1) Siano f il segnale periodico di periodo 2 definito dalla funzione $t \in [0,2] \mapsto t^2$ (estesa per periodicità) e g il segnale $\cos_+(t-2)$

Calcolare la trasformata di Laplace del segnale $f * g$

Poiché $\mathcal{L}(f*g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\,\mathcal{L}(g)(s) \quad \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0$
è sufficiente calcolare la trasformata di Laplace di f e g

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} t^2\, dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \Big|_0^2 + \frac{2}{s} \int_0^2 e^{-st} t\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\frac{4}{s} e^{-2s} - \frac{2}{s^2} t e^{-st} \Big|_0^2 + \frac{2}{s^2} \int_0^2 e^{-st} \right.$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\frac{4}{s} e^{-2s} - \frac{4}{s^2} e^{-2s} - \frac{2}{s^3} e^{-2s} + \frac{2}{s^3} \right)$$

$$\mathcal{L}(\cos_+(t-2))(s) = e^{-2s} \mathcal{L}(\cos_+(t))(s) = e^{-2s} \frac{s}{s^2+1}$$

1) Dimostrare che la serie

Anni precedenti

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(t) \frac{\sqrt{nt}}{n^2+1} \qquad (*)$$

dove f è una funzione limitata su $[0,a]$ $a>0$, converge uniformemente su $[0,a]$

È sufficiente dimostrare che $(*)$ converge totalmente su $[0,a]$
A tale scopo si osservi che

$$\left| f(t) \frac{\sqrt{nt}}{n^2+1} \right| \le L \frac{\sqrt{nt}}{n^2+1} \le L\sqrt{a} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \quad \forall t \in [0,a]$$

dove $L = \sup_{t \in [0,a]} |f(t)| \in \mathbb{R}$.

Poiché $L\sqrt{a} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim L\sqrt{a} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} L\sqrt{a} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

converge e quindi (*) converge totalmente e uniformemente su $[0, a]$

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n + 4^n}{4^n - 2^n} (x-1)^n$$

$$\frac{\dfrac{2^{n+1} - 3^{n+1} + 4^{n+1}}{4^{n+1} - 2^{n+1}}}{\dfrac{2^n - 3^n + 4^n}{4^n - 2^n}} = \frac{1 + \frac{1}{2^{n+1}} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2^{n+1}}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n} - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$\downarrow_{n \to \infty} \quad \downarrow_{n \to \infty}$$

$$1 \qquad 1$$

Quindi il raggio di convergenza è 1
l'intervallo di convergenza è $(0, 2)$
Per $t = 2$ otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n + 4^n}{4^n - 2^n}$$

Poiché $\frac{2^n - 3^n + 4^n}{4^n - 2^n} \longrightarrow 1$ essa diverge positivamente (in quanto è a termini positivi)

Per $t = 0$ otteniamo:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n + 4^n}{4^n - 2^n} (-1)^n \quad (*)$$

Poiché $\frac{2^{2k} - 3^{2k} + 4^{2k}}{4^{2k} - 2^{2k}} (-1)^{2k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$

la successione che la definisce non converge a 0 e quindi (*) non converge.
Dunque l'insieme di convergenza puntuale della serie assegnata coincide con l'intervallo di convergenza $(0, 2)$. La serie converge uniformemente

su ogni intervallo chiuso contenuto in $[0,2]$.

3) Dare la definizione di funzione armonica
Dimostrare poi che la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche

Si veda, ad esempio, p. 31 degli appunti

4) Ricavare la serie di Maclaurin della funzione

$f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$. Determinare, poi, $D^{(8)} f(0)$

Poiché $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \forall x \in (-1,1)$

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1-(-x^4)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^4)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

e quindi $\dfrac{x^2}{1+x^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k+2}$

Dunque $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k+2}$ è la serie di Maclaurin di f

In particolare $\dfrac{D^{(8)} f(0)}{8!}$ è uguale al coefficiente di x^8 in tale serie. L'esponente 8 si otterrebbe per $4k+2=8$ cioè $k=\frac{3}{2}$, che non è intero. Questo ci consente di concludere che nella serie $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k+2}$ non è presente il termine di esponente 8

Dunque $D^{(8)} f(0) = 0$.

5) Enunciare e dimostrare la I formula di rappresentazione di Cauchy

Si vedano, ad esempio, pagg. 69-70 degli appunti

6) Calcolare

$$\int_{\partial^+ \Omega} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{\left(z-\frac{i}{2}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\, dz \qquad (\ast)$$

$$\int_{\partial^+ Q} \frac{\ldots}{\left(z-\frac{i}{2}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

dove Q è il quadrato di vertici $-1-i$, $-1+i$, $1+i$, $1-i$

Le singolarità della funzione integranda sono tutte contenute all'interno di Q. Dal I e dal II teorema dei residui otteniamo quindi che

$(*) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$, dove f è la funzione integranda

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{-z}}{\left(\frac{1}{z}-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{4}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{-z}}{\left(1-\frac{zi}{2}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\left(1-\frac{z}{4}\right)\cdot\frac{1}{z^3}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) =$$

$$= \frac{-z e^{-z}}{\left(1-\frac{zi}{2}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\left(1-\frac{z}{4}\right)}$$

Questa funzione non ha in 0 una singolarità

$\left(\text{dato che } \exists \lim_{z\to 0} -\frac{z e^{-z}}{\left(1-\frac{zi}{2}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\left(1-\frac{z}{4}\right)} \; (=0) \in \mathbb{C}\right)$

e quindi $\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$

cioè $(*) = 0$.