1) -a) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Scrivere il numero complesso

$$\frac{(i-2)\,\overline{(i-2)}\,(\cos(\alpha) + i \sin\alpha)}{i\cos(n\alpha) + \sin(n\alpha)} \qquad (*)$$

in forma esponenziale

$$(i-2)\overline{(i-2)} = |i-2|^2 = 5$$

$$i\cos(n\alpha) + \sin(n\alpha) = i\,(\cos(n\alpha) - i\sin(n\alpha)) =$$

$$= i\,(\cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha))$$

quindi $(*) = 5\,\dfrac{e^{i\alpha}}{i\,e^{-in\alpha}} = 5\,\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\frac{\pi}{2}}\,e^{-in\alpha}} = 5\,e^{i((n+1)\alpha - \frac{\pi}{2})}$

1) -b) Determinare il dominio della funzione

$f(x) = (\pi - \arccos(x^{\sqrt{2}}))^{1/\sqrt{2}}$

Determinare il tipo di monotonia e l'immagine di $f$

dom $f$ : $\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq x^{\sqrt{2}} \leq 1 \\ \pi - \arccos(x^{\sqrt{2}}) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^{\sqrt{2}} \geq -1 \\ x^{\sqrt{2}} \leq 1 \\ \arccos(x^{\sqrt{2}}) \leq \pi \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ \forall x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ \forall x \text{ dove è definito } \arccos(x^{\sqrt{2}}) \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Quindi dom $f = [0,1]$

$f$ è composta dalla funzione $g(x) = \pi - \arccos(x^{\sqrt{2}})$
e da $h(x) = x^{1/\sqrt{2}}$ ; $h$ è strett. crescente ;
$g$ è la somma di una costante e della funzione $y = -\arccos(x^{\sqrt{2}})$
composta da $x \mapsto x^{\sqrt{2}}$ strett. crescente e da $-\arccos x$
strett. crescente dato che $\arccos x$ è strett. decrescente ;
quindi $g$ è strett. crescente e dunque anche $f$ lo è
Poiché $f \in C^0([0,1])$ , Im $f = [f(0), f(1)] = \left[\frac{\pi}{2}^{1/\sqrt{2}}, \pi^{1/\sqrt{2}}\right]$

2) Determinare dominio e asintoti della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2}\right)$$

Stabilire che $f$ non ha punti di estremo locale e studiarne la convessità.

dom $f$ : $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{2} > 0 \iff \dfrac{2x - x - 1}{2(x+1)} > 0 \iff \dfrac{x-1}{2(x+1)} > 0$

$\iff x > 1 \vee x < -1$

quindi dom $f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$f \in C^0(\text{dom} f)$ quindi gli unici asintoti verticali sono da
cercare nei punti $x = 1$ e $x = -1$ :

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ : poiché $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{2} = 0^+$ , $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ $x = 1$ è asinto vert. a dx

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ : poiché $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{0^-} - \dfrac{1}{2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$
$x = -1$ è asintoto vert. a sx

asintoto vert. a dx

Cerchiamo gli asintoti orizzontali:

poiché $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, la retta $y = \lg\left(\frac{1}{2}\right)$ è asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{x-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)}{x-1} \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

Dato che $(x-1)(x+1) > 0$ $\forall x \in \operatorname{dom} f$, $f'(x) > 0$ $\forall x \in \operatorname{dom} f$ e quindi $f$ è strett. crescente sia su $(-\infty, -1)$ che su $(1, +\infty)$. Quindi $f$ non ha punti di estremo locale

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad \text{quindi} \quad f''(x) = -\frac{2(x+1+x-1)}{(x-1)^2(x+1)^2} = -\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

Quindi $f''(x) > 0$ $\forall x \in \operatorname{dom} f$, $x < 0$ cioè su $(-\infty, -1)$ e dunque $f$ è strett. convessa su $(-\infty, -1)$ e strett. concava su $(1, +\infty)$

3) Calcolare $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |x|(x^3 - \cos x)$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |x| (x^3 - \cos x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |x| x^3 - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |x| \cos x \, dx$$

Dato che $|x| x^3$ è dispari, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |x| x^3 dx = 0$

Dato che $|x| \cos x$ è pari, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |x| \cos x \, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x =$

$$= 2\left( x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx \right) = \qquad 4(1-\sqrt{2})$$

$$= \frac{2\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 2$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $2 - \sqrt{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

4) Dare la definizione topologica di limite per una funzione reale di variabile reale. Siano poi $f$, $g$ due funzioni tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ e $f(x) < g(x)$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A$, $\delta > 0$. In che relazione sono $l_1$ e $l_2$? Perché?

Definizione: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$; si dice che $f$ tende a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x$ che tende a $x_0$ e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se $\forall U \in \mathfrak{I}(l)$ $\exists V \in \mathfrak{I}(x_0)$ t.c. $\forall x \in V \cap A \setminus \{x_0\}$: $f(x) \in U$

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ e $f(x) < g(x)$ allora $l_1 \leq l_2$

dato che se, per assurdo, $\ell_1 > \ell_2$ cioè $\ell_1 - \ell_2 > 0$ allora per il
teorema della permanenza del segno deve esistere un intorno $V$ di $x_0$ tale
che $f(x) - g(x) > 0 \quad \forall x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$ in contraddizione con $f(x) < g(x) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A$
dato che $V \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq \emptyset$ poiché $V$ è un intorno di $x_0$.