1) Stabilire che il seguente integrale improprio diverge positivamente

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$$

La funzione integranda è continua su $(0,+\infty)$ ed ha un asintoto verticale a destra per $x \to 0^+$

Possiamo quindi considerare separatamente

$$\int_0^a \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx \quad e \quad \int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$$

dove a è un qualunque numero in $(0,+\infty)$

Studiamo $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$

Poiché $\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

e $\sqrt{\frac{x+2}{x}} \longrightarrow 1$ per $x \to +\infty$

$\sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

e quindi $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx = +\infty$

Dato che $\sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) > 0$ su $(0,+\infty)$

$\displaystyle\int_0^a \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \neq -\infty$ e dunque $\displaystyle\int_0^a \dots + \int_a^{+\infty} \dots$ non è una forma indeterminata; d'altro canto per $x \to 0^+$

$\sqrt{\frac{x+2}{x}} \sim \sqrt{\frac{2}{x}}$ e $\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{x^2}{4}$ quindi

$\sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{2}}$ per $x \to 0^+$, di conseguenza

la funzione integranda ha limite finito $(=0)$ per $x \to 0^+$ ed è quindi integrabile su $[0,a]$

Pertanto

$x \to 0^+$ ed è quindi integrabile in $[0,1]$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx = +\infty$$

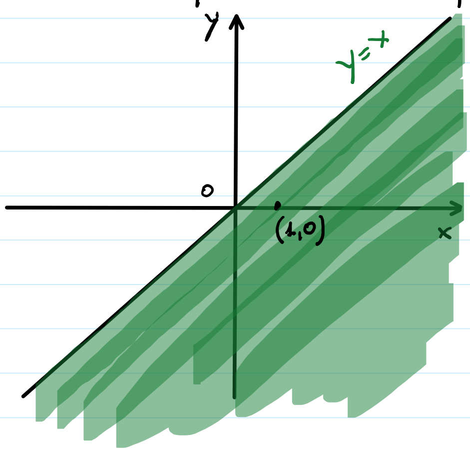
2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x-y)$$

Rappresentarlo graficamente sul piano. Dimostrare poi che f è differenziabile sul suo dominio. Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ al variare del versore $v = (v_1, v_2)$.

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$$

Dunque il dominio di f è aperto ed è dato da i punti (x,y) per cui $y < x$: è quindi il semipiano aperto colorato in figura



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\log(x-y) + \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\log(x-y) - \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

Entrambe le derivate parziali sono continue su $\operatorname{dom} f$ e quindi per il teorema del differenziale f è differenziabile su $\operatorname{dom} f$.

Il punto $(1,0) \in \operatorname{dom} f$.

Poiché f è ivi differenziabile $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v =$

$= 1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = v_1 - v_2$

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = -e^{-3x} \log x$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ che ha un'unica soluzione

$\lambda = -3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione

omogenea associata è $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie (dato che il termine noto $g(x) = -e^{-3x} \log x$ non rientra nella classe di funzioni per cui è possibile applicare il metodo di similarità)

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^{-3x} + c_2'(x)\, x e^{-3x} = 0 \\ c_1'(x)\,(-3e^{-3x}) - c_2'(x)\,(e^{-3x} - 3x e^{-3x}) = -e^{-3x} \log x \end{cases}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^{-3x} \\ -e^{-3x} \log x & e^{-3x} - 3x e^{-3x} \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & -e^{-3x} \log x \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & x e^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3x e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-6x} - 3x e^{-6x} + 3x e^{-6x} = e^{-6x}$$

$$c_1'(x) = \frac{x e^{-6x} \log x}{e^{-6x}} = x \log x$$

$$c_2'(x) = \frac{-e^{-6x} \log x}{e^{-6x}} = -\log x$$

$$c_1(x) = \int x \log x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2$$

$$c_2(x) = -\int \log x \, dx = -x \log x + x$$

L'integrale generale è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-3x} \log x - \frac{1}{4} x^2 e^{-3x} - x^2 e^{-3x} \log x + x^2 e^{-3x}$$

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}\log x - \frac{1}{4}x^2 e^{-3x} - x^2 e^{-3x}\log x + x^2 e^{-3x}$$
$$= c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{3}{4}x^2 e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}\log x$$

4) Calcolare

$$\int_T (x-y)^2 e^{y^2}\,dx\,dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$

Poiché T è normale rispetto all'asse delle y abbiamo:

$$\int_T (x-y)^2 e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 e^{y^2}\left(\int_0^y (x-y)^2\,dx\right)dy =$$
$$= \int_0^1 e^{y^2}\,\frac{1}{3}(x-y)^3\Big|_0^y = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{y^2} y^3\,dy \overset{t=y^2}{=} \frac{1}{6}\int_0^1 e^t\,t\,dt$$
$$= \frac{1}{6}\,e^t t\Big|_0^1 - \frac{1}{6}\,e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{6}e - \frac{1}{6}e + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$