Possibile svolgimento della prova del 21 Febbraio 2025 – Modulo A

1) (a) Calcoliamo $\frac{(1+2i)^3}{(1-i)^2}$ in forma esponenziale:

Per $1+2i$: $|1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$; $\arg(1+2i) = \arctan(2)$. Quindi $1+2i = \sqrt{5}e^{i\arctan(2)}$

Per $1-i$: $|1-i| = \sqrt{2}$; $\arg(1-i) = -\pi/4$. Quindi $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

Pertanto:

$$z = \frac{(\sqrt{5})^3 e^{3i\arctan(2)}}{2e^{-i\pi/2}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}e^{i(3\arctan(2)+\pi/2)}.$$

Le radici quinte sono quindi:

$$z_k = \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}}{2}}e^{i(3\arctan(2)+\pi/2+2k\pi)/5}$$

per $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(b) Per la successione $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ con $n \geq 1$, studiamo prima la monotonia:

Per $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0$.

Quindi la successione è strettamente crescente.

Inoltre:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n}{1+1/n} = 2.$$

Pertanto: $\sup A = 2$ (non è massimo) $\inf A = a_1 = 1/2$ (è minimo).

2) Per il dominio di $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) + \sqrt{x^2-4}$, devono essere soddisfatte: 1) Per il logaritmo, deve essere $\frac{x-1}{x+8} > 0$. Numeratore e denominatore devono essere entrambi positivi o entrambi negativi: ($x-1 > 0$ e $x+8 > 0$) oppure ($x-1 < 0$ e $x+8 < 0$). Quindi $x \in (-\infty, -8) \cup (1, +\infty)$

2) $x^2 - 4 \geq 0$ quindi $x \leq -2$ o $x \geq 2$.

Intersecando: $x \in (-\infty, -8) \cup [2, +\infty)$

Asintoti:

Dato che f è continua sul suo dominio, l'unico punto in cui cercare asintoti verticali è $x = 8$. Per $x \to -8^-$: $f(x) \to -\infty$; quindi la retta $x = 8$ è asintoto verticale a sx per f.

Cerchiamo gli eventuali asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) + \sqrt{x^2-4}\right] = 0 + \infty = +\infty$$

quindi non ci sono asintoti orizzontali.

Per gli asintoti obliqui studiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) + \sqrt{x^2-4}}{x} = 0 + 1 = 1,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) + \sqrt{x^2-4}}{x} = 0 - 1 = -1,$$

dato che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1-4/x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-4/x^2}}{x} = -1$$

Quindi per $x \to +\infty$ dobbiamo studiare

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) + \sqrt{x^2-4} - x\right] = 0$$

e per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x] = \lim_{x\to-\infty}\left[\log\left(\frac{x-1}{x+8}\right)+\sqrt{x^2-4}+x\right] = 0$$

Infatti in entrambi i limiti qui sopra, dato che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\log\left(\frac{x-1}{x+8}\right) = 0,$$

il problema è studiare

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-4}\mp x;$$

moltiplicando e dividendo rispettivamente per $\sqrt{x^2-4}\pm x$ e usando la formula sulla differenza di quadrati il numeratore è costante uguale a 4 mentre il denominatore tende a $+\infty$ e dunque

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-4}\mp x = 0.$$

In definitiva, di $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e $y = -x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Per la monotonia: $f'(x) = \frac{9}{(x-1)(x+8)} + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$. Per $x > 0$ nel dominio di f, ovvero per $x \in [2,+\infty)$, entrambi gli addendi sono positivi e quindi f è strettamente crescente in $[2,+\infty)$. La funzione ha quindi un minimo locale in $x = 2$.

3) Poniamo $t = \sqrt{x}$, quindi $x = t^2$ e $dx = 2t\,dt$. L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int\frac{t\cdot 2t}{t^2-1}\,dt &= 2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,dt\\ &= 2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt\\ &= 2t+\log|t-1|-\log|t+1|+C\end{aligned}$$

Sostituendo $t = \sqrt{x}$, otteniamo:

$$2\sqrt{x}+\log|\sqrt{x}-1|-\log|\sqrt{x}+1|+C$$

4) Teorema della media integrale per funzioni continue: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a,b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

Dimostrazione: Sia $m = \min_{[a,b]} f$ e $M = \max_{[a,b]} f$ (esistono per Weierstrass). Per le proprietà dell'integrale:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Quindi:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Per il teorema dei valori intermedi, esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c)$ è uguale alla media integrale $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Dato che $f(x) = xe^{-x^2}$ è dispari il suo valore medio su $[-1,1]$ è 0.