Politecnico di Bari
CdL Ingegneria Informatica e Automazione
AA 2014-2015

Complementi di Analisi Matematica
Tracce di esame (con svolgimenti)

Docente: Prof. E. Caponio

A.A. 2013/2015 I esonero 14 novembre 2014 Traccia A

1) Determinare, usando la trasformata di Laplace, il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = H(t-2), t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2) Enunciare e dimostrare una versione del teorema sulla trasformata della derivata.

3) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3n + 2^n}(z-i)^n.$$

A.A. 2013/2015 I esonero 14 novembre 2014 Traccia B

1) Determinare, usando la trasformata di Laplace, il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 16y = H(t-3), t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2) Enunciare e dimostrare una versione del teorema sulla trasformata della derivata.

3) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n+1}-1}{e^{n+2}+1}(z+i)^n.$$

Esonero Complementi di Analisi Matematica

venerdì 14 novembre 2014 14:30

1) Determinare il segnale che risolve

A) $$\begin{cases} y'' + 4y = H(t-2), & t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri otteniamo

$$s^2 \mathcal{L}(y)(s) + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(H(t-2))(s)$$

$$\mathcal{L}(y)(s)\left(s^2+4\right) = \mathcal{L}(H(t-2))(s)$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(H(t-2))(s)\, \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)(s)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(H(t-2) * \sin_+(2t)\right)(s)$$

da cui $y(t) = \frac{1}{2}\left(H(\tau-2) * \sin_+(2\tau)\right)(t)$ cioè

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2(t-\tau))\, H(\tau-2)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ \frac{1}{2}\int_2^t \sin(2(t-\tau))\, d\tau & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

Quindi $$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ \frac{1}{4} \cos(2(t-\tau)) \Big|_2^t & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2(t-2))\right) & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

Analogamente si risolve l'esercizio B)

B)

$$\begin{cases} y'' + 16y = H(t-3) \quad , t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2) A) = B) Enunciare e dimostrare una versione del teorema sulla trasformata della derivata
(vedere, ad esempio, i "Complementi" nella mia pagina web

3) Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

A) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3n+2^n}(z-i)^n$$

$$\frac{2^n}{3(n+1)+2^{n+1}} \cdot \frac{2^n+3n}{2^{n-1}} = \frac{2^n(2^n+3n)}{\frac{2^n}{2}(2\cdot 2^n+3n+3)} =$$

$$= \frac{2(2^n+3n)}{2\cdot 2^n+3n+3} = \frac{\cancel{2^n}\left(2+\frac{6n}{2^n}\right)}{\cancel{2^n}\left(2+\frac{3n}{2^n}+\frac{3}{2^n}\right)} \longrightarrow 1$$

quindi $\rho = 1$

B) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n+1}-1}{e^{n+2}+1}(z+i)^n$$

$$\frac{e^{n+2}-1}{e^{n+3}+1} \; \frac{e^{n+2}+1}{e^{n+1}+1} = \frac{e^2 e^n - 1}{e^3 e^n + 1} \; \frac{e^2 e^n + 1}{e\, e^n + 1}$$

$$= \frac{\cancel{e^n}\left(e^2 - \frac{1}{e^n}\right)}{\cancel{e^n}\left(e^3 + \frac{1}{e^n}\right)} \; \frac{\cancel{e^n}\left(e^2 + \frac{1}{e^n}\right)}{\cancel{e^n}\left(e + \frac{1}{e^n}\right)} \longrightarrow \frac{e^4}{e^4} = 1$$

Quindi $\rho = 1$

A.A. 2014/2015 II esonero – I appello 30 gennaio 2015 Traccia A

Gli studenti che sostengono la seconda prova di esonero devono svolgere solo gli esercizi 4,5,6.

1) Determinare, usando la trasformata di Laplace, il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t, \quad t \geq 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di Laplace di un segnale periodico.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituiscano gli esercizi 1) e 2) con i seguenti:

1) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2 - 1}(x-1)^n.$$

2) Dimostrare che se una serie di potenze di centro 0 converge in $\bar{z} \in \mathbb{C}$ allora essa converge in modulo per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |\bar{z}|$.

3) Determinare, motivando la risposta, gli insiemi su cui le seguenti funzioni sono olomorfe:

$$f_1(z) = z^2 \qquad f_2(z) = z\bar{z} \qquad f_3(z) = \frac{z}{1+z^2}$$

$$f_4(z) = e^{z^2-1} \qquad f_5(z) = \mathrm{Re} z$$

4) Enunciare e dimostrare la I formula di rappresentazione di Cauchy.

5) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x+i)^2} \mathrm{d}x.$$

6) Determinare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ x - \frac{1}{2} & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dimostrare poi che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{((2h+1)\pi)^2}.$$

A.A. 2014/2015 II esonero – I appello 30 gennaio 2015 Traccia B

Gli studenti che sostengono la seconda prova di esonero devono svolgere solo gli esercizi 4,5,6.

1) Determinare, usando la trasformata di Laplace, il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t, \quad t \geq 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di Laplace di un segnale periodico.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituiscano gli esercizi 1) e 2) con i seguenti:

1) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n-1)}{n^3}(x-2)^n.$$

2) Dimostrare che se una serie di potenze di centro 0 converge in $\bar{z} \in \mathbb{C}$ allora essa converge in modulo per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |\bar{z}|$.

3) Determinare, motivando la risposta, gli insiemi su cui le seguenti funzioni sono olomorfe:

$$f_1(z) = z^3 \qquad f_2(z) = |z| \qquad f_3(z) = \frac{1}{z+z^2}$$

$$f_4(z) = \sin(e^z + 1) \qquad f_5(z) = \mathrm{Im} z$$

4) Enunciare e dimostrare la I formula di rappresentazione di Cauchy.

5) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-i)^2} \mathrm{d}x.$$

6) Determinare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ x - \frac{1}{2} & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dimostrare poi che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{((2h+1)\pi)^2}.$$

Appello Complementi di Analisi Matematica

venerdì 30 gennaio 2015 11:30

1) TRACCIA A

Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t \quad , \quad t \geq 0 \\ y(0) = 1 = y'(0) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(y'' + 2y' + y)(s) = \mathcal{O}$$

$$- y'(0) - s\,y(0) + s^2 \mathcal{L}(y)(s) - 2y(0) + 2s\mathcal{L}(y)(s) + \mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s^2}$$

$\forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0$

$$\mathcal{L}(y)(s) \cdot (s^2 + 2s + 1) - (3 + s) = \mathcal{L}(t)$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{3+s}{s^2+2s+1} + \mathcal{L}(\bar{y} * t_+)(s)$$

dove $\bar{y}$ è la risposta impulsiva del sistema cioè il segnale $\bar{y}(t) = t e^{-t}$

L'antitrasformata del primo addendo si ottiene subito osservando che $\frac{3+s}{s^2+2s+1} = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)}$

e quindi essa è il segnale $2e^{-t}t + e^{-t}$

Calcoliamo ora $\bar{y} * t_+$

$$\bar{y} * t_+ (t) = \int_0^t \tau e^{-\tau} (t - \tau)\, d\tau =$$

$$\int^t \quad e^{-\tau} \quad \int^t \quad ^2 \quad e^{-\tau}$$

$$= t\int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau - \int_0^t \tau^2 e^{-\tau}\,d\tau =$$

$$= -t\,\tau e^{-\tau}\Big|_0^t + t\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau + \tau^2 e^{-\tau}\Big|_0^t - 2\int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau$$

$$= \cancel{-t^2 e^{-t}} - t e^{-t} + t + \cancel{t^2 e^{-t}} + 2\,\tau e^{-\tau}\Big|_0^t$$

$$- 2\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau = t e^{-t} + t + 2e^{-t} - 2$$

Quindi $y(t)$ è il segnale associato alla funzione

$$2e^{-t}t + e^{-t} + te^{-t} + t + 2e^{-t} - 2 = 3(e^{-t}t + e^{-t}) + t - 2$$

La traccia B è analoga

2) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di un segnale periodico.

