1) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{k^{2/3}}\right)+\log\left(1-\frac{1}{k^{2/3}}\right)}{2k^{-1/2}-1}$$

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{k^{2/3}}\right)+\log\left(1-\frac{1}{k^{2/3}}\right)}{2k^{-1/2}-1} = \frac{\log\left(1-\frac{1}{k^{4/3}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{k}}-1} \sim \frac{1}{k^{4/3}}$$

Poiché $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{4/3}} \in \mathbb{R}$ anche la serie di partenza converge

2) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}^2(y-x)\cdot(y-2x+1)^3$$

Stabilire se esiste la derivata direzionale nel punto $(1,0)$ secondo la direzione $v=\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ ed in caso affermativo calcolarla. Determinare infine gli eventuali punti estremali di f.

f è una funzione di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ in quanto prodotto di $g(x,y) = \operatorname{arctg}^2(y-x)$ che è C^∞ poiché composta del polinomio $y-x$ e del quadrato della funzione arctg e del polinomio $h(x,y) = (y-2x+1)^3$. Dunque f è

differenziabile in ogni punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e dunque

esiste $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \langle \nabla f(1,0), v\rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\operatorname{arctg}(y-x)\cdot\left(-\frac{1}{1+(y-x)^2}\right)(y-2x+1)^3 - \operatorname{arctg}^2(y-x)\, 6\,(y-2x+1)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\operatorname{arctg}(y-x)\,\frac{1}{1+(y-x)^2}(y-2x+1)^3 + \operatorname{arctg}^2(y-x)\, 3\,(y-2x+1)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2\operatorname{arctg}(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) - \operatorname{arctg}^2(-1)\,6\cdot 1 = -\frac{\pi}{4} - 6\frac{\pi^2}{16} = -\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2\operatorname{arctg}(-1)\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) + \operatorname{arctg}^2(-1)\cdot 3\cdot 1 = -\frac{\pi}{4} + 3\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3\pi}{4}-1\right)$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \frac{\pi}{16}\left(1+\frac{3}{2}\pi\right) + \frac{\sqrt{15}}{16}\pi\left(\frac{3}{4}\pi-1\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(1+\frac{3}{2}\pi + \frac{\sqrt{15}\cdot 3}{4}\pi - \sqrt{15}\right)$$

Dato che $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ i suoi eventuali punti estremali devono

16

Dato che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ i suoi eventuali punti estremali devono essere punti critici. Cerchiamoli:

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{arctg}(y-x)\cdot\left(-\dfrac{1}{1+(y-x)^2}\right)(y-2x+1)^3 - \mathrm{arctg}^2(y-x)\,6\,(y-2x+1)^2 = 0 \\ 2\,\mathrm{arctg}(y-x)\,\dfrac{1}{1+(y-x)^2}\,(y-2x+1)^3 + \mathrm{arctg}^2(y-x)\,3\,(y-2x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro e riscrivendo la 1ª equazione otteniamo

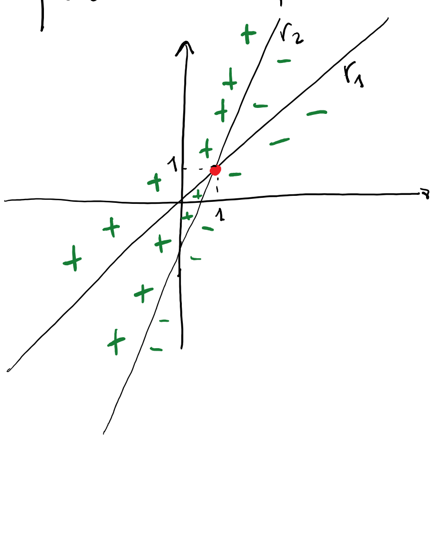
$$\begin{cases} -3\,\mathrm{arctg}^2(y-x)\,(y-2x+1)^2 = 0 \\ 2\,\mathrm{arctg}(y-x)\,\dfrac{1}{1+(y-x)^2}\,(y-x+2)^3 + \mathrm{arctg}^2(y-x)\,3\,(y-x+2)^2 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} \mathrm{arctg}(y-x) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y-2x+1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \parallel$$

Quindi le rette di equazione $r_1: y = x$ e $r_2: y = 2x-1$ sono rette di punti critici. Poiché se $(\bar{x},\bar{y}) \in r_1 \cup r_2$ $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$, il segno di $f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y})$ coincide con quello di f. Il segno di f dipende solo da quello del polinomio $y-2x+1$:



