1) - a) Determinare le radici settime (in forma esponenziale) del numero complesso

$$z = \frac{(i-2)\,\overline{(i-2)}\, e^{-1+\frac{\pi}{2}i}}{i}$$

$$z = \frac{|i-2|^2 e^{-1} e^{\frac{\pi}{2}i}}{i} = \frac{5}{e}\,\frac{i}{i} = \frac{5}{e}$$

$$\sqrt[7]{\frac{5}{e}} = \sqrt[7]{\frac{5}{e}}\, e^{i\left(\frac{0}{7}+\frac{2\pi}{7}k\right)}, \quad k = 0, \dots, 6$$

$$= \sqrt[7]{\frac{5}{e}}\, e^{i\frac{2\pi}{7}k}, \quad k = 0, \dots, 6$$

1) - b)

Stabilire se il seguente insieme è limitato superiormente, inferiormente e determinarne sup e inf ed eventualmente massimo e minimo

$$A = \left\{ e^{-n^2} - 1 \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

A è l'immagine della successione $\left\{ e^{-n^2} - 1 \right\}_{n\in\mathbb{N}}$

Poiché $n^2 < (n+1)^2$, $-n^2 > -(n+1)^2$

e dato che la funzione esponenziale è strett. crescente

$e^{-n^2} > e^{-(n+1)^2}$ e quindi $e^{-n^2} - 1 > e^{-(n+1)^2} - 1$

Pertanto la successione $\left\{ e^{-n^2} - 1 \right\}$ è strett. decrescente quindi $\max(e^{-u^2}-1) = e^{-0^2}-1 = 0$

$\inf(e^{-u^2}-1) = \lim(e^{-u^2}-1) = 0-1=-1$

Dunque A è limitato superiormente ed ha massimo $=0$;
A è limitato inferiormente ma non ha minimo.

2) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to1^-} x^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(x^2)+x^{\sqrt2}}{1-\cos(x^{1/\sqrt2})}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to0}\frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to1^-} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x-1}\log x}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{\log((x-1)+1)}{x-1} = 1$$

quindi $\lim_{x\to1^-} x^{\frac{1}{x-1}} = e$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x^2)+x^{\sqrt2}}{1-\cos(x^{1/\sqrt2})} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x^{\sqrt2}}{\frac{(x^{1/\sqrt2})^2}{2}} =$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\sqrt2}}{x^{\sqrt2}}2 = 2$$

3

3) Stabilire per quali valori dei parametri a e b reali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{se } x \geq 2 \\ x \log\left(\frac{x}{x^2-2}\right) & \text{se } x \in (-\sqrt{2},0) \cup (\sqrt{2},2) \end{cases}$$

è derivabile in $x=2$.
Una volta determinati a e b procedere con la determinazione degli asintoti di f.
Stabilire infine che f è strett. decrescente su un intervallo di centro 2

Perché f sia derivabile in $x=2$ deve essere continua in tale punto cioè deve essere

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2a+b = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x\log\left(\frac{x}{x^2-2}\right) = 2\log 1 = 0$$

Quindi deve essere $2a+b=0$
Poiché f è derivabile a dx e a sx di $x=2$ abbiamo che f è derivabile anche in 2 se

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$$

Tenendo presente che per $x \to 2^+$, sia x che x^2-2 sono definitivamente positivi

$$x\log\frac{x}{x^2-2} = x\log x - x\log(x^2-2)$$

Quindi per $x > 2$ $\quad f'(x) = a$

e per $\sqrt{2} < x < 2$ $\quad f'(x) = \log x + 1 - \log(x^2-2) - \frac{x}{x^2-2} \cdot 2x$

$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = a$$

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \log 2 + 1 - \log 2 - \frac{8}{2}$$

Quindi f è derivabile se e solo se $a = -3$

Di conseguenza $b = 6$

$$f(x) = \begin{cases} -3(x-2) & x \geq 2 \\ x \log\left(\frac{x}{x^2-2}\right) & -\sqrt{2} < x < 0 \ \vee \ \sqrt{2} < x < 2 \end{cases}$$

Ovviamente f ha per asintoto obliquo la retta $y = -3(x-2)$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} \frac{x}{x^2-2} = \frac{-\sqrt{2}}{0^-} = +\infty;$$

quindi $\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} x \log\left(\frac{x}{x^2-2}\right) = -\sqrt{2}(+\infty) = -\infty$

e la retta $x = -\sqrt{2}$ è asintoto verticale a dx per f.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x \log\left(\frac{-x}{2-x^2}\right) =$$

$$\lim_{x \to 0^-} x \log(-x) - x \log(2-x^2) = 0 - 0 = 0$$

NO asintoto

$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}^+} x \log\left(\frac{x}{x^2-2}\right) = +\infty$ quindi $x = \sqrt{2}$ è asintoto verticale

Dato che $f'(x)$ è continua su dom f
(si osservi che è continua anche in $x=2$!)
e $f'(2) = -3$ per il teorema della permanenza
del segno per le funzioni continue

$$\exists\, \delta>0 \ \ni' \ f'(x)<0 \quad \forall\, x \in (2-\delta, 2+\delta) \subset (\sqrt{2}, +\infty)$$

e quindi f è strett. decrescente su tale intervallo.

4) Enunciare la formula di Taylor di ordine n e
scrivere poi la formula di Maclaurin di ordine
12 per la funzione
$f(x) = 2x^4 \cos(x^2)$
Quanto vale $f^{(11)}(0)$? e $f^{(4)}(0)$?
È $x=0$ un punto estremale per f? Di che tipo?

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$; se f è derivabile n volte in x_0:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f}{k!}(x_0)\,(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \text{ quindi}$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + o(x^{10}) \text{ e}$$

Maclaurin per $f(x) = x^4\cos(x^2)$

$$2x^4 \cos x^2 = 2x^4 - x^8 + \frac{x^{12}}{12} + o(x^{14})$$

Quindi $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 2$ cioè $f^{(4)}(0) = 2\cdot 4!$
mentre $f^{(11)}(0) = 0$ dato che manca il monomio di grado 11. Poiché

$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ e $f^{(4)}(0) > 0$, $x=0$ è un punto
di minimo locale forte per f.

Esercizi anni accademici precedenti all'AA 24-25

1)-b) Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = e^{-x^2(\arccos(\sqrt{x})-\pi)}$$

dom f: $\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$ quindi dom $f = [0,1]$

Sull'intervallo $[0,1]$, $y=-x^2$ è strett. decrescente

$y = \arccos(\sqrt{x}) - \pi$ è anche strett. decrescente in quanto composto da $y=\sqrt{x}$ strett. crescente e $y = \arccos x - \pi$ strett. decrescente. $y = -x^2(\arccos(\sqrt{x})-\pi)$ è quindi strett. crescente in quanto prodotto di due funzioni strett. decrescenti e negative (su $(0,1]$)

f è dunque strett. crescente perché composta da $y=e^x$ e $y = -x^2(\arccos(\sqrt{x})-\pi)$.

$f \in C^0([0,1])$ e quindi $\operatorname{Im} f = [f(0), f(1)]$
$= [1, e^{\pi}]$

3) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x-2}{x^2+1} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) dx$

$$\int_0^{1/2} \frac{x-2}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac12} \frac{x}{x^2+1}\,dx - 2\int_0^{\frac12} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big|_0^{\frac12} - 2\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\frac12} = \log\frac{\sqrt5}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac12$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\frac12} = \frac{1}{\cos\frac12} - 1$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $\log\frac{\sqrt5}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac12 + 1 - \frac{1}{\cos\frac12}$