

Ricordiamo che  $\forall z \in \mathbb{C}$  il modulo di  $z$  è  $|z| := \sqrt{\operatorname{Re} z^2 + \operatorname{Im} z^2}$

Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ . Si chiama disco aperto di centro  $z_0$  e raggio  $r$  l'insieme  $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

Si chiama disco chiuso di centro  $z_0$  e raggio  $r$  l'insieme  $\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ .

Il bordo di  $D(z_0, r)$  (e anche di  $\overline{D(z_0, r)}$ ) è la circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $r$ .

Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Un insieme  $V \subset \mathbb{C}$  si dice intorno di  $z_0$  se  $\exists r > 0$  t.e.

$D(z_0, r) \subset V$ . L'insieme degli intorni di un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  sarà indicato con  $\mathcal{I}(z_0)$ .

Sia  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  una successione in  $\mathbb{C}$

diciamo che  $z_n$  converge a  $z \in \mathbb{C}$  e

scriviamo  $\lim_n z_n = z$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall m > n : |z_m - z| < \varepsilon$

Possiamo anche considerare le serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$  da indicare come la somma

delle sue numeriche in  $\mathbb{R}$  le coppie di successioni in  $\mathbb{C}$   $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dove  $\forall n \in \mathbb{N} s_n = \sum_{k=0}^n z_k$ . (Si osservi che poiché  $\mathbb{C}$  non è un campo ordinato le nozioni di  $+\infty$  e  $-\infty$  non hanno senso e dunque tutte quelle di successione e serie divergenti)

# FUNZIONI COMPLESSE DI VARIABILE COMPLESSA

Analsi reale studia:

$$f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n .$$

Analsi complesse studia:

$$f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Sia  $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Si ricordi che  $\mathbb{C}$  è bigettivo a  $\mathbb{R}^2$  per cui

$f$  può anche essere vista (almeno per alcuni aspetti) come funzione da  $A \subset \mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$ .

Si chiamano parte reale e parte immaginaria di  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  le componenti di  $f$ , come funzione da  $A$  in  $\mathbb{R}^2$ , ossia le funzioni

$$\operatorname{Re} f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re}(f(z)) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im}(f(z))$$

Possiamo quindi scrivere  $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$  poiché  $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$

Esempio:  $f(z) = z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  (funzione costante oli costante valore  $z_0$ );

$f(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$  (identità); se  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f(z) = z^k$  (potenza di ordine  $k$ );

sia  $a_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = a_0 z \quad \forall z \in \mathbb{C}$  (funzione lineare);

$f(z) = a_0 z^k$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;

$f(z) = \bar{z}$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  (coniugio;  $i$  è la simmetria del piano rispetto all'asse dei reali)

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Ora l'ultima funzione è quella di  $z \mapsto \frac{1}{z\bar{z}} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$

Vediamo quali sono le sue parti reale e immaginaria

$$\text{Se } z = x + iy \text{ allora} \quad \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

e dunque le sue parti reali è le funzioni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  
le sue parti immaginarie è  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \frac{-y}{x^2 + y^2}$

Poiché la topologia su  $\mathbb{C}$  definita dagli intorni introdotti sopra coincide con la topologia euclidea in  $\mathbb{R}^2$  (una volta che abbiamo identificato  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ ) , fornire tranquillamente estendere le nozioni di limite e di continuità per una funzione complessa di variabile complesse.

Sia  $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$  diciamo  
che  $\lim_{z \rightarrow x_0} f(z) = b \in \mathbb{C}$  se  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che

$$\forall z \in \underbrace{D'(z_0, \delta)}_{\text{Disco buotto di centro}} \cap A : |f(z) - l| < \varepsilon$$

Disco buotto di centro

$z_0$  è raggiro  $\delta$

$$D'(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

Osserviamo che come per una successione non ha senso scrivere che  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = +\infty$  ( $-\infty$ )

ma ha senso calcolare limiti per  $z \rightarrow +\infty$  o per  $z \rightarrow -\infty$

Pertanto possiamo definire il limite per  $|z| \rightarrow \infty$ . Si consideri

$f: \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ , dove  $A$  è un insieme limitato di  $\mathbb{C}$  o  $A = \emptyset$

diamo la definizione di  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = l \in \mathbb{C}$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$  tale che

$$\forall z \in (\mathbb{C} \setminus D(0, R)) \cap (\mathbb{C} \setminus A) : |f(z) - l| < \varepsilon$$

Così come ha senso dire che  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$  purché  $|f|$  è una funzione REALE di variabile complesse.

Diciamo che  $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  è continua in  $z_0 \in A$  se  $z_0$  è un punto isolato di  $A$  oppure (caso nel caso in cui  $z_0$  è un'accumulazione per  $A$ ) se  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Definizione di funzione derivabile o olomorfa in un punto

$f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  aperto,  $z_0 \in A$ ,  $f$  è derivabile in  $z_0$  o, si dice anche,  $f$  è olomorfa in  $z_0$  se

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \quad \text{Il valore di questo limite si indica con} \\ f'(z_0) \quad 0 \quad Df(z_0) \quad 0 \quad Df|_{z=z_0} \quad 0 \quad \frac{df}{dz}(z_0)$$

Se  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  è derivabile in  $A$  (cioè è derivabile  $\forall z \in A$ ) si dice che

$f$  è DIFERENZIABILE su  $A$

Si dimostra facilmente (come nel caso delle funzioni reali di variabile reale)

che se  $f(z) = z_0$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  allora  $Df(z) = 0$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$

$$Dz \Big|_{z=z_0} = 1, \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}.$$

Inoltre se  $A \subset \mathbb{C}$  è aperto e

$f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 \in A$  e n $\uacute{e}$   $f, g$  sono derivabili in  $z_0$   
 anche  $f+g$ ,  $fg$ ,  $\frac{f}{g}$  sono derivabili in  $z_0$  e si ha  
 $(g(z_0) \neq 0)$

$$D(f+g)(z_0) = Df(z_0) + Dg(z_0)$$

$$D(fg)(z_0) = Df(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) Dg(z_0)$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(z_0) = \frac{Df(z_0)g(z_0) - f(z_0)Dg(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Se  $A$  e  $B$  sono aperti di  $\mathbb{C}$  e

$f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$        $g : B \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(A) \subset B$ . Consideriamo la

funzione composta  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g \circ f(z) = g(f(z))$

Se  $z_0 \in A$ ,  $f$  derivabile in  $z_0$ ,  $g$  derivabile in  $f(z_0)$  allora anche

$$g \circ f \text{ è derivabile in } z_0 \text{ e si ha: } D(g \circ f)(z_0) = Dg(f(z_0)) \cdot Df(z_0)$$

Possiamo quindi descherre del principio di induzione e delle regole  
 derivazione di un prodotto che  $f \in \mathbb{H}$ :  $Dz^m|_{z=z_0} = M z_0^{m-1}$ ,  $V_{z_0} \in \mathbb{C}$   
 E quindi delle regole di derivazione di un qualsiasi,  
 $\forall z_0 \in \mathbb{C}, \exists \{, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

Come nel caso di funzioni reali di variabile reale abbiamo

Prop  $f$  è olomorfa in  $z_0 \Rightarrow f$  continua in  $z_0$ .

dim  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \iff f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$ , per  $z \rightarrow z_0$   
 dove  $o(z - z_0)$  è una qualsiasi funzione di una variable reale tale che  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{o(z - z_0)}{z - z_0} = 0$

Dimostrazione

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \right) = f(z_0).$$

$\downarrow$        $\downarrow$

0      0

Ter (Condizioni di Cauchy-Riemann)

$$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \Omega \quad f(z) = u(z) + i v(z)$$

$\hookrightarrow$  aperto in  $\mathbb{C}$

$f$  è derivabile in  $z_0$   $\Leftrightarrow u, v$  sono differenziali in  $z_0$  e

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0) \end{cases}$$

inoltre  $f'(z_0) = f'_x(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0) = u_x(z_0) - i u_y(z_0)$

Ora =>

Dobbiamo dimostrare che le parti reali  $u$  e la parte immaginaria  $v$  di  $f$ , come funzioni delle due variabili reali sono differenziali in  $z_0 \equiv (x_0, y_0)$ .

