Politecnico di Bari
AA 2015-2016

CdL Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Analisi Matematica – II modulo
Tracce di esame (con svolgimenti)

Docente: Prof. E. Caponio

Politecnico di Bari
Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
A.A. 2015/2016 I Esonero 22 aprile 2016 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola____________________

1) Stabilire se i seguenti integrali convergono:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2} \mathrm{d}x, \qquad \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^{2/3} + \sin(x-2)}.$$

10 pts.

2) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{4^n}.$$

5 pts.

3) Stimare l'errore che si commette approssimando la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+10}$$

con la sua somma parziale s_9.

4 pts.

4) Stabilire il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(k-1)^3}{3k^2+1} \right)^{k-1}.$$

5 pts.

5) Stabilire se la funzione $f(x,y) = e^{\sqrt{y^2-x}} x$ ha piano tangente al suo grafico nel punto di coordinate $\big(-1, 0, f(-1,0)\big)$ e in caso affermativo scriverne l'equazione.

6 pts.

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 I Esonero 22 aprile 2016 Traccia B

Cognome____________________ Nome____________________ N° Matricola____________________

1) Stabilire se i seguenti integrali convergono:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^2} \mathrm{d}x, \qquad \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2} + (x-2)e^{x-2}}.$$

10 pts.

2) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{4}{3^n}.$$

5 pts.

3) Stimare l'errore che si commette approssimando la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3+5}$$

con la sua somma parziale s_4.

4 pts.

4) Stabilire il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{k^2-1}{2(k+1)^2} \right)^{k+1}.$$

5 pts.

5) Stabilire se la funzione $f(x,y) = \log(xy) + (xy)^2$ ha piano tangente al suo grafico nel punto di coordinate $\big(-1, -1, f(-1,-1)\big)$ e in caso affermativo scriverne l'equazione.

6 pts.

1) Stabilire se i seguenti integrali convergono

A) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}\,dx$; $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3} + \sin(x-2)}$ B) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\,dx$; $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2} + (x-2)e^{x-2}}$

A) • $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}\,dx$ converge; infatti $\displaystyle\frac{\cos x - 1}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{2}$ quindi l'integrando è limitata in un intorno destro di 0; inoltre $\left|\frac{\cos x - 1}{x^2}\right| \le \frac{2}{x^2}$ e dunque dato che $\frac{2}{x^2}$ è integrabile in ogni intervallo del tipo $[a, +\infty)$ con $a>0$ anche $\frac{\cos x - 1}{x^2}$ è ivi assolutamente integrabile e dunque integrabile

• $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3} + \sin(x-2)}$ converge; infatti

$$\frac{1}{(x-2)^{2/3} + \sin(x-2)} = \frac{1}{(x-2)^{2/3} + (x-2) + o(x-2)} \sim \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} \text{ per } x \to 2^+$$

B) • $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\,dx$ converge; infatti $\displaystyle\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} \to 1$ per $x \to 0$ e quindi l'integrando è limitato in un intorno destro di 0; inoltre $0 < \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$ e possiamo concludere come nell'esercizio della traccia A.

• $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2} + (x-2)e^{x-2}}$ converge; infatti $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x-2} + (x-2)e^{x-2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-2}\left(1 + \sqrt{x-2}\, e^{x-2}\right)} \sim \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}} \text{ per } x \to 2^+$$

2) Calcolare la somma della serie

A) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{4^n}$ B) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{4}{3^n}$

In entrambe le tracce si tratta di una serie geometrica moltiplicata per una costante. Nella traccia A la ragione

è $\frac{1}{4}$, nello B è $\frac{1}{3}$, quindi entrambe convergono.
Le loro somme però mai $\frac{1}{1-q}$ in quanto in entrambe l'indice iniziale NON È 0!

Per la A) si parte da $n=3$ quindi occorre sottrarre alla somma della serie, la somma dei primi 3 termini (cioè $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$) ovvero $s_2 = \frac{1-\frac{1}{q^3}}{1-q}$; analogamente per la traccia B.

$$A)\quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{4^n} = 3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{4^n} = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \underbrace{\frac{1-\frac{1}{4^3}}{1-\frac{1}{4}}}_{s_2}\right) =$$

$$= \frac{3}{4^3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4^2}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{16}$$

$$B)\quad \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{4}{3^n} = 4\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{3^n} = 4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \underbrace{\frac{1-\frac{1}{3^4}}{1-\frac{1}{3}}}_{s_3}\right) =$$

$$= \frac{4}{3^4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3^3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{27}$$

3) Stimare l'errore che si commette approssimando la somma della serie

A) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+10}$ B) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3+5}$

con la sua somma parziale A) s_9 B) s_4

A) Sappiamo che nel caso di una serie a segni alterni $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \in \mathbb{R}$ l'errore $|s-s_n| \le a_{n+1}$, quindi nel nostro caso tale errore è minore di $\frac{1}{10^2+10} = \frac{1}{110}$

B) $|s-s_4| \le a_5 = \frac{1}{5^3+5} = \frac{1}{130}$

B) $|1 - s_4| \leq a_5 = \frac{1}{5^3+5} = \frac{1}{130}$

4) Stabilire il carattere delle seguente serie

A) $\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{(k-1)^3}{3k^3+1}\right)^{k-1}$ B) $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{k^2-1}{2(k+1)^2}\right)^{k+1}$

A) La serie è a termini positivi. Possiamo usare il criterio della radice. Dobbiamo calcolare:

$\lim_{k} \left(\frac{(k-1)^3}{3k^2+1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$; Osserviamo che la base tende a $+\infty$ mentre l'esponente tende a 1 quindi il risultato del limite è $(+\infty)^1 = +\infty$ dunque la serie diverge

Potevamo anche osservare che la serie è a termini positivi e che la successione che la definisce $\left(\frac{(k-1)^3}{3k^2+1}\right)^{k-1}$ non tende a 0 dato che il suo limite si presenta nella forma $+\infty^{+\infty}$ e quindi è uguale a $+\infty$

B) Usiamo il criterio della radice. Dobbiamo calcolare:

$\lim_{k} \left(\frac{k^2-1}{2(k+1)^2}\right)^{\frac{k+1}{k}}$; poiché la base tende a $\frac{1}{2}$ e l'esponente a 1 il risultato è $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} < 1$, dunque la serie converge

5) Stabilire se la funzione

A) $f(x,y) = e^{\sqrt{y^2-x}}\, x$ B) $f(x,y) = \log(xy) + x^2y^2$

ha piano tangente al suo grafico nel punto

A) $(-1, 0, f(-1,0))$ B) $(-1,-1, f(-1,-1))$

e in caso affermativo scriverne l'equazione

A) $\text{dom} f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x \geq 0 \}$; il punto $(-1,0)$ è interno a dom f. f ha derivate parziali continue all'interno suo dominio quindi per il teorema del differenziale è differenziabile in $(-1,0)$ e ammette piano tangente nel punto $(-1, 0, f(-1,0))$. L'equazione di tale piano è

$z = f(-1,0) + \langle \nabla f(-1,0), (x+1, y) \rangle$ cioè

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\sqrt{y^2-x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{y^2-x}} x + e^{\sqrt{y^2-x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = \frac{e}{2} + e = \frac{3}{2}e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{\sqrt{y^2-x}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{y^2-x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = 0$$

$$f(-1,0) = -e$$

Quindi l'equazione è

$z = -e + \frac{3}{2}e\,(x+1)$ cioè $z = \frac{3}{2}ex + \frac{1}{2}e$

B) $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$.

$\operatorname{dom} f$ è aperto ed $f \in C^1(\operatorname{dom} f)$. Dunque per il teorema del differenziale f è differenziabile in $(-1,-1)$ ed ha piano tangente al suo grafico in $(-1,-1, f(-1,-1))$

$$f(-1,-1) = \log 1 + 1 = 1$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{xy} + 2xy^2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = -1 - 2 = -3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{xy} + 2yx^2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = -3$

Quindi l'equazione del piano tangente è

$$z = 1 + \langle (-3,-3), (x+1, y+1) \rangle =$$

$$= 1 - 3(x+1) - 3(y+1) \text{ cioè}$$

$$z = 1 - 3x - 3 - 3y - 3$$

$$z = -3x - 3y - 5$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 II Esonero – I chance 13 giugno 2016 Traccia A

Cognome____________________ Nome____________________ N° Matricola____________________

1) Stabilire di che natura è il punto critico $(0,0)$ per le seguenti funzioni:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + x^2$$
$$g(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$
$$h(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2 - y^2$$

6 pts.

2) Dimostrare che le funzioni $f(x) = x\cos x$ e $g(x) = e^x - x$ sono linearmente indipendenti.

4 pts.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - y' + y = e^{x/2}\left(x\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) - x^2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right).$$

Nell'applicazione del metodo di similarità per determinare una sua soluzione $\bar{y}$, di che tipo deve essere $\bar{y}$?

4 pts.

4) Stabilire se il seguente problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione locale:

$$\begin{cases} y' = y^2\log(xy) + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, che essa è strettamente crescente in un intorno di $x = 1$.

6 pts.

5) Invertire l'ordine di integrazione nei seguenti integrali:

$$\int_0^2 \left(\int_{-x^3}^{x} f(x,y)dy\right)dx, \qquad \int_{-1}^{1} y\left(\int_0^{\frac{\sqrt{1-y^2}}{2}} xdx\right)dy.$$

Calcolare, inoltre, il valore del secondo di essi.

10 pts.

Esonero Analisi Matematica II modulo

lunedì 13 giugno 2016 08:30

1) Stabilire di che natura è il punto stazionario $(0,0)$ per le funzioni

$f(x,y) = x^4 + y^4 + x^2$

$4x^3 + 2x = 0$ $\quad$ $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x(4x^2+2) \end{array} \right.$

$4y^3 = 0$

$g(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

$h(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2 - y^2$

$f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(0,0) = 0$ quindi $(0,0)$ è un minimo (assoluto). Essendo poi l'unico punto stazionario di f esso è anche un minimo forte

$H_g(0,0) = \left| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right| = 8 > 0 \qquad g_{xx}(0,0) = -2 < 0$

quindi $(0,0)$ è un massimo locale forte per g

$H_h(0,0) = \left| \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right| = -8 < 0$ quindi $(0,0)$ è un punto di sella per h

2) Dimostrare che le funzioni $f(x) = x\cos x$ e $g(x) = e^x - x$ sono linearmente indipendenti

È sufficiente trovare $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. il Wronskiano di f e g in x_0 sia diverso da 0

$f'(x) = \cos x - x \sin x$, $\quad g'(x) = e^x - 1$

$W(\pi) = \left| \begin{pmatrix} -\pi & e^\pi - \pi \\ -1 & e^\pi - 1 \end{pmatrix} \right| = \pi - \pi e^\pi + e^\pi - \pi = e^\pi(1-\pi) \neq 0$

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - y' + y = e^{\frac{x}{2}}\left(x\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Nell'applicazione del metodo di similarità per determinare una soluzione particolare $\bar{y}$, di che tipo deve essere $\bar{y}$?