Il punto di intersezione tra r_1 e r_2 ha coordinate $\begin{cases} y-x=0 \\ y-2x+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x \\ x=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$

quindi se $(\bar{x},\bar{y}) \in r_1$ e $\bar{x} > 1$

$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y) < 0$ in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$

che è quindi di max locale non forte;

se $(\bar{x},\bar{y}) \in r_1$ e $\bar{x} < 1$

$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y) > 0$ in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$

che è quindi di min locale non forte;

che i punti di min locale non fosse;
il punto $(1,1)$ così come tutti i punti della retta r_2
è di sella in quanto $f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y)$ non ha
un segno definito in alcun intorno di $(\bar{x},\bar{y}) \in r_2$.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = \cos(\pi t) + 1 & (*) \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata all'eq. $(*)$ è

$\lambda^2 + \pi^2 = 0$ che ha discriminante negativo. L'omogenea
associata ha dunque integrale generale

$$y(t) = c_1 \cos(\pi t) + c_2 \sin(\pi t)$$

Cerchiamo una soluzione particolare di $(*)$
Il termine noto è $f(t) = \cos(\pi t) + 1$; possiamo
applicare il metodo di similitudine separatamente a

$$y'' + \pi^2 y = 1 \qquad e \qquad y'' + \pi^2 y = \cos(\pi t)$$

Per la prima, deve essere $\tilde{y}(t) = k$ cioè $\pi^2 k = 1$ da cui

$$k = \frac{1}{\pi^2}$$

Per la seconda dato che $i\pi$ è soluzione dell'equazione
caratteristica dell'omogenea associata, cerchiamo $\tilde{y}_2(t)$ del tipo

$$\tilde{y}_2(t) = t\left(k_1 \cos(\pi t) + k_2 \sin(\pi t) \right)$$

$$\tilde{y}_2'(t) = k_1 \cos(\pi t) + k_2 \sin(\pi t) + t\left(-\pi k_1 \sin(\pi t) + \pi k_2 \cos(\pi t)\right)$$

$$= \cos(\pi t)\left[k_1 + \pi k_2 t\right] + \sin(\pi t)\left[k_2 - \pi k_1 t\right]$$

$$\tilde{y}_2''(t) = -\pi \sin(\pi t)\left[k_1 + \pi k_2 t\right] + \cos(\pi t)\, \pi k_2$$
$$+ \pi \cos(\pi t)\left[k_2 - \pi k_1 t\right] - \sin(\pi t)\, \pi k_1$$

Quindi

$$-\pi \sin(\pi t)\left[k_1 + \cancel{\pi k_2 t}\right] + \cos(\pi t)\, \pi k_2$$
$$+ \pi \cos(\pi t)\left[k_2 - \cancel{\pi k_1 t}\right] - \sin(\pi t)\, \pi k_1$$

$$+\pi\cos(\pi t)\left[k_2-\cancel{\pi k_1 t}\right]-\sin(\pi t)\,\pi k_1$$

$$+\cancel{\pi^2 k_1 t\cos}(\pi t)+\pi^2 k_2 \cancel{t\sin}(\pi t)=\cos(\pi t)$$

$$\iff -2k_1\pi\sin(\pi t)+2k_2\pi\cos(\pi t)=\cos(\pi t)$$

Deve quindi essere $-2k_1\pi=0$ e $2k_2\pi=1$ da cui $k_1=0$ e $k_2=\frac{1}{2\pi}$. La soluzione particolare cercata è dunque

$$\tilde{y}_2(t)=\frac{t}{2\pi}\sin(\pi t)$$

Quindi l'integrale generale di (*) è dato da

$$y(t)=c_1\cos(\pi t)+c_2\sin(\pi t)+\frac{t}{2\pi}\sin(\pi t)+\frac{1}{\pi^2}$$

$0=y(0)=c_1+\frac{1}{\pi^2}$ da cui $c_1=-\frac{1}{\pi^2}$

e quindi $y'(t)=\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)+c_2\pi\cos(\pi t)+\frac{\sin(\pi t)}{2\pi}+\frac{t}{2}\cos(\pi t)$

$0=y'(0)=c_2\pi$ e dunque $c_2=0$

La soluzione del problema è quindi

$$y(t)=-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)+\frac{t}{2\pi}\sin(\pi t)+\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{\pi^2}\left(1-\cos(\pi t)+\frac{\pi}{2}t\sin(\pi t)\right)$$

4) Enunciare la caratterizzazione di un insieme misurabile in relazione alla sua frontiera. Dare la definizione di insieme normale rispetto all'asse delle x e spiegare perché è misurabile.

Si veda la lezione 43