1)

A) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=3}^{+\infty} 2\,\frac{1}{3^k}$$

Stabilire, poi, il carattere della seguente serie

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \left(2\,\frac{1}{3^k} - \frac{k^2}{1+2k^3}\cos(k\pi)\right) \quad (*)$$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} 2\,\frac{1}{3^k} = 2\cdot\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = 2\cdot\frac{1}{3^3}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{3^{k-3}} = 2\cdot\frac{1}{3^3}\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{3^h} =$$

$$= \frac{2}{27}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{27}\,\frac{3}{2} = \frac{1}{9}$$

Dato che $\sum_{k=3}^{+\infty} 2\,\frac{1}{3^k}$ converge, se dimostriamo che $\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{k^2}{1+2k^3}\cos(k\pi)$ $(**)$

anche $(*)$ converge in quanto somma di serie convergenti

Poiché $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $(**)$ è a $\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{k^2}{1+2k^3}(-1)^k$ che è una

serie a segni alterni.

Poiché $\frac{k^2}{1+2k^3} \to 0$, è sufficiente dimostrare, per il criterio di Leibniz,

che la successione $\left(\frac{k^2}{1+2k^3}\right)_{k\geq 3}$ è decrescente

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^2}{1+2x^3}$

$$f'(x) = \frac{2x(1+2x^3) - 6x^4}{(1+2x^3)^2} = \frac{2x - 2x^4}{(1+2x^3)^2} = \frac{2x}{(1+2x^3)^2}(1-x^3)$$

Per $x>0$: $f'(x)<0 \iff 1-x^3<0 \iff x>1$

Quindi f è strettamente decrescente per $x>1$ e dunque anche $\left(\frac{k^2}{1+2k^3}\right)_{k\geq 3}$ lo è

B) Stabilire che la seguente serie è convergente

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\frac{k+1}{k^2+3} \quad (*)$$

$k=0 \qquad\qquad k^2+3$

Stimare anche l'errore che si commette approssimando la sua somma con la somma parziale di indice 10

Poiché $\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=(-1)^k, \ \forall k\in\mathbb{N}$, (*) è uguale alla serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{k+1}{k^2+3}$.

Osserviamo che $\frac{k+1}{k^2+3}\to 0$, per cui se dimostriamo che la successione $\left(\frac{k+1}{k^2+3}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente, per il criterio di Leibniz avremo che essa converge

Consideriamo la funzione $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

$$f'(x)=\frac{x^2+3-2x^2-2x}{(x^2+3)^2}=-\frac{x^2+2x-3}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)<0 \iff x^2+2x-3>0$; quest'ultima disuguaglianza è soddisfatta per $x<-3 \vee x>1$. Dunque, per $k\geq 1$ la successione $\left(\frac{k+1}{k^2+3}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente

Detta s la somma di (*) sappiamo che

$$|s-s_{10}|\leq a_{11}=\frac{11+1}{11^2+3}=\frac{12}{124}=\frac{3}{31}$$

2) 4) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+4y=e^{2x}\cos(2x) & (*) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata ($y''+4y=0$) è λ^2+4, che ha radici $\pm 2i$. L'integrale generale di $y''+4y=0$ è quindi $y(x)=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$.

Cerchiamo una soluzione di (*) con il metodo di similarità

$$\bar{y}(x)=e^{2x}(k_1\cos(2x)+k_2\sin(2x))$$

$$\bar{y}'(x) = 2e^{2x}\left(k_1\cos(2x)+k_2\sin(2x)\right)+2e^{2x}\left(-k_1\sin(2x)+k_2\cos(2x)\right)$$
$$= 2e^{2x}\left((k_1+k_2)\cos(2x)+(k_2-k_1)\sin(2x)\right)$$
$$\bar{y}''(x) = 4e^{2x}\left((k_1+k_2)\cos(2x)+(k_2-k_1)\sin(2x)\right)+$$
$$+4e^{2x}\left(-(k_1+k_2)\sin(2x)+(k_2-k_1)\cos(2x)\right)$$
$$= 4e^{2x}\cdot\left(2k_2\cos(2x)-2k_1\sin(2x)\right)$$

Imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione di (*) otteniamo

$$4e^{2x}\left(2k_2\cos(2x)-2k_1\sin(2x)\right)+4e^{2x}\left(k_1\cos(2x)+k_2\sin(2x)\right)=e^{2x}\cos(2x)$$

da cui

$$e^{2x}\left((8k_2+4k_1)\cos(2x)+(4k_2-8k_1)\sin(2x)\right) = e^{2x}\cos(2x)$$

e quindi deve essere

$$\begin{cases} 8k_2+4k_1=1 \\ 4k_2-8k_1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8k_2+4k_1=1 \\ k_2=2k_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1=\frac{1}{20} \\ k_2=\frac{1}{10} \end{cases}$$

L'integrale generale di (*) è quindi

$$y(x) = c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+e^{2x}\left(\frac{1}{20}\cos(2x)+\frac{1}{10}\sin(2x)\right)$$

Cerchiamo ora la soluzione del problema di Cauchy

$$y(0) = c_1+\frac{1}{20}$$

$$y'(0) = 2c_2+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}$$

Quindi deve essere

$$c_1 = -\frac{1}{20} \quad e \quad c_2 = -\frac{3}{20}$$

B) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-4y = e^{2x}\sin(2x) \quad (*) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