Le radici del polinomio caratteristico sono $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ cioè

$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$. Poiché $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha + i\beta$ è una di tali radici. Il grado massimo dei polinomi

$p(x) = x$ e $q(x) = -x^2$ è 2 quindi

$$\bar{y}(x) = x\, e^{\frac{x}{2}} \left((ax^2+bx+c)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - (dx^2+ex+f)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

4) Stabilire se il seguente problema di Cauchy ha una e una sola soluzione locale

$$\begin{cases} y' = y^2 \log yx + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Stabilire inoltre che essa è strettamente crescente in un intorno di 1

Poiché $f(x,y) = y^2 \log yx + 1$ è di classe C^∞ in un intorno del punto $(1,1)$, il problema di Cauchy ha una e una sola soluzione locale. Tale soluzione è regolare (di classe C^∞). Poiché

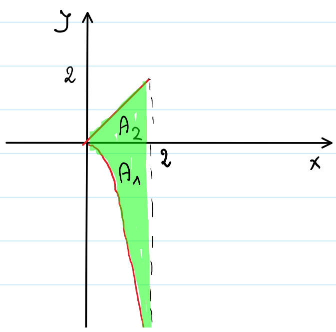
$$y'(1) = (y(1))^2 \log(y(1)\cdot 1) + 1 = 1 \log 1 + 1 = 1 > 0,$$

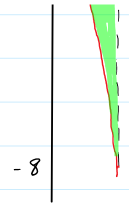
in un intorno di 1, la soluzione ha derivata positiva (essendo y' continua) e dunque essa è strettamente crescente in tale intorno.

5) Invertire l'ordine di integrazione nei seguenti integrali. Calcolare il secondo integrale

- $$\int_0^2 \left(\int_{-x^3}^{x} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Poiché il dominio di integrazione è dato da





Questo si può esprimere anche come unione di due domini normali rispetto all'asse delle y

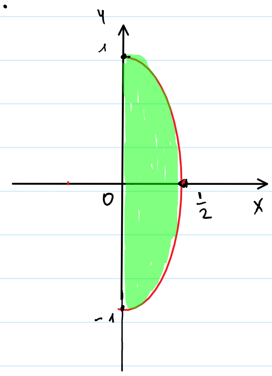
$$A_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -8 \le y \le 0 \ \wedge \ \sqrt[3]{-y} \le x \le 2 \}$$

$$A_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2 \ \wedge \ y \le x \le 2 \}$$

$$\int_0 \left(\int_{-x^3}^{x} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{-8}^{0} \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^{2} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_0^2 \left(\int_y^2 f(x,y)\, dx \right) dy$$

- $$\int_{-1}^{1} y \left(\int_0^{\frac{\sqrt{(1-y^2)}}{2}} x \, dx \right) dy$$

La funzione $x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{2}$ ha come grafico il semiellisse contenuto nel I e IV quadrante di equazione $4x^2+y^2=1$:



Il dominio di integrazione (in verde) è normale anche rispetto all'asse delle x:

$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \tfrac{1}{2} \ \wedge \ -\sqrt{1-4x^2} \le y \le \sqrt{1-4x^2} \}$$

Quindi

$$\int_{-1}^{1} y \left(\int_0^{\frac{\sqrt{1-y^2}}{2}} x\, dx \right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} y \, dy \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x \ \frac{1}{2} y^2 \Big|_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(1-4x^2 - \left(-\sqrt{1-4x^2} \right)^2 \right) dx = 0$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 13 giugno 2016 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N^o Matricola____________________

1) Stabilire il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k(\log k)^{3/2}}-\frac{\sin k}{k^{5/4}}\right).$$

8 pts.

2) Stabilire se la funzione $f(x,y)=\dfrac{x^2e^{x-y}}{x-y}$ ha derivata direzionale nel punto $(1,0)$ secondo la direzione del versore $v=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ e, in caso affermativo, calcolarla.

7 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

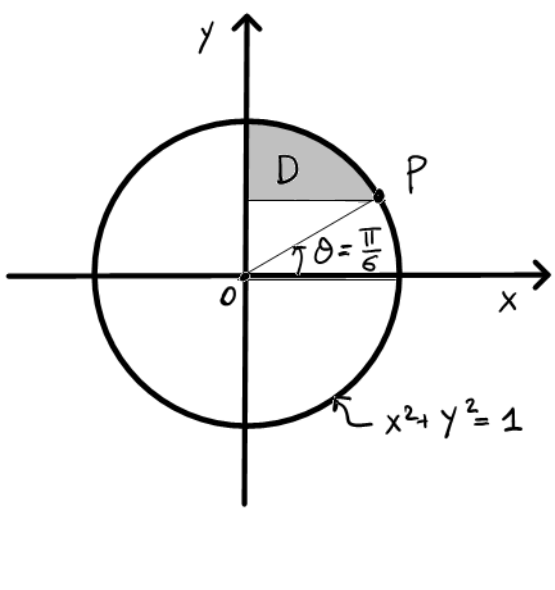
$$\begin{cases} y'=-2xy+x^2e^{-x^2}\\ y(1)=1 \end{cases}$$

7 pts.

4) Calcolare

$$\int_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy,$$

dove D è il dominio rappresentato in grigio in figura:



8 pts.

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 13 giugno 2016 Traccia B

Cognome____________________ Nome____________________ N° Matricola____________________

1) Stabilire il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k(\log k)^{5/2}}-\frac{\cos k}{k^{4/3}}\right).$$

8 pts.

2) Stabilire se la funzione $f(x,y)=\dfrac{(y+1)e^{x^2-y}}{y}$ ha derivata direzionale nel punto $(0,1)$ secondo la direzione del versore $v=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ e, in caso affermativo, calcolarla.

7 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

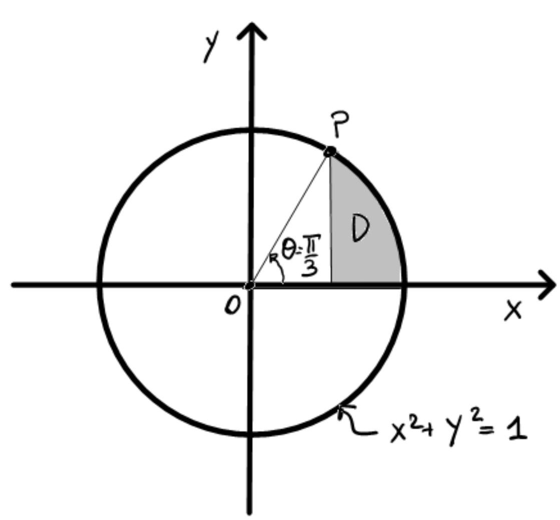
$$\begin{cases} y'=xy+xe^{\frac{3}{2}x^2} \\ y(1)=0 \end{cases}$$

7 pts.

4) Calcolare

$$\int_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy,$$

dove D è il dominio rappresentato in grigio in figura:



8 pts.

1) Stabilire il carattere delle seguenti serie

A) $$\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k\log^{3/2}k} - \frac{\sin k}{k^{5/4}}\right)$$

B) $$\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k\log^{5/2}k} - \frac{\cos k}{k^{4/3}}\right)$$

A) Se dimostriamo che entrambe le serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\log^{3/2}k} \quad e \quad \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\sin k}{k^{5/4}}$$ convergono allora anche

la serie assegnata (che è somma di queste due) converge

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\log^{3/2}k}$$ converge per il criterio dell'integrale

infatti considerata la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x\log^{3/2}x}$ questa è

decrescente e positiva su $[2,+\infty)$ e sugli interi assume gli stessi valori della successione $\dfrac{1}{k\log^{3/2}k}$

Poiché
$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\log^{3/2}x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x\log^{3/2}x}\,dx =$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\left(\log x\right)^{-\frac{3}{2}+1}\Big|_2^b =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} -2\left(\left(\log b\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\log 2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\log 2}} \in \mathbb{R}$$

la serie converge

$$\sum_{k=2}\frac{\sin k}{k^{5/4}}: \qquad \left|\frac{\sin k}{k^{5/4}}\right| \le \frac{1}{k^{5/4}}\ ; \quad \text{poiché } \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{5/4}} \in \mathbb{R}$$

la serie converge assolutamente e quindi converge

B) è analoga

2) Stabilire se la funzione

A) $$f(x,y) = \frac{x^2e^{x-y}}{x-y}$$

B) $$f(x,y) = \frac{(y+1)\,e^{x^2-y}}{y}$$

ha derivata direzionale nel punto

A) $(1,0)$

B) $(0,1)$

secondo la direzione del versore $v = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
e calcolarla

In entrambe le tracce la funzione assegnata è differenziabile nel punto assegnato in quanto è di classe C^1 in un intorno dello stesso punto. Pertanto in entrambe le tracce f ha derivata direzionale nel punto assegnato secondo un qualunque versore. In particolare:

A) : $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(2x e^{x-y} + x^2 e^{x-y})(x-y) - x^2 e^{x-y}}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2 e^{x-y}(x-y) + x^2 e^{x-y}}{(x-y)^2}$$

Quindi $\nabla f(1,0) = \left(\frac{2e + e - e}{1}, \frac{-e+e}{1}\right) = (2e, 0)$

e $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = (2e, 0) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}e$

B) $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot v$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y+1}{y} e^{x^2-y}\, 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(e^{x^2-y} - (y+1)e^{x^2-y})y - (y+1)e^{x^2-y}}{y^2}$$

$$\nabla f(0,1) = \left(0, \frac{e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1}}{1}\right) = \left(0, -\frac{3}{e}\right)$$

e $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \left(0, -\frac{3}{e}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2e}$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

A) $\begin{cases} y' = -2xy + x^2 e^{-x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} y' = xy + x e^{\frac{3}{2}x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

A) L'integrale generale dell'equazione è dato da

$$y(x) = e^{-x^2}\left(c + \int e^{x^2} x^2 e^{-x^2}\, dx\right)$$

$$= e^{-x^2}\left(c + \int x^2\, dx\right) = e^{-x^2}\left(c + \frac{1}{3}x^3\right)$$

$$y(1) = 1 \iff 1 = e^{-1}\left(c + \frac{1}{3}\right) \iff c = e - \frac{1}{3}$$

Quindi la soluzione del problema è $y(x) = e^{-x^2}\left(e - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3\right)$

B) L'integrale generale è dato da

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(c + \int e^{-\frac{1}{2}x^2} x\, e^{\frac{3}{2}x^2}\, dx\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}x^2}\left(c + \int e^{x^2} x\, dx\right) =$$

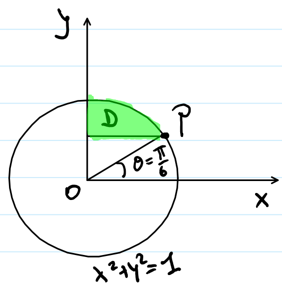
$$= e^{\frac{1}{2}x^2}\left(c + \frac{1}{2}e^{x^2}\right)$$

$$y(1) = 0 \iff 0 = \sqrt{e}\left(c + \frac{1}{2}e\right) \iff c = -\frac{e}{2}$$

Quindi la soluzione del problema è $y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(-\frac{e}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2}\right)$

4) Calcolare

A) $\int_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy$ dove D è il dominio (in verde) rappresentato in figura



Determiniamo le coordinate del punto P intersezione della semiretta uscente dall'origine e che forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con il semiasse positivo delle x

$$P = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

In coordinate polari il dominio D è normale rispetto a θ e definito da:

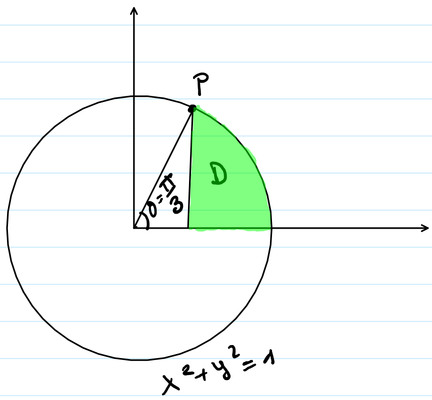
$$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad e \quad ? \le \rho \le 1$$

Per determinare la funzione di θ che controlla ρ dal basso basta ottenere l'equazione della retta $y=\frac{1}{2}$ in coordinate polari. Poiché $y=\rho\sin\theta$, questa è $\rho\sin\theta=\frac{1}{2}$ cioè $\rho=\frac{1}{2\sin\theta}$; quindi $\frac{1}{2\sin\theta}\le\rho\le 1$

$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1}1\,d\rho\right)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(1-\frac{1}{2\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=-\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$

B) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove D è il dominio rappresentato in verde in figura



Analogamente all'esercizio della traccia A

$P=\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x=\frac{1}{2}$ in coordinate polari diviene $\rho\cos\theta=\frac{1}{2}$ cioè $\rho=\frac{1}{2\cos\theta}$

Dunque in coordinate polari D è definito da

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{3}\ \wedge\ \frac{1}{2\cos\theta}\le\rho\le 1$$

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\left(\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1}1\,d\rho\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\left(1-\frac{1}{2\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}-0-\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 11 luglio 2016 Traccia A

Cognome______________________Nome______________________N$^{\mathrm{o}}$ Matricola______________________

1) Stabilire se il seguente integrale converge:

$$\int_2^{+\infty}\left(\frac{2x+1}{(x\log x)^2}-\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right)\mathrm{d}x.$$

7 pts.

2) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y)=(x-y+1)^2e^{-x^2+y^2}$$

e determinarne la natura.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''+y'-2y=e^{-2x}-x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Calcolare

$$\int_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme definito da $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1, 0\le x\le (\arctan y)^{1/2}\}$.

7 pts.

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 11 luglio 2016 Traccia B

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola____________________

1) Stabilire se il seguente integrale converge:

$$\int_3^{+\infty} \left(\frac{x^2-1}{(x\log x)^3} - \frac{\cos x}{x^{5/3}} \right) \mathrm{d}x.$$

7 pts.

2) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (x+y-1)^2 e^{x^2-y^2}$$

e determinarne la natura.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos(2x) + x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Calcolare

$$\int_A \frac{x}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme definito da $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : e \leq y \leq e^2, 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{\log y}} \right\}$.

7 pts.

1) Stabilire se il seguente integrale converge

A) $$\int_2^{+\infty}\left(\frac{2x+1}{(x\log x)^2}-\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right)dx$$

Se stabiliamo che entrambi gli integrali

1) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{2x+1}{(x\log x)^2}\,dx$, 2) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$

convergono allora anche l'integrale assegnato converge

1) $$\frac{2x+1}{(x\log x)^2}=\frac{2x+1}{x^2\log^2 x}\sim\frac{2}{x\log^2 x}$$

Poiché $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{2}{x\log^2 x}\in\mathbb{R}$ anche $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{2x+1}{(x\log x)^2}\,dx\in\mathbb{R}$

2) $$\left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right|\le\frac{1}{x^{3/2}}\quad\forall x\in[2,+\infty)$$

Poiché $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\,dx\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ converge assolutamente

e dunque converge

B) $$\int_3^{+\infty}\left(\frac{x^2-1}{(x\log x)^3}-\frac{\cos x}{x^{5/3}}\right)dx$$

È analogo ad A)

$$\frac{x^2-1}{(x\log x)^3}\sim\frac{1}{x\log^3 x}.$$ Poiché $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\log^3 x}\in\mathbb{R}$ anche $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x\log x)^3}\,dx\in\mathbb{R}$

$$\left|\frac{\cos x}{x^{5/3}}\right|\le\frac{1}{x^{5/3}}\quad\forall x\in[3,+\infty)$$ e quindi $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{5/3}}\,dx$ converge

in quanto converge assolutamente

2) Determinare i punti critici della funzione

A) $f(x,y)=(x-y+1)^2e^{-x^2+y^2}$

B) $f(x,y)=(x+y-1)^2e^{-y^2+x^2}$

e stabilirne la natura

A) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$f_x(x,y) = 2(x-y+1)e^{-x^2+y^2} - 2x(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = -2(x-y+1)e^{-x^2+y^2} + 2y(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} 2(x-y+1)e^{-x^2+y^2}(1-x(x-y+1))=0 \\ 2(x-y+1)e^{-x^2+y^2}(-1+y(x-y+1))=0 \end{cases} \quad (*)$$

Osserviamo che tutti i punti della retta $x-y+1=0$ sono critici

$(*)$ si riduce poi a $\begin{cases} 1-x(x-y+1)=0 \\ -1+y(x-y+1)=0 \end{cases}$. Sommando membro a membro otteniamo

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (y-x)(x-y+1)=0 \\ 1-x(x-y+1)=0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 1=0 \end{cases}$ impossibile

$\begin{cases} y=x \\ 1-x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Dunque l'unico punto critico che non appartenga alla retta $x-y+1=0$ è $P=(1,1)$

Studiamo la natura dei punti sulla retta $r: x-y+1=0$

se $Q=(\bar{x},\bar{y})\in r$, allora $f(\bar{x},\bar{y})=0$ e quindi

$f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y) = (x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$. Dato che $(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2} \geq 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, ogni punto $Q\in r$ è di minimo (assoluto)

Studiamo la natura di $P(1,1)$, calcolando la matrice Hessiana di f in P

$$f_{xx}(x,y) = 2e^{-x^2+y^2} - 4x(x-y+1)e^{-x^2+y^2} - 2(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$
$$- 4x(x-y+1)e^{-x^2+y^2} + 4x^2(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2e^{-x^2+y^2} + 4y(x-y+1)e^{-x^2+y^2} + 4x(x-y+1)e^{-x^2+y^2}$$
$$- 4xy(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = 2e^{-x^2+y^2} - 4y(x-y+1)e^{-x^2+y^2} + 2(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$
$$- 4y(x-y+1)e^{-x^2+y^2} + 4y^2(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$

Quindi

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2-4-2-4+4 & -2+4+4-4 \\ 2 & 2-4+2-4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2-4-2-4+4 & -2+4+4-4 \\ 2 & 2-4+2-4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$|H_f(1,1)| = -4$ e dunque $P=(1,1)$ è un punto di sella

B) è analoga: i punti della retta $r: x+y-1=0$ sono critici e inoltre il punto $P=(1,-1)$ è critico.
Tutti i punti di r sono di minimo assoluto
P è di sella

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

A) $$\begin{cases} y''+y'-2y = e^{-2x}-x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è
$\lambda^2+\lambda-2$ che ha radici $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$
Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è
$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
Cerchiamo una soluzione particolare di $y''+y'-2y = e^{-2x}-x$
Possiamo applicare il metodo di similarità separatamente alle equazioni:

1) $y''+y'-2y = e^{-2x}$ 2) $y''+y'-2y = -x$

1) Dato che -2 è radice del polinomio caratteristico cerchiamo $\bar{y}_1$ soluzione di 1) del tipo $\bar{y}_1(x) = kxe^{-2x}$

$\bar{y}_1'(x) = ke^{-2x} - 2kxe^{-2x} = ke^{-2x}(1-2x)$

$\bar{y}_1''(x) = -2ke^{-2x}(1-2x) - 2ke^{-2x} = -4ke^{-2x}(1-x)$

$-4ke^{-2x}(1-x) + ke^{-2x}(1-2x) - 2kxe^{-2x} = e^{-2x}$

da cui $-4k(1-x) + k(1-2x) - 2kx = 1$, ossia

$-4k + 4kx + k - 2kx - 2kx = 1 \iff$

$\iff -3k = 1 \iff k = -\frac{1}{3}$

Dunque $\bar{y}_1(x) = -\frac{1}{3}xe^{-2x}$

$\iff -3k = 1 \iff k = -\frac{1}{3}$

Dunque $\bar{y}_1(x) = -\frac{1}{3} x e^{-2x}$

2) Applichiamo il metodo di similarità anche per la 2): cerchiamo $\bar{y}_2$ soluzione particolare che sia un polinomio di grado 1

$\bar{y}_2(x) = k_1 + k_2 x$, $\bar{y}_2'(x) = k_2$, $\bar{y}_2''(x) = 0$. Quindi

$k_2 - 2k_1 - 2k_2 x = -x$ e dunque

$$\begin{cases} -2k_2 = -1 \\ k_2 - 2k_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 = \frac{1}{2} \\ k_1 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \text{ossia} \quad \bar{y}_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$$

Una soluzione particolare di $y'' + y' - 2y = e^{-2x} - x$ è dunque data da $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) = -\frac{1}{3} x e^{-2x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$. Il suo integrale generale è quindi

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} x e^{-2x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene imponendo che

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 1 \\ c_1 - 2c_2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{3}{4} \\ c_1 - 2c_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} - c_2 \\ \frac{3}{4} - c_2 - 2c_2 = -\frac{1}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} - c_2 \\ 3c_2 = \frac{11}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = \frac{11}{36} \\ c_1 = \frac{3}{4} - \frac{11}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Quindi la soluzione è $y(x) = \frac{4}{9} e^{x} + \frac{11}{36} e^{-2x} - \frac{1}{3} x e^{-2x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$

B) $$\begin{cases} y'' + 4y = \cos(2x) + x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lo svolgimento è analogo a quello dell'esercizio A): l'integrale generale dell'omogenea associata è $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

1) $y'' + 4y = \cos(2x)$, 2) $y'' + 4y = x$

1) Poiché $2i$ è radice del polinomio caratteristico cerchiamo $\bar{y}_1$ del tipo:

$\bar{y}_1(x) = x \cdot (k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x))$

$\bar{y}_1'(x) = k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x) + x(-2k_1 \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x))$

$\bar{y}_1''(x) = -2k_1 \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x) - 2k_1 \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x)$
$\quad + x(-4k_1 \cos(2x) - 4k_2 \sin(2x))$.

Quindi

Quindi

$$-4k_1 \sin(2x) + 4k_2 \cos(2x) - \cancel{4k_1 x \cos(2x)} - \cancel{4k_2 x \sin(2x)}$$
$$+ \cancel{4k_1 x \cos(2x)} + \cancel{4k_2 x \sin(2x)} = \cos 2x$$

$-4k_1 \sin(2x) + 4k_2 \cos(2x) = \cos 2x$ da cui

$k_1 = 0$ e $4k_2 = 1$. Dunque $\bar{y}_1(x) = \frac{x}{4} \sin(2x)$

2) $\bar{y}_2(x) = k_3 + k_4 x$, $\bar{y}_2'(x) = k_4$, $\bar{y}_2''(x) = 0$. Dunque

$4k_3 + 4k_4 x = x$ da cui $k_3 = 0$ e $k_4 = \frac{1}{4}$ e quindi

$\bar{y}_2(x) = \frac{1}{4} x$

L'integrale generale di $y'' + 4y = \cos(2x) + x$ è

$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{x}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} x$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene imponendo

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_2 + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Quindi essa è $y(x) = -\frac{1}{8} \sin(2x) + \frac{x}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} x$

4) Calcolare il seguente integrale

A) $\displaystyle\int_A xy \, dx\,dy$ dove A è l'insieme
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le (\operatorname{arctg} y)^{\frac{1}{2}}\}$

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{(\operatorname{arctg} y)^{\frac{1}{2}}} xy\,dx \right) dy = \int_0^1 y \left(\int_0^{(\operatorname{arctg} y)^{\frac{1}{2}}} x\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 y \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_0^{(\operatorname{arctg} y)^{\frac{1}{2}}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y \operatorname{arctg} y \, dy =$$

$$= \frac{1}{4} y^2 \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2} dy$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \int_0^1 dy + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

16 4 4 0

B) $\displaystyle\int_A \frac{x}{y}\,dx\,dy$ dove A è l'insieme

$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ e \le y \le e^2, \ 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{\log y}}\right\}$

$$\int_A \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_e^{e^2} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\log y}}} \frac{x}{y}\,dx \right) dy = \int_e^{e^2} \frac{1}{y} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\log y}}} x \ dx \right) dy =$$

$$= \int_e^{e^2} \frac{1}{y} \ \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{\log y}}} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\log y} \ dy = \frac{1}{2} \ \log(\log y) \Big|_e^{e^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\log(\log e^2) - \log(\log e) \right) = \frac{1}{2} \left(\log 2 - \log 1 \right)$$

$$= \frac{\log 2}{2}$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 9 settembre 2016 Traccia A

Cognome________________ Nome________________ N° Matricola________________

1)
- Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - 9)\right).$$

- Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{3^n}.$$

8 pts.

