1) Stabilire il carattere del seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,\sin(2x^2)}\,dx$$

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,\sin(2x^2)}$ è continua su $(0,1]$,

quindi è integrabile su ogni intervallo del tipo $[w,1]$ con $w>0$.

Poiché $\dfrac{1}{\sqrt{x}\,\sin(2x^2)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}\,2x^2} = \dfrac{1}{2x^{5/2}}$

e la funzione $\dfrac{1}{x^{5/2}}$ non è integrabile su $(0,1]$ neanche f lo è. Essendo f positiva in $(0,1]$, l'integrale assegnato è quindi divergente positivamente.

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = e^{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}}$$

e rappresentarlo nel piano.

Dire se è un insieme aperto, chiuso, connesso per archi, limitato.

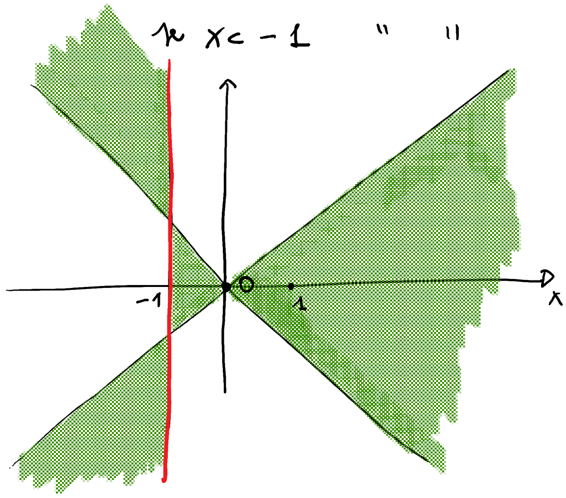
Stabilire che f è differenziabile nell'interno del suo dominio. Calcolare quindi $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ con $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{9}{10}}\right)$

Determinare i punti critici di f.

dom f:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+1} \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{(x-y)(x+y)}{x+1} \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Quindi se $x > -1$ deve essere $(x-y)(x+y) \geq 0$

se $x < -1$ " " ≤ 0



Quindi il dominio di f è la regione di piano in verde. La retta $x=-1$ (in rosso) non ha punti in comune con il dominio. Pertanto il dominio di f non è chiuso in quanto non contiene la sua frontiera e non è aperto poiché contiene punti di frontiera. Non è connesso per archi non è chiuso in quanto non contiene la sua frontiera e non è aperto poiché contiene punti di frontiera. Non è connesso per archi e non è limitato. Nei punti interni al dominio f ha derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}} \frac{2x(x+1)-(x^2-y^2)}{(x+1)^2} = e^{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}} \frac{x^2+y^2+2x}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}\,(x+1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}} \frac{-y}{x+1}$$

Entrambe sono continue su $\mathring{\operatorname{dom}} f$ e quindi f è differenziabile su $\mathring{\operatorname{dom}} f$

$(1,0) \in \mathring{\operatorname{dom}} f$ e dunque $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \langle \nabla f(1,0), v \rangle = \left\langle \left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{4\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{9}{10}} \right) \right\rangle$

$$= -e^{1/\sqrt{2}} \frac{3}{8\sqrt{5}}$$

Determiniamo i punti critici di f

$$\begin{cases} e^{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}} \dfrac{x^2+y^2+2x}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}\,(x+1)^2} = 0 \\ e^{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+1}}} \dfrac{-y}{x+1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ NON È INTERNO AL DOMINIO} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \text{ NON APPARTIENE AL DOMINIO}$$

f non ha punti critici.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y + xe^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = \pm 1$

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

Cerchiamo una soluzione particolare che deve quindi essere del tipo

$\tilde{y}(x) = x(ax+b)e^{-x}$

$\tilde{y}'(x) = (ax+b)e^{-x} + axe^{-x} - x(ax+b)e^{-x} = e^{-x}\left(-ax^2 + (2a-b)x + b\right)$

$\tilde{y}''(x) = -e^{-x}\left(-ax^2 + (2a-b)x + b\right) + e^{-x}\left(-2ax + 2a - b\right)$

Deve quindi essere

$$e^{-x}\left(\cancel{ax^2} - (4a-b)x + 2a - 2b - \cancel{ax^2} - bx \right) = xe^{-x} \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} -4a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{4}(x^2+1)e^{-x}$$

$$y(0) = 0 \iff c_1 + c_2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{2}x\, e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2+1)e^{-x}$$

$$y'(0) = 1 \iff -c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 1 .$$

Quindi
$$\begin{cases} -c_1 = c_2 - \frac{1}{4} \\ 2c_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

4) Dare la definizione di insieme normale rispetto all'asse delle x. Perché un tale insieme è misurabile secondo Peano-Jordan?

Per la definizione e il motivo per cui tali insiemi sono misurabili si veda, ad esempio, la lezione 43.