1)
A) Enunciare e dimostrare il criterio della radice per le serie numeriche

Fornire poi un esempio in cui tale criterio non può essere applicato

Si veda, ad esempio, la lezione 7

B) Enunciare e dimostrare il criterio degli infinitesimi per le serie numeriche
Fornire un esempio in cui tale criterio consente di stabilire la convergenza di una serie e invece il criterio del confronto asintotico fallisce

Si veda, ad esempio, la lezione 6

2) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma implicita dell'equazione

A) $y' = \cos^2(\pi y)\,\dfrac{(x-1)^2}{x}$ (*)

B) $y' = \operatorname{tg}(\pi - y)\,\dfrac{x-1}{x^2}$ (**)

A) È un'equazione a variabili separabili. Le soluzioni singolari sono le funzioni costanti $y=\bar{y}$ per cui $\cos^2(\pi\bar{y})=0$ quindi

$\pi\bar{y} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ cioè $\bar{y} = \frac{1}{2}+k$, $k\in\mathbb{Z}$

Assumendo quindi che $y \neq \frac{1}{2}+k$, possiamo dividere ambo i membri (*)

$$\frac{y'}{\cos^2(\pi y)} = \frac{(x-1)^2}{x}; \text{ integrando otteniamo}$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2(\pi y)} = \int \frac{(x-1)^2}{x}\,dx \quad \text{cioè}$$

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}(\pi y) = \int \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)dx \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}(\pi y) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \log|x| + c$$

B) Analogamente ad A) le soluzioni singolari sono date da

$\operatorname{tg}(\pi - \bar{y}) = 0$ cioè $\pi - \bar{y} = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ da cui $\bar{y} = \pi(1-k)$, $k\in\mathbb{Z}$

Assumendo che $y \neq \pi(1-k)$, $k\in\mathbb{Z}$, e dividendo ambo i membri di (**)

per $\operatorname{tg}(\pi - y)$ otteniamo per $tg(\pi - y)$ otteniamo

$$\frac{y'}{tg(\pi-y)} = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{da cui} \quad \int \frac{dy}{tg(\pi-y)} = \int \frac{x-1}{x^2}\,dx \text{, quindi}$$

$$\int \frac{\cos(\pi-y)}{\sin(\pi-y)}\,dy = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$-\log|\sin(\pi-y)| = \log|x| + \frac{1}{x} + c$$

3) Determinare i punti critici delle funzione

A) $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2 + 1)$

B) $\varphi(x,y) = \cos(x^2 + 2y^2 + 1)$

studiarne la natura

A) $f_x(x,y) = \cos(x^2 - y^2 + 1)\, 2x$

$f_y(x,y) = \cos(x^2 - y^2 + 1)\,(-2y)$

$$\begin{cases} \cos(x^2-y^2+1)\,2x = 0 \\ \cos(x^2-y^2+1)(-2y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \left(\begin{cases} x=0 \\ -y^2+1 = \frac{\pi}{2}+k\pi, \; k\in\mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y = \pm\sqrt{1-\frac{\pi}{2}-k\pi} \end{cases}\right)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \left(\begin{cases} y=0 \\ x^2+1 = \frac{\pi}{2}+k\pi, \; k\in\mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi-1} \end{cases}\right)$$

$$\begin{cases} x^2-y^2+1 = \frac{\pi}{2}+k\pi, \; k\in\mathbb{Z} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ per la realtà della radice

$k\in\mathbb{N}$ per la realtà della radice

Dunque i punti critici di f sono $(0,0)$,
$V_{1,k} = \left(0, \pm\sqrt{1-\frac{\pi}{2}-k\pi}\right)$, $k\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}$, $V_{2,k} = \left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi-1}, 0\right)$, $k\in\mathbb{N}$

e i punti delle iperboli di equazione

$$x^2 - y^2 + 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Osserviamo che per $k\in\mathbb{N}$ tali iperboli intersecano l'asse delle x e hanno vertici, fissato $k\in\mathbb{N}$, in $\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi-1}, 0\right)$ mentre per $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ esse intersecano l'asse delle y con vertici $\left(0, \pm\sqrt{1-\frac{\pi}{2}-k\pi}\right)$.
Dunque le famiglie di punti critici $V_{1,k}$ e $V_{2,k}$ appartengono a tali iperboli e possono essere studiate insieme a tutti i punti di esse.
Osserviamo che se $x^2 - y^2 + 1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

allora $f(x,y) = 1$. Dato che $\forall (x,y)\in\mathbb{R}: -1 \le f(x,y) \le 1$ tutti i punti di tali iperboli sono di massimo assoluto.
Se $x^2 - y^2 + 1 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, allora $f(x,y) = -1$ e i punti di queste altre iperboli sono di minimo assoluto

