Politecnico di Bari
CUC Ingegneria Civile
CdL Ingegneria per Ambientale e per il Territorio
AA 2009-2010

Corso di Analisi Matematica - Tracce di esame

Docenti: Prof.ssa G. Cerami, Dott. E. Caponio

A.A 2009/2010 Appello del 03 Febbraio 2010 Traccia A

1) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - n^n}{(n+1)^n}.$$

2) Stabilire se la seguente funzione è ingettiva e in caso affermativo determinarne l'inversa:

$$f(x) = 2^{x^3-1} - 2.$$

3) Determinare insieme di definizione, asintoti ed eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto della funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{\frac{2x-1}{x}}}.$$

4) Enunciare il Teorema di Lagrange. Utilizzarlo poi per dimostrare che, data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, con $f'(x) < 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e tale che $f(1) = 3$, risulta $f(-3) > -5$.

5) Determinare l'insieme su cui la seguente funzione è differenziabile:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{yx^2 \log(1 + 4x^2 + \frac{y^2}{4})}{x^2 + |y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \frac{y}{x} e^{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 < x^2 + y^2 < 9,\ y > 0,\ y < -\sqrt{3}x\}$.

7) Determinare l'integrale generale in forma implicita dell'equazione differenziale

$$y' = (x^2 + x)(y^2 + y - 6).$$

A.A 2009/2010 Appello del 03 Febbraio 2010 Traccia B

1) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)^n + (-1)^n}{n^n}.$$

2) Stabilire se la seguente funzione è ingettiva e in caso affermativo determinarne l'inversa:

$$f(x) = \log_3(\sqrt[3]{x} + 1) - 3.$$

3) Determinare insieme di definizione, asintoti ed eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto della funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{\frac{x}{3x+1}}}.$$

4) Enunciare il Teorema di Lagrange. Utilizzarlo poi per dimostrare che, data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, con $f'(x) < 3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e tale che $f(3) = 1$, risulta $f(-2) > -14$.

5) Determinare l'insieme su cui la seguente funzione è differenziabile:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 x^2 \log(1 + \frac{x^2}{9} + 9y^2)}{x^2 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \frac{x}{y} e^{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x^2 + y^2 < 4,\ x < 0,\ y < \frac{x}{\sqrt{3}}\}$.

7) Determinare l'integrale generale in forma implicita dell'equazione differenziale

$$y' = (x^3 - x^2)(y^2 + y - 2).$$

A.A 2009/2010 Appello del 22 Febbraio 2010 Traccia A

1) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{(n^{1/4}-2)(n^{3/4}+1)}.$$

2) Stabilire che la funzione $f(x) = 1 + x^2 + \log_{\sqrt{2}} x$ è invertibile e che la sua inversa è derivabile nel punto $y_0 = 4$; calcolare infine $(f^{-1})'(4)$.

3) Determinare insieme di definizione, asintoti ed eventuali punti di minimo e massimo locale e assoluto della funzione:

$$f(x) = \log \frac{x-2}{1+x} - x.$$

4) Stabilire che la seguente equazione ha almeno una soluzione maggiore di 2:

$$(\log x)e^{-\frac{1}{x^2-4}} = 1.$$

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y) = \arcsin(4x^2 - y^2).$$

Dire se tale insieme è aperto, chiuso, limitato.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \frac{x-y}{y^2 x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x} < y < \frac{2}{x},\ x < y < 2x\}$.

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' = x - e^{3x}.$$

A.A 2009/2010 Appello del 22 Febbraio 2010 Traccia B

1) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^{2/3}-2)(n^{1/3}+3)}.$$

2) Stabilire che la funzione $f(x) = 2 + x^2 + \log_{\sqrt{3}} x$ è invertibile e che la sua inversa è derivabile nel punto $y_0 = 6$; calcolare infine $(f^{-1})'(6)$.

3) Determinare insieme di definizione, asintoti ed eventuali punti di minimo e massimo locale e assoluto della funzione:

$$f(x) = \log \frac{x-3}{x-2} - x.$$

4) Stabilire che la seguente equazione ha almeno una soluzione maggiore di 1:

$$\sqrt{x} e^{-\frac{2}{x^2-1}} = 2.$$

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \arcsin(y^2 - 9x^2).$$

Dire se tale insieme è aperto, chiuso, limitato.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_A \frac{2y + x}{xy^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2}{x} < y < \frac{3}{x}, \frac{x}{2} < y < x\}$.

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 3y' = e^{2x} - x.$$

A.A 2009/2010 Appello del 26 Aprile 2010 Traccia A

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3 - 2^{-n^2}}{n^4}.$$

2) Determinare dominio e immagine della funzione

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^{1/4}}.$$

Stabilire, poi, se la funzione $f \circ f$ è ben definita e, in caso affermativo, determinarne la legge.

