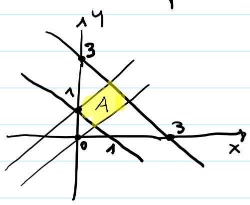
1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A (x^2-y^2)\,dx\,dy \qquad \text{dove} \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y-x\le 1 \text{ e } 1\le y+x\le 3\}$$

L'insieme A nel piano xy è rappresentato in figura in giallo



Posto $\begin{cases} y-x = u \\ y+x = v \end{cases}$ abbiamo che $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

e quindi $\det\left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = -2$ quindi $\det\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = -\dfrac{1}{2}$

inoltre $0\le u\le 1$ e $1\le v\le 2$

in tali variabili l'integrale diviene

$$\int_A (x-y)(x+y)\,dx\,dy = -\int_{[0,1]\times[1,3]} u\,v \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| du\,dv =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 u\,du \cdot \int_1^3 v\,dv = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(9-1) = -1$$

2) Determinare il dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ e rappresentarlo sul piano; dire se si tratta di un insieme chiuso o aperto, limitato, connesso per archi.

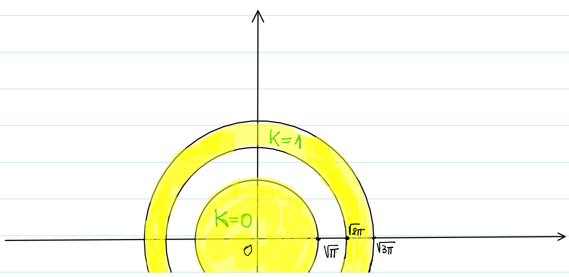
Stabilire poi che f è differenziabile

nell'interno del suo dominio. Determinare quindi l'equazione del piano tangente nel punto $\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, -\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$ al grafico di f.

dom f: $\sin(x^2+y^2)\ge 0 \iff \underbrace{2k\pi \le x^2+y^2 \le \pi+2k\pi}_{(*)}$, $k\in\mathbb{Z}$

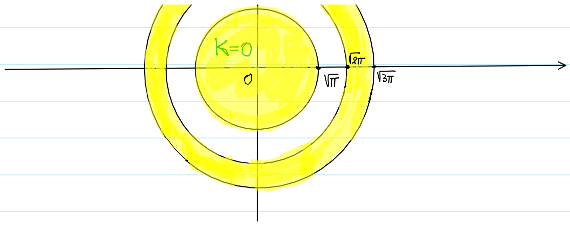
È chiaro che per $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ le disequazioni $(*)$ non hanno soluzioni. Se $k=0$ abbiamo $0\le x^2+y^2\le\pi$ le cui soluzioni corrispondono ad un disco di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\pi}$. Per $k=1$ abbiamo

$2\pi\le x^2+y^2\le 3\pi$ le cui soluzioni corrispondono ad una corona circolare di centro $(0,0)$ e raggi $\sqrt{2\pi}$ e $\sqrt{3\pi}$. Per $k>1$ si ha analogamente una corona circolare di centro $(0,0)$ e raggi $\sqrt{2k\pi}$ e $\sqrt{\pi+2k\pi}$



Nella figura qui accanto sono rappresentate solo le regioni di piano facenti parte del dominio ottenute per k=0 e k=1

Si tratta quindi di un insieme chiuso



del dominio ottenute per $K=0$ e $K=1$

Si tratta quindi di un insieme chiuso dato che contiene tutti i suoi punti di frontiera, illimitato dato che per $K \to +\infty$ le corone circolari hanno raggi che tendono a $+\infty$, non connesso per archi dato che due punti situati in corone differenti non sono uniti da alcuna curva continua la cui immagine ha contenuta nel dominio di f.

$\forall (x,y) \in \mathring{\operatorname{dom} f}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\sin(x^2+y^2)}} \cdot \cos(x^2+y^2)\,\cancel{2}x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\sin(x^2+y^2)}} \cdot \cos(x^2+y^2)\,\cancel{2}y$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono ben definite e continue su $\mathring{\operatorname{dom} f}$ e quindi f è differenziabile in $\mathring{\operatorname{dom} f}$.

$\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, -\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right) \in \mathring{\operatorname{dom} f}$ e quindi esiste l'equazione del piano tg al grafico di f in tale punto ed è data da

$$z = f\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}, -\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}, -\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}\right)\left(x-\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}, -\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}\right)\left(y+\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}\right)$$

$$= 1 + 0\cdot\left(x-\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}\right) + 0\left(y+\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}\right) = 1$$

3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 4 + x + 2e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0$$

Quindi l'equazione caratteristica dell'omogenea associata ha una soluzione doppia $\lambda = 2$

L'integrale generale dell'omogenea associata è dunque

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Il termine noto $f(x) = 4 + x + 2e^{2x}$ non è del tipo per cui sia possibile applicare il metodo di similitudine. È possibile però applicarlo separatamente alle equazioni:

$$y'' - 4y' + 4y = 4 + x$$

per questa cerchiamo una soluzione del tipo $\tilde{y}(x) = ax + b$

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$$

qui una soluzione deve essere del tipo $\tilde{y}_2(x) = cx^2e^{2x}$ dato per questo cerchiamo una soluzione che tipo $\tilde{y}_1(x) = ax+b$

Deve quindi essere

$$-4a + 4ax + 4b = 4 + x \quad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ -4a + 4b = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ 4b = 4+1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}$$

qui una soluzione deve essere del tipo $\tilde{y}_2(x) = cx^2e^{2x}$ dato che 2 è soluzione doppia dell'equazione caratteristica

$$\tilde{y}_2'(x) = 2cxe^{2x} + 2cx^2e^{2x}$$

$$\tilde{y}_2''(x) = 2ce^{2x} + 4cxe^{2x} + 4cxe^{2x} + 4cx^2e^{2x};$$

quindi

$$2ce^{2x} + \cancel{8cxe^{2x}} + \cancel{4cx^2e^{2x}} - \cancel{8cxe^{2x}} - \cancel{8cx^2e^{2x}} + \cancel{4cx^2e^{2x}} = 2e^{2x}$$

da cui

$$2ce^{2x} = 2e^{2x} \quad \text{e quindi} \quad c = 1$$

Pertanto una soluzione dell'equazione assegnata è

$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ e l'integrale generale è dato da

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{2x} + \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} + x^2e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 0 \iff c_1 + \frac{5}{4} = 0 \iff c_1 = -\frac{5}{4}$$

$$y'(x) = c_2e^{2x} + 2\left(-\frac{5}{4} + c_2x\right)e^{2x} + \frac{1}{4} + 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$$

$$y'(0) = -1 \iff c_2 - \frac{5}{2} + \frac{1}{4} = -1 \iff c_2 = \frac{5}{4}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = \frac{5}{4}(x-1)e^{2x} + \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} + x^2e^{2x}.$$

4) Dare la definizione di integrale in senso improprio per una funzione $f: [a,b[\to \mathbb{R}$

Enunciare e dimostrare poi il teorema di confronto per la convergenza di un integrale improprio su un intervallo $[a,b[$

Per la definizione si veda p. 267 del manuale di riferimento. Per enunciato e dimostrazione, p. 271