2) Stabilire se la funzione

$$f(x, y) = \frac{\log(xy)\log(x+y)}{xy}$$

ha derivata direzionale secondo un qualunque versore in tutti i punti del suo dominio (specificare quale esso sia). Calcolare, poi, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1, 1)$ qualunque sia il versore v di componenti (v_1, v_2)

7 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (y^2 - 1)\log x \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Calcolare

$$\int_Q xy \sin(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove Q è il quadrato di vertici $(0, 0),\ (1, 0),\ (1, 1),\ (0, 1)$.

7 pts.

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 9 settembre 2016 Traccia B

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola____________________

1)
- Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{n-1}\right).$$

- Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{5^n}.$$

8 pts.

2) Stabilire se la funzione

$$f(x,y)=\frac{\cos(xy)\sin(xy)}{xy}$$

ha derivata direzionale secondo un qualunque versore in tutti i punti del suo dominio (specificare quale esso sia). Calcolare, poi, $\frac{\partial f}{\partial v}(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$ qualunque sia il versore v di componenti (v_1,v_2)

7 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'=y^2xe^x \\ y(3)=2 \end{cases}$$

8 pts.

4) Calcolare

$$\int_Q xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove Q è il quadrato di vertici $(0,0),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi),\ (0,\pi)$.

7 pts.

1) A) • Determinare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(n^2-9)\right)$$

Ricordando che $\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\quad\forall x\in(0,+\infty)$

abbiamo che $\forall n\geq 2:\quad \frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(n^2-1)=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{n^2-1}$

quindi la serie assegnata è uguale a

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\mathrm{arctg}\,\frac{1}{n^2-1}$$

Poiché $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{n^2-1}\sim\frac{1}{n^2-1}$ essa ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$ e quindi converge

• Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{2}{3^n}$$

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{2}{3^n}=2\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

quindi è una serie geometrica, meno i primi 4 termini, moltiplicata per 2. È convergente in quanto la ragione è $\frac{1}{3}$ $(\in(-1,1))$

La sua somma è $2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\right)$

uguale anche a $2\cdot\frac{1}{3^4}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$

o anche $2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\frac{1}{3}}\right)=2\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{27}$

B) • Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\sqrt{n-1}\right)$$

È analogo all'esercizio della traccia A. In questo caso

$$\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\sqrt{n-1}=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sim\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

quindi la serie assegnata diverge

- Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{5^n}$$

Come nella traccia A, la serie converge a

$$4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

2) Stabilire se la funzione

A) $f(x,y) = \dfrac{\log(xy)\log(x+y)}{xy}$

B) $f(x,y) = \dfrac{\cos(xy)\sin(xy)}{xy}$

ha derivata direzionale secondo qualunque versore in tutti punti del suo dominio (specificare quale esso sia)

Calcolare poi

A) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,1)$

B) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$

qualunque sia il versore v di componenti (v_1, v_2)

B) $\operatorname{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \wedge y\neq 0\}$

f è di classe C^∞ nel suo dominio quindi è ivi differenziabile (per il teorema del differenziale) e dunque ha derivata direzionale secondo qualunque versore in tutti i punti del suo dominio.

In particolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = \nabla f(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})\cdot v$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(-\sin^2(xy)\,y + \cos^2(xy)\,y)\,xy - \cos(xy)\sin(xy)\,y}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(-\sin^2(xy)\,x + \cos^2(xy)\,x)\,xy - \cos(xy)\sin(xy)\,x}{x^2y^2}$$

quindi $\nabla f(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = \left(\dfrac{\sqrt{\pi}\cdot(-\pi)}{\pi^2}, \dfrac{-\sqrt{\pi}\cdot(-\pi)}{\pi^2}\right)$

e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}v_1 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}v_2$

A) È analoga. In questo caso il dominio è dato dai punti (x,y) tali che

$$\begin{cases} xy > 0 \\ x+y > 0 \\ x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$$ quindi da $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0 \text{ e } y>0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(\frac{y}{xy}\log(x+y) + \log(xy)\frac{1}{x+y}\right)xy - \log(xy)\log(x+y)\,y}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(\frac{x}{xy}\log(x+y) + \log(xy)\frac{1}{x+y}\right)xy - \log(xy)\log(x+y)\,x}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \log 2\, v_1 + \log 2\, v_2$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

A) $\begin{cases} y' = (y^2-1)\log x \\ y(2) = 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} y' = y^2 x e^x \\ y(3) = 2 \end{cases}$

A) $y' = (y^2-1)\log x$ è un'equazione a variabili separabili cioè del tipo $y' = g(y) f(x)$

Osserviamo che le soluzioni singolari (quelle del tipo $y(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in (0,+\infty)$ con $g(y_0) = 0$) sono $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$, $\forall x \in (0,+\infty)$ non sono soluzioni del problema di Cauchy. Possiamo quindi supporre $y(x) \neq \pm 1$, $\forall x \in (0,+\infty)$ e dividere per y^2-1 ottenendo:

$$\frac{y'}{y^2-1} = \log x \quad \text{da cui}$$

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{y^2(x)-1} = \int \log x \, dx \quad \text{ossia}$$

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \log x \, dx$$

$$\int \log x \, dx = x\log x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{y-1}\right)$$

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{y-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\log|y+1| - \log|y-1|\right) + c$$

dunque

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x\log x - x + c$$

Dato che $y(2)=0$ otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{-1}{1}\right| = 2\log 2 - 2 + c \quad \text{cioè}$$

$$c = 2 - 2\log 2$$

e quindi $\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2\left(x\log x - x + 2(1-\log 2)\right)$

da cui $\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2x\log x}\, e^{-2x}\, e^4 \frac{1}{16}$

dato che questa funzione è invece positiva!

Poiché $y(2)=0$, in un intorno di 2

la quantità $\frac{y-1}{y+1}$ è negativa (per continuità)

dunque, in tale intorno, $\frac{y-1}{y+1} = -\frac{e^4}{16} e^{2x\log x} e^{-2x}$

da cui $y-1 = (y+1)\left(-\frac{e^4}{16}\left(e^{\log x}\right)^{2x} e^{-2x}\right)$

e quindi

$$y\left(1+\frac{e^4}{16}x^{2x}e^{-2x}\right) = -\frac{e^4}{16}x^{2x}e^{-2x} + 1$$

da cui

$$y(x) = \frac{-\frac{e^4}{16}x^{2x}e^{-2x} + 1}{1+\frac{e^4}{16}x^{2x}e^{-2x}} =$$

$$= \frac{\frac{-e^4 e^{2x} + 16e^{2x}}{16e^{2x}}}{\frac{16e^{2x} + e^4 x^{2x}}{16e^{2x}}} = \frac{16e^{2x} - e^4 e^{2x}}{16e^{2x} + e^4 x^{2x}}$$

B) È analoga. In questo caso c'è solo una soluzione singolare $y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ che non è soluzione del problema di Cauchy

Dividendo per y^2 otteniamo:

$$\frac{y'}{y^2} = xe^x$$ e integrando:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int e^x x\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = xe^x - e^x + c$$

Poiché $y(3) = 2$ otteniamo che $c = e^3 - 3e^3 - \frac{1}{2}$

e quindi

$$-\frac{1}{y} = xe^x - e^x - 2e^3 - \frac{1}{2}$$

da cui

$$y = \frac{1}{2e^3 + \frac{1}{2} - xe^x + e^x}$$

4) Calcolare il seguente integrale:

B) $\displaystyle\int_Q xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove Q è il quadrato di vertici $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(0,\pi)$, (π,π)

A) $\displaystyle\int_Q xy \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ dove Q è il quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$

B) $$\int_Q xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^\pi x\left(\int_0^\pi y\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^\pi x \; \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^\pi \, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\pi x\,(x^2+\pi^2)^{\frac{3}{2}}dx - \frac{1}{3}\int_0^\pi x^4\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0 x\,(x^2+\pi^2)\,dx - \frac{1}{3}\int_0 x\,dX$$

$$= \frac{1}{15}\left(\pi^2+x^2\right)^{5/2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{15}x^5\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{15}2^{5/2}\pi^5 - \frac{\pi^5}{15} - \frac{\pi^5}{15} = \frac{2}{15}\pi^5\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

A) $$\int_Q xy\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 x\left(\int_0^1 y\sin(x^2+y^2)\,dy\right)dx$$

$$= -\int_0^1 x\,\frac{1}{2}\cos(x^2+y^2)\Big|_0^1\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\cos(x^2+1) - \cos(x^2)\right)dx$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(x^2+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\sin(x^2)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(2) + \frac{1}{4}\sin(1) + \frac{1}{4}\sin(1)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sin(1) - \sin(2)\right)$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 10 novembre 2016 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N^o Matricola____________________

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(\sqrt{n-1})\left(1-\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

7 pts.

2) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y)=\frac{(x-y)^2 x}{y}$$

e studiarne la loro natura.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''+y'+y=x^2-1 \\ y(\pi/\sqrt{3})=0 \\ y'(\pi/\sqrt{3})=0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Calcolare

$$\int_A \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<2,\ y<x, y>0\}$.

7 pts.

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 10 novembre 2016 Traccia B

Cognome____________________Nome____________________N^o Matricola____________________

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\sqrt{n-1}) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

7 pts.

2) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = \frac{(y-x)^2 y}{x}$$

e studiarne la loro natura.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y' + y = xe^x \\ y(\pi/\sqrt{3}) = 0 \\ y'(\pi/\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Calcolare

$$\int_A \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2,\ x < y, x > 0\}$.

7 pts.

