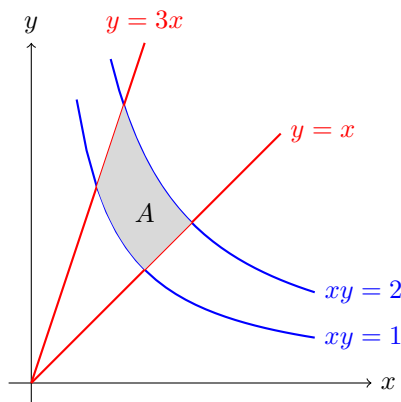


Possibile svolgimento della prova del 3 febbraio 2026 – Modulo B

1) Il dominio A è definito dalle disuguaglianze:

$$1 \leq xy \leq 2, \quad 1 \leq \frac{y}{x} \leq 3 \quad (\text{essendo } y = x \Rightarrow \frac{y}{x} = 1, \quad y = 3x \Rightarrow \frac{y}{x} = 3).$$



Effettuiamo il cambio di variabili:

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}.$$

Il nuovo dominio di integrazione nel piano (u, v) è il rettangolo $D' = [1, 2] \times [1, 3]$. Per calcolare lo Jacobiano, calcoliamo prima la matrice della trasformazione inversa $\Phi^{-1}(x, y) = (u, v)$:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{pmatrix} = \frac{y}{x} - \left(-\frac{y}{x}\right) = \frac{2y}{x} = 2v.$$

Lo Jacobiano della trasformazione diretta è il reciproco e il suo modulo è quindi:

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{|2v|} = \frac{1}{2v} \quad (\text{poiché } v > 0).$$

L'integranda $\frac{x}{y}$ corrisponde a $\frac{1}{v}$. L'integrale diventa:

$$I = \iint_{D'} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{v^2} dv \int_1^2 du.$$

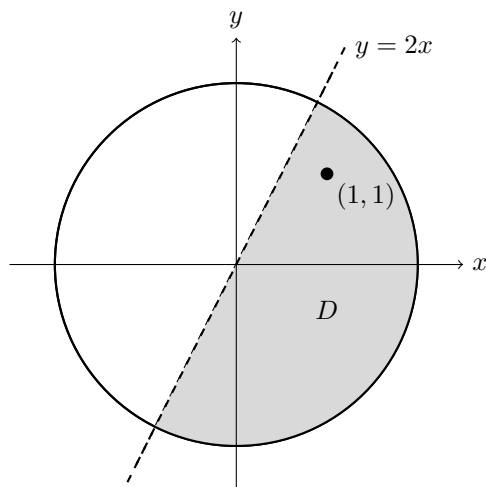
Calcoliamo:

$$\int_1^2 du = 1; \quad \int_1^3 v^{-2} dv = \left[-\frac{1}{v} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Quindi $I = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

2) Il dominio è definito dal sistema:

$$\begin{cases} 2x - y > 0 \Rightarrow y < 2x \\ 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$



L'insieme D è **limitato** (contenuto nel disco), **connesso per archi** (intersezione di convessi), ma non è né aperto (i punti della circonferenza sono di frontiera e appartengono a D quindi non sono interni) né chiuso (D non contiene la sua frontiera: mancano in D i punti di frontiera sulla retta $y = 2x$).

Differenziabilità: f è differenziabile nei punti interni ($y < 2x, x^2 + y^2 < 4$) in quanto somma di funzioni composte da funzioni C^∞ (quindi f soddisfa nei punti interni al suo dominio le ipotesi del teorema del differenziale).

Piano tangente in $(1, 1)$:

$$f(1, 1) = \ln(1) + \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

$$f_x = \frac{2}{2x - y} - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \implies f_x(1, 1) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$f_y = \frac{-1}{2x - y} - \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \implies f_y(1, 1) = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi la sua equazione è: $z = \sqrt{2} + (2 - \frac{1}{\sqrt{2}})(x - 1) + (-1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(y - 1)$.

Derivata direzionale:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1.$$

3) Equazione: $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$.

1. **Omogenea associata:** $y'' + y = 0 \implies y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

2. **Variazione costanti:** $y_p(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t$. Sistema:

$$\begin{cases} c_1' \cos t + c_2' \sin t = 0 \\ -c_1' \sin t + c_2' \cos t = 1/\cos t \end{cases}$$

Wronskiano: $W(t) = 1$.

$$c_1' = -\sin t / \cos t \implies c_1(t) = \ln |\cos t|.$$

$$c_2' = \cos t (1/\cos t) = 1 \implies c_2(t) = t.$$

3. **Integrale generale:** $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \cos t \ln |\cos t| + t \sin t$.

4. **Cauchy** ($y(0) = 0, y'(0) = 0$):

$$0 = y(0) = c_1.$$

$$y'(t) = c_2 \cos t - \sin t \ln |\cos t| + -\sin t + \sin t + t \cos t.$$

$$0 = y'(0) = c_2.$$

Dunque la soluzione del problema di Cauchy è: $y(t) = \cos t \ln |\cos t| + t \sin t$.

4) Per la definizione di serie e di somma di una serie e per il teorema sul carattere di una serie geometrica si vedano ad esempio gli appunti della lezione 29.