x_0) - b(y-y_0) + i\big(b(x-x_0) + a(y-y_0)\big) + \mathrm{Re}\, o(|z-z_0|) + i\,\mathrm{Im}\, o(|z-z_0|)$$

Per cui uguagliando parti reali e parti immaginarie, si ottiene

$$u(z) = u(z_0) + a(x-x_0) - b(y-y_0) + o(|z-z_0|)$$

$$v(z) = v(z_0) + b(x-x_0) + a(y-y_0) + o(|z-z_0|)$$

$\mathrm{Re}\, o(|z-z_0|)$ e $\mathrm{Im}\, o(|z-z_0|)$ sono entrambe funzione infinitesime di ordine superiore rispetto a $|z-z_0|$, cioè sono $o(|z-z_0|)$

da cui deduciamo che u e v sono differenziabili in z_0 e inoltre

$\nabla u(x_0,y_0) = (a, -b)$ cioè $u_x(x_0,y_0) = a$, $u_y(x_0,y_0) = -b$

$\nabla v(x_0,y_0) = (b, a)$ cioè $v_x(x_0,y_0) = b$, $v_y(x_0,y_0) = a$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0) \end{aligned}}$$

Relazioni di Cauchy-Riemann

dim $\Leftarrow$

Per ipotesi sappiamo

$$u(z) = u(z_0) + u_x(z_0)(x-x_0) + u_y(z_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|)$$

$$i\,v(z) = i\big(v(z_0) + v_x(z_0)(x-x_0) + v_y(z_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$f(z) = f(z_0) + [u_x(z_0) + i v_x(z_0)](x-x_0) + [u_y(z_0) + i v_y(z_0)](y-y_0) + \underbrace{o(|z-z_0|)}_{\parallel}$$

$$= f(z_0) + [u_x(z_0) + i v_x(z_0)](x-x_0) + [-v_x(z_0) + i u_x(z_0)](y-y_0) + o(z-z_0)$$

$$= f(z_0) + \big(u_x(z_0) + i v_x(z_0)\big)\big((x-x_0) + i(y-y_0)\big) + o(z-z_0)$$

$$= f(z_0) + \big(u_x(z_0) + i v_x(z_0)\big)(z-z_0) + o(z-z_0)$$

$f'(z_0)$ è quindi uguale a $u_x(z_0) + i v_x(z_0)$ o $u_x(z_0) - i u_y(z_0)$

Alcuni esempi di funzioni che non sono olomorfe

- $f(z) = \bar{z}$

$f(x,y) = x - iy$ cioè $u(x,y) = x$ e $v(x,y) = -y$

$u_x(x,y) = 1$ $\quad v_y(x,y) = -1$ $\quad v_y(x,y) \neq u_x(x,y)$

cioè $f(z) = \bar{z}$ non è olomorfa in alcun punto di $\mathbb{C}$

- $f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2+y^2$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ma $f(\mathbb{C}) = [0,+\infty) \subset \mathbb{R}$

$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = x^2+y^2$; $\quad V(z) = \operatorname{Im} f(z) = 0$

$u_x(x,y) = 2x \neq V_y(x,y) = 0 \quad \forall x \neq 0$

$u_y(x,y) = 2y \neq -V_x(x,y) = 0 \quad \forall y \neq 0$

u e v sono differenziabili su $\mathbb{C}$ ma l'unico punto dove le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte è $(0,0)$ (che è quindi l'unico punto dove $f(z) = |z|^2$ è olomorfa.

- $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ cioè $f(x,y) = x$, $\quad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$

$u(x,y) = x$ $\qquad u_x(x,y) = 1 \neq v_y(x,y) = 0$

$v(x,y) = 0$

$f(z) = \mathrm{Im}\, z$ cioè $f(x,y) = y$ $\qquad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\qquad f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$

$u(x,y) = 0$ $\qquad u_x(x,y) = 0 \neq v_y(x,y) = 1$

$v(x,y) = y$

Quindi $z \mapsto \mathrm{Re}\, z$ e $z \mapsto \mathrm{Im}\, z$ non sono olomorfe in alcun punto

---

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Con il simbolo $H(\Omega)$ denoteremo l'insieme di tutte le funzioni olomorfe su Ω.

Oss

Sia Ω aperto connesso, $f \in H(\Omega)$ e $f'(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$ allora f è costante.

Infatti poiché $f'(z) = u_x(z) + i\, v_x(z)$,

$f'(z)=0 \iff u_x(z)=0=v_x(z)$. Dalle condizioni di Cauchy-Riemann, allora, anche $u_y(z)$ e $v_y(z)$ sono nulle e quindi u e v sono funzioni definite sull'aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ tali che

$\nabla u(z) = 0 = \nabla v(z)$, $\forall z \in \Omega$ e quindi $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $u(z)=c_1$ e $v(z)=c_2$ $\forall z \in \Omega$
cioè $f(z) = c_1 + i c_2$, $\forall z \in \Omega$

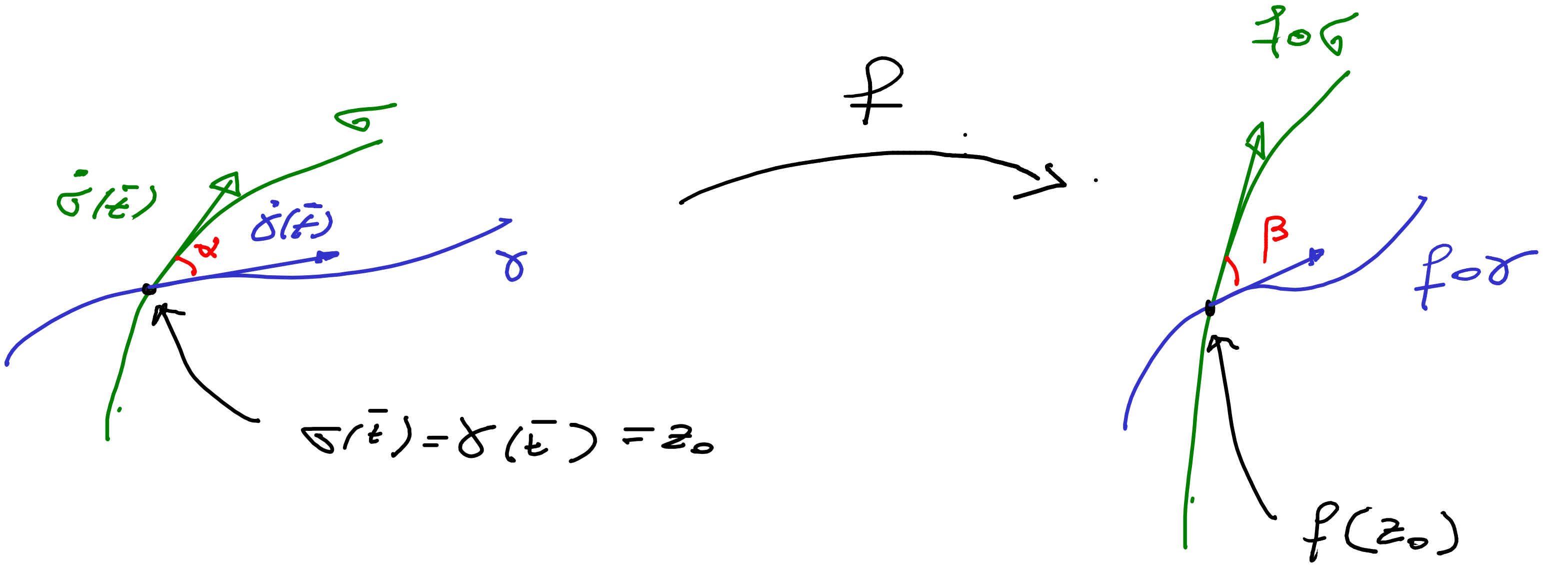
Funzioni olomorfe aventi derivata non nulla come funzioni conformi

Def $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \Omega' \subset \mathbb{C}$ si dice conforme se conserva l'ampiezza di angoli nel senso che se

$\begin{matrix}\gamma\\ \sigma\end{matrix} : (a,b) \to \Omega$ sono due curve regolari $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ e $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$

che si intersecano in un punto $\bar{t} \in (a,b)$, cioè $\gamma(\bar{t}) = \sigma(\bar{t}) = z_0 \in \Omega$, detto α l'ampiezza dell'angolo da esse individuato
(si tratta dell'angolo formato dai vettori tangenti $\dot{\gamma}(\bar{t})$ e $\dot{\sigma}(\bar{t})$)
e β quella dell'angolo individuato dalle curve $f \circ \gamma$ e $f \circ \sigma$

allora $\alpha = \beta$



Nel caso in cui $f \in H(\Omega)$ e $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$ abbiamo

$$(f\circ\gamma)'(\bar t) = f'(\gamma(\bar t))\cdot\dot\gamma(\bar t) = f'(z_0)\cdot\dot\gamma(\bar t)$$

$$(f\circ\sigma)'(\bar t) = f'(\sigma(\bar t))\cdot\dot\sigma(\bar t) = f'(z_0)\cdot\dot\sigma(\bar t)$$

Quindi i vettori tangenti alle curve $f\circ\gamma$ e $f\circ\sigma$ nel punto $f(z_0) = f(\gamma(\bar t)) = f(\sigma(\bar t))$ sono dati dal prodotto dello stesso numero complesso non nullo $f'(z_0)$ per i vettori tangenti alle curve γ e σ nel punto $z_0 = \gamma(\bar t) = \sigma(\bar t)$

Poiché il prodotto di un numero complesso $a \in \mathbb{C}$ opera su ogni altro numero complesso $b \in \mathbb{C}$ dilatando o comprimendo $|b|$ di un fattore uguale a $|a|$ e ruotando b in senso antiorario di un angolo di ampiezza $Arg(a)$, deduciamo che l'angolo α tra $\dot{\gamma}(\bar{t})$ e $\dot{\sigma}(\bar{t})$ è uguale all'angolo β tra $(f\circ\gamma)'(\bar{t})$ e $(f\circ\sigma)'(\bar{t})$ dato che questi vettori si ottengono dai precedenti moltiplicando per $f'(z_0)$

FUNZIONI ARMONICHE

Supponiamo che $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ regione, sia olomorfa e di classe C^2 su Ω (cioè la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono funzioni di classe C^2 su Ω)

(vedremo a breve che se f è olomorfa su Ω, non solo è C^2 ma è anche analitica su Ω → quindi è di classe C^∞)

Dalle relazioni di Cauchy-Riemann otteniamo che $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ cioè la parte reale e la parte immaginaria sono funzioni <u>armoniche</u>

(Una funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}$, si dice armonica su Ω se $\Delta g = 0$ in Ω, dove nel caso in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$)

Infatti poiché $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ derivando ambo i membri delle prime equazioni rispetto a x e quelli delle seconde rispetto a y otteniamo
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ ma per il teorema di Schwartz $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ e quindi $\partial^2 u/\partial x^2 = -\partial^2 u/\partial y^2$ ∎

—o—o—o—o—

Def Una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa su $\mathbb{C}$ si dice <u>intera</u>.

Ad esempio $f(z) = a z^m$, $a \in \mathbb{C}$.

SERIE DI POTENZE (in $\mathbb{C}$)

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ e consideriamo la serie di funzioni

(*) $\sum_n a_n z^n$, le funzioni che definiscono tale serie sono $z\in\mathbb{C} \longmapsto a_n z^n \in \mathbb{C}$

(*) si chiama serie di potenze di coefficienti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (e centro 0)

(Possiamo anche considerare $\sum_n a_n (z-z_0)^n$, $z_0\in\mathbb{C}$: in questo caso il centro della serie non è 0 ma z_0; è chiaro che ponendo $w=z-z_0$ tale serie si riduce ad una di centro 0).

Le nozioni di convergenza puntuale, in modulo, uniforme, totale su un $A\subseteq\mathbb{C}$ per una serie come (*) sono completamente analoghe a quelle viste per le serie di funzioni reali di variabile reale

Per cui dire che (*) converge in $\bar{z}\in\mathbb{C}$ significa che la serie numerica in $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \bar{z}^n$ converge cioè la successione delle somme parziali $s_n(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k$ converge ad un numero $s(\bar{z})\in\mathbb{C}$

Se (*) converge per ogni $\bar{z} \in A \subseteq \mathbb{C}$ si dice che (*) converge puntualmente su A e la funzione $f : A \to \mathbb{C}$, $f(\bar{z}) = \lim_n s_n(\bar{z})$ si chiama somma

Si dice che (*) converge in modulo su A se $\forall\, \bar{z} \in A$ la serie numerica in $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \bar{z}^n| \left(= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, |\bar{z}|^n \right)$ converge

Si dice che (*) converge uniformemente su A ad $f : A \to \mathbb{C}$ se la successione (di funzioni complesse di variabili complesse) delle somme parziali $\{s_n\}$ converge uniformemente e cioè se:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \nu$: $|s_n(z) - s(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in A$

Infine (*) converge totalmente su A se $\exists \{c_n\} \subset [0, +\infty)$ tale che

1) $|a_n z^n| \leq c_n \quad \forall z \in A$ e $\forall n \in \mathbb{N}$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge

Ovviamente anche per le serie di potenze in $\mathbb{C}$ si ha

$$\text{CONV TOT SU A} \begin{array}{l} \nearrow \ \text{CONV. IN MODULO SU } A \ \searrow \\ \searrow \ \text{CONV. UNIFORME SU } A \ \nearrow \end{array} \text{CONV. PUNTUALE SU } A$$

Oss

L'insieme di convergenza puntuale di una serie di potenze non è vuoto, in quanto contiene il centro (qualunque sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$)

Teor 1

Se $z_1 \in \mathbb{C}$ è un punto in cui (*) converge (cioè $\sum a_n z_1^n \in \mathbb{C}$) allora (*) converge in modulo in ogni numero complesso z t.c. $|z| < |z_1|$

Dim.

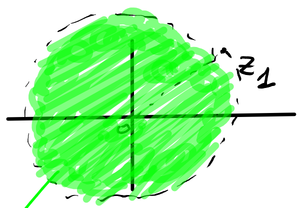
Sia $z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z| < |z_1|$. Proviamo che la serie dei moduli della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, e cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z|^n$, converge

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n$ converge, il suo termine generale tende a 0

cioè $a_n z_1^n \xrightarrow{n} 0$. Quindi definitivamente $|a_n z_1^n| < 1$.

Per cui $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z_1|^n \frac{|z|^n}{|z_1|^n} <$

$< \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ che converge in quanto serie geometrica di ragione $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$



insieme su cui (*) converge se converge in z_1

Def

Sia $\rho = \sup \{ |z| : z \in \mathbb{C},\ (*) \text{ converge} \}$

ρ si dice raggio di convergenza di $(*)$ mentre $D(0,\rho)$ si chiama disco di convergenza.

(Nel caso in cui il centro della serie è $z_0 \neq 0$
$\rho = \sup \{ |z - z_0| : z \in \mathbb{C},\ \sum_n a_n (z-z_0)^n \text{ converge} \}$,
mentre il disco di convergenza è il disco $D(z_0, \rho)$
di centro z_0 e raggio ρ)

Oss 1 $D(0,\rho) \subset B :=$ Insieme di convergenza puntuale di $(*)$

infatti per definizione, $z \in D(0,\rho) \iff |z| < \rho$. Supponiamo che $z \notin B$ allora $(*)$ non converge su ogni numero complesso $\bar{z}$ avente modulo soddisfacente

$|z| < |\bar{z}| < \rho$ (altrimenti per il teorema precedente $(*)$ convergerebbe in z)

e dunque per come è definito deve essere

$\rho \leq |\bar{z}| < \rho$!!

Oss 2 $B \subset \overline{D(0,\rho)} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho \}$

Infatti se $z \in B$ allora $|z| \leq \rho$ per definizione di raggio di convergenza

Oss 3

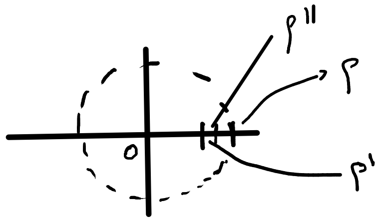
Mettendo insieme il teorema 1 sopra e l'osservazione 1 si ha che $\sum_n a_n z^n$ converge in modulo su $D(0,\rho)$.

Convergenza totale (e uniforme di una serie di potenze)

$(*)$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$; sia ρ il suo raggio di converg., allora la serie $(*)$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $\overline{D(0,\rho')}$, $\forall \rho' < \rho$

dim

Prendo ρ'' tale $\rho' < \rho'' < \rho$



$z = \rho''$ è interno al disco di convergenza

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\rho'')^n$ converge in modulo

$|z|^n \leq (\rho')^n < (\rho'')^n$, $\forall z \in \overline{D(0,\rho')}$

e quindi $|a_n z^n| \leq \underbrace{|a_n| (\rho'')^n}_{c_n}$ $\forall z \in \overline{D(0,\rho')}$

e $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (\rho'')^n$ converge in quanto $\rho'' \in D(0,\rho)$ (si ricordi l'osservazione 3)

Teoremi per il calcolo del raggio di convergenza

Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ (*)

TEOR 1

Se $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in [0,+\infty]$

Allora $\rho = \begin{cases} 1/\ell & \text{se } \ell \in (0,+\infty) \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$

(cioè il disco di convergenza è uguale a $\mathbb{C}$)

(cioè (*) converge solo nel centro)

Teor 2

Se $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ allora $\rho = \begin{cases} 1/\ell & \text{se } \ell \in (0,+\infty) \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$

DIM Teor 1 Senza ledere la generalità della dimostrazione possiamo supporre che $z_0 = 0$

Sia $\bar{z} \in \mathbb{C}$ e si consideri la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \bar{z}^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |\bar{z}|^n .$$ Applico il criterio del rapporto

per studiarne il carattere: $\frac{|a_{n+1}| |\bar{z}|^{n+1}}{|a_n| |\bar{z}|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |\bar{z}| \xrightarrow{n} \ell |\bar{z}|$ < 1

CONVERGE SE

cioè se $\ell = 0$: $\forall z \in \mathbb{C}$ abbiamo che $0\,|z| = 0 < 1$

Se $\ell \in (0,+\infty)$ per: $|z| < 1/\ell$. Per cui $(*)$ converge nel disco di centro 0 e raggio $\frac{1}{\ell}$. Dunque $\frac{1}{\ell} \leq \rho$.

Supponiamo che sia $\rho > \frac{1}{\ell}$; esiste quindi $z_1 \in \mathbb{C}$ con $\frac{1}{\ell} < |z_1| < \rho$

Poiché $z_1 \in D(0,\rho)$ $\sum_n a_n z_1^n$ converge in modulo; allo stesso tempo abbiamo:

$$\lim_n \frac{|a_{n+1} z_1^{n+1}|}{|a_n z_1^n|} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|z_1| = \ell \cdot |z_1| > 1$$

quindi $\sum_n |a_n z_1^n|$ non converge!. Dunque non può essere $\rho > \frac{1}{\ell}$ e quindi $\rho = \frac{1}{\ell}$.

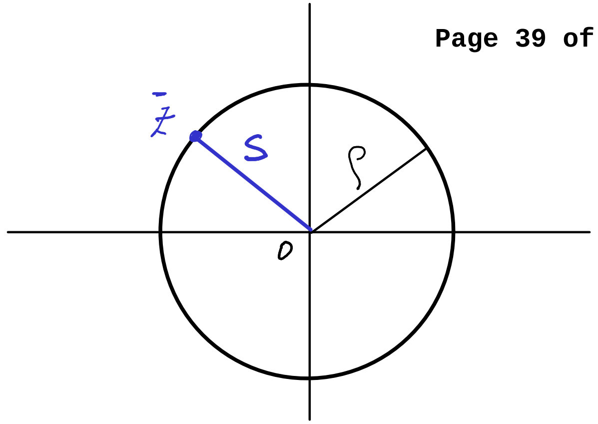
Infine se $\ell = +\infty$, $\ell\,|z| = +\infty$ (nel senso dei limiti) qualunque sia $z \in \mathbb{C}$ e dunque in questo caso la $(*)$ converge solo nel centro cioè $\rho = 0$.

(la dim del teorema 2 è del tutto analoga e basata sul criterio della radice)

OSS

Sui punti del bordo del disco di convergenza la serie può convergere o meno e se converge può non convergere in modulo.

Teorema di Abel



Si consideri la serie di potenze

$(*)$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e sia $\rho > 0$ raggio di convergenza

Sia $\bar{z} \in \partial D(0,\rho)$.

Se $(*)$ converge in $\bar{z}$ allora $(*)$ converge uniformemente nel segmento S di estremi 0 e $\bar{z}$

Nel caso di una serie di potenze in $\mathbb{R}$ il teorema di Abel diviene:

$(**)$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, sia $\rho > 0$ il raggio di convergenza, $(-\rho, \rho)$ intervallo di convergenza

Se $(**)$ converge in $-\rho$ (risp. ρ), $(**)$ converge unif. su ogni intervallo del tipo $[-\rho, b]$ con $b < \rho$ (risp. $[a, \rho]$ con $a > -\rho$)

Se $(**)$ converge in $-\rho$ e in ρ, $(**)$ converge unif. su $[-\rho, \rho]$.

Esempi di serie di potenze

- Serie esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (*)

$\rho = +\infty$ dato che $\displaystyle\lim_n \frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)} = 0$

Quindi (*) converge puntualmente e in modulo su $\mathbb{C}$ e converge totalmente su ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}$.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ (è detta serie binomiale)

se $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k)!\,(n-(k-1))\cdot(n-(k-2))\cdot\ldots(n-1)\cdot n}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Analogamente se α non è un numero naturale possiamo definire

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$$

$$\frac{\left|\binom{\alpha}{k+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{k}\right|} = \left| \frac{\dfrac{\cancel{\alpha}\cdot\cancel{(\alpha-1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(\alpha-(k-1))}\cdot(\alpha-(k+1-1))}{\underbrace{(k+1)!}_{=k!(k+1)}}}{\dfrac{\cancel{\alpha}\cdot\cancel{(\alpha-1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(\alpha-(k-1))}}{k!}} \right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| \xrightarrow{k\to\infty} 1$$

quindi $\rho = 1$.

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ $(*)$ Poiché $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$

converge su $(-1, 1)$ e converge unif. su $[-a, a]$, con $0 \leq a < 1$

I punti del bordo dell'intervallo di convergenza in questo caso sono -1 e 1

per $x = -1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

per $x = 1$ $\sum_{=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$; quindi $(*)$ converge puntualmente su $[-1, 1)$

Per il teorema di Abel la convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[-1, a]$ con $0 < a < 1$.

— $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$; $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\rho = 1$, intervallo di convergenza $(-1, 1)$

Per $x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \in \mathbb{R}$;

per $x = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$. L'insieme di convergenza è l'intervallo $[-1, 1]$.

In realtà poiché $\sup_{x \in [-1,1]} \left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$

la convergenza è totale e uniforme su $[-1, 1]$

Applicazione del t. di Abel al calcolo della somma della serie armonica a segni alterni

Sappiamo che $\forall t \in (-1,1)$ $\dfrac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$.

inoltre la convergenza di quest'ultima serie è totale e quindi uniforme su ogni intervallo del tipo $[-a,a]$ con $0 \le a < 1$. Possiamo quindi applicare il teorema di integrazione termine a termine ottenendo $\forall x \in (-1,1)$

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (\square)$$

Poiché nel punto $X=1$ la serie $(\square)$ converge, per il teorema di Abel la convergenza di $(\square)$ è uniforme in ogni intervallo del tipo $[-1+\varepsilon, 1]$ con $\varepsilon > 0$. Dato che la somma deve essere continua su $[-1+\varepsilon, 1]$ (in questo c'è convergenza uniforme e la serie è una serie di funzioni continue)

e quindi anche in 1, abbiamo che, chiamata f tale somma

tenere presente che $f|_{[-1+\varepsilon,1)}(x) = \log(1+x)$

$$\lim_{X\to 1} f(x) = \lim_{X\to 1} \log(1+X) = \log(2)$$

$$\| $$

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Possiamo riscrivere così

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \overset{k=n+1}{=\!=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

cioè $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots +$

- Determinare raggio di convergenza e stabilire il carattere agli estremi dell'intervallo di convergenza delle serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_n \frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho = 3$$

Quindi l'intervallo di convergenza è $(-3,3)$.

Per $x=3$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n}.$$

Poiché $\lim_n 1 \Big/ \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n/3} = \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}$

quindi diverge positivamente

Ricordiamo che: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$; $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \longrightarrow e$ se $a_n \to +\infty$

Per $x=-3$ la serie assegnata diviene $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n}$

La successione $(-1)^n \Big/ \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$ per n pari converge a $\left(\frac{1}{e}\right)^3$ quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n} \quad \text{non converge.}$$

Dunque l'insieme di convergenza puntuale è $(-3,3)$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[-3+\varepsilon, 3-\varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$.

$- \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n+3}}, \ x \in \mathbb{R}$; $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n+3}} > 0$; il centro della serie è $\frac{1}{2}$

$$\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+4}} \Big/ \frac{2^n}{\sqrt{n+3}} = \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+4}} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^n} = \sqrt{\frac{n+3}{n+4}} \cdot 2 \xrightarrow{n} 2$$

Quindi $\rho = \frac{1}{2}$ e l'intervallo di convergenza è $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = (0,1)$

Per $x=1 \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{2^n}\frac{1}{\cancel{2^n}}}{\sqrt{n+3}} = +\infty$ in quanto $\frac{1}{\sqrt{n+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

per $x = 0 \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}}}{\sqrt{n+3}}$; $\frac{1}{\sqrt{n+3}} \to 0$ $\quad \sqrt{n+3} < \sqrt{n+1+3}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1+3}} < \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

e dunque converge per il criterio di Leibniz.

L'insieme di conv. puntuale è $[0,1)$. Si ha convergenza totale e uniforme in ogni intervallo chiuso contenuto in $(0,1)$. La convergenza è poi anche uniforme (per il teorema di Abel) in ogni intervallo chiuso del tipo $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$

- Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$ converge totalmente su $\mathbb{R}$:

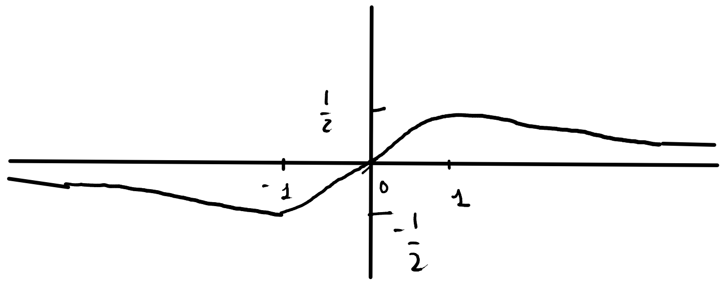
Posto $\dfrac{x}{1+x^2} = y$, possiamo studiare $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} y^n \quad (*)$

$\rho = 1$; quindi $(*)$ conv. puntualmente $(-1,1)$. So che $(*)$ conv. totalmente su ogni intervallo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$.

Se $\exists a \in [0,1)$ t.c. $-a \leq f(x) \leq a$, $\forall x \in \mathbb{R}$ allora la serie assegnata converge totalmente su $\mathbb{R}$.