Appello Analisi Matematica II modulo

giovedì 3 novembre 2016 11:30

1) Determinare il carattere della serie

A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{artg}(\sqrt{n-1}) \cdot \left(1 - \cos^2 \frac{1}{n}\right)$ (*)

B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\sqrt{n-1}) \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ (**)

A) $0 \le \operatorname{artg} \sqrt{n-1} \left(1 - \cos^2 \frac{1}{n}\right) \le \frac{\pi}{2}\left(1 - \cos^2 \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{1}{n} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}$

quindi (*) converge per il teorema di confronto in quanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$

B) $0 \le |\sin(\sqrt{n-1})| \left|1 - \cos \frac{1}{n}\right| \le 1 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$

quindi (**) converge per lo stesso motivo dell'esercizio A)

2) Determinare i punti stazionari della funzione

A) $f(x,y) = (x-y)^2 \frac{x}{y}$ e studiarne la natura

B) $f(x,y) = (y-x)^2 \frac{y}{x}$ "

A) $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

$f_x(x,y) = 2(x-y)\frac{x}{y} + \frac{(x-y)^2}{y}$

$f_y(x,y) = -2(x-y)\frac{x}{y} - \frac{(x-y)^2 x}{y^2}$

ottenuto sommando membro a membro (1) e (2)

$$\begin{cases} 2(x-y)\frac{x}{y} + \frac{(x-y)^2}{y} = 0 & (1) \\ -2(x-y)\frac{x}{y} - x\frac{(x-y)^2}{y^2} = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{y}\left(1 - \frac{x}{y}\right) = 0 \\ 2(x-y)\frac{x}{y} + x\frac{(x-y)^2}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 (y-x) = 0 \\ x(x-y)(2y + x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ 4x^2(-2x) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

in cui la funzione non è definita

Quindi tutti i punti della retta $y = x$ (tranne $O(0,0)$) sono critici

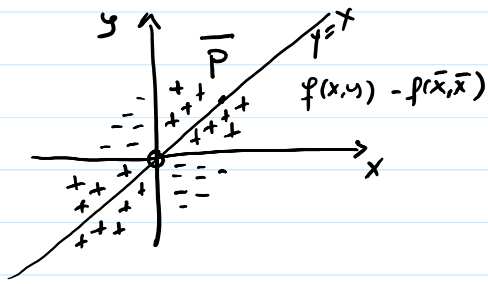
Il punto $(0,0)$ non è accettabile come soluzione in quanto f non è è definito in $(0,0)$

Studiamo la natura dei punti della retta $r: y = x$

Sia $\bar{P} \in r \setminus \{0\}$, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{x})$, $\bar{x} \neq 0$; $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$

quindi $f(x,y) - f(\bar{x},\bar{x}) = f(x,y) = (x-y)^2 \dfrac{x}{y} \geq 0$

se e solo se $\bar{x} \geq 0 \wedge \bar{y} > 0$ o $\bar{x} \leq 0 \wedge \bar{y} < 0$



Dunque ogni punto di $r \setminus \{0\}$ è di minimo locale non forte

B) È analoga ad A)

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

A) $$\begin{cases} y'' + y' + y = x^2 - 1 \\ y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \end{cases}$$

B) $$\begin{cases} y'' + y' + y = xe^x \\ y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 \end{cases}$$

A) l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di similarità

$\tilde{y} = \tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c,$
$\tilde{y}'(x) = 2ax + b,$
$\tilde{y}''(x) = 2a.$

Dunque deve essere $2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2 - 1$
cioè, uguagliando i coefficienti dei due polinomi al I e al II membro

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ 2a + b + c = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 + 2 - 2 = -1 \end{cases}$$

Dunque $\tilde{y}(x) = x^2 - 2x - 1$

L'integrale generale dell'equazione $y'' + y' + y = x^2 - 1$ è quindi

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x^2 - 2x - 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Determiniamo le costanti c_1 e c_2 in modo che siano soddisfatte le condizioni iniziali $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0$

Per $x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ otteniamo imponendo che $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0$ otteniamo

$$c_2 e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\pi - 1 = 0 \quad (1)$$

$$y'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) +$$
$$+ e^{-\frac{1}{2}x}\left(-c_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + 2x - 2$$

$$y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} e^{-\pi/2\sqrt{3}} \cdot c_2 - e^{-\pi/2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} c_1 + 2\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2 = 0 \quad (2)$$

Da (1) otteniamo $c_2 = \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{3}\right) e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$

Da (1) otteniamo $C_2 = \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{3}\right) e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$

e sostituendo in (2)

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} c_1 + 2\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2 = 0$$

da cui $c_1 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$

B) È analoga ad A)

4) Calcolare

A) $$\iint_A \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx\,dy$$

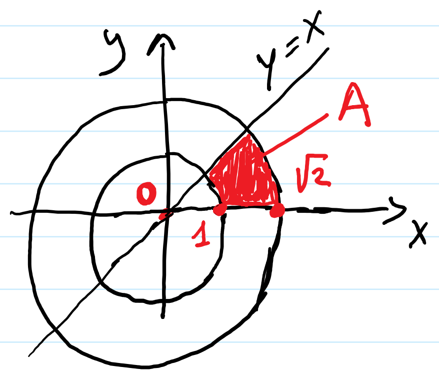
dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 2,\ y < x,\ y > 0\}$

B) $$\iint_A \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) dx\,dy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 2,\ y > x,\ x > 0\}$

A)

A:



In coordinate polari l'integrale diviene

$$\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\rho^2 \sin^2\theta}{\rho^2 \cos^2\theta}\, \rho\right) d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\, \rho \; d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \rho\, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}(2-1) \cdot \operatorname{tg}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

B) È analoga ad A)

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 19 gennaio 2017 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N^o Matricola____________________

1) Stabilire se la funzione $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{x(-\log x)^{3/2}}$ è integrabile tra 0 e $\frac{1}{2}$.

7 pts.

2) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y \arctan x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si consideri poi la seguente modifica del problema precedente

$$\begin{cases} y' = y \arctan x + \sin y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

È ancora vero che tale problema ha una ed una sola soluzione definita su $\mathbb{R}$? Motivare la risposta.

8 pts.

3) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)xy$$

e studiarne la loro natura.

8 pts.

4) Calcolare

$$\int_A x^2 \cos(xy) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} \le x \le \pi,\ 1 \le y \le \frac{\pi}{x}\}$.

7 pts.

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 19 gennaio 2017 Traccia B

Cognome____________________ Nome____________________ N° Matricola____________________

1) Stabilire se la funzione $f(x) = \dfrac{\sin(x^4)}{x\log^{4/3} x}$ è integrabile tra 0 e $\frac{1}{3}$.

7 pts.

2) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2}{x^2+1} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si consideri poi la seguente modifica del problema precedente

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2}{x^2+1} y + \cos y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

È ancora vero che tale problema ha una ed una sola soluzione definita su $\mathbb{R}$? Motivare la risposta.

8 pts.

3) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = (1 - x^2 + y^2)xy$$

e studiarne la loro natura.

8 pts.

4) Calcolare

$$\int_A \frac{x^2 \cos x}{\cos^2(xy)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4},\ 1 \le y \le \frac{\pi}{4x}\}$.

7 pts.

1) Stabilire se le funzione

A) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{x(-\log x)^{3/2}}$ è integrabile tra 0 e $\frac{1}{2}$

B) $f(x) = \frac{\sin(x^4)}{x \log^{4/3} x} dx$ è integrabile tra 0 e $\frac{1}{3}$

A) $\frac{\cos^2 x}{x(-\log x)^{3/2}} \le \frac{1}{x(-\log x)^{3/2}} \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2}]$

Poiché la funione $\frac{1}{x(-\log x)^{3/2}}$ è integrabile tra 0 e $\frac{1}{2}$

f è integrabile per il teorema di confronto

B) È analoga, basta osservare che $\frac{\sin(x^4)}{x \log^{4/3} x} \le \frac{1}{x \log^{4/3} x}$, $\forall x \in (0, \frac{1}{3}]$

2) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

A) $\begin{cases} y' = y \operatorname{artg}(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} y' = \frac{x^2}{x^2+1} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Si consideri poi la seguente modifica del problema precedente

A) $\begin{cases} y' = y \operatorname{artg}(x) + \sin y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} y' = \frac{x^2}{x^2+1} y + \cos y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

È ancora vero che tale problema ha ancora una e una sola soluzione definita su $\mathbb{R}$? Motivare la risposta

A)

$y(x) = c e^{\int \operatorname{artg} x \, dx}, \quad c \in \mathbb{R}$

$\int \operatorname{artg} x = x \operatorname{artg} x - \int \frac{x}{x^2+1} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(x^2+1)$

quindi $y(x) = c e^{x \operatorname{artg} x} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

come si vede $y(0) = c$ quindi per $c = 1$ ottiene la soluzione del problema

Per il secondo quesito osserviamo che l'equazione è del tipo $y' = f(x,y)$ con $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x)\, y + \sin y$

Poiché $f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ il problema di Cauchy assegnato ha sicuramente una e una sola soluzione in un intorno di $x_0 = 0$

Dato che $|f(x,y)| \le |\operatorname{arctg}(x)\, y| + |\sin y|$

$$\le \frac{\pi}{2}|y| + 1$$

f è sublineare in y e quindi la soluzione è definita su $\mathbb{R}$.

B) È analoga:

$$y(x) = c\, e^{\int \frac{x^2}{x^2+1}dx}, \quad c \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - \operatorname{arctg} x;$$

quindi $y(x) = c\, e^{x}\, e^{-\operatorname{arctg} x}$;

$y(0) = c$ e quindi per $c = 1$ si ottiene la soluzione

Per il II quesito: $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+1}y + \cos y$,

$f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $|f(x,y)| \le \left|\frac{x^2}{x^2+1}y\right| + |\cos y|$

$$\le 1|y| + 1 = |y| + 1$$

3) Determinare i punti stazionari della funzione

A) $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)xy$

B) $f(x,y) = (1 - x^2 + y^2)xy$

e studiarne la natura

A) $f_x(x,y) = -2x\cdot xy + (1-x^2-y^2)y = y(1-3x^2-y^2)$

$f_y(x,y) = -2y\cdot xy + (1-x^2-y^2)x = x(1-x^2-3y^2)$

$$\begin{cases} y(1-3x^2-y^2)=0 \\ x(1-x^2-3y^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x(1-x^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-3x^2-y^2=0 \\ x(1-x^2-3y^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1=3x^2+y^2 \\ x(3x^2+y^2-x^2-3y^2)=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 1=3x^2+y^2 \\ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\pm 1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1=3x^2+y^2 \\ 2x^2-2y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y)(x+y)=0 \\ 1=3x^2+y^2 \end{cases} \iff$$

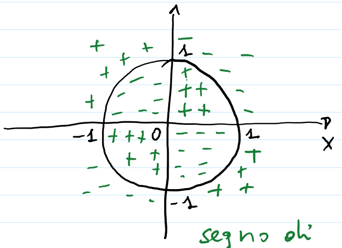
$x = y$ $\quad y = \pm\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 1 = 3x^2+y^2 \\ 2x^2-2y^2=0\end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y)(x+y)=0 \\ 1=3x^2+y^2\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=y \\ 1=4y^2\end{cases} \quad \begin{cases} y=\pm\frac12 \\ x=\pm\frac12\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-y \\ 1=4y^2\end{cases} \quad \begin{cases} y=\pm\frac12 \\ x=\mp\frac12\end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto i punti critici $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(-1,0)$, $P_4(0,1)$, $P_5(0,-1)$
$\left(\frac12,\frac12\right)$, $\left(-\frac12,-\frac12\right)$, $\left(\frac12,-\frac12\right)$, $\left(-\frac12,\frac12\right)$



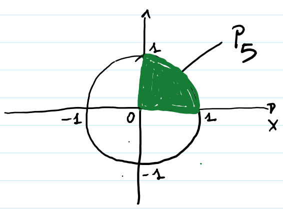
segno di $f(x,y)-f(P_i)$
$i=1,\dots,5$

Poiché $1-x^2-y^2\geq 0 \iff (x,y)\in\overline{D(0,1)}$
otteniamo subito la natura dei primi 5 punti critici tenendo presente che

$$f(0,0)=f(1,0)=f(-1,0)=f(0,1)=f(0,-1)=0$$

Come si vede dalla figura sono tutti punti di sella

Poiché $f(-x,-y)=f(x,y)$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, la natura di $P_7\left(-\frac12,-\frac12\right)$ è la stessa di $P_6\left(\frac12,\frac12\right)$. Analogamente, dato che $f(x,-y)=f(-x,y)=-f(x,y)$ la natura di $P_8\left(\frac12,-\frac12\right)$ e $P_9\left(-\frac12,\frac12\right)$ è opposta (salvo nel caso in cui si tratti di punti di sella) a quella di $P_6\left(\frac12,\frac12\right)$



Consideriamo il settore circolare T in verde nella figura qui accanto. T è compatto e sui punti del suo bordo f è uguale a 0. Dato che $f(P_5)>0$ per il teorema di Weierstrass applicato f_T, P_6 è un punto di massimo locale forte.
Allo stesso risultato si giunge calcolando la matrice Hessiana di f in P_6

Infine, per quanto osservato sopra, P_7 è un massimo locale forte
P_8 e P_9 sono minimi locali forti.

