Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corso C

A.A. 2021/2022 Prova parziale 21 gennaio 2022 Traccia A

1) (a) Calcolare

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

(b) Calcolare

$$\int_A \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy,$$

dove A è l'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x^2 + y^2 < 5,\ y > x,\ x < 0,\ y < 0\}.$$

8 pts.

2) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x - y}{\log(x^2 - y^2)}.$$

Se ne determini il dominio e lo si rappresenti sul piano. Scrivere se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi. Stabilire che f è differenziabile sul suo dominio e se ne determini il campo gradiente. Si determini, infine, l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 1, f(2, 1))$.

8 pts.

3) Determinare la soluzione in forma esplicita del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^4 x^3 \sin(2x^4 + 1) \\ y(\sqrt[4]{\pi/8 - 1/2}) = -1 \end{cases}$$

8 pts.

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange per una funzione reale di più variabili reali.

6 pts.

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corso C

A.A. 2021/2022 Prova parziale 21 gennaio 2022 Traccia B

1) (a) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{10n^2+1}{n^2(n-1)}.$$

(b) Calcolare

$$\int_A \frac{1}{4x^2-y^2}dxdy,$$

dove A è l'insieme

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2(x-1) < y < 2x-1,\ 2(1-x) < y < 2(2-x)\}.$$

8 pts.

2) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{(y^2-2x)^{3/2}} \cdot \frac{1}{y}.$$

Se ne determini il dominio e lo si rappresenti sul piano. Scrivere se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi. Stabilire che f è differenziabile sul suo dominio. Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1)$ al variare del versore $v = (\cos\theta, \sin\theta)$. Qual è il versore v_m per cui $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1)$ è minima?

8 pts.

3) Determinare la soluzione in forma esplicita del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x(y^2-5y+6)}{x^2+1} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

8 pts.

4) Dare la definizione di insieme connesso per archi. Dimostrare che una funzione continua trasforma insiemi connessi per archi in insiemi connessi per archi.

6 pts.