

- 1) Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{1}{x^3} dx dy,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2, 1 < xy < 2\}$.

8 pts.

- 2) Si consideri la funzione a valori vettoriali

$$F(x, y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \log \left(\frac{x - y}{2x + y} \right), e^{x+y} \right).$$

Determinare il dominio naturale di F e rappresentarlo sul piano specificando se si tratti di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi. Stabilire che F è differenziabile nel punto $(2, 0)$ e calcolarne la matrice Jacobiana in tale punto e la sua miglior approssimazione lineare nello stesso punto.

8 pts.

- 3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale, prima in forma implicita e poi in forma esplicita, dell'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - 4)(1 + x^2).$$

Determinare poi la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 2$.

8 pts.

- 4) Enunciare il teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate miste per una funzione di due variabili reali. Il teorema è valido per le derivate miste di qualunque ordine? In che modo? Ricordare infine una conseguenza di tale teorema.

6 pts.