1) Stabilire se il seguente integrale converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log x}{1+x^3}\,dx$$

La funzione integranda $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\log x}{1+x^3}$ è definita su $(0,+\infty)$ ed è ivi continua, dunque $f \in R([a,b])$, $\forall\, 0<a<b<+\infty$

Poiché f non è definita in 0, f è integrabile su $(0,+\infty)$ se f è integrabile separatamente in $(0,c]$ e in $[c,+\infty)$ qualunque sia $c \in (0,+\infty)$

Studiamo prima $\int_0^c f(x)\,dx$: poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ dato che $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log x = 0$, $|f|$ è limitata in un intorno dx di 0 e quindi f è integrabile su $(0,c]$. Studiamo ora

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx .$$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot f(x) = 0$ e $f>0$ su $(1,+\infty)$

abbiamo che $f(x) < \dfrac{1}{x^2}$ def. per $x\to+\infty$

e quindi poiché $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \in \mathbb{R}$ anche $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

Dunque l'integrale assegnato converge.

2) Stabilire che la funzione $f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2$ è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,-1)$

Determinare infine i punti critici di f e studiarne la natura

f è un polinomio in due variabili quindi è una funzione di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ e dunque è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Nel punto $(0,-1)$ f ha piano tangente al suo grafico di equazione

$$z = f(0,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)(y+1)$$

$$f(0,-1) = 1-2 = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4xy^2 \ ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,-1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4yx^2 \ ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = -4$$

Quindi l'equazione del piano richiesta è

$$z = -1 - 4(y+1)$$

Determiniamo ora i punti critici di f :

$$\begin{cases} 4x^3 - 4xy^2 = 0 \\ 4y^3 - 4yx^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x^2 - y^2) = 0 \\ y(y^2 - x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y^3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad O(0,0)$$

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-y)(x+y) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dunque tutti i punti delle bisettrici dei quadranti sono punti critici per f.

Studiamone la natura: sia quindi $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e consideriamo i punti $(\bar{x}, \bar{x})$ e $(\bar{x}, -\bar{x})$

Osserviamo che $f(\bar{x}, \pm\bar{x}) = -2$ dunque

$f(x,y) - f(\bar{x}, \pm\bar{x}) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2$;

poiché $(x^2 - y^2)^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, i punti $(\bar{x}, \pm\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ sono tutti di minimo globale per f.

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + \cos(-2x)$$

Eq. omogenea associata:

$y'' + 3y' + 2y = 0$; $\quad \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{smallmatrix} \nearrow -1 \\ \searrow -2 \end{smallmatrix}$

integrale generale: $\quad y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$, $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Soluzione dell'eq. completa:

applichiamo separatamente il metodo di similarità a

$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$ e a $y'' + 3y' + 2y = \cos(-2x) = \cos(2x)$

-2 è soluzione dell'eq. caratteristica quindi cerchiamo $\tilde{y}$ del tipo

$\tilde{y}(x) = Kxe^{-2x}$

$\tilde{y}'(x) = ke^{-2x} - 2kxe^{-2x}$

$\tilde{y}''(x) = -2ke^{-2x} - 2ke^{-2x} + 4kxe^{-2x}$

Quindi

$-4ke^{-2x} + \cancel{4kx}e^{-2x} + 3ke^{-2x} - \cancel{6kx}e^{-2x}$

$+ 2\cancel{kx}e^{-2x} = e^{-2x}$

da cui

$-ke^{-2x} = e^{-2x}$ e quindi $k = -1$

Cerchiamo $\tilde{y}$ del tipo

$\tilde{y}(x) = k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)$

$\tilde{y}'(x) = -2k_1 \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x)$

$\tilde{y}''(x) = -4k_1 \cos(2x) - 4k_2 \sin(2x)$

Quindi

$-4k_1 \cos(2x) - 4k_2 \sin(2x) - 6k_1 \sin(2x)$

$+ 6k_2 \cos(2x) + 2k_1 \cos(2x) + 2k_2 \sin(2x) = \cos(2x)$

da cui

$\cos(2x) \cdot [6k_2 - 2k_1] + \sin(2x) \cdot [-2k_2 - 6k_1] = \cos(2x)$

cioè $\begin{cases} 6k_2 - 2k_1 = 1 \\ -2k_2 - 6k_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 = -3k_1 \\ -20k_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{20} \\ k_2 = +\frac{3}{20} \end{cases}$

Quindi una soluzione dell'eq. $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + \cos(-2x)$

è $\quad \tilde{y}(x) = -xe^{-2x} - \frac{1}{20}\cos(2x) + \frac{3}{20}\sin(2x)$

e il suo integrale generale è dato da

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{3}{20}\sin(2x) - \frac{1}{20}\cos(2x) - x e^{-2x}$$

4) Enunciare e dimostrare il criterio di confronto per le serie numeriche a termini non negativi.
Da esso dedurre il criterio del confronto asintotico

Si veda la lezione 31.