Si vedano, ad esempio, gli appunti sui complementi sulla trasformata di Laplace

3)-A) Determinare l'insieme su cui le seguenti funzioni sono olomorfe

$$f(z) = z^2, \quad f(z) = z\cdot\bar{z}, \quad f(z) = \frac{z}{1+z^2}$$

$$f(z) = e^{z^2-1}, \quad f(z) = \mathrm{Re}\, z$$

- z^2 è una funzione potenza e quindi è olomorfa in $\mathbb{C}$
- $z\cdot\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ e quindi la parte immaginaria della funzione f è nulla. Dalle condizioni di Cauchy-

Riassumendo l'unico punto in cui $f(z) = z \cdot \bar{z}$ è olomorfa è 0 dove si annullano le derivate parziali della sua parte reale.

- analogamente $f(z) = \operatorname{Re} z$ non è olomorfa in alcun punto
- $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$ è una funzione razionale e quindi è olomorfa in $\mathbb{C}$ meno gli zeri del polinomio al denominatore ossia $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$
- $f(z) = e^{z^2-1}$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ in quanto composta dalle funzioni olomorfe $z \in \mathbb{C} \mapsto z^2-1$ e $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z$

La traccia B è analoga

4) Enunciare e dimostrare la I formula di rappresentazione di Cauchy

Si veda, ad esempio, pag 69-71 degli appunti

5) Usando il metodo dei residui calcolare

A) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x+i)^2}\, dx$$ B) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-2i)^2}\, dx$$

Osserviamo che $$\left| \frac{e^{-2ix}}{(x+i)^2} \right| \leq \frac{1}{|x+i|^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

quindi la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-2ix}}{(x+i)^2}$ è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$.

L'estensione complessa di f è la funzione

$\tilde{f}$ ... $-2iz$ ... 1 $|z| \to \infty$

[illegible]

$$\tilde{f}(z) = \frac{e^{-2iz}}{(z+i)^2} \;; \quad \text{poiché} \quad \frac{1}{(z+i)^2} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$$

possiamo applicare il lemma di Jordan per il semipiano inferiore $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x+i)^2}\,dx = -2\pi i \operatorname{Res}(\tilde{f}, -i)$$

$-i$ è un polo di ordine 2 per $\tilde{f}$ dato che

$$\lim_{z\to -i} (z+i)^2 \frac{e^{-2iz}}{(z+i)^2} = e^{-2} \neq 0$$

$$\operatorname{Res}(\tilde{f}, -i) = \lim_{z\to -i} D\left((z+i)^2 \frac{e^{-2iz}}{(z+i)^2} \right) =$$

$$= \lim_{z\to -i} D\left(e^{-2iz}\right) = \lim_{z\to -i} -2i\, e^{-2iz} = -2i e^{-2}$$

Quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x+i)^2}\,dx = -4\pi e^{-2}$

La traccia B ha uno svolgimento analogo tenendo presente che si può applicare il lemma di Jordan per il semipiano superiore

6) Calcolare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ x - \frac{1}{2} & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dimostrare quindi che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{((2h+1)\pi)^2}$$

Sia $\tilde{f} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, l'estensione dispari di f

$$b_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{2\pi}{2} k x\right) dx =$$

$$= 2 \int_{0}^{1} f(x) \sin(k\pi x)\, dx =$$

$$= 2 \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin(k\pi x)\, dx$$

$$= 2 \int_{\frac{1}{2}}^{1} x \sin(k\pi x)\, dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin(k\pi x)\, dx =$$

$$= -\frac{2x}{k\pi} \cos(k\pi x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{1}{k\pi} \cos(k\pi x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$+ \frac{2}{k\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos(k\pi x)\, dx$$

$$= \frac{-2}{k\pi} \left(\cos(k\pi) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{k\pi} \left(\cos(k\pi) - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) + \frac{2}{(k\pi)^2} \sin(k\pi x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= -\frac{2}{k\pi} \cos(k\pi) + \frac{1}{k\pi} \cos(k\pi) - \frac{2}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{k\pi} (-1)^k - \frac{2}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Quindi la serie di soli seni di f è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{k\pi} (-1)^k - \frac{2}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right] \sin(k\pi x)$$

$= 0$ se k è pari

Per $x = \frac{1}{2}$ $\qquad \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^h & \text{se } k = 2h+1 \end{cases}$

Per cui la serie si riduce a

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2h+1)\pi} - \frac{2}{((2h+1)\pi)^2} (-1)^h \right) (-1)^h =$$

$$= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} - \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{((2h+1)\pi)^2}$$

Poichè questa converge a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, deduciamo che $\displaystyle\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{((2h+1)\pi)^2}$

A.A. 2014/2015 II esonero – I appello 17 febbraio 2015 Traccia A

Gli studenti che sostengono la seconda prova di esonero devono svolgere solo gli esercizi 4,5,6.

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale periodico definito dalla funzione $f(t) = t$, $t \in [0, 2)$, estesa per periodicità con periodo uguale a 2 su $[0, +\infty)$.

2) Sia $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ L-trasformabile. Dimostrare che $\lim_{\Re(z)\to+\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituiscano gli esercizi 1) e 2) con i seguenti:

1) Studiare la convergenza puntuale su $[0, +\infty)$ della successione di funzioni

$$f_n\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{x + (-1)^n}{1 + x^n}.$$

Stabilire inoltre che tale successione converge uniformemememente su $[a, +\infty)$, per ogni $a > 1$.

2) Ricavare lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione $\log(1+x)$, $x \in (-1, 1)$. Dire poi, motivando la risposta, perché tale sviluppo è valido anche per $x = 1$.

3) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $\mathrm{Log}_0(z + 1) = \log |z|$.

4) Calcolare

$$\int_Q \frac{e^{-\frac{2i}{z}}}{(z - i)(z + 2)} \mathrm{d}z,$$

dove Q è il quadrato di vertici $3, -3, 3i, -3i$ percorso in verso antiorario.

5) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale dell'algebra.

