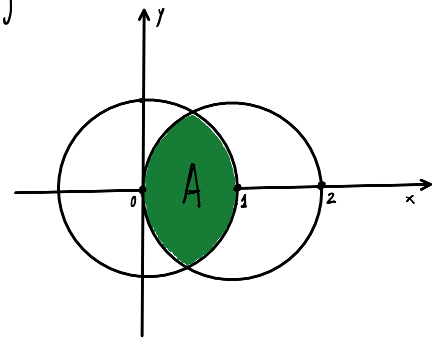
1) Calcolare l'integrale

$$\int_A \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy$$ dove A è l'insieme in figura



C

Conviene calcolare l'integrale assegnato in coordinate polari. A tal fine è necessario ricavare l'equazione della circonferenza di centro 1 e raggio 1 in coordinate polari con polo nel centro del sistema di assi cartesiani $O(0,0)$

$$(x-1)^2+y^2=1 \iff (\rho\cos\theta-1)^2+\rho^2\sin^2\theta=1$$

$$\iff \rho^2-2\rho\cos\theta+1=1 \iff \rho(\rho-2\cos\theta)=0$$

quindi l'equazione è data da $\rho=2\cos\theta$

Sia $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

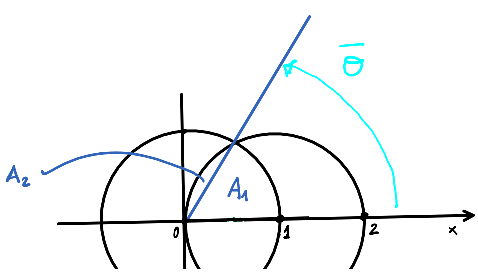
Poiché $f(x,y)=f(x,-y)$ e A è invariante rispetto alla simmetria $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto (x,-y)$, possiamo limitarci a considerare solo l'insieme $A_0=A\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\geq 0\}$ avendo $\int_A f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{A_0} f(x,y)\,dx\,dy$

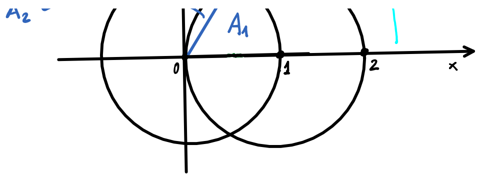
Possiamo inoltre decomporre A_0 nell'unione di A_1 e A_2 in figura qui sotto

Il punto di intersezione con ordinata positiva delle circonferenze $x^2+y^2=1$ e $(x-1)^2+y^2=1$ è dato da

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=(x-1)^2+y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=x^2+1-2x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

quindi l'angolo $\bar{\theta}$ è $\frac{\pi}{3}$





Quindi $\int_{A_0} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy$

$A_1 = \{(\rho,\theta) : 0<\rho<1 \text{ e } 0<\theta<\frac{\pi}{3}\}$

$$\int_{A_1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_0^1 (\rho\cdot\rho\,d\rho\right)d\theta = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\rho^2\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{9}$$

$A_2 = \{(\rho,\theta) : \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2} \wedge 0<\rho<2\cos\theta\}$

$$\int_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,d\rho\right)d\theta$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta = \sin\theta\cos^2\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{3}\sin^3\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

2) Determinare il dominio della funzione

$f(x,y) = \log\left(\frac{x-2y+1}{y+x}\right)$

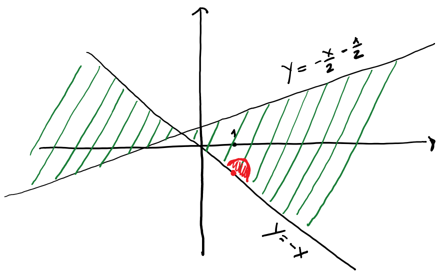
e rappresentarlo sul piano. Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi

Calcolare $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)$

Stabilire che f è differenziabile sul suo dominio

Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ con $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

dom f : $\frac{x-2y+1}{y+x} > 0 \iff \begin{cases} x-2y+1>0 \\ y+x>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2y+1<0 \\ y+x<0 \end{cases}$



Il dominio di f è dunque la parte del piano tratteggiata in verde. È un insieme aperto, illimitato non connesso per archi

$f \in C^\infty(\text{dom} f)$ dato che è composta dalla funzione razionale $(x,y) \in \text{dom} f \mapsto \frac{x-2y+1}{x+y}$ e dalla funzione logaritmo

Per il teorema del differenziale f è quindi differenziabile in tutti i punti del suo dominio.

