1) - a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right) \qquad (*)$$

$$(*) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{3^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{3^{n-2}} \overset{n-2=h}{=} \frac{1}{4}\sum_{h=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^h - \frac{1}{9}\sum_{h=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^h$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{1}{9}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

1) -b) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

È una serie a segni alterni dato che $\sin\left(\frac{1}{n}\right)>0,\ \forall n\geq 1$

Verifichiamo che soddisfa il criterio di Leibniz:

1) $\lim \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ dato che $\frac{1}{n}\to 0$

2) Poiché $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ è strett. decrescente e $y=\sin x$ è strett. crescente su $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (si noti che $0<\frac{1}{n}\leq 1<\frac{\pi}{2}$)

$\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ è strett. decrescente

Le ipotesi del criterio di Leibniz sono soddisfatte e quindi la serie assegnata è convergente.

2) Si considerino i due campi vettoriali

$$F:(x,y)\mapsto\left(x e^{\sqrt{x-y}},\ \log\left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)\right)\in\mathbb{R}^2$$

$$G:(t_1,t_2)\mapsto\left(t_1t_2,\ t_1^2+t_2^2,\ 2t_1+t_2\right)$$

Si determini il dominio di $H=G\circ F$ e lo si rappresenti nel piano, specificando se si tratti di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.

Si stabilisca che H è differenziabile nel suo dominio.

Si calcoli la matrice Jacobiana di H nel punto $(1,0)$

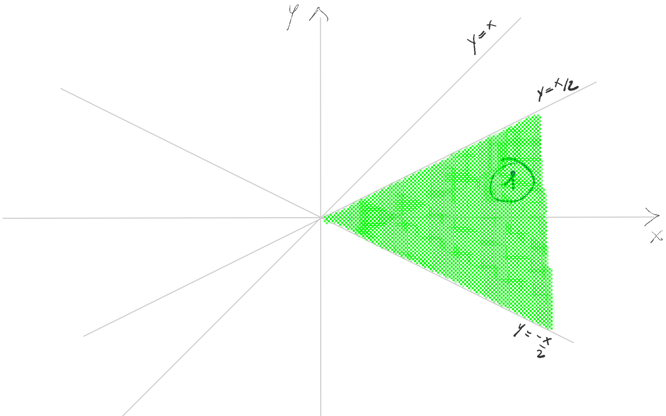
Poiché G è definito su $\mathbb{R}^2$ il dominio di H è uguale al dominio di F

$$\mathrm{dom}\,F: \quad \begin{cases} x-y \geq 0 \\ \dfrac{x-2y}{x+2y} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \leq x \\ x-2y > 0 \\ x+2y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x \\ y < x/2 \\ y > -\frac{x}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\vee$$

$$\begin{cases} y \leq x \\ x-2y < 0 \\ x+2y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x \\ y > \frac{x}{2} \\ y < -\frac{x}{2} \end{cases} \quad (2) \quad \emptyset$$

Rappresentiamo sul piano le soluzioni dei due sistemi



Come si deduce, cercando di rappresentare sul piano le sue soluzioni, (2) non ho soluzioni mentre (1) ho per soluzioni tutti i punti del cono rappresentato in verde in figura.

dom H = dom F è quindi il cono qui a fianco bordo escluso. È dunque un insieme aperto, convesso (quindi connesso per archi) illimitato

Studiamo la differenziabilità di H:

Poiché il campo G è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ (le sue componenti sono polinomi nelle variabili (t_1, t_2)) è quindi differenziabile; per il teorema sulla differenziabilità delle funzioni composte, H è differenziabile sul suo dominio se F lo è.

Dato che le componenti di F sono di classe C^∞ su dom F, F è differenziabile sul suo dominio.