6) Determinare la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - 2 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Dimostrare poi che

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

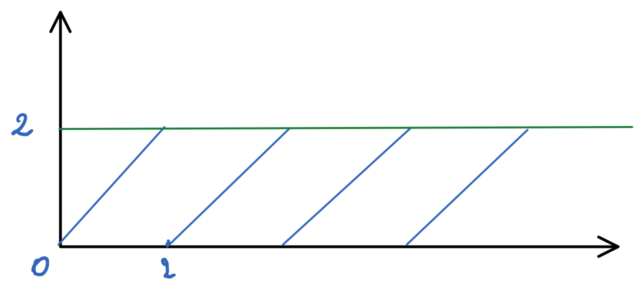
Appello Complementi di Analisi Matematica
martedì 17 febbraio 2015 14:30

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale periodico definito dalla funzione

$$f(t) = t \quad , t \in [0,2] \quad \text{estesa per periodicità}$$

con periodo uguale a 2 su $[0,+\infty)$

Il segnale $\tilde{f} = \tilde{f}(t)$ considerato ha grafico (in blu)



Usando il teorema sulla trasformata di un segnale periodico otteniamo

$$\forall s \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re} s > 0 : \ \mathcal{L}(\tilde{f})(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} t \, dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \cdot \left[\left(-\frac{1}{s} e^{-st} t \right) \Big|_0^2 + \frac{1}{s} \int_0^2 e^{-st} dt \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{1}{s} e^{-2s} 2 - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^2 \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{2}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{1}{s^2} \right]$$

1) Studiare convergenza puntuale su $[0,+\infty)$ della successione di funzioni

$$f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \ , \quad f_n(x) = \frac{x + (-1)^n}{1 + x^n}$$

Stabilire inoltre che tale successione converge.

uniformemente su $[a,+\infty)$ con $a>1$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^n} + \frac{(-1)^n}{1+x^n}$$

Osserviamo che per $x \in [0,1]$

$$\frac{x}{1+x^n} \longrightarrow \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \end{cases}$$ mentre

$\frac{(-1)^n}{1+x^n}$ non converge in quanto per n pari converge a $\begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \end{cases}$ e per n dispari

converge a $\begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0,1) \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \end{cases}$

sull'intervallo $(1,+\infty)$, $x^n \to +\infty$ e quindi $f_n(x) \longrightarrow 0$

Dunque f_n converge puntualmente solo su $(1,+\infty)$

Per la convergenza uniforme (a 0) su $[a,+\infty)$ $a>1$ basta osservare che

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq \frac{x}{1+x^n} + \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{x}{x^n} + \frac{1}{1+x^n}$$

$$= \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{1+a^n} \quad \forall x \in [a,+\infty)$$

e $\frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{1+a^n} \longrightarrow 0$ dato che $a>1$

2) Sia $f: [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ L-trasformabile. Dimostrare che $\lim_{Re(s) \to +\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$

Si vedano appunti su trasformata di Laplace

3) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\mathrm{Log}_0(z+1) = \log(|z|)$$

Posto $z = x+iy$

$$\mathrm{Log}(z+1) = \log\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right) + i\,\mathrm{Arg}(z+1).$$

quindi deve essere $\log\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

cioè $(x+1)^2+y^2 = x^2+y^2$ ossia $2x+1=0$

da cui $x = -\frac{1}{2}$

Inoltre, poiché, $\log|z|$ ha parte immaginaria nulla deve essere $\mathrm{Arg}(z+1) = 0$

cioè $x+iy+1$ deve essere reale e positivo

quindi $y=0$ e $x+1>0$.

Per cui l'unica soluzione dell'equazione è

$z = -\frac{1}{2}$

4) Calcolare

$$\int_Q \frac{e^{-\frac{2i}{z}}}{(z-i)(z+2)}\,dz$$

Q quadrato di vertici $3, -3, 3i, -3i$ percorso in verso antiorario

L'integranda, f, ha tre singolarità $0, i, -2$ per cui

$$\int_Q f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-2)\right)$$
$$= -2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty)$$

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{e^{-2iz}}{\left(\frac{1}{z} - i\right)\left(\frac{1}{z}+2\right)} = -\frac{1}{z^2} \frac{e^{-2iz}}{\frac{(1-iz)(1+2z)}{z^2}}$$

$$= \frac{e^{-2iz}}{(1-iz)(1+2z)}$$; questa funzione è olomorfa in 0 e quindi $\operatorname{Res}(f,\infty) = 0$.

5) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra

6) Scrivere la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0,1] \\ x-2 & x \in [0,2] \end{cases}$$

Dimostrare poi che

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Detta $\tilde{f}$ l'estensione pari di f su $[-2,2]$,

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 -dx + \frac{1}{2}\int_1^2 (x-2)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2)^2\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$a_k = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{4}\right) dx =$$

$$\int^{2} \ldots \left(\frac{\pi k x}{\ldots}\right) dx = \int -\cos\left(\frac{\pi k x}{\ldots}\right) dx$$

$$= \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx = \int_0^1 -\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx$$

$$+ \int_1^2 (x-2)\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{\pi k x}{2}\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi}(x-2)\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\Big|_1^2$$

$$- \frac{2}{k\pi}\int_1^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{4}{(k\pi)^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\Big|_1^2 = \frac{4}{(k\pi)^2}\cos(k\pi) - \frac{4}{(k\pi)^2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Per cui la serie di soli coseni di f è

$$-\frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(k\pi)^2}\left((-1)^k - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$$

Per $x=1$ questa converge a $f(1) = -1$

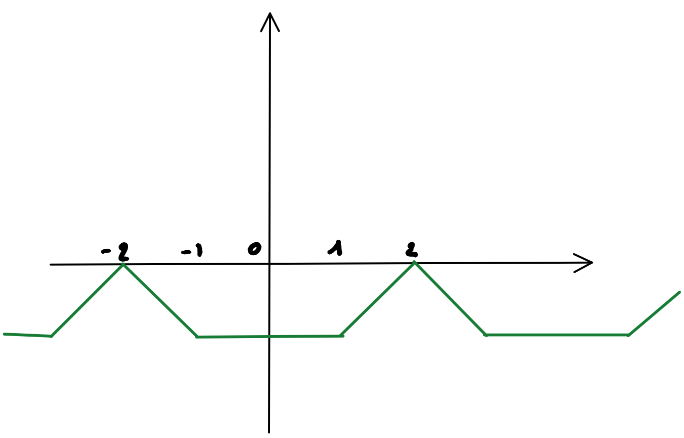


Grafico dell'estensione periodica di periodo 4 di $\tilde{f}$

Quindi $$-\frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right] = -1$$

Osserviamo che $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ per k dispari

ed è uguale a $(-1)^h$ se $k = 2h$, $h \geq 1$. Quindi

abbiamo che

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} h^2 \pi^2} \left[(-1)^h - 1 \right] = -\frac{1}{4}$$

Dato che $(-1)^h - 1 = \begin{cases} 0 & \text{se } h \text{ è pari} \\ -2 & \text{se } h \text{ è dispari} \end{cases}$ otteniamo

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{-2}{(2j+1)^2 \pi^2} = -\frac{1}{4} \quad \text{da cui}$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

A.A. 2014/2015   Appello 15 aprile 2015   Traccia A

1) Siano e_+^{-t} e t_+^3 i segnali associati alle funzioni e^{-t} e t^3. Calcolare la trasformata di Laplace di $e_+^{-t} * t_+^3$ specificando il suo dominio.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Calcolare per serie $\displaystyle\int_0^1 \cos(x^2)\mathrm{d}x$.

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \log\left(\frac{n^2+1}{n-1}\right)(x-1)^n.$$

3) Calcolare

$$\int_{C^+(2,3/2)} \frac{\mathrm{Log}_0 z}{(z-2-i)^3}\mathrm{d}z,$$

doce $C^+(2,3/2)$ è la circonferenza di centro 2 e raggio $3/2$ orientata nel verso antiorario.

