1) a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2 \log^3 n + 1}$$

a) Trattasi della serie geometrica di ragione $-\frac{1}{2}$ priva dei primi tre termini quindi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \overset{k=n-2}{=} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

b) $$\frac{n}{n^2 \log^3 n + 1} \sim \frac{1}{n \log^3 n}$$

Per il criterio dell'integrale la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^3 n}$ converge e quindi anche la serie assegnata converge.

2) Stabilire quale sia l'insieme su cui la funzione

$$f(x,y) = (x-y^2)^2 x \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

è differenziabile, motivando la risposta. Calcolare poi $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,-1)$ dove v è il versore di componente $(\cos\bar{\theta}, \sin\bar{\theta})$, $\bar{\theta} = \pi + \frac{\pi}{3}$.

Determinare infine i punti critici di f e studiarne la natura

Poiché f è un polinomio, essa è una funzione di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ e quindi è differenziabile $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Essendo differenziabile ovunque, $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,-1) = \nabla f(-1,-1) \cdot v$.

Calcoliamo dunque le derivate parziali di f:

$$f_x(x,y) = 2(x-y^2)x + (x-y^2)^2 = (x-y^2)(2x+x-y^2) = (x-y^2)(3x-y^2)$$

$$f_y(x,y) = 2(x-y^2)(-2y)x = -4(x-y^2)xy$$

Quindi $\nabla f(-1,-1) = (8,8)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,1) = (8,8)\cdot\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$= -8\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 8\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4 - 4\sqrt{3} = -4(1+\sqrt{3})$$

Cerchiamo ora i punti stazionari di f:

$$\begin{cases} x-y^2=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y^2)(3x-y^2)=0 \\ -4(x-y^2)xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^2/3 \\ -\frac{2}{3}y^2\, y^3/3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

I punti critici di f sono dunque tutti i punti appartenenti alla parabola P di equazione $x=y^2$ e il punto $O(0,0)$. Poiché $O\in P$ possiamo analizzare la natura di O insieme a quella dei punti di P.

$\forall\, (\bar{x},\bar{y})\in P$: $f(\bar{x},\bar{y})=0$ quindi

$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y) \quad \forall\,(\bar{x},\bar{y})\in P$

Dato che il segno di $f(x,y)$ coincide con quello di x e che per ogni $(\bar{x},\bar{y})\in P\setminus\{0,0\}$: $\bar{x}>0$, abbiamo che ogni $(\bar{x},\bar{y})\in P\setminus\{(0,0)\}$ è un punto di minimo locale (non stretto). Dato che ogni intorno di $(0,0)$ contiene punti con ascissa negativa, $(0,0)$ è di sella.

3) Determinare, esplicitamente, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x-1)y + e^{\frac{1}{2}x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Sappiamo che la soluzione è data da

$$y(x) = \left(e^{\int_1^x (t-1)\,dt}\right)\left(1 + \int_1^x e^{-\int_1^t (\tau-1)\,d\tau}\, e^{\frac{t^2}{2}}\,dt\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t-1)^2\big|_1^x}\left(1 + \int_1^x e^{-\frac{1}{2}(\tau-1)^2\big|_1^t}\, e^{\frac{t^2}{2}}\,dt\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t-1)^2\big|_1} \left(1 + \int_1 e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2\big|_1} e^{\frac{t^2}{2}} dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \left(1 + \int_1^x e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} e^{t^2/2} dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \left(1 + \int_1^x e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{t} e^{-\frac{1}{2}} e^{t^2/2} dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \left(1 + \int_1^x e^{-\frac{1}{2}} e^{t} dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(x-1)^2} \left(1 + e^{-\frac{1}{2}} \left(e^x - e\right)\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}x^2 - x} e^{\frac{1}{2}} \left(1 + e^{-\frac{1}{2}+x} - e^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}x^2 - x} \left(e^{\frac{1}{2}} + e^{x} - e \right)$$

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \log(x+y)\, x \, dx\, dy$$

dove A è l'insieme definito da

$$A = \{ (x,y) : x>0,\ y>0,\ 1 < x+y < 2 \}$$

Possiamo considerare la trasformazione

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x \end{cases}$$

Ovviamente, per come A è definito abbiamo che $1<u<2$, ed essendo $y = u-v$ abbiamo anche che

$0<v$ e $u-v>0$ cioè $v<u$

Pertanto nel piano $\{u,v\}$ abbiamo che A è un insieme normale rispetto ad u : $1<u<2$, $0<v<u$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix} \quad \text{quindi} \quad \left| \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) \right| = 1$$

$\partial(u,v)$ 1, -1 $\partial(u,v)$ |

quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_1^2 \log u \left(\int_0^u v\,dv\right) du = \int_1^2 \frac{1}{2} u^2 \log u \, du =$$

$$= \frac{1}{6} u^3 \log u \Big|_1^2 - \frac{1}{6} \int_1^2 u^3 \frac{1}{u} \, du =$$

$$= \frac{4}{3} \log 2 - \frac{1}{18} u^3 \Big|_1^2 = \frac{4}{3} \log 2 - \frac{4}{9} + \frac{1}{18} =$$

$$= \frac{4}{3} \log 2 - \frac{7}{18}$$