1) Stabilire che il seguente integrale improprio diverge positivamente

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$$

La funzione integranda è continua su $(0,+\infty)$ ed ha un'asintoto verticale a destra per $x \to 0^+$

Possiamo quindi considerare separatamente

$$\int_0^a \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx \quad e \quad \int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$$

dove a è un qualunque numero in $(0,+\infty)$

Studiamo $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$

Poiché $\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

e $\sqrt{\frac{x+2}{x}} \longrightarrow 1$ per $x \to +\infty$

$\sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

e quindi $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx = +\infty$

Dato che $\sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) > 0$ su $(0,+\infty)$

$\displaystyle\int_0^a \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \neq -\infty$ e dunque $\displaystyle\int_0^a \dots + \int_a^{+\infty} \dots$ non è una forma indeterminata; d'altro canto per $x \to 0^+$

$\sqrt{\frac{x+2}{x}} \sim \sqrt{\frac{2}{x}}$ e $\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{x^2}{4}$ quindi

$\sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{2}}$ per $x \to 0^+$, di conseguenza

la funzione integranda ha limite finito $(=0)$ per $x \to 0^+$ ed è quindi integrabile su $[0,a]$

Pertanto

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx = +\infty$$

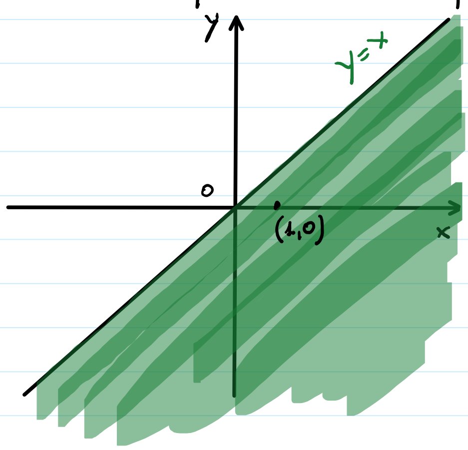
2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x-y)$$

Rappresentarlo graficamente sul piano. Dimostrare poi che f è differenziabile sul suo dominio. Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ al variare del versore $v = (v_1, v_2)$.

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y>0\}$$

Dunque il dominio di f è aperto ed è dato da i punti (x,y) per cui $y<x$: è quindi il semipiano aperto colorato in figura



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\log(x-y) + \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\log(x-y) - \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

Entrambe le derivate parziali sono continue su $\operatorname{dom} f$ e quindi per il teorema del differenziale f è differenziabile su $\operatorname{dom} f$.

Il punto $(1,0) \in \operatorname{dom} f$.

Poiché f è ivi differenziabile $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v =$

$$= 1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = v_1 - v_2$$

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = -e^{-3x}\log x$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ che ha un'unica soluzione

$\lambda = -3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione

omogenea associata è $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie (dato che il termine noto $g(x) = -e^{-3x}\log x$ non rientra nella classe di funzioni per cui è possibile applicare il metodo di similarità)

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^{-3x} + c_2'(x)\, x e^{-3x} = 0 \\ c_1'(x)\,(-3e^{-3x}) - c_2'(x)\,(e^{-3x} - 3x e^{-3x}) = -e^{-3x}\log x \end{cases}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^{-3x} \\ -e^{-3x}\log x & e^{-3x} - 3x e^{-3x} \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & -e^{-3x}\log x \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & x e^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3x e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-6x} - 3x e^{-6x} + 3x e^{-6x} = e^{-6x}$$

$$c_1'(x) = \frac{x e^{-6x}\log x}{e^{-6x}} = x \log x$$

$$c_2'(x) = \frac{-e^{-6x}\log x}{e^{-6x}} = -\log x$$

$$c_1(x) = \int x \log x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2$$

$$c_2(x) = -\int \log x \, dx = -x\log x + x$$

L'integrale generale è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}\log x - \frac{1}{4}x^2 e^{-3x} - x^2 e^{-3x}\log x + x^2 e^{-3x}$$

$$y(x) = c_1 e + c_2 x e + \frac{1}{2} x^2 e \log x - \frac{1}{4} x^2 e - x^2 e \log x + x^2 e$$

$$= c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{3}{4} x^2 e^{-3x} - \frac{1}{2} x^2 e^{-3x} \log x$$

4) Dare le definizione di dominio normale rispetto ad uno dei due assi cartesiani. Richiamare poi le formule di riduzione per l'integrale di una funzione continua su un dominio normale D.

Dimostrare infine che nel caso in cui D sia il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e f è continua su D si ha

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Si vedano, ad esempio, le lezioni 22-23, per le definizioni.

L'ultima parte dell'esercizio è un'immediata conseguenza delle formule di riduzione tenendo presente che T è normale rispetto ad entrambi gli assi cartesiani:

$$T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le 1-x \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 1 \ \wedge \ 0 \le x \le 1-y \}$$