1) - a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$z = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{(1-i)^6}$$

$$1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1-i)^6 = 8\, e^{-i\frac{3}{2}\pi} = 8i$$

Quindi $z = 2e^{-i\pi/6} \cdot \frac{1}{8i} = -\frac{1}{4} i\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$= -\frac{1}{4} i \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4} i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} i$$

1) - b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2^{x^2-2}} - \sqrt{x}$$

dom $f = [0, +\infty)$

$f = g \circ h + l$, con $g(u) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $h(x) = x^2 - 2$, $l(x) = -\sqrt{x}$

Quindi f è strett. decrescente poiché somma di $f_1 = g \circ h$, con g strett. decrescente h strett. crescente sull'intervallo $[0, +\infty)$ e di l che è anch'essa strett. decrescente.

$f \in C^0([0, +\infty))$

e quindi $\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 4]$

2) Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = x\, e^{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Studiare la monotonia di f. Dire se f ha punti estremali. Studiare infine la convessità di f e abbozzarne il grafico.

dom f : $x \neq 0$ quindi dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f \in C^0(\text{dom} f)$ quindi l'unico punto in cui cercare l'eventuale asintoto verticale è $x = 0$. Poiché $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ abbiamo che $\lim_{x \to 0} e^{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$ e quindi

$\lim_{x \to 0} x \, e^{1 - 1/x^2} = 0 \cdot 0 = 0$; $x = 0$ non è asintoto vert. né a dx né a sx

Vediamo se f ha asintoti orizzontali

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \cdot e = \pm\infty$; non ci sono asintoti orizzontali.

Vediamo se f ha asintoti obliqui:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1 - \frac{1}{x^2}} = e$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ex = \lim_{x \to \pm\infty} x \left(e^{1 - \frac{1}{x^2}} - e \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} e x \left(e^{-1/x^2} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} -\frac{e}{x} \, \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 1 = 0$$

Quindi la retta $y = ex$ è asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

$$f'(x) = e^{1-1/x^2} + x\, e^{1-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} =$$

$$= e^{1-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$$; quindi $f'(x) > 0$ sia per $x > 0$ che per $x < 0$ e dunque f è strettamente crescente sia su $(0,+\infty)$ che su $(-\infty, 0)$, quindi f non ha punti estremali.

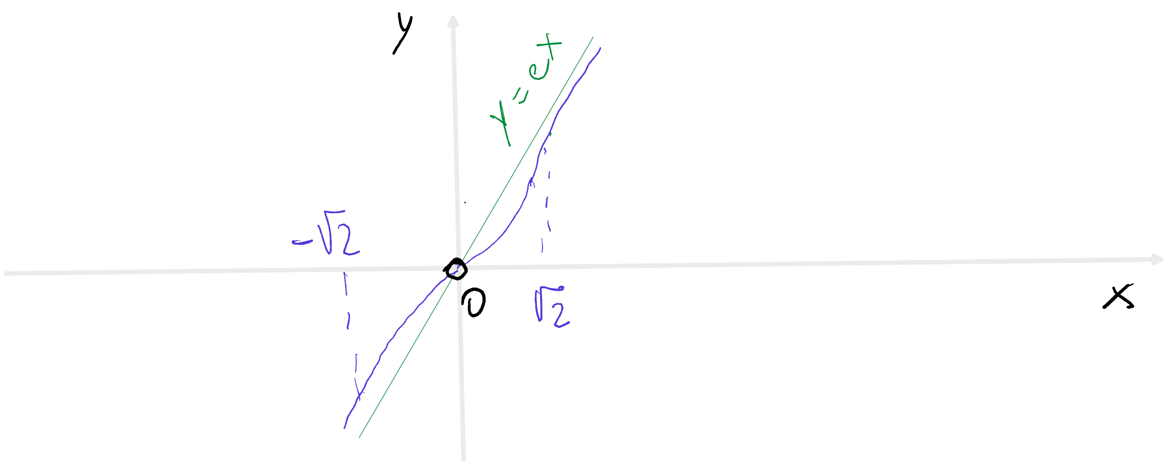
$$f''(x) = e^{1-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}\left(1+\frac{2}{x^2}\right) - e^{1-\frac{1}{x^2}}\frac{4}{x^3}$$

$$= \frac{2}{x^3} e^{1-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^2}-2\right) = \frac{2}{x^2} e^{1-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2-x^2}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x}$$

$$f''(x) > 0 \iff \frac{2-x^2}{x} > 0$$

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$2-x^2$	$- - -$		$+$		$+$		$- - -$
x	$- - -$		$- - -$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$		$-$

Quindi f è strett. convessa su $(-\infty, -\sqrt{2})$ e su $(0, \sqrt{2})$



3) Calcolare $\displaystyle\int_2^3 \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+1}\,dx$

Posto $e^x = t$, quindi $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}dt$, otteniamo

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{t}{t^2-2t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{(t-1)^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{t-1}\Big|_{e^2}^{e^3} = -\frac{1}{e^3-1}+\frac{1}{e^2-1}$$

4) Enunciare e dimostrare la formula di Taylor di ordine n con il resto di Peano.

Scrivere poi la formula di Maclaurin di ordine 4 per la funzione $f(x) = 2\cos(x^2)$.

Si veda, ad esempio, pag. 217 e pag. 221 del manuale consigliato.

Poiché $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, per $x \to 0$

$$2\cos(x^2) = 2\left(1-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right) = 2 - x^4 + o(x^4),\ \text{per } x\to 0 .$$