Dire che  $u$  è differenziale in  $z_0$  equivale a dire che  $u$  ha derivate parziali  $u_x(x_0, y_0)$  e  $u_y(x_0, y_0)$  e da le seguenti uguaglianze è vero

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$$

solve  $\circ \left( \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) = \circ (|z-z_0|)$  induce une quelque fonction <sup>Page 23 of 184. ne</sup> dans  $z_0 = (x_0, y_0)$  di ordine supérieur rispetto a  $|z-z_0|$  cioè

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\circ (|z-z_0|)}{|z-z_0|} = 0$$

Denotiamo  $f'(z_0)$  con  $a+ib$ , quindi

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a+ib \iff f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \circ(z-z_0)$$

Osserviamo che  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\circ(z-z_0)}{z - z_0} = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|\circ(z-z_0)|}{|z - z_0|} = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\circ(z-z_0)}{|z - z_0|} = 0$

Quindi  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \circ(|z-z_0|)$

e cioè

$$u(z) + i v(z) = u(z_0) + i v(z_0) + (a+ib)((x-x_0) + i(y-y_0)) + \circ(|z-z_0|)$$

$$= u(z_0) + i v(z_0) + \alpha(x - x_0) - b(y - y_0) + i(b(x - x_0) + \alpha(y - y_0)) + \operatorname{Re} \phi(z - z_0) + i \operatorname{Im} \phi(z - z_0)$$

Per cui negli ultimi punti reali e parti immaginarie, si ottiene

$$u(z) = u(z_0) + \alpha(x - x_0) - b(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

$$v(z) = v(z_0) + b(x - x_0) + \alpha(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

$\operatorname{Re} \phi(z - z_0)$  e  $\operatorname{Im} \phi(z - z_0)$   
sono entrambe funzioni infinitamente  
divezzibili superiori rispetto a  
 $|z - z_0|$ , cioè sono  $o(|z - z_0|)$

da cui si deduisce che  $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $z_0$  e insomma

$$\nabla u(x_0, y_0) = (\alpha, -b) \quad \text{cioè} \quad u_x(x_0, y_0) = \alpha \\ u_y(x_0, y_0) = -b$$

$$\nabla v(x_0, y_0) = (b, \alpha) \quad \text{cioè} \quad v_x(x_0, y_0) = b \\ v_y(x_0, y_0) = \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned}}$$

Relazioni di Cauchy-Riemann

dim <=

---

Pur ipoteti soffrirete

$$u(t) = u(z_0) + u_x(z_0)(x-x_0) + u_y(z_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|)$$

$$\Im \sigma(z) = i \left( \sigma(z_0) + \sigma_x(t_0)(x-x_0) + \sigma_y(t_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|) \right)$$



$$f(z) = f(z_0) + [u_x(z_0) + i \sigma_x(z_0)](x-x_0) + [u_y(z_0) + i \sigma_y(z_0)](y-y_0) + o(|z-z_0|)$$

$$= f(z_0) + [u_x(z_0) + i \sigma_x(z_0)](x-x_0) + [-\sigma_x(t_0) + i u_x(z_0)](y-y_0) + o(|z-z_0|)$$

$$= f(z_0) + \underbrace{(u_x(z_0) + i \sigma_x(z_0))((x-x_0) + i(y-y_0))}_{\text{green box}} + o(z-z_0)$$

$$= f(z_0) + (u_x(z_0) + i \sigma_x(z_0))(z-z_0) + o(z-z_0)$$

$f'(z_0)$  è quindi uguale a  $u_x(z_0) + i \sigma_x(z_0)$  e  $u_x(z_0) - i u_y(z_0)$

# Alcuni esempi di funzioni che non sono olomorfe

- $f(z) = \bar{z}$

$$f(x,y) = x - iy \quad \text{cioè} \quad u(x,y) = x \quad \text{e} \quad v(x,y) = -y$$

$$\cdot \quad u_x(x,y) = 1 \quad v_y(x,y) = -1 \quad v_y(x_0) \neq u_x(x_0)$$

cioè  $f(z) = \bar{z}$  non è olomorfa in alcun punto di  $\mathbb{C}$

- $f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ ,  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ma  $f(\mathbb{C}) = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2; \quad v(z) = \operatorname{Im} f(z) = 0$$

$$u_x(x,y) = 2x \neq v_y(x,y) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$u_y(x,y) = 2y \neq -v_x(x,y) = 0 \quad \forall y \neq 0$$

$u$  e  $v$  sono differenziali su  $\mathbb{C}$  ma l'unico punto dove le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte è  $(0,0)$  (che è quindi l'unico punto dove  $f(z) = |z|^2$  è olomorfa).

•  $f(z) = \operatorname{Re} z$  con  $f(x,y) = x$ ,  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$

$$u(x,y) = x \quad u_x(x,y) = 1 \neq v_y(x,y) = 0$$

$$\Im(x,y) = 0$$

$f(z) = \operatorname{Im} z$  cioè  $f(x,y) = y$   $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$

$$u(x,y) = 0 \quad u_x(x,y) = 0 \neq v_y(x,y) = 1$$

Quindi  $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Z} \mapsto \operatorname{Im} z$  non sono domande in alcun punto

Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto. Con il simbolo  $H(\Omega)$  denoteremo l'insieme di tutte le funzioni domande su  $\Omega$ .

Oss Sia  $\Omega$  aperto connesso,  $f \in H(\Omega)$  e  $f'(z) = 0$ ,  $\forall z \in \Omega$   
allora  $f$  è costante.

D'altra parte poiché  $f'(z) = u_x(z) + i v_x(z)$ ,

$f'(z) = 0 \iff u_x(z) = 0 = v_x(z)$ . Dalle condizioni di Cauchy-Riemann, allora, anche  $u_y(z)$  e  $v_y(z)$  sono nulle e quindi  $u$  e  $v$  sono funzioni definite sull'aperto convesso  $\Omega \subset \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$  tali che

$$\nabla u(z) = 0 = \nabla v(z), \quad \forall z \in \Omega \quad \text{e quindi } \exists \frac{c_1}{c_2} \in \mathbb{R} \text{ tali che } u(z) = c_1 \text{ e } v(z) = c_2$$

cioè  $f(z) = c_1 + i c_2, \quad \forall z \in \Omega$

Funzioni derivate non nulli sono funzioni conformi

Def

$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{C}$  si dice conforme se conserva l'ampiezza di angoli nel senso che se

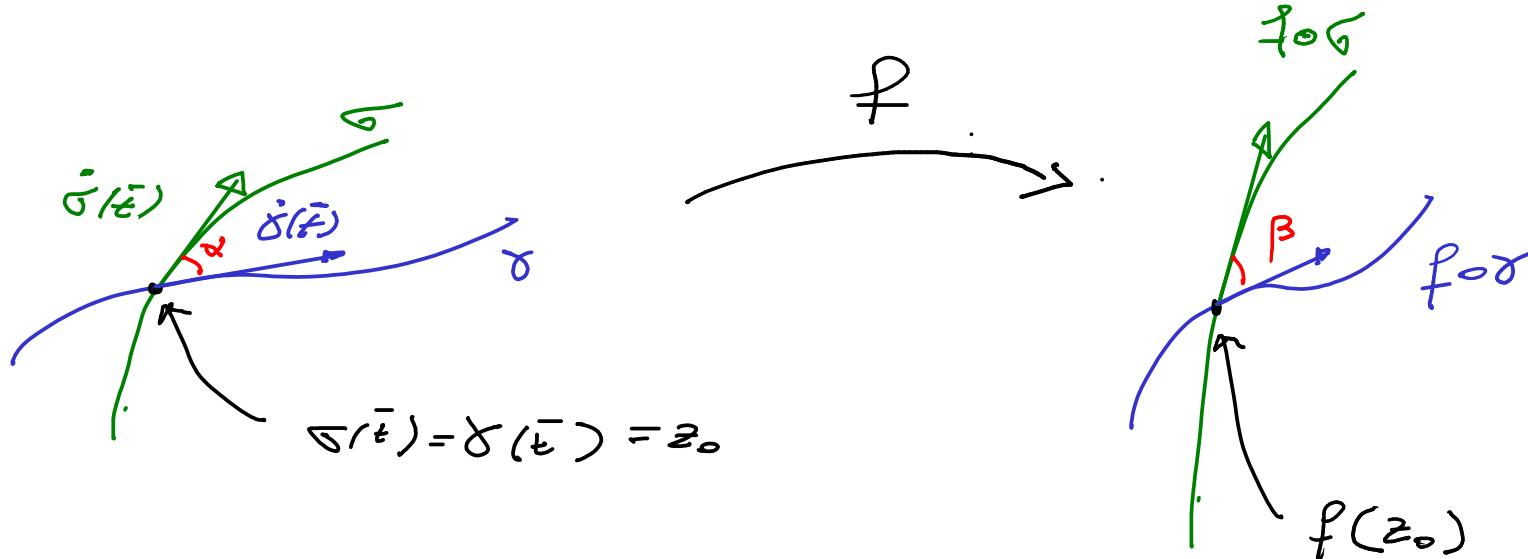
$\overline{\sigma}: (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$  sono due curve regolari  $\sigma = \sigma_1 + i \sigma_2$  e  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + i \bar{\sigma}_2$

che si intersecano in un punto  $\bar{t} \in (\alpha, \beta)$ , cioè  $\sigma(\bar{t}) = \bar{\sigma}(\bar{t}) = z_0 \in \Omega$ , detto  $\alpha$  l'ampiezza dell'angolo da esse individuato

(si tratta dell'angolo formato dai vettori tangenti  $\dot{\sigma}(t)$  e  $\dot{\bar{\sigma}}(t)$ )

e  $\beta$  quella dell'angolo individuato dalle curve  $f \circ \sigma$  e  $f \circ \bar{\sigma}$

allora  $\alpha = \beta$



Nel caso in cui  $f \in H(\Omega)$  e  $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$  abbiamo

$$(f \circ \delta)'(\bar{t}) = f'(\delta(\bar{t})) \cdot \dot{\delta}(\bar{t}) = f'(z_0) \cdot \dot{\delta}(\bar{t})$$

$$(f \circ \sigma)'(\bar{t}) = f'(\sigma(\bar{t})) \cdot \dot{\sigma}(\bar{t}) = f'(z_0) \cdot \dot{\sigma}(\bar{t})$$

Quindi i vettori tangenti alle curve  $f \circ \delta$  e  $f \circ \sigma$  nel punto  $f(z_0) = f(\delta(\bar{t})) = f(\sigma(\bar{t}))$  sono dati dal prodotto dello stesso numero complesso non nullo  $f'(z_0)$  per i vettori tangenti alle curve  $\delta$  e  $\sigma$  nel punto  $z_0 = \delta(\bar{t}) = \sigma(\bar{t})$ .