B) $f_x(x,y) = -2x\,xy + (1-x^2+y^2)y = y(1-3x^2+y^2)$

$f_y(x,y) = 2y\,xy + (1-x^2+y^2)x = x(1-x^2+3y^2)$

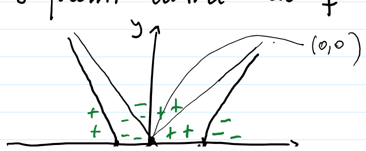
$$\begin{cases} y(1-3x^2+y^2)=0 \\ x(1-x^2+3y^2)=0\end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=0\end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=\pm1\end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-3x^2+y^2=0 \\ x(1-x^2+3y^2)=0\end{cases} \iff \begin{cases} 1=3x^2-y^2 \\ x(2x^2+2y^2)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ 1=-y^2\end{cases} \emptyset$$

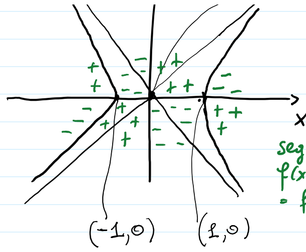
$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)=0 \\ 1=3x^2-y^2\end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \wedge y=0 \\ 1=0\end{cases} \emptyset$$

I punti critici di f sono dunque $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(-1,0)$



Come per la traccia A, dato che
$f(P_1)=f(P_2)=P_3(-1,0)$, poniamo

come per lo ... , dato che $f(P_1) = f(P_2) = P_3(-1,0)$, possiamo stabilire la natura di tali punti analizzando il segno di $f(x,y) - f(P_i) = f(x,y)$.



segno di $f(x,y) - f(P_i) = f(x,y)$

Poiché $1 - x^2 + y^2 \geq 0$ nella parte di piano connessa (contenente $(0,0)$) delimitata dall'iperbole $x^2 - y^2 = 1$, P_1, P_2 e P_3 sono di sella

4) Calcolare

A) $$\int_A x^2 \cos(xy)\, dx\, dy \qquad \text{dove } A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi,\ 1 \leq y \leq \frac{\pi}{x}\right\}$$

B) $$\int_A \frac{x^2 \cos x}{\cos^2(xy)}\, dx\, dy \qquad \text{dove } A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq y \leq \frac{\pi}{4x}\right\}$$

A) $$\int_A x^2 \cos(xy)\, dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \left(\int_1^{\frac{\pi}{x}} x \cos(xy)\, dy \right) dx = \int_0^{\pi} x \sin(xy) \Big|_1^{\frac{\pi}{x}} dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x(\sin \pi - \sin x)\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x\, dx = x \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x$$

$$= -\pi - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\pi + 1$$

B) $$\int_A \frac{x^2 \cos x}{\cos^2(xy)}\, dx\, dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \left(\int_1^{\frac{\pi}{4x}} \frac{x}{\cos^2(xy)}\, dy \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \ \operatorname{tg}(xy) \Big|_1^{\frac{\pi}{4x}} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} x \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (x \cos x - x \sin x)\, dx$$

$$= x \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx + x \cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x =$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{6}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 14 febbraio 2017 Traccia A

Cognome________________________Nome________________________N° Matricola________________________

1) Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1-\log(2k-1)}{k^2-2k}$$

7 pts.

2) Dimostrare che il seguente problema di Cauchy una ed una sola soluzione definita su $\mathbb{R}$. Dimostrare anche che tale soluzione è monotona crescente:

$$\begin{cases} y' = \cos^2(xy)\sin^2(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

6 pts.

3) Sia $f(x,y) = \dfrac{x\log(x^2-y^2+1)}{x+y}$. Determinare e rappresentare sul piano l'insieme A su cui f è differenziabile. Stabilire poi se f ha derivata direzionale nel punto $(1,0)$ rispetto al versore $v = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e, in caso positivo, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

9 pts.

4) Calcolare

$$\int_A x^4 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 2x^2,\ -1 \le xy \le -1/2\}$.

8 pts.

1) Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1-\log(2k-1)}{k^2-2k}$$

Poiché
$$\frac{1-\log(2k+1)}{k^2-2k} = \frac{1}{k^2-2k} - \frac{\log(2k+1)}{k^2-2k}$$

possiamo studiare il carattere delle serie numeriche

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2-2k}$ e (2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\log(2k+1)}{k^2-2k}$: se entrambe convergono anche la serie assegnata converge;

$$\frac{1}{k^2-2k} \sim \frac{1}{k^2}$$ per cui (1) converge

$$k^{3/2}\,\frac{\log(2k+1)}{k^2-2k} \longrightarrow 0$$ quindi per il criterio degli infinitesimi anche (2) converge

2) Dimostrare che il seguente problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione definita su $\mathbb{R}$.
Dimostrare anche che tale soluzione è monotona crescente

$$\begin{cases} y' = \cos^2(xy)\sin^2(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Sia $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos^2(xy)\sin^2(xy)$. Dato che f è prodotto delle funzioni $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \cos^2(xy)$ e $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \sin^2(x,y)$ che sono entrambe di classe C^1 anche $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Quindi $(*)$ ha una ed una sola soluzione locale. Poiché f è limitata (infatti $0\le f(x,y)\le 1$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$) tale soluzione è definita su $\mathbb{R}$.

Inoltre, dal fatto che f è non negativa abbiamo anche che $\forall x \in \mathbb{R}$ $y'(x) = \cos^2(x\, y(x)) \sin^2(x\, y(x)) \geq 0$

quindi y è monotona crescente su $\mathbb{R}$.

3) Sia $f(x,y) = \dfrac{x \log(x^2 - y^2 + 1)}{x+y}$. Determinare e rappresentare sul piano l'insieme A su cui f è differenziabile.

Stabilire poi se f ha derivata direzionale nel punto $(1,0)$ rispetto al versore $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e in caso positivo

calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

f è definita su $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + 1 > 0 \wedge x \neq -y\}$.

Osserviamo che dalle regole di derivazione f è derivabile su B

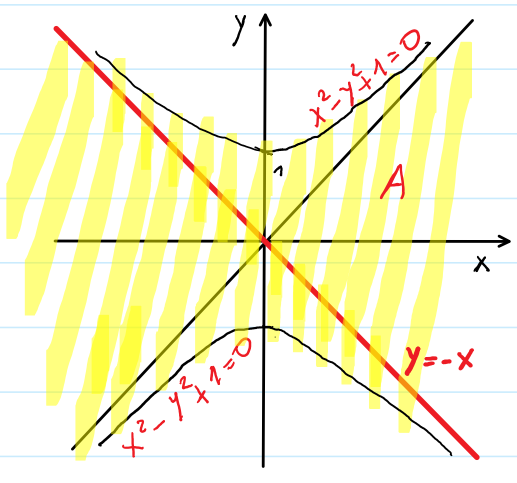
$$\forall (x,y) \in B: \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\log(x^2-y^2+1)}{x+y} + x \frac{2x}{x^2-y^2+1} \cdot \frac{1}{x+y}$$
$$- x \log(x^2-y^2+1) \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy}{x^2-y^2+1} \cdot \frac{1}{x+y} - x \log(x^2-y^2+1) \frac{1}{(x+y)^2}$$

entrambe queste funzioni sono definite e continue su B

quindi $A = B$. A è l'insieme tratteggiato in giallo

retta $y=-x$ esclusa



Dato che $(1,0) \in A$, f ha derivata direzionale secondo qualunque direzione in $(1,0)$ e inoltre

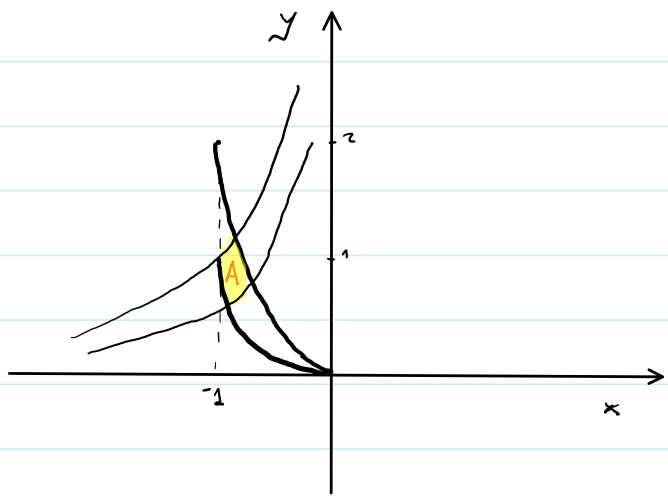
$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = Df(1,0) \cdot v = \left(1, -\log 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\log 2}{\sqrt{2}}$$

4) Calcolare l'integrale

$$\int_A x^4 y \, dx\, dy \quad \text{dove } A = \left\{(x,y) : x^2 \leq y \leq 2x^2, \quad -1 \leq xy \leq -\frac{1}{2}\right\}$$

Osserviamo che A è l'insieme qui rappresentato in figura



Poniamo $\frac{y}{x^2} = u$ e $xy = v$

Quindi $1 \leq u \leq 2$ e $-1 \leq v \leq -\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{2y}{x^2} - \frac{y}{x^2} = -\frac{3y}{x^2} = -3u$$

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{2y}{x^2} - \frac{y}{x^2} = -\frac{3y}{x^2} = -3u$$

Quindi $\qquad \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{3u}$

$$\int_A x^4 y \, dx\, dy = \int_A \frac{x^4}{y} y^2 \, dx\, dy = \int_{[1,2]\times[-1,-\frac{1}{2}]} \frac{v^2}{u} \cdot \frac{1}{3u} \, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} v^2 dv \cdot \int_1^2 \frac{du}{u^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} v^3 \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{u} \Big|_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{8} + 1 \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{144}$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 21 aprile 2017 Traccia A

Cognome____________________ Nome____________________ N^o Matricola____________________

1) (a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{2}{4^k}.$$

(b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \log k}{k^3+1}.$$

8 pts.

2) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = (x-y+2)xy$ e studiarne la natura.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = xe^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Calcolare

$$\int_A (x^2+y^2)xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è il settore di corona circolare di raggi 1 e 2, ampiezza $\pi/2$, individuato dagli assi cartesiani nel II quadrante.

6 pts.

