Analisi Matematica -- corso C -- modulo A

lunedì 13 novembre 2023 08:30

1) - (a) Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$. Verificare che $\bar{z} = \frac{1}{z}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{1} = \bar{z}$$

1) - (b) Determinare il dominio naturale della funzione

$$f(x) = \log_{10}\left(\arctan(1-x^2)\right) + x^{-1/e}$$

Stabilire poi il tipo di monotonia di f e determinarne infine l'immagine

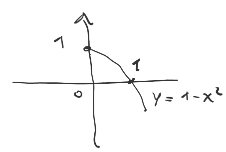
dom f: $\begin{cases} \arctan(1-x^2) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$ $\Big\}\ 0 < x < 1$

Quindi dom $f = (0,1)$

f è somma di f_1 e f_2

$f_2(x) = x^{-1/e}$ è stutt. decrescente (è una funzione potenza con esponente negativo

$f_1(x) = \log_{10}\left(\arctan(1-x^2)\right)$ è composta da



$x \in (0,1) \longmapsto 1 - x^2$ stutt. decrescente su $(0,1)$

$x \in \mathbb{R} \longmapsto \operatorname{arctg} x$ " crescente

e $x \in (0,+\infty) \longmapsto \log_{10} x$ " " (funzione logaritmo con base > 1)

Quindi f_1 è stutt. decrescente. f è dunque stutt. decrescente in quanto somma di funzioni stutt. decrescenti.

$f \in C^0((0,1))$ poiché f_1 e f_2 sono entrambe continue

e quindi $\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x \to 1^-} f(x),\ \lim_{x \to 0^+} f(x)\right) =$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \log_{10} y + \lim_{x \to 1^-} x^{-1/e} = -\infty + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \log_{10}\left(\frac{\pi}{4}\right) + (+\infty) = +\infty$$

Quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

2) Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = 2^{2(x-1)^3 + 1} + 2x - 1$$

Studiare la convessità di f. Stabilire che tipo di flesso ha f nel punto $x = 1$ e determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f in tale punto

Poiché $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ e $f \in C^0(\mathbb{R})$, f non ha asintoti verticali.

Cerchiamo eventuali asintoti orizzontali e obliqui

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \infty - 1 = +\infty$ f non ha as. oriz. per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2^{2(x-1)^3+1}}{x} + 2 - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{2(x-1)^3+1}}{x} \overset{l'H.}{=} \lim_{x \to +\infty} 2^{2(x-1)+1} \cdot \log 2 \cdot 6(x-1)^2 = +\infty (+\infty) = +\infty$$

quindi $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty + 2 + 0 = +\infty$ f non ha as. obl. per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - \infty - 1 = -\infty$ f non ha as. oriz. per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2^{2(x-1)^3+1}}{x} + 2 - \frac{1}{x} \right) = 0 + 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to -\infty} \left(2^{2(x-1)^3+1} + \cancel{2x} - 1 - \cancel{2x} \right) = -1$$

quindi la retta $y = 2x - 1$ è as. obliquo per $x \to -\infty$.

Studiamo la convessità di f; dato che f è derivabile 2 volte, possiamo studiare il segno di f'':

$$f'(x) = 2^{2(x-1)^3+1} \cdot (\log 2) \cdot 6(x-1)^2 + 2$$

$$f''(x) = 2^{2(x-1)^3+1} \cdot (\log 2)^2 \cdot 36(x-1)^4 + 2^{2(x-1)^3+1} \cdot (\log 2) \cdot 12(x-1)$$

$$= 2^{2(x-1)^3+1} \cdot (\log 2) \cdot 12 \cdot \underbrace{(x-1)}_{\mathrm{I}} \underbrace{\left[3(\log 2)(x-1)^3 + 1 \right]}_{\mathrm{II}}$$

II: $3(\log 2)(x-1)^3 + 1 > 0 \iff (x-1)^3 > -\frac{1}{3\log 2} \iff x - 1 > -\sqrt[3]{\frac{1}{3\log 2}} \iff x > 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3\log 2}}$

$f''(x) > 0$:

	$x < 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3\log 2}}$	$1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3\log 2}} < x < 1$	$x > 1$
I	$-$	$-$	$+$
II	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

quindi f è strett. convessa su $\left(-\infty, 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3\log 2}}\right)$ e su $(1, +\infty)$ ed è strett. concava su $\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3\log 2}}, 1\right)$

Poiché $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, 1 è un punto di flesso ascendente

La retta tg. al grafico di f in $(1, f(1))$ ha equazione

$y = f(1) + f'(1)(x-1)$

$f(1) = 2 + 2 - 1 = 3$

$f'(1) = 0 + 2 = 2$ quindi $y = 3 + 2(x-1)$

3) Calcolare gli integrali:

$$\int (3x-2)^{1/3} dx = \frac{1}{3}\int 3(3x-2)^{1/3} dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}(3x-2)^{4/3}+c$$

$$= \frac{1}{4}(3x-2)^{\frac{4}{3}}+c$$

$$\int \frac{\log(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx \underset{dt=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{\overset{2+\sqrt{x}=t}{=}} 2\int \log t\, dt = 2t\log t - 2\int 1\cdot dt =$$

$$= 2t\log t - 2t \quad , t = 2+\sqrt{x},$$

$$= 2(2+\sqrt{x})(\log(2+\sqrt{x})-1) + c$$

3) Traccia anni precedenti:

Poiché $f(x) = |3|x|-2|^{\frac{1}{3}}$ è pari

$$\int_{-1}^{1} |3|x|-2|^{1/3} dx = 2\int_0^1 |3|x|-2|^{\frac{1}{3}} dx = 2\int_0^1 |3x-2|^{\frac{1}{3}} dx$$

Poiché $3x-2>0 \iff x>\frac{2}{3}$, abbiamo

$$\int_0^1 |3x-2|^{1/3} dx = \int_0^{2/3} -(3x-2)^{1/3} dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (3x-2)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}}(3x-2)^{4/3}\Big|_0^{2/3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}}(3x-2)^{4/3}\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}$$

$$= 0 + \frac{1}{4}(-2)^{4/3} + \frac{1}{4}1^{4/3} - 0 = \frac{1}{4}\left(2\cdot\sqrt[3]{2}+1\right)$$

Quindi $\displaystyle\int_{-1}^{1} |3|x|-2|^{\frac{1}{3}} dx = 2\cdot\frac{1}{4}\left(2\sqrt[3]{2}+1\right) = \sqrt[3]{2}+\frac{1}{2}$

4) Si veda pag. 201 del manuale consigliato per enunciato e dimostrazione

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x^\alpha}} \overset{\frac{1}{x}=y}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{\log\frac{1}{y}}{y^\alpha} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\log 1-\log y}{y^\alpha}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{y^\alpha} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{1/y}{\alpha y^{\alpha-1}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{y^\alpha} = 0$$