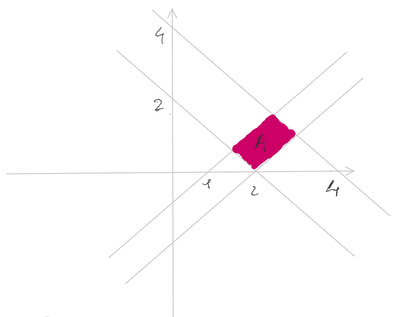
1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \log(x-y)\,dx\,dy$$

dove $A = \{(x,y) : x-2<y<x-1 \ , \ 2<x+y<4\}$

L'insieme A è qui rappresentato



Introduciamo le variabili

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$$

Nel piano $\{u,v\}$ A corrisponde al rettangolo $R:=[1,2]\times[2,4]$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)(u,v) = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)} = \frac{1}{2}$$

Quindi cambiando variabili l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_R \log u \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_2^4 dv \cdot \int_1^2 \log u\,du = \int_1^2 \log u\,du = u\log u\Big|_1^2 - \int_1^2 du = 2\log 2 - 1$$

2) Si consideri il campo vettoriale $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = \left((xy)^{-\frac{1}{2}}, (x^2-y)^{\frac{1}{2}} \right)$

Se ne determini il dominio e lo si rappresenti sul piano specificando se si tratta di un insieme aperto, chiuso, connesso per archi, limitato.

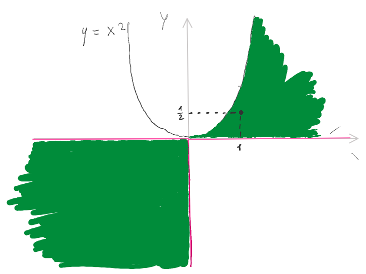
Si stabilisca che F è differenziabile nel punto $(1, \frac{1}{2})$

Si consideri poi la curva $\gamma(t) = \left(t^2, \frac{1}{2t^3}\right)$, $\gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$

Calcolare $(F\circ\gamma)'(1)$

$$\text{dom } F : \quad \begin{cases} xy > 0 \\ x^2 - y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy > 0 \\ y \leq x^2 \end{cases}$$

Rappresentiamolo sul piano



dom F è la regione in verde; i semiassi in rosso sono esclusi. Non è un insieme aperto dato che i punti della parabola con ascissa positiva sono punti di frontiera che appartengono a dom F.
Non è chiuso, dato che non contiene tutta la frontiera.
Non è connesso per archi dato che ad esempio il punto $(1, \frac{1}{2})$ non può essere collegato, mediante una curva continua con supporto in dom F, ad un qualunque punto del III quadrante. Non è ovviamente limitato.

Il punto $(1, \frac{1}{2}) \in \overset{\circ}{\text{dom}} F$. Poiché entrambe le componenti di F sono funzioni di classe C^1 (in realtà C^∞) sui loro rispettivi domini esse sono differenziabili e quindi anche F lo è

Dato che γ è derivabile nel punto $t=1$ e $\gamma(1) = (1, \frac{1}{2})$ possiamo calcolare $(F\circ\gamma)'(1)$ usando il teorema sulla differenziabilità di una funzione composta da funzioni differenziabili e la regola della catena:

$\gamma'(t) = \left(2t, -\frac{3}{2t^4}\right)$; $\gamma'(1) = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(xy)^{-\frac{3}{2}} y & -\frac{1}{2}(xy)^{-\frac{3}{2}} x \\ \frac{1}{2}(x^2-y)^{-\frac{1}{2}} 2x & -\frac{1}{2}(x^2-y)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} ; \quad J_F\left(1, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$(F\circ\gamma)'(1) = J_F(\gamma(1)) \cdot \gamma'(1) = J_F\left(1, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 2\sqrt{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Quindi $(F\circ\gamma)'(1)$ è il vettore $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{11}{2\sqrt{2}}\right)$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2t) \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 + 4 = 0$ che ha soluzioni $\lambda = \pm 2i$

L'omogenea associata ha dunque integrale generale $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Cerchiamo una soluzione $\tilde{y}$ dell'equazione completa col metodo di similarità

Poiché $2i$ è soluzione dell'eq. caratteristica cerchiamo $\tilde{y}$ del tipo

$\tilde{y}(t) = t\,(K_1 \cos(2t) + K_2 \sin(2t))$

$\tilde{y}'(t) = K_1 \cos(2t) + K_2 \sin(2t) - 2K_1 t \sin(2t) + 2K_2 t \cos(2t)$

$y''(t) = -4K_1 \sin(2t) + 4K_2 \cos(2t) - 4K_1 t \cos(2t) - 4K_2 t \cos(2t)$.

Quindi sostituendo nell'equazione otteniamo

$-4K_1 \sin(2t) + 4K_2 \cos(2t) = \sin(2t)$ da cui

$$\begin{cases} -4K_1 = 1 \\ 4K_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} K_1 = -\frac{1}{4} \\ K_2 = 0 \end{cases} \quad \text{quindi } \tilde{y}(t) = -\frac{t}{4}\cos(2t)$$

L'integrale generale dell'equazione completa è quindi dato da

$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - \frac{t}{4}\cos(2t)$

$0 = y(0) = c_1$

$y'(t) = 2c_2 \cos(2t) - \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{t}{2}\sin(2t)$

$0 = y(0) = c_1$

$y'(t) = 2c_2\cos(2t) - \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{t}{2}\sin(2t)$

$0 = y'(0) = 2c_2 - \frac{1}{4}$ da cui $c_2 = \frac{1}{8}$

la soluzione del problema è quindi $y(t) = \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{t}{4}\cos(2t)$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Weierstrass per funzioni reali di più variabili reali

Si veda, ad esempio, il manuale consigliato a p. 316 per l'enunciato.

Ecco qui una dimostrazione per il minimo

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, A compatto, $f \in C^0(A) \Rightarrow f$ ha minimo e massimo

Dim del Th di Weierstrass (nel caso del minimo)

I parte: costruisco successione minimizzante

cioè $(a_n) \subset A$ t.c. $f(a_n) \longrightarrow \lambda = \inf f := \inf(f(A))$

II parte: uso la compattezza di A e la continuità di f per far vedere che $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in f(A)$ quindi λ è il minimo di $f(A)$ e dunque è il valore di minimo di f.

I parte:

1° caso: $\lambda = -\infty$: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a_n \in A$ t.c. $\underset{\substack{\downarrow \\ \lambda}}{f(a_n)} < \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{-n}$

2° caso: $\lambda \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $\varepsilon = \frac{1}{n}$ quindi $\exists a_n \in A$ t.c. $\underset{\substack{\downarrow \\ \lambda}}{\lambda} \leq f(a_n) < \underset{\substack{\downarrow \\ \lambda}}{\lambda + \frac{1}{n}}$

$$\Downarrow$$

$$f(a_n) \to \lambda$$

II parte:

a) per la compattezza di A, dalla successione (a_n) posso estrarre (a_{n_k}) t.c. $a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \bar{x} \in A$

b) Poiché $f \in C^0(A)$ $\quad f(a_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(\bar{x})$

$$f(a_{n_k}) \ \Big\downarrow{\scriptstyle k\to\infty}\ \lambda$$

Per l'unicità del limite $\lambda = f(\bar{x})$ e quindi $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in f(A)$ ■