Inoltre, $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \langle \nabla f(1,0), v \rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x+y}{x-2y+1} \; \frac{x+y-x+2y-1}{(x+y)^2} = \frac{3y-1}{(x-2y+1)(x+y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{-1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x+y}{x-2y+1} \; \frac{-2(x+y)-x+2y-1}{(x+y)^2} = \frac{-3x-1}{(x-2y+1)(x+y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{-4}{2\cdot 1} = -2$$

Quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1-4}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$

Calcoliamo infine

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)$$

Notiamo che $(1,-1) \in \partial(\text{dom} f)$

$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} x-2y+1 = 4$ quindi il numeratore di $\frac{x-2y+1}{x+y}$ è definitivamente positivo per $(x,y)\to(1,-1)$

Poiché $x+y>0$ per $y>-x$ ed esiste un intorno di $(1,-1)$ che intersecato con il dominio di f è dato da punti per cui $x+y>0$ (ad esempio l'insieme tratteggiato in rosso in figura)

si ha:
$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x-2y+1}{x+y} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

e quindi posto $t = \dfrac{x-2y+1}{x+y}$ abbiamo per il teorema sul limite delle funzioni composte

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$$

3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = x + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \quad (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata a $(*)$ è
$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ che ha soluzioni $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$

Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Cerchiamo ora soluzioni delle equazioni

$y'' + y' + y = x$

$\tilde{y}_1(x) = ax + b$

$a + ax + b = x \quad \forall x$

$a = 1$ e $b = -1$

quindi $\tilde{y}_1(x) = x - 1$

$y'' + y' + y = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$\tilde{y}_2(x) = k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$\tilde{y}_2'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}k_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + k_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$\tilde{y}_2''(x) = -\frac{3}{4}k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{3}{4}k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Quindi

$$\left(-\frac{3}{4}k_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_2 + k_1\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(-\frac{3}{4}k_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}k_1 + k_2\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

da cui $\left| -\frac{3}{4}k_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_2 + k_1 = 1 \right. \quad \left| -3k_1 + 2\sqrt{3}k_2 + 4k_1 = 4 \right.$

da cui $\begin{cases} -\frac{3}{4}k_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_2 + k_1 = 1 \\ -\frac{3}{4}k_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -3k_1 + 2\sqrt{3}k_2 + 4k_1 = 4 \\ -3k_2 - 2\sqrt{3}k_1 + 4k_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{k_2}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}k_2 + 2\sqrt{3}k_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = k_2/2\sqrt{3} \\ 13k_2 = 8\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 = \frac{8\sqrt{3}}{13} \\ k_1 = \frac{4}{13} \end{cases}$$

Quindi $\tilde{y}_2(x) = \frac{4}{13}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{8\sqrt{3}}{13}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ e l'integrale generale di $(*)$ è dato da

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x - 1 + \frac{4}{13}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{8\sqrt{3}}{13}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$0 = y(0) = c_1 - 1 + \frac{4}{13} \iff c_1 = \frac{9}{13}$$

$$y'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[-\frac{9}{13}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left[\frac{9}{13}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + 1 - \frac{12\sqrt{3}}{13}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{12}{13}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$1 = y'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{9}{26} + 1 + \frac{12}{13} \iff c_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{13}$$

4) Dare la definizione di somma per una serie numerica convergente. Enunciare e dimostrare poi il criterio della radice per una serie a termini non negativi.

Per la definizione si veda, ad esempio, la lezione 30; per il criterio della radice, la lezione 31.