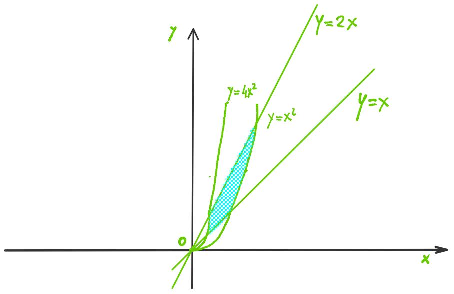
1) Calcolare

$$\int_A \frac{x^2}{y}\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2<y<4x^2,\ x<y<2x\}$$

L'insieme A è rappresentato in figura qui sotto (è la regione di piano colorata)



Possiamo introdurre le variabili

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2} \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Quindi nelle coordinate $\{u,v\}$ l'insieme

A corrisponde al rettangolo $1<u<4$ e $1<v<2$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} \quad ; \quad \det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = -\frac{2y}{x^4}+\frac{y}{x^4} = -\frac{y}{x^4}$$

Quindi $\left|\det\left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)\right| = \dfrac{y}{x^4}$ dato che $y>0$ su A

$$u^2=\frac{y^2}{x^4}, \quad v^2=\frac{y^2}{x^2}, \quad \frac{v^2}{u}=\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{y}=y$$

quindi $\dfrac{y}{x^4} = \dfrac{u^2}{\frac{v^2}{u}} = \dfrac{u^3}{v^2}$

Pertanto $\left|\det\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| = \dfrac{1}{\frac{u^3}{v^2}} = \dfrac{v^2}{u^3}$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_{(1,4)\times(1,2)} \frac{1}{u}\cdot\frac{v^2}{u^3}\,du\,dv = \int_1^4 \frac{1}{u^4}\,du \int_1^2 v^2\,dv = -\frac{1}{3}u^{-3}\Big|_1^4 \cdot \frac{1}{3}v^3\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(4^{-3}-1\right)\frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{9}\left(1-4^{-3}\right)$$

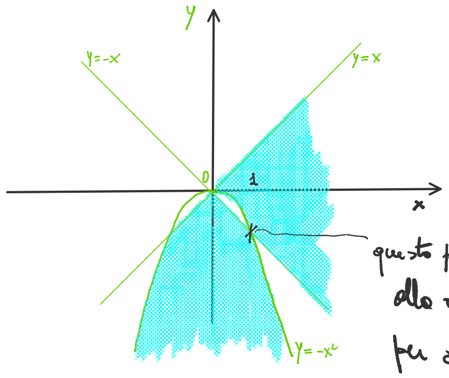
2) Determinare il dominio della funzione vettoriale

$$F(x,y) = \left(\log\left(\frac{x^2+y}{x+y}\right),\ e^{\sqrt{x-y}},\ x-y\right)$$ e rappresentarlo nel piano.

Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.

Stabilire che F è differenziabile nel punto (1,0) e determinare la matrice Jacobiana nello stesso punto.

$$\operatorname{dom}F = \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{x+y}>0 \\ x-y\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{x+y}\geq 0 \\ y\leq x \end{cases} \quad \left\{\begin{cases} x^2+y\geq 0 \\ x+y>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y\leq 0 \\ x+y<0 \end{cases}\right. \\ y\leq x$$



dom F non è aperto perché i punti della retta $y=x$ per $x>0$ appartengono a dom F ma non sono interni

dom F non è neanche chiuso perché i punti della retta $y=-x$ per $x>1$, ad esempio, sono di frontiera ma non appartengono a dom F. dom F è illimitato

questo punto non appartiene al dominio in quanto appartiene alla retta $y=-x$. Quindi l'insieme non è connesso per archi

Ognuna delle componenti di F ha derivate parziali nei punti interni a dom F. Tali funzioni derivate parziali sono anche continue su dom F. Quindi, per il teorema del differenziale, F è differenziabile su dom F. In particolare F è differenziabile in $(1,0)$.

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{x^2+y}\,\frac{2x(x+y)-(x^2+y)}{(x+y)^2} & \frac{x+y}{x^2+y}\,\frac{x+y-x^2-y}{(x+y)^2} \\ e^{\sqrt{x-y}}\,\frac{1}{2\sqrt{x-y}} & -e^{\sqrt{x-y}}\,\frac{1}{2\sqrt{x-y}} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_F(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{2-1}{1} & 0 \\ \frac{e}{2} & -\frac{e}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e}{2} & -\frac{e}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma implicita

$$y' = (y^3-y)\sqrt{1-t}$$

y^3-y $\quad$ $\sqrt{t-1}$

È un'equazione a variabili separabili del tipo $y' = g(y)\,h(t)$, le soluzioni singolari sono le soluzioni costanti che annullano g e quindi sono $y=0$ e $y=\pm 1$

Escludendo queste soluzioni, possiamo dividere ambo i membri dell'eq. per g e ottenere $\frac{y'}{y^3-y} = \sqrt{1-t}$. Integrando

$$\int \frac{dy}{y(y^2-1)} = \int \sqrt{1-t}\,dt$$

$$\int \sqrt{1-t}\,dt = -\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{1}{y(y^2-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1} = \frac{Ay^2-A+By(y+1)+Cy(y-1)}{y(y^2-1)}$$

$$= \frac{Ay^2-A+By^2+By+Cy^2-Cy}{y(y^2-1)}$$

deve quindi essere $\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=0 \\ -A=1 \end{cases}$ $\begin{cases} A=-1 \\ B+C=1 \\ B=C \end{cases}$ $\begin{cases} A=-1 \\ B=C \\ 2B=1 \end{cases}$ $\begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$

Quindi $\displaystyle\int \frac{dy}{y(y^2-1)} = -\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y-1} + \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y+1}$

$$= -\log|y| - \frac{1}{2}\log|y-1| + \frac{1}{2}\log|y+1|$$

$$= \log\left(\sqrt{\left|\frac{y+1}{y-1}\right|}\Big/ y\right)$$

Quindi l'integrale generale in forma implicita è $\log\left(\sqrt{\left|\frac{y+1}{y-1}\right|}\Big/ y\right) = -\frac{2}{3}(1-t)^{3/2} + C$

4) Dare la definizione di serie geometrica di ragione q.

Dedurre il suo carattere al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Scrivere infine 1 come somma di una serie geometrica priva del primo termine

Sia $q \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ si dice serie geometrica.

$(*)$ $s_n = 1+q+q^2+\dots+q^n$; se $q=1$, $s_n = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1 \text{ volte}} = n+1 \to +\infty$

quindi per $q=1$, la serie diverge

se $q \neq 1$, moltiplichiamo ambo i membri di $(*)$ per q

$(**)$ $q s_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$; sottraendo $(**)$ membro a membro da $(*)$

otteniamo $(1-q)s_n = 1-q^{n+1}$ da cui $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Da questa espressione otteniamo subito che $s_n \to 1/_{1-q}$ se $q \in (-1,1)$

$s_n \to +\infty$ se $q>1$ e s_n non ha limite se $q \leq -1$.

Quindi $(*)$ converge a $\dfrac{1}{1-q}$ per $q \in (-1,1)$, diverge pos. per $q \geq 1$

ed è indeterminata per $q \leq -1$

Poiché $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, abbiamo che $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}$