Appello Analisi Matematica II modulo

lunedì 13 giugno 2016 08:30

1) Stabilire il carattere delle seguenti serie

A) $$\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k\log^{3/2}k}-\frac{\sin k}{k^{5/4}}\right)$$

B) $$\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k\log^{5/2}k}-\frac{\cos k}{k^{4/3}}\right)$$

A) Se dimostriamo che entrambe le serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\log^{3/2}k} \quad e \quad \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\sin k}{k^{5/4}}$$ convergono allora anche

la serie assegnata (che è somma di queste due) converge

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\log^{3/2}k}$$ converge per il criterio dell'integrale

infatti consideriamo la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x\log^{3/2}x}$ questa è

decrescente e positiva su $[2,+\infty)$ e sugli interi assume gli stessi valori della successione $\dfrac{1}{k\log^{3/2}k}$

Poiché $$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\log^{3/2}x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{1}{x\log^{3/2}x}\,dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\left(\log x\right)^{-\frac{3}{2}+1}\Big|_2^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}-2\left((\log b)^{-\frac{1}{2}}-(\log 2)^{-\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\log 2}}\in\mathbb{R}$$

la serie converge

$$\sum_{k=2}\frac{\sin k}{k^{5/4}}: \qquad \left|\frac{\sin k}{k^{5/4}}\right|\le\frac{1}{k^{5/4}}\ ; \quad \text{poiché } \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{5/4}}\in\mathbb{R}$$

la serie converge assolutamente e quindi converge

B) è analoga

2) Stabilire se la funzione

A) $$f(x,y)=\frac{x^2e^{x-y}}{x-y}$$

B) $$f(x,y)=\frac{(y+1)e^{x^2-y}}{y}$$

ha derivata direzionale nel punto

A) $(1,0)$

B) $(0,1)$

secondo la direzione del versore $v = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
e calcolarla

In entrambe le tracce la funzione assegnata è differenziabile nel punto assegnato in quanto è di classe C^1 in un intorno dello stesso punto. Pertanto in entrambe le tracce f ha derivata direzionale nel punto assegnato secondo un qualunque versore. In particolare:

A) : $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(2x e^{x-y} + x^2 e^{x-y}\right)(x-y) - x^2 e^{x-y}}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2 e^{x-y}(x-y) + x^2 e^{x-y}}{(x-y)^2}$$

Quindi $\nabla f(1,0) = \left(\frac{2e + e - e}{1}, \frac{-e+e}{1}\right) = (2e, 0)$

e $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = (2e,0) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}e$

B) $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot v$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y+1}{y} e^{x^2-y}\, 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(e^{x^2-y} - (y+1)e^{x^2-y}\right)y - (y+1)e^{x^2-y}}{y^2}$$

$$\nabla f(0,1) = \left(0, \frac{e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1}}{1}\right) = \left(0, -\frac{3}{e}\right)$$

e $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \left(0, -\frac{3}{e}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2e}$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

A) $\begin{cases} y' = -2xy + x^2 e^{-x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} y' = xy + x e^{\frac{3}{2}x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

A) L'integrale generale dell'equazione è dato da

$$y(x) = e^{-x^2}\left(c + \int e^{x^2} x^2 e^{-x^2} dx\right)$$

$$= e^{-x^2}\left(c + \int x^2 dx\right) = e^{-x^2}\left(c + \frac{1}{3}x^3\right)$$

$y(1) = 1 \iff 1 = e^{-1}\left(c + \frac{1}{3}\right) \iff c = e - \frac{1}{3}$

Quindi la soluzione del problema è $y(x) = e^{-x^2}\left(e - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3\right)$

B) L'integrale generale è dato da

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(c + \int e^{-\frac{1}{2}x^2} x\, e^{\frac{3}{2}x^2} dx\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}x^2}\left(c + \int e^{x^2} x \, dx\right) =$$

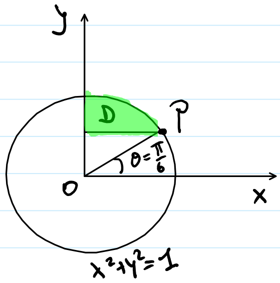
$$= e^{\frac{1}{2}x^2}\left(c + \frac{1}{2}e^{x^2}\right)$$

$y(1) = 0 \iff 0 = \sqrt{e}\left(c + \frac{1}{2}e\right) \iff c = -\frac{e}{2}$

Quindi la soluzione del problema è $y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(-\frac{e}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2}\right)$

4) Calcolare

A) $\displaystyle\int_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy$ dove D è il dominio (In verde) rappresentato in figura



Determiniamo le coordinate del punto P intersezione della semiretta uscente dell'origine e che forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con il semiasse positivo delle x

$P = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

In coordinate polari il dominio D è normale rispetto a θ e definito da:

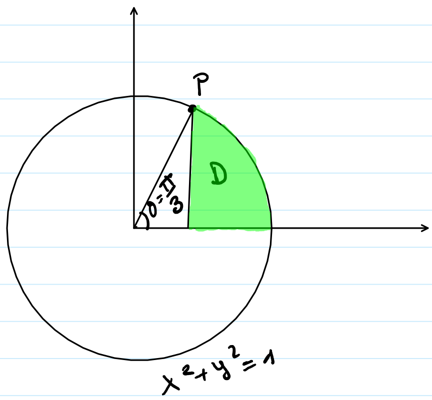
$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $? \leq \rho \leq 1$

Per determinare la funzione di θ che controlla ρ dal basso basta ottenere l'equazione della retta $y=\frac{1}{2}$ in coordinate polari. Poiché $y=\rho\sin\theta$, questa è $\rho\sin\theta=\frac{1}{2}$ cioè $\rho=\frac{1}{2\sin\theta}$; quindi $\frac{1}{2\sin\theta}\le\rho\le 1$

$$\int_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left(\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} 1\,d\rho\right)d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left(1-\frac{1}{2\sin\theta}\right)d\theta$$

$$= -\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$

B) $\int_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove D è il dominio rappresentato in verde in figura



Analogamente all'esercizio della traccia A

$$P=\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$x=\frac{1}{2}$ in coordinate polari diviene $\rho\cos\theta=\frac{1}{2}$ cioè $\rho=\frac{1}{2\cos\theta}$

Dunque in coordinate polari D è definito da

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{3} \quad\wedge\quad \frac{1}{2\cos\theta}\le\rho\le 1$$

$$\int_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\left(\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} 1\,d\rho\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\left(1-\frac{1}{2\cos\theta}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\,d\theta - \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}-0-\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$