3) Stabilire che la seguente equazione ha almeno due soluzioni:

$$e^{-x} = \frac{3}{2} - \arctan(x^2 - 2x).$$

4) Determinare gli eventuali asintoti e i punti di minimo e massimo locale e assoluto della funzione:

$$f(x) = 2 - x \log^2(x^2).$$

5) Determinare e rappresentare graficamente il dominio della funzione

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y)}{x} - \sqrt{x^2 - 2y^2 - 1/4}.$$

Stabilire poi se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $((1, 0), f(1, 0))$ e, in caso affermativo, scriverne l'equazione.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_A \frac{y}{x^{\frac{3}{2}}} e^{\sqrt{\frac{y^2}{x}}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \frac{y^2}{x} < 4,\ 1 < y < 2\}$.

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2\sqrt{3x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

A.A 2009/2010 Appello del 26 Aprile 2010 Traccia B

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 - 3^{-n}}{n^3}.$$

2) Determinare dominio e immagine della funzione

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Stabilire, poi, se la funzione $f \circ f$ è ben definita e, in caso affermativo, determinarne la legge.

3) Stabilire che la seguente equazione ha almeno due soluzioni:

$$\arctan(x^4 - e^{-x^2}) + 2^{x-1} = 0.$$

4) Determinare gli eventuali e i punti di minimo e massimo locale e assoluto della funzione:

$$f(x) = 1 - x\log^2(x^2)$$

5) Determinare e rappresentare graficamente il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{\cos(y^2 x)}{y} - \sqrt{y^2 - 3x - 1/9}.$$

Stabilire poi se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $((0,1), f(0,1))$ e, in caso affermativo, scriverne l'equazione.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \frac{x}{y^{\frac{3}{2}}} e^{\sqrt{\frac{x^2}{y}}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \frac{x^2}{y} < 4,\ 1 < x < 3\}$.

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A.A 2009/2010 Appello del 17 Luglio 2010 Traccia A

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\arctan(n^3)}{2n^{3/2}+1}.$$

2) Enunciare il Teorema di derivazione di una funzione inversa. Stabilire, poi, che la seguente funzione è invertibile

$$f(x) = \arctan(e^x + x).$$

e calcolare la derivata della sua funzione inversa nel punto $y_0 = \pi/4$.

3) Enunciare il Teorema della media integrale. Usarlo poi per dimostrare che

$$\int_{-1}^{2} e^{-x^3}\mathrm{d}x > 3/e^8.$$

4) Determinare gli asintoti e gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x) = e^{-x^3+x+1}.$$

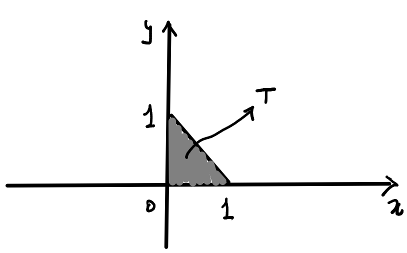
Dire poi, motivando la risposta, se f ha massimo o minimo assoluto.

5) Data $f(x,y) = \cos(x^2 - y^2) + (x - y)$, provare che f ha derivate direzionali secondo una qualunque direzione $v = (v_1, v_2)$ nel punto $(0,0)$. Scrivere tali derivate e determinare i versori $v = (v_1, v_2)$ per cui $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_T x^2 e^{x(y-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove T è l'insieme rappresentato in figura.



7) Determinare le soluzioni **costanti** (o **integrali singolari**) dell'equazione differenziale

$$y' = x^2\cos(y^2).$$

A.A 2009/2010 Appello del 17 Luglio 2010 Traccia B

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{n}\arctan(n^2)}{n^{5/4}+2}.$$

2) Enunciare il Teorema di derivazione di una funzione inversa. Stabilire, poi, che la seguente funzione è invertibile

$$f(x) = \log(2^x + x).$$

e calcolare la derivata della sua funzione inversa nel punto $y_0 = \log 3$.

3) Enunciare il Teorema della media integrale. Usarlo poi per dimostrare che

$$\int_{-2}^{1} e^{-x^3}\mathrm{d}x < 3e^8.$$

4) Determinare gli asintoti e gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x) = e^{2x^3-x^2+1}.$$

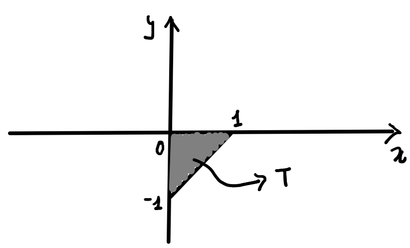
Dire poi, motivando la risposta, se f ha massimo o minimo assoluto.

5) Dta $f(x,y) = \sin(xy^2)+(y+x)$, provare che f ha derivate direzionali secondo una qualunque direzione $v = (v_1, v_2)$ nel punto $(0,0)$. Scrivere tali derivate e determinare i versori $v = (v_1, v_2)$ per cui $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_T x^2 e^{x(y+1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove T è l'insieme rappresentato in figura.