Resta da analizzare la natura di $(0,0)$

$$f_{xx}(x,y) = -\sin(x^2-y^2+1)\,4x^2 + 2\cos(x^2-y^2+1)$$
$$f_{yy}(x,y) = \sin(x^2-y^2+1)(-4y^2) - 2\cos(x^2-y^2+1)$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \sin(x^2-y^2+1)\,4xy$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2\cos 1 & 0 \\ 0 & -2\cos 1 \end{pmatrix}$$

$|H_f(0,0)| = -4(\cos 1)^2 < 0$ quindi $(0,0)$ è di sella

B) $f_x(x,y) = -\sin(x^2+2y^2+1)\,2x$

$f_y(x,y) = -\sin(x^2+2y^2+1)\,4y$

$$\begin{cases} -\sin(x^2+2y^2+1)\,2x = 0 \\ -\sin(x^2+2y^2+1)\,4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ \sin(2y^2+1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ 2y^2+1 = k\pi,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ \sin(x^2+1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x^2+1 = k\pi,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sin(x^2+2y^2+1) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+2y^2+1 = k\pi,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \\ 0=0 \end{cases}$$

Come nell'esercizio della traccia A i punti che si ottengono dai sistemi (1) e (2) appartengono anche alle ellissi di equazione

$$x^2+2y^2+1 = k\pi, \quad k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Se $x^2+2y^2+1 = 2k\pi$, $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ (risp. $x^2+2y^2+1 = \pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$) $f(x,y) = 1$ (risp. $f(x,y) = -1$). Poiché $-1 \le f(x,y) \le 1$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, i punti delle ellissi $x^2+2y^2+1 = 2k\pi$ $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, (risp. $x^2+2y^2+1 = \pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$) sono di massimo (risp. minimo) assoluto.

Analizziamo $(0,0)$:

$$f_{xx}(x,y) = -\cos(x^2+2y^2+1)\,4x^2 - 2\sin(x^2+2y^2+1)$$

$$f_{yy}(x,y) = -\cos(x^2+2y^2+1)\,16y^2 - 4\sin(x^2+2y^2+1)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\cos(x^2+2y^2+1)\,8xy$$

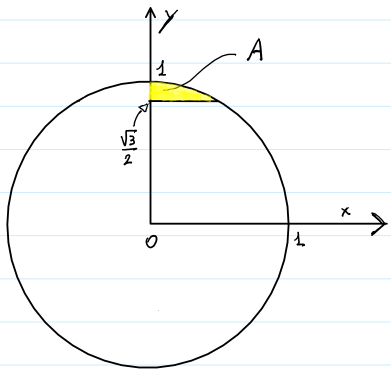
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2\sin(1) & 0 \\ 0 & -4\sin(1) \end{pmatrix}$$

$|H_f(0,0)| = 8(\sin(1))^2 > 0$; $-2\sin(1) < 0$ quindi

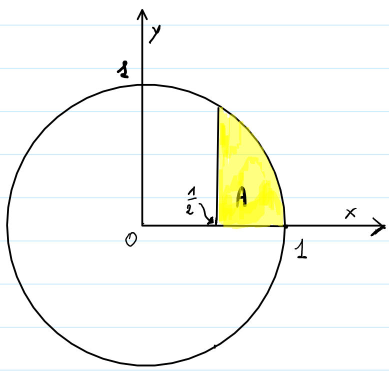
$(0,0)$ è un punto di massimo locale stretto

4) Calcolare il seguente integrale

A) $\int_A (y^2 x + x^3)\,dx\,dy$ dove A è l'insieme rappresentato in figura in giallo



B) $\int_A (x^2 y + y^3)\,dx\,dy$, dove A è l'insieme rappresentato in figura in giallo



A) In coordinate polari A è l'insieme dato da $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$

e $\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta} < \rho < 1$ (la retta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ha equazione nel piano θ,ρ data da $\rho\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ da cui $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2\cos\theta}$)

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}}^{1} \rho^2 \cdot \rho\cos\theta \cdot \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \ \frac{1}{5}\rho^5 \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}}^{1} d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\theta - \cos\theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 \frac{1}{\sin^5\theta} \right) d\theta$$

$$\left(\sin\theta \Big|^{\frac{\pi}{2}} + \sin^{-4}\theta \Big|^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sin^3\theta \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 \frac{\sin^{-4}\theta}{4} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{5}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right)$$

B) In coordinate polari A è l'insieme dato da $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ e $\frac{1}{2\cos\theta} < \rho < 1$ (la retta $x = \frac{1}{2}$ ha equazione nel piano θ, ρ data da $\rho\cos\theta = \frac{1}{2}$ da cui $\rho = \frac{1}{2\cos\theta}$)

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} \rho^2 \cdot \rho\sin\theta \cdot \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \left(\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} \rho^4 \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \; \frac{1}{5}\rho^5 \Big|_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin\theta - \frac{1}{2^5}\frac{\sin\theta}{\cos^5\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2^5}\frac{1}{4}\cos^{-4}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^7}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} - 1\right)\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2^7}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{2^6 - 2^4 + 1}{2^7}$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{16\cdot 3 + 1}{2^7} = \frac{49}{5}\cdot\frac{1}{128}$$