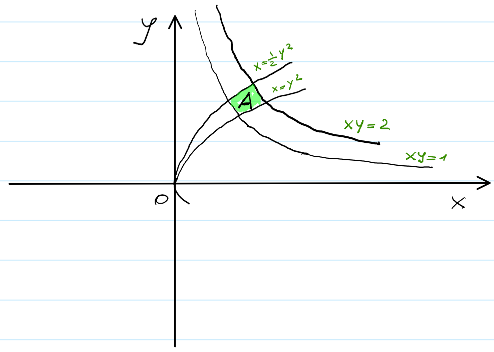
1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{x^2}{y}\,dx\,dy,$$

dove $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2 \,,\ \frac{1}{2}y^2 < x < y^2\}$.

Rappresentiamo l'insieme A nel piano (in verde)



Conviene considerare il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{x}{y^2} = v \end{cases} \quad (*) \;;$$

l'insieme A nel piano $\{u,v\}$ è dato da $1<u<2$ e $\frac{1}{2}<v<1$ cioè è il rettangolo $[1,2]\times[\frac{1}{2},1]$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = -\frac{2x}{y^2} - \frac{x}{y^2} = -3\frac{x}{y^2} = -3v$$

Quindi $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|-\frac{1}{3v}\right| = \frac{1}{3v}$

La funzione integranda composta con la inversa della trasforma $(*)$ è data da

$$\frac{x^2}{y} = \frac{x^2 y}{y^2} = \frac{x}{y^2}\,xy = vu$$

L'integrale assegnato nelle coordinate $\{u,v\}$ è quindi dato da

$$\int vu\cdot\frac{1}{3v}\,du\,dv = \frac{1}{3}\int^{2} u\,du \cdot \int^{1} dv$$

$$\int_{[1,2]\times[\frac{1}{2},1]} vu \cdot \frac{1}{3v}\, du\, dv = \frac{1}{3}\int_{1} u\, du \cdot \int_{\frac{1}{2}} dv$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \frac{1}{2}u^2\Big|_1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}(4-1) = \frac{1}{4}$$

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(x^2(y-x+1)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

e stabilire che essa è differenziabile sullo stesso.
Calcolare quindi l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(1,1,f(1,1))$
Determinare infine i suoi punti stazionari stabilendone la natura

Osserviamo che $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$, poiché l'argomento della funzione radice quadrata al denominatore, e cioè il polinomio $g(x,y) = x^2(y-x+1)^2+1$ assume valori positivi.
Poiché f è composta dunque dalle funzioni g e $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ che sono di classe C^∞ rispettivamente su $\mathbb{R}^2$ e su $(0,+\infty)$, f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ e dunque è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ per il teorema del differenziale.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x^2(y-x+1)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-2x(y-x+1)^2+2x^2(y-x+1)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x^2(y-x+1)^2+1\right)^{3/2}}\left(-2x^2(y-x+1)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2^{5/2}}(-2+2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2^{5/2}}(-2) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

L'equazione del piano tangente nel punto $(1,1,f(1,1))$ è dunque

$$z = f(1,1) + 0\cdot(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1)$$

$z = f(1,1) + 0\cdot(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1)$

Cerchiamo ora i punti stazionari di f.

Osserviamo che il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} -2x(y-x+1)^2 + 2x^2(y-x+1) = 0 \\ -2x^2(y-x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(y-x+1)(-y+x-1+x) = 0 \\ x^2(y-x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-x+1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

quindi le rette $x=0$ e $y=x-1$ sono rette di punti critici

Poiché lungo entrambe tali rette f assume il valore 1, cerchiamo di studiare il segno di $f(x,y)-1$ cioè

$$\frac{1-\sqrt{x^2(y-x+1)^2+1}}{\sqrt{x^2(y-x+1)^2+1}}$$

Ovviamente il segno di tale funzione è uguale al segno del suo numeratore. Poiché $x^2(y-x+1)^2 + 1 \geq 1$ è non negativa

$\sqrt{x^2(y-x+1)^2+1} \geq \sqrt{1} = 1$ cioè $1-\sqrt{x^2(y-x+1)^2+1} \leq 0$

e quindi sia i punti della retta $x=0$ che quelli di $y-x+1=0$ sono punti di massimo locale non forte

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y + e^{x^3/2} \\ y(-1) = 0 \end{cases} \quad (\square)$$

Sappiamo che la soluzione di (□) è data da

$$y(x) = e^{\int_{-1}^{x} t^2\, dt} \left(0 + \int_{-1}^{x} e^{-\int_{-1}^{t} s^2} \cdot e^{t^3/2}\, dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{3}(x^3+1)} \cdot \int_{-1}^{x} e^{-\frac{1}{3}(t^3+1)}\, e^{t^3/2}\, dt$$

$$= e^{\frac{1}{3}(x^3+1)} \cdot \int_{-1}^{x} e^{-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3} + \frac{t^3}{2}}\, dt = e^{\frac{1}{3}(x^3+1)}\, e^{-\frac{1}{3}} \int_{-1}^{x} e^{t^3/6}\, dt$$

$$= e^{x^3/3} \int_{-1}^{x} e^{t^3/6}\, dt .$$

4) Dare la definizione di serie numerica. Specificare poi cosa si intende per serie numerica regolare. Dimostrare infine che le serie a termini non negativi sono regolari

Si veda, ad esempio, il manuale consigliato "Elementi di Analisi Matematica 1" di P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori 2002, pagg. 259, 263, 264