Dunque $\forall (\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{dom}\,H$, $J_H(\bar{x},\bar{y}) = J_G(F(\bar{x},\bar{y})) \cdot J_F(\bar{x},\bar{y})$

Calcoliamo $J_F(1,0)$ e $J_G(F(1,0))$

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{x-y}} + x e^{\sqrt{x-y}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x-y}} & x\, e^{\sqrt{x-y}} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{x-y}} \\ \frac{x+2y}{x-2y} \; \frac{x+2y-x+2y}{(x+2y)^2} & \frac{x+2y}{x-2y} \; \frac{-2(x+2y)-2(x-2y)}{(x+2y)^2} \end{pmatrix}$$

$$J_F(1,0) = \begin{pmatrix} e + \frac{e}{2} & -\frac{e}{2} \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e & -\frac{e}{2} \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$F(1,0) = (e, \log 1) = (e,0)$$

$$J_G(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} t_2 & t_1 \\ 2t_1 & 2t_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad J_G(e,0) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 2e & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $J_H(1,0) = J_G(e,0) \cdot J_F(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 2e & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e & -\frac{e}{2} \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4e \\ 3e^2 & -e^2 \\ 3e & -e-4 \end{pmatrix}$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \frac{t}{2} - 2\cos t \quad (*) \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$$

l'omogenea associata $y'' + 4y = 0$ ha per integrale generale

$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$

Cerchiamo una soluzione particolare di $(*)$ con il metodo di similarità applicato separatamente a

$y'' + 4y = \frac{t}{2}$ e $y'' + 4y = -2\cos t$

$\tilde{y}_1(t) = at + b$ quindi

$4at + 4b = \frac{t}{2}$ da cui

$\begin{cases} 4a = \frac{1}{2} \\ 4b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{1}{8} \end{cases}$

Pertanto

$\tilde{y}_1(t) = \frac{t}{8}$

$\tilde{y}_2(t) = c\cos t + d\sin t$

$\tilde{y}_2'(t) = -c\sin t + d\cos t$

$\tilde{y}_2''(t) = -c\cos t - d\sin t$; quindi deve essere

$-c\cos t - d\sin t + 4c\cos t + 4d\sin t = -2\cos t$

$\Leftrightarrow 3c\cos t + 3d\sin t = -2\cos t$, che è soddisfatto se e solo se

$\begin{cases} 3c = -2 \\ 3d = 0 \end{cases}$ ossia $c = -\frac{2}{3}$ e $d = 0$; quindi

$\tilde{y}_2(t) = -\frac{2}{3}\cos t$

Una soluzione di $(*)$ è quindi $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = \frac{t}{8} - \frac{2}{3}\cos t$

L'integrale generale di $(*)$ è allora dato da

$y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{t}{8} - \frac{2}{3}\cos t, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Determiniamo la soluzione che soddisfi le condizioni iniziali assegnate

$0 = y(\pi) = c_1 + \frac{\pi}{8} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow c_1 = -\frac{\pi}{8} - \frac{2}{3}$

$y'(t) = -2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t) + \frac{1}{8} + \frac{2}{3}\sin t$

$$1 = y'(\pi) = 2c_2 + \frac{1}{8} \iff 2c_2 = 1 - \frac{1}{8} \iff c_2 = \frac{7}{16}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(t) = -\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2}{3}\right)\cos(2t) + \frac{7}{16}\sin(2t) + \frac{t}{8} - \frac{2}{3}\cos t$$

4) Dare la definizione di dominio normale nel piano rispetto ad uno degli assi ed enunciare la corrispondente formula di riduzione.

Invertire poi l'ordine di integrazione nel seguente integrale dove f è una qualunque funzione continua su $\mathbb{R}^2$ e limitata

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$A \subset \mathbb{R}^2$ è normale rispetto all'asse delle x (y) se

$$\exists \ \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}, \ \alpha, \beta \in C^0([a,b]), \ \alpha \le \beta$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \wedge \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

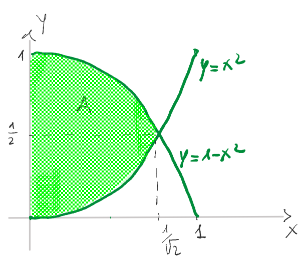
$$\left(A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [a,b] \wedge \alpha(y) \le x \le \beta(y)\} \right)$$

Se $f \in C(A)$ allora $\displaystyle\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right) dx \quad \left(\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx \right) dy \right)$

In $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x,y)\, dy \right) dx$ l'ordine di integrazione può essere invertito dato che il dominio di integrazione, normale rispetto all'asse delle x è normale anche rispetto all'asse delle y. Infatti

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}] \text{ e } x^2 \le y \le 1 - x^2\}$$

è il seguente insieme. Quindi A è anche dato da



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1] \text{ e } 0 \le x \le \beta(y)\}$$

dove $\beta(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{se } y \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sqrt{1-y} & \text{se } y \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

Quindi

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\beta(y)} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\, dx \right) dy$$