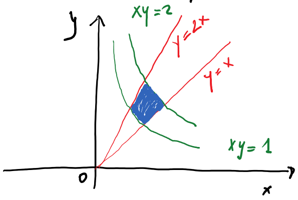
1) Calcolare

$$\int_A y^2 x^2 \, dx\, dy \quad \text{dove} \quad A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2 ,\ 1 < \frac{y}{x} < 2 \right\}$$

A è l'insieme qui rappresentato in blu



Possiamo considerare la trasformazione

$$\Psi : \begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Nelle coordinate (u,v), $\Psi(A)$ è il quadrato

$[1,2] \times [1,2]$

$uv = y^2$ quindi dato che $x^2 = \dfrac{u}{v}$

$$y^2 x^2 = (uv) \cdot \frac{u}{v} = u^2$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} \qquad = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} = 2v$$

$$\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y) \right) = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x}$$

e dunque $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) = \dfrac{1}{2\dfrac{y(u,v)}{x(u,v)}} = \dfrac{1}{2v}$

Pertanto l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{u^2}{2v} \, du\, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u^2 du \int_1^2 \frac{1}{v} dv = \frac{1}{6} u^3 \Big|_1^2 \cdot \log v \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{6} (8 - 1) \cdot \log 2 = \frac{7}{6} \log 2$$

2) Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sia differenziabile in O.

Dire poi se è differenziabile in $(-1,-1)$ e in caso affermativo determinare l'equazione del piano tg al suo grafico in $(-1,-1, f(-1,1))$ e calcolare

$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,1)$ qualunque sia v versore

Osserviamo che $f(x, mx) = \frac{m x^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$

quindi $\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \frac{m}{1+m^2}$ e dunque f non ha limite in $(0,0)$. Non avendo limite, non può essere continua in $(0,0)$ e quindi neanche può essere differenziabile.

In qualunque intorno del punto $(-1,-1)$ che non contenga $(0,0)$ la legge di f è uguale a quella della funzione razionale

$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ che è evidentemente di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

pertanto è differenziabile in tale punto e dunque ha piano tg in $(-1,-1, f(-1,-1))$ di equazione

$$z = f(-1,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1)(x+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1)(y+1)$$

$$f(-1,-1) = \frac{1}{2}$$

$\forall (x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \frac{-2+2}{4} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - xy(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = \frac{-2+2}{4} = 0$$

Quindi l'eq. richiesta è $z = \frac{1}{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,-1) = \langle \nabla f(-1,-1), v \rangle = 0 v_1 + 0 v_2 = 0$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{1+x^2} y + e^{+2\arctg x} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

$\int 2 \, dz$ ... $\int^x \frac{2}{} ds$

$$y(x) = \left(1 + \int_{-1}^{x} e^{-\int_{-1}^{s} \frac{2}{1+z^2} dz} \cdot e^{2 \operatorname{arctg} s} ds \right) e^{\int_{-1}^{x} \frac{2}{1+s^2} ds}$$

$$= \left(1 + \int_{-1}^{x} e^{-2(\operatorname{arctg} s + \operatorname{arctg}(1))} e^{2\operatorname{arctg} s} ds \right) e^{2(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1))}$$

$$= \left(1 + \int_{-1}^{x} e^{-\frac{\pi}{2}} \right) e^{2\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}} (x+1) \right) e^{2\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

4) Dare la definizione di derivata parziale rispetto a x^j funzione reale di n variabili reali $(x^1, \dots, x^n)$ (eventualmente ricordando la nozione di derivata direzionale se si fa ricorso ad essa).

Enunciare e dimostrare poi il Teorema di Fermat per una tale funzione.

Per la definizione si guardi la lezione 37.

Per il Teorema di Fermat, la lezione 40.