

1)-a) Calcolare il modulo e l'argomento principale del numero complesso

$$(1-i)^5 (\sqrt[3]{2}i)^6$$

$$|(1-i)^5 (\sqrt[3]{2}i)^6| = |(1-i)^5| \cdot |\sqrt[3]{2}|^6 \cdot |i|^6 = (\sqrt{2})^5 \cdot (\sqrt[3]{2})^6 \cdot 1 = 2^{5/2} \cdot 4 = 2^{3/2}$$

Per determinare l'argomento principale esprimiamo le potenze e poi facciamo il prodotto

$$1-i = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} \quad \text{quindi} \quad (1-i)^5 = \sqrt{2}^5 e^{-\frac{5\pi}{4}i}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{quindi} \quad i^6 = e^{3\pi i} = e^{\pi i}$$

$$\text{Quindi } (1-i)^5 (\sqrt[3]{2}i)^6 = 4 \cdot \sqrt{2}^5 e^{-\frac{5\pi}{4}i} \cdot e^{\pi i} = 4 \cdot \sqrt{2}^5 e^{-\frac{\pi}{4}i} \quad \text{quindi l'argomento principale } \bar{-\frac{\pi}{4}}$$

1)-b) Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^7-1} + \arctg\left(\frac{\pi}{2} + \log(x^{\frac{1}{3}}-1)\right)$$

$$\text{dom } f: x^{\frac{1}{3}}-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad \text{quindi} \quad \text{dom } f = (1, +\infty)$$

La funzione $x \in (1, +\infty) \mapsto x^7-1$ è strettamente crescente e quindi

$x \in (1, +\infty) \mapsto \sqrt[3]{x^7-1}$ è strett. decrescente in quanto composta da due funzioni strett. crescenti

La funzione $x \in (1, +\infty) \mapsto x^{\frac{1}{3}}-1$ è strett. decrescente quindi anche

$x \in (1, 2) \mapsto \log(x^{\frac{1}{3}}-1) + \frac{\pi}{2}$ è strett. decrescente; poiché la funzione $y(x) = \arctg x$

anch'essa strettamente crescente, abbiamo che $x \in (1, +\infty) \mapsto \arctg\left(\frac{\pi}{2} + \log(x^{\frac{1}{3}}-1)\right)$

è strettam. crescente. Dato che f è somma di due funzioni strett. crescenti, essa è strett. crescente.

$$\text{Poiché } f \text{ è continua } \text{Im } f := f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left(-\frac{\pi}{2}, +\infty \right)$$

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = x \arctg(\sqrt{x^2-1})$$

Se ne determini il dominio; si dimostri che è una funzione dispari.

Se ne tracci quindi un grafico approssimativo dopo aver determinato asintoti, e monotonia solo sull'intervallo del dominio contenuto in $[0, +\infty)$

$$\text{dom } f: x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -1; \quad \text{quindi} \quad \text{dom } f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty):$$

$$f(-x) = -x \arctg(\sqrt{(-x)^2-1}) = -x \arctg(\sqrt{x^2-1}) = -f(x), \quad \text{quindi } f \text{ è dispari}$$

$$\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty):$$

$$f(-x) = -x \operatorname{arctg} \sqrt{(-x)^2 - 1} = -x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} = -f(x), \text{ quindi } f \text{ è dispari}$$

Poiché f è dispari possiamo limitare il nostro studio all'intervallo $[1, +\infty)$

$f \in C^0([1, +\infty))$ quindi non ha punti di discontinuità

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left[+\infty \cdot \frac{\pi}{2} \right] = +\infty, \text{ non ha asintoti orizzontali}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 - 1}) = \frac{\pi}{2}$$

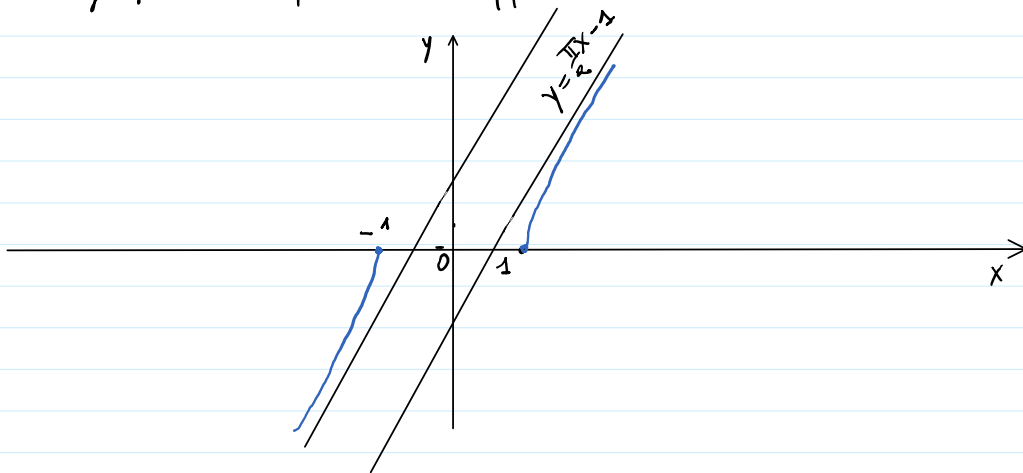
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 - 1}) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -1 \text{ quindi la retta } y = \frac{\pi}{2}x - 1 \text{ è} \\ &\quad \text{asintoto obliquo per } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$f'(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 - 1}) + x \frac{1}{1+x^2-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 - 1}) + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$ dato che è somma di due funzioni

positive. Osservando infine che $f(1) = 0$ e $f(x) > 0 \quad \forall x \in (1, +\infty)$

il grafico di f è dato approssimativamente dalla curva in blu.



3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-2}^2 x^3 e^{x^4-1} dx$$

$$\int_{-2}^2 x^3 e^{x^4-1} dx \quad x^4 = t$$

$$\frac{1}{4} \int_{-16}^{16} e^{t-1} dt = 0$$

$$\int_{-2}^2 x^3 e^{x^4-1} dx \stackrel{x^4=t}{=} \frac{1}{4} \int_{16}^{16} e^{t-1} dt = 0$$

$dt = 4x^3 dx$

oppure si osserva che la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a 0 e quindi l'integrale è nullo.

- 4) Dare la definizione di funzione convessa su un intervallo aperto I e di punto di flesso. Dimostrare che se f è derivabile due volte in un punto di flesso $x_0 \in I$ allora $f''(x_0) = 0$

Si vedano le definizioni 7.26, 7.31 e il Th. 7.32 del manuale consigliato