$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x) = 0$, f è dispari



$$f'(x) = \frac{1+x^2 - x\,2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \iff 1 - x^2 > 0 \iff -1 < x < 1$$

$f(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$, quindi $\forall x \in \mathbb{R}$: $-\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ ■

SERIE DELLE DERIVATE DI UNA SERIE DI POTENZE

Consideriamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ supponiamo che il suo raggio di convergenza sia $\rho \in (0,+\infty]$. Poiché essa converge totalmente quindi uniformemente su ogni disco chiuso $\overline{D(z_0,\rho')}$ con $0 \leq \rho' < \rho$ e poiché le funzioni della successione che la definisce (cioè $\{z \in \mathbb{C} \mapsto a_n(z-z_0)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$) sono continue dal teorema sulla continuità della somma di una serie di funzioni continue.

otteniamo che $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ è continua su $\overline{D(z_0,\rho')}$, $0 \leq \rho' < \rho$

Ora $\forall z \in D(z_0,\rho)$ $\exists\, 0 < \rho' < \rho$ tale che $0 \leq |z-z_0| < \rho' < \rho$ e quindi f è continua su $D(z_0,\rho)$.

La serie delle derivate di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ e cioè $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1}$ è anch'essa una serie di potenze di centro z_0.

Cerchiamo di stabilire quale sia il raggio di convergenza della serie delle derivate.

Teor Una qualunque serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie delle derivate

Dim (nel caso in cui $\exists \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0,+\infty]$):

Infatti
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| n} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \underbrace{\lim_n \sqrt[n]{n}}_{=1} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

Derivabilità della somma di una serie di potenze nel disco di convergenza

Consideriamo la serie di potenze in $\mathbb{C}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ (*)

Sia f la sua somma, dunque:

$f : D(z_0,\rho) \to \mathbb{R}$, dove $D(z_0,\rho)$ è il disco di convergenza. Dal teorema di derivazione termine a termine per le serie di funzioni segue che f è derivabile e f' è la somma della serie delle derivate

In quanto somma di una serie di potenze f' è continua su $D(z_0,\rho)$

Iterando questo ragionamento otteniamo che $f \in C^\infty(D(z_0,\rho))$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2}$$

$$f'''(z) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) a_n (z-z_0)^{n-3}, \ \dots \ f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(k-1))\, a_n (z-z_0)^{n-k}$$

Valutando la serie qui sopra in $z = z_0$ otteniamo

$$f(z_0) = a_0 \quad , \quad f'(z_0) = 1 \cdot a_1 \quad , \quad f''(z_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 \quad \dots ,$$

$$f^{(k)}(z_0) = \underbrace{k\,(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1}_{k!} \cdot a_k = k!\, a_k$$

Riepiloghiamo quanto ottenuto:

Se f è la somma di una serie di potenze avente disco di convergenza $D(z_0, \rho)$

necessariamente $f \in C^{\infty}(D(z_0,\rho))$

e $\quad a_k = f^{(k)}(z_0)/k! \quad$ quindi $\quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$

Def <u>funzione analitica</u>

Sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Sia $z_0 \in \Omega$. Si dice che f è analitica in z_0 se $\exists\ r>0$ tale che $\forall z \in D(z_0, r)$, $f(z)$ è la somma di una serie di potenze di centro z_0. Poiché i coefficienti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di una serie di potenze sono individuati dai valori che la somma e le sue derivate successive assumono nel centro dalle relazioni $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, abbiamo quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, r).$$

questa serie viene detta serie di Taylor di f di centro z_0 (quando $z_0 = 0$ si chiama anche serie di Maclaurin)

Si dice che f è analitica in $A \subseteq \Omega$, A aperto se f è analitica in ogni punto di A.

Definizioni analoghe si danno anche nel caso di funzioni reali di variabile reale $f: (a,b) \to \mathbb{R}$.

Ricordiamo la formula di Taylor con il resto di Lagrange per una funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Sia $x_0\in(a,b)$ e supponiamo che f sia derivabile n volte in x_0 allora $\exists$ una funzione $R_n(x)$ tale che $\forall x\in(a,b)$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_m(x) \quad e \quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_m(x)}{|x-x_0|^m}=0$$

Se f è sufficientemente regolare (basta ad esempio che f sia di classe C^{m+1} su (a,b)) allora $\forall x\in(a,b)$ $\exists\, c\in(x_0,x)$ ($c\in(x,x_0)$, se $x<x_0$) tale che

$$\boxed{R_m(x)=\frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}}$$

$\leftarrow$ Resto di Lagrange

È naturale chiedersi se per una funzione di classe C^∞ su (a,b) si abbia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x \text{ in un intorno di } x_0;$$

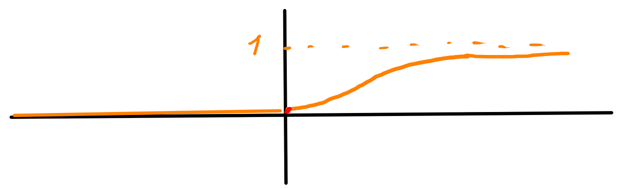
cioè è naturale chiedersi se $f \in C^\infty(a,b)$ è analitica in (a,b) ovvero, equivalentemente, se f è la somma della propria serie di Taylor di centro x_0, $\forall x_0 \in (a,b)$

In generale la risposta è NO:

cioè non tutte le funzioni di classe C^∞ sono la somma della propria serie di Taylor

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$



$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma non è la somma della propria serie di Mac-Laurin

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0), \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f'(x) \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e quindi di nuovo $\lim_{x \to 0^+} f''(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f''(x)$ ossia f

è derivabile 2 volte in 0 e

$f''(0) = 0$. In modo analogo ci convinciamo che

$\forall n \in \mathbb{N}$, f è derivabile n volte in 0 e $f^{(n)}(0) = 0$

Dunque $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \, x^n \equiv 0$$ ma per $x > 0$ f non è

costante di costante valore 0 quindi non è la somma della propria serie di MacLaurin

. Condizione sufficiente perché $f \in C^\infty(a,b)$ sia analitica in (a,b)

Teor

Sia $f \in C^\infty(a,b)$. Se esiste $M > 0$ t.c. $\sup_{x \in (a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

allora f è analitica in (a,b). Precisamente qualunque sia $x_0 \in (a,b)$

e $\forall x \in (a,b)$, $f(x)$ è la somma della propria serie di Taylor di centro x_0

dim

Dalle formula di Taylor, poiché $f \in C^{\infty}(a,b)$, sappiamo che

$$\forall m \in \mathbb{N} : f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_m(x)$$

È sufficiente quindi dimostrare che $\forall x \in (a,b) : \lim_{m \to \infty} R_m(X) = 0$

dato che in tal caso

$$f(x) = \lim_{m} \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \lim_{m} R_m(X)$$

$$= \lim_{m} \left(S_m(x) \right) + \lim_{m} R_m(X) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(X_0)}{n!}(x-X_0)^n + 0$$

Poiché possiamo usare la forma di Lagrange per il resto cioè sappiamo che $\exists c \in (X_0, x)$ tale che $R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$

$(c \in (x, x_0)$ se $x < x_0)$

abbiamo: $$|R_m(x)| \leq |f^{(m+1)}(c)| \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \leq M \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow{m} 0$$

dato che $\lim_{m} \frac{a^m}{m!} = 0 \quad \forall a \in [0, +\infty)$

Alcune funzioni analitiche reali

- $f(x) = e^x \qquad D^k e^x = e^x$. Prendo l'intervallo $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$

$0 < D^{(n)} e^x < e^a := M$ su $[-a, a]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi per quanto visto nella lezione precedente $f(x) = e^x$ è la somma della propria serie di Maclaurin per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in [-a, a]$$

$\longrightarrow$ quindi dato che a è stato scelto arbitrariamente la $(*)$ vale $\forall x \in \mathbb{R}$.

- $$e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^k}{k!} - (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Analogamente

- $$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Sostituendo nella $(*)$ x con $-x^2$, otteniamo:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Poiché tale serie converge totalmente e quindi uniformemente su ogni intervallo chiuso e limitato (dato che la stessa cosa è vera per la serie esponenziale), applicando il teorema di integrazione termine a termine otteniamo

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^x$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

<u>funzione degli errori</u>

• $f(x) = \sin x$

$$D^{(k)} \sin x = \begin{cases} \pm \cos x & \text{se } k \text{ dispari} \\ \pm \sin x & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\left| D^{(k)} \sin x \right| \leq \underset{\to M}{1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall k \in \mathbb{N}$$

• $f(x) = \cos x$

$$D^{(k)} \cos x = \begin{cases} \pm \sin x, & k \text{ dispari} \\ \pm \cos x, & k \text{ pari} \end{cases}$$

quindi anche per le derivate di $f(x) = \cos x$ si ha $|D^{(k)} \cos x| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{N}$. Dunque entrambe le funzioni sono la somma delle propria serie di McLaurin per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tali serie sono:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \right)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots + \right)$$

- $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k, \quad x \in (-1,1)$. Poiché questa serie converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-1,1)$, usando il teorema di integrazione termine a termine otteniamo:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k t^k\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

$$\Big\Vert$$

$$\Big[\log(1+t)\Big]_0^x = \log(1+x)$$

Da cui

$$\log(1+x) = \sum_{h=1}^{+\infty} (-1)^{h+1} \frac{x^h}{h}, \quad \forall x \in (-1,1) \qquad (*)$$

(e sappiamo anche che $\log(2) = \displaystyle\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h}$, cioè la $(*)$ vale anche per $x=1$)

- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad \forall x \in (-1,1)$

Sia $x \in (-1,1)$, integrando termine a termine otteniamo

$$\underbrace{\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt}_{\text{arctg}\, x} = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\,dt = \overbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}^{(*)}$$

<u>oss</u> per $x=1$, $(*)$ diviene $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ che converge per il c. di Leibniz

per $x=-1$, $(*)$ diviene $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{-1}{2k+1}$

Quindi per il teorema di Abel la serie $(*)$ converge uniformemente su $[-1,1]$

dunque, per continuità, $\text{arctg}\, x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $\forall x \in [-1,1]$ da cui

$$\pi/4 = \text{arctg}\, 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

- $(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad , \quad \forall\, x \in (-1,1)\,.$

Per $\alpha = -\frac{1}{2}$ e sostituendo x con $-x^2$ (cosa possibile dato che se $x\in(-1,1)$ anche $-x^2\in(-1,1)$) otteniamo:

- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+(-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k}, \quad x\in(-1,1)$

e quindi integrando e applicando il teorema di integrazione termine a termine

- $\arcsin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x\in[-1,1]$

Esercizi:

- Ricavare, senza calcolare esplicitamente le derivate successive, la derivata settima in 0 della funzione $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$

Poiché $1/1-x = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, $\forall x\in(-1,1)$, sostituendo x con $-x^3$ otteniamo

$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{3k}$, $\forall x \in (-1,1)$, quindi moltiplicando ambo i membri per x otteniamo $\frac{x}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{3k+1} = x - x^4 + x^7 - x^{10} + \dots$

Quindi $1 = D^{(7)}\left(x/_{1+x^3}\right)\big|_{x=0} / 7!$

da cui $D^{(7)}\left(\frac{x}{1+x^3}\right)\Big|_{x=0} = 7!$

- Calcolare per serie l'integrale $\int_0^1 \sin(t^2)\,dt$

$$\sin(t^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 \sin(t^2)\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 t^{4k+2}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[\frac{1}{4k+3} t^{4k+3}\right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{4k+3}$$

Def

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Si dice <u>supporto di γ</u> l'immagine di γ cioè $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{C}$.

Si dice che γ è una <u>curva regolare a tratti (di classe C^1)</u>, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se γ è continua ed $\exists \{t_i\}_{i \in \{0,1,\dots,m\}}$, $m \in \mathbb{N}$ tali che

$t_0 = a < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ ($\{t_i\}_{i \in \{0,\dots,m\}}$ si dice suddivisione dell'intervallo $[a,b]$) e $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è di classe C^1, $\forall i \in \{1,\dots,m\}$

e $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_{i-1}, t_i)$.

derivata della curva γ in t, anche detta vettore velocità di γ in t. È per definizione $\lim_{h \to 0} \frac{(\gamma(t+h) - \gamma(t))}{h}$ ed è uguale a $\dot{\gamma}_1(t) + i\dot{\gamma}_2(t)$ se $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$

Poiché stiamo includendo gli estremi t_{i-1}, t_i si intende che esistono le derivate dx e sx, rispettivamente, in t_{i-1} e t_i e che la curva derivata $\dot{\gamma}(t)$ è continua in $[t_{i-1}, t_i]$. Ovviamente in generale si avrà che $\dot{\gamma}^-(t_i) := \lim_{h \to 0^-} \frac{\gamma(t_i + h) - \gamma(t_i)}{h} \neq \dot{\gamma}^+(t_{i-1})$ oppure che $\dot{\gamma}(t_i) = 0$.

Integrale di una curva $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. Supponiamo che γ sia continua, cioè γ_1 e γ_2 sono continue

Def

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt := \int_a^b \gamma_1(t)\,dt + i\int_a^b \gamma_2(t)\,dt$$

Prop

$$\left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |\gamma(t)|\,dt, \quad \forall \gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ continua}$$

Dim:

(Ricordiamo la forma trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso:

$z = a + ib$; se $z \neq 0$ $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, dove $\rho = |z|$ e θ è l'argomento principale di z

poiché $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, possiamo anche scrivere $z = \rho e^{i\theta}$ ← FORMA ESPONENZIALE DI Z)

Scriviamo $\int_a^b \gamma(t)\,dt$ in forma esponenziale: $\int_a^b \gamma(t)\,dt = \left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right| e^{i\theta}$.

Quindi

$$\left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right| = e^{-i\theta}\int_a^b \gamma(t)\,dt = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b \gamma(t)\,dt\right)$$

dato che $\left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right| \in \mathbb{R}$. Ora $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b \gamma(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\gamma(t)\right)dt$.

e dato che $\forall z \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Re}\,z \leq |\mathrm{Re}\,z| \leq |z|$, si ha $\int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\gamma(t)\right)dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta}\gamma(t)|\,dt$

$$= \int_a^b |e^{-i\theta}|\,|\gamma(t)|\,dt \leq \int_a^b 1\cdot|\gamma(t)|\,dt \quad \blacksquare$$

Integrale di una funzione complessa lungo una curva

Siano $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f continua e $\gamma: [a,b] \to \Omega$, γ regolare a tratti di classe C^1

Def Si definisce integrale di f su γ (o "lungo γ") e si indica con $\int_\gamma f(z)\,dz$ l'integrale della curva in $\mathbb{C}$ data da $t \in [a,b] \mapsto f(\gamma(t))\dot\gamma(t)$, cioè

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt$$

Poiché γ è regolare a tratti esiste una suddivisione $\{t_k\}_{k\in\{1,\dots,m\}}$ tale che le curve $t\in[t_{k-1},t_k] \mapsto f(\gamma(t))\dot\gamma(t)$ sono continue, $\forall k \in \{1,\dots,m\}$ e quindi possiamo definire

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt$$

posto $g(t) = f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)$ e

$f(z) = u(z) + i\,v(z)$, risulta

$$g(t) = \Big(u(\gamma(t)) + i\,v(\gamma(t))\Big)\cdot\left(\dot\gamma_1(t) + i\dot\gamma_2(t)\right) =$$

$$= u(\gamma(t))\,\dot\gamma_1(t) - v(\gamma(t))\,\dot\gamma_2(t) + i\left(v(\gamma(t))\,\dot\gamma_1(t) + u(\gamma(t))\,\dot\gamma_2(t)\right)$$ e quindi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b \left(u(\gamma(t))\dot\gamma_1(t) - v(\gamma(t))\dot\gamma_2(t)\right)dt + i\int_a^b \left(v(\gamma(t))\dot\gamma_1(t) + u(\gamma(t))\dot\gamma_2(t)\right)dt$$

Se consideriamo le seguenti due forme differenziali su Ω

$$\omega_1(x,y) = u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy \quad \text{e} \quad \omega_2(x,y) = v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$$

abbiamo quindi $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \omega_1 + i\int_\gamma \omega_2$

Prop

Sia $f:\Omega \to \mathbb{C}$ continua e γ regolare a tratti

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M \cdot L(\gamma)$$

Se $\gamma: [a,b] \to \Omega$ è regolare a tratti allora la lunghezza di γ è uguale a $L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt$

$$M := \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|$$

dim

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b \overbrace{f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)}^{g(t)\text{ è una curva su }\mathbb{C}}\,dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\dot\gamma(t)|\,dt \le \int_a^b M\,|\dot\gamma(t)|\,dt$$

$$= M\cdot\int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt = M\cdot L(\gamma) \quad \blacksquare$$

FORME DIFFERENZIALI : vedere § 38-39-40 del Fusco - Marcellini - Sbordone

(Non studiare per esame dimostrazione che una forma differenziale di classe C^1 su Ω, chiusa, con Ω rettangolo aperto è esatta ; § 40)

Convezione sull'orientamento positivo del bordo di un aperto convesso $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

Sia $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ diciamo che Ω è un <u>dominio</u> se è un aperto convesso limitato. Diciamo che Ω è <u>regolare</u> se il suo bordo $\partial\Omega$ è l'unione di un insieme finito di supporti di curve regolari.

Il verso positivo di $\partial\Omega$, che indichiamo con $\partial^+\Omega$ è quello così definito: qualunque sia $p \in \partial\Omega$ punto in cui $\partial\Omega$ è regolare, si consideri $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curva regolare tale che

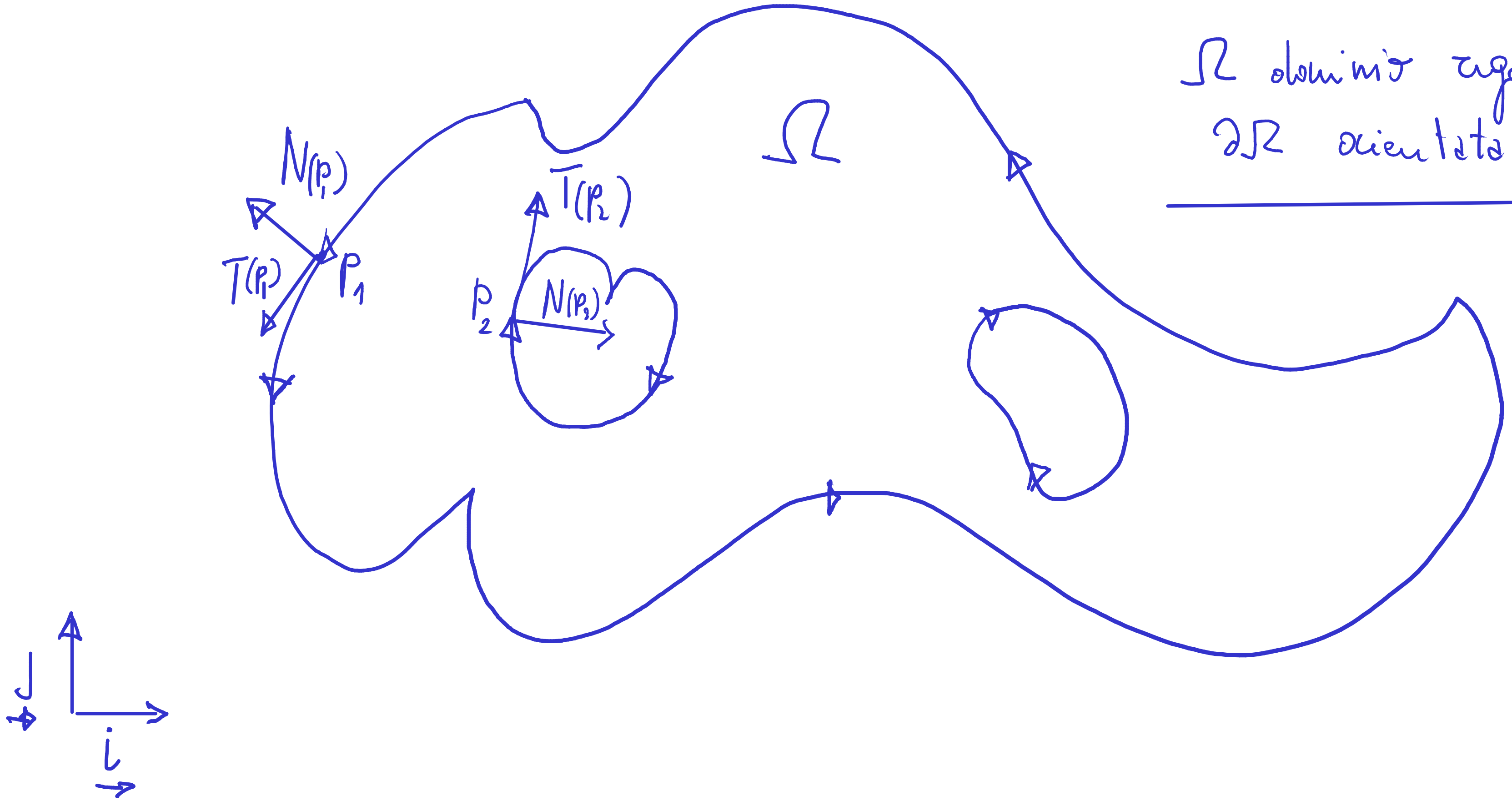
$\gamma([a,b]) \subset \partial\Omega$ e $p \in \gamma((a,b))$ (quindi esiste $\bar{t} \in (a,b)$ tale che $p = \gamma(\bar{t})$);

sia $N(p)$ il versore normale a $\partial\Omega$ in p che punta verso il complementare di Ω;

il verso positivo di $\partial\Omega$ è quello per cui γ è orientata in modo che posto $T(p) = \dot\gamma(\bar{t}) / |\dot\gamma(\bar{t})|$ $\rightsquigarrow$ (è il versore tangente in p a γ)

la coppia $(N(p)\ T(p))$ sia CONGRUENTE a $(\vec{i}, \vec{j})$, dove $\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono i versori che definiscono rispettivamente l'asse dei reali e quello degli immaginari

Ω dominio regolare con $\partial\Omega$ orientata nel verso positivo



Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. D'ora in avanti con il simbolo $H(\Omega)$ indicheremo l'insieme delle funzioni olomorfe su Ω

$$H(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa} \}$$

Teorema (CAUCHY - GOURSAT)

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f \in H(\Omega)$; si consideri $T \subset \Omega$ dominio regolare, allora

$$\int_{\partial^+ T} f(z)\,dz = 0$$

(ovviamente poiché $\int_{\partial^- T} f(z)dz = -\int_{\partial^+ T} f(z)\,dz$, anche $\int_{\partial^- T} f(z)\,dz = 0$)

Oss 1 Possiamo convincerci del fatto che $\int_{\partial^+ T} f(z)\,dz$ debba essere 0, facendo delle ipotesi in più rispetto a quelle contenute nel teorema: Supponiamo, infatti, che f sia di classe C^1 su Ω e che Ω sia semplicemente connesso. Allora

$$\int_{\partial^+ T} f(z)\,dz = \int_{\partial^+ T} \omega_1 + i \int_{\partial^+ T} \omega_2 \,, \quad \text{dove } \omega_1 = u\,dx - v\,dy \text{ e } \omega_2 = v\,dx + u\,dy$$

Se f è olomorfa, dalle relazioni di Cauchy-Riemann, si ha:

$u_x(x,y) = v_y(x,y)$ e $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$ e quindi

ω_1 è chiusa (infatti $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$) e ω_2 è chiusa (infatti $v_y(x,y) = u_x(x,y)$)

Se Ω è semplicemente connesso, ω_1 e ω_2 sono esatte dato che hanno componenti di classe C^1 e sono due forme differenziali chiuse

e quindi $\int_{\partial^+ T} \omega_1 = 0$ e $\int_{\partial^+ T} \omega_2 = 0$ (dato che ∂T è il supporto di una curva chiusa)

Oss 2

Il teorema di Cauchy - Goursat può anche essere enunciato considerando invece che T dominio regolare contenuto in Ω, una qualunque curva γ chiusa in Ω orientata regolare a tratti che sia il bordo di un dominio contenuto in Ω

cioè se $f \in H(\Omega)$ e γ è una curva come detto qui sopra allora $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Vogliamo ora dimostrare che $\boxed{f \in H(\Omega) \iff f \text{ è analitica in } \Omega}$

Ovviamente l'implicazione $\Leftarrow$ è già nota dato che se f è analitica in Ω allora $\forall\, z_0 \in \Omega$ $\exists\, D(z_0,\delta)$ tale che $\forall\, z \in D(z_0,\delta)$ $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$

poiché quindi f in $D(z_0,\delta)$ è la somma di una serie di potenze, è di classe C^∞ in $D(z_0,\delta)$ (e $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$). In particolare f è derivabile, cioè olomorfa, in $D(z_0,\delta)$ e quindi anche nel punto z_0. Poiché z_0 è stato scelto arbitrariamente, f è olomorfa su Ω

Teorema (Formula di rappresentazione di Cauchy)

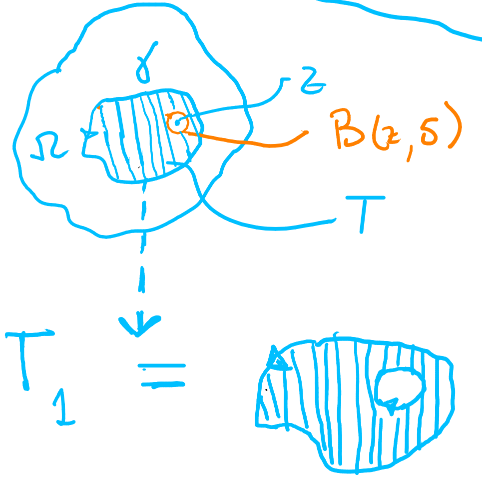
$f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e sia γ una curva chiusa regolare a tratti orientata nel verso antiorario che sia il bordo di un dominio regolare $T \subset \Omega$ allora

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \,, \quad \forall z \in T}$$

→ i valori che una funzione olomorfa assume in T sono determinati dai valori che f assume sulla frontiera di T.