Appello Analisi Matematica II modulo

venerdì 21 aprile 2017 11:00

1)

(a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{2}{4^k}$$

(b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \log k}{k^3+1}$$

(a) Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ priva dei primi 4 termini e moltiplicata per 3

Quindi $\displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{2}{4^k} = 2 \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = 2\,\frac{1}{4^4} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{4^h}$

$$= \frac{2}{4^4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{2^8\,\frac{3}{2^2}} = \frac{1}{3\cdot 2^5}$$

(b) Usando il criterio degli infinitesimi si deduce che la serie assegnata converge. Infatti

$$k^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{k \log k}{k^3+1} = \frac{k^{\frac{5}{2}} \log k}{k^3+1} =$$

$$= \frac{k^{\frac{5}{2}} \log k}{k^3\left(1+\frac{1}{k^3}\right)} = \frac{\log k}{k^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k^3}} \longrightarrow 0$$

2) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (x-y+2)\,xy$$

e studiarne la natura

$$f_x(x,y) = xy + y(x-y+2)$$

$$f_y(x,y) = -xy + x(x-y+2)$$

I punti critici di f sono i punti (x,y) che risolvono:

$$\begin{cases} xy + y(x-y+2) = 0 \\ -xy + x(x-y+2) = 0 \end{cases}$$

sommando membro a membro e prendendo la I equazione otteniamo:

$$\begin{cases} (x-y+2)(x+y)=0 \\ xy + y(x-y+2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ -x^2-x^2-x^2-2x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x(3x+2)=0 \\ y=-x \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\vee$$

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ xy=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

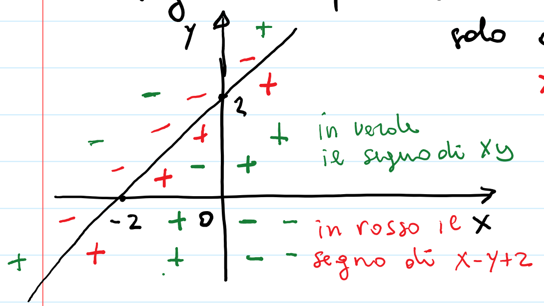
sono punti della retta di equazione $y = x+2$

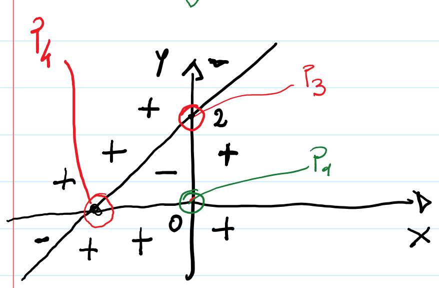
f ha dunque 4 punti critici $P_1(0,0)$, $P_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ $P_3(0,2)$ $P_4(-2,0)$

Osserviamo che la natura di P_1, P_3 e P_4 può essere subito stabilita studiando il segno di

$f(x,y) - f(P_i) = f(x,y)$ $\forall i=1,3,4$ dato che $f(P_i)=0$

Il segno di f si ottiene subito dato che dipende solo dal segno di $x-y+2$ e xy





Si vede subito che P_1, P_3, P_4 sono punti di sella dato che ognuno di essi non ha alcun intorno su cui f ha segno definito.

Per stabilire la natura di P_2 calcoliamo la matrice Hessiana di f

$$f_{xx}(x,y) = y + y = 2y$$

$$f_{yy}(x,y) = -x - x = -2x$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = x + x - 2y + 2$$

$$\Big(4 \quad -\tfrac{2}{3} \quad \Big.$$

$$H_f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$\left|H_f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{12}{9} > 0$; $\frac{4}{3} > 0$ quindi P_2 è un minimo locale forte

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = xe^x \quad (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ che ha radici $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.
Quindi l'equazione omogenea associata a $(*)$ ha integrale generale

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione $\bar{y}$ di $(*)$ con il metodo di similarità. Poiché 1 è radice del polinomio caratteristico
$\bar{y} = \bar{y}(x) = x(k_1 + k_2 x)e^x$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= (k_1 + k_2 x)e^x + k_2 x e^x + x(k_1 + k_2 x)e^x \\ &= k_1 e^x + xe^x(2k_2 + k_1) + k_2 x^2 e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}''(x) &= k_1 e^x + e^x(2k_2 + k_1) + xe^x(2k_2 + k_1) + 2k_2 x e^x + k_2 x^2 e^x \\ &= e^x(2k_2 + 2k_1) + xe^x(4k_2 + k_1) + k_2 x^2 e^x \end{aligned}$$

Quindi imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione otteniamo

$$\underline{e^x(2k_2 + 2k_1)} + xe^x(4k_2 + k_1) + \cancel{k_2 x^2 e^x} \underline{- 3k_1 e^x} - 3xe^x(2k_2 + k_1) - \cancel{3k_2 x^2 e^x}$$
$$+ 2xk_1 e^x + \cancel{2k_2 x^2 e^x} = xe^x$$

ossia

$e^x(2k_2 - k_1) + xe^x(-2k_2) = xe^x$ e pertanto deve essere

$e^x(2k_2 - k_1) + xe^x(-2k_2) = xe^x$ e pertanto deve essere

$$\begin{cases} 2k_2 - k_1 = 0 \\ -2k_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 = -\frac{1}{2} \\ k_1 = -1 \end{cases}$$

quindi $\bar{y}(x) = x\left(-1 - \frac{1}{2}x\right)e^x$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene imponendo che $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^x$ soddisfi le condizioni iniziali

$0 = y(0) = c_2 + c_2$ da cui $c_2 = -c_1$

$$y'(x) = c_1 e^x - 2c_1 e^{2x} - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^x - \frac{x}{2}e^x - x\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^x$$

$0 = y'(0) = c_1 - 2c_1 - 1$ da cui $c_1 = -1$

la soluzione è quindi $y(x) = -e^x + e^{2x} - x\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^x$

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A (x^2+y^2)\,xy\,dx\,dy$$

dove A è il settore di corona circolare di raggi 1 e 2 e ampiezza $\frac{\pi}{2}$ tagliato dagli assi cartesiani nel II quadrante

Passando alle coordinate polari

$$\int_A (x^2+y^2)\,xy\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_1^2 \rho^5 \cos\theta \sin\theta \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \cdot \int_1^2 \rho^5 \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cdot \frac{1}{6}\rho^6 \Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{12} \cdot \left(2^6 - 1\right)$$

12

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 26 giugno 2017 Traccia A

Cognome____________________ Nome____________________ N^o Matricola____________________

1) (a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

(b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{n^2\log^3 n+1}.$$

7 pts.

2) Stabilire quale sia l'insieme su cui la funzione $f(x,y)=(x-y^2)^2x$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, è differenziabile, motivando la risposta. Calcolare poi $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,-1)$, dove v è il versore di componenti $(\cos\bar\theta,\sin\bar\theta)$, con $\bar\theta=\pi+\frac{\pi}{3}$.

Determinare infine i punti critici di f e studiarne la natura.

9 pts.

3) Determinare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'=(x-1)y+e^{\frac{x^2}{2}} \\ y(1)=1 \end{cases}$$

7 pts.

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \log(x+y)x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme definito da

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0,\ 1<x+y<2\}.$$

7 pts.

1) a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2 \log^3 n + 1}$$

a) Trattasi della serie geometrica di ragione $-\frac{1}{2}$ priva dei primi tre termini quindi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \overset{k=n-2}{=} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

b) $$\frac{n}{n^2 \log^3 n + 1} \sim \frac{1}{n \log^3 n}$$

Per il criterio dell'integrale la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^3 n}$ converge

e quindi anche la serie assegnata converge.

2) Stabilire quale sia l'insieme su cui la funzione

$$f(x,y) = (x-y^2)^2 x \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

è differenziabile, motivando la risposta. Calcolare poi $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,-1)$

dove v è il versore di componente $(\cos\bar{\theta}, \sin\bar{\theta})$, $\bar{\theta} = \pi + \frac{\pi}{3}$.

Determinare infine i punti critici di f e studiarne la natura

Poiché f è un polinomio, essa è una funzione di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$

e quindi è differenziabile $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Essendo differenziabile

ovunque, $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,-1) = \nabla f(-1,-1) \cdot v$.

Calcoliamo dunque le derivate parziali di f:

$$f_x(x,y) = 2(x-y^2)x + (x-y^2)^2 = (x-y^2)(2x+x-y^2) = (x-y^2)(3x-y^2)$$

$$f_y(x,y) = 2(x-y^2)(-2y)x = -4(x-y^2)xy$$

Quindi $\nabla f(-1,-1) = (8,8)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,1) = (8,8)\cdot\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$= -8\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 8\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4-4\sqrt{3} = -4(1+\sqrt{3})$$

Cerchiamo ora i punti stazionari di f:

$$\begin{cases} x-y^2=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y^2)(3x-y^2)=0 \\ -4(x-y^2)xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^2/3 \\ -\frac{2}{3}y^2\, y^3/3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

I punti critici di f sono dunque tutti i punti appartenenti alla parabola P di equazione $x=y^2$ e il punto $O(0,0)$. Poiché $O\in P$ possiamo analizzare la natura di O insieme a quella dei punti di P.

$\forall\, (\bar{x},\bar{y})\in P$: $f(\bar{x},\bar{y})=0$ quindi

$$f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y) \quad \forall (\bar{x},\bar{y})\in P$$

Dato che il segno di $f(x,y)$ coincide con quello di x e che per ogni $(\bar{x},\bar{y})\in P\setminus\{0,0\}$: $\bar{x}>0$, abbiamo che ogni $(\bar{x},\bar{y})\in P\setminus\{(0,0)\}$ è un punto di minimo locale (non stretto). Dato che ogni intorno di $(0,0)$ contiene punti con ascissa negativa, $(0,0)$ è di sella.

3) Determinare, esplicitamente, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x-1)y + e^{\frac{1}{2}x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Sappiamo che la soluzione è data da

$$y(x) = \left(e^{\int_1^x (t-1)\,dt}\right)\left(1 + \int^x e^{-\int_1^t (\tau-1)\,d\tau}\, e^{\frac{t^2}{2}}\,dt\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t-1)^2\Big|_1^x} \left(1 + \int^x_1 e^{-\frac{1}{2}(\tau-1)^2\Big|_1^t} e^{\frac{t^2}{2}}\,dt\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t-1)^2\Big|_1} \left(1 + \int_1 e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2\Big|_1} e^{\frac{t^2}{2}} dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \left(1 + \int_1^x e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} e^{t^2/2} dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \left(1 + \int_1^x e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{t} e^{-\frac{1}{2}} e^{t^2/2} dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \left(1 + \int_1^x e^{-\frac{1}{2}} e^{t} dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \left(1 + e^{-\frac{1}{2}} \left(e^x - e \right) \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}x^2 - x} e^{\frac{1}{2}} \left(1 + e^{-\frac{1}{2}+x} - e^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}x^2 - x} \left(e^{\frac{1}{2}} + e^{x} - e \right)$$

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \log(x+y)\, x \, dx\, dy$$

dove A è l'insieme definito da

$$A = \{ (x,y) : x>0 ,\ y>0 ,\ 1 < x+y < 2 \}$$

Possiamo considerare la trasformazione

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x \end{cases}$$

Ovviamente, per come A è definito abbiamo che $1 < u < 2$,

ed essendo $y = u - v$ abbiamo anche che

$0 < v$ e $u - v > 0$ cioè $v < u$

Pertanto nel piano $\{u,v\}$ abbiamo che A è un insieme normale rispetto ad u : $1 < u < 2$, $0 < v < u$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 , & 1 \\ 1 , & -1 \end{pmatrix} \quad \text{quindi} \quad \left| \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) \right| = 1$$

$\partial(u,v)$ $\quad$ $1, -1$ $\quad\quad$ $\partial(u,v)$ |

quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_1^2 \log u \left(\int_0^u v\,dv\right) du = \int_1^2 \frac{1}{2} u^2 \log u \, du =$$

$$= \frac{1}{6} u^3 \log u \Big|_1^2 - \frac{1}{6}\int_1^2 u^3 \frac{1}{u}\, du =$$

$$= \frac{4}{3}\log 2 - \frac{1}{18} u^3 \Big|_1^2 = \frac{4}{3}\log 2 - \frac{4}{9} + \frac{1}{18} =$$

$$= \frac{4}{3}\log 2 - \frac{7}{18}$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 10 luglio 2017 Traccia A

Cognome____________________ Nome____________________ N^o Matricola____________________

1) Stabilire che il seguente integrale improprio diverge positivamente:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}} \arctan\left(\frac{x^2}{x^3+3}\right) \mathrm{d}x.$$

6 pts.

