1) -a) Determinare la forma esponenziale del numero complesso

$$z = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{i}\, e^{i\frac{\pi}{3} - e}$$

$$z = -i\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3} - e}$$
$$= \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3} - e} = \left(2 - 2i\right) e^{i\frac{\pi}{3} - e}$$
$$= 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}\, e^{i\frac{\pi}{3}}\, e^{-e} = \frac{2\sqrt{2}}{e^{e}}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$$

1) -b) Determinare sup e inf della successione

$$\left\{ 2^{-n^2} + 1 + \frac{1}{n^2} \right\}_{n \geq 1}$$

la successione assegnata è somma delle successioni

$\left\{2^{-n^2}\right\}_{n\geq 1}$ e $\left\{1 + \frac{1}{n^2}\right\}_{n \geq 1}$ entrambe strettamente decrescente

quindi è anch'essa strettamente decrescente e dunque

$$\sup_{n\geq 1} \left\{ 2^{-n^2} + 1 + \frac{1}{n^2} \right\} = \max_{n \geq 1} \left\{ 2^{-n^2} + 1 + \frac{1}{n^2} \right\} = \frac{1}{2} + 2$$

$$\text{e} \quad \inf_{n\geq 1} \left\{ 2^{-n^2} + 1 + \frac{1}{n^2} \right\} = \lim_{n} \left(2^{-n^2} + 1 + \frac{1}{n^2} \right) = 0 + 1 + 0 = 1$$

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log\left(2^x - 1\right)$$

Determinarne gli eventuali asintoti. Studiarne infine monotonia e convessità

dom f : $2^x - 1 > 0 \iff x > 0$ quindi dom f $= (0, +\infty)$

Cerchiamo eventuali asintoti: poiché f è composta da funzioni continue f è continua su $(0,+\infty)$ e quindi solo in $x = 0$ potrebbe esistere un asintoto verticale (ovviamente solo a dx)

Poiché $\lim_{x\to 0^+} 2^x - 1 = 0^+$, abbiamo che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Poiché $\lim_{x\to 0^+} 2^x - 1 = 0^+$, abbiamo che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

e quindi la retta $x=0$ è asintoto verticale a dx.

Cerchiamo un eventuale asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, non c'è asintoto orizzontale

Asintoto obliquo: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2^x-1)}{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(2^x\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log 2}{x} + \frac{\log\left(1-\frac{1}{2^x}\right)}{x} = \log 2 + 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \log 2 \cdot x = \lim_{x\to+\infty} \log(2^x-1) - \log 2^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{2^x-1}{2^x}\right) = \log 1 = 0$$

Quindi la retta $y = \log 2 \cdot x$ è asintoto obliquo.

f è strettamente crescente in quanto composta da funzioni strett. crescenti.

Calcoliamo derivata prima e seconda di f al fine di studiarne la convessità.

$$f'(x) = \frac{1}{2^x-1}\, 2^x \log 2$$

$$f''(x) = \frac{2^x \log^2 2\,(2^x-1) - 2^x \log 2\; 2^x \log 2}{(2^x-1)^2} = -\frac{2^x \log^2 2}{(2^x-1)^2}$$

ovviamente $f''(x) < 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$ e quindi f è strett. concava

3) Calcolare $\int_0^3 \max\{0, x^e - 1\}\, dx$

Osserviamo che $x^e - 1 > 0 \iff x > 1$ da cui deduciamo che

$$\max\{0, x^e - 1\} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \\ x^e - 1 & \text{se } x \in (1, 3] \end{cases}$$

Quindi $\displaystyle\int_0^3 \max\{0, x^e - 1\}\, dx = \int_0^1 \max\{0, x^e - 1\}\, dx + \int_1^3 \max\{0, x^e - 1\}\, dx$

$$= 0 + \int_1^3 (x^e - 1)\, dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1}\Big|_1^3 - 2$$

$$= \frac{3^{e+1}}{e+1} - \frac{1}{e+1} - 2$$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Bolzano per le funzioni continue

Si veda ad esempio la lezione 17