4) Dare la definizione di zero di ordine $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ per una funzione olomorfa. Fornire, poi, e dimostrare una caratterizzazione di tali zeri.

5) Dare la definizione di serie di Laurent. Discutere, poi, la struttura dell'insieme di convergenza di una serie di Laurent.

6) Calcolare, usando il metodo dei residui,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^4+1}\mathrm{d}x.$$

Appello Complementi di Analisi Matematica

mercoledì 15 aprile 2015 14:30

1) Calcolare

$$\mathcal{L}\left(e^{-t}_+ * t^3_+\right)(s)$$

specificando il suo dominio

Poiché $\mathcal{L}(e^{-t}_+)(s) = \frac{1}{s+1}$ $\forall s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > -1$

e $\mathcal{L}(t^3_+)(s) = \frac{3!}{s^4}$ $\forall s \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} s > 0$

sappiamo che $\forall s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \max\{-1, 0\} = 0$

$$\mathcal{L}\left(e^{-t}_+ * t^3_+\right)(s) = \mathcal{L}\left(e^{-t}_+\right)(s)\,\mathcal{L}\left(t^3_+\right)(s) = \frac{6}{(s+1)\,s^4}$$

ANNI PRECEDENTI

1) Poiché $\cos x^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!}$ e questa serie converge

uniformemente su ogni insieme compatto di $\mathbb{R}$ abbiamo che

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^1 x^{4k}\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{4k+1} x^{4k+1}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{4k+1}$$

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \log\left(\frac{n^2+1}{n-1}\right)(x-1)^n$$

$$\frac{\frac{1}{n+1}\log\left(\frac{(n+1)^2+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\log\frac{n^2+1}{n-1}} = \frac{n}{n+1}\,\frac{\log[(n+1)^2+1]-\log n}{\log(n^2+1)-\log(n-1)}$$

$$= \frac{n}{n+1}\,\frac{2\log(n+1)+\log\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\log n}{2\log n+\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\log n-\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{n}{n+1}\,\frac{2\log n+2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\log n}{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 1\cdot 1 = 1$$

Quindi $\rho = 1$ e l'intervallo di convergenza della serie è $(0,2)$

Per $x=0$ otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{n^2+1}{n-1}\right)(-1)^n$$

che è una serie a segni alterni

Osserviamo che

$$\frac{1}{n}\log\left(\frac{n^2+1}{n-1}\right) = \frac{1}{n}\left(2\log n+\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\log(n-1)\right)\to 0$$

Cerchiamo di stabilire che $\frac{1}{n}\log\left(\frac{n^2+1}{n-1}\right)$ è definit. decrescente. A tal fine consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x}\log\frac{x^2+1}{x-1}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\log\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{1}{x}\,\frac{x-1}{x^2+1}\,\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\log\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{1}{x}\,\frac{x-1}{x^2+1}\,\frac{2x(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\log\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{1}{x}\,\frac{x-1}{x^2+1}\,\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\Bigg(\underbrace{-\log\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)}_{\substack{\downarrow\, x\to+\infty \\ -\infty}} + \underbrace{\frac{x(x-1)}{x^2+1}\,\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}_{\substack{\downarrow\, x\to+\infty \\ 1}} \Bigg)$$

Poiché la funzione tra parentesi sopra qui sopra tende a $-\infty$ per per $x\to+\infty$, definitivamente $f'(x)$ assume valori negativi e quindi f è definitivamente decrescente.

Pertanto la successione $\frac{1}{n}\log\left(\frac{n^2+1}{n-1}\right)$ è definitivamente decrescente e per il criterio di Leibniz la serie ad essa associata converge.

Per $x=2$, la serie diventa

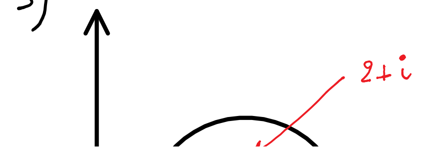
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\log\frac{n^2+1}{n-1} \quad (*)$$

Poiché $\frac{1}{n}\log\frac{n^2+1}{n-1} \sim \frac{1}{n}\log n$ e $\sum \frac{1}{n}\log n = +\infty$

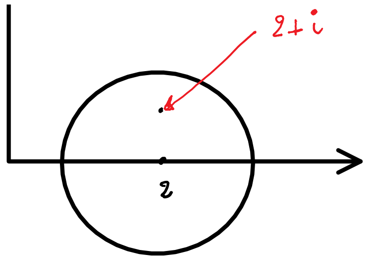
onde $(*)$ diverge positivamente.

In conclusione la serie assegnata converge puntualmente in $[0,2)$ e uniformemente in $[0,2-\varepsilon]$, $\forall \varepsilon\in[0,2)$

3)



La funzione $\mathrm{Log}_0 z$ è olomorfa sul piano tagliato $\mathbb{C}\setminus r_0$ dove r è la retta $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z<0,\ \mathrm{Im}\, z=0\}$



sul piano tagliato $\mathbb{C} \setminus r_0$ dove r_0 è la retta $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z = 0\}$

Per la II formula di Cauchy l'integrale assegnato è uguale a

$$\frac{2\pi i}{2!} \, D^{(2)}(\operatorname{Log}_0 z)\Big|_{z=2+i} = \pi i \left(-\frac{1}{z^2}\right)\Big|_{z=2+i} = -\pi i \, \frac{1}{(2+i)^2} =$$

$$= -\pi i \, \frac{1}{3+4i} = -\pi i \, \frac{3-4i}{25} = -\frac{\pi}{25}(4+3i)$$

4) Si veda, ad esempio, pagg. 77-78 degli appunti

5) Si veda, ad esempio, pag. 100-101 degli appunti

6) Poiché $\left|\frac{\cos(3x)}{x^4+1}\right| \le \frac{1}{x^4+1}$, la funzione $\frac{\cos(3x)}{x^4+1}$ è assolutamente integrabile su $[0,+\infty)$.

Osserviamo che essa è pari e quindi $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^4+1}\,dx$.

$$\frac{\cos(3x)}{x^4+1} = \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2(x^4+1)}, \text{ quindi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{x^4+1}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i3x}}{x^4+1}\,dx\right)$$

Osserviamo che col cambio di variabile $-x = t$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i3x}}{x^4+1}\,dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{i3t}}{t^4+1}\,(-dt) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3t}}{t^4+1}\,dt$$

Pertanto $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^4+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{x^4+1}\,dx = (*)$

Estendiamo la funzione $\dfrac{e^{i3x}}{x^4+1}$ a $\mathbb{C}$ e indichiamo tale estensione con $f(z)$

Per il lemma di Jordan, $(*) = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1)\right)$ dove z_0 e z_1 sono le radici quarte di -1 appartenenti al semipiano dei numeri complessi con parte immaginaria positiva, quindi $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

z_0 e z_1 sono ovviamente poli semplici per f e quindi

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{e^{i3z_0}}{D(z^4+1)\big|_{z=z_0}} = \frac{e^{i3z_0}}{4z_0^3}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{e^{i3z_1}}{4z_1^3}$$

