

- 1) (a) Calcolare la somma della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{8^n}.$$

- (b) Studiare il carattere della seguente serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^\alpha \sqrt{n+1}}.$$

7 pts.

- 2) Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 2$$

Determinare i punti critici di f e classificarne la natura (massimo locale, minimo locale o sella). Scrivere inoltre l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, f(1, 2))$.

9 pts.

- 3) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' - 3y' + 2y = (x - 1)e^x$$

Determinare poi la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

8 pts.

- 4) Dare la definizione di differenziabilità per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in un punto x_0 interno ad A .

Per una tale funzione, enunciare e dimostrare il teorema che lega la differenziabilità alla continuità.

Fornire infine un esempio di una funzione di due variabili continua in un punto ma non differenziabile nello stesso.

6 pts.