1) -a)

Scrivere il numero complesso

$$(2i-1)\overline{(2i-1)}\,e^{2i-1}$$

in forma esponenziale

Dato che $(2i-1)\overline{(2i-1)} = |2i-1|^2 = 4+1 = 5$ ed $e^{2i-1} = \dfrac{e^{2i}}{e}$

la forma esponenziale del numero in questione è $\dfrac{5}{e}e^{2i}$

1) -b) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \arccos\left(\log_{1/e}(x-1)\right)$$

Stabilire poi che f è iniettiva e determinarne la sua immagine

dom f: $\begin{cases} x-1>0 \\ -1 \le \log_{1/e}(x-1) \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ \frac{1}{e} \le x-1 \le e \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ x \le e+1 \\ x \ge 1+\frac{1}{e} \end{cases}$

Quindi dom $f = \left[1+\frac{1}{e}, 1+e\right]$

f è iniettiva in quanto è strettamente crescente. Infatti f è composta da

$x \longmapsto x-1$ strett. crescente

$x \longmapsto \log_{1/e} x$ strett. decrescente

$x \longmapsto \arccos x$ " "

$f \in C^0\left(\left[1+\frac{1}{e}, 1+e\right]\right)$ quindi $\operatorname{Im} f = \left[f\left(1+\frac{1}{e}\right), f(1+e)\right] = \left[\arccos(1), \arccos(-1)\right] = [0, \pi]$

2) Determinare il dominio e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x}\log\frac{1}{|x|}$$

Stabilire, analizzando l'andamento del grafico di f, che $f_{|(0,+\infty)}$ ha massimo assoluto. Qual è il punto di massimo assoluto? Perché?

Determinare la retta tg al grafico di f nel punto $x=1$

dom f $\begin{cases} x \ne 0 \\ \frac{1}{|x|} > 0 \end{cases}$ $\{ x \ne 0$ quindi dom $f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Osserviamo che f è dispari; possiamo quindi limitare lo studio degli asintoti all'intervallo $(0, +\infty)$.

f è continua su $(0,+\infty)$ quindi un eventuale asintoto verticale è da cercare solo in $x=0$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2-1}{x}\log\frac{1}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{x}\left(-\log x\right) = -\frac{1}{0^+}(+\infty) = -\infty(+\infty) = -\infty$

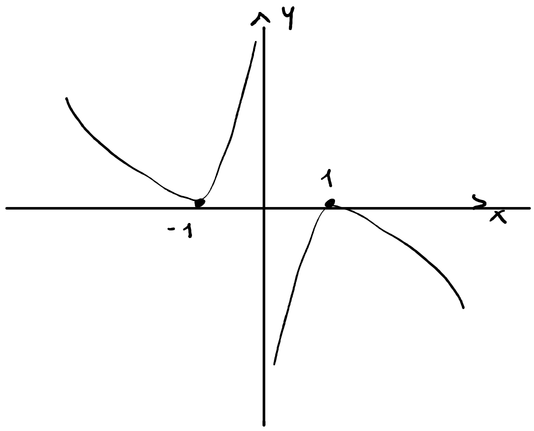
Pertanto la retta $x=0$ è asintoto verticale a dx (e quindi anche a sx: dato che f è dispari $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\lim_{x\to0^-} f(-x) = -\lim_{w\to0^+} f(w) = +\infty$)

Cerchiamo l'asintoto orizzontale

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2-1}{x}\log x = -\infty(+\infty) = -\infty$ non c'è asintoto oriz.

Cerchiamo l'asintoto obliquo

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2-1}{x^2}\log x = -1(+\infty) = -\infty$ non c'è asint. obliquo



Poiché $f\in C^0(0,+\infty)$ e $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ è chiaro che $f|_{(0,+\infty)}$ deve avere massimo assoluto.

Osserviamo che $f(x)\le 0 \ \forall x\in(0,+\infty)$ dato che $\frac{x^2-1}{x}\ge 0$ se $x\ge 1$ e $-\log x\le 0$ se $x\ge1$

Poiché $f(1)=0$ 1 è il massimo assoluto di $f|_{(0,+\infty)}$ e 0 è il valore di massimo

f è derivabile in $x=1$ e quindi poiché $x=1$ è un punto di massimo $f'(1)=0$ e la retta tg in $x=1$ è $y=0$

3) Calcolare
$$\int_{-2}^{2}|x|\log(x+3)\,dx$$

$$\int_{-2}^{2}|x|\log(x+3)\,dx = \int_{-2}^{0}|x|\log(x+3)\,dx + \int_{0}^{2}|x|\log(x+3)\,dx =$$
$$= -\int_{-2}^{0}x\log(x+3)\,dx + \int_{0}^{2}x\log(x+3)\,dx$$

Calcoliamo
$$\int x\log(x+3) = \frac{1}{2}x^2\log(x+3) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+3}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log(x+3) - \frac{1}{2}\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log(x+3) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}\log|x+3|$$

Quindi

$$-\int_{-2}^{0} x \log(x+3)\,dx + \int_{0}^{2} x \log(x+3)\,dx = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\log|x+3| - \frac{1}{2}x^2 \log|x+3| \right)\Big|_{-2}^{0}$$

$$+ \left(\frac{1}{2}x^2 \log(x+3) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}\log|x+3| \right)\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{9}{2}\log 3 - 1 + 3 + 2\log 5 - 1 + 3 - \frac{9}{2}\log 5 + \frac{9}{2}\log 3 =$$

$$= 9\log 3 - \frac{5}{2}\log 5 + 4$$

4) Dimostrare che ogni funzione monotona definita su un intervallo chiuso e limitato è integrabile secondo Riemann

Si veda, ad esempio, la dimostrazione del Teor. 8.7 del manuale consigliato