È analoga ad A): in questo caso il polinomio caratteristico ha radici reali ± 2. L'omogenea associato a $(*)$ ha integrale generale

$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$. Col metodo di similarità

cerchiamo $\bar{y}$ del tipo $\bar{y}(x) = e^{2x}(k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x))$.

otteniamo $\bar{y}(x) = e^{2x}\left(-\frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)\right)$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene per i valori seguenti di c_1 e c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{1}{10} = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{10} \\ c_1 - c_2 = \frac{3}{20} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{10} - c_2 \\ -2c_2 = \frac{1}{20} \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = -\frac{1}{40} \\ c_1 = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

3) A) Dare la definizione di compatto in $\mathbb{R}^n$.
Enunciare, poi, la caratterizzazione dei compatti mediante le successioni.
Enunciare e dimostrare, infine, il teorema di Weierstrass per le funzioni di più variabili

Si vedano, ad esempio, le lezioni 15 e 16

B) Dare la definizione di connesso in $\mathbb{R}^n$
Enunciare, poi, la caratterizzazione degli aperti connessi di $\mathbb{R}^n$.
Dimostrare infine che una funzione differenziabile su un aperto connesso a gradiente nullo è costante

Si vedano, ad esempio, le lezioni 14 e 17-18

4) Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

Esprimere il seguente integrale invertendo l'ordine di integrazione

A) $$\int_{-1}^{0}\left(\int_{1}^{2x^2+1} f(x,y)\,dy\right)dx$$

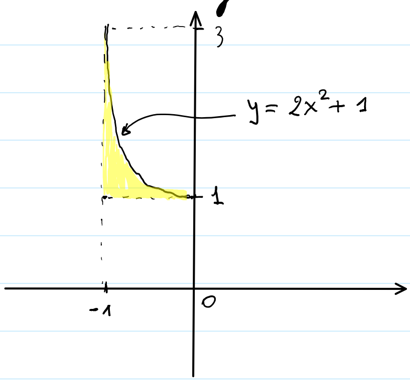
B) $$\int_{-2}^{0}\left(\int_{2}^{\sqrt{4+x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Calcolare poi uno dei due integrali doppi con

A) $f(x,y) = \frac{x}{y}$

B) $f(x,y) = \frac{x}{y^3}$

A) Rappresentiamo sul piano, munito di un sistema xy di assi cartesiani ortogonali l'insieme di integrazione



Esso è un insieme normale anche rispetto all'asse delle y:

$1 \le y \le 3$ e $-1 \le x \le -\sqrt{\frac{y-1}{2}}$; quindi

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{1}^{2x^2+1} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{1}^{3} \left(\int_{-1}^{-\sqrt{(y-1)/2}} f(x,y)\,dx \right) dy$$

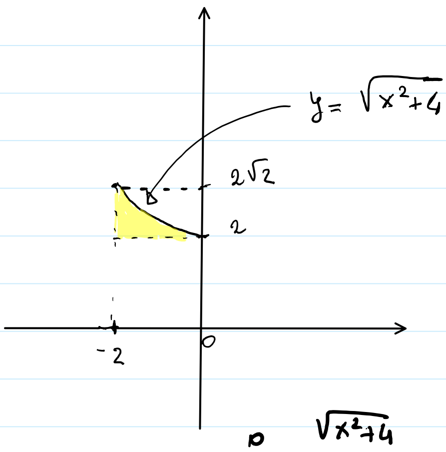
Calcoliamo

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{1}^{2x^2+1} \frac{x}{y}\,dy \right) dx = \int_{-1}^{0} x \, \log y \Big|_{1}^{2x^2+1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x \log(2x^2+1)\,dx \overset{2x^2+1=t}{=\!=} \frac{1}{4}\int_{3}^{1} \log t \, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\, t\log t \Big|_{3}^{1} - \frac{1}{4}\int_{3}^{1} dt = -\frac{3}{4}\log 3 + \frac{1}{2}$$

B) Analogamente alla traccia A, l'insieme di integrazione è normale anche rispetto all'asse delle y:



$2 \le y \le 2\sqrt{2}$

$-2 \le x \le -\sqrt{y^2-4}$

Quindi

$$\int_{-2}^{0} \left(\int_{2}^{\sqrt{x^2+4}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{2}^{2\sqrt{2}} \left(\int_{-2}^{-\sqrt{y^2-4}} f(x,y)\,dx \right) dy$$

$\int^{0} \int^{\sqrt{x^2+4}}$ ... $\int^{0} \int^{\sqrt{x^2+4}}$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(\int_{2}^{\sqrt{x^2+4}} \frac{x}{y^3}\,dy\right)dx = \int_{-2}^{0} x\left(\int_{2}^{\sqrt{x^2+4}} \frac{1}{y^3}\,dy\right)dx$

$$= \int_{-2}^{0} x\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2}\Big|_{2}^{\sqrt{x^2+4}}\right) dy =$$

$$= \int_{-2}^{0} x\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \frac{x}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{8}\int_{-2}^{0} x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\log(x^2+4)\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{16}x^2\Big|_{-2}^{0} =$$

$$= -\frac{2}{4}\log 2 + \frac{3}{4}\log 2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\log 2 - 1)$$