Poiché il prodotto di un numero complesso  $a + bi$  opera su ogni altro numero complesso  $c + di$  moltiplicandolo o comprendendolo  $|b|$  di me fattore uguale a  $|a|$  e ruotandolo  $b$  in senso antiorario.

di un angolo di ampiezza  $\text{Arg}(\alpha)$ , deduciamo che  
l'angolo  $\alpha$  tra  $\gamma(\bar{t})$  e  $\sigma(\bar{t})$  è uguale all'angolo  
 $\beta$  fra  $(f \circ \gamma)'(\bar{t})$  e  $(f \circ \sigma)'(\bar{t})$  dato che questi vettori  
si ottengono dai precedenti moltiplicando per  $f'(z_0)$ .

## FUNZIONI ARMONICHE

Supponiamo che  $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto, sia olomorfa e di classe  $C^2$  su  $\Omega$ .  
 (cioè la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono funzioni di classe  $C^2$  su  $\Omega$ )  
 (notiamo a breve che se  $f$  è olomorfa su  $\Omega$ , non solo è  $C^2$  ma è anche  
 analitica su  $\Omega$  e quindi è di classe  $C^\infty$ )

Dalle relazioni di Cauchy-Riemann otteniamo che  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  e  
 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$  cioè le parti reali e le parti immaginarie sono funzioni  
armoniche (una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , si dice armonica su  $\Omega$  se  $\Delta f = 0$   
 in  $\Omega$ , dove nel caso in cui  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aperto  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ )

Infatti poiché  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  derivando a sinistra i membri delle prime  
 equazioni rispetto a  $x$  e a destra quelle relative alle seconde rispetto a  $y$  ottengono  
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$  ma per il teorema di Schwartz  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

Def Una funzione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa su  $\mathbb{C}$  si dice interna.

Ad esempio  $f(z) = az^m$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

Sia  $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  e considerare le serie di funzioni

(\*)  $\sum_m q_m z^m$ , le funzioni che definiscono tali serie sono  $z \in \mathbb{C} \mapsto q_m z^m \in \mathbb{C}$

(\*) si chiama serie di potenze di coefficienti  $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  (e centro 0)

(Possiamo anche considerare  $\sum_m q_m (z-z_0)^m$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ : in questo caso il centro delle serie non è 0 ma  $z_0$ ; è chiaro che ponendo  $W = z - z_0$  tale serie si riduce ad una di centro 0).

Le nozioni di convergenza puntuale, in modulo, uniforme, totale su un  $A \subseteq \mathbb{C}$  per una serie come (\*) sono completamente analoghe

a quelle viste per le serie di funzioni reali di variabile reale

Per cui dire che (\*) converge in  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  significa

che la serie numerica in  $\sum_{m=0}^{+\infty} q_m \bar{z}^m$  converge cioè la somma delle somme parziali  $s_m(\bar{z}) = \sum_{k=0}^m q_k \bar{z}^k$  converge ad un numero  $s(\bar{z}) \in \mathbb{C}$

E (\*) converge per ogni  $\bar{z} \in A \subseteq \mathbb{C}$  si dice che (\*) converge puntualmente su A e la funzione  $s: A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $s(\bar{z}) = \lim_n s_n(\bar{z})$  si chiama somma

Si dice che (\*) converge in modulo su A se  $\forall \bar{z} \in A$

le cui numerose in  $\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m \bar{z}^m| \left( = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| |\bar{z}|^m \right)$  converge

si dice che (\*) converge uniformemente su A ad  $s: A \rightarrow \mathbb{C}$  se le successione (di funzioni complesse di variabili complesse)

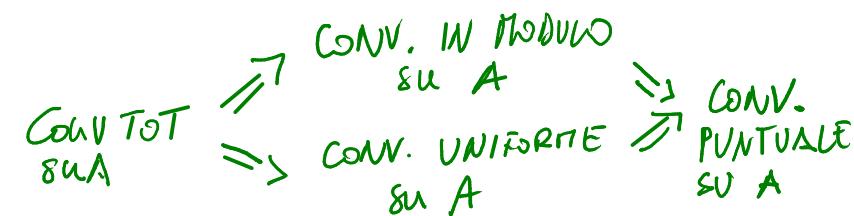
delle somme parziali  $\{s_n\}$  converge uniformemente e cioè se:  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists r \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall n > r : |s_n(z) - s(z)| < \varepsilon, \forall z \in A$

Infine (\*) converge totalmente su A se  $\exists \{c_n\} \subset [0, +\infty)$

tale che 1)  $|a_n \bar{z}^n| \leq c_n \quad \forall z \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2)  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$  converge

Ovviamente anche per le serie di potenze in  $\mathbb{C}$  si ha



d'insieme di convergenza principale di una serie di potenze non è vuoto, in quanto contiene il centro (quunque sia  $z_1$ )

### Teo 1

Se  $z_1 \in \mathbb{C}$  è un punto in cui (\*) converge (cioè  $\sum a_n z_1^n \in \mathbb{C}$ ) allora (\*) converge in modulo in ogni numero complesso  $z$  t.c.  $|z| < |z_1|$

### Dtt.

Sia  $z \in \mathbb{C}$  t.c.  $|z| < |z_1|$ . Proviamo che la serie di moduli della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ , e cioè  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z|^n$ , converge

Poiché  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n$  converge, il suo termine generale tende a 0

perché  $a_n z_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Quindi definitivamente  $|a_n z_1^n| < 1$ .

$$\text{Per cui } \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z_1|^n \frac{|z|^n}{|z_1|^n} <$$

$< \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{z}{z_1} \right|^n$  che converge in quanto serie geometrica di

$$\text{ragione } \left| \frac{z}{z_1} \right| < 1$$



immette su cui (\*) converge  
se converge in  $z_1$

Def

$$\text{Sia } \rho = \sup \{ |z| : z \in \mathbb{C}, (\ast) \text{ converge} \}$$

$\rho$  indica raggio di convergenza di  $(\ast)$  mentre  $D(0, \rho)$  si chiama disc di convergenza.

(Nel caso in cui il centro della serie è  $z_0 \neq 0$ ,  
 $\rho = \sup \{ |z - z_0| : z \in \mathbb{C}, \sum_n q_n (z - z_0)^n \text{ converge} \}$ ,

mentre il disco di convergenza è il disco  $D(z_0, \rho)$  di centro  $z_0$  e raggio  $\rho$ )

Oss 1  $D(0, \rho) \subset B :=$ insieme di convergenza puntuale di  $(\ast)$

infatti per definizione,  $z \in D(0, \rho) \Leftrightarrow |z| < \rho$ . Supponiamo che  $z \notin B$  allora  $(\ast)$  non converge in  $z$

Ogni numero complesso  $\bar{z}$  avrà uno stesso soddisfacente

$|z| < |\bar{z}| < \rho$  (altrimenti per il teorema precedente  $(\ast)$  convergerebbe in  $\bar{z}$ )  
e dunque per come è definito deve essere

$$\rho \leq |z| < \rho !!$$

Oss 2  $B \subset \overline{D(0, \rho)} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho \}$

infatti se  $z \in B$  allora  $|z| \leq \rho$  per definizione di raggio di convergenza

Oss 3

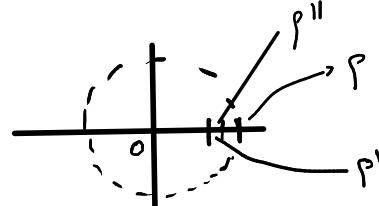
Notendo insieme il teorema sopra e l'osservazione 1 si ha che  $\sum_m a_m z^m$  converge in modulo su  $D(0, \rho)$ .

