Esonero Complementi di Analisi matematica

mercoledì 10 febbraio 2016 11:00

1) Stabilire quali delle seguenti forme differenziali non è esatta. Motivare la risposta

(a) $\dfrac{y}{x^2+y^2+1}\,dx - \dfrac{x}{x^2+y^2+1}\,dy$

(b) $2x e^{x^2+y^2}\,dx + 2y e^{x^2+y^2}\,dy$

(c) $\left(\cos(xy) - xy\sin(xy)\right)dx - x^2\sin(xy)\,dy$

La (a) poiché non è chiusa ((b) e (c) sono chiuse e quindi essendo definite su $\mathbb{R}^2$ sono anche esatte). Infatti

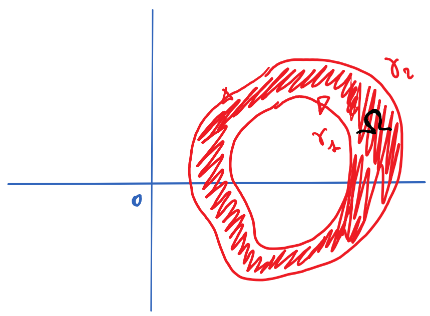
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+1}\right) = \frac{x^2+y^2+1-2y^2}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{x^2-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+1}\right) = \frac{x^2+y^2+1-2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{y^2-x^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Chiaramente la prima funzione non è uguale alla seconda su $\mathbb{R}^2$.

2) Dimostrare che

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{Log}_0 z\,dz = \int_{\gamma_2} \mathrm{Log}_0 z\,dz$$ dove γ_1 e γ_2 sono le curve disegnate in figura orientate nel verso antiorario



La funzione $f(z) = \mathrm{Log}_0 z$ è olomorfa sul dominio Ω che ha come bordo le curve γ_1 e γ_2, per cui $0 = \int_{\partial\Omega^+} \mathrm{Log}_0 z\,dz = \int_{\gamma_2^+} \mathrm{Log}_0 z\,dz + \int_{\gamma_1^-} \mathrm{Log}_0 z\,dz$ e quindi

$$\int_{\gamma_1^+} \mathrm{Log}_0 z\,dz = \int_{\gamma_2^+} \mathrm{Log}_0 z\,dz$$

Oppure si osservi semplicemente che essendo $\mathrm{Log}_0 z$ olomorfa su i domini

T_1 e T_2 che hanno per bordo, rispettivamente, γ_1 e γ_2 si ha, per il teorema di Cauchy-Goursat $\int_{\gamma_1^+} \log_0 z\, dz = 0 = \int_{\gamma_2^+} \log z\, dz$.

3) Si consideri il polinomio

$$p(z) = 1 - iz - z^4 + z^6$$

Si verifichi che i è uno zero per p. Che ordine ha i?

Che tipo di singolarità è $-i$ per la funzione $f(z) = \frac{iz}{p(z)}$?

Quanto vale il residuo di f in i?

$$p(i) = 1 + 1 - 1 + i^2 = 0$$

$$p'(z) = -i - 4z^3 + 6z^5, \quad p'(i) = -i + 4i + 6i = 9i \neq 0$$

quindi i è uno zero semplice. Di conseguenza, dato che il numeratore di f non si annulla in i, i è un polo semplice per f e $\operatorname{Res}(f, i) = \frac{i^2}{p'(i)} = -\frac{1}{9i}$

4) Calcolare modulo e argomento principale di $(1+i)^{1-i}$

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\log_0(1+i)} = e^{(1-i)\left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= e^{\log\sqrt{2} + \pi/4}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right)}$$

quindi

$$\left|(1+i)^{1-i}\right| = e^{\log\sqrt{2}}\, e^{\frac{\pi}{4}} \quad \text{e} \quad \operatorname{Arg}\left((1+i)^{1-i}\right) = \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}$$

(si osservi che $\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2} \in [-\pi, \pi)$)

5) Scrivere la serie di Laurent di centro 0 della funzione $f(z) = z^{10} e^{-\frac{1}{z^4}}$. In quali punti essa converge a f? (Motivare la risposta) Che tipo di singolarità è 0 per f? (Motivare la risposta). Quanto vale $\operatorname{Res}(f, 0)$?

$$f(z) = z^{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z^4}\right)^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z^{4k-10}}$$

Questa è la serie di Laurent di f ed essendo f olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, essa converge a f $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Poiché contiene infiniti termini del tipo $c_h z^h$ con h negativo, 0 è una singolarità essenziale per f. $\text{Res}(f,0)$ è il coefficiente del termine z^{-1}. Esso si otterrebbe per $k \in \mathbb{N}$ tale che $4k - 10 = -1$. Questa equazione non ha soluzioni intere, quindi manca nella serie il termine z^{-1}, ossia $a_{-1} = \text{Res}(f,0) = 0$

6) Cosa è la serie di soli seni di una funzione $f : [0,T] \to \mathbb{R}$, f assolutamente integrabile?

Tale serie coincide con la serie di Fourier di f? Motivare la risposta

È la serie di Fourier della estensione dispari di f su $[-T,T]$

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0,T] \\ -f(-t), & t \in [-T,0) \end{cases}$$

Quindi i suoi coefficienti sono dati da

$$b_k = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{f}(t)\sin\left(\frac{2\pi k t}{2T}\right) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \tilde{f}(t)\sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right) dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right) dt$$

e la serie di seni è $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right)$

La serie di Fourier di f invece avrà in generale anche i coefficienti:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) dt, \quad k \geq 1$$

e i coefficienti b_k definiti da

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) dt, \quad k \geq 1$$

La serie è quindi $\displaystyle a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$

e non coincide con la serie di soli seni di f.