<u>dim</u> Consideriamo un disco di centro z e raggio δ sufficientemente piccolo in modo che $D(z,\delta) \subset T$

Sia $T_1 = T \setminus D(z,\delta)$, osserviamo che $T_1 \subset \Omega \setminus D(z,\delta/2)$



z non può appartenere al supporto di γ, ci essere esterno a $\overline{T}$

che su $\Omega \setminus D(z, \frac{\delta}{2})$, la funzione $\xi \mapsto \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ è olomorfa

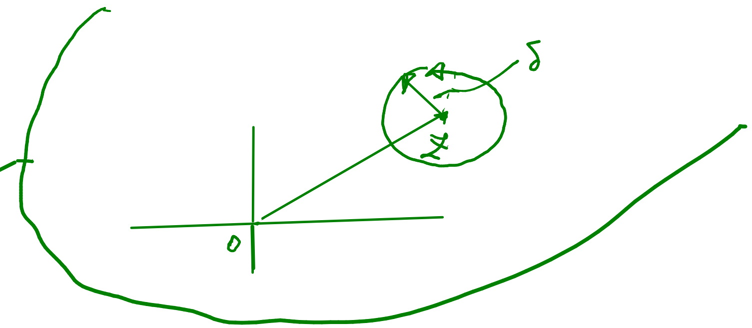
Quindi per il teorema di Cauchy-Goursat

$$0 = \int_{\partial^+ T_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\overline{\rho}(z,\delta)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \Rightarrow$$

↳ orientato in senso orario

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{C^+(z,\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

↳ orientata senso antiorario



non dipende da δ!

l'equazione di tale circonferenza orientata nel verso antiorario è

$$C(t) = z + \delta e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$= z + \delta(\cos t + i \sin t)$$

$$C'(t) = D(z + \delta(\cos t + i \sin t)) =$$
$$= i(\cos t + i \sin t)$$
$$= \delta(i \cos t - \sin t) = \delta i e^{it}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \delta e^{it})}{\cancel{z} + \cancel{\delta e^{it}} - \cancel{z}} \cancel{\delta i e^{it}}\, dt = i \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it})\, dt$$

quindi è anche uguale al limite del II membro per $\delta \to 0$. Valutiamo allora tale limite:

$$\lim_{\delta \to 0} i \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it})\, dt = i 2\pi f(z)$$

Infatti: f è olomorfa in z e quindi è continua cioè $\lim_{\delta \to 0} f(z + \delta e^{it}) = f(z)$

Dato che se $w = z + \delta e^{it}$, $|w - z| = |\delta e^{it}| = \delta$ e quindi

$w = z + \delta e^{it} \to z$, per $\delta \to 0$.

Allora per definizione di funzione continua in un punto

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad$ t.c. $\forall \, 0 < \delta < \delta' \quad : \quad \left| f(z + \delta e^{it}) - f(z) \right| < \varepsilon/_{2\pi}, \ \forall t \in [0, 2\pi]$. Dunque

$$\left| \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) \, dt - \int_0^{2\pi} f(z) \, dt \right| = \left| \int_0^{2\pi} \left(f(z + \delta e^{it}) - f(z) \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \left| f(z + \delta e^{it}) - f(z) \right| dt < \int_0^{2\pi} \varepsilon/_{2\pi} \, dt = \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot 2\pi = \varepsilon, \ \forall \, 0 < \delta < \delta' \quad \blacksquare$$

Possiamo ora dimostrare che $f \in H(\Omega) \Rightarrow f$ analitica in Ω

Teor

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olomorfa allora f è analitica in Ω inoltre $\forall z_0 \in \Omega$ e $\forall$ curva chiusa regolare a tratti γ orientata in verso antiorario t.c. sia la frontiera di un dominio T contenente z_0 e contenuto in Ω

$$\boxed{f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} \, d\xi}$$

per $k=0$ si riottiene la I formula di rappresentazione di Cauchy

Dim Vogliamo dimostrare che f è analitica in $z_0 \in \Omega$ cioè che $\exists\, D(z_0,\delta) \subset \Omega$ ed $\exists\, \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ (dipendente da z_0!) tali che

$$\forall z \in D(z_0,\delta): \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

Poiché Ω è aperto e $z_0 \in \Omega$ $\exists\, \delta > 0$ tale che $D(z_0,\delta) \subset \Omega$

Si consideri una qualunque curva γ chiusa regolare a tratti che sia il bordo di un dominio T che sia contenuto in Ω e contenga $D(z_0,\delta)$

Dalla I formula di rappresentazione abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad , \quad \forall z \in D(z_0,\delta)$$

Ora

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{\xi - z_0}}.$$

$\forall z \in D(z_0,\delta)$: $\left| \dfrac{z-z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$, dato che $|z-z_0| < \delta$, poiché $z \in D(z_0,\delta)$,

mentre $|\xi - z_0| > \delta$ dato che $\xi \in \partial T$ e $D(z_0,\delta) \subset T$

Quindi

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{\xi - z_0}} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0} \right)^k$$

Quindi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^k d\zeta$$

Possiamo integrare termine a termine poiché la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^k$ converge assolutamente e quindi uniformemente $\forall \zeta \in \partial T$ dato che $\exists\, 0 < a < 1$ tale che $\left|\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right| \leq a$, $\forall \zeta \in \partial T$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty} (z-z_0)^k \left(\int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta\right).$$ Dunque

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta}_{= a_k} \cdot (z-z_0)^k .$$

Infine poiché in una serie di potenze i coefficienti devono soddisfare la relazione $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ otteniamo:

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta$$

■

Conseguenza: una funzione f olomorfa in Ω è di classe C^∞ su Ω!

Oss 1
La dim che abbiamo visto ci dà anche un'informazione importante sul raggio di convergenza della serie di Taylor di f di centro $z_0 \in \Omega$ o meglio ci dice anche, fissato $z_0 \in \Omega$, quanto può essere al massimo il raggio δ per cui

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \quad (*) \quad , \forall z \in D(z_0, \delta)$$

Infatti nella dimostrazione è sufficiente che il disco $D(z_0, \delta)$ sia contenuto in Ω e quindi la $(*)$ è valida $\forall z \in \Omega$ con $|z - z_0| < dist(z_0, \partial\Omega)$

Per cui la $(*)$ vale $\forall \delta \leq dist(z_0, \partial\Omega)$ Ovviamente questa distanza dipende da z_0!
La distanza di un punto z_0 da un insieme X è per definizione $d(z_0, X) := \inf_{z \in X} |z - z_0|$.

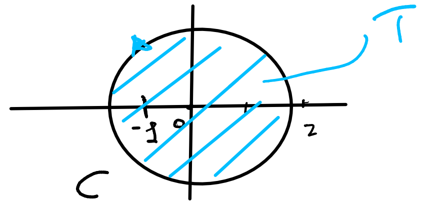
Ad esempio se sappiamo che $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ allora $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ la $(*)$ è vera $\forall z \in \mathbb{C}$.

Oss 2
Poiché la curva γ è arbitraria abbiamo che se γ_1 e γ_2 sono curve regolari a tratti che sono il bordo di domini che contengono z_0 allora

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi = \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z_0) = \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$$

Esercizi

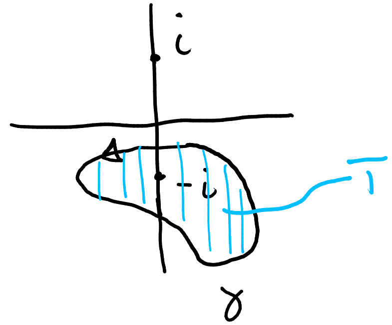
- Calcolare $\int_C \frac{(z^3-1)^8}{z+1}\,dz$, dove C è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata nel verso antiorario



Poiché $f(z) = (z^3-1)^8$ è olomorfa su $\mathbb{C}$ e -1 è un punto interno al disco $D(0,2)$ di cui C è il bordo

abbiamo per la I formula di Cauchy: $\int_C \frac{(z^3-1)^8}{z+1}\,dz = \int_C \frac{(z^3-1)^8}{z-(-1)}\,dz = f(-1)\,2\pi i = (-2)^8 \cdot 2\pi i = 2^9\pi i$

- Calcolare $\int_\gamma \frac{(z-i)^4}{(z+i)^6}\,dz$ $(\square)$ dove γ è la curva qui disegnata



$$(\square) = \int_\gamma \frac{(z-i)^4}{(z-(-i))^6}\,dz$$

$f(z) = (z-i)^4$, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, è intera. Per la II formula di rappresentazione di Cauchy si ha

$$0 = f^{(5)}(-i) \cdot \frac{2\pi i}{5!} = \int_C \frac{(z-i)^4}{(z+i)^6}\,dz$$

- $$\int_\gamma \frac{(z-i)^4}{(z+i)^5} = f^{(4)}(-i)\,\frac{2\pi i}{4!} = \frac{4!}{4!}\,2\pi i = 2\pi i,$$

  γ come nell'esercizio precedente

- $$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}\,dz$$, dove $\mathcal{C}$ è la circonferenza di centro $-2i$ e raggio 2 orientata in senso antiorario.

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \qquad f: \mathbb{C}\setminus\{i\} \to \mathbb{C}, \text{ è olomorfa}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2}\,dz = f'(-i)\,\frac{2\pi i}{1!} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f'(z) = \frac{-2(z-i)}{(z-i)^4} = -\frac{2}{(z-i)^3}$$

$$f'(-i) = -\frac{2}{(-2i)^3} = \frac{-2}{-8(-i)} = -\frac{1}{4i}$$

ZERI DI UNA FUNZIONE OLOMORFA

Def $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ si dice zero per f se $f(z_0) = 0$

Def Sia $f \in H(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{C}$; $z_0 \in \Omega$ si dice zero di ordine $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ per f se $\exists\, \delta > 0$ e $g \in H(D(z_0, \delta))$ t.c. $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $\forall z \in D(z_0, \delta)$ e $g(z_0) \neq 0$

Teor Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f \in H(\Omega)$
$z_0 \in \Omega$ zero di ordine m per f $\iff$ $f^{(k)}(z_0) = 0$ $\forall k \in \{0, \dots, m-1\}$,
$f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

dim $\Rightarrow$: Sia $g \in H(D(z_0, \delta))$ tale che

$\forall z \in D(z_0, \delta)$: $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$; $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$, $a_k = \dfrac{g^{(k)}(z_0)}{k!}$

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k+m}$$

$$\overset{k+m=h}{=} \sum_{h=m}^{+\infty} a_{h-m} (z - z_0)^h \Rightarrow f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k = 0, \dots, m-1$$

$$\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = a_0 = g(z_0) \neq 0$$

dim $\Leftarrow$: Poiché $f \in H(\Omega)$, f è analitica in Ω e quindi anche in z_0. Dunque $\exists \delta > 0$ tale $\forall z \in D(z_0, \delta)$ si ha:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k = (z-z_0)^m \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^{k-m} \underset{k-m=h}{=}$$

$$= (z-z_0)^m \underbrace{\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{f^{(m+h)}(z_0)}{(m+h)!} (z-z_0)^h}$$

sia g la somma di questa serie di potenze

g è ricorsivamente definita in $D(z_0, \delta)$ perché la serie che la definisce deve convergere su $D(z_0, \delta)$. In quanto somma di una serie di potenze g è olomorfa

e inoltre $g(z_0) = f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$ → è il primo coefficiente della serie

Def

$\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ è uno zero isolato per f se

$f(z_0) = 0$ e $\exists \delta > 0$ tale che $f(z) \neq 0 \ \forall z \in D'(z_0, \delta)$

Teor

$\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f \in H(\Omega)$

$z_0 \in \Omega$ è uno zero isolato per f <=> z_0 è uno zero di ordine finito

dim

=> : per assurdo suppongo che z_0 sia uno zero di ordine infinito cioè

$f^{(k)}(z_0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ma f è olomorfa in z_0, quindi è analitico in z_0 cioè

$\exists \ \delta > 0$ tale che $\forall z \in D(z_0, \delta)$ si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = 0 \ !$$

cioè f è nulla su $D(z_0,\delta)$ in contraddizione con il fatto che z_0 è uno zero isolato

<=: se z_0 non è isolato allora $\exists \{z_n\} \subset \Omega$ t.c. $z_n \to z_0$ e $f(z_n) = 0$, $z_n \neq z_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Per ipotesi sappiamo che $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists \delta > 0$ ed $\exists g \in H(D(z_0, \delta))$ tali che

$$g(z_0) \neq 0 \quad e \quad f(z) = (z - z_0)^m g(z), \ \forall z \in D(z_0, \delta)$$

g è continua in z_0, quindi poiché $z_n \to z_0$, $g(z_n) \to g(z_0)$

Ma $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^m g(z_n)$. Poiché $z_n \neq z_0$, deve essere $g(z_n) = 0$

Quindi $g(z_0) = \lim_n g(z_n) = 0$! ■

Teor (Principio di identità per le funzioni olomorfe)

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$, aperto CONNESSO ed $f, g \in H(\Omega)$

se l'insieme dei punti su cui f e g sono uguali ha almeno un punto di accumulazione in Ω allora $f(z) = g(z)$, $\forall z \in \Omega$

Oss1 dire che l'insieme dei punti su cui f e g coincidono ha almeno un punto di accumulazione in Ω equivale a dire che

$\exists \{z_n\} \subset \Omega$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}: f(z_n) = g(z_n)$ ed $\exists z_0 \in \Omega$ tale che $z_n \to z_0$. e $z_n \neq z_0, \forall n$

z_0 è un punto di accumulazione per l'insieme $A = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$

Oss2 il teorema è equivalente a:

($\square$) se $h \in H(\Omega)$ e l'insieme degli zeri Z_h di h ha almeno un punto di accumulazione allora $h(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$

Infatti l'enunciato ($\square$) è conseguenza del teorema come subito si vede prendendo $h = f$ e $g = 0$. Viceversa se vale ($\square$) allora il teorema è anche vero come si vede subito prendendo $h = f - g$.

Dimostriamo quindi il teorema, dimostrando ($\square$):

dim: sia z_0 punto di accumulazione di Z_h e

sia $Z_h^* := \{ z \in Z_h : z \text{ ha molteplicità infinita} \}$ $(\subset Z_h \subset \Omega)$

Osserviamo che $Z_h^* \neq \emptyset$ in quanto $z_0 \in Z_h$

Infatti poiché z_0 è di accumulazione per Z_h, $\exists \{z_n\} \subset Z_h$ tale che $z_n \longrightarrow z_0$, $z_n \neq z_0$; poiché f è continua $0 = f(z_n) \xrightarrow{n} f(z_0)$ e dunque z_0 è uno zero non isolato per f (quindi z_0 ha molteplicità infinita)

Se dimostriamo che $Z_h^* = \Omega$, il teorema è dimostrato.

Supponiamo allora per assurdo che $Z_h^* \neq \Omega$. Quindi $\exists\, z_1 \in \Omega \setminus Z_h^*$

Poiché Ω è connesso, esiste una curva continua $\gamma : [0,1] \to \Omega$, tale che $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(1) = z_1$. Sia $A = \{ t \in [0,1] : \gamma(t) \in Z_h^* \}$ $(\subset [0,1])$

ovviamente $A \neq \emptyset$ dato che $0 \in A$ (dato che $\gamma(0) = z_0 \in Z_h^*$)

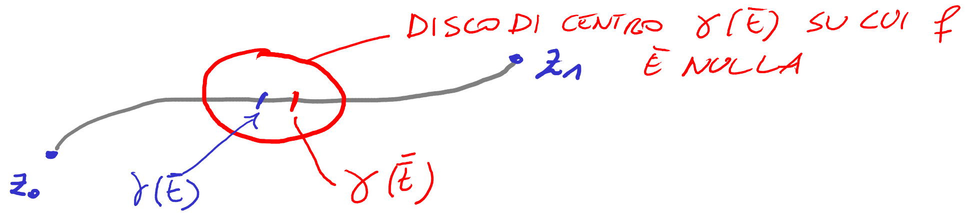
Sia $\bar{t} = \sup A$ e supponiamo che $\bar{t} < 1$.

Per definizione di estremo superiore di un insieme $\exists \{t_n\} \subset A$ t.c. $t_n \to \bar{t}$

Poiché γ è continua, $f \circ \gamma$ è continua e quindi $0 = f(\gamma(t_n)) \xrightarrow{n} f(\gamma(\bar{t}))$

Dunque $\gamma(\bar{t})$ è uno zero non isolato per f, cioè $\gamma(\bar{t}) \in Z_h^*$.

Ma allora poiché f è analitica esiste un disco di centro $\gamma(\bar{t})$ su cui f è nulla e quindi $\exists\, \bar{\bar{t}} > \bar{t}$ tale che $f(\gamma(\bar{\bar{t}})) = 0$ e $\gamma(\bar{\bar{t}})$ non è isolato



Questo è assurdo poiché $\bar{t} = \sup A$. Dunque $\bar{t} = 1$ e quindi anche $\gamma(1) = z_1$ è uno zero non isolato di f (dato che $\exists \{t_n\} \subset A$, $t_n \to 1$, $0 = f(\gamma(t_n)) \to f(\gamma(1)) = z_1$), cioè $z_1 \in Z_h^*$!!

Funzione esponenziale in $\mathbb{C}$

Consideriamo la serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \quad ; \quad \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{k!}} = 0 \implies \rho = +\infty$$

chiamo $\forall z \in \mathbb{C}$, $\boxed{e^z := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}}$. Considero la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$

In quanto somma di una serie di potenze tale funzione è analitica quindi olomorfa su $\mathbb{C}$

Si può dimostrare che $\forall \, {z_1 \atop z_2} \in \mathbb{C} : e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

se $\operatorname{Im} z = 0$, cioè però $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \longrightarrow$ exp in campo reale!

Quindi $f(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tale funzione è l'unica estensione OLOMORFA SU $\mathbb{C}$ della funzione esponenziale in campo reale. Infatti se supponiamo che esiste $g \neq f$ t.c $g \in H(\mathbb{C})$ e $g_{|\mathbb{R}} = f_{|\mathbb{R}} = \exp$

Poiché g e f coincidono su $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}$ ha punti di accumulazione, per il principio identità delle funzioni olomorfe $f(z) = g(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Definizione delle funzioni seno e coseno in $\mathbb{C}$

Analogamente definiamo le funzioni $z \in \mathbb{C} \mapsto \sin z$, $z \in \mathbb{C} \mapsto \cos z$ estensione olomorfe delle analoghe funzioni in campo reale:

$$\sin z := \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{se } z = x \in \mathbb{R} \text{ abbiamo } \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{se } z = x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

sia $\theta \in \mathbb{R}$ e consideriamo $z = i\theta$, abbiamo:

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} i^k \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\theta + i\sin\theta$$

dato che $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$, ... e così via

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

E quindi se $z = x+iy$, $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Sia $z \in \mathbb{C}$. Consideriamo iz e $-iz$

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} i^k \frac{z^k}{k!} \quad ; \quad e^{-iz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k i^k \frac{z^k}{k!}$$

Da cui segue che

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} \quad e \quad \boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

Dimostriamo ora che $\forall z \in \mathbb{C}$: $\boxed{\sin^2 z + \cos^2 z = 1}$

$\forall z \in \mathbb{R}$: sappiamo che $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

le funzioni $g = z \in \mathbb{C} \mapsto \sin^2 z + \cos^2 z$ e $f = z \in \mathbb{C} \mapsto 1$ sono olomorfe su $\mathbb{C}$

Poiché $g_{|\mathbb{R}} = f_{|\mathbb{R}}$ e $\mathbb{R}$ ha punti di accumulazione, $f = g$ su $\mathbb{C}$

Dimostriamo che:

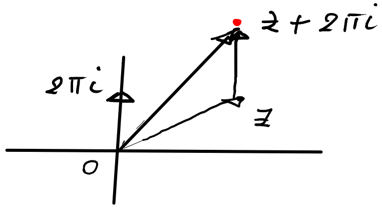
1) $\forall z \in \mathbb{C}: e^z \neq 0$. Infatti se $z = x+iy$, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ quindi

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = |e^x|\,|\cos y + i \sin y| = e^x \cdot 1 \neq 0$$

(abbiamo così anche visto che $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$; quindi $z \mapsto e^z$ non è una funzione limitata dato che per $\operatorname{Re} z \to +\infty$ si ha che $|e^z| \to +\infty$)

2) $f(z)=e^z$ è periodica di periodo $2\pi i$; infatti $e^z = e^{z+2\pi i}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ dato che

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z(1+0i) = e^z \cdot 1$$



3) $De^z = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$; infatti poichè la serie delle derivate della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ è data che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{z^h}{h!} = e^z,$$

applicando il teorema di derivazione termine a termine otteniamo quindi $De^z = e^z$.

4) $$D\cos z = D\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(ie^{iz} - ie^{-iz}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z, \forall z \in \mathbb{C}$$

5) Analogamente, $D \sin z = \cos z$, $\forall z \in \mathbb{C}$

6) le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ non sono limitate in $\mathbb{C}$ infatti per $z = it$, $t \in \mathbb{R}$

$$\cos(it) = \frac{e^{i(it)} + e^{-i(it)}}{2} = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \pm\infty} \left(e^{-t} + e^{t}\right)/2 = +\infty$$

$$\sin(it) = \frac{e^{i(it)} - e^{-i(it)}}{2i} = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2i} = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2} i$$

$$\text{e} \quad \left| \frac{e^{t} - e^{-t}}{2} i \right| = \left| \frac{e^{t} - e^{-t}}{2} \right| \longrightarrow +\infty \quad \text{per } t \to \pm\infty$$

Funzioni iperboliche in $\mathbb{C}$

Def

$$\sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Sono definite come estensioni analitiche in $\mathbb{C}$ delle analoghe funzioni in campo reale

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Sono le uniche estensioni analitiche possibili!

Sono definite in $\mathbb{C}$. Sono olomorfe e

$$D \sinh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

$$D \cosh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sinh z$$

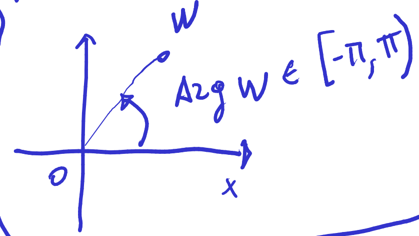
$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1$$ poiché se $z = x \in \mathbb{R}$: $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$

LOGARITMO DI UN NUMERO COMPLESSO

Preso $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ quali sono i numeri $z \in \mathbb{C}$ t.c. $e^z = w$? Scriviamo w in forma esponenziale

$$w = |w| \, e^{i \,\mathrm{Arg}\, w};$$

Argomento principale di w: è l'argomento che appartiene all'intervallo $[-\pi, \pi)$



sia $z = x + iy$, allora deve essere:

$$e^z = e^x e^{iy} = |w| \, e^{i \,\mathrm{Arg}\, w}$$ quindi

deve essere $e^x = |w|$, cioè $x = \log|w|$ e $y = \mathrm{Arg}\, w + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

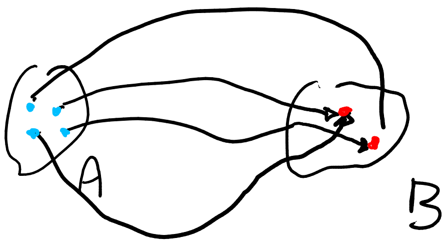
Quindi $z = \log|w| + i(\mathrm{Arg}\, w + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

L'insieme di numeri complessi $\{\log|w| + i(\mathrm{Arg}\, w + 2k\pi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ prende il nome di "logaritmo di w" e si indica col simbolo $\log w$

Ogni elemento di tale insieme è soluzione dell'equazione nell'incognita z, $e^z = w$

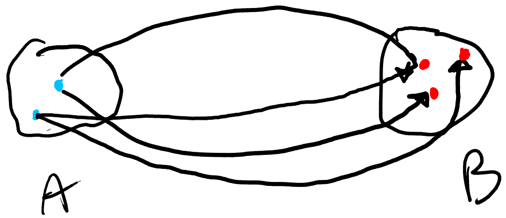
FUNZIONI MULTIVOCHE o PLURIVOCHE

$A \xrightarrow{f} B$



funzione (univoca)

$A \xrightarrow{f} B$



funzione plurivoca

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \longmapsto \sqrt[n]{z}$ è plurivoca : $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg} z}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)}$, $k = 0, \dots, n-1$

ad ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vengono associati n numeri complessi

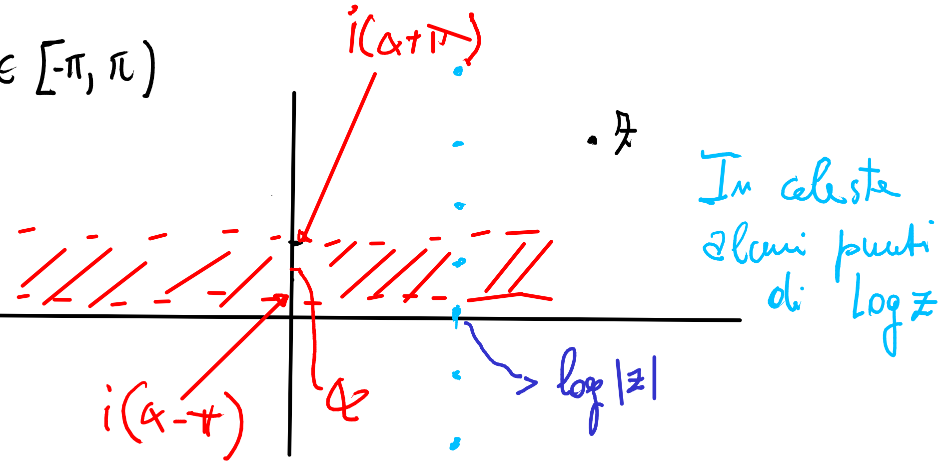
$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \longmapsto \operatorname{Log} z = \log|z| + i\left(\operatorname{Arg} z + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ è plurivoca

ad ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ viene associato un insieme numerabile di numeri complessi

Selezione o determinazione α del logaritmo

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad [\alpha-\pi, \alpha+\pi)$ $\qquad$ Argomento principale $\in [-\pi, \pi)$

$$z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \longmapsto \operatorname{Log}_\alpha(z) := \log|z| + i\,(\underbrace{\operatorname{Arg} z}_{} + 2\bar{k}\pi)$$



con $\bar{k} \in \mathbb{Z}$ tale che

che $\operatorname{Arg} z + 2\bar{k}\pi \in [\alpha-\pi, \alpha+\pi)$

Osservo che $\bar{k}$ dipende da α e $\operatorname{Arg} z$ ma è univocamente determinato

Def Si chiama <u>determinazione principale del logaritmo</u> quella che si ottiene per $\alpha = 0$: $\quad z \longmapsto \operatorname{Log}_0 z = \log|z| + i\operatorname{Arg} z$

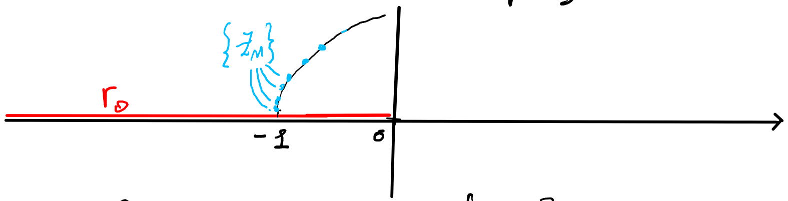
Quindi $\operatorname{Log}_0 : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ (in realtà dato che $\operatorname{Arg} z \in [-\pi,\pi)$ la sua immagine è la striscia in $\mathbb{C}$
$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in [-\pi,\pi)\}$)

Log_0 è continua in $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Re z \leq 0, Im z = 0\} := \Omega$

Infatti è evidente che sia continua nell'aperto Ω

Vediamo che non è continua sui punti della semiretta $r_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid Re z \leq 0, Im z = 0\}$

Prendiamo ad esempio il punto -1 (per tutti gli altri punti di tale semiretta si può ragionare in modo analogo).



