TRACCIA A

1) -a) Scrivere in forma cartesiana il numero complesso

$$z = \left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i\right)^{45}$$

$$\left| -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

$$\operatorname{Arg}\left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \Big/ -\frac{3}{2}\right) - \pi = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \pi$$
$$= \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi$$

quindi $-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i = 3 e^{-i\frac{2}{3}\pi}$ e quindi

$$\left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{45} = 3^{45} e^{-\left(\frac{2}{3} \cdot 45\right)\pi i} = 3^{45} e^{-30\pi i} = 3^{45} \cdot 1 = 3^{45}$$

1) - b) Sia $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2 + \sqrt{x})$

Determinare il dominio di f

Determinare poi tipo di monotonia e immagine della funzione $g = f^2$

dom f: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2 + \sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ \forall x \geq 0 \end{cases}$ $\{ x \geq 0$

dom $f = [0, +\infty)$

Dunque anche g è definita su $[0, +\infty)$

Osserviamo che f è strettamente decrescente dato che composta da $\psi(x) = \sqrt{x} + 2$ strett. crescente e

$\varphi(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ strett. decrescente

Inoltre $f < 0$ dato che $\sqrt{x} + 2 > 1$, $\forall x \geq 0$.

Quindi g è strett. crescente in quanto prodotto di due funzioni (f per se stessa) negative e strett. decrescenti

Poiché $g \in C^0([0, +\infty))$, $\operatorname{Im} g = \left[g(0), \lim_{x \to +\infty} g(x)\right) = \left[\log^2_{\frac{1}{3}} 2, +\infty\right)$

dato che $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (f(x))^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

2) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{\sin(|x|) + x^2 + \operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{3}})}{2\sqrt{-x} + \log(1 - x^{\frac{1}{3}})}$

2) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{\sin(|x|) + x^2 + \operatorname{arctg}(x^3)}{2\sqrt{-x} + \log(1 - x^{\frac{1}{3}})}$

Se ne determini il dominio

Calcolare poi $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

Stabilire infine che f ha uno zero sull'intervallo $(-\infty, 0)$

dom f: $\begin{cases} -x \geq 0 \\ 1 - x^{\frac{1}{3}} > 0 \\ 2\sqrt{-x} + \log(1 - x^{\frac{1}{3}}) \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{3}} < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \end{cases}$

Quindi dom $f = (-\infty, 0)$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\sin(|x|)}{x^{\frac{1}{3}}} + x^{\frac{5}{6}} + \frac{\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{3}})}{x^{\frac{1}{3}}} \right)}{-\cancel{x^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{2\sqrt{-x}}{-x^{\frac{1}{3}}} + \frac{\log(1 - x^{\frac{1}{3}})}{-x^{\frac{1}{3}}} \right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} - \frac{\frac{\sin|x|}{|x|} \frac{-x}{x^{\frac{1}{3}}} + x^{\frac{5}{6}} + \frac{\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{3}})}{x^{\frac{1}{3}}}}{2(-x)^{\frac{1}{6}} + \frac{\log(1 - x^{\frac{1}{3}})}{-x^{\frac{1}{3}}}} = - \frac{0 + 0 + 1}{0 + 1} = -1$$

Poiché $f \in C^0((-\infty, 0))$ se dimostriamo che

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) > 0$, allora per il teorema degli zeri per le funzioni continue dovrà esistere $\bar{x} \in (-\infty, 0)$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

$$\lim \frac{x^2 \left(\frac{\sin(|x|)}{x^2} + 1 + \frac{\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{3}})}{x^2} \right)}{\qquad} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{2}\left(\frac{\sin(|x|)}{x^2} + 1 + \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x^2}\right)}{\sqrt{-x}\left(2 + \frac{\log(1-x^{\frac{1}{3}})}{\sqrt{-x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-x)^{\frac{3}{2}} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sin|x|}{x^2} + 1 + \frac{\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{3}})}{x^2}}{2 + \frac{\log\left(1+(-x)^{\frac{1}{3}}\right)}{(-x)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= +\infty \cdot \frac{0+1+0}{2+0} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty$$

3) Calcolare:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$$

Posto $\sqrt{x} = t$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2(t - \operatorname{arctg} t) + c \quad \text{con } t=\sqrt{x}$$

cioè $= 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}) + c$

4) Enunciare e dimostrare le condizioni sufficienti, basate sulla formula di Taylor, perché un punto stazionario sia di estremo locale

Stabilire la natura del punto critico $x=0$ della funzione

$$y(x) = x^2\log(1+x)$$

Per enunciato e dimostrazione si veda, ad esempio, la lezione 24

$$y'(x) = 2x\log(1+x) + \frac{x^2}{1+x}, \quad y'(0) = 0$$

$$y''(x) = 2\log(1+x) + \frac{2x}{1+x} + \frac{x^2+2x}{(1+x)^2}, \quad y''(0) = 0$$

$$y'''(x) = \frac{2}{\ldots} + \frac{2(1+x)-2x}{\ldots} + \frac{(2x+2)(1+x)^2 - (x^2+2x)\,2(1+x)}{\ldots}$$

$$y'''(x) = \frac{2}{1+x} + \frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2} + \frac{(2x+2)(1+x)^2-(x^2+2x)\,2(1+x)}{(1+x)^4}$$