Convergenza totale (e uniforme sulle srie di potenze)

(\*)  $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$ ; se  $\rho$  è il raggio di conv. , allora le srie (\*) converge totalmente (e quindi uniformemente) in  $\overline{D(0, \rho')}$ ,  $\forall \rho' < \rho$

dimo

Può  $\rho''$  tolere  $\rho' < \rho'' < \rho$



$\bar{z} = \rho''$  è interno al disco di convergenza  
 $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m (\rho'')^m$  converge in modulo

$$|z|^m \leq (\rho')^m < (\rho'')^m, \quad \forall z \in \overline{D(0, \rho')}$$

e quindi  $|a_m z^m| \leq \underbrace{|a_m| (\rho'')^m}_{C_m} \quad \forall z \in \overline{D(0, \rho')}$

$$\text{e } \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| (\rho'')^m$$

converge in quanto  $\rho'' \in D(0, \rho)$   
 (ri ricordi l'osservazione 3)



Tesimi per il calcolo del raggio di convergenza

Si consideri la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$  (\*)

Teorema

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in [0, +\infty]$

Allora  $\rho = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{se } l \in (0, +\infty) \\ +\infty & \text{se } l = 0 \quad (\text{cioè il raggio di convergenza è uguale a } \infty) \\ 0 & \text{se } l = +\infty \quad (\text{ma (*) converge solo nel centro}) \end{cases}$

Teorema 2

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$  allora  $\rho = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{se } l \in (0, +\infty) \\ +\infty & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$

DIM Teorema 1 Senza失ere le generalità delle dimostrazioni possiamo supporre che  $z_0 = 0$

Sia  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  e si consideri la serie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \bar{z}^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |\bar{z}|^n. \quad \text{Applichiamo il criterio del confronto}$$

per studiarne il carattere :  $\frac{|a_{n+1}| |\bar{z}|^{n+1}}{|a_n| |\bar{z}|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |\bar{z}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l |\bar{z}|$

CONVERGE SE

< 1

cioè se  $\ell = 0$  :  $\forall \bar{z} \in \mathbb{C}$  otto che  $0 < |\bar{z}| = 0 < 1$

Se  $\ell \in (0, +\infty)$  per:  $|\bar{z}| < \frac{1}{\ell}$ . Per cui (\*) converge nel

disco di centro 0 e raggio  $\frac{1}{\ell}$ . Dunque  $\frac{1}{\ell} \leq \rho$ .

Supponiamo che sia  $\rho > \frac{1}{\ell}$ ; esiste quindi  $\bar{z}_1 \in \mathbb{C}$  con  $\frac{1}{\ell} < |\bar{z}_1| < \rho$

Poiché  $\bar{z}_1 \in D(0, \rho)$   $\sum_m q_m \bar{z}_1^m$  converge in modulus; allo stesso tempo abbiamo:  $\lim_m \frac{|q_{m+1} \bar{z}_1^{m+1}|}{|q_m \bar{z}_1^m|} = \lim_m \frac{|q_{m+1}|}{|q_m|} |\bar{z}_1| = \ell \cdot |\bar{z}_1| > 1$  quindi

$\sum_n |q_n \bar{z}_1^n|$  non converge!. Dunque non può essere  $\rho > \frac{1}{\ell}$  e quindi  $\rho = \frac{1}{\ell}$ .

Infine se  $\ell = +\infty$ ,  $\ell |\bar{z}| = +\infty$  (nel senso dei limiti) qualunque  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  è ovunque in questo caso la (\*) converge solo nel centro cioè  $\rho = 0$ .

(le stime del termine 2 è sul tutto analogo e basata sul criterio della radice)

OSS

Sui punti del bordo del disco di convergenza la serie può convergere o meno e se converge può non convergere in modulus.

## Teatore di Abel

Si consideri la serie di potenze

$$(*) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ e sia } \rho > 0 \text{ raggio di convergenza}$$

Sia  $\bar{z} \in \partial D(0, \rho)$ .

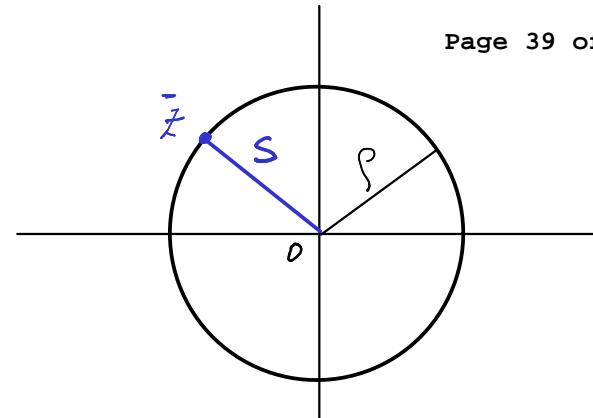
Se  $(*)$  converge in  $\bar{z}$       allora       $(*)$  converge uniformemente nel segmento  
S di estremi 0 e  $\bar{z}$

Nel caso di una serie di potenze in  $\mathbb{R}$  il teorema di Abel diventa:

$$(**) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R}, \text{ se } \rho > 0 \text{ il raggio di convergenza, } (-\rho, \rho) \text{ intervallo di convergenza}$$

Se  $(**)$  converge in  $-\rho$  (risp.  $\rho$ ) ,  $(**)$  converge uif. su  
ogni intervallo del tipo  $[-s, b]$  con  $b < \rho$  (risp.  $[a, s]$  con  $a > -\rho$ )

Se  $(**)$  converge in  $-\rho$  e in  $\rho$ ,  $(**)$  converge uif. in  $[-\rho, \rho]$ .



## Esempi di serie di potenze

- Serie esponenziale :  $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}$  (\*)

$$\rho = +\infty \text{ dato che } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n! \cdot (n+1)} = 0$$

Quindi (\*) converge puntualmente e in modo lento su  $\mathbb{C}$  e converge totalmente su ogni sottinsieme compatto di  $\mathbb{C}$ .

- $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  (è detta serie binomiale)

se  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\binom{m}{k} = \frac{\cancel{m!}}{k! (m-k)!} = \frac{(m-k)! (m-(k-1)) \cdot (m-(k-2)) \cdots (m-1) \cdot m}{k! (m-k)!} = \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{k!}$$

Analogamente se  $\alpha$  non è un numero naturale positivo definisce

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(k-1))}{k!}$$

$$= k!(\kappa+1)$$

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \left| \frac{\cancel{\alpha} \cdot \cancel{(\alpha-1)} \cdots \cancel{(\alpha-(k-1))} \cdot (\alpha-(k+1-1))}{\cancel{\alpha} \cdot \cancel{(\alpha-1)} \cdots \cancel{(\alpha-(k-1))} \cdot \cancel{k!} \cdot (\kappa+1)} \right| = \left| \frac{\alpha-k}{\kappa+1} \right| \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} 1$$

Quindi  $\rho = 1$ .

-  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (\*) Poiché  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$

converge su  $(-1, 1)$  e converge uniformemente su  $[-\alpha, \alpha]$ , con  $0 < \alpha < 1$

I punti sul bordo dell'intervallo di convergenza

in questo caso sono  $-1$  e  $1$

per  $x = -1$   $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  converge

per  $x = 1$   $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ ; quindi (\*) converge puntualmente in  $[-1, 1]$

Per il teorema di Abel la convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo  $[-1, a]$  con  $0 < a < 1$ .

-  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\gamma = 1$ , intervallo di convergenza  $(-1, 1)$

Per  $x = -1$ :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \in \mathbb{R}$ ;

per  $x = 1$ :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$ . L'insieme di convergenza è l'intervallo  $[-1, 1]$ .

In realtà poiché  $\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ ,  $\forall n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$

la convergenza è totale e uniforme su  $[-1, 1]$

Supponiamo che  $\forall t \in (-1, 1)$   $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$ .

Inoltre la convergenza di quest'ultima serie è totale e quindi uniforme su ogni intervallo del tipo  $[-\alpha, \alpha]$  con  $0 \leq \alpha < 1$ . Possiamo quindi applicare il teorema di integrazione termine a termine ottenendo  $\forall x \in (-1, 1)$

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (\square)$$

Poiché nel punto  $x=1$  la serie  $(\square)$  converge, per il

teorema di Abel la convergenza di  $(\square)$  è uniforme in ogni intervallo del tipo  $[-1+\varepsilon, 1]$  con  $\varepsilon > 0$ . Detto che la somma delle somme contiene su

$[-1+\varepsilon, 1]$  (in questo c'è convergenza uniforme e la serie è una serie di funzioni continue)

e quindi anche in 1, ottieniamo che, chiamate  $f$  la somma

$$\lim_{X \rightarrow 1} f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{X \rightarrow 1} \log(1+X) = \log(2)$$

Tenere presente che  $f|_{[-1+\varepsilon, 1]}(x) = \log(1+x)$

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad . \quad \text{Possiamo riscrivere così}$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} \underset{k=m+1}{=} \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{K} \quad \text{cioè} \quad \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots +$$

- Determinare raggio di convergenza e stabilità il carattere degli estremi dell'intervallo di convergenza delle serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(3 + \frac{1}{n})^n}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(3 + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$$

Quindi l'intervallo di convergenza è  $(-3, 3)$ .