7) Determinare le soluzioni **costanti** (o **integrali singolari**) dell'equazione differenziale

$$y' = x\sin(y^2).$$

A.A 2009/2010 Appello del 17 Settembre 1010 Traccia A

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n^2}}.$$

2) Enunciare il Teorema degli zeri per una funzione continua. Stabilire poi, senza ricavarlo algebricamente, che la seguente equazione

$$e^{\frac{2}{1-x^2}} = e^4$$

ha due sole soluzioni nell'intervallo $(-1, 1)$.

3) Determinare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ per cui la seguente funzione è continua in 0

$$f(x) = \begin{cases} be^{ax} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}\cos x + x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Determinare, poi, i valori per cui essa è anche derivabile in tale punto e dire infine che tipo di discontinuità ha in 0 la funzione derivata di f.

4) Determinare gli asintoti e gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x) = \sqrt{2x^3 - x}.$$

5) Stabilire se il seguente limite esista

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2^{\frac{x^2-2y^2}{y^2+x^2}} 2^{xy}.$$

6) Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_T \frac{1}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2,\ x > 0,\ y > \sqrt{3}x\}$.

7) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{3+x^2}y + x^2 + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2009/2010 Appello del 17 Settembre 1010 Traccia B

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{3^{n^2}}.$$

2) Enunciare il Teorema degli zeri per una funzione continua. Stabilire poi, senza ricavarlo algebricamente, che la seguente equazione

$$e^{\frac{2}{4-x^2}} = e$$

ha due sole soluzioni nell'intervallo $(-2, 2)$

3) Determinare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ per cui la seguente funzione è continua in 0

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x + x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ be^{ax} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Determinare, poi, i valori per cui essa è anche derivabile in tale punto e dire infine che tipo di discontinuità ha in 0 la funzione derivata di f.

4) Determinare gli asintoti e gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x) = \sqrt{x - 3x^3}.$$

5) Stabilire se il seguente limite esista

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2^{\frac{y^3-x^3}{x^2 y}} 2^{x^2+y^2}.$$

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_T \frac{1}{x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x^2 + y^2 < 4,\ x < 0,\ y > -\sqrt{3}x\}$.

7) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{2+x^2} y + x^2 - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2009/2010 Appello del 29 Novembre 2010 Traccia A

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^{-\sqrt{n}} + \cos(n\pi)}{n}.$$

2) Determinare estremo superiore ed estremo inferiore (eventualmente massimo e minimo) dell'insieme

$$\{(1 - 2\cos n\pi)(6 - n^{\cos n\pi}),\ n \in \mathbb{N}\}$$

3) Dare la definizione di funzione continua in un punto ed in un insieme di $\mathbb{R}$ e di funzione derivabile in un punto ed in un insieme di $\mathbb{R}$. Studiare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità in $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \log|x| & \text{se } |x| > 1 \\ ax^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{-x} & \text{se } -1 \le x < 0. \end{cases}$$

4) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} - \log x,$$

determinarne l'insieme di definizione e stabilire che è invertibile in esso. Enunciare poi il teorema di derivazione della funzione inversa e usarlo per calcolare $Df^{-1}(y_0)$, con $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \log 2$.

5) Determinare e rappresentare graficamente il dominio della funzione

$$f(x, y) = \log(y \sin(\pi x)).$$

Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, limitato, connesso di $\mathbb{R}^2$ e, motivando la risposta, dire se il dominio della funzione, prima determinato, sia chiuso, aperto, connesso, limitato.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\int\!\!\int_T \frac{1}{\sqrt{x-1}} \log\left(\frac{1}{y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 1 < x < 3,\ y > 1\}$.

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y = e^x + \cos x$$

A.A 2009/2010 Appello del 29 Novembre 2010 Traccia B

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi) - n3^{-\sqrt{n}}}{n}.$$

2) Determinare estremo superiore ed estremo inferiore (eventualmente massimo e minimo) dell'insieme

$$\{(5\cos n\pi - 4)(3 - n^{\cos n\pi}),\ n \in \mathbb{N}\}$$

3) Dare la definizione di funzione continua in un punto ed in un insieme di $\mathbb{R}$ e di funzione derivabile in un punto ed in un insieme di $\mathbb{R}$. Studiare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità in $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \log|x| & \text{se } |x| > 1 \\ ax^2 & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

4) Data la funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{1-x^2},$$

determinarne l'insieme di definizione e stabilire che è invertibile in esso. Enunciare poi il teorema di derivazione della funzione inversa e usarlo per calcolare $Df^{-1}(y_0)$, con $y_0 = \sqrt{e} - \frac{\sqrt{15}}{4}$.

5) Determinare e rappresentare graficamente il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{(x\sin(\pi y))^{1/2}}.$$

Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, limitato, connesso di $\mathbb{R}^2$ e, motivando la risposta, dire se il dominio della funzione, prima determinato, sia chiuso, aperto, connesso, limitato.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\int\!\!\int_T \frac{1}{\sqrt{x-1}} \log\left(\frac{1}{y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 1 < x < 5,\ y > 1\}$.

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y = x + \sin x$$