1) - a) Determinare la forma esponenziale del numero complesso

$$(2-i)\,i$$

Scrivere poi le radici terze

$$(\sqrt{3}-i)\,i = \sqrt{3}i - i^2 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$$

Sia θ un argomento di $1+2i$ deve essere

$$\begin{cases} 2\cos\theta = 1 \\ 2\sin\theta = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{quindi } \theta = \frac{\pi}{3}$$

quindi $(2-i)\,i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\sqrt[3]{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt[3]{2}\; e^{i\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k\right)}, \quad k = 0,1,2$$

1) - b) Determinare il dominio, la monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

dom f: $\quad 2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$

f è composta delle funzioni

$$x \in \left(\tfrac{1}{2}, +\infty\right) \longmapsto 2x - 1 \longmapsto \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

strett. crescente

strett. crescente dato che la funzione $y(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x$ è strettamente decrescente

Quindi f è strett. decrescente. Poiché $f \in C^0\left(\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right)$

$$\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

2) Determinare il dominio, gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} - x^2$$

Stabilire poi che f ha un unico punto di massimo relativo $\bar{x}$ e che tale punto è positivo.

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi cerchiamo gli eventuali asintoti verticali in $x = 0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\frac{1}{0^+} - 0 = -\infty$$ quindi $x=0$ è asint. vert. a dx

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{0^+} - 0 = -\infty$ quindi $x=0$ è asint. vert. a dx

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{1}{0^-} - 0 = +\infty$ " " " " " sx

Cerchiamo gli asintoti orizzontali

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x^3}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ " $= -\infty$

quindi non ci sono asintoti orizzontali

Cerchiamo gli asintoti obliqui

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1-x^3}{x^2} = \mp\infty$ quindi non ci sono neanche asintoti obliqui

$f'(x) = \frac{2x^2-(x^2-1)}{x^2} - 2x = \frac{x^2+1}{x^2} - 2x = \frac{x^2+1-2x^3}{x^2}$

Il segno della derivata coincide con il segno del numeratore.

$-2x^3+x^2+1 = -(x-1)(2x^2+x+1)$

$2x^2+x+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ quindi $-2x^3+x^2+1>0$ per $x<1$

di conseguenza: $f'(x)>0$ per $x\in(-\infty,0)$ e $x\in(0,1)$

$f'(x)<0$ " $x\in(1,+\infty)$

Quindi f è strettamente crescente su $(-\infty,0)$ e non ha punti estremali su tale intervallo; f è anche strettamente crescente su $(0,1)$ e strettamente decrescente su $(1,+\infty)$. Di conseguenza $\bar{x}=1$ è l'unico punto di massimo relativo per f.

3) Calcolare

$$\int_{-1}^{1} |x|\cos(\pi x)\,dx$$

Poiché la funzione integranda è pari, l'integrale assegnato è uguale a

Poiché la funzione integranda è pari, l'integrale assegnato è uguale a

$$2\int_0^1 |x|\cos(\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx =$$

$$= 2\,\frac{x}{\pi}\sin(\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx =$$

$$= 0 - 0 + \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x)\Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2} = -\frac{4}{\pi^2}$$

4) Dare la definizione topologica di limite per una funzione reale di variabile reale. Enunciare e dimostrare, poi, il teorema della permanenza del segno.

Per la def. si veda p. 82 del manuale di riferimento. Per il teorema si veda p. 84