Per  $x = 3$  abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(3 + \frac{1}{n})^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{3n})^n}. \quad \text{Poiché} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{3n})^{3n}} / 3 = \frac{1}{e^{1/3}}$$

quindi converge condizionata

Ricordiamo che:  
 $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ ;  $(1 + \frac{1}{n})^{n/a} \rightarrow e$  se  $a \rightarrow +\infty$

Per  $x = -3$  la serie sottostante diventa  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(3 + \frac{1}{n})^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(1 + \frac{1}{3n})^n}$

La successione  $(-1)^n \frac{1}{(1 + \frac{1}{3n})^n}$  per  $n$  pari converge a  $(\frac{1}{e})^3$  quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(3 + \frac{1}{n})^n} \text{ non converge.}$$

Dunque l'insieme di convergenza proprio è  $(-3, 3)$ , la convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo  $[-3 + \varepsilon, 3 - \varepsilon]$ , con  $\varepsilon > 0$ .

$$-\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^m \left(x - \frac{1}{2}\right)^m}{\sqrt{m+3}}, x \in \mathbb{R} ; \quad a_m = \frac{2^m}{\sqrt{m+3}} > 0 ; \quad \text{il centro delle serie è } \frac{\frac{1}{2}}{2}$$

$$\frac{2^{m+1}}{\sqrt{m+4}} / \frac{2^m}{\sqrt{m+3}} = \frac{\sqrt{m+3}}{\sqrt{m+4}} \cdot \frac{2^{m+2}}{2^m} = \sqrt{\frac{m+3}{m+4}} \cdot 2 \xrightarrow{m} 2$$

Ora quindi  $p = \frac{1}{2}$  e l'intervallo di convergenza è  $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (0, 1)$

Per  $x = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+3}} = +\infty$  in quanto  $\frac{1}{\sqrt{n+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

per  $x = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} ; \quad \frac{1}{\sqrt{n+3}} \rightarrow 0 \quad \frac{1}{\sqrt{n+1+3}} < \frac{1}{\sqrt{n+3}}$

e dunque converge per il criterio di Leibniz.

L'insieme di conv. assoluta è  $[0, 1]$ . Si ha convergenza totale e uniforme  
in ogni intervallo chiuso contenuto in  $(0, 1)$ . La convergenza è poi anche  
uniforme (per il teorema di Abel) in ogni intervallo chiuso del tipo  $[0, 1-\varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$

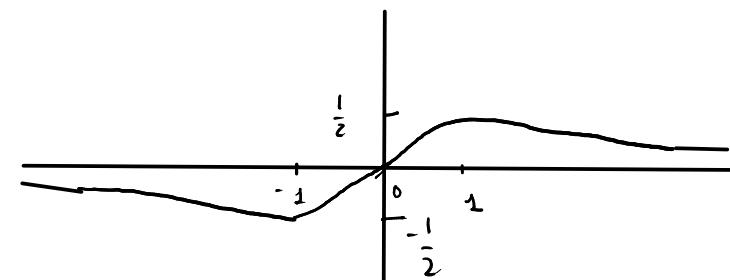
- Dimostrare che la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$  converge totalmente su  $\mathbb{R}$ :

Poiché  $\frac{x}{1+x^2} = y$ , poniamo studiare  $\sum_{n=0}^{+\infty} y^n$  (\*)

$y = \frac{x}{1+x^2}$ ; quindi (\*) converge uniformemente  $(-1, 1)$ . Se da (\*)  
converge totalmente su ogni intervallo  $[-\alpha, \alpha]$  con  $0 < \alpha < 1$ .

Se  $\exists \alpha \in [0, 1)$  t.c.  $-\alpha \leq f(x) \leq \alpha$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  allora la serie originale  
converge totalmente su  $\mathbb{R}$ .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} f(x) = 0$ ,  $f$  è dispari



$$f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \iff 1-x^2 > 0 \iff -1 < x < 1$$

$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \text{ quindi } \forall x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

## SERIE DELLE DERIVATE DI UNA SERIE DI POTENZE

Consideriamo la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$  supponendo che il suo raggio di convergenza sia  $R \neq 0$ . Poiché essa converge totalmente quindi uniformemente su ogni disco chiuso  $D(z_0, \rho)$  con  $0 < \rho < R$  e poiché le funzioni delle successioni che le definisce ( $\text{cioè } \{z \in \mathbb{C} \mapsto a_n(z-z_0)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ) sono continue dal teorema sulle continue delle somme di una serie di funzioni continue.

Ottieniamo che  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$  è continua su  $D(z_0, \rho)$ ,  $0 < \rho < R$

Ora  $\forall z \in D(z_0, \rho)$   $\exists 0 < \rho' < \rho$  tale che  $0 \leq |z-z_0| < \rho' < \rho$  e quindi  $f$  è continua su  $D(z_0, \rho)$ .

Le serie delle derivate di  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$  e cioè  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$  è anch'essa una serie di potenze di centro  $z_0$ .

Occidiamo di stabilire quale sia il raggio di convergenza della serie delle derivate.

Teor

Una qualsiasi serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza come la serie delle derivate

DIM (nel caso in cui  $\exists \lim_n \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \ell \in [0, +\infty]$ ):

$$\text{Infatti } \lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt[M]{|\alpha_M|} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt[M]{|\alpha_M| M} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt[M]{|\alpha_M|} \underbrace{\lim_M \sqrt[M]{M}}_1 = \lim_M \sqrt[n]{|\alpha_n|}$$

Derivabilità della somma di una serie di potenze nel disco di convergenza

Consideriamo la serie di potenze in  $\mathbb{C}$   $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$  (\*)  
Sia  $f$  la sua somma, dunque:

$f : D(z_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $D(z_0, \delta)$  è il disco di convergenza. Dal teorema

della convergenza termine a termine per le serie di funzioni segue che  $f$  è  
derivabile e  $f'$  è la somma della serie delle derivate

In quanto somma di una serie di potenze  $f'$  è continua su  $D(z_0, \delta)$

Iterando questo ragionamento ottieniamo che  $f \in C^\infty(D(z_0, \delta))$  e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2}$$

$$f'''(z) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) a_n (z - z_0)^{n-3}, \quad \dots, \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(k-1)) a_n (z - z_0)^{n-k}$$

Velutando la serie qui sopre in  $z = z_0$  otteniamo

$$f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(z_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2, \dots,$$

$$f^{(k)}(z_0) = \underbrace{k(k-1)(k-2)\cdots 1}_{\text{fattori}} \cdot a_k = k! a_k$$

Riepiloghiamo quanto ottenuto:  $k!$

Se  $f$  è la somma di una serie di potenze avente centro di convergenza  $D(z_0, r)$

necessariamente  $f \in C^\infty(D(z_0, r))$

$$\text{e } a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \text{quindi} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

## Def funzione analitica

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto. Si dice  $z_0 \in \Omega$ . Si dice che  $f$  è analitica in  $z_0$  se  $\exists r > 0$  tale che  $\forall z \in D(z_0, r)$ ,  $f(z)$  è la somma di una serie di potenze di centro  $z_0$ . Poiché i coefficienti  $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  di una serie di potenze sono individuati dai coefficienti che le fanno e le moltiplicano successive sommando nel centro delle relazioni  $z_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$ , abbiamo quindi

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m, \quad \forall z \in D(z_0, r).$$

questa serie viene detta serie di Taylor di  $f$  di centro  $z_0$  (quando  $z_0 = 0$  si chiama serie di MacLaurin)

Si dice che  $f$  è analitica in  $A \subseteq \Omega$ ,  $A$  aperto se  $f$  è analitica in ogni punto di  $A$ .

Definizioni analoghe si danno anche nel caso di funzioni reali di variabili reali  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ricordiamo la formula di Taylor con il resto di Lagrange per una funzione

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0 \in (a, b)$  e supponiamo che  $f$  sia derivabile

$n$  volte in  $x_0$  allora  $\exists$  una funzione  $R_n(x)$  tale che  $\forall x \in (a, b)$ :

$$f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m + R_n(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^m} = 0$$

Se  $f$  è sufficientemente regolare (basta ad esempio che

$f$  sia di classe  $C^{n+1}$  su  $(a, b)$ ) allora

$\forall x \in (a, b) \quad \exists c \in (x_0, x) \quad (c \in (x, x_0), \text{ se } x < x_0)$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}$$

← Resto di Lagrange

È naturale chiedersi se per una funzione di classe  $C^\infty$  su  $(a, b)$  si <sup>Page 51 of 184</sup>

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \text{ in un intorno di } x_0; \text{ cioè è naturale}$$

chiedersi se  $f \in C^\infty(a, b)$  è analitica in  $(a, b)$  ovvero, equivalentemente, se  $f$  è la somma della propria serie di Taylor di centro  $x_0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ .

In generale la risposta è NO:

Cioè non tutte le funzioni di classe  $C^\infty$  sono la somma delle proprie serie di Taylor.

