Analisi Matematica -- corso C -- moduo A

mercoledì 12 giugno 2024 08:30

1)-a) Determinare la forma esponenziale del numero complesso

$z = \dfrac{2+i^3-i}{3i}$ e ricavarne poi le radici cubiche

$z = \dfrac{2-2i}{3i} = \dfrac{2i+2}{-3} = \dfrac{2}{3}(-1-i)$

$\left|\frac{2}{3}(-1-i)\right| = \frac{2}{3}\sqrt{2}$; $\operatorname{Arg}\left(\frac{2}{3}(-1-i)\right) = -\frac{3}{4}\pi$

quindi $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} e^{-\frac{3}{4}\pi i}$

$\sqrt[3]{z} = \left(\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}k}$, $k=0,1,2$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} e^{-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi k}$, $k=0,1,2$

1)-b) Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$f(x) = \arccos(x^3-1)/2^x$

dom$f$: $-1 \le x^3-1 \le 1$ quindi $0 \le x^3 \le 2$ ossia $0 \le x \le \sqrt[3]{2}$

$f(x)$ è prodotto di due funzioni positive (su $[0,\sqrt[3]{2}]$) strett. decrescenti e cioè $y(x) = \arccos(x^3-1)$ e $y(x) = \dfrac{1}{2^x}$

quindi f è strett. decrescente; infatti $y=\arccos(x^3-1)$ è strett. decrescente in quanto composto da $y=x^3-1$ strett. crescente e $y=\arccos x$ strett. crescente.

$f \in C^0([0,\sqrt[3]{2}])$ quindi $\operatorname{Im} f = [f(\sqrt[3]{2}), f(0)]$
$= [0, \pi\cdot 1] = [0,\pi]$

2) Stabilire il numero di zeri reali del polinomio

$p(x) = x^8+x^5-10$

Si consideri poi la funzione $f(t) = \dfrac{\sin(t+10)}{t^2-100}$

Calcolare $\lim_{x\to 0}(f\circ p)(x)$

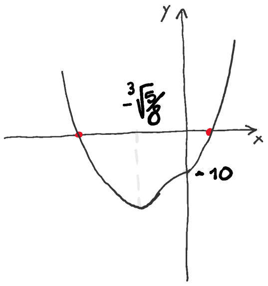
$p'(x) = 8x^7+5x^4 = x^4(8x^3+5)$

$p'(x)>0 \iff 8x^3+5>0 \iff x > -\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

quindi p è strett crescente su $\left(-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}, +\infty\right)$ e strett decrescente su $\left(-\infty, -\sqrt[3]{\frac{5}{8}}\right)$.

Quindi $p\left(-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}\right) < p(0) = -10 < 0$

Si Dunque p ha questo andamento:



p ha 2 zeri reali segnati in rosso in figura

$$f(t) = \frac{\sin(t+10)}{t+10}\,\frac{1}{t-10}$$

dato che $\lim\limits_{x\to 0} p(x) = -10$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(p(x)) \overset{p(x)=t}{=} \lim_{t\to -10} f(t) = \lim_{t\to -10} \frac{\sin(t+10)}{t+10}\,\frac{1}{t-10} = 1\cdot\frac{1}{-20} = -\frac{1}{20}$$

3) Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{x^2}{x^2-x+1}\,dx$

$$\int_{-2}^{3} \frac{x^2}{x^2-x+1}\,dx = \int_{-2}^{3} 1\,dx - \int_{-2}^{3} \frac{1-x}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= 5 + \frac{1}{2}\int_{-2}^{3} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= 5 + \frac{1}{2}\log(x^2-x+1)\Big|_{-2}^{3} + \frac{3}{2}\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= 5 + \frac{1}{2}(\log 7 - \log 7) + \frac{3}{2}\int_{-2}^{3} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= 5 + 2\int_{-2}^{3} \frac{1}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\,dx = 5 + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{-2}^{3}$$

$$= 5 + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{arctg}\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 5 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$$

4) Enunciare la formula di Taylor di ordine n

Scrivere la formula di McLaurin di ordine 11 per la funzione $f(x) = x\sin(x^2)$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$, f derivabile n volte in x_0

allora $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)/k!\,(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$ per $x\to x_0$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivabile n volte in x_0

allora $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)/k! \, (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$

Poiché $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$, $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{5!} + o(x^{12})$

e quindi $x \sin x^2 = x^3 - \frac{x^7}{6} + \frac{x^{11}}{5!} + o(x^{13})$

Dato che $o(x^{13})$ è anche $o(x^{11})$ la formula richiesta è

$x \sin x^2 = x^3 - \frac{x^7}{6} + \frac{x^{11}}{5!} + o(x^{11})$