1) - a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$z = \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^4$$

$$z = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}\right)^4$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\pi} = -1$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}\right)^4 = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$$

quindi $z = -i$

1)-b) Stabilire che il seguente insieme A è illimitato superiormente e limitato inferiormente

$$A = \left\{ (n-1)^{\frac{1}{3}} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \operatorname{artg} k : k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \right\}$$

Osserviamo che l'insieme $B = \left\{ (n-1)^{\frac{1}{3}} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme dei valori assunti dalla successione $\left\{(n-1)^{\frac{1}{3}}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Poiché $\lim_n (n-1)^{\frac{1}{3}} = +\infty$ B è illimitato superiormente

Inoltre tale successione è strettamente crescente e quindi B ha minimo uguale al valore assunto per $n=0$ dalla successione cioè -1

Analogamente $C = \{ \operatorname{artg} k : k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \}$ coincide con l'insieme dei valori assunti dalla successione $\{\operatorname{artg}(-n)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$

Poiché $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{artg}(-n) \leq \operatorname{artg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

concludiamo che C è un insieme limitato

Dunque $A = B \cup C$ è illimitato superiormente (in quanto B lo è) e limitato inferiormente dato che $\forall a \in A$ $a > -\frac{\pi}{2}$ visto che

$a \geq -1 > -\frac{\pi}{2}$ se $a \in B$ e $a > -\frac{\pi}{2}$ se $a \in C$

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{x \log(1-x^2)}{2x-1}$

Determinare inoltre i suoi eventuali asintoti

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{x\log(1-x^2)}{2x-1}$

Determinare inoltre i suoi eventuali asintoti.
Dire, motivando la risposta se f è derivabile in 0 e in caso positivo determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto $(0, f(0))$.

$$\operatorname{dom} f: \quad \begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ 2x - 1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi $\operatorname{dom} f = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Osserviamo che f è continua nel suo dominio in quanto rapporto di funzioni continue. Gli eventuali asintoti sono quindi da cercare nei punti $x = -1, 1, \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{-1 \cdot (-\infty)}{-3} = -\infty \; ; \qquad x = -1 \text{ è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1 \cdot (-\infty)}{1} = -\infty \; ; \qquad x = 1 \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x)$: si presenta nella forma $\dfrac{\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{4}\right)}{0}$

per $x \to \frac{1}{2}^-$ il denominatore tende a 0 assumendo valori negativi,
poiché $\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{4}\right) < 0$, $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ $\quad x = \frac{1}{2}$ è asintoto verticale a sx
Analogamente $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ " dx

f è derivabile in 0 in quanto quoziente di funzioni derivabili su $\operatorname{dom} f$

$$f'(x) = \frac{\left(\log(1-x^2) + \frac{x}{1-x^2}(-2x)\right)(2x-1) - x\log(1-x^2)\,2}{(2x-1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(0+0)(-1) - 0}{1} = 0$$

L'equazione della retta tangente al grafico di f in $(0, f(0)) = (0,0)$ è dunque $y = 0$

3) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quindi $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt = \cos t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

4) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue

Si veda, ad esempio, pag. 108 del manuale Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori 2002