1)-a) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 \cdot e^{-2-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-1-2i}{2} = -i$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1 \; ; \quad e^{-2-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{e^2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{e^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Quindi $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 e^{-2-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{e^2}\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{1}{e^2}\frac{\sqrt{2}}{2}$

1)-b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \arccos(x-1) - x^3$$

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x-1 \le 1\} = [0,2]$$

La funzione $g(x) = \arccos(x-1)$ è strettamente decrescente in quanto composta da una funzione strettamente decrescente ($y = \arccos x$) e una strett. crescente ($y = x-1$); la funzione $h(x) = -x^3$ è anche essa strett. decrescente. Dunque f è strett. decrescente in quanto somma di due funzioni strett. decrescenti. Essendo poi f anche continua $\operatorname{im} f = [f(2), f(0)] = [-8, \pi]$

2) Determinare dominio e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{(-x)^{\sqrt{2}} + \sin x}{\sqrt{|x|} - 1} ;$$

stabilire poi che f è strettamente decrescente in un intorno di $-\infty$

f è definita per $-x \ge 0$ e se $\sqrt{|x|} - 1 \ne 0$ quindi per $x \le 0$ e $|x| = 1$ cioè $x \ne \pm 1$. Dunque $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0]$

f è continua nel suo dominio, dunque l'unico punto in cui sono da cercare eventuali asintoti verticali è $x_0 = -1$

$\ell = 1 - \sin 1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ si presenta nella forma $\frac{\ell}{0}$. Poiché il denominatore tende a 0 assumendo valori negativi e $\ell > 0$ il risultato è $-\infty$ quindi $x = -1$ è asintoto verticale a dx per f.

$\lim_{x \to -1^-} f(x)$ si presenta nella forma $\frac{\ell}{0}$, con denominatore questa volta che assume valore positivi quindi il risultato del limite è $+\infty$ e $x = -1$ è anche asintoto verticale a sx per f.

Cerchiamo l'eventuale asintoto per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^{\sqrt{2}} + \sin x}{\sqrt{|x|} - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^{\sqrt{2}}}{\sqrt{|x|}} \frac{\left(1 + \sin x / (-x)^{\sqrt{2}}\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{|x|}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^{\sqrt{2}}}{(-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \sin x / (-x)^{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{|x|}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (-x)^{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} \cdot 1 = +\infty .$$

Non c'è asintoto orizz. per $x \to -\infty$

Analogamente $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} - (-x)^{\sqrt{2} - \frac{3}{2}} \cdot 1 = 0$

dato che $\sqrt{2} - \frac{3}{2} < 0$

Poiché $\lim_{x \to -\infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ non c'è neanche asintoto obliquo per $x \to -\infty$

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{2}\,(-x)^{\sqrt{2}-1} \cdot (-1) + \cos x\right)\left(\sqrt{|x|} - 1\right) - \left((-x)^{\sqrt{2}} + \sin x\right) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \operatorname{sign} x}{\left(\sqrt{|x|} - 1\right)^2}$$

$= -1$ per $x<0$

Poiché il denominatore è non-negativo il segno di f dipende solo dal segno del numeratore che per $x \to -\infty$ è asintotico a

$$-\sqrt{2}\,(-x)^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-x)^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} = \left(-\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)(-x)^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} \to -\infty, \text{ per } x \to -\infty$$

Quindi il numeratore è definitivamente negativo per $x \to -\infty$ e dunque $f'(x) < 0$ definitivamente e dunque f è strettamente decrescente definitivamente per $x \to -\infty$

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{2 - x}{\sqrt{1 + x}}\, dx$$

Integrando per parti

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{1+x}}\,dx = (2-x)\,2\sqrt{1+x} + 2\int \sqrt{1+x}\,dx$$

$$= (2-x)\,2\sqrt{1+x} + \frac{4}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + c$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass

Si vedano pagg. 114-115 del manuale Marcellini-Sbordone "Elementi di analisi matematica uno", Liguori Editore 2002