$Log_0(-1) = -i\pi$

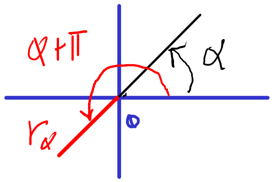
Si consideri la successione $\{z_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che

$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = e^{i(\pi - \frac{1}{n})}$; poiché $i(\pi - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n} i\pi$, $\quad z_n \xrightarrow{n} -1$

$$Log_0(z_n) = \log(1) + i\, Arg\, z_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0 + i\left(\pi - \frac{1}{n}\right) = i\pi \neq -i\pi = Log_0(-1)$$

Se TAGLIO da $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la semiretta $\{z \in \mathbb{C} \mid Re z < 0, Im z = 0\}$ ottengo Ω e su Ω Log_0 è una funzione continua e olomorfa.

Analogamente se considero la selezione α del logaritmo, essa è continua e olomorfa nel piano tagliato $\mathbb{C} \setminus r_\alpha$ dove r_α è la semiretta uscente da 0 individuata dall'angolo $\alpha - \pi$ (oppure $\alpha + \pi$)



Vediamo che Log_0 è olomorfa su $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \le 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$
e che $D\,\mathrm{Log}_0(z) = 1/z$

Intanto verifichiamo che essa è l'inversa della funzione esponenziale ristretta alla striscia $S_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi \le \mathrm{Im}\, z < \pi\}$.

Sia $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ allora $z = |z| e^{i \mathrm{Arg} z}$ e $e^{\mathrm{Log}_0(z)} = e^{\log|z| + i \mathrm{Arg} z}$
$= e^{\log|z|} e^{i\mathrm{Arg} z} = |z| e^{i \mathrm{Arg} z} = z$

Sia ora $z \in S_0$, $z = x + iy$, quindi $-\pi \le y < \pi$

$$\mathrm{Log}_0(e^z) = \mathrm{Log}_0(e^x e^{iy}) = \log(e^x) + iy = x + iy$$, dato che $|e^x e^{iy}| = e^x$

Ora sia $z_0 \in \Omega$ e calcoliamo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{Log}_0(z) - \mathrm{Log}_0(z_0)}{z - z_0} \underset{W = \mathrm{Log}_0 z}{=} \lim_{W \to W_0} \frac{W - W_0}{e^W - e^{W_0}} =$$

quindi per $z \to z_0$ dato che Log_0 è continua su Ω si ha che $\mathrm{Log}_0 z \to \mathrm{Log}_0 z_0 = W_0$

$$= \lim_{W \to W_0} \frac{1}{\frac{e^W - e^{W_0}}{W - W_0}} = \frac{1}{\lim_{W \to W_0} \frac{e^W - e^{W_0}}{W - W_0}} = \frac{1}{e^{W_0}} = \frac{1}{z_0}$$

Def Siano $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $w \in \mathbb{C}$. Possiamo definire la potenza di z con esponente complesso w

come $$z^w := e^{w \,\mathrm{Log}_0 z} = e^{w(\log|z| + i \mathrm{Arg} z)}$$

In particolare se $w \in (0, +\infty)$, $z^w = e^{w \log|z|} e^{w i \mathrm{Arg} z} = |z|^w e^{i w \mathrm{Arg} z}$.

Alcune conseguenze del fatto che una funzione olomorfa è analitica dalle I e II formula di rappresentazione di Cauchy

Teorema di HERMITE - LIOUVILLE

Sia $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tale che esistono $L, R \in (0, +\infty)$ e $\nu \in [0, +\infty)$ tali che

$$|f(z)| \le L\,|z|^{\nu} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| > R$$

allora f è un polinomio di grado al più $[\nu]$

parte intera del numero ν

Corollario (immediato)

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e $\exists L > 0$ t.c. $|f(z)| \le L$, $\forall z \in \mathbb{C}$ allora f è costante

cioè se f è olomorfa e limitata su $\mathbb{C}$ allora è costante

Dim Dato che f è olomorfa su $\mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad e \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - 0)^{k+1}}\, d\zeta$$

dove $\gamma(t) = r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ è la frontiera, orientata in senso antiorario, del disco di centro 0 e raggio r. Devo dimostrare che

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ con } k \ge [\nu] + 1 .$$

Prendo $r > R$. Abbiamo:

$$|a_k| := \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}} \, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}} \, dz \right|$$

$$|r i e^{it}| = r$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{k+1}} \, r i e^{it} \, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{it})| \, r}{|r^{k+1} e^{i(k+1)t}|} \, dt$$

$$\leq \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|re^{it}|^\nu}{r^k} \, dt = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^\nu}{r^k} \, dt = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{r^{k-\nu}} \int_0^{2\pi} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \, 2\pi L \cdot \frac{1}{r^{k-\nu}} = \frac{L}{r^{k-\nu}}$$

$$|a_k| \leq L / r^{k-\nu} \xrightarrow{r \to \infty} 0 \quad \text{se } k > \nu .$$

Dunque $\forall \, k \geq [\nu] + 1 : a_k = 0$ e $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{[\nu]} z^{[\nu]}$

Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ ha almeno uno zero in $\mathbb{C}$

Conseguenze

Sia $z_1 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_1) = 0$. Poiché $p = p(z)$ è analitica in $\mathbb{C}$, $p(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_1)^k$.
Ma p è un polinomio di grado n, quindi $a_k = 0 \quad \forall k \geq n+1$ e dunque

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_1)^k = a_0 + a_1 (z-z_1) + \ldots + a_n (z-z_1)^n = a_1 (z-z_1) + a_2 (z-z_1)^2 + \ldots + a_n (z-z_1)^n =$$

$$= (z-z_1)\, q(z) = (z-z_1)(z-z_2)\, h(z) = \ldots = (z-z_1) \ldots (z-z_n) \cdot a_n$$

$\hookrightarrow z_2$ zero del polinomio, di grado $n-1$, $q = q(z)$.

Cioè ogni polinomio p di grado n ha n zeri in $\mathbb{C}$ (NON NECESSARIAMENTE DISTINTI!)
ed è uguale al prodotto di n polinomi (si dice che "si fattorizza")
di grado 1 del tipo $z - z_k$, dove z_k è uno degli n zeri di p, per il coefficiente di z^n

Dim

Per assurdo supponiamo che $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Consideriamo

$$h(z) = \frac{1}{p(z)}.$$ Quindi $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$$\lim_{|z|\to+\infty} |p(z)| = +\infty \Rightarrow \lim_{|z|\to+\infty} |h(z)| = \lim_{|z|\to+\infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0$$

Quindi dalla definizione di limite per $|z| \to +\infty$, preso

$\varepsilon = 1$, $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall z \in \mathbb{C}$ con $|z| > \delta$: $|h(z)| < 1$

Sia $L = \max\{1, \max_{z \in \overline{D(0,\delta)}} |h(z)|\}$.

Quindi $|h(z)| \leq L$, $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow h$ è costante $\neq 0$ (dato che $h(z) = \frac{1}{p(z)}$)

quindi $p(z) = \frac{1}{h(z)}$ è anche costante, in contraddizione con l'ipotesi che

p è un polinomio di grado ≥ 1.

Funzione armonica coniugata

Abbiamo visto che se $f = u + iv \in H(\Omega)$, Ω aperto, allora u e v sono funzioni armoniche. Ci chiediamo ora se assegnata una funzione armonica $u: \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 su Ω e armonica ($\Delta u = 0$ in Ω), esista una funzione $f: \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa di cui u sia la parte reale.

In altri termini ci chiediamo se esiste un'altra funzione $v: \Omega \to \mathbb{R}$, di classe C^2 su Ω, tale che u e v soddisfino le condizioni di Cauchy-Riemann (e quindi anche v è armonica e possiamo prendere $f = u + iv$).

Se assumiamo che Ω sia anche semplicemente connesso, possiamo rispondere facilmente e affermativamente alla domanda.

Infatti possiamo considerare la forma differenziale di classe C^1 su Ω

$$w = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy .$$

Poiché u è armonica $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ in Ω e quindi w è chiusa

Dato che Ω è semplicemente connesso, w è esatto. Sia allora $v: \Omega \to \mathbb{R}$ una primitiva per w. Deve essere quindi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

cioè u e v soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann.

Assegnata $u \in C^2(\Omega)$, u armonica, una funzione $v \in C^2(\Omega)$ armonica e tale che $f = u + iv$ sia olomorfa, si dice <u>armonica coniugata di u</u>. Abbiamo quindi dimostrato che ogni funzione armonica su un aperto semplicemente connesso ammette armonica coniugata.

Vogliamo ora dimostrare che se $u: \Omega \to \mathbb{R}$ è armonica

$$\forall z_0 \in \Omega : \quad u(z_0) = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma u(z)\, ds,$$

dove γ è una qualunque circonferenza di centro z_0 e $L(\gamma)$ è la sua lunghezza (tale relazione dice che una funzione armonica nel centro di un disco vale quanto la sua media integrale sul bordo dello stesso disco)

Infatti possiamo prendere $f \in H(\Omega)$ tale che $f = u + iv$ con v armonica coniugata di u. Per la I formula di rappresentazione di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \, d\xi \quad , \quad \text{con } \gamma(t) = z_0 + re^{it}, \; t \in [0, 2\pi]$$

quindi $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{\cancel{re^{it}}} \cancel{ire^{it}} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \, dt = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \, r \, dt$$

Quindi $$u(z_0) + i v(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \, r \, dt + \frac{i}{2\pi r} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{it}) \, r \, dt$$

da cui uguagliando parti reali e parti immaginarie di I e II membro otteniamo $$u(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \, r \, dt = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma u \, ds .$$

Serie numeriche bilatere

Consideriamo una funzione $n \in \mathbb{Z} \longmapsto a_n \in \mathbb{C}$ (che indicheremo con $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$) con il simbolo $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$, che si chiama serie numerica bilatera, indichiamo la funzione $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e le due successioni numeriche ad essa associate $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{s_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$ così definite

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \quad e \quad s_n^- = \sum_{k=-1}^{-n} a_k .$$

$\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è ovviamente la successione delle somme parziali della serie numerica in $\mathbb{C}$ $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ mentre $\{s_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$ è quella della serie numerica in $\mathbb{C}$ $\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k \overset{k=-h}{=\!=} \sum_{h=1}^{+\infty} a_{-h}$

Def $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ converge se entrambe le serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k$ convergono. In tal caso detta s_1 la somma di $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e s_2 quella di $\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k$

la somma s di $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ è per definizione la somma di s_1 e s_2 cioè

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n$$

SERIE DI LAURENT

Si dice serie di Laurent ogni serie bilatera di potenze, quindi ogni serie del tipo $\sum_{K=-\infty}^{+\infty} a_K (z-z_0)^K$, con $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$

z_0 si dice centro della serie di Laurent

Insieme di convergenza di una serie di Laurent.

Si consideri la serie di Laurent $\sum_{K=-\infty}^{+\infty} a_K (z-z_0)^K$ e le serie

$$\underbrace{\sum_{K=0}^{+\infty} a_K (z-z_0)^K}_{\substack{\text{SERIE DI POTENZE} \\ \text{SIA } R_1 \text{ IL SUO RAGGIO} \\ \text{DI CONVERGENZA}}} \quad e \quad \underbrace{\sum_{K=-1}^{-\infty} a_K (z-z_0)^K}$$

$$\frac{1}{z-z_0} = w$$

$$\sum_{K=-1}^{-\infty} a_K w^{-K} = \underbrace{\sum_{h=1}^{+\infty} a_{-h} w^h}$$

Sia R_2 il suo raggio di convergenza

Quindi $\sum_{K=-1}^{-\infty} a_K (z-z_0)^K$ converge

$\forall z$ t.c. $\frac{1}{|z-z_0|} < R_2$ cioè se $|z-z_0| > 1/R_2$

Se fisso $\bar{z} \in \mathbb{C}$ la serie bilatera $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(\bar{z}-z_0)^k$ converge, per definizione,

se $\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(\bar{z}-z_0)^k$ converge e se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\bar{z}-z_0)^k$ conv., quindi se $\frac{1}{R_2} < |\bar{z}-z_0| < R_1$

Una qualunque serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ può quindi avere insieme di convergenza dato da

I) $\emptyset$, se $\frac{1}{R_2} > R_1$

II) se $\frac{1}{R_2} = R_1$ l'insieme di convergenza o è vuoto o contiene punti sulla circonferenza di centro z_0 e raggio R_1

III) una corona circolare se $\frac{1}{R_2} < R_1$: $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{1}{R_2} < |z-z_0| < R_1 \right\}$
(con l'aggiunta di eventuali punti sul bordo di tale corona)

IV) un disco bucato se $R_2 = +\infty$ e $R_1 \in (0,+\infty)$: $\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-z_0| < R_1 \}$
(con l'aggiunta di eventuali punti sulla circonferenza di centro z_0 e raggio R_1)

V) il complementare di un disco se $R_2 \in (0,+\infty)$ e $R_1 = +\infty$: $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{1}{R_2} < |z-z_0| \right\}$
(con l'aggiunta di eventuali punti sulla circonferenza di centro z_0 e raggio $1/R_2$)

VI) il piano bucato se $R_2 = +\infty$ e $R_1 = +\infty$: $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

Consideriamo una serie di Laurent e supponiamo che converga su $C_{r_1 r_2}$, $0 < r_1 < r_2$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \quad , \quad C_{r_1, r_2} = \{ z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2 \}$$

rispetto alle notazioni usate alle pagine precedenti $r_1 = \frac{1}{R_2}$
$r_2 = R_1$

sia $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$, $\forall z \in C_{r_1, r_2}$, la sua somma

Dimostriamo che la somma f è olomorfa in $C_{r_1 r_2}$. Infatti

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k}_{f_1(z)} + \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-z_0)^k}_{f_2(z)}$$

f_1 è olomorfa su C_{r_1, r_2} in quanto $C_{r_1, r_2} \subset D(z_0, r_2)$ che è il disco di convergenza della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ di cui f_1 è la somma. Anche f_2 è olomorfa su C_{r_1, r_2}. Infatti $f_2(z) = g\left(\frac{1}{w}\right)$, dove g è la somma della serie di potenze $\sum_{h=1}^{+\infty} a_{-h} w^h$ e $w = \frac{1}{z - z_0}$, cioè f_2 è composta dalla funzione g che è olomorfa su $D(0, \frac{1}{r_1})$ e dalla funzione razionale $z \mapsto \frac{1}{z-z}$ che è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; quindi f_2 è olomorfa sull'insieme dei $z \in \mathbb{C}$ tali che

$\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r_1}$ cioè $|z - z_0| > r_1$ e dunque, in particolare, è olomorfa su C_{r_1, r_2}

Oss Da quanto sappiamo sulle serie di potenze deduciamo che ogni serie di Laurent di centro z_0 e convergente nella "corona" $\mathcal{C}_{r_1 r_2}(z_0)$

(d'ora in avanti $\mathcal{C}_{r_1 r_2}(z_0)$ potrà indicare:

- una corona circolare $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ se $0 < r_1 < r_2 < +\infty$
- l'esterno della chiusura del disco $D(z_0, r_1)$ se $0 < r_1 < r_2 = +\infty$
- il disco bucato $D'(z_0, r_2)$ se $0 = r_1 < r_2 < +\infty$
- il piano bucato $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ se $0 = r_1$ e $r_2 = +\infty$)

converge totalmente (e quindi uniformemente) su ogni insieme compatto contenuto in $C_{r_1 r_2}(z_0)$

Relazione tra i coefficienti di una serie di Laurent e la somma della stessa serie

---

Consideriamo una serie di Laurent $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$ e supponiamo che converga in $C_{r_1 r_2}(z_0)$.

Sia $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \ \forall z \in \mathcal{C}_{r_1 r_2}(z_0)$

Sia $m \in \mathbb{Z}$ e consideriamo $\frac{f(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-m}$

Sia $r>0$, con $r_1 < r < r_2$ e calcoliamo l'integrale di $f(z)/(z-z_0)^m$ sulla circonferenza $C(z_0,r)$ di centro z_0 e raggio r orientata nel verso antiorario

$$\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}\,dz = \int_{C^+(z_0,r)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-m}\,dz$$

; poiché $C(z_0,r)$ è un insieme compatto contenuto in C_{r_1,r_2}, la serie di Laurent converge uniformemente ad f sulla stessa circonferenza. Possiamo quindi usare il Teorema di integrazione termine a termine e ottenere:

$$\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}\,dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{C^+(z_0,r)} a_k (z-z_0)^{k-m}\,dz$$

. Valutiamo quindi ciascuno di questi integrali. L'equazione parametrica di $C^+(z_0,r)$ è $t \in [0,2\pi] \to z_0 + re^{it}$, quindi

$$\int_{C^+(z_0,r)} a_k (z-z_0)^{k-m}\, dz = \int_0^{2\pi} a_k\, r^{k-m} e^{it(k-m)} \cdot i r e^{it}\, dt$$

$$= a_k i r^{k-m+1} \int_0^{2\pi} e^{it(k-m+1)}\, dt = \begin{cases} a_k i r^{k-m+1} \left. \dfrac{e^{it(k-m+1)}}{i(k-m+1)} \right|_0^{2\pi}, & \text{se } k-m+1 \neq 0 \\ a_k i \displaystyle\int_0^{2\pi} dt, & \text{se } k-m+1 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_k i r^{k-m+1}}{i(k-m+1)} \left(e^{2\pi i (k-m+1)} - 1 \right), & \text{se } k \neq m-1 \\ 2\pi i\, a_{m-1}, & \text{se } k = m-1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq m-1 \\ 2\pi i\, a_{m-1} & \text{se } k = m-1 \end{cases}$$

Dunque $\boxed{a_m = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C^+(z_0,r)} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\, dz}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$

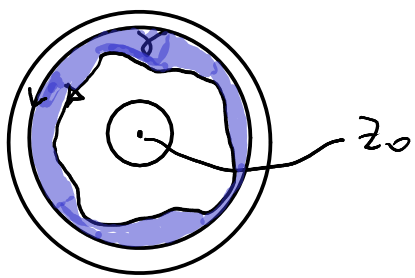
<u>Oss 1</u>

Osserviamo che se la serie di Laurent $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = f(z)$ si riduce ad una serie di potenze (cioè $a_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$) la $(*)$ è coerente con quello che già sappiamo cioè $a_m = \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = (*)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Oss 2

Osserviamo anche che gli integrali sono indipendenti dal raggio r che abbiamo preso, $r \in (r_1, r_2)$.

NON SOLO: fissato n, $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = a_n$, qualunque sia la curva chiusa, γ regolare a tratti, avente supporto in $C_{r_1 r_2}$ che racchiude z_0, orientata nel verso antiorario; questo perché possiamo sempre prendere una circonferenza $C(z_0, r)$ che racchiude la curva γ e considerare il dominio T individuato da tali due curve (nella figura qui sopra è il dominio colorato in blu). Poiché la funzione $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ è olomorfa



su T dal teorema di Cauchy - Goursat ricaviamo:

$$0 = \int_{\partial^+ T} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} + \int_{-\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz =$$

$$= \int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} - \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

da cui

$$\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Sviluppabilità in serie di Laurent di una funzione olomorfa su una corona circolare (o su un disco bucato o sul piano bucato)

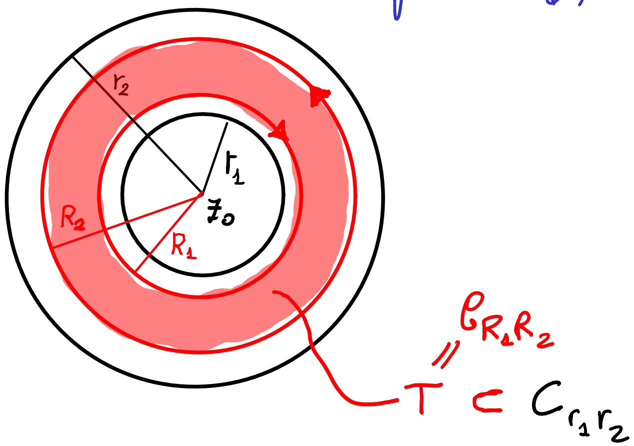
Teor

Sia $f \in \mathcal{H}(C_{r_1 r_2}(z_0))$, $0 \le r_1 < r_2 \le +\infty$

allora $\exists ! \, \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ t.c. $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \forall z \in C_{r_1 r_2}(z_0)$

Dim L'unicità dello sviluppo l'abbiamo già dimostrato.

(infatti se f è sviluppabile in serie di Laurent di centro z_0, cioè se f è la somma di una serie di Laurent, allora necessariamente i coefficienti a_k sono dati da $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ e per ogni curva γ chiusa regolare a tratti, orientata nel verso antiorario che circondi z_0 e avente supporto in $C_{r_1 r_2}(z_0)$)



Sia $z \in C_{r_1 r_2}$: $r_1 < |z-z_0| < r_2$. Consideriamo $R_1, R_2 \in (0, +\infty)$ tali che $r_1 < R_1 < R_2 < r_2$ e in modo che $R_1 < |z-z_0| < R_2$

Per $\zeta \in \mathcal{C}(z_0, R_2)$: $|\zeta - z_0| > |z - z_0| \Rightarrow \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} < 1$

Per $\zeta \in \mathcal{C}(z_0, R_1)$: $|\zeta - z_0| < |z - z_0| \Rightarrow \frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} < 1$

Per la I formula di rappresentazione di Cauchy dato che f è olomorfa in T e $z \in T$.

Si tenga presente la convenzione per l'orientamento positivo della frontiera di un dominio T come quello in rosso nella figura!!

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ T} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right)$$

Su $\mathcal{C}(z_0, R_2)$ abbiamo quindi

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k}\, d\zeta = \sum_{k=0}^{+\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta \right)}^{a_k,\ k \geq 0} \cdot (z - z_0)^k$$

Su $\mathcal{C}(z_0, R_1)$ abbiamo invece

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^h$$

Quindi

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = +\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(\xi - z_0)^h}{(z - z_0)^h} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \frac{(\xi - z_0)^h}{(z - z_0)^h} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{h+1}} \cdot \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} f(\xi)(\xi - z_0)^h d\xi$$

$-(h+1) = k$

$$= \sum_{k=-1}^{-\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \right)}^{a_k,\ k<0} (z - z_0)^k$$

Dato che come visto all'inizio della lezione, gli integrali $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$ e $\int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$ sono indipendenti dalle curve su cui si integra (a patto che queste circondino z_0 una sola volta), possiamo considerare γ curva chiusa regolare a tratti, che circonda z_0 e con supporto in $C_{r_1 r_2}(z_0)$, e ottenere

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \right) (z - z_0)^k, \quad \forall z \in C_{r_1 r_2}(z_0)$$

∎

Def Singolarità isolata per una funzione olomorfa

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\delta > 0$ e $f : D'(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$. Si dice che z_0 è una singolarità isolata per f se $f \in H(D'(z_0,\delta))$.

Classificazione delle singolarità isolate

Sia $f \in H(D'(z_0,\delta))$ (dunque z_0 è una singolarità isolata per f).

Consideriamo lo sviluppo in serie di Laurent per f in $D'(z_0,\delta)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Def Si dice che z_0 è una singolarità eliminabile se

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

Quindi se z_0 è una singolarità eliminabile allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in D'(z_0,\delta)$$

Teorema

Sia $f \in H(D'(z_0,\delta))$

z_0 è eliminabile $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \exists \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C} \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \exists r>0,\ r<\delta$ e $\exists L>0$: $|f(z)| \leq L \quad \forall z \in D'(z_0,r)$

Dim

(1) $\Longrightarrow$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in D'(z_0,\delta),$$

Sia $g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in D(z_0,\delta)$. Chiaramente abbiamo

$f(z) = g(z)$, $\forall z \in D'(z_0,\delta)$. Inoltre g è olomorfa in $D(z_0,\delta]$ (quindi è continua)

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = a_0 \in \mathbb{C}$$

(2) $\Longrightarrow$ Sia $\mathbb{C} \ni \ell = \lim_{z \to z_0} f(z)$ allora per $\varepsilon = 1$ $\exists r>0$, $r<\delta$, tale che

$\forall z \in D'(z_0,r)$: $|f(z) - \ell| < 1$ quindi

$$|f(z)| - |\ell| \leq \big|\,|f(z)| - |\ell|\,\big| \leq |f(z) - \ell| < 1 \quad \text{ovvia} \quad |f(z)| \leq \underbrace{|\ell| + 1}_{=L}, \ \forall z \in D'(z_0,r)$$

Resta da dimostrare che se $\exists\; 0<r<\delta$ e $L>0$ tali che $|f(z)| \le L, \forall z \in D'(z_0, r)$

allora z_0 è una singolarità eliminabile

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, r')} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz , \quad \text{dove} \quad 0 < r' < r$$

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathcal{C}^+(z_0, r')} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz \right| \le \max_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{f(z_0 + r' e^{it})}{(r' e^{it})^{n+1}} \right| 2\pi r'$$

$$\le \frac{2\pi L}{(r')^n}$$

Se $n < 0$, $\lim_{r' \to 0} \frac{L}{(r')^n} = 0$ e

quindi dato che $|a_n|$ non dipende da r, deve essere

$$|a_n| = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

Oss

Se $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$, Ω aperto, $z_0 \in \Omega$ e z_0 è una singolarità eliminabile allora f può essere definita (si dice "estesa") anche in z_0 in modo da essere olomorfa anche in z_0.

Tale estensione è unica ed è data da

$$g : \Omega \to \mathbb{C} \qquad g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ \lim_{z \to z_0} f(z) & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

ovviamente $g(z)$ è uguale a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, $\forall z$ in un opportuno disco di centro z_0, e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ è lo sviluppo in serie di Laurent di f nello stesso disco bucato.

