Appello Analisi Matematica II modulo

giovedì 3 novembre 2016 11:30

1) Determinare il carattere della serie

A) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{artg}(\sqrt{n-1}) \cdot \left(1 - \cos^2 \frac{1}{n}\right)$ (*)

B) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\sqrt{n-1}) \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ (**)

A) $0 \le \operatorname{artg} \sqrt{n-1} \left(1 - \cos^2 \frac{1}{n}\right) \le \frac{\pi}{2}\left(1 - \cos^2 \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{1}{n} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}$

quindi (*) converge per il teorema di confronto in quanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$

B) $0 \le |\sin(\sqrt{n-1})| \left|1 - \cos \frac{1}{n}\right| \le 1\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$

quindi (**) converge per lo stesso motivo dell'esercizio A)

2) Determinare i punti stazionari della funzione

A) $f(x,y) = (x-y)^2 \frac{x}{y}$ e studiarne la natura

B) $f(x,y) = (y-x)^2 \frac{y}{x}$ "

A) $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

$f_x(x,y) = 2(x-y)\frac{x}{y} + \frac{(x-y)^2}{y}$

$f_y(x,y) = -2(x-y)\frac{x}{y} - \frac{(x-y)^2 x}{y^2}$

ottenuto sommando membro a membro (1) e (2)

$$\begin{cases} 2(x-y)\frac{x}{y} + \frac{(x-y)^2}{y} = 0 & (1) \\ -2(x-y)\frac{x}{y} - x\frac{(x-y)^2}{y^2} = 0 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{y}\left(1 - \frac{x}{y}\right) = 0 \\ 2(x-y)\frac{x}{y} + x\frac{(x-y)^2}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x-y)^2(y-x) = 0 \\ x(x-y)(2y + x - y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ 4x^2(-2x) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

in cui la funzione non è definita

Quindi tutti i punti della retta $y = x$ (tranne $O(0,0)$) sono critici

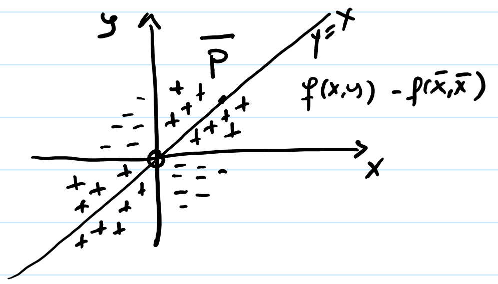
Il punto $(0,0)$ non è accettabile come soluzione in quanto f non è
è definito in $(0,0)$

Studiamo la natura dei punti della retta $r: y = x$

Sia $\bar{P} \in r \setminus \{0\}$, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{x})$, $\bar{x} \neq 0$; $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$

quindi $f(x,y) - f(\bar{x}, \bar{x}) = f(x,y) = (x-y)^2 \frac{x}{y} \geq 0$

se e solo se $\bar{x} \geq 0 \wedge \bar{y} > 0$ o $\bar{x} \leq 0 \wedge \bar{y} < 0$



Dunque ogni punto di $r \setminus \{0\}$ è di minimo locale non forte

B) È analoga ad A)

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

A) $$\begin{cases} y'' + y' + y = x^2 - 1 \\ y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \end{cases}$$

B) $$\begin{cases} y'' + y' + y = xe^x \\ y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \end{cases}$$

A) l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di similarità

$\tilde{y} = \tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$,

$\tilde{y}'(x) = 2ax + b$,

$\tilde{y}''(x) = 2a$.

Dunque deve essere $2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2 - 1$

cioè, uguagliando i coefficienti dei due polinomi al I e al II membro

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ 2a + b + c = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 + 2 - 2 = -1 \end{cases}$$

Dunque $\tilde{y}(x) = x^2 - 2x - 1$

L'integrale generale dell'equazione $y'' + y' + y = x^2 - 1$ è quindi

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x^2 - 2x - 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Determiniamo le costanti c_1 e c_2 in modo che siano soddisfatte le condizioni iniziali $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0$

Per $x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ otteniamo imponendo che $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0$ otteniamo

$$c_2 e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\pi - 1 = 0 \qquad (1)$$

$$y'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) +$$

$$+ e^{-\frac{1}{2}x}\left(-c_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + 2x - 2$$

$$y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} e^{-\pi/2\sqrt{3}} \cdot c_2 - e^{-\pi/2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} c_1 + 2\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2 = 0 \qquad (2)$$

Da (1) otteniamo $c_2 = \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{3}\right) e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$

Da (1) otteniamo $c_2 = \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{3}\right) e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$

e sostituendo in (2)

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} c_1 + 2\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2 = 0$$

da cui $c_1 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$

B) È analoga ad A)

4) Calcolare

A) $$\iint_A \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx\,dy$$

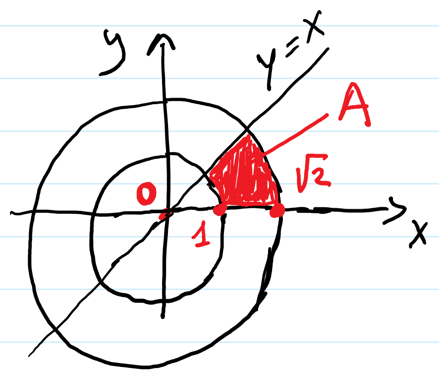
dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 2,\ y < x,\ y > 0\}$

B) $$\int_A \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) dx\,dy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 2,\ y > x,\ x > 0\}$

A)

A:



In coordinate polari l'integrale diviene

$$\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\rho^2 \sin^2\theta}{\rho^2 \cos^2\theta}\, \rho\right) d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\, \rho \;\; d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \rho\, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}(2-1) \cdot \operatorname{tg}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

B) È analoga ad A)