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



$f \in C^\infty(\mathbb{R})$  ma non è la somma delle proprie serie di Taylor

dove  $f(x) = 0 = f(0)$ ,  $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{e}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e quindi di nuovo  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x)$  quindi  $f$   
 è derivabile 2 volte in 0 e

$f''(0) = 0$ . In modo analogo ci convinziamo che

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  è derivabile  $n$  volte in 0 e  $f^{(n)}(0) = 0$

Dunque  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{M=0}^{+\infty} \frac{f^{(M)}(0)}{M!} x^M = \sum_{M=0}^{+\infty} 0 \cdot x^M \equiv 0 \quad \text{ma per } x > 0 \quad f \text{ non è}$$

costante oh costanti valore 0 quindi non è la somma della propria serie di MacLaurin  
 (condizione sufficiente perché  $f \in C^\infty(a,b)$  sia analitica in  $(a,b)$ )

Teor Sia  $f \in C^\infty(a,b)$ . Se esiste  $M > 0$  t.c  $\sup_{x \in (a,b)} |f^{(M)}(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora  $f$  è analitica in  $(a,b)$ . Precisamente qualsiasi  $x_0 \in (a,b)$   
 e  $\forall x \in (a,b)$ ,  $f(x)$  è la somma della propria serie di Taylor di centro  $x_0$

dimo

Dalle formula di Taylor, poiché  $f \in C^\infty(a,b)$ , sappiamo che

$$\forall m \in \mathbb{N} : f(x) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_m(x)$$

E sufficiente quindi dimostrare che  $\forall x \in (a,b) : \lim_{m \rightarrow \infty} R_m(x) = 0$   
dato che in tal caso

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_m \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \lim_m R_m(x) \\ &= \lim_m (S_m(x)) + \lim_m R_m(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + 0 \end{aligned}$$

Poiché poniamo usare le forme di Lagrange per il resto si apprenderà  
che  $\exists c \in (x_0, x)$  tale che  $R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} (x-x_0)^{m+1}$   
 $(c \in (x, x_0) se x < x_0)$

abbiamo:  $|R_m(x)| = |f^{(m+1)}(c)| \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \leq \pi \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow[m]{} 0$

dato che  $\lim_m \frac{a^m}{m!} = 0 \quad \forall a \in [0, +\infty)$

•  $f(n) = e^x \quad D^n e^x = e^x$ . Prendo l'intervallo  $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}, \alpha > 0$

$0 < D^{(n)} e^x < e^\alpha := M$  su  $[-\alpha, \alpha]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Dunque per quanto visto nella lezione precedente  $f(x) = e^x$  è la somma delle proprie serie di MacLaurin per ogni  $x \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in [-\alpha, \alpha] \longrightarrow \text{quindi dato che } \alpha \text{ è stato scelto arbitrariamente le (*) vale per } \mathbb{R}.$$

$$\bullet e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \sin x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \right) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{x^k}{k!} - (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Analogamente

$$\bullet \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Sostituendo nella (\*)  $x$  con  $-x^2$ , otteniamo:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} . \quad \text{Poiché le serie converge totalmente e}$$

quindi uniformemente su ogni intervallo chiuso e limitato (dato che le stesse cose è vero per le serie esponenziale), applicando il teorema di integrazione termine a termine ottieniamo

$$\begin{aligned} \downarrow \\ \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt \end{aligned}$$

Funzione degli errori

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[ \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^x$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

- $f(x) = \sin x$

$$D^{(k)} \sin x = \begin{cases} \pm \cos x & \text{se } k \text{ dispari} \\ \pm \sin x & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$|D^{(k)} \sin x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- $f(x) = \cos x$

$$D^{(k)} \cos x = \begin{cases} \pm \sin x, & k \text{ dispari} \\ \pm \cos x, & k \text{ pari} \end{cases} \quad \text{quindi anche per le derivate di } f(x) = \cos x$$

si ha  $|D^{(k)} \cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Suggerite estremare le funzioni sono  
la somma delle potenze serie di MacLaurin per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Tali serie sono:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left( = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left( = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots \right)$$

$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k$ ,  $x \in (-1, 1)$ . Poiché questa serie converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in  $(-1, 1)$ , usando il teorema di integrazione termine a termine ottieniamo:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

" "

$$\left[ \log(1+t) \right]_0^x = \log(1+x)$$

Da cui

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad \forall x \in (-1, 1) \quad (*)$$

(e sappiamo anche che  $\log(2) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h}$ , cioè la (\*) vale anche per  $x=1$ )

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Sia  $x \in (-1, 1)$ , integrando termine a termine otteniamo

$$\int_0^n \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^n \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^n (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (*)$$

$\arctg x$

Oss per  $x=1$ ,  $(*)$  diviene

per  $x=-1$ ,  $(*)$  diviene

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$  che converge per il c.d. Leibniz

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{-1}{2k+1} \quad //$$

Quindi per il teorema di Abel la serie  $(*)$  converge uniformemente su  $[-1, 1]$

unque, per continuità,  $\arctg x =$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \forall x \in [-1, 1] \text{ ol' an'}$$

$$\pi/4 = \arctg 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Per  $\alpha = -\frac{1}{2}$  e sostituendo  $x$  con  $-x^2$  (così possibile dato che  $x \in (-1, 1)$  anche  $-x^2 \in (-1, 1)$ )

otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 + (-x^2))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k}, \quad x \in (-1, 1)$$

e quindi integrando e applicando il teorema di integrazione termine a termine

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

Esercizi:

- Riconoscere, senza calcolo approssimato le derivate successive, le derivate parziali in 0

della funzione  $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$

Poiché  $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \quad \forall x \in (-1, 1)$ , sostituendo  $x$  con  $-x^3$  ottieniamo

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{3k}, \quad \forall x \in (-1, 1), \quad \text{quindi moltiplicando entro i numeri}$$

per  $x$  ottieniamo  $\frac{x}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{3k+1}$  Quindi  $\boxed{1} = D^{(7)}\left(\frac{x}{1+x^3}\right)|_{x=0} / 7!$   
 da cui  $D^{(7)}\left(\frac{x}{1+x^3}\right)|_{x=0} = 7!$

- Calcolare per serie l'integrale

$$\int_0^1 \sin(t^2) dt$$

$$\sin(t^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 \sin(t^2) dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 t^{4k+2} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[ \frac{1}{4k+3} t^{4k+3} \right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{4k+3}$$

Def

Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Si dice supporto di  $\gamma$  l'immagine di  $\gamma$   
cioè  $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$ .

Si dice che  $\gamma$  è una curva regolare a tratti (di classe  $C^1$ ),  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\exists \{t_i\}_{i \in \{0, 1, \dots, m\}}$ , numeri tali da

$t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$  ( $\{t_i\}_{i \in \{0, \dots, m\}}$  si dice suddivisione  
dell'intervallo  $[a, b]$ ) e  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  è di classe  $C^k$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$

e  $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_{i-1}, t_i)$ .

Derivata delle curve  $\gamma$  in  $t$ , anche detta  
vettore velocità di  $\gamma$  in  $t$ . È per definizione  
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\gamma(t+h) - \gamma(t))}{h}$   
ed è uguale a  $\dot{\gamma}_1(t) + i \dot{\gamma}_2(t)$   
se  $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i \gamma_2(t)$

Poiché stiamo includendo gli estremi  
 $t_{i-1}, t_i$  si intende che esistono  
le derivate dx e sx, rispettivamente,  
int  $t_{i-1}$  e  $t_i$  e le curve derivate

che  $\dot{\gamma}^-(t_i) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\gamma(t_i + h) - \gamma(t_i)}{h} \neq \dot{\gamma}^+(t_{i-1})$  oppure che  $\dot{\gamma}(t_i) = 0$ .

Integrale di una curva  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ . Supponiamo che  $\gamma$  sia continua, cioè  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono continue.

Def

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \int_a^b \gamma_1(t) dt + i \int_a^b \gamma_2(t) dt$$

Prop

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt, \quad \forall \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua}$$

Dim:

Ricordiamo le forme trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso:

$z = a+ib$ ; se  $z \neq 0$   $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , dove  $r=|z|$  e  $\theta$  è l'angolo principale di  $z$   
poiché  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , possiamo anche scrivere  $z = r e^{i\theta}$  ← FORMA ESPONENZIALE DI  $z$

Sarà visto  $\int_a^b \gamma(t) dt$  in forma esponenziale:  $\int_a^b \gamma(t) dt = \left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| e^{i\theta}$ .

Quindi:

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| = e^{-i\theta} \int_a^b \gamma(t) dt = \operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} \int_a^b \gamma(t) dt \right)$$

dato che  $\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \in \mathbb{R}$ . Ora  $\operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} \int_a^b \gamma(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} \gamma(t) \right) dt$

e dato che  $\forall z \in \mathbb{C} \operatorname{Re} z \leq |Re z| \leq |z|$ , si ha  $\int_a^b \operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} \gamma(t) \right) dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta} \gamma(t)| dt$

$$= \int_a^b |e^{-i\theta}| \int_a^b |\gamma(t)| dt \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$$

## Integrale di una funzione complessa lungo una curva

Sia  $f: \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  continua e  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $\gamma$  regolare a tratti di classe  $C^1$

Def

si definisce integrale di  $f$  su  $\gamma$  (o "lungo  $\gamma$ ") e si indica con

l'integrale delle curve in  $\mathbb{C}$  date da  $t \in [a, b] \mapsto f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$ , cioè

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

posto  $g(t) = f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$  e

$$f(z) = u(z) + i v(z), \text{ risulta}$$

Poiché  $\gamma$  è regolare a tratti esiste una suddivisione  $\{t_k\}_{k \in \{1, \dots, m\}}$  tale che le curve  $t \in [t_{k-1}, t_k] \mapsto f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$

sono continue,  $\forall k \in \{1, \dots, m\}$  e quindi possiamo definire

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

$$g(t) = (u(\gamma(t)) + i v(\gamma(t))) \cdot (\dot{\gamma}_1(t) + i \dot{\gamma}_2(t)) =$$

$$= u(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) - v(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t) + i (v(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) + u(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t)) \quad \text{e quindi}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b (u(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) - v(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t)) dt + i \int_a^b (v(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) + u(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t)) dt$$