$y'''(0) = 2+2+2 = 6 \neq 0$ quindi 0 è un punto di flesso

TRACCIA B

1) - a)

Scrivere in forma esponenziale il numero complesso

$$z = \frac{-2+2i}{\sqrt{3}i-1}$$

e determinarne, sempre in forma esponenziale, le radici quadrate

$|-2+2i| = 2\sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}(-2+2i) = \frac{3}{4}\pi$

quindi $-2+2i = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$

$|\sqrt{3}i-1| = 2$, $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}i-1) = \mathrm{arctg}(-\sqrt{3})+\pi = \frac{2}{3}\pi$

quindi $\sqrt{3}i-1 = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$. Pertanto

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{2}{3}\pi\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\sqrt[2]{z} = \sqrt{\sqrt{2}}\; e^{i\left(\frac{\pi}{24}+k\pi\right)}, \quad k=0,1.$$

1) - b) Sia $f(x) = \sqrt[4]{1+x^3}$

Determinare il dominio di f. Determinare, poi, tipo di monotonia e immagine per la funzione $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(1+f(x))$

dom f: $1+x^3 \geq 0 \iff x \geq -1$; quindi dom $f = [-1,+\infty)$

Osserviamo che $f \geq 0$ e quindi $1+f(x) > 0 \quad \forall x \in [-1,+\infty)$

Pertanto dom $g = [-1,+\infty)$ e g è strett. decrescente perché f è strett. crescente e quindi $1+f$ anche lo è mentre la funzione $y(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ è strett. decrescente.

Poiché $g \in C^0([-1,+\infty))$, $\mathrm{Im}\, g = (\lim g(x), g(-1)] = (-\infty, 0)$

mentre la funzione $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ è strett. decrescente.

Poiché $g \in C^0([-1,+\infty))$, $\operatorname{Im} g = \left(\lim_{x\to+\infty} g(x),\ g(-1)\right] = (-\infty, 0)$

2) Sia $f(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{3}} + \log(1+\sqrt{x}) - x}{\log(1+2x^{\frac{1}{3}}) + x}$

Determinare il dominio di f

Calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

Stabilire poi che f ha uno zero su $(0,+\infty)$.

$$\operatorname{dom} f: \begin{cases} x \geq 0 \\ 1+\sqrt{x} > 0 \\ 1+2x^{\frac{1}{3}} > 0 \\ \log(1+2x^{\frac{1}{3}}) + x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ \forall x \geq 0 \\ x > -\frac{1}{8} \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \Big|\ x > 0$$

Quindi $\operatorname{dom} f = (0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x^{1/3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)}{\log(1+2x^{1/3}) + x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x^{1/2}} \cdot x^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{2}{3}}}{2\,\frac{\log(1+2x^{1/3})}{2x^{1/3}} + x^{2/3}} = \frac{1 + 1\cdot 0 - 0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Poiché $f \in C^0(0,+\infty)$ per dimostrare che f ha uno zero su $(0,+\infty)$ è sufficiente che $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$ dato che abbiamo visto che $\lim_{x\to 0^+} f(x) > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1 + \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x} + \frac{1}{x^{2/3}}\right)}{\cancel{x}\left(1 + \frac{\log(1+2x^{1/3})}{x}\right)} = \frac{-1+0+0}{1+0} = -1.$$

3) Calcolare

2

$$\int_{-2} \log(3+2|x|)\,dx$$

Poichè l'integrando è pari, l'integrale assegnato è uguale a

$$2\int_0^2 \log(3+2|x|)\,dx = 2\int_0^2 \log(3+2x)\,dx$$

$$= 2\,x\log(3+2x)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 \frac{2x}{3+2x}\,dx$$

$$= 4\log 7 - 2\int_0^2 dx + 2\int_0^2 \frac{3}{3+2x}\,dx$$

$$= 4\log 7 - 4 + 3\log(3+2x)\Big|_0^2 = 4\log 7 - 4 + 3\log 7 - 3\log 3$$

$$= \log\left(\frac{7^7}{3^3}\right) - 4$$

4) Enunciare e dimostrare la formula di Taylor con il resto di Peano. Usare poi la formula di Mc-Laurin per calcolare $D^{(6)} e^{-x^3}\big|_{x=0}$

Per enunciato e dimostrazione si veda ad esempio la lezione 24

Poichè $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, sostituendo qui x con $-x^3$

si ha: $e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^3)$

quindi $\frac{1}{2} = D^{(6)} e^{-x^3}\big|_{x=0} \big/ 6!$ cioè

$$D^{(6)} e^{-x^3}\Big|_{x=0} = \frac{6!}{2} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 360$$