



Politecnico di Bari - CUC Ingegneria dell'Informazione
Laurea Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Programma di Complementi di Analisi Matematica
AA 2011-2012 Docente: Dr. E. Caponio

La presenza dell'abbreviazione (*nodim*) a fianco di una voce del programma indica che relativamente a tale argomento non sono state date dimostrazioni a lezione.

Spazi normati

Spazi metrici: definizione. Spazi normati: definizione di norma, esempi di norme in \mathbb{R}^n (norma euclidea, p -norma, norma del massimo). Distanza canonicamente associata ad una norma. Topologia indotta da una norma. Successioni in uno spazio normato. Convergenza. Successioni di Cauchy e completezza di uno spazio normato (spazi di Banach). Equivalenza topologica delle p -norme. Lo spazio delle matrici rettangolari ad elementi nel campo \mathbb{K} come spazio normato. Spazi vettoriali di dimensione infinita. Esempi: lo spazio delle funzioni definite su un intervallo, costruzione di una successione di funzioni linearmente indipendenti; lo spazio delle funzioni limitate su un intervallo; lo spazio delle funzioni di classe C^k , $k \geq 0$, su un intervallo; lo spazio delle funzioni integrabili su un intervallo; la derivata e l'integrale definito come operatori lineari; norma del *sup*, norma integrale di ordine p , norma C^k .

Convergenza puntuale e convergenza uniforme per una successione di funzioni. Completezza dello spazio delle funzioni limitate su un intervallo rispetto alla norma del *sup*. Continuità del limite uniforme di una successione di funzioni continue. Teorema di passaggio al limite sotto l'operatore derivata (*nodim*). Teorema di passaggio al limite sotto l'operatore integrale.

Serie numeriche

Definizione. Carattere di una serie. Esempi: serie geometrica, serie telescopiche, serie armonica e serie armonica generalizzata. Serie somma e serie prodotto di una costante per una serie. Condizione necessaria per la convergenza. Serie a termini non-negativi: criteri di confronto, criterio degli infinitesimi, criterio del confronto asintotico. Criterio del rapporto e criterio della radice. Convergenza assoluta. Serie a termini di segno alterno, criterio di Leibniz (*nodim*).

Serie di funzioni

Convergenza puntuale e convergenza uniforme. Esempi. Traduzione alle serie di funzioni del criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Convergenza assoluta e convergenza totale. Relazioni fra le varie nozioni di convergenza. Teorema sulla continuità della somma. Teorema di derivazione termine a termine (*nodim*). Teorema di integrazione termine a termine.

Funzioni complesse di variabile complessa

L'insieme dei numeri complessi come spazio normato e sua topologia. Parte reale e parte immaginaria di una funzione complessa. Esempi. Nozione di limite, di continuità. Funzioni olomorfe. Operazioni con le derivate, derivata di una funzione composta, derivata di una funzione inversa. Relazioni di Cauchy-Riemann. Esempi di funzioni olomorfe e non olomorfe. Funzioni intere. Funzioni armoniche.

Serie di potenze nel campo dei numeri complessi

Generalità. Raggio di convergenza e disco di convergenza. Convergenza totale sui compatti contenuti nel disco di convergenza. Teoremi per il calcolo del raggio di convergenza. Teorema di Abel (*nodim*). Raggio di convergenza della serie delle derivate di una serie di potenze. Derivabilità della somma di una serie di potenze. Relazione tra il coefficiente n -esimo della serie e il valore nel centro della derivata n -esima della somma.

Funzioni analitiche nel campo dei numeri reali

Nozione di funzione analitica. Condizioni affinché una funzione reale sia analitica in un intervallo. Analiticità di alcune funzioni reali elementari. Calcolo per serie di alcuni integrali. Funzione degli errori.

Complementi della teoria dell'integrazione

Integrale di una curva regolare a tratti a valori nel campo dei numeri complessi. Integrale di una funzione complessa lungo una curva regolare a tratti e sua interpretazione come coppia di integrali di due forme differenziali associate alla funzione. Convenzione sull'orientamento positivo della frontiera di un dominio regolare. Formule di Gauss-Green nel piano e loro applicazione al calcolo dell'area di un dominio; divergenza di un campo vettoriale; teorema della divergenza e formula di Stokes nel piano.