Osserviamo che $\dfrac{e^{i3z_0}}{4z_0^3} + \dfrac{e^{i3z_1}}{4z_1^3} =$

$$= \frac{e^{i3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4e^{i\frac{3}{4}\pi}} + \frac{e^{i3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4e^{i\frac{9}{4}\pi}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{3}{\sqrt{2}}}}{4}\Bigg(\underbrace{e^{i\underbrace{\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4}\pi\right)}_{\alpha}}}_{a} + \underbrace{e^{i\underbrace{\left(-\frac{9}{4}\pi - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)}_{\beta}}}_{b}\Bigg)$$

Poiché $-3\pi = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4}\pi - \frac{9}{4}\pi - \frac{3}{\sqrt{2}}$, gli angoli α e β qui sopra sono complementari (a meno di multipli in $\mathbb{Z}$ di 2π) quindi i due numeri complessi a e b hanno stessa parte parte immaginaria e parti reali opposti. Dunque parte immaginaria e parti reali opposti. Dunque

$$\frac{e^{-\frac{3}{\sqrt{2}}}}{4}(a+b) = i\frac{e^{-\frac{3}{\sqrt{2}}}}{2}\,\mathrm{Im}\,a = i\frac{e^{-\frac{3}{\sqrt{2}}}}{2}\sin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{4}\pi\right);$$

l'integrale assegnato è quindi uguale a

$$\frac{1}{2}2\pi i\left(i\frac{e^{-3/\sqrt{2}}}{2}\sin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{4}\pi\right)\right) = \frac{\pi}{2}e^{-\frac{3}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

A.A. 2014/2015 Appello 22 giugno 2015 Traccia A

1) Dimostrare che se $u\colon [a,+\infty) \to \mathbb{C}$ è una funzione avente modulo integrabile su $[a,+\infty)$ e tale che esista $\lim_{b\to+\infty} u(b) \in \mathbb{C}$ allora

$$\lim_{b\to+\infty} u(b) = 0.$$

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Enunciare e dimostrare il teorema di integrazione termine a termine.

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-2)!}{n!} \log(n^{10})(x+1)^n.$$

3) Dare la definizione di funzione armonica e di funzione armonica coniugata ad una data funzione armonica. Dimostrare, poi, che ogni funzione armonica su un aperto semplicemente connesso ammette armonica coniugata.

4) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent di centro 0 della funzione $f(z) = z^3 \sin(1/z^4)$. Che tipo di singolarità è 0 per f? Qual è il suo residuo in 0?

5) Dare la definizione di residuo all'infinito. Enunciare e dimostrare, poi, il II Teorema dei residui

6) Determinare la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1/2] \\ 1/2 & x \in (1/2,1] \end{cases}$$

Dimostrare, poi, che $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Appello Complementi di Analisi Matematica

lunedì 22 giugno 2015 09:30

1) Dimostrare che se $u: [a,+\infty) \to \mathbb{C}$ è una funzione avente modulo integrabile su $[a,+\infty)$ e tale che $\exists \lim_{b\to+\infty} u(b) \in \mathbb{C}$ allora $\lim_{b\to+\infty} u(b) = 0$

Si vedano, ad esempio, gli appunti di complemento sulla trasformata di Laplace

Anni precedenti

1) Enunciare e dimostrare il teorema di integrazione termine a termine

Si veda p. 6 degli appunti

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-2)!}{n!} \log(n^{10}) (x+1)^n$$

$$\frac{(n-2)!}{n!} \log(n^{10}) = \frac{(n-2)!}{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n} 10 \log n$$

$$= \frac{10}{n^2-n} \log n \quad (\geq 0 \ \forall n>1)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10}{n^2+n} \log(n+1) \frac{n^2-n}{10\log(n)} \xrightarrow{n} 1$$

Per cui il raggio di convergenza della serie è 1 e l'intervallo di convergenza è $(-2,0)$

Per $x=-2$ otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{n^2-n} (\log n)\cdot(-1)^n$$

Questa è una serie a segni alterni ma conviene dimostrare che converge assolutamente.
Infatti, la sua serie dei moduli è data da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{n^2-n} \log n$$

Perchè $n^{\frac{3}{2}} \frac{10}{n^2-n} \log n \to 0$ (per la gerarchia degli infiniti) abbiamo che definitivamente

$$\frac{10 \log n}{n^2-n} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

e quindi per il criterio del confronto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{n^2-n} \log n$ converge.

Per $x=0$ otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{n^2-n} \log n$$

che, come abbiamo visto converge.
Pertanto la serie di potenze assegnata converge puntualmente su $[-2,0]$ e per il teorema di Abel converge ivi anche uniformemente

3) Dare la definizione di funzione armonica e di funzione armonica coniugata ad una data funzione armonica. Dimostrare che ogni funzione armonica su un aperto semplicemente connesso ove fissato ammette armonica coniugata

Si vedano, ad esempio, pagg. 96-97 degli appunti.

4) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent di centro 0 della funzione

$$f(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z^4}\right).$$

Che tipo di singolarità è 0 per f? Qual è il suo residuo in 0?

Poiché $\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\sin\frac{1}{z^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{8k+4}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

e $z^3 \sin\frac{1}{z^4} = \sum_{k=0} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{8k+1}}$, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

questo è lo sviluppo richiesto. Per cui $z=0$ è una singolarità essenziale visto che in tale sviluppo compaiono infiniti termini z^m con m negativo. $\mathrm{Res}(f,0)$ è il coefficiente del termine $\frac{1}{z}$ che si otterrebbe per $8k+1=1$ cioè $k=0$. Quindi $\mathrm{Res}(f,0) = (-1)^0 \frac{1}{(2\cdot 0+1)!} = 1$

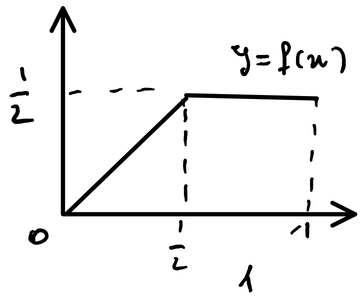
5) Dare la definizione di residuo all'infinito. Enunciare e dimostrare poi il II teorema dei residui

Si vedano, ad esempio, pagg. 125 e 127 degli appunti

6) Determinare la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,\frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Dimostrare, poi, che $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$



$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac12} x\,dx + \int_{\frac12}^1 \frac12\,dx = \frac18 + \frac14 = \frac38$$

$$a_k = \int_0^1 f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{2}x\right)dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac12} x\cos(k\pi x)\,dx + 2\int_{\frac12}^1 \frac12 \cos(k\pi x)\,dx$$

$$= \frac{2}{k\pi}\, x\sin(k\pi x)\Big|_0^{\frac12} - \frac{2}{k\pi}\int_0^{\frac12}\sin(k\pi x)\,dx + \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\Big|_{\frac12}^1$$

$$= \frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{(k\pi)^2}\cos(k\pi x)\Big|_0^{\frac12} - \frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{(k\pi)^2}$$

Quindi la serie di soli coseni di f è

$$\frac38 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(k\pi)^2}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)-1\right)\cos(k\pi x)$$

Per $x=\frac12$, dato che f è continua e ha derivate dx e sx finite in $\frac12$, essa converge a $f(\frac12)=\frac12$

quindi

$$\frac{3}{8} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(k\pi)^2} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

cioè $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(k\pi)^2} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) = \frac{1}{8}$

Poiché $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h \end{cases}$

Otteniamo

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{(2h\pi)^2} \left(1 - (-1)^h \right) = \frac{1}{8} \qquad (*)$$

Ora $1 - (-1)^h = \begin{cases} 0 & \text{se } h \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } h \text{ è dispari} \end{cases}$

quindi possiamo riscrivere $(*)$ così

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2}{4\pi^2 (2j+1)^2} \, 2 = \frac{1}{8} \quad \text{cioè}$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 (2j+1)^2} = \frac{1}{8} \quad \text{da cui} \quad \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

A.A. 2014/2015 Appello 13 luglio 2015 Traccia A

1) Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y = \cos(3t), \quad t \geq 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Calcolare per serie l'integrale

$$\int_0^1 5e^{-x^4} \mathrm{d}x.$$

2) Dare la definizione di raggio di convergenza per una serie di potenze in $\mathbb{C}$. Dimostrare, poi, che se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge in $\bar{z} \in \mathbb{C}$ allora essa converge su $D(0, |\bar{z}|)$.