Se considerano le seguenti due forme differenziali su  $\Omega$

$$w_1(x,y) = u(x,y) dx - v(x,y) dy \quad e \quad w_2(x,y) = \sigma(x,y) dx + \alpha(x,y) dy$$

Allora quindi  $\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma w_1 + i \int_\gamma w_2$

Prop

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continua e regolare a tratti

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq M \cdot L(\gamma)$$

Se  $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$  è regolare e tratti obliqui  
la lunghezza di  $\gamma$  è uguale a

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

$$M := \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))|$$

dim

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt = \\ &= \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt \leq M \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &= M \cdot \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = M \cdot L(\gamma) \end{aligned}$$

FORZE DIFFERENZIALI : vedere § 38-39-40 del Fusco-Marcellini-Sbordone

(Non studiare per esame dimostrazione che una forza differenziabile di dom.  $C^1$  su  $\mathbb{R}$ , chiusa, con  $\mathbb{S}^2$  rettangolo aperto è esatta; § 40)

Sia  $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  diciamo che  $\Omega$  è un dominio se è un aperto connesso limitato. Diciamo che  $\Omega$  è regolare se il suo bordo  $\partial\Omega$  è l'unione di un insieme finito di supporti di curve regolari.

A verso positivo di  $\partial\Omega$ , da intendersi con  $\partial^+\Omega$  è quello così definito: qualunque sia  $p \in \partial\Omega$  punto in cui  $\partial\Omega$  è regolare, si consideri

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  curva regolare tale che

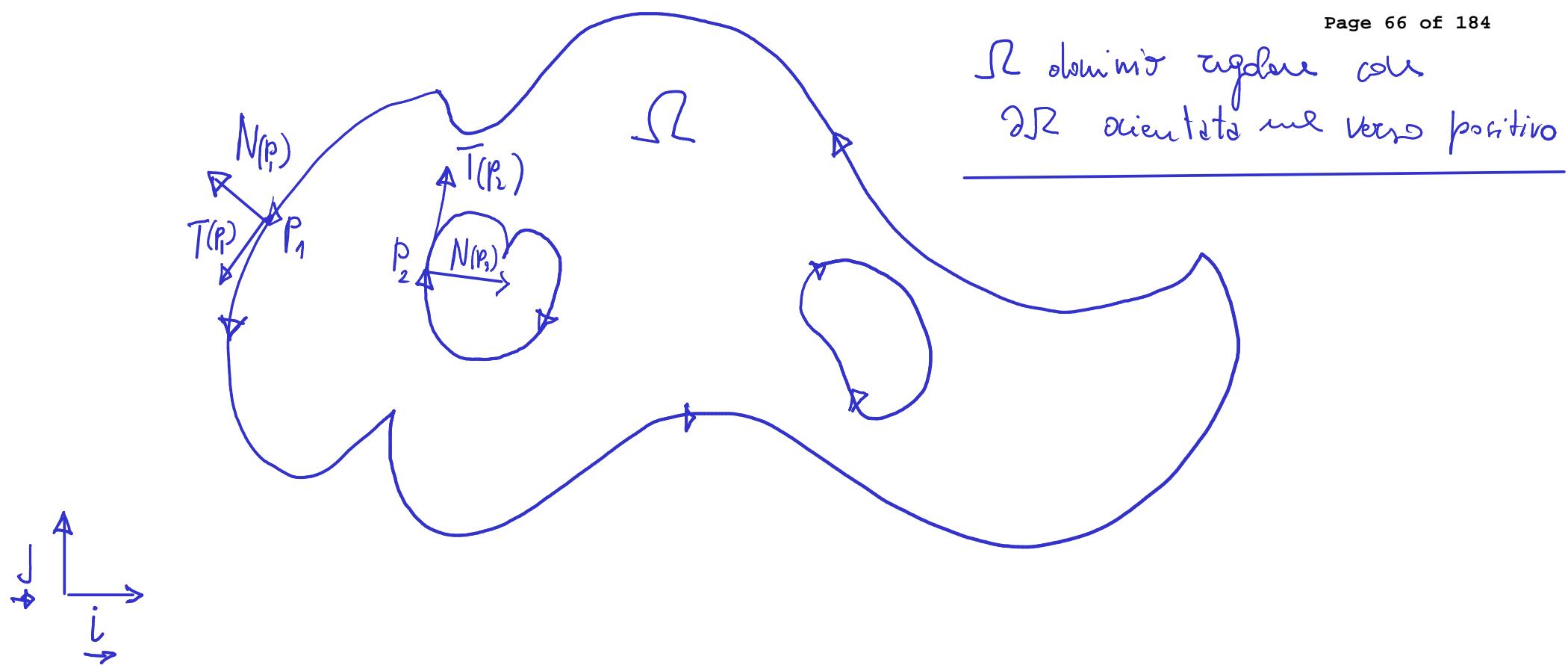
$$\gamma([a, b]) \subset \partial\Omega \text{ e } p \in \gamma((a, b)) \quad (\text{quindi esiste } \bar{t} \in (a, b) \text{ tale che } p = \gamma(\bar{t}));$$

si è  $N(p)$  il versore normale a  $\partial\Omega$  in  $p$  che punta verso il complementare di  $\Omega$ ;

a verso positivo di  $\partial\Omega$  è quello per cui  $\gamma$  è orientata in modo che

$$\text{punto } T(p) = \frac{\dot{\gamma}(\bar{t})}{|\dot{\gamma}(\bar{t})|} \quad \sim (\text{il versore tangente in } p \text{ a } \gamma)$$

le coppie  $(N(p), T(p))$  sia CONGRUENTI a  $(\overset{\rightarrow}{i}, \overset{\rightarrow}{j})$ , dove  $\overset{\rightarrow}{i} \circ \overset{\rightarrow}{j}$  sono i versori che definiscono rispettivamente l'one dei moli e quello degli inneguagli



Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto. Dico in avanti

con il simbolo  $H(\Omega)$  intendere l'insieme delle funzioni olomorfe su  $\Omega$

$$H(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa} \right\}$$

### Teorema (CAUCHY - COURSAT)

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{C}$  e sia

$f \in H(\Omega)$ ; si consideri  $T \subset \Omega$  | con  $\bar{T} \subset \Omega$  dominio regolare, allora

$$\int_{\partial T^+} f(z) dz = 0$$

(ovviamente poiché  $\int_{\partial T^-} f(z) dz = - \int_{\partial T^+} f(z) dz$ , anche  $\int_{\partial T^-} f(z) dz = 0$ )

Oss<sup>t</sup>

Poniamo di convincersi del fatto che  $\int_{\partial T^+} f(z) dz$  debba essere 0, facendo delle ipotesi in più rispetto a quelle contenute nel teorema: Supponiamo, infatti, che  $f$  sia di classe  $C^1$  su  $\Omega$  e che  $\Omega$  sia semplicemente connesso. Allora

$$\int_{\partial T^-} f(z) dz = \int_{\partial T^+} w_1 + i \int_{\partial T^+} w_2, \text{ dove } w_1 = u dx - v dy \text{ e } w_2 = v dx + u dy$$

Se  $f$  è olomorfa, obblighi relazioni di Cauchy-Riemann, si ha:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \text{ e } u_y(x,y) = -v_x(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega \text{ e quindi}$$

$w_1$  è chiusa (infatti  $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ ) e  $w_2$  è chiusa (infatti  $v_y(x,y) = u_x(x,y)$ )

Se  $\Omega$  è sufficientemente comune,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono esatte oltre che hanno componenti di classe  $C^1$  e sono due forme di differentioli chiuse

e quindi  $\int_{\partial T} \omega_1 = 0$  e  $\int_{\partial T} \omega_2 = 0$  (oltre che  $\partial T$  è il supporto di una curva chiusa)

Oss 2 Il teorema di Cauchy - Goursat può anche essere enunciato considerando invece che  $T$  dominio regolare contenuto in  $\Omega$ , ma qualsiasi curva  $\gamma$  chiusa in  $\Omega$  orientata regolare  $\Rightarrow$  tratti che sia il bordo di un dominio  $\text{con chiusura}$  contenuto in  $\Omega$  cioè se  $f \in H(\Omega)$  e  $\gamma$  è una curva come oltre qui sopra allora  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

Vogliamo ora dimostrare che

$$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow f \text{ è analitica in } \Omega$$

Ovviamente l'implicazione  $\Leftarrow$  è già nota dato che se  $f$  è analitica in  $\Omega$  allora  $\forall z_0 \in \Omega \exists D(z_0, \delta)$  tale che  $\forall z \in D(z_0, \delta) f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$  poiché quindi  $f$  in  $D(z_0, \delta)$  è la somma di una serie di potenze, è di classe  $C^\infty$  in  $D(z_0, \delta)$  (e  $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ ). In particolare  $f$  è olomorfa, cioè olomorfa, in  $D(z_0, \delta)$  e quindi anche nel punto  $z_0$ . Poiché  $z_0$  è stato scelto arbitrariamente,  $f$  è olomorfa su  $\Omega$

