1) - a) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^7 + 2z^2 = 0$$

$z^7 + 2z^2 = 0 \iff z^2(z^5+2) = 0 \iff z^2 = 0 \lor z^5 = -2 \iff z = 0 \lor z = \sqrt[5]{-2}$

Quindi $z = 0 \lor z = \sqrt[5]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k\right)}$, $k = 0,1,2,3,4$

1) - b) Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{2}{\arccos(x^3-1)}$$

dom f: $\begin{cases} -1 \le x^3-1 \le 1 \\ \arccos(x^3-1) \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 \le 2 \\ x^3 \ge 0 \\ x^3 - 1 \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le \sqrt[3]{2} \\ x \ge 0 \\ x^3 \neq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le \sqrt[3]{2} \\ x \ge 0 \\ x \neq \sqrt[3]{2} \end{cases}$

quindi dom $f = [0, \sqrt[3]{2})$

f è il reciproco della funzione $g(x) = \arccos(x^3-1)$

la quale è stett. decrescente (dato che è composto da $y = x^3 - 1$ stett. crescente e $y = \arccos x$, stett. decrescente). Poiché g è anche positiva, f è stett. crescente.

f è anche continua sul suo dominio e quindi

$\operatorname{Im} f = [f(0), \lim_{x \to \sqrt[3]{2}^-} f(x)) = \left[\frac{2}{\pi}, \frac{2}{0^+}\right) = \left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$

2) Determinare il numero di punti in $\mathbb{R}$ su cui la funzione razionale $f(x) = \dfrac{2x^8 - 1}{-x^8 + x^5 + 10x^4}$ non è definita

Determinare gli asintoti orizzontali di f.

Calcolare infine l'equazione della retta tg al grafico di f nel punto $x = 1$

Sia $p(x) = -x^8 + x^5 + 10x^4$ il polinomio al denominatore di f.

È chiaro che dom $f = \mathbb{R} - Z_p$ dove Z_p è l'insieme degli zeri reali di p. Dobbiamo quindi determinare il numero di zeri reali di p. Osserviamo che $p(x) = -x^8 + x^5 + 10x^4 = x^4(-x^4 + x + 10)$

Quindi $p(x) = 0 \iff x^4(-x^4 + x + 10) = 0 \iff x = 0 \lor -x^4 + x + 10 = 0$

Cerchiamo quindi il numero di zeri reali del polinomio $h(x) = -x^4 + x + 10$

$h'(x) = -4x^3 + 1 \geq 0 \iff 4x^3 \leq 1 \iff x \leq \sqrt[3]{1/4}$

Quindi h è statt. crescente su $(-\infty, \sqrt[3]{\frac{1}{4}})$ e statt. decrescente su $(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, +\infty)$

Poiché $h(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}) > 0$ e $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = -\infty$, h ha due sei zeri

Quindi p ha 3 zei zeri e f non è definita in 3 punti.

Asint. orizzontali: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -2$ quindi la retta $y = -2$

è asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

Retta tg. in $x = 1$: osserviamo che $p(1) \neq 0$ quindi $1 \in \operatorname{dom} f$

e f è derivabile in $x = 1$ quindi la retta tg esiste nel punto $x = 1$

$$f'(x) = \frac{16x^7(-x^8 + x^5 + 10x^4) - (2x^8 - 1)(-8x^7 + 5x^4 + 40x^3)}{(-x^8 + x^5 + 10x^4)^2}$$

$$f'(1) = \frac{160 - 37}{100} = \frac{123}{100}$$

Quindi l'equazione della retta tg. richiesta è

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{1}{10} + \frac{123}{100}(x-1)$$

3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$\int \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x} dx$. Usare il risultato per calcolare la media

integrale di $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}$ sull'intervallo $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Poiché $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, l'integranda è uguale

a $\frac{2\cos x}{\sin x}$; quindi

$$\int \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x} dx = 2 \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = 2 \log|\sin x|$$

Quindi la media integrale richiesta è $\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} 2 \log|\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= \frac{8}{\pi}\left(\log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8}{\pi} \log \sqrt{2}$$

4) Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$.

Dare la definizione di stretta convessità per f.

Dare una caratterizzazione della stretta convessità per f derivabile su I e una condizione sufficiente per f derivabile 2 volte su I. Si applichi questa ultima condizione per studiare la stretta convessità di

$$f(x) = \frac{1}{3^{x^4-1}}$$

Per la definizione si veda p. 207 del manuale consigliato.
Per le caratterizzazioni si vedano, rispettivamente, il Teorema 7.29 e il Teorema 7.30 dello stesso manuale.

$$f'(x) = \frac{1}{3^{x^4-1}} \log\frac{1}{3}\, 4x^3$$

$$f''(x) = \frac{1}{3^{x^4-1}} \left(\log\frac{1}{3}\right)^2 16x^6 + \frac{1}{3^{x^4-1}} \log\frac{1}{3}\, 12x^2$$

$= \frac{4x^2}{3^{x^4-1}} \log\frac{1}{3}\left[4x^4\log\frac{1}{3} + 3\right]$ quindi $f''(x) > 0 \iff -4x^4\log 3 + 3 < 0$

$\iff x > \left(\frac{3}{4\log 3}\right)^{\frac{1}{4}} \ \vee \ x < -\left(\frac{3}{4\log 3}\right)^{\frac{1}{4}}$

quindi f è strett. convessa su $\left(\left(\frac{3}{4\log 3}\right)^{\frac{1}{4}}, +\infty\right)$ e su $\left(-\infty, -\left(\frac{3}{4\log 3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)$