1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale periodico di periodo π definito da

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos t & \text{se } t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} f(t) e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \, e^{-st} dt \right) \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 0$$

Calcoliamo separatamente i due integrali

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{s}\left(e^{-s\pi/2} - 1\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \, e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{s}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \, e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{s} e^{-s\pi} + \frac{1}{s^2} \sin t \, e^{-st} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{s^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \, e^{-st} dt$$

Quindi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \, e^{-st} dt = \frac{s^2}{s^2+1} \left(\frac{1}{s} e^{-s\pi} - \frac{1}{s^2} e^{-\frac{s\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{s^2+1} \left(s e^{-s\pi} - e^{-\frac{s\pi}{2}} \right)$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare tenendo presente che

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \, e^{-st} dt = \mathcal{L}\left(-\sin_+\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos_+(t-\pi)\right)(s)$$

In definitiva la trasformata del segnale assegnato è

$$\frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(\frac{1}{s}\left(e^{-\frac{s\pi}{2}} - 1\right) + \frac{1}{s^2+1}\left(s e^{-s\pi} - e^{-s\frac{\pi}{2}}\right) \right)$$

1) Calcolare per serie

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{x^2}}{x^2} dx$$

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} \quad ; \quad \frac{e^{x^2}}{x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2(k-1)}}{k!}$$

Integrando termine a termine otteniamo

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{x^2}}{x^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2(k-1)+1} \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}} \right)$$

2) Ricavare le relazioni che sussistono tra le derivate in z_0 della somma di una serie di potenze di centro z_0 e i coefficienti della serie stessa

Si veda, ad esempio, pagg. 47-48 degli appunti

3) Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}^+_{(2i,1)}} \frac{\mathrm{Log}_0\, z^2}{\left(z-\frac{3}{2}i\right)^2}\, dz$$

dove $\mathcal{C}^+(2i,1)$ è la circonferenza di centro $2i$ e raggio 1 orientata nel verso antiorario

La determinazione principale del logaritmo è olomorfa nel disco $D(2i,1)$ e $\frac{3}{2}i \in D(2i,1)$. Possiamo quindi usare la II formula di rappresentazione di Cauchy ottenendo

$$\int_{\mathcal{C}^+(2i,1)} \frac{\mathrm{Log}_0\, z^2}{\left(z-\frac{3}{2}i\right)^2}\, dz = 2\pi i\, D\, \mathrm{Log}_0\, z^2 \Big|_{z=\frac{3}{2}i}$$

$$= 2\pi i \left.\frac{2z}{z^2}\right|_{z=\frac{3}{2}i} = \left.\frac{4\pi i}{z}\right|_{z=\frac{3}{2}i} = \frac{8}{3}\pi$$

4) Dimostrare che la funzione $z \in \mathbb{C} \mapsto \sin z$ non è limitata

Si veda, ad esempio, pag. 86 degli appunti

5) Usando il metodo dei residui calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{t}{1+t^4}\, dt$$

Poiché $\left| e^{it} \frac{t}{1+t^4} \right| = \frac{|t|}{1+t^4} \sim \frac{1}{|t|^3}$ per $t \to \pm\infty$

la funzione assegnata è integrabile su $\mathbb{R}$

Consideriamo la sua estensione a $\mathbb{C}$

$f(z) = e^{iz} \frac{z}{1+z^4}$. Dato che $\lim_{|z|\to\infty} \frac{z}{1+z^4} = 0$, per il lemma di Jordan

$$\int_{\gamma(R)} e^{iz}\frac{z}{1+z^4}\,dz \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$ dove $\gamma(R)$ è

la semicirconferenza di centro O e raggio R

con diametro sull'asse dei reali

Quindi $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it}t}{1+t^4}\,dt = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)+\mathrm{Res}\left(f, e^{-\frac{3}{4}\pi}\right)\right)$$

Entrambe le singolarità $e^{i\frac{\pi}{4}}$ ed $e^{i\frac{3}{4}\pi}$ sono poli semplici:

$$\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\left(z-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)e^{iz}\frac{z}{1+z^4} = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\frac{e^{iz}z}{\frac{1+z^4}{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}} =$$

$$= \frac{e^{ie^{i\frac{\pi}{4}}}e^{i\frac{\pi}{4}}}{D(1+z^4)\big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}} = \frac{e^{i\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}{4e^{i\frac{3}{4}\pi}} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt2}{2}}e^{i\frac{\sqrt2}{2}}\frac{\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}{-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}} = -\frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt2}{2}}e^{i\frac{\sqrt2}{2}}\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt2}{2}}e^{i\frac{\sqrt2}{2}}\,i$$

analogamente

$$\lim_{z\to e^{i\frac{3}{4}\pi}}\left(z-e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)\frac{e^{iz}z}{1+z^4} =$$

$$= \frac{e^{i\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}{4e^{i\,9/4\pi}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt2}{2}}e^{-i\frac{\sqrt2}{2}}\frac{\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}{\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt2}{2}}e^{-i\frac{\sqrt2}{2}}\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt2}{2}}e^{-i\frac{\sqrt2}{2}}(-i)$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$-\frac{\pi i}{2}e^{-\frac{\sqrt2}{2}}i\left(e^{i\frac{\sqrt2}{2}}-e^{-i\frac{\sqrt2}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}e^{-\frac{\sqrt2}{2}}2i\sin\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

$$= i\pi e^{-\frac{\sqrt2}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

6) Enunciare l'identità di Parseval.

Usarla insieme con le funzioni $f(x)=x$, $x\in[-1,1]$

per dimostrare che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Per l'enunciato si veda, ad esempio, p. 165 degli appunti

Poichè la funzione assegnata è dispari, la sua serie di Fourier si riduce ad una serie di soli seni.

$$b_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} x \sin(k\pi x)\, dx = -\frac{x}{k\pi} \cos(k\pi x)\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{k\pi} \int_{-1}^{1} \cos(k\pi x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{k\pi} \cos(k\pi) - \frac{1}{k\pi} \cos(-k\pi) + \frac{1}{(k\pi)^2} \sin(k\pi x)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} \cos(k\pi) = -\frac{2}{k\pi} (-1)^k$$

Quindi $\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$ cioè

$$\frac{1}{6} x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \text{ossia}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$