Esempio:

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$; f è definita in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ed è ivi olomorfa data da è il rapporto di due funzioni olomorfe su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dunque 0 è una singolarità isolata di f. Lo sviluppo di Laurent di centro 0 per f si ottiene subito dato che

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{e quindi}$$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

quindi nello sviluppo di Laurent non compaiono termini con esponente negativo: 0 è una singolarità eliminabile

Def di polo di ordine m

Sia $f \in H(D'(z_0,\delta))$ e si consideri il suo sviluppo in serie di Laurent di centro z_0

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \,, \quad \forall z \in D'(z_0,\delta) \quad (*) .$$

La singolarità (isolata) z_0 si dice polo di ordine m, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ se nello sviluppo di Laurent di f (cioè se in $(*)$) $a_k = 0$ $\forall k < -m$ e $a_{-m} \neq 0$

Teorema

Sia $f \in H(D'(z_0,\delta))$ allora

z_0 è un polo di ordine m $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) \neq 0$, $\in \mathbb{C}$ $\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

Dim $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$:

z_0 è un polo di ordine m, $m \geq 1$. Quindi

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \,, \quad \forall z \in D'(z_0,\delta) \,, \quad \text{con } a_{-m} \neq 0$$

$$f(z)(z-z_0)^m = (z-z_0)^m \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{m+n}$$

$$\overset{h=n+m}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h-m} (z-z_0)^h .$$

Quindi $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{z \to z_0} \left(\sum_{h=0}^{+\infty} a_{h-m} (z-z_0)^h \right) = a_{-m} \neq 0$

(2) $\Longrightarrow$: Per ipotesi sappiamo che $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideriamo l'estensione olomorfa di $(z-z_0)^m f(z)$ in z_0: $g(z) = \begin{cases} (z-z_0)^m f(z) & \text{se } z \in D'(z_0,\delta) \\ \ell & \text{se } z = z_0 \end{cases}$

Dunque, $\forall z \in D'(z_0,\delta)$ abbiamo:

$$f(z) = g(z)/(z-z_0)^m, \text{ da cui } \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|g(z)|}{|z-z_0|^m} \left(= \frac{|\ell|}{0^+}\right) = +\infty$$

(3) $\Longrightarrow$: Resta da dimostrare che $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty \Longrightarrow z_0$ è un polo:

Sia $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Quindi $\lim_{z \to z_0} |g(z)| = 0$ da cui $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$

Inoltre possiamo assumere che $\exists r > 0$, $r < \delta$ per cui $g \in H(D'(z_0,r))$, $D'(z_0,r) \subset \Omega$, dato che $f(z) \neq 0$ in un intorno di z_0 (si ricordi che $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$). Dunque z_0 è una singolarità eliminabile per g. Consideriamo l'estensione olomorfa di g in z_0: $h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{se } z \in D'(z_0,r) \\ 0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}$. Chiaramente z_0 è uno zero isolato per h e quindi esiste $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $h_1 \in H(D(z_0,r))$ tali che

$h(z) = (z-z_0)^m h_1(z)$, $\forall z \in D(z_0,r)$ e $h_1(z_0) \neq 0$

possiamo quindi anche assumere che $h_1(z) \neq 0$ $\forall z \in D(z_0,r)$ (dato che se $\exists \bar{z} \in D'(z_0,r)$ tale che $h_1(\bar{z}) = 0$, allora anche $h(\bar{z}) = 0$ e quindi $g(\bar{z}) = 0$ cioè $|f(z)| \to +\infty$ per $z \to \bar{z}$ ma questo è assurdo dato che f ha come unica singolarità in $D(z_0,\delta)$ il punto z_0)

Dunque per ogni

$z \in D'(z_0, r_1)$ si ha $\frac{1}{f(z)} = g(z) = h(z) = (z-z_0)^m h_1(z)$, da cui

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \frac{1}{h_1(z)} \qquad \frac{1}{h_1(z)} \in H(D(z_0,r))$$

dato che è la funzione reciproca di h_1 che non si annulla in alcun punto di $D(z_0,r)$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-m}$$

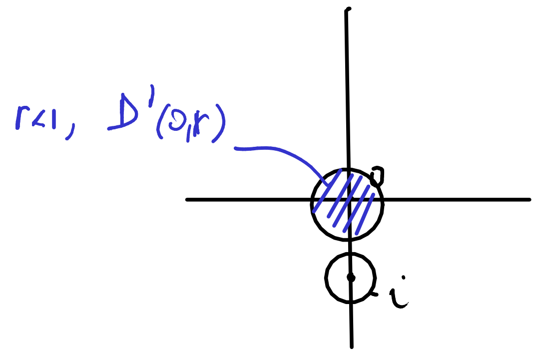
$$\overset{n-m=k}{=} \sum_{k=-m}^{+\infty} a_{k+m} (z-z_0)^k, \qquad \forall z \in D'(z_0, r_1).$$ In realtà tale sviluppo in serie di Laurent deve valere $\forall z \in D'(z_0, \delta)$ in quanto $f \in H(D'(z_0,\delta))$. Dunque z_0 è un polo di ordine m per f visto che il primo coefficiente non nullo in tale serie si ottiene per $k=-m$: $a_{-m+m} = a_0 = \frac{1}{h_1(z_0)} \neq 0$

<u>Def</u> (SINGOLARITÀ ESSENZIALE) Sia $f \in H(D'(z_0,\delta))$, z_0 si dice singolarità essenziale se non è né una singolarità eliminabile, né un polo e quindi se nello sviluppo in serie di Laurent di f di centro z_0 ci sono infiniti coefficienti con indice negativo che sono non nulli o ancora, equivalentemente, se $\lim_{z \to z_0} f(z)$ non esiste e neanche esiste (finito o infinito) $\lim_{z\to z_0} |f(z)|$

Esempi

- $f(z) = \dfrac{1-z^2}{(z+i)^2 z^3}$ ha polo di ordine 2 in $-i$ e di ordine 3 in 0

$f : \mathbb{C} \setminus \{-i, 0\} \to \mathbb{C}$ $\qquad f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-i, 0\})$



0 è un polo di ordine 3 dato che

$$\lim_{z \to 0} z^3 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1-z^2}{(z+i)^2} = \frac{1}{i^2} = -1$$

Analogamente:

$$(z+i)^2 f(z) \xrightarrow{z \to -i} 2/-i \neq 0,$$ quindi $-i$ è un polo di ordine 2

In generale se $f(z) = p(z)/q(z)$ con p e q polinomi e $p(z_0) \neq 0$ e z_0 è uno $\underbrace{\text{zero di ordine } m \text{ per } q}$ allora z_0 è un polo di ordine m per f

$\Rightarrow \exists r>0$ e $\exists h \in H(D(z_0,r))$ t.c. $q(z) = (z-z_0)^m h(z)$, $h(z_0) \neq 0$

$$f(z) = \frac{p(z)}{h(z)} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^m}$$ e quindi $$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{p(z)}{h(z)} = \frac{p(z_0)}{h(z_0)} \neq 0$$

In modo analogo se $f(z) = \frac{g(z)}{l(z)}$ con g e l funzioni qualunque olomorfe e $z_0 \in \mathbb{C}$ è uno zero di ordine m per l e $g(z_0) \neq 0$ si ha che z_0 è un polo di ordine m per f.

- $f(z) = \dfrac{z}{1-e^z}$ ha una sing. eliminabile in 0 e poli di ordine 1 nei punti $\{2k\pi i\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$

$f \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi i\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Si osservi che $\{2k\pi i\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è un insieme discreto di punti cioè $\forall k\in\mathbb{Z}$, $2k\pi i$ è una singolarità isolata

Infatti $e^z = 1 \iff z = \mathrm{Log}\, 1 =$
$= \log|1| + i(2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$
$= 2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$

$\lim_{z\to 0} \dfrac{z}{1-e^z} = ?$; $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!} \Rightarrow 1-e^z = -z + o(z) \Rightarrow \lim_{z\to 0} \dfrac{z}{-z+o(z)} =$

$= \lim_{z\to 0} \dfrac{z}{z\left(-1+\frac{o(z)}{z}\right)} = -1 \Rightarrow 0$ è una sing. eliminabile

Si osserva

$l(z) = 1-e^z$. $l \in H(\mathbb{C})$. $\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$: $2k\pi i$ è uno zero semplice per l dato che $l'(z) = -e^z$ e $l'(2k\pi i) = -e^{2k\pi i} \neq 0$

Quindi $\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $2k\pi i$ è un polo semplice (cioè di ordine 1) per f.

- $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ha poli di ordine 1 nei punti $\{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin z = 0 : \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \\ &2iz = \operatorname{Log} 1 = \log(|1|) + i(0 + 2k\pi) = i2k\pi \iff z = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

Infatti i punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono tutti zeri semplici per la funzione $\sin z$.

- $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in 0:

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \longmapsto -\frac{1}{z} \longmapsto e^{-\frac{1}{z}}$ quindi $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, in quanto composta da funzioni olomorfe in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$. Quindi $\forall z \neq 0$: $e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^k / k! = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} =$

$$\overset{k=-h}{=} \sum_{h=-\infty}^{0} \frac{(-1)^h}{(-h)!} z^h$$

Dunque nello sviluppo di Laurent di $f(z)=e^{-z}$ di centro 0, i coefficienti con indice $n \leq 0$ sono non nulli e pertanto, per definizione, 0 è una singolarità essenziale.

OSS L'immagine mediante la funzione $f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$ di un qualunque intorno bucato dello 0 è $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Infatti, sia $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, facciamo vedere che

$\exists\, z \in$ (disco bucato di centro 0 e raggio $r>0$, piccolo a piacere) tale che $e^{-\frac{1}{z}}=w$

Deve essere:

$$-\frac{1}{z} = \mathrm{Log}\, w = \log|w| + i\left(\mathrm{Arg}(w)+2k\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}, \quad \text{quindi}$$

$$z_k = \frac{-1}{\log|w| + i\left(\mathrm{Arg}(w)+2k\pi\right)} \xrightarrow[K\to-\infty]{K\to+\infty} 0 \longrightarrow \left|\log|w| + i\left(\mathrm{Arg}(z)+2k\pi\right)\right| \xrightarrow{K\to\pm\infty} +\infty$$

Questo è un fatto generale per le singolarità essenziali. Infatti si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema di Picard

Sia Ω aperto, $z_0 \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Se z_0 è una singolarità essenziale allora $\forall\, r > 0$ tale che $D'(z_0, r) \subset \Omega$ si ha $f(D'(z_0,r)) = \mathbb{C}$ oppure $f(D'(z_0,r)) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$

cioè l'immagine mediante f di un qualunque intorno bucato di z_0, o è il piano o è il piano bucato.

Def (RESIDUO)

Sia $f \in \mathcal{H}(D'(z_0, \delta))$. Si definisce <u>RESIDUO DI f IN z_0</u> e si indica con $\mathrm{Res}(f, z_0)$, il coefficiente del termine $\frac{1}{z - z_0}$ nello sviluppo di Laurent di f di centro z_0. Quindi

$$\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz},$$

dove γ è una qualunque curva chiusa regolare a tratti orientata nel verso antiorario che sia il bordo di un dominio aperto T tale che $z_0 \in T$ e z_0 sia l'unica singolarità di f in T

<u>Oss</u> In particolare, se z_0 è una singolarità eliminabile (o se f è olomorfa anche in z_0) $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$

I Teorema dei residui

Sia $f \in H(\Omega - \{z_1, \dots, z_\ell\})$, $z_1, \dots, z_\ell \in \Omega$, Ω aperto.

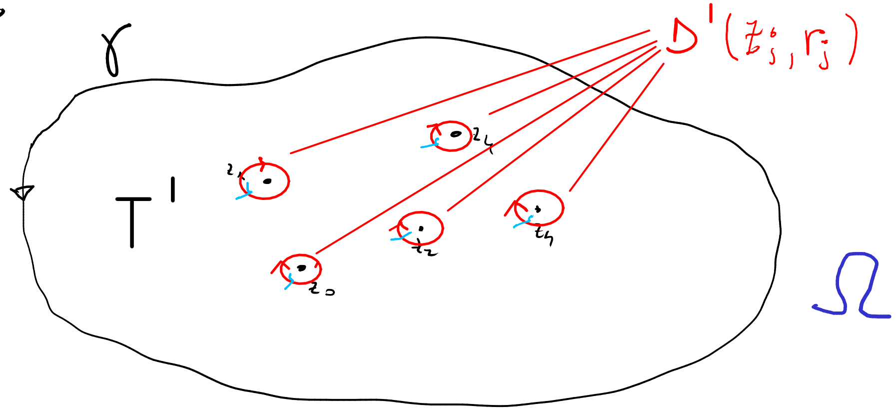
e sia γ una curva chiusa regolare a tratti orientata nel verso antiorario avente supporto in Ω e che circondi tutte le singolarità z_j, $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Allora

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Res}(f, z_j)}$$

<u>Dim</u> Sia T il dominio avente come bordo γ e

sia $T' = T \setminus \bigcup_{j=1}^{\ell} D'(z_j, r_j)$, dove i

dischi $D(z_j, r_j)$ sono stati scelti con raggio sufficientemente piccolo da essere contenuti in T.



Poiché f è olomorfa in T'

$$0 = \int_{\partial^+ T'} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\partial^- D(z_j, r_j)} f(z)\,dz \quad , \text{ quindi}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\sum_{j=1}^{\ell} \left(\int_{\partial^- D(z_j, r_j)} f(z)\,dz \right) = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\partial^+ D(z_j, r_j)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Res}(f, z_j) \quad \blacksquare$$

Il I teorema dei residui mette in luce l'importanza di conoscere il residuo in una singolarità. Vediamo come sia possibile calcolarlo nel caso in cui la singolarità sia un polo semplice (cioè di ordine 1) e più in generale un polo di ordine $m > 1$.

- Nel caso di un polo semplice (cioè un polo di ordine 1) z_0, poiché

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \text{ in un disco bucato di centro } z_0, \text{ abbiamo}$$

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+1} = a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

- Nel caso di un polo di ordine $m > 1$

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \text{ in un disco bucato di centro } z_0, \ D'(z_0, \delta)$$

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} \overset{n+m=h}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h-m} (z-z_0)^h \Big) \longrightarrow$$

è una serie di potenze la cui somma è uguale a $(z-z_0)^m f(z)$, $\forall z \in D'(z_0, \delta)$

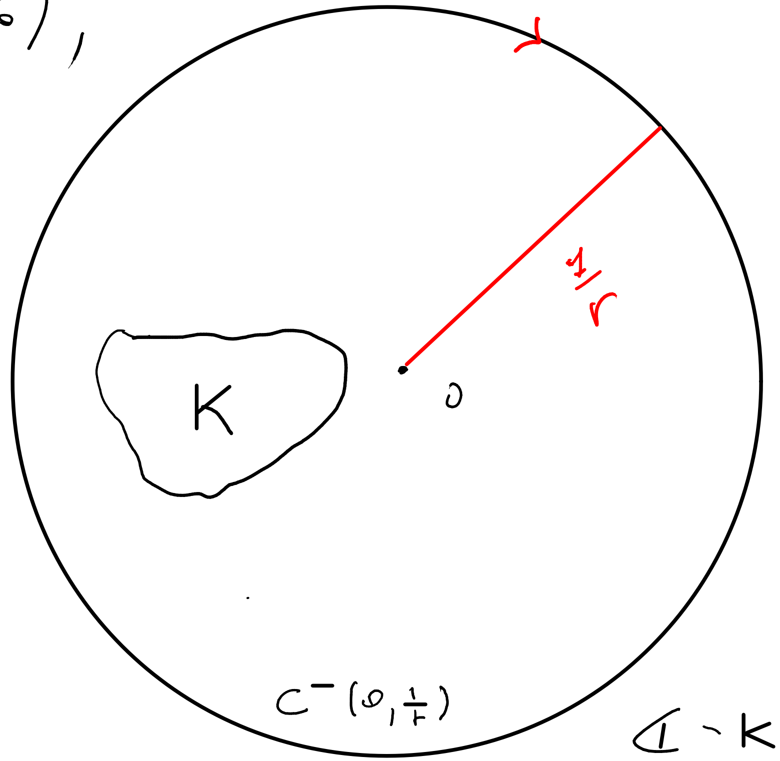
Il coefficiente del monomio $z-z_0$ con esponente uguale a -1 si ottiene per $h - m = -1$ cioè $h = m-1$, quindi per le relazioni che legano i coefficienti di una serie di potenze alle derivate nel centro della somma otteniamo:

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} D^{(m-1)} \left((z-z_0)^m f(z) \right)}$$

Singolarità all'infinito e residuo all'infinito

Sia $K \subset \mathbb{C}$ compatto (cioè K è chiuso e limitato),

$\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ e $f \in H(\Omega)$



Def

Si definisce residuo all'infinito di f e si indica con $\mathrm{Res}(f, \infty)$ il numero complesso

$$\mathrm{Res}(f, \infty) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z)\, dz$$

dove γ^- è una qualunque curva chiusa regolare a tratti orientata nel verso ORARIO che circondi il compatto K (In particolare si può prendere come curva γ^- una circonferenza di centro 0 e raggio sufficientemente grande, orientata nel verso orario)

Prop

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

dim

Per definizione $\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+(0,r)} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$

Occorre però che la funzione $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ sia olomorfa nel disco bucato $D'(0,r)$. Poiché f è olomorfa fuori del compatto K, se r è sufficientemente piccolo, $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \in H(D'(0,r))$ (dato che

$$\frac{1}{|z|} < r \iff |z| > \frac{1}{r} \;)$$

Ora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+(0,r)} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r^2 (e^{it})^2} f\left(\frac{1}{re^{it}}\right) r e^{it} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r} e^{-it} f\left(\frac{1}{r} e^{-it}\right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^-(0,\frac{1}{r})} f(z)\, dz =$$

$$= \operatorname{Res}(f, \infty)$$

II teorema dei residui

Sia $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$ (quindi f è olomorfa su un insieme del tipo $\mathbb{C} \setminus K$, con $K \subset \mathbb{C}$ compatto $= \{z_1, \dots, z_n\}$). Allora $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0$

"singolarità al finito" + "singolarità all'infinito"

Dim

Sia $r > 0$ tale che $z_i \in D(0,r)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

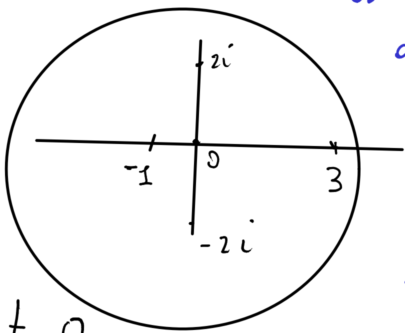
Per il I teorema dei residui

$$\int_{\partial^+ D(0,r)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_i) \quad ; \quad \text{ma} \quad \int_{\partial^+ D(0,r)} f(z)\,dz = -\int_{\partial^- D(0,r)} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty)$$

Quindi $\quad 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_i) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$. ∎

Esempi

Calcolare i residui della funzione $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ in tutti i punti di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$



f è olomorfa, ad esempio, all'esterno del disco D(0,3) per cui ha senso calcolare anche il residuo dell'infinito

$$f \in H(\mathbb{C} \setminus \{-1, 2i, -2i\})$$

$$f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)}$$

$$\lim_{z\to 2i} (z-2i) f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2(4i)} \neq 0$$

Quindi $2i$ è un polo semplice e $\operatorname{Res}(f, 2i) = \dfrac{-4-4i}{(2i+1)^2\, 4i}$

Analogamente $\operatorname{Res}(f, -2i) = \lim\limits_{z\to -2i} (z+2i) f(z) = \dfrac{-4+4i}{(1-2i)^2(-4i)} \neq 0$.

$$\lim_{z\to -1} (z+1)^2 f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{z^2-2z}{z^2+4} = \frac{3}{5} \neq 0$$

, quindi -1 è un polo di ordine 2

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to -1} D\left((z+1)^2 f(z)\right)$$

$$D\left(\frac{z^2-2z}{z^2+4}\right) = \frac{(2z-2)(z^2+4) - (z^2-2z)\,2z}{(z^2+4)^2}$$

$$\lim_{z\to -1} \frac{(2z-2)(z^2+4) - (z^2-2z)2z}{(z^2+4)^2} = \frac{-4\cdot 5 + 6}{25} = -\frac{14}{25} = \operatorname{Res}(f, -1)$$

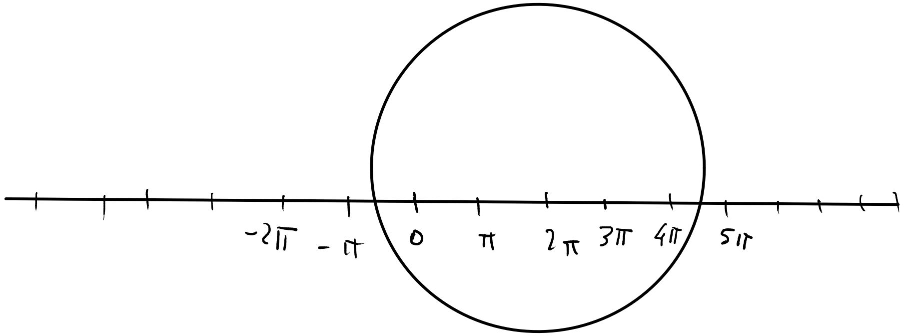
$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right), 0 \right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z}}{\left(\frac{1}{z}+1\right)^2 \left(\frac{1}{z^2}+4\right)} = \frac{\frac{1-2z}{\cancel{z^2}}}{\frac{(1+z)^2}{\cancel{z^2}} \cdot \frac{1+4z^2}{\cancel{z^2}}} \left(-\frac{1}{\cancel{z^2}}\right) =$$

$$= -\frac{1-2z}{(1+z^2)(1+4z^2)}$$. Poiché $\exists \lim_{z\to 0} -\frac{1-2z}{(1+z^2)(1+4z^2)} = -1$, 0 è una singolarità eliminabile per la funzione $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ e dunque $\operatorname{Res}(f,\infty) = 0$

- Calcolare i residui di $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$ nei punti singolari (ha senso calcolare il residuo in ∞?)

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}})$



$\lim_{k\to+\infty} |k\pi| = +\infty$ e $\lim_{k\to-\infty} |k\pi| = +\infty$

e dunque ∞ non è una singolarità isolata (cioè l'insieme su cui f è olomorfa non è del tipo $\mathbb{C}\setminus K$, con K compatto) e quindi non ha senso calcolare $\operatorname{Res}(f,\infty)$.

Abbiamo già visto in precedenza che ognuno dei punti $k\pi$ è uno zero semplice per $\sin z$ quindi essi sono poli semplici e

$$\mathrm{Res}(f,k\pi)=\lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)\,f(z)=\frac{e^{k\pi}}{D\sin z|_{z=k\pi}}=\frac{e^{k\pi}}{(-1)^k}$$

- Determinare le singolarità di $f(z)=1/\sin\frac{1}{z}$ e dire se ha senso calcolare il residuo in 0.

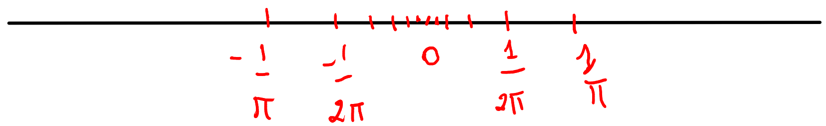
$\sin w=0 \iff w=k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

$\sin\frac{1}{z}=0 \iff \frac{1}{z}=k\pi \iff z=\frac{1}{k\pi}\,,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$f\in\mathcal{H}\left(\mathbb{C}\setminus\left(\{0\}\cup\left\{\tfrac{1}{k\pi}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\right)\right)$$

Non ha senso calcolare il residuo in 0 perché 0 non è una singolarità isolata

$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k\pi}=0$ e $\lim_{k\to-\infty}\frac{1}{k\pi}=0$



Ha senso invece calcolare il residuo di f all'infinito dato che le singolarità di f costituiscono un insieme compatto

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)=\ ?$$

CALCOLARE PER ESERCIZIO!

- Calcolare il residuo in 0 di $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$.

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \sin z = \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{z^{2h+1}}{(2h+1)!} \qquad \text{quindi} \qquad \frac{\sin z}{z^5} = \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{z^{2h-4}}{(2h+1)!}$$

è la serie di Laurent di centro 0 della funzione $\sin z / z^5$

Il residuo è il coefficiente del termine $\frac{1}{z}$

che si ottiene per $2h-4=-1$ cioè per $h = 3/2$!! h deve essere intero!

Quindi il coefficiente di $\frac{1}{z}$ è nullo e

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z^5}, 0\right) = 0$$

- Calcolare il residuo in 0 della funzione $f(z) = z^6 \sin \frac{1}{z}$

$$\forall z \neq 0 \qquad \sin \frac{1}{z} = \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{1}{z^{2h+1}} \cdot \frac{1}{(2h+1)!},$$

quindi 0 è una sing. essenziale per la funzione $\sin \frac{1}{z}$

$$z^6 \sin \frac{1}{z} = \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{1}{z^{2h-5}} \cdot \frac{1}{(2h+1)!},$$

0 resta una singolarità essenziale anche per la funzione $z^6 \sin \frac{1}{z}$

$$\boxed{2h-5 = 1 \to h = 3}$$

$$\mathrm{Res}\left(z^6 \sin \frac{1}{z}, 0\right) = (-1)^3 \cdot \frac{1}{7!} = -\frac{1}{7!}$$

- Determinare i residui in tutti i punti singolari per la funzione $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-3z+1}$

$$z^2-3z+1=0 \iff z = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{3+\sqrt5}{2} \\[2ex] \dfrac{3-\sqrt5}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$f \in H\left(\mathbb{C}\setminus\left\{0, \frac{3\pm\sqrt5}{2}\right\}\right)$$

$$\lim_{z\to\frac{3+\sqrt5}{2}} \cancel{\left(z-\frac{3+\sqrt5}{2}\right)} \frac{1}{\cancel{\left(z-\frac{3+\sqrt5}{2}\right)}\left(z-\frac{3-\sqrt5}{2}\right)}\, e^{1/z} = \frac{e^{\frac{1}{\frac{3+\sqrt5}{2}}}}{\sqrt5} = \operatorname{Res}\left(f, \frac{3+\sqrt5}{6}\right)$$

$$\lim_{z\to\frac{3-\sqrt5}{2}} \cancel{\left(z-\frac{3-\sqrt5}{2}\right)} \frac{1}{\left(z-\frac{3+\sqrt5}{2}\right)\cancel{\left(z-\frac{3-\sqrt5}{2}\right)}}\, e^{\frac{1}{z}} = -\frac{e^{\frac{1}{\frac{3-\sqrt5}{2}}}}{\sqrt5} = \operatorname{Res}\left(f, \frac{3-\sqrt5}{6}\right)$$

Cerchiamo di stabilire ora che tipo di singolarità è 0 per f. Evidentemente non può essere una singolarità eliminabile dato che $\nexists \lim_{z \to 0} f(z)$ (se esistesse dovrebbe esistere il $\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ ma così non è poiché 0 è sing. essenziale per $e^{\frac{1}{z}}$)

Supponiamo per assurdo che sia un polo

allora dovrebbe esistere $k > 0$ tale che $\lim_{z \to 0} z^k f(z) = \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

quindi $\left| \frac{z^k}{z^2 - 3z + 1} e^{\frac{1}{z}} \right| \xrightarrow{z \to 0} |\ell|$ e quindi $\left| e^{\frac{1}{z}} \right| \xrightarrow{z \to 0} +\infty$, dato

che $\lim_{z \to 0} \frac{|z^2 - 3z + 1|}{|z|^k} = +\infty$, ma anche questo contraddice il fatto che 0 è una singolarità essenziale per la funzione $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$.