3) Sia f una funzione olomorfa e mai nulla su $D(0,1)$ tale che $f(0) = i$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -i$. Calcolare

$$\int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{1}{f(\xi)\xi^3} \mathrm{d}\xi.$$

4) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $\sin(iz) = \cos(iz)$.

5) Dare la definizione di polo di ordine m. Dimostrare poi che se f ha un polo (di qualunque ordine) in z_0 allora $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

6) Calcolare il residuo in 0 della funzione $f(z) = \dfrac{e^{-1/z^2}}{z+i}$.

1) Usando la trasformata di Laplace determinare il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y = \cos(3t) \quad , \quad t \geq 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\cos(3t))$$

$$s^2 \mathcal{L}(y) - y'(0) - s\,y(0) + 2\mathcal{L}(y) = \frac{s}{s^2+9}$$

$$s^2 \mathcal{L}(y) - s + 2\mathcal{L}(y) = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}(y) = \left(s + \frac{s}{s^2+9} \right) \frac{1}{2+s^2}$$

$$= \frac{s}{2+s^2} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+2)}$$

Osserviamo che $\frac{s}{2+s^2}$ è la trasformata di Laplace di $\cos_+(\sqrt{2}t)$, mentre $\frac{s}{s^2+9} \frac{1}{s^2+2}$ è la trasformata della convoluzione di segnali associati a $\cos(3t)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)$ cioè

Quindi $y(t) = \cos_+(\sqrt{2}t) + \left(\cos_+(3x) * \frac{1}{\sqrt{2}} \sin_+(\sqrt{2}x)\right)(t)$

calcoliamo $\cos_+(3x) * \sin_+(\sqrt{2}x)\,(t) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \cos(3(t-x)) \sin(\sqrt{2}x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \frac{1}{2} \Big(\sin(\sqrt{2}x + 3(t-x)) + \sin(\sqrt{2}x - 3(t-x)) \Big) dx$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}-3} \cos(\sqrt{2}x + 3(t-x)) \Big|_0^t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}+3} \cos(\sqrt{2}x - 3(t-x)) \Big|_0^t$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}-3}\left(\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3t)\right)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}+3}\left(\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3t)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3t)\right)\frac{2\sqrt{2}}{-7} =$$

$$= \frac{1}{7}\left(\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3t)\right)$$

Quindi la soluzione è il seguente associato a

$$\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{7}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{5}\cos(3t)$$

cioè a $\frac{1}{7}\left(8\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3t)\right)$

1) Calcolare per serie l'integrale

Anni precedenti

$$\int_0^1 5e^{-x^4}\,dx$$

$$5\int_0^1 e^{-x^4}\,dx = 5\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-x^4)^k}{k!}\right)dx =$$

$$5\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1\frac{x^{4k}}{k!}\,dx = 5\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{4k+1}}{(4k+1)k!}\Bigg|_0^1 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{5(-1)^k}{(4k+1)k!}$$

2) Dare la definizione di raggio di convergenza per una serie di potenze in $\mathbb{C}$

Dimostrare poi che se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge in $\bar{z}\in\mathbb{C}$ allora essa converge su $D(0,|\bar{z}|)$

Si veda ad esempio p. 34 degli appunti

3) Sia f una funzione olomorfa e non nulla

su $D(0,1)$ tale $f(0) = i$, $f'(0) = 1$

$f''(0) = -i$

Calcolare
$$\int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{1}{f(\xi)\,\xi^3}\,d\xi$$

Poiché f non si annulla su $D(0,1)$, la funzione $\frac{1}{f(z)}$ è olomorfa su tale disco e quindi per la II formula di rappresentazione di Cauchy

$$\int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{1}{f(\xi)\xi^3}\,d\xi = \frac{2\pi i}{2}\left(\frac{1}{f}\right)''(0)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)'' = \frac{-f''f^2 + f'2ff'}{f^4}$$

Quindi $\left(\frac{1}{f}\right)''(0) = \dfrac{-i+2i}{1} = i$ da cui
$$\int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{1}{f(\xi)\xi^3}\,d\xi = \pi i \cdot i = -\pi$$

4) Determinare le soluzioni dell'equazione in $\mathbb{C}$

$\sin(iz) = \cos(iz)$

Usando le formule di Eulero

$$\sin iz = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} \quad e \quad \cos z = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2}$$

$$e^{-z} - e^{z} = i\left(e^{-z} + e^{z}\right)$$

$$e^{-z}(1-i) = e^{z}(1+i)$$

$$\frac{1-i}{1+i} = e^{2z}$$

$$\frac{(1-i)^2}{2}\, e^{2z} \iff \frac{1-1-2i}{2} = e^{2z}$$

cioè $e^{2z} = -i$ da cui $2z = \mathrm{Log}(-i) =$

$= \log 1 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

cioè $z = \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) i$

5) Dare la definizione di polo di ordine m. Dimostrare poi che se f ha un polo (di qualunque ordine) in z_0 allora $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

Si veda, ad esempio, p. 115 degli appunti

6) Calcolare il residuo in 0 della funzione

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{z+i}$$

Poiché 0 è una singolarità essenziale, calcoliamo il residuo di f nell'altra singolarità $-i$ e all'infinito e usiamo poi il II teorema dei residui

$$\mathrm{Res}(f,0) = -\mathrm{Res}(f,\infty) - \mathrm{Res}(f,-i)$$

$-i$ è un polo semplice quindi

$$\mathrm{Res}(f,-i) = \lim_{z \to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z \to -i} e^{-\frac{1}{z^2}} = e$$

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{e^{-z^2}}{z^2\left(\frac{1}{z}+i\right)} = -\frac{e^{-z^2}}{z(1+iz)}$$

Si vede subito che 0 è un polo semplice per questa funzione e quindi questa funzione e quindi

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \lim_{z \to 0} z \left(- \frac{e^{-z^2}}{z(1+iz)} \right) = - \frac{1}{1} = -1$$

quindi

$$\mathrm{Res}(f, 0) = -e + 1$$

A.A. 2014/2015 Appello 7 ottobre 2015 Traccia A

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale periodico di periodo 2π definito da

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2t) & t \in [0, \pi/4] \\ 0 & t \in (\pi/4, \pi] \\ 1 & t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

2) Dare la definizione di funzione conforme. Dimostrare che una funzione olomorfa su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e avente derivata mai nulla è conforme

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituiscano gli esercizi 1) e 2) con i seguenti:

1) Studiare la convergenza totale sull'intervallo $(-\infty, 0]$ della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{ne^x}{n^3 + n^2x^2}.$$

2) Enunciare e dimostrare le condizioni di Cauchy-Riemann.

3) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{Log_0 z}{(z-2i)^3} \mathrm{d}z,$$

dove γ è la circonferenza di centro $\frac{3i}{2}$ e raggio 1 percorsa in senso orario.

4) Enunciare il principio di identità delle funzioni olomorfe. Fornire poi almeno una sua applicazione.

5) Dimostrare che se p e q sono polinomi e $z_0 \in \mathbb{C}$ è uno zero di ordine m per q e $p(z_0) \neq 0$ allora la funzione razionale $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ ha in z_0 un polo di ordine m.

6) Calcolare il residuo all'infinito della funzione $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(1+z^2)^2}$.

Appello complementi di Analisi Matematica

mercoledì 7 ottobre 2015 15:00

1) Calcolare la trasformata del segnale periodico di periodo 2π definito da

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2t) & t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ 0 & t \in (\frac{\pi}{4}, \pi] \\ 1 & t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Detta $\tilde{f}$ l'estensione periodica di f di periodo 2π, $\forall s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > 0$ abbiamo:

$$\mathcal{L}(\tilde{f})(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) e^{-st} dt + \int_\pi^{2\pi} e^{-st} dt \right)$$

Calcoliamo $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t)\, e^{-st}\, dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t)\, e^{-st} dt = -\frac{\cos(2t)}{2} e^{-st} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t) \left(-s e^{-st}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \left(-s e^{-st}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{s}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) \left(-s e^{-st}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(-s e^{-s\frac{\pi}{4}}\right) - \frac{s^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t)\, e^{-st}\, dt$$

Da cui $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t)\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{4+s^2} \left(2 - s e^{-\frac{s\pi}{4}} \right).$

$$\int_\pi^{2\pi} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_\pi^{2\pi} = -\frac{1}{s} e^{-s 2\pi} + \frac{1}{s} e^{-s\pi}$$

quindi $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \left(\frac{1}{4+s^2} \left(2 - s e^{-\frac{s\pi}{4}} \right) + \frac{1}{s} \left(e^{-s\pi} - e^{-2\pi s} \right) \right)$

$\{ 0$ se $t \in (-\infty, 0)$

Un'altro modo per calcolare $\mathcal{L}(\tilde{f})$ è osservare che $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in (-\infty, 0) \\ f(t) & \text{se } t \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{se } t \in (2\pi, \infty) \end{cases}$

è uguale a $\sin_+(2t) - \cos_+\left(2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \chi_{[0,2\pi)} - \chi_{[0,\pi]}$

e quindi $\mathcal{L}(g)(s)$ $\mathcal{L}\left(\sin_+(2t)\right)(s) - \mathcal{L}\left(\cos_+\left(2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)(s) +$

$$+ \mathcal{L}\left(\chi_{[0,2\pi]}\right)(s) - \mathcal{L}\left(\chi_{[0,\pi]}\right)(s) =$$

$$= \frac{2}{4+s^2} - \frac{s}{4+s^2} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1 - e^{-2\pi s}}{s} - \frac{1 - e^{-\pi s}}{s}$$

$$= \frac{2}{4+s^2} - \frac{s}{4+s^2} e^{-\pi/4} + \frac{1}{s}\left(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}\right)$$

da cui $\mathcal{L}(\tilde{f}(s)) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{+\infty} g(t) e^{-st} dt$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \mathcal{L}(g)(s)$$

2) Dare la definizione di funzione conforme. Dimostrare che una funzione olomorfa su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e avente derivata mai nulla su Ω è conforme

Si vedano pagg. 28, 29 degli appunti

1) Anni precedenti Studiare la convergenza totale su $(-\infty, 0]$ della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n e^x}{n^3 + n^2 x^2}$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0 < f_n(x) := \frac{n e^x}{n^3 + n^2 x^2} \leq \frac{n}{n^3 + n^2 x^2} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

Poichè la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la serie assegnata converge totalmente su $(-\infty, 0]$

2) Anni precedenti Enunciare e dimostrare le condizioni di Cauchy-Riemann

Si vedano, ad esempio, pagg. 22-26 degli appunti

3) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log_0 z}{(z-2i)^3}\,dz$ dove γ è la circonferenza di centro $\frac{3}{2}i$ e raggio 1 percorsa in senso orario

Poiché la determinazione 0 del logaritmo è olomorfa sul piano tagliato $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \le 0\}$

è possibile applicare la II formula di Cauchy

per cui
$$\int_\gamma \frac{\log_0 z}{(z-2i)^3} = -\frac{2\pi i}{2!}\,\frac{d^2}{dz}\log_0 z\Big|_{z=2i}$$

$$= -\pi i\left(-\frac{1}{z^2}\right)\Big|_{z=2i} = -\pi i\left(-\frac{1}{4i^2}\right) = -\frac{\pi i}{4}$$

4) Enunciare il principio di identità delle funzioni olomorfe

Fornire poi almeno una sua applicazione

Si veda ad esempio pag. 80 degli appunti e le pagg. 82-84 per alcune applicazioni

5) Dimostrare che se p e q sono polinomi e $z_0 \in \mathbb{C}$ è uno zero di ordine m per q e $p(z_0) \neq 0$ allora la funzione razionale $f(z) = p(z)/q(z)$ ha un polo di ordine m in z_0

Si veda ad esempio pag. 118 degli appunti

6) Calcolare il residuo all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(1+z^2)^2}$$

Poiché
$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\,\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{\left(\frac{z^2+1}{z^2}\right)^2} = \frac{-z^2}{(1+z^2)^4}\, e^{-\frac{1}{z}}$$

ha in 0 una singolarità essenziale, calcoliamo i residui nelle singolarità al finito e applichiamo il II teorema dei residui

Le singolarità al finito sono $\pm i$

$$\frac{e^{-z}}{(1+z^2)^2} = \frac{e^{-z}}{((z-i)(z+i))^2} = \frac{e^{-z}}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

Entrambe le singolarità sono poli di ordine 2 quindi

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{e^{-z}}{(z+i)^2} = \lim_{z\to i} \frac{-e^{-z}(z+i)^2-2e^{-z}(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$= \frac{4e^{-i}-4ie^{-i}}{16} = \frac{e^{-i}}{4}(1-i)$$

$$\operatorname{Res}(f,-i) = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\frac{e^{-z}}{(z-i)^2} = \lim_{z\to -i} \frac{-e^{-z}(z-i)^2-e^{-z}2(z-i)}{(z-i)^4}$$

$$= \frac{4e^{i}+4ie^{i}}{16} = \frac{e^{i}}{4}(1+i)$$

Quindi $\operatorname{Res}(f,\infty) = -\frac{e^{i}}{4}(1+i) - \frac{e^{-i}}{4}(1-i)$

Poiché $\overline{e^{i}} = e^{-i}$

otteniamo $-\frac{\operatorname{Re}(e^{i})}{2} + \frac{i}{4}\left(-2i\operatorname{Im}(e^{i})\right) =$

$$= -\frac{\operatorname{Re}(e^{i})}{2} + \frac{\operatorname{Im}(e^{i})}{2} = \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1)$$

A.A. 2014/2015 Appello 12 novembre 2015 Traccia A

1) Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve il problema

$$f(t) = \begin{cases} y'' + 2y' + y = t - 1, \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Studiare la convergenza totale sull'intervallo $\mathbb{R}$ della serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n \sin(x^2))}{\sqrt{n^3 - 1}}.$$

2) Dare la definizione di raggio di convergenza per una serie potenze. Fornire poi un esempio di una serie con raggio di convergenza $+\infty$ e di una con raggio 0.

