1) Usando la trasformata di Laplace determinare il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = H(t-3), & t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(H(t-3))(s) \cdot \frac{1}{P(s)} \quad \text{dove } P(s) = s^2+s+1$$

quindi $y(t) = (y_0(t) * H(t-3))(t)$ dove y_0 è la soluzione fondamentale dell'equazione $y''+y'+y=0$, $t \geq 0$:

$$y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right)(t)$$

$$\frac{1}{P(s)} = \frac{1}{(s-s_1)(s-\bar{s}_1)} \quad \text{dove } s_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-\bar{s}_1)} = \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{\bar{a}_1}{s-\bar{s}_1}$$

$$a_1 = \lim_{s \to s_1} s - s_1 \cdot \frac{1}{P(s)} = \lim_{s \to s_1} \frac{1}{s-\bar{s}_1} = \frac{1}{\sqrt{3} i} = -\frac{1}{\sqrt{3}} i$$

quindi
$$y_0(t) = -\frac{1}{\sqrt{3}} i e_+^{s_1 t} + \frac{1}{\sqrt{3}} i e_+^{\bar{s}_1 t} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} i e_+^{-\frac{1}{2}t} \cdot \left(-e^{\frac{\sqrt{3}}{2} i t} + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} i t}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} i e_+^{-\frac{1}{2}t} \cdot 2i \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e_+^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

Quindi $y(t)$ è il segnale che per $t > 0$ è dato da
$$y(t) = \int_0^t H(\tau - 3) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau .$$

Dunque
$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 3 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau \end{cases}$$

Calcoliamo
$$\int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau \qquad (*)$$

$$(*) = e^{\frac{1}{2}\tau} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) \Big|_3^t - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}\tau} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) \Big|_3^t$$
$$- \frac{1}{3} \int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau$$

quindi
$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)(*) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right)$$

Pertanto
$$y(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} H(t-3)$$
$$= \left(1 - e^{-\frac{t-3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t-3}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right)\right) H(t-3)$$

$$= \left(1 - e^{\frac{}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right)\right) H(t-3)$$

1) Pre AA 2014-2015

Si consideri la successione

$$f_n(t) = t^{n-1} - \frac{t^n}{n} \quad , \quad n \geq 2$$

Se ne studi convergenza puntuale e uniforme nell'intervallo $[0,1]$

$f_n(1) = 1 - \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 2$ quindi $f_n(1) \to 1$

se $\bar{t} \in [0,1)$ $\quad f_n(\bar{t}) = \bar{t}^{\,n-1} - \frac{\bar{t}^{\,n}}{n} \longrightarrow 0$

Dunque f_n converge puntualmente alla funzione $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t=1 \\ 0 & \text{se } t \in [0,1) \end{cases}$ su $[0,1]$. Poiché f non è continua su $[0,1]$ mentre f_n sono ivi continue $\forall n \geq 2$, f_n non converge uniformemente a f su $[0,1]$

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2+1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{(-1)(-1)^n + n+1}{(n+1)^2+1} \; \frac{n^2+1}{(-1)^n + n} = 1$$

quindi $\rho = 1$

L'intervallo di convergenza della serie è $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Per $x = -\frac{1}{2}$ la serie diventa

$$(*) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2+1} (-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n n}{n^2+1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}}_{1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}}_{2}$$

1: $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ quindi 1 converge

2: $\frac{n}{n^2+1} \xrightarrow{n} 0$ e $\frac{n}{n^2+1}$ è decrescente per $n \geq 2$ quindi 2 converge per il criterio di Leibniz

Pertanto $(*)$ converge

Per $x = \frac{3}{2}$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$;

poiché $\frac{(-1)^n + n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ essa diverge

In conclusione, la serie assegnata converge puntualmente su $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e uniformemente su ogni intervallo del tipo

$\left[-\frac{1}{2}, a\right]$ con $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3) Com'è definita la funzione seno in campo complesso?
Qual è la sua relazione con la stessa funzione in campo reale?

