

- 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{x^2}{y} dx dy,$$

dove $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 2x, 1 < xy < 2\}$.

7 pts.

- 2) Determinare i punti estremali della funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 e^{-x^2 - y^2}.$$

Suggerimento: usare le proprietà di simmetria della funzione per dedurre la natura di tre punti critici da quella di un quarto punto critico...

8 pts.

- 3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma implicita dell'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - 1)x.$$

Cercare di ricavare anche l'integrale generale in forma esplicita.

8 pts.

- 4) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, in un punto $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ secondo una direzione $v \in \mathbb{R}^n$.

Enunciare poi il teorema di rappresentazione per le derivate direzionali e usarlo per calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0)$, con $f(x, y) = x^2 y + x$ e $v = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

7 pts.