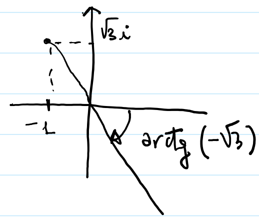
1) - a) Determinare il modulo e l'argomento principale del numero $z = \dfrac{\sqrt{3}i - 1}{1+i}$. Determinarne poi z^8 in forma esponenziale

$z = \dfrac{z_1}{z_2}$ con $z_1 = \sqrt{3}i - 1$ e $z_2 = 1+i$

$|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$ $\quad$ $\mathrm{Arg}\, z_1 = \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi$

$= -\mathrm{arctg}(\sqrt{3}) + \pi$

$= -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2}{3}\pi$



$|z_2| = \sqrt{2}$ $\quad$ $\mathrm{Arg}\, z_2 = \dfrac{\pi}{4}$

Quindi $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\, e^{i\frac{2}{3}\pi}}{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4}\right)} =$

$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{12}\pi}$ quindi $|z| = \sqrt{2}$ e $\mathrm{Arg}\, z = \dfrac{5}{12}\pi$

$z^9 = \left(\sqrt{2}\right)^8 \left(e^{i\frac{5}{12}\pi}\right)^8 = 16\, e^{i\frac{10}{3}\pi} = 16\, e^{i\frac{4}{3}\pi}$

1) - b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$f(x) = \sqrt{1-x^2}\,\arccos\left(\sqrt{-x}\right)$

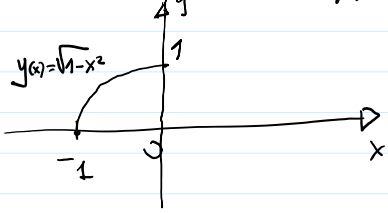
dom f : $\begin{cases} -x \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{-x} \leq 1 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ -x \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ $\Big\{ -1 \leq x \leq 0$

dom $f = [-1, 0]$

f è il prodotto delle funzioni $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$

e $f_2(x) = \arccos\sqrt{-x}$, entrambe positive su $(-1, 0]$

$f_1(x)$ sull'intervallo $[-1, 0]$ ha grafico uguale all'arco di circonferenza di centro 0 e raggio 1 nel II quadrante



ed è quindi strett. crescente

$f_2(x)$ è composta da $x \in [-1,0] \longmapsto -x \longmapsto \sqrt{-x} \longmapsto \arccos\sqrt{-x}$

quindi è strettamente crescente in quanto $y(x) = -x$ e

$y(x) = \arccos x$ sono strett. decrescenti mentre $y(x) = \sqrt{x}$

è strett. crescente. f è dunque strett. crescente su $[-1,0]$

poiché è il prodotto di funzioni strett. crescenti su $[-1,0]$ e

positive su $(-1,0]$.

f è anche continua e quindi $\operatorname{Im} f = [f(-1), f(0)] = [0, 1 \cdot \arccos 0] = [0, \frac{\pi}{2}]$

2) Sia $f(x) = \dfrac{x^2 \log x + 1}{x}$

Determinare dominio e asintoti di f.

Stabilire che f ha un punto di minimo locale forte in $x_0 = 1$

Scrivere la formula di Taylor di centro tale punto e ordine 2.

dom $f = (0, +\infty)$; $f \in C^0((0,+\infty))$ quindi l'unico candidato

punto in cui cercare asintoti verticali è $x = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{0 + 1}{0^+} = +\infty$ quindi $x=0$ è as. vert. a dx

Asintoto orizzontale per $x \to +\infty$:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x}\left(\log x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$

f non ha asintoto orizzontale

Asintoto obliquo per $x \to +\infty$:

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2}\left(\log x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

f non ha asintoto obliquo.

$f'(x) = \dfrac{(2x \log x + x)x - (x^2 \log x + 1)}{x^2} = 2\log x + 1 - \log x - \dfrac{1}{x^2}$

$f'(1) = \dfrac{1 - 1}{1} = 0$ quindi $x_0 = 1$ è un punto critico di f interno al suo dominio

$$f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$$

$f''(1) = 3 > 0$ quindi $x_0 = 1$ è un minimo locale forte di f

Formula di Taylor di centro 1 e ordine 2:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

$$= 1 + 0 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

3) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^2}\,dx$

Poniamo $1+x^2 = t$, quindi $dt = 2x\,dx$, $t(0)=1$, $t(1)=2$

e per la formula per il cambio di variabile in un integrale definito otteniamo, tenendo presente che $x^2 = t-1$ e quindi

$x^4 = (t-1)^2$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2\Big|_1^2 - 2t\Big|_1^2 + \log t\Big|_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2} - 2 + \log 2\right) = \frac{1}{2}\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right)$$

Si può anche calcolare l'integrale dividendo x^5 per $1+x^2$:

$\dfrac{x^5}{1+x^2} = x^3 - x + \dfrac{x}{1+x^2}$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^2} = \int_0^1 (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big|_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema della media

integrale per le funzioni continue enunciando anche
il teorema sulle funzioni continue massimo
nella dimostrazione
Si veda la lezione 25. Il teorema necessario
è il teorema di Bolzano o dei valori intermedi per
le funzioni continue il cui enunciato è nella lezione 17