Si veda pag 83 degli appunti

4) Determinare le singolarità al finito e la loro natura per la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-\cos z)}$$

f ha singolarità nel punto 0 e in z tale $1 - \cos z = 0$

Poiché $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ deve essere $e^{iz} + e^{-iz} = 2$

cioè $e^{2iz} + 1 - 2e^{iz} = 0$ posto $e^{iz} = w$

questa equazione diviene $w^2 - 2w + 1 = 0$ da cui $w = 1$

ossia $e^{iz} = 1$ cioè $iz + 2k\pi i = 0$ da cui $z = -2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Poiché $1 - \cos z = 1 - 1 + \frac{z^2}{2} + o(z^2) = \frac{z^2}{2} + o(z^3)$, si ha

$$\lim_{z\to 0} z^4 f(z) = \lim_{z\to 0} z^4 \frac{1}{\frac{z^4}{2} + z^2 o(z^2)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^4}{z^4} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{o(z^2)}{z^2}} = 2 \neq 0$$

Quindi 0 è un polo di ordine 4 per f.

Analizziamo ora i punti $z_h = 2h\pi$, $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Poiché $D(1 - \cos z)\big|_{z=2h\pi} = \sin z \big|_{z=2h\pi} = 0$, $\forall h$

e $D^2(1 - \cos z)\big|_{z=2h\pi} = \cos z\big|_{z=2h\pi} = 1 \neq 0$, $\forall h$

Abbiamo che $1 - \cos z = \frac{1}{2}(z - 2h\pi)^2 + o\left((z-2h\pi)^2\right)$ per $z \to 2h\pi$

Risulta
$$\lim_{z\to 2h\pi} (z - 2h\pi)^2 f(z) = \lim_{z\to 2h\pi} (z-2h\pi)^2 \frac{1}{z\,(z-2h\pi)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{o\left((z-2h\pi)^2\right)}{(z-2h\pi)^2}\right)}$$

$$= \lim_{z\to 2h\pi} \frac{1}{z\left(\frac{1}{2} + \frac{o\left((z-2h\pi)^2\right)}{(z-2h\pi)^2}\right)} = \frac{1}{2h\pi \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{h\pi} \neq 0 \quad \text{per } h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Quindi $z_h = 2h\pi$ è un polo di ordine 2

5) Dimostrare che se z_0 è un polo di ordine $k > 1$ per $f \in H(D'(z_0, r))$, $r > 0$

allora $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!} D^{(k-1)}\left((z-z_0)^k f(z)\right)$

Si veda pag 124 degli appunti

6) Calcolare la serie di soli seni della funzione

$\quad (1 \quad \quad x \in [0, \frac{1}{2})$

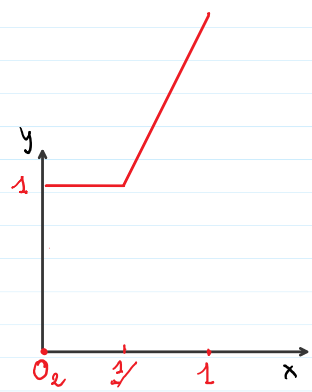
6) Calcolare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Stabilire poi che

$$3\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \frac{1}{2} + 2\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{((2h+1)\pi)^2}$$

Il grafico di $f(x)$ è il seguente



La sua estensione dispari $\tilde{f}$ su $[-1, 1]$ ha quindi discontinuità in tutti i punti $x \in \mathbb{Z}$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{2}x\right)dx = 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(k\pi x)\,dx + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\sin(k\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{4x}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{4}{k\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos(k\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi} - \frac{4}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{2}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{4}{(k\pi)^2}\sin(k\pi x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi} - \frac{4}{k\pi}(-1)^k + \frac{2}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{4}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(1 - 2(-1)^k\right) - \frac{4}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Per k pari $(k = 2h)$

$$b_{2h} = -\frac{1}{h\pi}$$

$$b_{2h} = -\frac{1}{h\pi}$$

Per k dispari $(k = 2h+1)$

$$b_{2h+1} = \frac{6}{(2h+1)\pi} - \frac{4}{((2h+1)\pi)^2}(-1)^h$$

Per cui la serie di soli seni di f è data da

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \sin(k\pi x) \qquad (*)$$

Per $x = \frac{1}{2}$ tale serie converge a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Poiché $\sin\left(k\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1 \end{cases}$

tutti i termini di indice k pari in $(*)$ sono nulli

e quindi otteniamo

$$\sum_{h=0}^{+\infty}\left(\frac{6}{(2h+1)\pi} - \frac{4(-1)^h}{((2h+1)\pi)^2}\right)(-1)^h = 1$$

Poiché entrambe le serie

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{6}{(2h+1)\pi}(-1)^h \quad \text{e} \quad \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{((2h+1)\pi)^2} \quad \text{convergono}$$

otteniamo

$$3\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \frac{1}{2} + 2\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{((2h+1)\pi)^2}$$