Come possiamo calcolare $\text{Res}(f, 0)$? (Non è facile ottenere in questo caso ottenere lo sviluppo di Laurent in 0 per f)

Possiamo però fare ricorso al II teorema dei residui:

$\text{Res}(f, \infty) + \text{Res}\left(f, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + \text{Res}\left(f, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \text{Res}(f, 0) = 0$, quindi il residuo in una delle singolarità-

Cerchiamo di calcolare $\text{Res}(f, \infty)$ (sperando che sia più facile che calcolare $\text{Res}(f, 0)$)

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z} + 1} \cdot e^{z} = -\frac{1}{\cancel{z^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1-3z+z^2}{\cancel{z^2}}} e^{z}$$

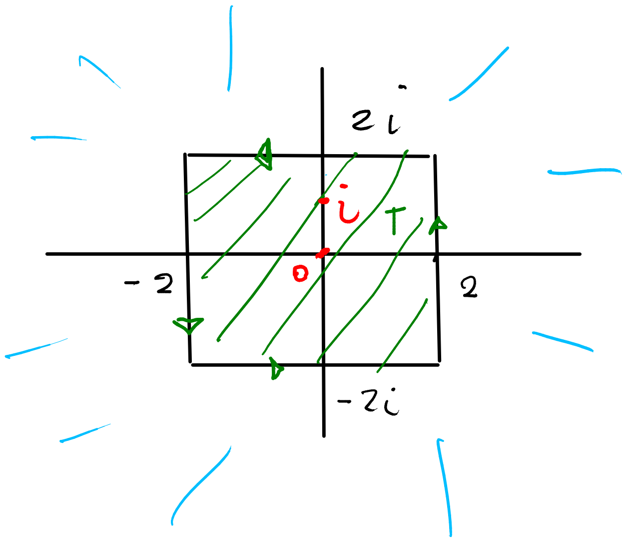
Dato che la funzione $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{e^z}{1-3z+z^2}$ ha una singolarità eliminabile in 0

$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$, da cui $\operatorname{Res}(f,0) = -\operatorname{Res}\left(f, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \operatorname{Res}\left(f, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - 0$

- Calcolare $$\int_{\partial^+ T} \underbrace{e^{\frac{1}{z^2 - iz}}}_{f(z)} dz,$$ dove T è il quadrato $T = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \le 2, |\operatorname{Im} z| \le 2 \}$

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0, i\})$ dato che

$z^2 - iz = 0 \iff z = 0 \lor z = i$



$$\int_{\partial^+ T} e^{\frac{1}{z^2-iz}} \cdot dz \underset{\uparrow}{=} 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,i)\right) \underset{\uparrow}{=} -2\pi i \,\mathrm{Res}(f,\infty)$$

I teorema dei residui II teorema dei residui

$$f\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{\frac{1}{z^2}-\frac{i}{z}}} = -\frac{1}{z^2} e^{\frac{z^2}{1-iz}}.$$

$$\lim_{z\to 0} z^2 \left(-\frac{1}{z^2}\right) e^{z^2/1-iz} = \lim_{z\to 0} -e^{z^2/1-iz} = -e^0 = -1 \neq$$

quindi 0 è un polo di ordine 2 per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

$$\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!} D\left(z^2 \left(-\frac{1}{z^2}\right) f\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$D\left(-f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -Df\left(\frac{1}{z}\right) = -D\, e^{\frac{z^2}{1-iz}} = -e^{\frac{z^2}{1-iz}} \frac{2z(1-iz)-z^2(-i)}{(1-iz)^2}$$

$$\lim_{z\to 0}\left(-e^{z^2/1-iz} \frac{2z(1-iz)+iz^2}{(1-iz)^2}\right) = -e^0 \frac{0+0}{1} = 0$$

quindi $\mathrm{Res}(f,\infty)=0$ e anche l'integrale che dovevamo da calcolare è uguale a 0.

Metodo dei residui per il calcolo di alcuni integrali

Integrali trigonometrici

Si voglia calcolare

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt,$$

dove $R(\cos t, \sin t)$ è una funzione razionale integrabile su $[0, 2\pi]$: $R(x,y) = \dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$ con p e q polinomi in $\mathbb{R}$ nelle variabili x e y.

Poiché

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \overset{e^{it}=z}{=} \left(z + \frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \overset{e^{it}=z}{=} \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2}\right) dt =$$

$$= \int_{\partial^+ D(0,1)} \underbrace{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \frac{1}{iz}}_{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \in D(0,1) \\ z_k \text{ singolarità per } f}} \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

OSS dato che $R(\cos t, \sin t)$ è limitata su $[0, 2\pi]$ f non può avere poli o singolarità essenziali su $\partial D(0,1)$

Esempi

- $$\int_0^{2\pi} \sin^m t \, dt = \begin{cases} 0, & \text{se } m \text{ dispari} \\ \dfrac{2\pi}{2^m} \dfrac{m!}{\left[\left(\frac{m}{2}\right)!\right]^2}, & \text{se } m \text{ è pari} \end{cases}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \overset{e^{it} = z}{=\!=} \left(z - \frac{1}{z}\right) \frac{1}{2i} \qquad (\sin t)^m = \frac{(z^2 - 1)^m}{z^m} \cdot \frac{1}{2^m i^m}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^m t \, dt = \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{(z^2 - 1)^m}{z^{m+1}} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{i^{m+1}} \, dz = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{i^{m+1}} \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{(z^2 - 1)^m}{z^{m+1}} \, dz$$

Sia

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)^m}{z^{m+1}}; \qquad f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \qquad \lim_{z \to 0} z^{m+1} \cdot f(z) = \lim_{z \to 0} (z^2 - 1)^m = (-1)^m \neq 0$$

quindi 0 è un polo di ordine $m+1$

Cerchiamo di calcolare il residuo in 0

Usando la formula di Newton per la potenza di un binomio otteniamo:

$$(z^2-1)^m = \sum_{h=0}^{m} (z^2)^h (-1)^{m-h} \binom{m}{h} = \sum_{h=0}^{m} z^{2h} \cdot (-1)^h \binom{m}{h}$$

$$\frac{(z^2-1)^m}{z^m} = \sum_{h=0}^{m} z^{2h-m-1} (-1)^h \binom{m}{h}$$

questo è la serie di Laurent della funzione $\frac{(z^2-1)^m}{z^{m+1}}$

in questo caso la serie di Laurent si riduce alla somma di un numero finito di addendi

Il coefficiente del termine $\frac{1}{z}$ si ottiene per

$2h-m-1=-1$, cioè $m=2h \iff h=\frac{m}{2}$. Pertanto:

se m è dispari: $\operatorname{Res}(f,0)=0$ (dato che in questo caso $h=\frac{m}{2}$ non è un numero intero!)

se m è pari: $\operatorname{Res}(f,0)=(-1)^{m/2}\binom{m}{\frac{m}{2}}$

Quindi se m è pari

$$\int_0^{2\pi} \sin^m t \, dt = \frac{1}{2^m}\cdot\frac{1}{i^{m+1}}\cdot 2\pi i\,(\operatorname{Res} f,0) = \frac{1}{2^m}\cdot\frac{2\pi}{\cancel{i^m}}\underbrace{\cancel{(-1)^{\frac{m}{2}}}}_{(i^2)^{m/2}=i^m}\binom{m}{\frac{m}{2}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ è dispari} \\ \frac{1}{2^m}\cdot 2\pi \binom{m}{\frac{m}{2}} \end{cases}$$

$$\binom{m}{\frac{m}{2}} = \frac{m!}{\frac{m}{2}!\,\frac{m}{2}!} = \frac{m!}{\left(\frac{m}{2}!\right)^2}$$

- $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5+3\cos\theta}\, d\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad \cos 3\theta = \frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2} = \frac{(e^{i\theta})^3+(e^{-i\theta})^3}{2}$$

$$\underset{z=e^{i\theta}}{=} \left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)\frac{1}{2} = \frac{z^6+1}{2z^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5+3\cos\theta}\, d\theta = \int_{\partial D(0,1)} \underbrace{\frac{z^6+1}{2z^3}\cdot\frac{1}{5+3\left(z+\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{iz}}_{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_k)$$

$z_k \in D(0,1)$

z_k singolarità di f

$$f(z) = \frac{z^6+1}{z^3}\,\frac{1}{10z+3(z^2+1)}\cdot\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\,\frac{z^6+1}{z^3(10z+3z^2+3)}$$

Radici: $z_{1/2} = \frac{-5\pm\sqrt{16}}{3}$ $\begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -3 \end{cases}$

$$f \in H\left(\mathbb{C}\setminus\{0, -\tfrac{1}{3}, -3\}\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{i}\,\frac{z^6+1}{3z^3(z+3)(z+\frac{1}{3})}$$

; le singolarità appartenenti al disco di centro 0 e raggio 1 sono solo 0 e $-\frac{1}{3}$

$$\lim_{z \to -\frac{1}{3}} \left(z+\frac{1}{3}\right) f(z) = \lim_{z \to -\frac{1}{3}} \frac{1}{i} \frac{z^6+1}{3z^3(z+3)} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^6+1}{i\left(-\frac{1}{9}\left(3-\frac{1}{3}\right)\right)} = \mathrm{Res}\left(f, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\lim_{z \to 0} z^3 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{3i} \frac{z^6+1}{(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3i} \frac{1}{1} = \frac{1}{3i} \neq 0$$

0 è un polo di ordine 3

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{2!} D^{(2)}\left(z^3 f(z)\right)$$

$$\frac{1}{3i} D\left(\frac{z^6+1}{(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)}\right) = \frac{1}{3i} \frac{6z^5(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right) - (z^6+1)\left(z+\frac{1}{3}+z+3\right)}{(z+3)^2\left(z+\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3i} \frac{2z^5(z+3)(3z+1) - (z^6+1)\left(2z+\frac{10}{3}\right)}{(z+3)^2\left(z+\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\frac{1}{3i} D^{(2)}\left(\frac{z^6+1}{(z+3)(z+\frac{1}{3})}\right) = \frac{1}{3i}\,\frac{\left[\cancel{10z^4(z+3)(3z+1)} + \cancel{2z^5(3z+1)} + \cancel{6z^5(z+3)} - (\cancel{6z^5(2z+10/3)} + (z^6+1)2\right]\cdot}{(z+3)^4(z+\frac{1}{3})^4}$$

$$\frac{\cdot (z+3)^2(z+\frac{1}{3})^2 - \left[\cancel{2z^5(z+3)(3z+1)} - (z^6+1)(2z+10/3)\right]\left(2(z+3)(z+\frac{1}{3})^2 + 2(z+3)^2(z+\frac{1}{3})\right]}{(z+3)^4(z+\frac{1}{3})^4}$$

Passando al limite per $z \to 0$, i termini barrati, qui sopra, tendono a zero e quindi otteniamo

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3i}\,\frac{-2 - [-10/3]\cdot\left(\frac{2}{3}+6\right)}{1} = \frac{1}{6i}\left(-2+\frac{200}{9}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5+3\cos\theta}\,d\theta = 2\pi \cancel{i}\left(\frac{(-\frac{1}{3})^6+1}{\cancel{i}\left(-\frac{1}{9}(3-\frac{1}{3})\right)} + \frac{1}{6\cancel{i}}\left(\frac{182}{9}\right)\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{(-1)^6+3^6}{3^6}\Big/\left(-\frac{8}{3^3}\right) + \frac{182}{2\cdot 3^3}\right) = 2\pi\left(\frac{-1-3^6}{8\cdot 3^3} + \frac{182}{2\cdot 3^3}\right) = -\frac{4}{8\cdot 3^3}\pi = -\frac{\pi}{54}$$

Integrali impropri su $\mathbb{R}$ di una funzione continua

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua su $\mathbb{R}$. Vogliamo calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

1^a cosa da fare: stabilire se f è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$

Ricordiamo che se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua su $\mathbb{R}$, f è integrabile assolutamente in senso improprio su $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ (rispettivamente su $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$) se

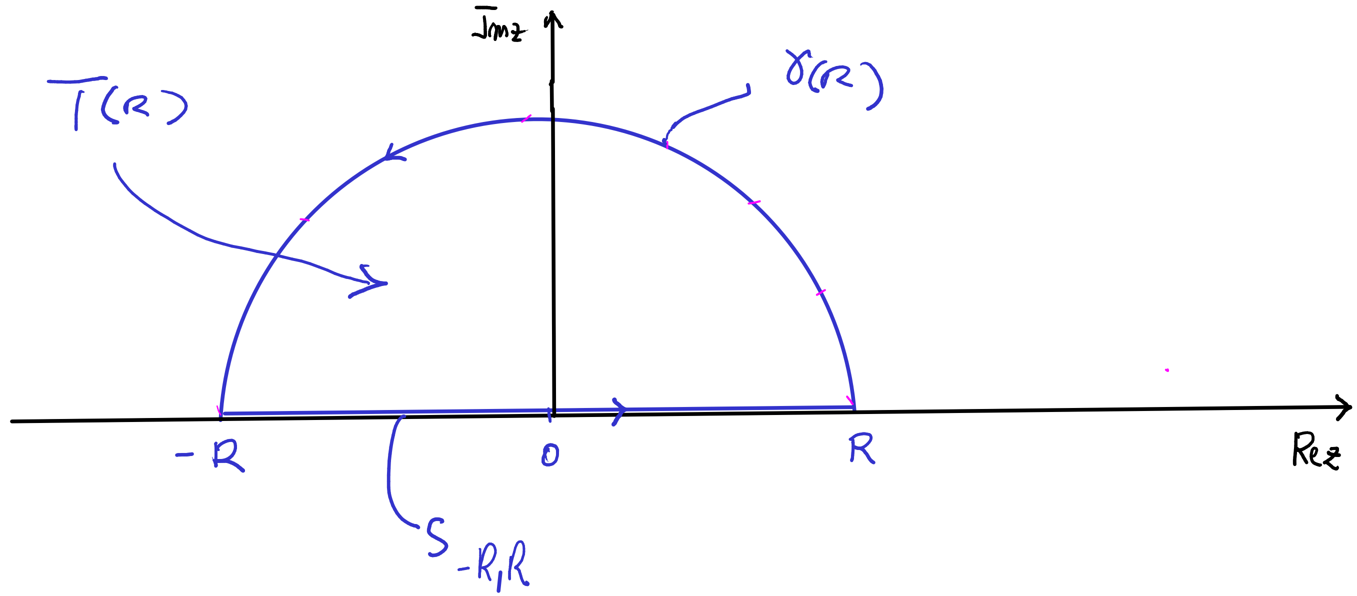
$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, con $\alpha > 1$, definitivamente per $x \to +\infty$ (risp. per $x \to -\infty$)

Ricordiamo anche che se f è assolutamente integrabile su $(-\infty, b]$ o su $[a, +\infty)$ è anche integrabile in senso improprio nello stesso intervallo

Idea alla base del metodo dei residui

Supponiamo che f abbia un'estensione analitica (che indicheremo con $\tilde{f}$) tranne che in un numero finito di punti su $\mathbb{C}$.

Consideriamo la curva $\Gamma(R)$ in blu in figura data dal seguente $S_{-R,R}$ e dalla semicirconferenza $\gamma(R)$ di centro 0 e raggio R e sia $T(R)$ il dominio che ha come frontiera γ.



Allora abbiamo:

$$\int_{\Gamma(R)} \tilde{f}(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in T(R)} \mathrm{Res}(\tilde{f}, z_k)$$

z_k singolarità per $\tilde{f}$, $z_k \in T(R)$

$$\| $$

$$\int_{S_{-R,R}} \tilde{f}(z)\,dz + \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z)\,dz \quad (\square).$$

Il segmento $S_{-R,R}$ ha equazione

$S_{-R,R}(t) = (t, 0)$, $t \in [-R, R]$; quindi $(S'_{-R,R})'(t) = (1, 0)$ e dunque $(\square)$ è uguale a

$$(\square) = \int_{-R}^{R} \tilde{f}(t,0)\cdot(1,0)\,dt + \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt + \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(t)\,dz$$

Passando al limite per $R \to +\infty$ e supponendo che $\exists \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(t)\,dz = \Lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\underbrace{2\pi i \sum_{\substack{z_k \text{ singolari per } f \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res}(\tilde{f}, z_k)}_{=\Lambda_1} = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(t)\,dt + \underbrace{\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(t)\,dz}_{\xrightarrow{R\to+\infty} \Lambda_2}$$

e quindi $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(t)\,dt = \Lambda_1 - \Lambda_2$

cioè $(VP)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \Lambda_1 - \Lambda_2$

VALORE PRINCIPALE:

se f è integrabile allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = (VP)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{a\to+\infty} \int_{c}^{a} f(t)\,dt + \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{c} f(t)\,dt$$

$$(VP)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

È quindi fondamentale saper calcolare $\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z)\, dz$.

Un teorema per il calcolo di $\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z)\, dz$

Se

$$\lim_{|z| \to \infty} z\tilde{f}(z) = 0 \quad \text{allora} \quad \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z)\, dz = 0$$

Esempio

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx$; $f(x) = \dfrac{1}{1+x^6}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ed è continua

$0 < f(x) \leq \dfrac{1}{x^6}$ $\forall x > 0$ e quindi f è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$

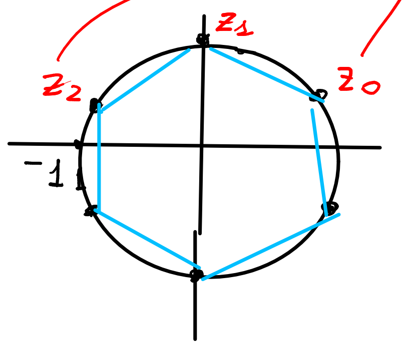
Consideriamo l'estensione di f a $\mathbb{C}$:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{1+z^6} \qquad f \in H(\mathbb{C} \setminus \{\sqrt[6]{-1}\})$$

$$\lim_{|z|\to\infty} z\tilde{f}(z) = 0 \, . \quad \lim_{|z|\to+\infty} \frac{z}{1+z^6} = \lim_{|z|\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{z^5}\right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\frac{1}{z^6}+1}\right)}_{\to 1} = 0$$

Usando il metodo dei residui dato che $\lim_{|z|\to\infty} z\tilde{f}(z) = 0$ otteniamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} = \pi i \sum_{\substack{z_k = \sqrt[6]{-1} \\ k=0,1,2}} \mathrm{Res}\,(\tilde{f}, z_k)$$



Sono le sole singolarità da considerare perchè sono quelle nel semipiano $\mathrm{Im}\, z \geq 0$

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1}\; e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}k\right)} , \quad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$\frac{1}{1+z^6} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_5)},$$ quindi le singolarità z_k sono

tutte poli semplici e $Res(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) \frac{1}{1+z^6} = \underbrace{\frac{1}{(z_k - z_0)\ldots(z_k - z_5)}}$

in questo prodotto ci sono tutti i fattori del tipo $z_k - z_i$ dove z_i sono le radici seste di -1 tranne, ovviamente, quello che si ottiene per $i=k$

Un modo "più furbo" per calcolare questo limite è il seguente

Posto $p(t) = 1+z^6$, qualunque sia la radice z_k deve essere

(dato che p è analitico su $\mathbb{C}$ e le sue derivate di ordine ≥ 7 sono nulle)

$$p(z) = \sum_{n=0}^{6} \frac{p^{(n)}(z_k)}{n!}(z-z_k)^n,$$ e quindi dato che $p(z_k)=0$

$$p(t) = \sum_{n=1}^{6} p^{(n)}(z_k)/n! \, (t-z_k)^n.$$ Dunque

$$\lim_{z \to z_k} (z-z_k)\frac{1}{p(z_k)} = \lim_{z \to z_k} \frac{(z-z_k)}{(z-z_k)\sum_{n=1}^{6} \frac{p^{(n)}(z_k)}{n!}(z-z_k)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{p'(z_k)} = \frac{1}{6 z_k^5}.$$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx =$$

$$= \pi i \sum_{k=0,1,2} \mathrm{Res}(\tilde{f}, z_k) = \pi i \left(\frac{1}{6 z_0^5} + \frac{1}{6 z_1^5} + \frac{1}{6 z_2^5} \right)$$

<u>OSS</u>

Lo stesso tipo di ragionamento può essere ripetuto per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, dove

p e q sono polinomi, q privo di zeri reali,

con (grado di p) $+ 2 \leq$ (grado di q).

In questo caso: $p(x)/q(x)$ è assolutamente integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$

e inoltre $\quad z \frac{p(z)}{q(z)} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$.

Integrali di tipo Fourier

Sono integrali del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$, $\omega \in \mathbb{R} \sim \{0\}$

(si chiamano così perché entrano in gioco nella definizione di trasformata di Fourier di f)

Oss1

Poiché $\cos(\omega t) = \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ e $\sin(\omega t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ anche integrali del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t)\, dt$ o $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt$ rientrano in questa classe

Oss2

Poiché l'integrando è $f(t)\, e^{i\omega t}$, se f si può estendere ad una funzione $\tilde{f}$ olomorfa in $\mathbb{C}$ meno un numero finito di punti allora $\tilde{f}(z)\, e^{i\omega z}$ estende in modo olomorfo, sullo stesso insieme dove è olomorfa $\tilde{f}$, la funzione $t \in \mathbb{R} \longmapsto f(t)\, e^{i\omega t}$

Nell'applicazione del metodo dei residui occorre calcolare

$\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z)\, e^{i\omega z}\, dz$, $\gamma(R)$ semicirconferenza di centro 0 e raggio R orientata in senso antiorario e avente immagine nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$

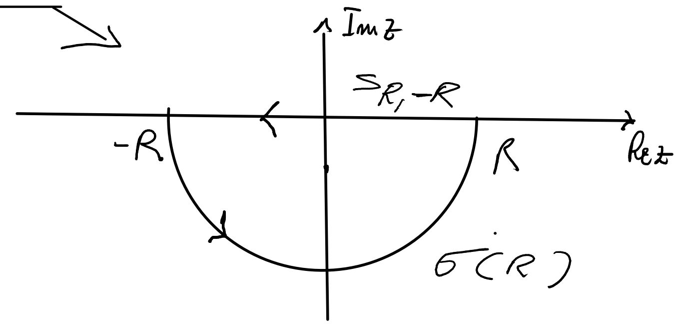
Quando l'integrando è del tipo $z \mapsto f(z)\, e^{i\omega z}$, $\omega > 0$, possiamo usare a tale scopo il Lemma di Jordan

Lemma di Jordan (per il semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$)

Se $\lim_{|z| \to \infty} \tilde{f}(z) = 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$

allora
$$\boxed{\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma(R)} e^{i\omega z}\, \tilde{f}(z)\, dz = 0}$$

C'è anche una versione del Lemma di Jordan per il semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$ cioè per il caso in cui $\omega < 0$. Quando $\omega < 0$ si considera un cammino $\Gamma(R)$ fatto in questo modo



Lemma di Jordan (per il semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$)

Se $\lim_{|z| \to \infty} \tilde{f}(z) = 0$ e $\omega < 0$

allora:
$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma(R)} e^{i\omega z}\, \tilde{f}(z)\, dz = 0$$

Esempio

- Si voglia calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\,dx$, con $k \in \mathbb{R}$, $k>0$.

Osserviamo che $\left|\dfrac{\cos(kx)}{1+x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$ e quindi la funzione $\dfrac{\cos(kx)}{1+x^2}$ è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{2(1+x^2)}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{2(1+x^2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\,dx}_{①} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\,dx}_{②}\Bigg).$$

Iniziamo col calcolare l'integrale ①:

Consideriamo l'estensione complessa della funzione integranda $g(z) = \dfrac{e^{ikz}}{(1+z^2)}$

$g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{i,-i\})$. Osserviamo che $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{1+z^2} = 0$ quindi possiamo applicare il lemma di Jordan (per il semipiano $\operatorname{Im} z \ge 0$, dato che $k>0$) e ottenere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{(1+x^2)}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

sono da considerare solo le singolarità di g che appartengono al semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$!

Il punto i è polo semplice per g. Infatti $\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{e^{ikz}}{(z+i)}=\frac{e^{-k}}{2i}$.

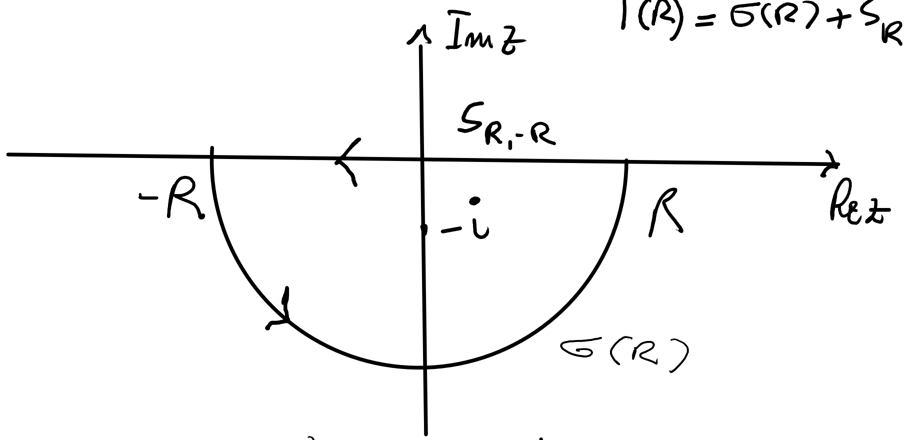
Dunque il residuo di f in i è uguale a $e^{-k}/2i$ e $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{(1+x^2)}dx=2\pi i\frac{e^{-k}}{2i}=\pi e^{-k}$

Calcoliamo ora l'altro integrale. Abbiamo due possibilità: o usare il metodo dei residui e il Lemma di Jordan per il semipiano $\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z\le 0\}$ (si osservi che nel secondo integrale l'argomento della funzione esponenziale è $-ikx$ e $-k<0$) o fare un cambio di variabile, ponendo $-x=y$, con il quale si ottiene che il secondo integrale è uguale al primo.

Per esercizio calcoliamolo usando di nuovo il metodo dei residui.

Scegliamo come cammino di integrazione che circondi la singolarità $-i$ della estensione olomorfa a $\mathbb{C}$ della funzione integranda (cioè $g(z)=\frac{e^{-ikz}}{1+z^2}$) la curva $\Gamma(R)$ in figura

$\Gamma(R)=\sigma(R)+S_{R,-R}$



Si osservi che questa volta il segmento è percorso nel verso opposto al caso precedente e quindi

$$\int_{S_{R,-R}} g(z)dz=-\int_{S_{-R,R}} g(z)\,dz=-\int_{-R}^{R} g(x)\,dx$$

Applicando quindi il I teorema dei residui e il Lemma di Jordan per $\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z\le 0\}$, Otteniamo:

$$2\pi i \, \mathrm{Res}(g,-i) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\,dx .$$

Ora anche $-i$ è un polo semplice per g e

$$\mathrm{Res}(g,-i) = \lim_{z\to -i} (z+i)\frac{e^{-ikz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-ik(-i)}}{-2i} = \frac{e^{-k}}{-2i}$$

e quindi

$$2\pi i \frac{e^{-k}}{-2i} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\,dx$$

da cui $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-k}$

In definitiva l'integrale assegnato è uguale a $\frac{1}{4}\left(\pi e^{-k} + \pi e^{-k}\right) = \frac{\pi}{2} e^{-k}$.

- Vogliamo ora calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

Oss 1

Si può dimostrare che la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ NON è assolutamente integrabile su $(0,+\infty)$ ma è solo integrabile.

Oss 2

L'estensione a $\mathbb{C}$ di $\frac{\sin x}{x}$, cioè la funzione $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ha in 0 una singolarità eliminabile; dato però che $\lim_{|z|\to\infty} z \cdot \frac{\sin z}{z} = \lim_{|z|\to\infty} \sin z$ non esiste non c'è speranza di usare il teorema visto nella lezione precedente per calcolare $\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\sin z}{z}\, dz$. Possiamo invece usare il lemma di Jordan, come visto sopra a patto di prendere un cammino che "tagli fuori" la singolarità in 0 di $\frac{1}{z}$.