2) Determinare il dominio della funzione reale di due variabili reali $f(x, y) = (x^2 + y^2)\log(x - y)$ e rappresentarlo graficamente sul piano. Dimostrare poi che f è differenziabile, sul suo dominio. Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0)$, al variare del versore $v = (v_1, v_2)$.

8 pts.

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = -e^{-3x} \log x.$$

8 pts.

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_T (x - y)^2 e^{y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove T è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

8 pts.

1) Stabilire che il seguente integrale improprio diverge positivamente

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$$

La funzione integranda è continua su $(0,+\infty)$ ed ha un asintoto verticale a destra per $x \to 0^+$

Possiamo quindi considerare separatamente

$$\int_0^a \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx \quad e \quad \int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$$

dove a è un qualunque numero in $(0,+\infty)$

Studiamo $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$

Poiché $\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

e $\sqrt{\frac{x+2}{x}} \longrightarrow 1$ per $x \to +\infty$

$\sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

e quindi $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx = +\infty$

Dato che $\sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) > 0$ su $(0,+\infty)$

$\displaystyle\int_0^a \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \neq -\infty$ e dunque $\displaystyle\int_0^a \cdots + \int_a^{+\infty} \cdots$ non è una forma indeterminata; d'altro canto per $x \to 0^+$

$\sqrt{\frac{x+2}{x}} \sim \sqrt{\frac{2}{x}}$ e $\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{x^2}{4}$ quindi

$\sqrt{\frac{x+2}{x}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{2}}$ per $x \to 0^+$, di conseguenza

la funzione integranda ha limite finito $(=0)$ per $x \to 0^+$ ed è quindi integrabile su $[0,a]$

Pertanto

$x \to 0^+$ ed è quindi integrabile su $[0,1]$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx = +\infty$$

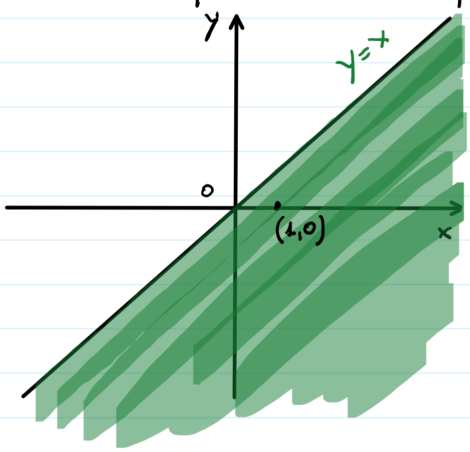
2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x-y)$$

Rappresentarlo graficamente sul piano. Dimostrare poi che f è differenziabile sul suo dominio. Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ al variare del versore $v = (v_1, v_2)$.

$$\operatorname{dom} f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0 \}$$

Dunque il dominio di f è aperto ed è dato da i punti (x,y) per cui $y < x$: è quindi il semipiano aperto colorato in figura



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\log(x-y) + \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\log(x-y) - \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

Entrambe le derivate parziali sono continue su $\operatorname{dom} f$ e quindi per il teorema del differenziale f è differenziabile su $\operatorname{dom} f$.

Il punto $(1,0) \in \operatorname{dom} f$.

Poiché f è ivi differenziabile $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v =$

$= 1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = v_1 - v_2$

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = -e^{-3x}\log x$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ che ha un'unica soluzione

$\lambda = -3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione

omogenea associata è $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie (dato che il termine noto $g(x) = -e^{-3x}\log x$ non rientra nella classe di funzioni per cui è possibile applicare il metodo di similarità)

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^{-3x} + c_2'(x)\, x e^{-3x} = 0 \\ c_1'(x)\,(-3e^{-3x}) - c_2'(x)\,(e^{-3x} - 3x e^{-3x}) = -e^{-3x}\log x \end{cases}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^{-3x} \\ -e^{-3x}\log x & e^{-3x} - 3x e^{-3x} \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & -e^{-3x}\log x \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & x e^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3x e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-6x} - 3x e^{-6x} + 3x e^{-6x} = e^{-6x}$$

$$c_1'(x) = \frac{x e^{-6x}\log x}{e^{-6x}} = x\log x$$

$$c_2'(x) = \frac{-e^{-6x}\log x}{e^{-6x}} = -\log x$$

$$c_1(x) = \int x\log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2$$

$$c_2(x) = -\int \log x\,dx = -x\log x + x$$

L'integrale generale è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}\log x - \frac{1}{4}x^2 e^{-3x} - x^2 e^{-3x}\log x + x^2 e^{-3x}$$

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}\log x - \frac{1}{4}x^2 e^{-3x} - x^2 e^{-3x}\log x + x^2 e^{-3x}$$
$$= c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{3}{4}x^2 e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}\log x$$

4) Calcolare

$$\int_T (x-y)^2 e^{y^2}\,dx\,dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$

Poiché T è normale rispetto all'asse delle y abbiamo:

$$\int_T (x-y)^2 e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 e^{y^2}\left(\int_0^y (x-y)^2\,dx\right)dy =$$
$$= \int_0^1 e^{y^2}\,\frac{1}{3}(x-y)^3\Big|_0^y = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{y^2} y^3\,dy \overset{t=y^2}{=} \frac{1}{6}\int_0^1 e^t t\,dt$$
$$= \frac{1}{6}\,e^t t\Big|_0^1 - \frac{1}{6}\,e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{6}e - \frac{1}{6}e + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – II modulo– Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2015/2016 Appello 6 ottobre 2017 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola____________________

1)

- Calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(e-2)^n}{e}.$$

- Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n - 2}{n^{3/2} - n}.$$

6 pts.

2) Determinare il dominio della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) = (x^2y - e^{\sqrt{x^2-y^2}})^{1/3}$$

e rappresentarlo graficamente sul piano. Stabilire poi che f ha derivata direzionale nel punto $(1,0)$ secondo il versore $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = 2e^{-x} - x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Calcolare

$$\int_A \frac{2xy}{x^2 - y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \dfrac{x}{2}\}$.

8 pts.

1) A. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(e-2)^n}{e}$$

B - Stabilire se la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n - 2}{n^{3/2} - n}$$

converge

A - È una serie geometrica di ragione $e-2$ moltiplicata per $\frac{1}{e}$

e priva dei primi 3 termini. Poiché $e-2 \in (-1,1)$, essa converge

Per calcolarne la somma osserviamo che

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(e-2)^n}{e} = \frac{1}{e} \cdot (e-2)^3 \cdot \sum_{n=3}^{+\infty} (e-2)^{n-3} = \frac{1}{e}(e-2)^3 \sum_{h=0}^{+\infty} (e-2)^h$$

$$= \frac{(e-2)^3}{e} \cdot \frac{1}{1-(e-2)} = \frac{(e-2)^3}{e} \cdot \frac{1}{3-e}$$

B. $$\left| \frac{\cos n - 2}{n^{3/2} - n} \right| \leq \frac{3}{n^{3/2} - n} \sim \frac{3}{n^{3/2}} \quad \forall n \geq 2$$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{n^{3/2}} \in \mathbb{R}$, la serie assegnata converge

assolutamente e dunque converge

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \left(x^2 y - e^{\sqrt{x^2-y^2}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

e rappresentarlo graficamente sul piano.

Stabilire poi che f ha derivata direzionale nel punto $(1,0)$ secondo il versore $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

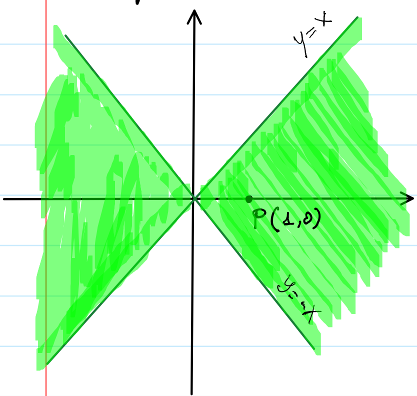
calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

$$\operatorname{dom} f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - y^2 \geq 0 \}$$

$$x^2 - y^2 \geq 0 \iff (x-y)(x+y) \geq 0 \iff \begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y < 0 \\ x+y < 0 \end{cases}$$

Dunque il dominio di f è dato dall'insieme tratteggiato in verde in figura



Come si vede il punto P è interno al dominio di f.

f, inoltre, ha derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^2 y - e^{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(2xy - e^{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^2 y - e^{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(x^2 - e^{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{(-2y)}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$$

Queste sono continue nell'interno del dominio di f. Dunque f è differenziabile in P e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v = \frac{1}{3}(-e)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-e) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{3}(-e)^{-\frac{2}{3}} (1) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(e^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{2}{3}}\right)$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = 2e^{-x} - x \qquad (*) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

l'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata a (*) è $\lambda^2+\lambda=0$ che ha soluzioni $\lambda=0$ e $\lambda=-1$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dunque $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Cerchiamo ora una soluzione delle equazioni

$$y'' + y' = 2e^{-x} \qquad (1)$$

Poiché -1 è soluzione dell'equazione caratteristica, applichiamo il metodo di similarità con

$$\tilde{y}_1(x) = kxe^{-x}$$

$$\tilde{y}_1'(x) = ke^{-x} - kxe^{-x}$$

$$\tilde{y}_1''(x) = -2ke^{-x} + kxe^{-x}$$

Quindi

$$-2ke^{-x} + \cancel{kxe^{-x}} + ke^{-x} - \cancel{kxe^{-x}} = 2e^{-x}$$

ossia

$-ke^{-x} = 2e^{-x}$ da cui

$k = -2$

$$y'' + y' = -x \qquad (2)$$

Poiché 0 è soluzione dell'equazione caratteristica, applichiamo il metodo di similarità con

$$\tilde{y}_2(x) = x(a+bx)$$

$$\tilde{y}_2'(x) = a + bx + bx$$

$$\tilde{y}_2''(x) = 2b$$

Quindi

$$2b + a + 2bx = -x$$

da cui

$$\begin{cases} 2b = -1 \\ 2b + a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ è una soluzione di (*) e dunque il suo integrale generale è $\tilde{y}(x) = c_1 + c_2 e^{-x} - 2xe^{-x} + x\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$

Determiniamo c_1 e c_2 usando le condizioni iniziali:

$$\tilde{y}(0) = c_1 + c_2$$

$$\tilde{y}'(0) = -c_2 - 2 + 1$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

4) Calcolare

$$\int_A \frac{2xy}{x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

dove A è l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\}$

$$\int_A \frac{2xy}{x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 x \left(\int_0^{x/2} \frac{2y}{x^2-y^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 x \left(- \log |x^2 - y^2| \Big|_0^{\frac{x}{2}} \right) dx$$

$$= -\int_0^1 x \left(\log\left(\frac{3}{4}x^2\right) - \log x^2 \right) dx \qquad (*)$$

Osserviamo che $x\left(\log \frac{3}{4}x^2 - \log x^2\right)$ è integrabile su $[0,1]$ in quanto $x\left(\log \frac{3}{4}x^2 - \log x^2\right) \to 0$ per $x \to 0^+$

Dunque $(*) = -\int_0^1 x \log\left(\frac{3}{4}x^2 / x^2\right) = -\log \frac{3}{4}\ \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 =$

$= -\frac{1}{2} \log \frac{3}{4}$