1) - a) Scrivere in forma cartesiana sia il numero complesso

$e^{2+i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{-2+i\frac{\pi}{12}}$ che il coniugato della sua

potenza di esponente 9

$$e^{2+i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{-2+i\frac{\pi}{12}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\left(e^{2+i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{-2+i\frac{\pi}{12}}\right)^9 = \left(e^{i\pi/6}\right)^9 = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$$

$$\overline{-i} = i$$

b)

Determinare sup e inf ed eventualmente max e min della successione

$$\left\{ \log_{\frac{1}{2}} (n^2 - 1) \right\}_{n \in \mathbb{N},\, n \geq 2}$$

La successione assegnata è composta dalla successione

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \longmapsto n^2 - 1$ strett. crescente e dalla

funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, strett. decrescente. Dunque è strett. decrescente

e quindi $\sup \left\{ \log_{\frac{1}{2}} (n^2 - 1) \right\}_{n \geq 2} = \log_{\frac{1}{2}} (4-1) = \log_{\frac{1}{2}} 3$

mentre $\inf \left\{ \log_{\frac{1}{2}} (n^2 - 1) \right\}_{n \geq 2} = \lim \log_{\frac{1}{2}} (n^2 - 1) = -\infty$

2)

Stabilire che la seguente equazione ha almeno una soluzione positiva.

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right) = x \log(x+1) \qquad (*)$$

Dimostrare quindi che tale soluzione è unica

Determinare poi l'equazione della retta tg. nel punto 0 al grafico

della funzione al secondo membro dell'eq. $(*)$. Stabilire infine

che il grafico si trova sopra tale retta.

che il grafico si trova sopra tale retta!

Una soluzione di (*) corrisponde ad uno zero della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right) - x\log(x+1)$$

Poiché $f \in C^0([0,+\infty))$ possiamo ancora di usare il th. degli zeri sull'intervallo $[0,+\infty)$:

$$f(0) = \operatorname{arctg} 1 - 0 = \frac{\pi}{4} > 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - (+\infty)(+\infty) = -\infty$$

Dunque f ha almeno uno zero in $(0,+\infty)$.

Verifichiamo che tale zero è unico constatando che f è strett. decrescente sull'intervallo $(0,+\infty)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) - \log(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2+1} - \log(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

Osserviamo che per $x>0$, i tre addendi qui sopra sono negativi quindi $f'(x) < 0$ $\forall x > 0$ cioè f è strettamente decrescente in $(0,+\infty)$ e quindi f ha un solo zero in tale intervallo.

Ho che $g(x) = x\log(1+x)$

$g'(x) = \log(x+1) + \frac{x}{x+1}$, $g'(0) = 0$ quindi esiste la retta tg

$g'(x) = \log(x+1) + \frac{x}{x+1}$, $g'(0) = 0$ quindi esiste la retta tg al grafico di g nel punto 0 ed ha equazione

$$y = g(0) + g'(0)\,x = 0 + 0 = 0$$

$$g''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Come si vede $g''(x) > 0 \ \forall x \in (-1, +\infty)$ in quanto somma di funzioni positive su tale intervallo. Quindi g è convessa e dunque il suo grafico è al di sopra della retta tg in ogni suo punto, 0 compreso.

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(|t \sin t| - \frac{1}{(2\pi - t)^2} \right) dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(|t \sin t| - \frac{1}{(2\pi - t)^2} \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} |t \sin t|\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(2\pi-t)^2}\, dt$$

$$= 2 \int_0^{\pi} t \sin t - \frac{1}{2\pi - t} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 2 \left(-t \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t \, dt \right) - \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{3\pi} \right)$$

$$= 2 \left(\pi + \sin t \Big|_0^{\pi} \right) - \frac{2}{3\pi} = 2\pi - \frac{2}{3\pi}$$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle. Fornire poi un esempio di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato

continua su un intervallo chiuso e limitato
che assuma lo stesso valore negli estremi
ma che non abbia alcun punto in cui
la sua derivata si annulli.

Per enunciato e dimostrazione ed esempio si
veda la lezione 20