Vediamo nei dettagli in che modo:

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è una funzione pari per cui $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

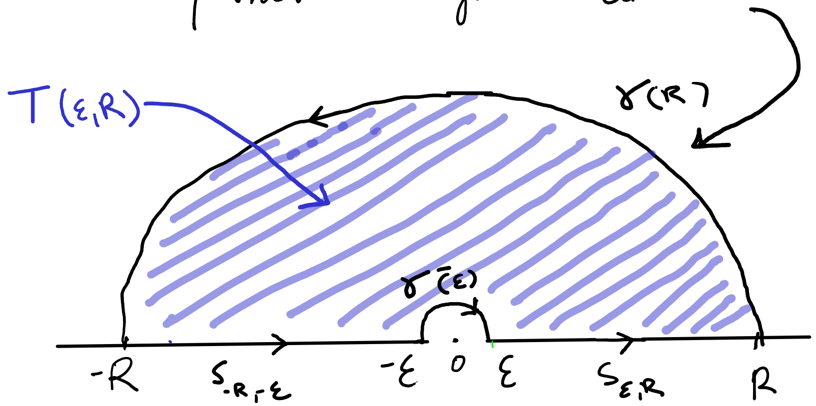
ora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2ix}\, dx}_{1} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{2ix}\, dx}_{2}$$

Calcoliamo l'integrale 1:

l'estensione a $\mathbb{C}$ di $\dfrac{e^{ix}}{2ix}$ è la funzione $\dfrac{e^{iz}}{2iz}$ che è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Consideriamo quindi il seguente cammino. Nel dominio $T(\varepsilon,R)$, il cui bordo è la curva definita dalla semicirconferenza $\gamma(R)$, dal segmento $S_{-R,-\varepsilon}$ dalla semicirconferenza $\gamma^-(\varepsilon)$ e dal segmento $S_{\varepsilon,R}$ non ci sono singolarità per cui:



Th. di Cauchy-Goursat

$$0 \overset{\downarrow}{=} \int_{\partial^+ T(\varepsilon,R)} \frac{e^{iz}}{2iz}\,dz =$$

$$= \int_{\gamma(R)} \frac{e^{iz}}{2iz}\,dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{2ix}\,dx + \int_{\gamma^-(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{2iz}\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{2ix}\,dx$$

Per $R \to +\infty$ e poi per $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2ix}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma^-(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{2iz}\,dz - \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma(R)} \frac{e^{iz}}{2iz}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{2iz}\,dz - \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma(R)} \frac{e^{iz}}{2iz}\,dz$$

Per il lemma di Jordan il secondo limite è 0. Per calcolare il primo limite il seguente teorema è essenziale:

Teorema.

Sia h olomorfa in $D'(z_0,\delta)$ e z_0 singolarità isolata per h se

$$\exists \lim_{z\to z_0} (z-z_0)h(z) = \lambda \in \mathbb{C}$$

(quindi z_0 è un polo semplice se $\lambda \neq 0$)

allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} h(z)\,dz = i\lambda\pi$$

- In particolare se $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)h(z) = 0$ allora $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} h(z)\,dz = 0$

Nell'applicazione al calcolo del nostro integrale abbiamo che $z_0 = 0$ e

$$\lim_{z\to 0} z\frac{e^{iz}}{2iz} = \frac{1}{2i}$$ e quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{2iz} dz = i\pi \frac{1}{2i}, \quad \text{da cui} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx = \frac{\pi}{2}$$

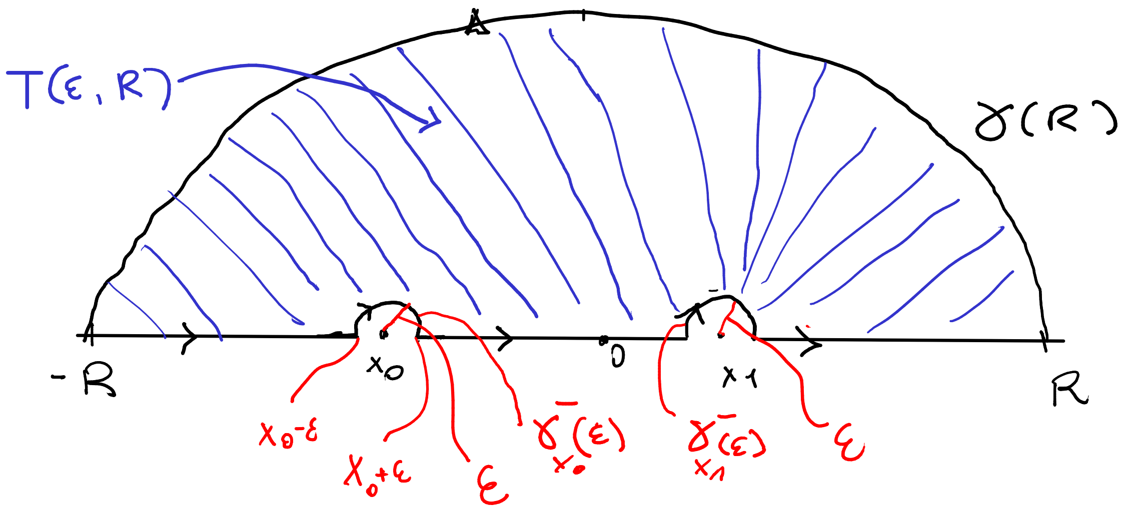
Per calcolare l'integrale (2) potremmo usare il lemma di Jordan per il semipiano dei numeri complessi z, tali che $\operatorname{Im} z < 0$ e il teorema qui sopra con $\alpha = \pi$, $\beta = 2\pi$

oppure possiamo osservare che

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{2ix} dx \overset{-x=y}{=\!=} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{iy}}{-2iy} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy}}{2iy} dy = \frac{\pi}{2}$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

In generale, se f ha punti singolari sull'asse dei numeri reali, ad esempio nei punti $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, possiamo considerare il cammino seguente



Supponiamo che f si possa estendere ad una funzione olomorfa nel piano complesso tranne che su un insieme finito di punti e consideriamo il dominio $T(\varepsilon,R)$ (tratteggiato in blu) il cui bordo è la curva in nero nella figura qui sopra. Dal I teorema dei residui abbiamo

$$2\pi i \sum_{\substack{z_k \text{ sing. per } f \\ z_k \in T(\varepsilon,R)}} \operatorname{Res}(f, z_k) = \int_{\partial^+ T(\varepsilon,R)} f(z)\,dz = \int_{\gamma(R)} f(z)\,dz + \int_{S_{-R,x_0-\varepsilon}} f(z)\,dz - \int_{\gamma^-_{x_0}(\varepsilon)} f(z)\,dz + \int_{S_{x_0+\varepsilon,x_1-\varepsilon}} f(z)\,dz$$

$$- \int_{\gamma^-_{x_1}(\varepsilon)} f(z)\,dz + \int_{S_{x_1+\varepsilon,R}} f(z)\,dz$$

facendo tendere $R \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0$ otteniamo $(VP)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ a patto che esistano

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma(R)} f(z)\,dz \quad e \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_{x_0}(\varepsilon)} f(z)\,dz \quad e \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_{x_1}(\varepsilon)} f(z)\,dz .$$

Serie di Fourier

Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente integrabile

DEF

Si definisce COEFFICIENTE (K-ESIMO) DI FOURIER $(k \in \mathbb{Z})$ DI f il numero

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt} \quad (\in \mathbb{C})$$

DEF

Si definisce SERIE DI FOURIER DI f la serie bilatera di funzioni

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt}}$$

TRADUZIONE IN POLINOMI TRIGONOMETRICI:

Un polinomio trigonometrico in $\mathbb{R}$ è una funzione del tipo

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt) + \sum_{k=0}^{n} b_k \sin(kt),$$ dove

$k \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Vediamo come la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$ possa essere riscritta come $a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kt)$

$e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt)$; poiché $\cos(-kt) = \cos(kt)$ e $\sin(-kt) = -\sin(kt)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cos(kt) + i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \sin(kt)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cos(kt) + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \cos(kt) + i \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \sin(kt) + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \sin(kt) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \cos(-kt) + i \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \sin(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \sin(-kt) \right)$$

$$= \overbrace{c_0}^{a_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \overbrace{(c_k + c_{-k})}^{a_n} \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} \overbrace{i(c_k - c_{-k})}^{b_n} \sin(kt)$$

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-i\cdot 0\cdot t}\, dt = \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt}$$

$\forall k \in \mathbb{N}, k > 0$

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(e^{-ikt} + e^{ikt}\right)/2\, dt$$

$$= \boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2i\cdot i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(e^{-ikt} - e^{ikt}\right)/2\, dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(-\sin(kt)\right) dt = \boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt}$$

RICONDUZIONE DEL CASO DI UNA FUNZIONE DEFINITA SU $[a,b]$ A $[-\pi,\pi]$

Se partiamo da $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f assolutamente integrabile in $[a,b]$, possiamo scrivere la serie di Fourier di f usando le definizioni viste per funzioni definite su $[-\pi,\pi]$. Infatti è sufficiente considerare il cambio di variabile, cioè la trasformazione,

$$\tau\in[-\pi,\pi]\longmapsto \frac{b-a}{2\pi}\tau+\frac{a+b}{2}\in[a,b]$$

e la funzione $g(\tau)=f\left(\frac{b-a}{2\pi}\tau+\frac{a+b}{2}\right)$

I coefficienti di Fourier di g sono dati da

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\,e^{-ik\tau}\,d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{b-a}{2\pi}\tau+\frac{a+b}{2}\right)e^{-ik\tau}\,d\tau;$$

usando la formula di integrazione per sostituzione ponendo $x=\frac{b-a}{2\pi}\tau+\frac{a+b}{2}$

da cui $\tau=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\frac{2\pi}{b-a}$ e $dx=\frac{b-a}{2\pi}d\tau$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,e^{-ik\frac{2\pi}{b-a}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)}\,dx=e^{+ik\pi\frac{b+a}{b-a}}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,e^{-ik\frac{2\pi}{b-a}x}\,dx$$

La serie di Fourier di g è data da

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\tau} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(e^{+ik\pi\frac{b+a}{b-a}} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a}x} dx \right) e^{ik\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{2\pi}{b-a}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a}x} dx \right) e^{ik\frac{2\pi}{b-a}x}$$

per cui la serie di Fourier di $f = f(x)$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è data da

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a}x} dx \right) e^{ik\frac{2\pi}{b-a}x}$$

o, equivalentemente, da:

$$\boxed{a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} k x\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{b-a} k x\right)}$$

dove $\boxed{a_0 = c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx}$; $\boxed{a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} k x\right) dx}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\boxed{b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{b-a} k x\right) dx}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

In particolare se $[a,b] = [0,T]$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} k x\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} k x\right), \text{ con}$$

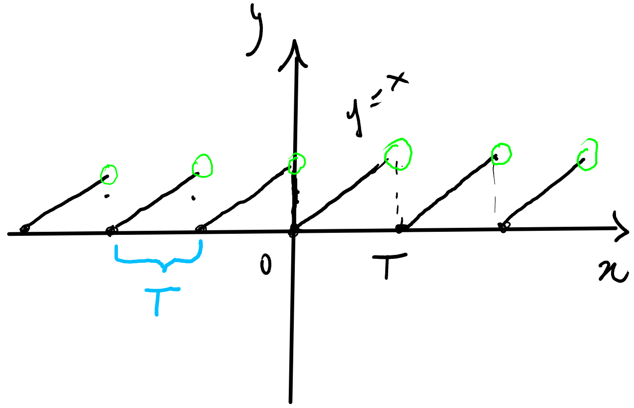
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx \ ; \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T} k x\right)dx \ ; \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T} k x\right)dx$$

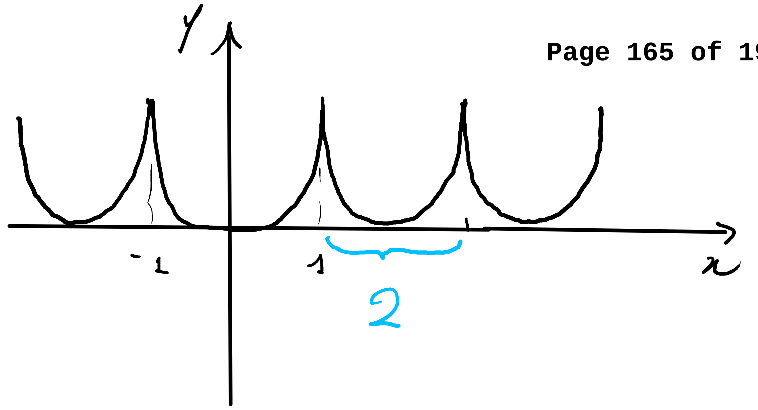
OSS.

Osserviamo che se la serie di Fourier di f converge puntualmente in $[a,b]$ allora dato che le funzioni che costituiscono i termini della serie sono periodici di periodo $b-a$ la somma si può estendere per periodicità su $\mathbb{R}$, con periodo $b-a$, tale estensione sarà ovviamente la somma della serie $\forall t \in \mathbb{R}$.

Per questo motivo quando si cerca di stabilire se una funzione $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è puntualmente la somma della sua serie di Fourier la si estende per periodicità su $\mathbb{R}$, con periodo $b-a$, ad una funzione $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (quindi $\tilde{f}(x + (b-a)) = \tilde{f}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

Chiariamo meglio con degli esempi cosa si intende per prolungamento periodico di periodo $b-a$ di una funzione definita in $[a,b]$.





In questa figura la funzione

$$f(x) = x \text{ se } x \in [0, T)$$

è stata prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$ in modo da ottenere una funzione periodica. Nei punti kT, $k \in \mathbb{Z}$ si è posto $\tilde{f}(kT) = f(0)$.

In quest'altra figura la funzione

$$f(x) = x^2 \text{ se } x \in [-1, 1]$$

è stata prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$ con periodo 2. Poiché $f(-1) = f(1)$ il prolungamento periodico di f è continuo anche nei punti $2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$

- Una osservazione da fare è che il prolungamento periodico è univocamente definito se e solo se $f(a) = f(b)$.
  Se $f(a) \neq f(b)$ in tutti i punti del tipo $b + k(b-a)$, $k \in \mathbb{Z}$ bisogna scegliere come definire $\tilde{f}$, non esiste una scelta canonica
  $\left(\tilde{f}(b + k(b-a)) = \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \right)$.

SERIE DI SOLI SENI E SERIE DI SOLI COSENI DI $f: [0,T] \to \mathbb{R}$

Sia $f: [0,T] \to \mathbb{R}$, assolutamente integrabile su $[0,T]$.

Possiamo estendere f ad una funzione definita su $[-T,T]$ che sia pari oppure dispari.

Ad esempio se $f(x) = x$, $x \in [0,T]$

l'estensione pari è data da $g(x) = |x|$, $x \in [-T,T]$, mentre l'estensione dispari è $h(x) = x$, $\forall x \in [-T,T]$.

In generale se $f: [0,T] \to \mathbb{R}$, la sua estensione pari a $[-T,T]$ è definita da

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0,T] \\ f(-x) & \text{se } x \in [-T,0) \end{cases}$$

mentre la sua estensione dispari è definita da

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } x \in (0,T] \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-T,0) \end{cases}$$

La serie di Fourier di g su $[-T,T]$ è una serie di soli coseni

$\left(\text{dato che } b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} g(x) \sin\left(\frac{\pi}{T} k x\right) dx = 0, \forall k, \text{ poiché l'integranda è dispari} \right)$

che si chiama <u>SERIE DEI COSENI (DI FOURIER)</u> DI $f : [0,T] \to \mathbb{R}$

I suoi coefficienti sono quindi

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(x)\, dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} g(x) \cos\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx$$

mentre la serie di Fourier di h su $[-T,T]$ è una serie di soli seni

$\left(\text{dato che } a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} h(x) \cos\left(\frac{\pi}{T} k x\right) dx = 0, \forall k, \text{ poiché l'integranda è dispari} \right)$

che si chiama <u>SERIE DEI SENI (DI FOURIER)</u> DI $f : [0,T] \to \mathbb{R}$.

I suoi coefficienti sono quindi

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} h(x) \sin\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx$$

Enunciamo ora un primo risultato importante riguardante la convergenza della serie di Fourier di f a f

Teorema

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e si supponga che il quadrato di f $(f(t))^2$ sia assolutamente integrabile su $[a,b]$. Allora la successione delle somme parziali della serie di Fourier di f

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$ converge a f in media quadratica

cioè

$$\int_a^b |S_n(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Il seguente, altrettanto importante risultato, riguarda invece la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier:

Teor

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ assolutamente integrabile e consideriamo il prolungamento periodico $\tilde{f}$ di f a $\mathbb{R}$ di periodo $b-a$

1) la serie di Fourier di f converge a $\tilde{f}(t)$ in ogni punto $t \in \mathbb{R}$ in cui $\tilde{f}$ è continua ed esistono finite le derivate destra e sinistra;
(quindi in particolare in ogni punto in cui $\tilde{f}$ è derivabile).

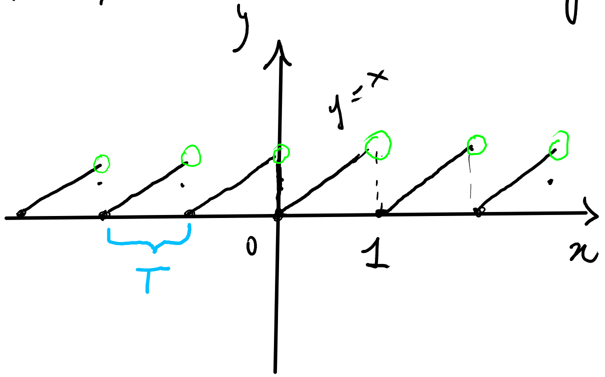
2) Se $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$ allora la convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$. In realtà la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso in cui $\tilde{f}$ è continua e derivabile con derivata continua tranne che in un numero finito di punti dove esistono finite le derivate destra e sinistra

3) In ogni punto $\bar{t} \in \mathbb{R}$ in cui $\tilde{f}$ ha discontinuità di I specie ed in cui esistono $\lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{f}(\bar{t}+h) - \tilde{f}(\bar{t}_+)}{h} \in \mathbb{R}$, $\lim_{h \to 0^-} \frac{\tilde{f}(\bar{t}+h) - \tilde{f}(\bar{t}_-)}{h} \in \mathbb{R}$

la serie di Fourier di $\tilde{f}$ converge a $\frac{\tilde{f}(\bar{t}_+) + \tilde{f}(\bar{t}_-)}{2}$

dove $\tilde{f}(\bar{t}_+) := \lim_{t \to \bar{t}^+} \tilde{f}(t)$ e $\tilde{f}(\bar{t}_-) := \lim_{t \to \bar{t}^-} \tilde{f}(t)$

Ad esempio, riconsideriamo la funzione f in figura ($f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$)



In tutti i punti $t = m$, $m \in \mathbb{Z}$ tale funzione ha discontinuità di I specie. $\tilde{f}(m_-) = \lim_{t \to m^-} \tilde{f}(t) = 1$ e $\tilde{f}(m_+) = \lim_{t \to m^+} \tilde{f}(t) = 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m_+)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{m+h-m - 0}{h} = 1$$

dato che nell'intervallo $[m, m+1)$, $f(x) = x - m$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m_-)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{m+h-(m-1) - 1}{h} = 1$$

dato che nell'intervallo $[m-1, m)$, $f(x) = x - (m-1)$

Quindi le condizioni nella 3) del Teorema precedente sono soddisfatte e la serie di Fourier di f converge a $\frac{1}{2}$ in ogni punto $t = m$, $m \in \mathbb{Z}$.
La convergenza a $\tilde{f}$ è uniforme in ogni intervallo chiuso $[c,d] \subset (m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$ in quanto su tali intervalli $\tilde{f}$ è di classe C^1.

Enunciamo infine una relazione tra l'integrale di $f^2(t)$ e la serie dei coefficienti di Fourier al quadrato.

Identità di Parseval

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che f^2 sia integrabile su $[a,b]$. Allora le serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^2$ sono convergenti (a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di f su $[a,b]$) e si ha

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2}$$

← identità di Parseval

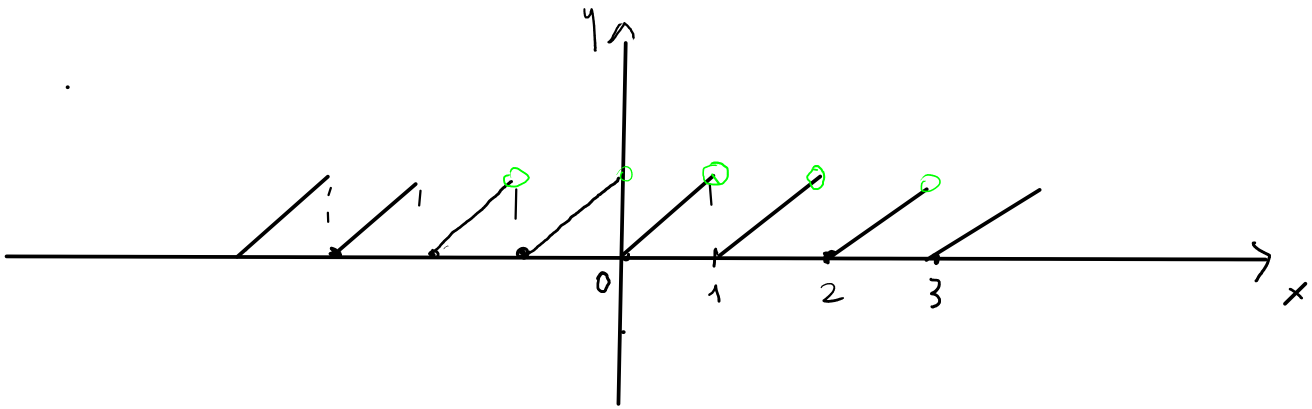
Si tenga presente che su alcuni testi l'identità di Parseval viene scritta così

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 .$$

La differenza con la formula evidenziata qui sopra sta nel primo termine della serie degli a_k che è dato da $\frac{a_0^2}{4}$.

Questa differenza è dovuta al fatto che in tali testi a_0 è definito come $\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ e non come $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ (ovviamente con tale definizione il primo termine nella serie di Fourier diviene $\frac{a_0}{2}$)

• Scrivere la serie di Fourier della funzione $f:[0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ e studiarne la convergenza puntuale e uniforme



Serie di Fourier di f in $[0,1)$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{1}kt\right)dt = 2\int_0^1 t\cos(2\pi k t)\,dt =$$

$$= 2\left[t\,\frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k}\,dt$$

$$= \quad 0 \quad + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\cos(2\pi k t)}{2k\pi}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{2k\pi} - \frac{1}{2k\pi}\right] = 0$$

$$b_k = 2\int_0^1 t \sin(2k\pi t)\,dt = 2\left[-t\,\frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\,dt$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2k\pi}\right) + 2\left[\frac{\sin(2k\pi t)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{k\pi}$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \sin(2\pi k t)$ Tale serie converge puntualmente a $\tilde{f}$,

dove $\tilde{f}$ è il prolungamento a $\mathbb{R}$ periodico di periodo 1 di f,

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\}$ e converge a $\frac{1}{2}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$ dato che

se $t \in \mathbb{Z}$, $\sin(2\pi k t) = 0$, $\forall k$, e quindi la serie si riduce al solo termine $a_0 = \frac{1}{2}$

D'all'accanto:

$\tilde{f}$ ha discontinuità di I specie in ogni punto $t \in \mathbb{Z}$:

Infatti $\tilde{f}(t) = t - m$, se $t \in [m, m+1]$, $m \in \mathbb{Z}$ e dunque

$$\tilde{f}(m^+) \quad \lim_{t \to m^+} \tilde{f}(t) = \lim_{t \to m^+} (t - m) = 0$$

e $\displaystyle\lim_{t \to m^-} \tilde{f}(t) = \lim_{t \to m^-} t - (m-1) = 1 = \tilde{f}(m^-)$;

e inoltre i seguenti limiti esistono e sono finiti

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m^+)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{m+h-m-0}{h} = 1$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m^-)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{m+h-(m-1)-1}{h} = 1$$

Infine la serie converge a $\tilde{f}$ uniformemente in ogni intervallo chiuso $[c,d] \subset (m, m+1)$, atteso che $\tilde{f}$ è di classe C^1 su tali intervalli.

Ricaviamo ora la serie dei seni e quella dei coseni di f.

L'estensione dispari di f all'intervallo $(-1,1)$ è ovviamente data da $h(x)=x$.
Estendiamo h per periodicità a $\mathbb{R}$ con periodo 2 (conveniamo di assegnare in -1 il valore -1). Denotiamo con $\tilde{h}$ tale estensione.

Poiché $\tilde{h}$ è dispari $a_k=0$, $\forall k$; $b_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x \sin\left(\frac{2\pi}{2}kx\right)dx = 2\int_0^1 x\sin(k\pi x)\,dx$

$$= -\left[x\,\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx = -2\left(\frac{(-1)^k}{k\pi} - 0\right) + 2\left[\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_0^1$$

$$= -2\,\frac{(-1)^k}{k\pi} + 0$$

Quindi la serie dei seni di Fourier è data da $-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\pi}\sin(k\pi x)$

Tale serie dunque converge a $\tilde{h}$ in $\mathbb{R}\setminus\{2m+1\}_{m\in\mathbb{Z}}$, uniformemente in ogni intervallo chiuso $[c,d]\subset(2m+1,2m+3)$, $m\in\mathbb{Z}$. Nei punti $x=2m+1$, $m\in\mathbb{Z}$ converge a 0.

Per l'identità di Parseval deve essere $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-2\frac{(-1)^k}{k\pi}\right)^2$, quindi deduciamo che

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \quad \text{cioè} \quad \boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}}$$

Estendiamo ora f a $[-1,1]$ come funzione pari. Tale estensione è quindi la funzione $l(x) = |x|$ $x \in [-1,1]$. Ricaviamo la serie di Fourier di l.

Questa volta $b_k = 0$ perché l è pari

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_k = 2\int_0^1 x \cos\left(\frac{2\pi}{2} k x\right) dx =$$

$$= 2\left[x\frac{\sin(\pi k x)}{\pi k}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sin(\pi k x)}{\pi k}\,dx = 0 + 2\left.\frac{\cos(\pi k x)}{(\pi k)^2}\right|_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{(-1)^k}{(\pi k)^2} - \frac{1}{(\pi k)^2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\frac{2}{(\pi k)^2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi la serie dei coseni di f è data da

$$\frac{1}{2} - 2\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{[\pi(2h+1)]^2} \cos(\pi(2h+1)x).$$

Dato che $\tilde{l}$, estensione periodica di l a $\mathbb{R}$ con periodo 2 è continua e derivabile ovunque tranne che nei punti $x = m \in \mathbb{Z}$, dove comunque esistono finite derivata destra e derivata sinistra, la convergenza di tale serie a $\tilde{l}$, estensione periodica di l a $\mathbb{R}$ con periodo 2, è uniforme su $\mathbb{R}$.

