1)-a) Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$ esprimendo le soluzioni in forma esponenziale

$$z^6 + 2e^{-i\frac{\pi}{3}} z = 0$$

Mettendo in evidenza z otteniamo

$$z\left(z^5 + 2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$$ le cui soluzioni sono

$$z = 0 \quad \text{e} \quad z = \sqrt[5]{-2e^{-i\frac{\pi}{3}}}.$$

Naturalmente la forma esponenziale di 0 è 0, mentre

$$\sqrt[5]{-2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt[5]{2\cdot e^{-i\pi}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2^{\frac{1}{5}} e^{-i\left(\frac{4}{15}\pi + \frac{2\pi k}{5}\right)}, \quad k = 0,1,2,3,4$$

b) Determinare insieme di definizione e monotonia e immagine della funzione

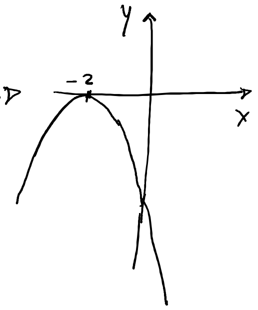
$$f(x) = e^{-(x+2)^2}\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$$

f è prodotto delle funzioni positive

$$f_1(x) = e^{-(x+2)^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$f_1(x) = x \in (0, +\infty) \mapsto -(x+2)^2 \mapsto e^{-(x+2)^2}$$



poiché la funzione $y(x) = -(x+2)^2$ ha grafico vediamo che per $x>0$ è strettamente **decrescente**; quindi f_1 è strett. decrescente su $(0,+\infty)$ in quanto composta da una funzione strett. decrescente e una strett. crescente ($y = e^x$, all'esterno)

f_2 è anch'essa composta da una funzione strett. decrescente su $(0,+\infty)$ (cioè $x \in (0,+\infty) \mapsto \frac{1}{x}$) e una strett. crescente (cioè $x \in [0,+\infty) \mapsto \sqrt{x}$) e dunque è strett. decrescente.

f in quanto prodotto di due funzioni positive strett. decrescenti è strett. decrescente. Poiché f è continua, abbiamo dunque anche che $\operatorname{im} f = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)\right) = (0, +\infty)$

2) Determinare il dominio e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(\cos^3 x) - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + \pi^{\frac{1}{3}}}$$

Stabilire che f è derivabile in π e scrivere l'equazione della retta tg al suo grafico nel punto $(\pi, f(\pi))$

dom f: $x^{\frac{1}{3}}+\pi^{\frac{1}{3}}\neq 0$ cioè $x\neq -\pi$; dom f $=(-\infty,-\pi)\cup(-\pi,+\infty)$

$f\in C^0(\text{dom} f)$ quindi dobbiamo solo stabilire se f ha asintoti verticali in $x=-\pi$ e asintoti orizzontali ed eventualmente obliqui per $x\to\pm\infty$

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x)=\frac{\operatorname{arctg}(\cos^3\pi)+\pi^{\frac{1}{3}}}{0^+}=\frac{-\frac{\pi}{4}+\pi^{\frac{1}{3}}}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\pi^-} f(x)=\frac{-\frac{\pi}{4}+\pi^{\frac{1}{3}}}{0^-}=-\infty$$

quindi la retta $x=-\pi$ è asintoto verticale sia a dx che a sx per f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\cos^3x)}{x^{\frac{1}{3}}}-1\right)}{\cancel{x^{\frac{1}{3}}}\left(1+\left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}=\frac{0-1}{1+0}=-1$$

quindi la retta $y=-1$ è asintoto orizzontale per $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\cos^3x)}{x^{\frac{1}{3}}}-1\right)}{\cancel{x^{\frac{1}{3}}}\left(1+\left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}=\frac{0-1}{1+0}=-1$$

quindi la retta $y=-1$ è anche asintoto orizzontale per $x\to+\infty$

Poiché f è il quoziente di funzioni derivabili su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (si ricordi che $y=x^{\frac{1}{3}}$ non è derivabile in $x=0$) f è derivabile in $x=\pi$;

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{1+\cos^6x}3\cos^2x(-\sin x)-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+\pi^{\frac{1}{3}}\right)-\left(\operatorname{arctg}(\cos^3x)-x^{\frac{1}{3}}\right)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}+\pi^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$

$$f'(\pi)=\left(0-\frac{1}{3}\pi^{-\frac{2}{3}}\right)2\pi^{\frac{1}{3}}-\left(-\frac{\pi}{4}-\pi^{\frac{1}{3}}\right)\frac{1}{3}\pi^{-\frac{2}{3}}$$

$$=-\frac{2}{3}\pi^{-\frac{1}{3}}+\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{12}+\frac{\pi^{-\frac{1}{3}}}{3}=\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{12}-\frac{\pi^{-\frac{1}{3}}}{3}$$

$$f(\pi)=\frac{-\frac{\pi}{4}-\pi^{\frac{1}{3}}}{2\pi^{\frac{1}{3}}}$$. Quindi l'equazione della retta tg richiesta è

$$y=-\frac{\pi+4\pi^{\frac{1}{3}}}{8\pi^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{12}-\frac{\pi^{-\frac{1}{3}}}{3}\right)(x-\pi)$$

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\sin x}{\cos x+1}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \sin x}{\cos x + 1}\, dx$$

Posto $\cos x = t$, $dt = -\sin x\, dx$ e quindi per sostituzione l'integrale assegnato è uguale a

$$-\int_1^{\frac{\sqrt2}{2}} \frac{t}{t+1}\, dt = \int_{\frac{\sqrt2}{2}}^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 1 - \frac{\sqrt2}{2} - \log(t+1)\Big|_{\frac{\sqrt2}{2}}^1 = \frac{1-\sqrt2}{2} - \log\frac{4}{2+\sqrt2}$$

4) Enunciare e dimostrare la formula di Taylor di radice n col resto di Peano

Usare la formula di Maclaurin di e^x per dimostrare che $e^{-x^2/2} - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ $(\square)$

Per enunciato e dimostrazione si veda la lezione 24

Poiché $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

sostituendo x con $-\frac{x^2}{2}$ otteniamo

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$ da cui segue $(\square)$