1) - a)

Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} (2-e)^n \qquad (*)$$

Tenendo presente che $2 < e < 3$ abbiamo che $-1 < 2-e < 0$ quindi (*) converge essendo una serie geometrica di ragione $(2-e)$ compresa tra -1 e 1

$$\sum_{n=4}^{+\infty} (2-e)^n = (2-e)^4 \sum_{n=4}^{+\infty} (2-e)^{n-4} = (2-e)^4 \sum_{k=0}^{+\infty} (2-e)^k = (2-e)^4 \frac{1}{1-(2-e)} = \frac{(2-e)^4}{e-1}$$

1) - b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log(n^2-1)}{n}$$

Trattasi di una serie a segni alterni dato che $\frac{\log(n^2-1)}{n} > 0 \quad \forall n \geq 2$

Possiamo applicare il criterio di Leibniz

$\frac{\log(n^2-1)}{n} \to 0$ per la gerarchia degli infiniti

Dimostriamo che la successione $\left(\frac{\log(n^2-1)}{n}\right)_{n \geq 2}$ è decrescente studiando la funzione $f(x) = \frac{\log(x^2-1)}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1} x - \log(x^2-1)}{x^2}$$

$f'(x) < 0 \iff \frac{2x^2}{x^2-1} - \log(x^2-1) < 0$

Osserviamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} - \log(x^2-1) = 2 - \infty = -\infty$ quindi $f'(x) < 0$ definitivamente per $x \to +\infty$. Di conseguenza $f(x)$ è def. strett. decres. per $x \to +\infty$

e dunque $\left(\frac{\log(n^2-1)}{n}\right)_{n \geq 2}$ è definitivamente strett. decrescente. Dunque per il criterio di Leibniz la serie è convergente.

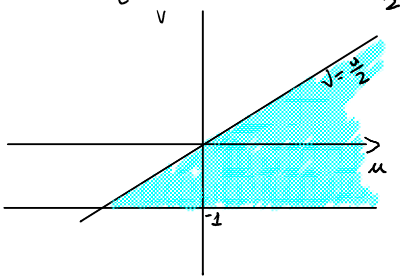
2) Si consideri il campo $X : A \xrightarrow{} \mathbb{R}^2$, $A \subset \mathbb{R}^2$ $\quad X(u,v) = (u^2 - \log(v+1), \log(u-2v))$

Determinare il dominio A di X e rappresentarlo sul piano (u,v)

Dimostrare che X è differenziabile su A. Calcolare la matrice Jacobiana di X

Si consideri poi la funzione $\varphi(x,y) = xy - x^2$. Stabilire che $\varphi \circ X$ è differenziabile su A. Calcolare $\nabla(\varphi \circ X)(1,0)$

$\mathrm{dom}\, X$: $\begin{cases} v+1>0 \\ u-2v>0 \end{cases}$ $\begin{cases} v>-1 \\ v<\frac{u}{2} \end{cases}$



Il dominio di X è la regione colorata in figura

X è differenziabile su A (che è un insieme aperto) poiché le sue componenti sono differenziabili. $J_X(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -\frac{1}{v+1} \\ \frac{1}{u-2v} & \frac{-2}{u-2v} \end{pmatrix}$

$\varphi \circ X$ è differenziabile in quanto composta da funzioni differenziabili.
Per il teorema sul differenziale delle funzioni composte sappiamo che

$\nabla \varphi\circ X\,(u,v) = \nabla\varphi(X(u,v)) \cdot J_X(u,v)$

quindi $\nabla \varphi\circ X\,(1,0) = \nabla\varphi(\,X(1,0)) \cdot J_X(1,0)$

$X(1,0) = (1,0)$

$\nabla\varphi(x,y) = (y-2x\,,\,x)$ quindi $\nabla\varphi(X(1,0)) = \nabla\varphi(1,0) = (-2,1)$

$J_X(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e dunque

$\nabla(\varphi\circ X)(1,0) = (-2,1)\cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = (-4+1\,,\,2-2) = (-3,0)$

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma esplicita dell'equazione

$y' = y\log y \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$ $(*)$

L'equazione assegnata è a variabili separabili. L'unica soluzione singolare è $y=1$ ($g(y) = y\log y$ si annulla per $y=1$ (non è definita in $y=0$!))
Possiamo ora supporre che $y(x)\neq 1$, $\forall x$ dove $y=y(x)$ è definita $(x\neq 1)$

$\frac{y'}{y\log y} = \frac{1}{(1-x)^2} \iff \int \frac{dy}{y\log y} = \int\frac{1}{(1-x)^2}dx \iff \log|\log y| = \frac{1}{1-x} + c$

da cui $|\log y| = e^{\frac{1}{1-x}}\, e^c \iff \log y = \pm k\, e^{\frac{1}{1-x}}$, $k\in\mathbb{R}$

$\iff y = e^{\pm k\, e^{1/1-x}}$, $k\in\mathbb{R}$

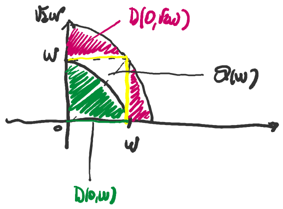
L'integrale generale di $(*)$ in forma esplicita è $y(x) = e^{\pm k e^{\frac{1}{1-x}}}$, $\forall k\in\mathbb{R}$

4) Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\lim_{w\to+\infty}\int_{0}^{w} e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_{[0,w]\times[0,w]=:Q(w)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{Q(w)} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dxdy = \int_0^w e^{-x^2}dx\cdot\int_0^w e^{-y^2}dy = \left(\int_0^w e^{-x^2}dx\right)^2.$$ Quindi:

$$2\lim_{w\to+\infty}\int_0^w e^{-x^2}dx = 2\left(\lim_{w\to+\infty}\int_{Q(w)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$



$$e^{-x^2-y^2} = e^{-\rho^2}$$

$$\int_{D(0,w)} e^{-x^2-y^2}dxdy \le \int_{Q(w)} e^{-x^2-y^2}dxdy \le \int_{D(0,\sqrt{2}w)} e^{-x^2-y^2}dxdy$$ dato che l'integranda è positiva!

$$\int_{D(0,w)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{D(0,w)} e^{-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^w \rho e^{-\rho^2}d\rho\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta = -\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^w\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-w^2}+1\right)\xrightarrow{w\to+\infty}\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{D(0,\sqrt{2}w)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\sqrt{2}w}\rho e^{-\rho^2}d\rho\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^{\sqrt{2}w}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-2w^2}+1\right)\xrightarrow{w\to+\infty}\frac{\pi}{4}$$

Quindi

$$\underbrace{\int_{D(0,w)} e^{-x^2-y^2}dxdy}_{\downarrow\, w\to+\infty\quad \frac{\pi}{4}} \le \int_{Q(w)} e^{-x^2-y^2}dxdy \le \underbrace{\int_{D(0,\sqrt{2}w)} e^{-x^2-y^2}dxdy}_{\downarrow\, w\to+\infty\quad \frac{\pi}{4}}$$

Quindi anche $\lim_{w\to+\infty}\int_{Q(w)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4}$ e pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\cdot\lim_{w\to+\infty}\int_0^w e^{-x^2}dx = \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}} = \sqrt{\pi}$$