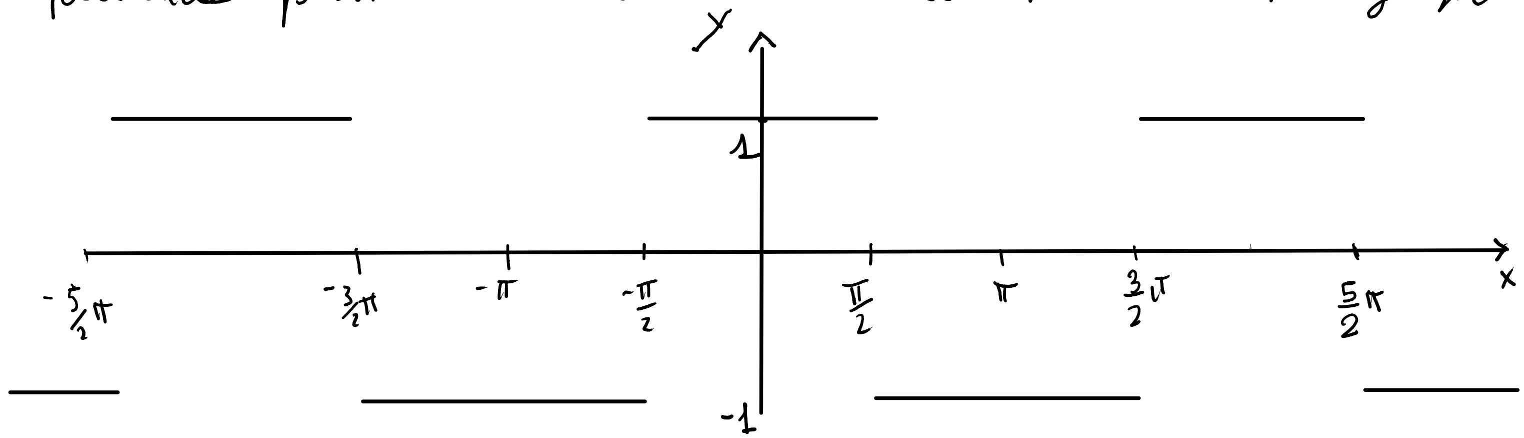
- Scrivere la serie di Fourier della funzione f pari, 2π-periodica definita in $[0,\pi]$ da

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & \text{se } t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Discutere la convergenza puntuale e uniforme.

Dimostrare la formula $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.

(Si noti che f è definita solo su $[0,\pi]$, ma poiché abbiamo l'informazione che è pari e 2π periodica possiamo "ricostruirla" su $\mathbb{R}$. Il suo grafico è:



Dato che f è pari, $b_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t)\,dt = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(kt)\,dt - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k} + \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k} = \frac{4}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1,\ h\in\mathbb{N} \ \text{(cioè se } k \text{ è dispari)} \end{cases}$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2h+1}\cdot(-1)^h, \quad \text{con } k = 2h+1,\ h\in\mathbb{N}$$

Quindi la serie di Fourier di f è data da $\displaystyle \frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{(2h+1)}\cos((2h+1)t)$

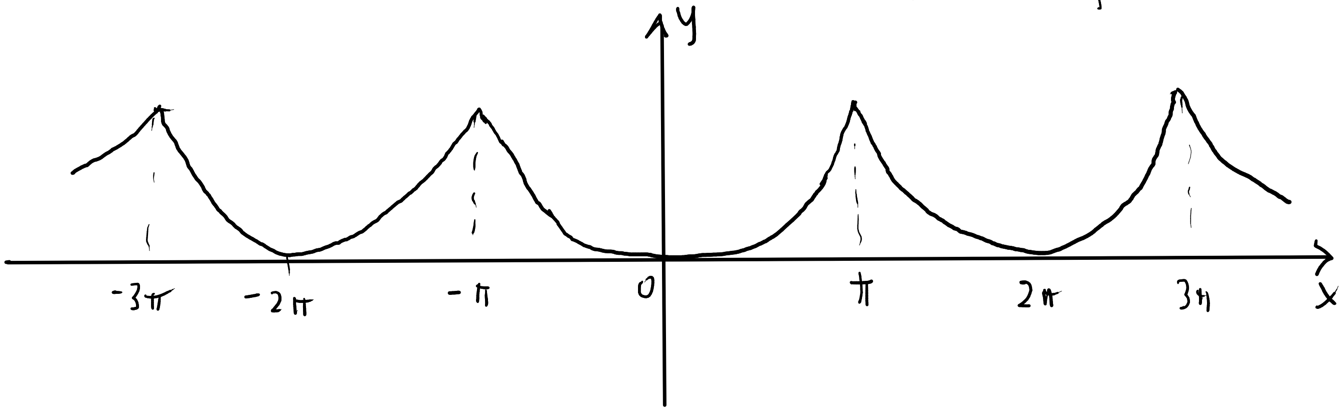
Essa converge a $f(t)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, converge a 0 $\forall\, t\in\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$;

converge uniformemente a f in ogni intervallo chiuso non contenente alcun punto del tipo $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Per $t=0$ la serie diventa $\displaystyle \frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1} = f(0) = 1$ da cui $\displaystyle \sum_{h=0}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1} = \frac{\pi}{4}$.

- Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x)=x^4$, $x\in[-\pi,\pi]$ estesa per periodicità a $\mathbb{R}$, con periodo 2π,
Stabilire se la convergenza a $\tilde{f}$ (sua estensione periodica) è uniforme su $\mathbb{R}$.
Dimostrare, infine, che: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

L'estensione periodica di f, che denotiamo con $\tilde{f}$ ha questo andamento



Tale funzione è pari quindi i coefficienti b_k sono nulli $\forall k\geq 1, k\in\mathbb{N}$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t^4\,dt=\frac{1}{\pi}\frac{1}{5}\pi^5=\frac{\pi^4}{5}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^4\cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left. t^4 \frac{\sin(kt)}{k} \right|_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} 4t^3 \sin(kt)\, dt =$$

$$= \frac{2}{k\pi} \left. \frac{4t^3 \cos(kt)}{k} \right|_0^{\pi} - \frac{8}{k^2\pi} \int_0^{\pi} 3t^2 \cos(kt)\, dt =$$

$$= \frac{2}{k^2\pi} 4\pi^3 (-1)^k - \frac{8}{k^3\pi} \left. 3t^2 \sin(kt) \right|_0^{\pi} + \frac{24}{k^3\pi} \int_0^{\pi} 2t \sin(kt)\, dt$$

$$= \frac{8\pi^2}{k^2} (-1)^k - \frac{48}{k^3\pi} \left. \frac{t \cos(kt)}{k} \right|_0^{\pi} + \frac{48}{k^4\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt)\, d$$

$$= \frac{8\pi^2}{k^2} (-1)^k - \frac{48}{k^4\pi} \pi (-1)^k + \frac{48}{k^4\pi} \left. \frac{\sin(kt)}{k} \right|_0^{\pi} = (-1)^k \left[\frac{8\pi^2}{k^2} - \frac{48}{k^4} \right]$$

La serie di Fourier di f è quindi:

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{8\pi^2}{k^2} - \frac{48}{k^4} \right) \cos(kt) \quad (\square)$$

e converge uniformemente (e quindi puntualmente) su $\mathbb{R}$ dato che la sua estensione periodica su $\mathbb{R}$ di periodo 2π è continua su $\mathbb{R}$ ed è derivabile con derivata continua su $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2m\pi\}_{m \in \mathbb{Z}}$ e nei punti dove non è derivabile, cioè $\{\pi + 2m\pi\}_{m \in \mathbb{Z}}$, esistono finite la derivata destra e la derivata sinistra.

Valutando $(\square)$ in $t = \pi$, poiché $\cos(kt) = (-1)^k$, otteniamo

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8\pi^2}{k^2} - \sum_{k=1}^{-\infty} \frac{48}{k^4} = f(\pi) = \pi^4$$

da cui

$$48 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{5} - \pi^4 + 8\pi^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} =$$

$$= -\frac{4}{5}\pi^4 + 8\pi^2 \frac{\pi^2}{6} = \frac{8}{15}\pi^4$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{48} \cdot \frac{8}{15} \pi^4 = \frac{\pi^4}{90}$$

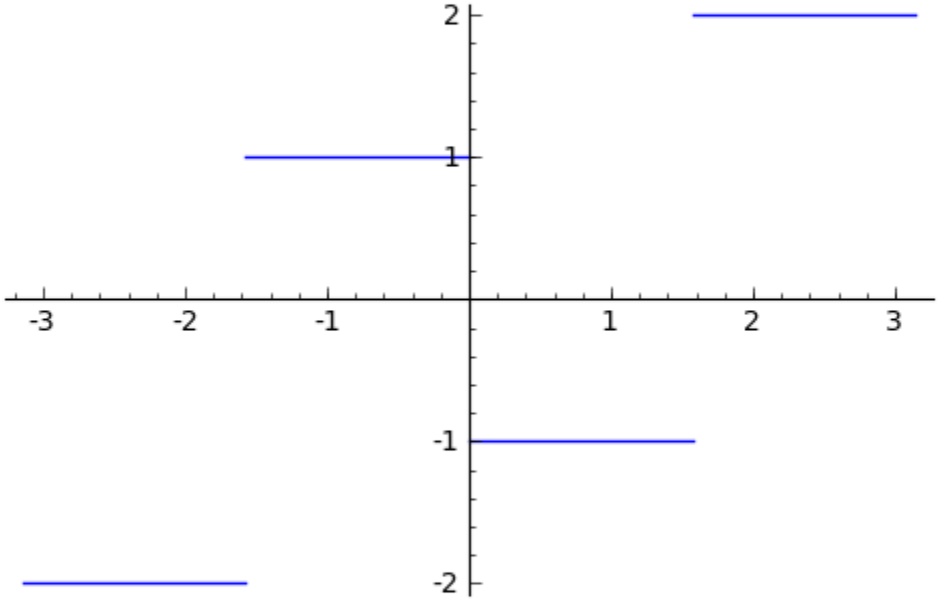
serie di Fourier

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \in (-\pi, -\pi/2) \\ 1 & \text{se } x \in (-\pi/2, 0) \\ -1 & \text{se } x \in (0, \pi/2) \\ 2 & \text{se } x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

estesa per periodicità su $\mathbb{R}$

```
f1(x) =  -1
f2(x) =  2
f3(x) = 1
f4(x) = -2
f = Piecewise([[(-pi,-pi/2),f4],[(-pi/2,0),f3],[(0,pi/2),f1],[(pi/2,pi),f2]])
g = Piecewise([[(-2*pi,-(3/2)*pi),f1],[(-(3/2)*pi,-pi),f2],[(-pi,-pi/2),f4],[(-pi/2,0),f3],
[(0,pi/2),f1],[(pi/2,pi),f2],[(pi,(3/2)*pi),f4],[((3/2)*pi,2*pi),f3]])
a = plot(f)
show(a, aspect_ratio = 1, figsize = 5)
```



Possiamo calcolare i coefficienti di Fourier di f. Ad esempio il coefficiente di indice 6 della serie dei coseni è 0 (così come tutti quanti gli altri, dato che f è dispari) mentre il coefficiente di indice 6 della serie dei seni è uguale a $\frac{2}{7\pi}$

```
f.fourier_series_cosine_coefficient(7, pi)
```

0

```
f.fourier_series_sine_coefficient(7, pi)
```

$\frac{2}{7\pi}$

Nelle stringhe qui sopra, come nelle successive, il numero 'pi' tra parantesi indica che f è stata prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$ con periodo 2π e che se ne sta considerando lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Possiamo anche ottenere una qualunque somma parziale della serie di Fourier. Ad esempio la somma parziale di indice 7 è uguale a:

```
f.fourier_series_partial_sum(8,pi)
```

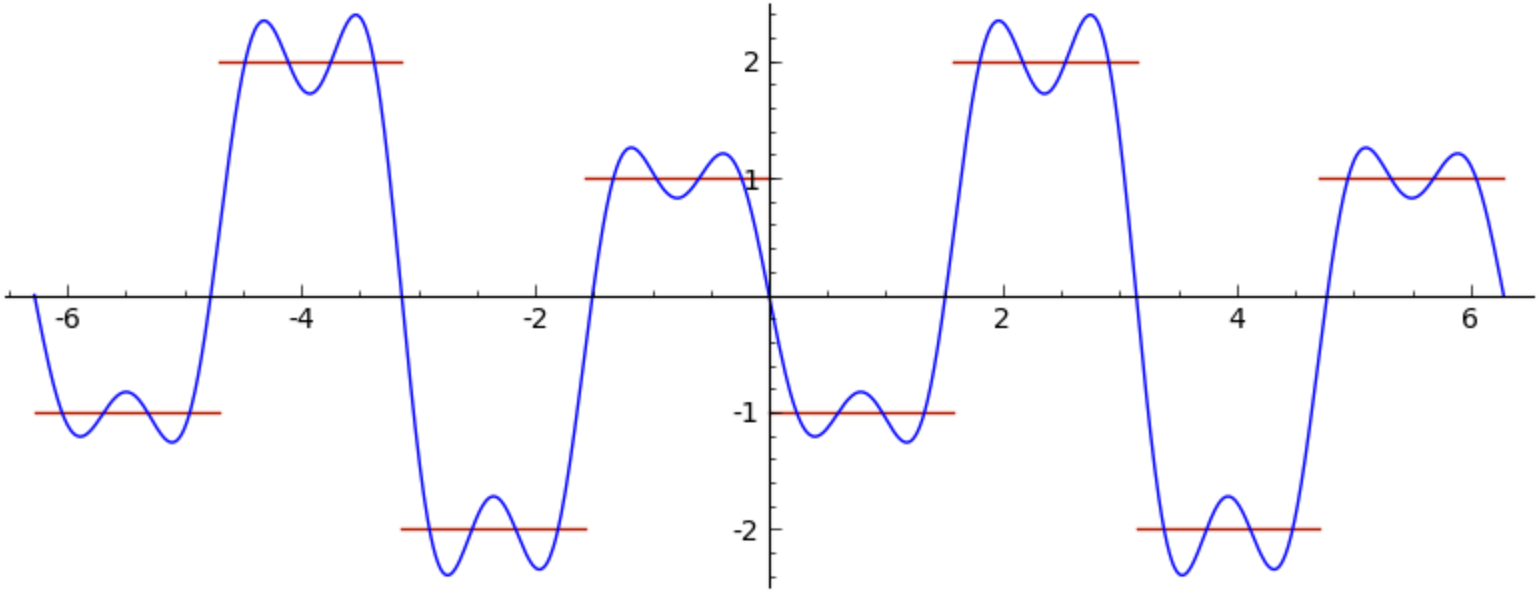
$$-\frac{6\ \sin(2\,x)}{\pi}+\frac{2\ \sin(3\,x)}{3\,\pi}+\frac{2\ \sin(5\,x)}{5\,\pi}-\frac{2\ \sin(6\,x)}{\pi}+\frac{2\ \sin(7\,x)}{7\,\pi}+\frac{2\ \sin(x)}{\pi}$$

Disegnamo infine la funzione f (in rosso) e la somma parziale di indice 7 e poi di indice 14 della sua serie di Fourier (in blù); ad esempio nell'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$ abbiamo

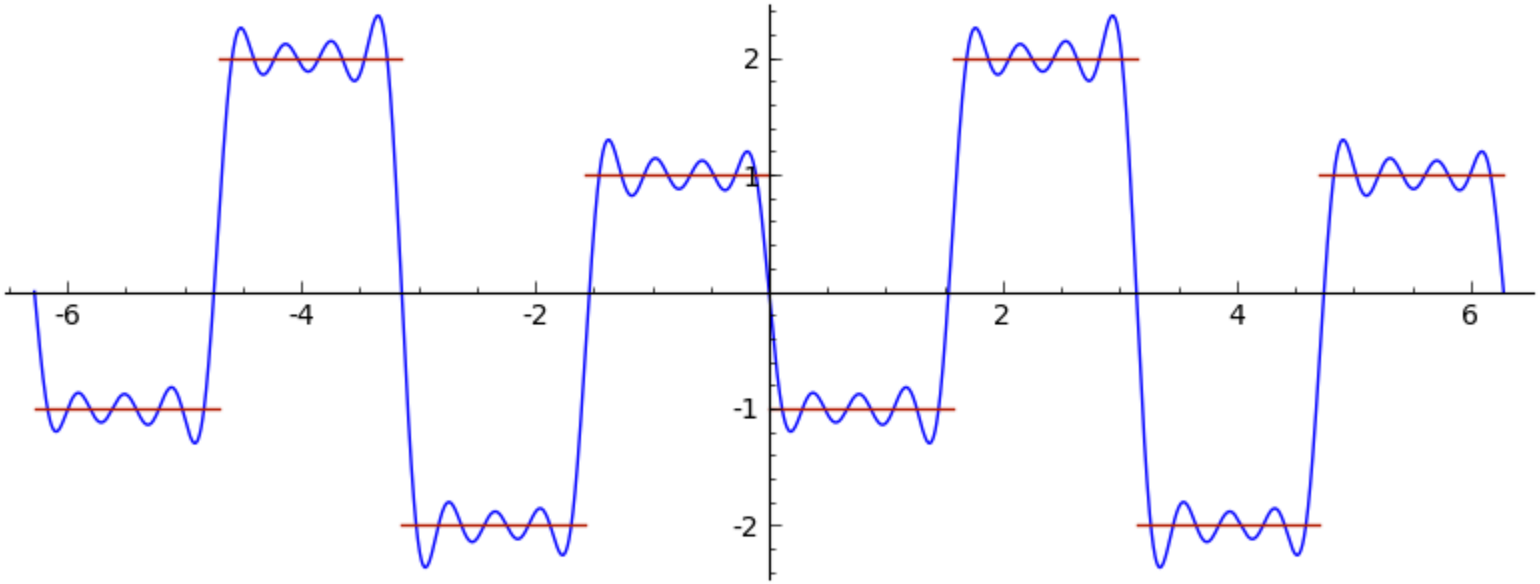
```
b = g.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0), plot_points=40)
```

```
c= f.plot_fourier_series_partial_sum(8,pi, -2*pi,2*pi)
```

```
show(b + c, aspect_ratio=1)
```




```
d = f.plot_fourier_series_partial_sum(15,pi,-2*pi,2*pi)
show(d + b, aspect_ratio=1)
```

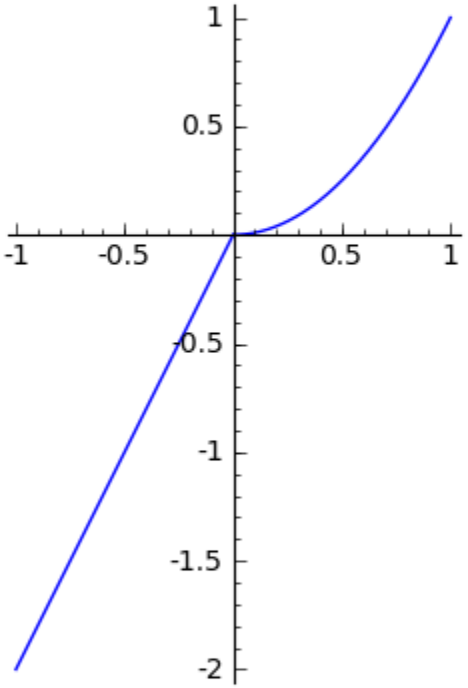


Vediamo un altro esempio. Consideriamo la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in (-1,0) \\ x^2 & \text{se } x \in [0,1) \end{cases}$$

estesa per periodicità su $\mathbb{R}$ con periodo 2, scriviamo la somma parziale di indice 5 e infine confrontiamo i grafici di h (in rosso) e della somma parziale di indice 5 della sua serie di Fourier (in blù) nell'intervallo $[-1,1]$.

```
h1(x)= x^2
h2(x)= 2*x
h = Piecewise([[(-1,0),h2],[(0,1),h1]])
a = plot(h)
show(a, aspect_ratio=1, figsize = 5)
```

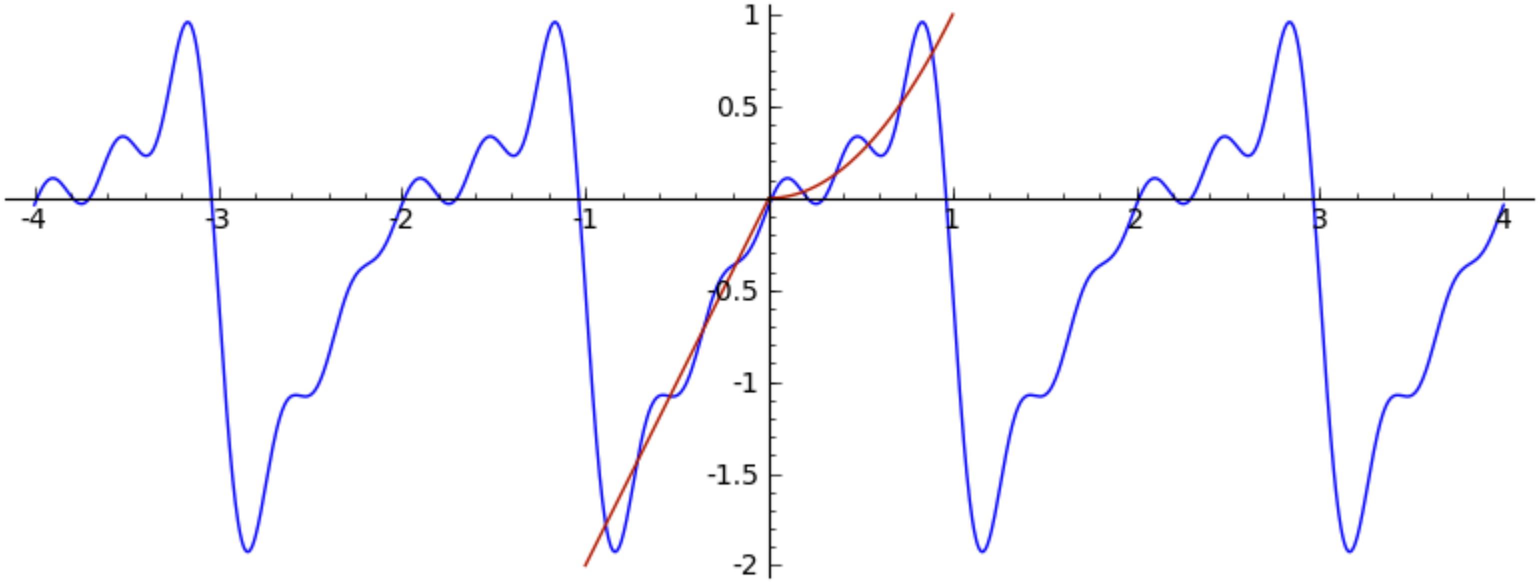



```
h.fourier_series_partial_sum(6,1)
```

$$\frac{3\ \sin(\pi x)}{\pi} - \frac{3\ \sin(2\ \pi x)}{2\ \pi} + \frac{\sin(3\ \pi x)}{\pi} - \frac{3\ \sin(4\ \pi x)}{4\ \pi} + \frac{3\ \sin(5\ \pi x)}{5\ \pi} + \frac{2\ \cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{\cos(2\ \pi x)}{2\ \pi^2} + \frac{2\ \cos(3\ \pi x)}{9\ \pi^2} + \frac{\cos(4\ \pi x)}{8\ \pi^2} + \frac{2\ \cos(5\ \pi x)}{25\ \pi^2} - \frac{4\ \sin(\pi x)}{\pi^3} -$$

```
b = h.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0), plot_points=40)
c = h.plot_fourier_series_partial_sum(6,1,-4,4)
```

```
show(c + b, aspect_ratio=1)
```



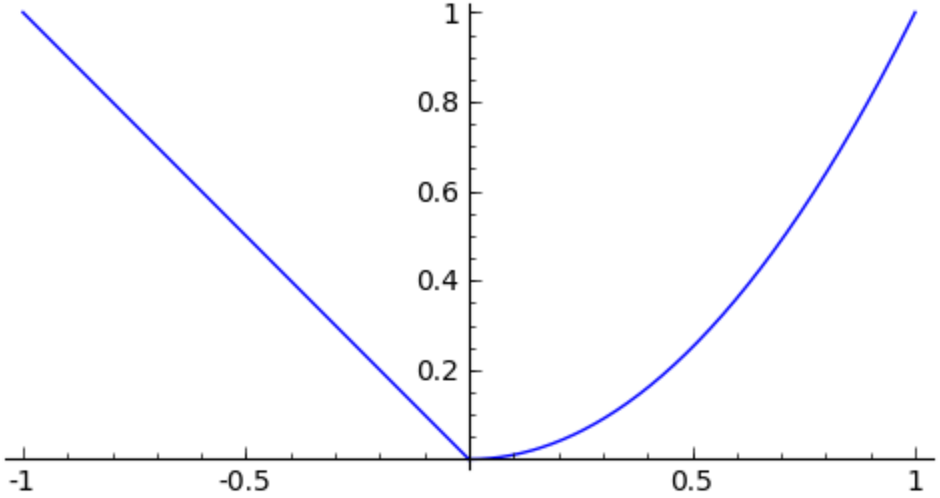
Infine un esempio di una funzione il cui prolungamento periodico su $\mathbb{R}$ è una funzione continua in ogni punto. Consideriamo la funzione

$$l(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in (-1, 0) \\ x^2 & \text{se } x \in [0, 1) \end{cases}$$

estesa per periodicità su $\mathbb{R}$ con periodo 2 e confrontiamo i grafici di l (in rosso) e della somma parziale di indice 4 della sua serie di Fourier nell'intervallo $[-1, 1]$.

```
l1(x)= x^2
l2(x)= -x
l = Piecewise([[(-1,0),l2],[(0,1),l1]])
a = plot(l)
```

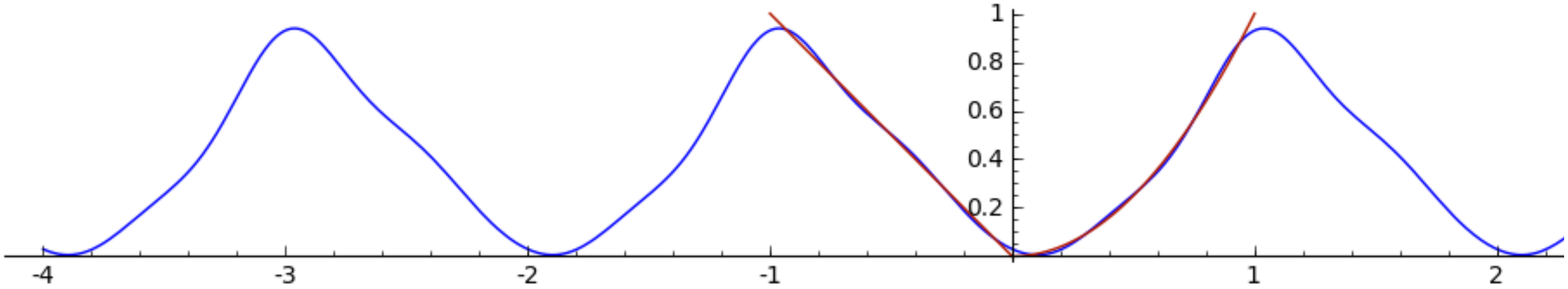
```
show(a, aspect_ratio=1,figsize = 5)
```




```
b = l.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0), plot_points=40)
```

```
c = l.plot_fourier_series_partial_sum(5,1,-4,4)
```

```
show(c + b, aspect_ratio=1, figsize = 12)
```



Come si vede, grazie alla maggiore regolarità dell'estensione periodica di l rispetto ai due casi precedenti, la somma parziale di indice 4 già approssima l in modo pressoché perfetto.