Analisi Matematica - corsi B - C - modulo B

venerdì 21 aprile 2017 11:00

1) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono. Motivare la risposta

(a) $$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{artg} x}{2x^{5/2}+x}\,dx$$

(b) $$\int_2^3 \frac{dx}{(4-x)\log(x-1)}$$

(a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{artg} x}{2x^{5/2}+x}$ è continua su $[1,+\infty)$ inoltre

$$0 \le \frac{\operatorname{artg} x}{2x^{5/2}+x} \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2x^{5/2}+x} \le \frac{\pi}{4x^{5/2}} \quad \forall x \ge 1$$

Dato che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}}\,dx \in \mathbb{R}$ per il criterio del confronto anche l'integrale assegnato converge

(b) $g(x) = \dfrac{1}{\log(x-1)+(3-x)}$ è continua e non-negativa su $(2,3]$

poiché $\log(x-1) = \log\big(1+(x-2)\big) = x-2 + o(x-2)$, abbiamo:

$$\frac{1}{(4-x)\log(x-1)} = \frac{1}{(4-x)\big(x-2+o(x-2)\big)}$$

$$= \frac{1}{(x-2)(4-x)\left(1+\frac{o(x-2)}{x-2}\right)} \sim \frac{1}{2(x-2)} \quad \text{per } x\to 2$$

Dato che $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-2}\,dx = +\infty$ anche l'integrale assegnato diverge positivamente

2) Determinare l'integrale di un'equazione differenziale lineare del I ordine: $y' = a(x)y + b(x)$ con $a, b \in C^0([c,d])$

Si vedano ad esempio gli appunti della lezione 10

3) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = (x-y+1)(x+y-1)x$ e studiarne la natura

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. $\quad f_x(x,y) = (x+y-1)x + (x-y+1)x + (x-y+1)(x+y-1)$

$= 2x^2 + x^2 - (y-1)^2 = 3x^2 - (y-1)^2$

$f_y(x,y) = -x(x+y-1) + (x-y+1)x =$

$= x(-2y+2)$

$$\begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ 3x^2 - (y-1)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\vee$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 3x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi 1 punto critico $P_1(0,1)$

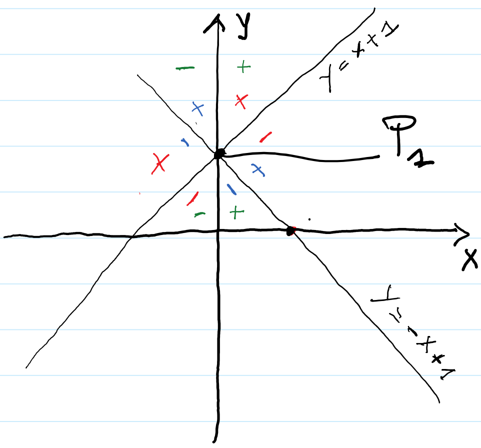
Notiamo che $f(P_1) = 0$, quindi per studiarne

la sua natura possiamo studiare il segno di

$f(x,y) - f(P_1) = f(x,y)$;

tale segno dipende dal segno delle funzioni $x-y+1$, $x+y-1$, x:

(1) (2) (3)



Come si vede non esiste alcun intorno di P_1 su cui f ha segno definito quindi P_1 è di sella

4) Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{1}{y-1}\cos(xy - \pi)\, dx\, dy$$

dove A è l'insieme : $A = \{(x,y) : 2 \le y \le 3 \ \wedge \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2y}\}$

$\cos(xy - \pi) = -\cos(xy)$ quindi l'integrale assegnato è uguale a $-\int_A \frac{\cos(xy)}{y-1}\,dx\,dy$.

A è un dominio normale rispetto all'asse delle y per cui:

$$-\int_A \frac{\cos(xy)}{y-1}dx\,dy = -\int_2^3 \frac{1}{y-1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2y}} \cos(xy)\,dx\right)dy = -\int_2^3 \frac{1}{y-1}\frac{\sin(xy)}{y}\Big|_0^{\frac{\pi}{2y}} dy$$

$$= -\int_2^3 \frac{1}{y(y-1)}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = -\int_2^3 \frac{1}{y(y-1)}dy =$$

$$-\int_2^3\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)dy = -\log(y-1)\Big|_2^3 + \log y\Big|_2^3 =$$

$$= -\log 2 + \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{4}$$