



Politecnico di Bari - CUC Ingegneria dell'Informazione
Laurea Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Programma di Complementi di Analisi Matematica
AA 2010-2011 Docente: Dr. E. Caponio

La presenza dell'abbreviazione (*nodim*) a fianco di una voce del programma indica che relativamente a tale argomento non sono state date dimostrazioni a lezione.

Serie numeriche

Definizione. Carattere di una serie. Esempi: serie di Mengoli, serie telescopiche, serie armonica, serie geometrica. Serie somma e serie prodotto di una costante per una serie. Condizione necessaria per la convergenza. Criterio di Cauchy per la convergenza di una successione e di una serie numerica. Convergenza assoluta. Serie a termini non-negativi: criteri di confronto, confronto asintotico, criterio degli infinitesimi. La serie armonica generalizzata. Criterio del rapporto e criterio della radice. Serie a termini di segno alterno, criterio di Leibniz (*nodim*). Serie resto n -esimo.

Spazi metrici

Definizione. Esempi di distanze: distanza euclidea, distanza integrale di ordine 1 e di ordine 2, distanza del sup. Topologia indotta dalla metrica. Convergenza di una successione. Successioni di Cauchy. Completezza di uno spazio metrico. Completezza dello spazio delle funzioni continue e limitate su un intervallo rispetto alla distanza del sup. Convergenza puntuale e convergenza uniforme per una successione di funzioni. La convergenza uniforme come convergenza in un opportuno spazio di funzioni munito della distanza del sup. Condizione di Cauchy per la convergenza uniforme. Teorema sullo scambio dei limiti (*nodim*) per una successione di funzioni convergente uniformemente. Continuità del limite uniforme di una successione di funzioni continue. Estensione del teorema sullo scambio dei limiti al caso di una funzione di due variabili (*nodim*).

Teorema di passaggio al limite sotto l'operatore derivata (*nodim*) e teorema di passaggio al limite sotto l'operatore integrale.

Serie di funzioni

Convergenza puntuale e convergenza uniforme. Esempi (serie geometrica). Traduzione alle serie di funzioni del criterio di Cauchy per la convergenza uniforme. Convergenza assoluta e convergenza totale. Relazioni fra le varie nozioni di convergenza.

Dai teoremi di scambio dei limiti del limite con l'operatore di derivata e di integrale per le successioni di funzioni ai teoremi sulla continuità della somma di una serie di funzioni continue, di derivazione e integrazione termine a termine.

Serie di potenze nel campo dei numeri complessi

Generalità. Raggio di convergenza e disco di convergenza. Teoremi per il calcolo del raggio di convergenza. Convergenza totale sui compatti contenuti nel disco di

convergenza. Teorema di Abel (*nodim*).

Funzioni complesse di variabile complessa

Parte reale e parte immaginaria di una funzione complessa. Nozione di limite, di continuità. Funzioni olomorfe. Operazioni con le derivate, derivata di una funzione composta, derivata di una funzione inversa. Raggio di convergenza della serie delle derivate di una serie di potenze. Derivabilità della somma di una serie di potenze. Relazione tra i coefficienti della serie e i valori nel centro delle derivate successive della somma.

Serie di Taylor nel campo dei numeri reali

Nozione di funzione analitica. Condizioni affinché una funzione reale sia analitica in un intervallo. Analiticità di alcune funzioni reali elementari. Calcolo per serie di alcuni integrali. Funzione degli errori.

Funzioni olomorfe

Condizioni di Cauchy-Riemann. Funzioni armoniche. Funzioni intere. Integrale di una curva regolare a tratti a valori nel campo dei numeri complessi. Integrale di una funzione complessa lungo una curva regolare a tratti e sua interpretazione come coppia di integrali di due forme differenziali associate alla funzione. Convenzione sull'orientamento della frontiera di un dominio regolare. Teorema di Cauchy-Goursat (*nodim*). Formula di rappresentazione di Cauchy. Funzioni complesse analitiche. Analiticità di una funzione olomorfa e seconda formula di rappresentazione di Cauchy. Applicazioni delle formule di Cauchy al calcolo di integrali di funzioni olomorfe lungo curve. Zeri di una funzione olomorfa. Ordine di uno zero. Zeri isolati. Equivalenza per uno zero tra l'essere isolato e avere ordine finito. Principio di identità per le funzioni olomorfe. Estensione olomorfa. Estensioni olomorfe di alcune funzioni elementari reali (esponenziale, seno, coseno, funzioni iperboliche). Formula di Eulero. Logaritmo di un numero complesso. Funzioni multivoche. Determinazione principale del logaritmo. Continuità e derivabilità della determinazione principale del logaritmo: piano complesso tagliato. Potenza con esponente complesso. Teorema di Hermite-Liouville. Teorema fondamentale dell'algebra. Fattorizzazione di un polinomio a coefficienti reali nel prodotto di un numero finito di monomi e di polinomi irriducibili di grado 2 a coefficienti reali.

Serie di Laurent

Serie numeriche bilatere. Serie di Laurent. Insieme di convergenza di una serie di Laurent. Univocità dei coefficienti nello sviluppo in serie di Laurent. Sviluppabilità in serie di Laurent di una funzione olomorfa su una corona circolare. Singolarità isolate. Classificazione delle singolarità isolate. Caratterizzazione di singolarità eliminabili, poli e singolarità essenziali. Teorema di Picard (*nodim*). Residuo in un punto singolare. I Teorema dei residui. Metodi per il calcolo del residuo in un punto singolare. Singolarità all'infinito e residuo all'infinito. Il Teorema dei residui. Calcolo di alcuni integrali attraverso il metodo dei residui: Lemma di Jordan (*nodim*), integrali trigonometrici, integrali impropri sulla retta reale di funzioni aventi al più un numero finito di discontinuità, integrali di tipo Fourier. Integrali di Fresnel.

Serie di Fourier

Coefficienti di Fourier e serie di Fourier di una funzione assolutamente integrabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Convergenza in media quadratica della serie di Fourier di una funzione il cui quadrato è integrabile alla stessa funzione (*nodim*). Polinomi trigonometrici. Riconduzione del caso di una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$ a quello dell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Estensione all'asse dei reali periodica di periodo $b-a$ di una funzione definita sull'intervallo $[a, b]$. Identità di Parseval (*nodim*). Estensioni pari ed estensione dispari sull'intervallo $[-T, T]$ di una funzione definita in $[0, T]$ e relative serie dei coseni e serie dei seni. Condizioni sufficienti per la convergenza puntuale e uniforme ad f della serie di Fourier di f (*nodim*). Il software SAGE per calcolare e visualizzare somme parziali della serie di Fourier di una funzione. Esempi.

Testi di riferimento

- M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa "Analisi Matematica 1", Zanichelli, 2008.
(per la parte del programma relativa alla serie numeriche).
- M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa "Analisi Matematica 2", Zanichelli, 2009.
- C. Pagani, S. Salsa "Analisi Matematica", vol. 2, Zanichelli, 1991.
(per la parte del programma relativa a spazi metrici, convergenza uniforme di successioni)
- P. Marcellini, C. Sbordone, "Esercitazioni di Matematica", Il volume, parte prima, Liguori Editore, 1995.
- G. Di Fazio, M. Frasca "Metodi Matematici per l'Ingegneria", Monduzzi Editore, 2003.
- M. Giaquinta, G. Modica, "Note di Metodi Matematici per Ingegneria Informatica", Pitagora Editrice, 2007 (per approfondimenti).

Bari, 29/06/2011



Dott. E. Caponio