Funzioni olomorfe

Teorema di Cauchy-Goursat (*nodim*). Formula di rappresentazione di Cauchy. Analiticità di una funzione olomorfa e seconda formula di rappresentazione di Cauchy. Applicazioni delle formule di Cauchy al calcolo di integrali di funzioni olomorfe lungo curve.

Zeri di una funzione olomorfa. Ordine di uno zero. Zeri isolati. Equivalenza per uno zero tra l'essere isolato e avere ordine finito. Principio di identità per le funzioni olomorfe. Estensioni olomorfe di alcune funzioni elementari reali (esponenziale, seno, coseno, funzioni iperboliche). Formula di Eulero. Logaritmo di un numero complesso. Funzioni multivoche. Determinazione principale del logaritmo. Continuità e derivabilità della determinazione principale del logaritmo: piano complesso tagliato. Potenza con esponente complesso.

Teorema di Hermite-Liouville. Teorema fondamentale dell'algebra e sue conseguenze.

Coniugata di una funzione armonica su un aperto del piano semplicemente connesso. Proprietà della media per le funzioni armoniche di due variabili.

Serie di Laurent

Serie numeriche bilatere. Serie di Laurent. Insieme di convergenza di una serie di Laurent. Univocità dei coefficienti nello sviluppo in serie di Laurent. Sviluppabilità in serie di Laurent di una funzione olomorfa su una corona circolare. Singolarità isolate. Classificazione delle singolarità isolate. Caratterizzazione di singolarità eliminabili, poli e singolarità essenziali. Teorema di Picard (*nodim*).

Residuo in un punto singolare. I Teorema dei residui. Metodi per il calcolo del residuo in un punto singolare. Singolarità all'infinito e residuo all'infinito. II Teorema dei residui. Calcolo di alcuni integrali attraverso il metodo dei residui: Lemma di Jordan (*nodim*). Integrali trigonometrici, integrali impropri sulla retta reale di funzioni aventi al più un numero finito di discontinuità, integrali di tipo Fourier.

Serie di Fourier

Coefficienti di Fourier e serie di Fourier di una funzione assolutamente integrabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Polinomi trigonometrici. Riconduzione del caso di una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$ a quello dell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Estensione all'asse dei reali, periodica di periodo $b-a$, di una funzione definita sull'intervallo $[a, b]$. Estensioni pari ed estensione dispari sull'intervallo $[-T, T]$ di una funzione definita in $[0, T]$ e relative serie dei coseni e serie dei seni. Condizioni sufficienti per la convergenza puntuale e uniforme ad f della serie di Fourier di f (*nodim*). Convergenza in media quadratica della serie di Fourier di una funzione il cui quadrato è integrabile alla stessa funzione (*nodim*). Identità di Parseval (*nodim*).

Il software SAGE per calcolare e visualizzare somme parziali della serie di Fourier di una funzione.

Testi di riferimento

Per la parte del programma relativa alla serie numeriche:

- P. Marcellini, C. Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori Editore, Napoli, 2002.

Per la parte del programma relativa alla successioni e serie di funzioni e per la parte relativa ai complementi della teoria dell'integrazione:

- N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone "Elementi di Analisi Matematica due", Liguori Editore, 2001.

In alternativa ai precedenti due testi possono essere usati i volumi di "Analisi Matematica 1" e "Analisi Matematica 2" di M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa, Zanichelli, Bologna, 2008 e 2009.

- M. Giaquinta, G. Modica, "Note di Metodi Matematici per Ingegneria Informatica", Pitagora Editrice, Bologna, 2007.
- V. De Cicco, D. Giachetti "Metodi Matematici per l'Ingegneria", Esculapio, Bologna, 2011.

Per la parte di programma relativa a serie numeriche, successioni e serie di funzioni, complementi della teoria dell'integrazione il testo di riferimento per gli esercizi è:

- P. Marcellini, C. Sbordone, "Esercitazioni di Matematica", volumi I e II, Liguori Editore, Napoli 1995.

Per la parte di programma relativa all'analisi complessa si vedano gli esercizi svolti delle tracce di esame e quelli svolti in aula contenuti nelle dispense delle lezioni disponibili per il download sulla pagina web www.dm.uniba.it/~caponio/didattica.html. Si vedano anche gli esercizi svolti contenuti nel manuale di De Cicco e Giachetti.

Bari, 29/06/2012

Dott. E. Caponio

