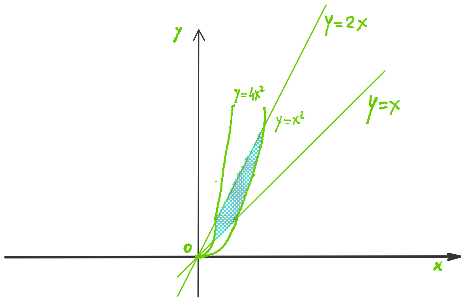
1) Calcolare

$$\int_A \frac{x^2}{y}\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2<y<4x^2,\ x<y<2x\right\}$$

L'insieme A è rappresentato in figura qui sotto (è la regione di piano colorata)



Possiamo introdurre le variabili

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2} \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Quindi nelle coordinate $\{u,v\}$ l'insieme A corrisponde al rettangolo $1<u<4$ e $1<v<2$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} \ ; \quad \det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = -\frac{2y}{x^4}+\frac{y}{x^4} = -\frac{y}{x^4}$$

Quindi $\left|\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)\right| = \frac{y}{x^4}$ dato che $y>0$ su A

$$u^2=\frac{y^2}{x^4}\ , \quad v^2=\frac{y^2}{x^2}\ ; \quad \frac{v^2}{u}=\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{y}=y$$

quindi $\displaystyle \frac{y}{x^4}=\frac{u^2}{\frac{v^2}{u}}=\frac{u^3}{v^2}$

Pertanto $\displaystyle \left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| = \frac{1}{\frac{u^3}{v^2}} = \frac{v^2}{u^3}$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_{(1,4)\times(1,2)} \frac{1}{u}\cdot\frac{v^2}{u^3}\,du\,dv = \int_1^4 \frac{1}{u^4}\,du \int_1^2 v^2\,dv = -\frac{1}{3}u^{-3}\Big|_1^4 \cdot \frac{1}{3}v^3\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(4^{-3}-1\right)\frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{9}\left(1-4^{-3}\right)$$

2) Determinare il dominio della funzione vettoriale

$$F(x,y) = \left(\log\left(\frac{x^2+y}{x+y}\right),\ e^{\sqrt{x-y}},\ x-y\right)$$

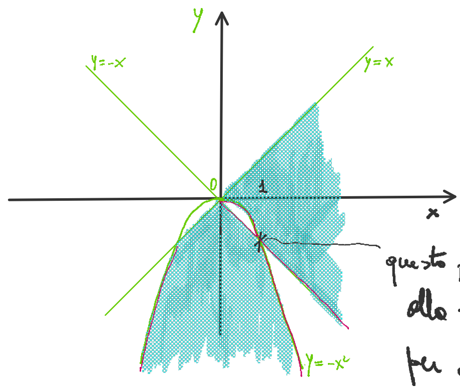
e rappresentarlo nel piano.

Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi

Stabilire che F è differenziabile nel punto $(1,0)$ e determinare la matrice Jacobiana nello stesso punto.

$$\operatorname{dom} F = \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{x+y} > 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{x+y} > 0 \\ y \leq x \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{cases} x^2+y > 0 \\ x+y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y < 0 \\ x+y < 0 \end{cases} \\ y \leq x \end{cases}$$

Il dominio di F è quindi l'insieme in verde nella figura qui sotto.



dom F non è aperto perché i punti della retta $y=x$ per $x>0$ appartengono a dom F ma non sono interni.

dom F non è neanche chiuso perché i punti della retta $y=-x$ per $x>1$, ad esempio, sono di frontiera ma non appartengono a dom F. dom F è illimitato.

questo punto non appartiene al dominio in quanto appartiene alla retta $y=-x$. Quindi l'insieme non è connesso per archi

Ognuna delle componenti di F ha derivate parziali nei punti interni a dom F. Tali funzioni derivate parziali sono anche continue su $\mathring{\operatorname{dom}} F$. Quindi, per il teorema del differenziale, F è differenziabile su $\mathring{\operatorname{dom}} F$. In particolare F è differenziabile in $(1,0)$.

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x+y}{x^2+y} \, \dfrac{2x(x+y)-(x^2+y)}{(x+y)^2} & \dfrac{x+y}{x^2+y} \, \dfrac{x+y-x^2-y}{(x+y)^2} \\ e^{\sqrt{x-y}} \, \dfrac{1}{2\sqrt{x-y}} & -e^{\sqrt{x-y}} \, \dfrac{1}{2\sqrt{x-y}} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_F(1,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{2-1}{1} & 0 \\ \dfrac{e}{2} & -\dfrac{e}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e}{2} & -\frac{e}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma implicita

$$y' = (y^3 - y)\sqrt{1-t}$$

È un'equazione a variabili separabili del tipo $y' = \overbrace{g(y)}^{y^3-y} \, \overbrace{h(t)}^{\sqrt{t-1}}$, le soluzioni singolari sono le soluzioni costanti che annullano g e quindi sono $y=0$ e $y=\pm 1$

Escludendo queste soluzioni, possiamo dividere ambo i membri dell'eq. per g e ottenere $\frac{y'}{y^3-y} = \sqrt{1-t}$. Integrando

$$\int \frac{dy}{y(y^2-1)} = \int \sqrt{1-t}\, dt$$

$$\int \sqrt{1-t}\, dt = -\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{1}{y(y^2-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1} = \frac{Ay^2-A+By(y+1)+Cy(y-1)}{y(y^2-1)}$$

$$= \frac{Ay^2-A+By^2+By+Cy^2-Cy}{y(y^2-1)}$$

deve quindi essere $\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=0 \\ -A=1 \end{cases}$ $\begin{cases} A=-1 \\ B+C=1 \\ B=C \end{cases}$ $\begin{cases} A=-1 \\ B=C \\ 2B=1 \end{cases}$ $\begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$

Quindi $$\int \frac{dy}{y(y^2-1)} = -\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+1}$$

$$= -\log|y| + \frac{1}{2}\log|y-1| + \frac{1}{2}\log|y+1|$$

$$= \log\left(\sqrt{|y^2-1|}/|y|\right)$$

Quindi l'integrale generale in forma implicita è $\log\left(\frac{\sqrt{|y^2-1|}}{y}\right) = -\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}+C$

4) Dare la definizione di serie geometrica di ragione q.

Dedurre il suo carattere al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Scrivere infine 1 come somma di una serie geometrica priva del primo termine

Sia $p\in\mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ si dice serie geometrica.

(*) $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$; se $q = 1$, $s_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ volte}} = n+1 \to +\infty$

quindi per $q = 1$, la serie diverge

Se $q \neq 1$, moltiplichiamo ambo i membri di (*) per q

(**) $q s_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$; sottraendo (**) membro a membro da (*)

otteniamo $(1-q) s_n = 1 - q^{n+1}$ da cui $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Da questa espressione otteniamo subito che $s_n \to 1/_{1-q}$ se $q \in (-1,1)$

$s_n \to +\infty$ se $q > 1$ e s_n non ha limite se $q \leq -1$.

Quindi (*) converge a $\dfrac{1}{1-q}$ per $q \in (-1,1)$, diverge pos. per $q \geq 1$

ed è indeterminata per $q \leq -1$

Poiché $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, abbiamo che $\displaystyle 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$