3) Dare la definizione di ordine di uno zero. Dimostrare poi che uno zero isolato ha ordine finito.

4) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent di centro 0 della funzione $f(z) = z^3 \sin(1/z^2)$. Che tipo di singolarità è 0? Motivare la risposta. Quanto vale il residuo di f in 0?

5) Dare la definizione di residuo per una funzione avente una singolarità isolata in $z_0 \in \mathbb{C}$. Dire poi, richiamando i risultati necessari, perché se $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un aperto, $z_0 \in \Omega$ e $f \in H(\Omega)$ allora $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

6) Calcolare, usando il metodo dei residui,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{16 + x^4} \mathrm{d}x.$$

Appello Complementi di Analisi Matematica

giovedì 12 novembre 2015 11:30

1) Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve il problema

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t-1, \quad t>0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2} + \mathcal{L}\left((t-1)_+\right)(s) \cdot \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \mathcal{L}\left((t-1)_+\right)(s) \cdot \frac{1}{(s+1)^2} =$$

Per cui $y(t) = e^{-t} + t e^{-t} + \left((t-1)_+ * (t e^{-t})_+\right)(t)$

Per $t>0$:

$$\left((t-1)_+ * (t e^{-t})_+\right)(t) = \int_0^t (t-\tau-1)\, \tau e^{-\tau}\, d\tau$$

$$= (t-1)\int_0^t \tau e^{-\tau}\, d\tau - \int_0^t \tau^2 e^{-\tau}\, d\tau =$$

$$= -(t-1)\, \tau e^{-\tau}\Big|_0^t + (t-1)\int_0^t e^{-\tau} d\tau + \tau^2 e^{-\tau}\Big|_0^t -$$

$$- 2\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau$$

$$= -(t-1)\, t e^{-t} - (t-1)\, e^{t} + (t-1) + t^2 e^{-t}$$

$$+ 2\tau e^{-\tau}\Big|_0^t - 2\int_0^t e^{-\tau} d\tau =$$

$$= -t^2 e^{-t} + e^{t} + t - 1 + t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t} - 2$$

$$= 2te^{-t} + 3\bar{e}^{t} + t - 3$$

Per cui $y(t) = \left(3te^{-t} + 4e^{-t} + t - 3\right) H(t)$

1) Studiare la convergenza totale su $\mathbb{R}$ della serie di funzioni

ANNI PRECEDENTI

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n \sin(x^2))}{\sqrt{n^3-1}}$$

$$\left| \frac{\cos(n \sin(x^2))}{\sqrt{n^3-1}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{n^3-1}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

quindi converge totalmente su $\mathbb{R}$.

2) Dare la definizione di raggio di convergenza per una serie di potenze.

Fornire poi un esempio di una serie con raggio $+\infty$ e una con raggio 0

Per la definizione si veda p. 35 degli appunti

Esempi: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ ha raggio di convergenza $+\infty$

$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n$ " " " " 0

3) Dare la definizione di ordine di uno zero

Dimostrare poi che uno zero isolato ha ordine finito

Si veda, ad esempio, p. 77 e p. 79 degli appunti

4) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent di centro 0 della funzione $f(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$

Che tipo di singolarità è 0 per f? Giustificare la risposta. Quanto vale il suo residuo?

$$f(z) = z^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{2k+1} = z^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k+2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k-1}} \quad (*), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

0 è una singolarità essenziale in quanto $(*)$ ha infiniti termini del tipo $\frac{1}{z^n}$. $Res(f,0)=0$ poiché in $(*)$ non appare il termine $\frac{1}{z}$ $\left(f(z) = z - \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \dots \right)$

5) Dare la definizione di residuo per una funzione avente una singolarità isolata in $z_0 \in \mathbb{C}$

Dire poi, richiamando i risultati maggiori, perché se $f \in H(\Omega)$, Ω aperto e $z_0 \in \Omega$, $Res(f,z_0)=0$

Per la definizione si veda p. 121 degli appunti

Poiché $Res(f,z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$ dove $\gamma: I \to \Omega$ è una qualunque curva chiusa regolare a tratti, orientata nel verso antiorario che sia il bordo di un dominio $T \subset \Omega$ e tale che $z_0 \in T$, per il teorema di Cauchy-Goursat

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

6) Calcolare usando il metodo dei residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{16+x^4}\,dx$$

$$\left| \frac{e^{i2x}}{16+x^4} \right| = \frac{1}{16+x^4} \sim \frac{1}{x^4} \quad \text{per } x \to \pm\infty, \text{ quindi}$$

$\dfrac{e^{i2x}}{16+x^4}$ è integrabile su $\mathbb{R}$

Per il lemma di Jordan $\displaystyle\int_{\gamma(R)} \frac{e^{i2z}}{16+z^4}\, dz \xrightarrow{R\to+\infty} 0$

dove $\gamma(R)$ è la semicirconferenza di centro 0 e raggio R percorsa in senso antiorario

Abbiamo allora che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{16+x^4} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i2z}}{16+z^4}, z_1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i2z}}{16+z^4}, z_2\right)\right)$$

dove z_1 e z_2 sono le radici quarte di -16 nel semipiano $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$

Entrambi i punti z_i, $i=1,2$, sono poli semplici

quindi
$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i2z}}{16+z^4}, z_i\right) = \frac{e^{i2z_i}}{D(16+z^4)_{|z=z_i}}$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

quindi
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{16+x^4} = 2\pi i\left(\frac{e^{4i\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{32e^{3/4\pi i}} + \frac{e^{4i\left(\frac{\sqrt2}{2}i-\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{32e^{9/4\pi i}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{16}\left(\frac{e^{2\sqrt2 i - 2\sqrt2}}{e^{3/4\pi i}} + \frac{e^{-2\sqrt2 - 2\sqrt2 i}}{e^{\pi/4 i}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{16}\, e^{\left(2\sqrt2 - \frac{3}{4}\pi\right)i - 2\sqrt2} + e^{-2\sqrt2 - \left(2\sqrt2 + \frac{\pi}{4}\right)i} =$$

$$= \frac{\pi}{16} i\, e^{-2\sqrt2}\left[\left(\cos(2\sqrt2)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \sin(2\sqrt2)\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \right.\right.$$

$$+ \; i\left(\sin(2\sqrt2)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \cos(2\sqrt2)\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) +$$

$$\cos(2\sqrt{2})\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(2\sqrt{2})\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\left(\sin(2\sqrt{2})\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left. + \cos(2\sqrt{2})\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg]$$

$$= \frac{\pi}{16}\, i\, e^{-2\sqrt{2}}\, i\left(-2\sin(2\sqrt{2})\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos(2\sqrt{2})\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\sin(2\sqrt{2}) + \sqrt{2}\cos(2\sqrt{2})\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{2}}\left(\sin(2\sqrt{2}) + \cos(2\sqrt{2})\right)$$