## Teorema (Formule di rappresentazione di Cauchy)

$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  omomorfica e nello stesso senso delle curve chiuse regolare a fronte orientate nel verso antiorario che sia il bordo di un dominio regolare  $T \subset \Omega$  allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in T$$

semplice

con  $\bar{T} \subset \Omega$ 

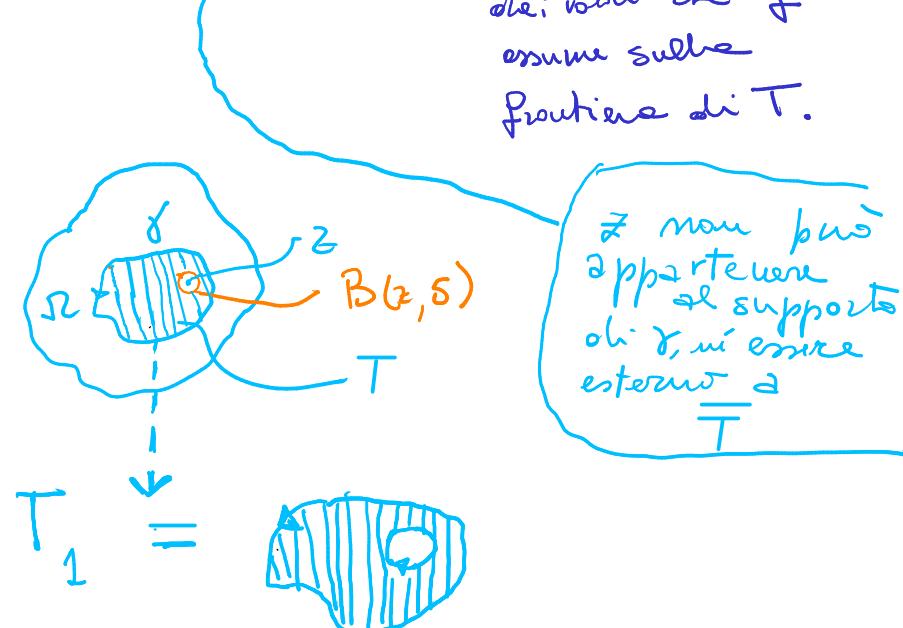
allora

i valori che una funzione omomorfa assume in  $T$  sono determinati dai valori che  $f$  assume sulla frontiera di  $T$ .

dim Consideriamo un disco di centro  $z$  e raggio  $\delta$  sufficientemente piccolo in modo che  $D(z, \delta) \subset T$

Sia  $T_1 = T \setminus D(z, \delta)$ , osserviamo che  $\bar{T}_1 \subset \Omega \setminus D(z, \delta/2)$

da su  $\Omega \setminus D(z, \delta/2)$ , la funzione  $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  è omomorfica



$z$  non può appartenere al supporto di  $\gamma$  né essere esterno a  $\bar{T}$

Dimostrazione per il teorema di Cauchy-Goursat

$$0 = \int_{\partial T_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\rho(z, \delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \Rightarrow$$

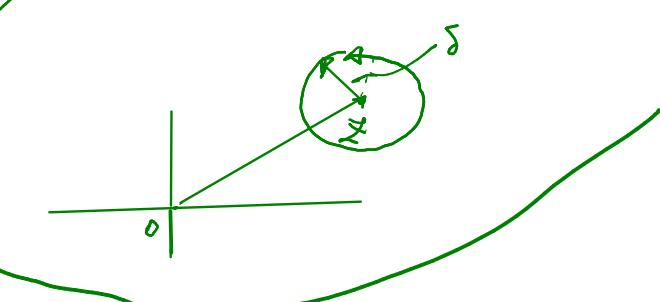
? > orientato in senso orario

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z} dz =$$

non dipende da  $\delta$ !

$$\int_{C(z, \delta)}^+ \frac{f(z)}{z-z} dz =$$

by oriente verso antiorario



l'equazione di tale circonferenza orientata nel verso antiorario è

$$C(t) = z + \delta e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$" z + \delta (\cos t + i \sin t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \delta e^{it})}{z + \delta e^{it} - z} \delta ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) dt$$

quindi è anche uguale al limite del I membro per  $\delta \rightarrow 0$ . Valutiamo questo limite:

$$\begin{aligned} C'(t) &= D(z + \delta(\cos t + i \sin t)) = \\ &= i(\cos t + i \sin t) \\ &= \delta(i \cos t - \sin t) = \delta ie^{it} \end{aligned}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) dt = i 2\pi f(z)$$

Infatti:  $f$  è olomorfa in  $z$  e quindi è continua cioè  $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(z + \delta e^{it}) = f(z)$

Dato che  $w = z + \delta e^{it}$ ,  $|w-z| = |\delta e^{it}| = \delta$  e quindi

$$w = z + \delta e^{it} \rightarrow z, \text{ per } \delta \rightarrow 0.$$

Allora per definizione di funzione continua in un punto

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta' > 0$  t.c.  $\forall 0 < \delta < \delta'$  :  $|f(z + \delta e^{it}) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ ,  $\forall t \in [0, 2\pi]$ . Dunque

$$\left| \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) dt - \int_0^{2\pi} f(z) dt \right| = \left| \int_0^{2\pi} (f(z + \delta e^{it}) - f(z)) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |f(z + \delta e^{it}) - f(z)| dt < \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi} dt = \frac{\varepsilon \cdot 2\pi}{2\pi} = \varepsilon, \forall 0 < \delta < \delta' \quad \blacksquare$$

Possiamo ora dimostrare che  $f \in H(\Omega) \Rightarrow f$  analitica in  $\Omega$

Ter

Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  olomorfa allora  $f$  è analitica

in  $\Omega$  inoltre  $\forall z_0 \in \Omega$  e  $A$  curva chiusa  $\frac{\text{simplificata}}{\text{regolare}} \circ$  tracciata in verso  
esterno t.c. non le frontiere di un dominio  $T$  contenenti  $z_0$  e  $\text{contenuto in } \Omega$   
 $\text{avente chiusura}$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

per  $k=0$  si riottiene

le I formule di rappresentazione  
di Cauchy

ed  $\exists \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  (dipendente da  $z_0$ !) tali che

$$\forall z \in D(z_0, \delta) : f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Poiché  $\Omega$  è aperta e  $z_0 \in \Omega$   $\exists \delta > 0$  tali che  $D(z_0, \delta) \subset \Omega$

Si consideri una qualsiasi curva  $\gamma$  chiusa regolare a tratti di  $\pi/2$  il bordo di un dominio  $T$  che sia contenuto in  $\Omega$  ~~con  $T \subset \Omega$~~  e contenga  $D(z_0, \delta)$

Dalle 1 formule di rappresentazione abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in D(z_0, \delta)$$

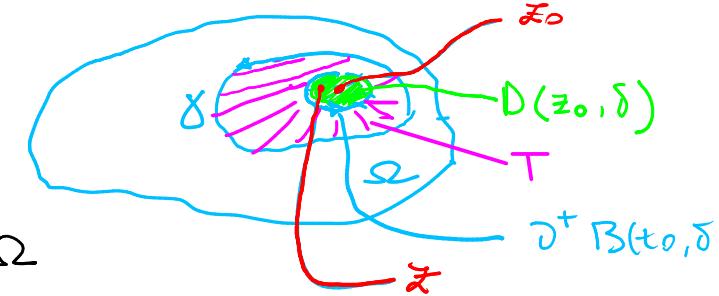
Ora

$$\frac{1}{z - z} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z - z_0}}.$$

$$\forall z \in D(z_0, \delta) : \left| \frac{z - z_0}{z - z_0} \right| < 1, \text{ dato che } |z - z_0| < \delta, \text{ poiché } z \in D(z_0, \delta)$$

mentre  $|z - z_0| \geq \delta$  dato che  $\{z \in \partial T \text{ e } D(z_0, \delta) \subset T\}$

$$\text{Ora vali} \quad \frac{f(z)}{z - z} = \underbrace{\frac{f(z)}{z - z_0}}_{\text{è } \in D(z_0, \delta)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z - z_0}} = \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{z - z_0} \right)^k$$



Quindi:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k d\zeta$$

Possiamo integrare termine a termine poiché le serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k$  converge  
globalemente e quindi uniformemente  $\forall \zeta \in \partial D$  dato che  $\exists 0 < a < 1$  tale che  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq a, \forall \zeta \in \partial D$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} (z - z_0)^k \left( \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right). \quad \text{Dunque}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right)}_{\text{a.k.}} - (z - z_0)^k.$$

In fine poiché in una serie di potenze i coefficienti devono soddisfare le relazioni:  
 $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$  ottieniamo:

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

■

Conseguenza: se funzione  $f$  oltranzie in  $\Omega$  è di classe  $C^\infty$  su  $\Omega$ !

Oss1 Le dimostrazioni viste ci dà anche un'informazione importante sul raggio di convergenza delle serie di Taylor di  $f$  di centro  $z_0 \in \Omega$ . O meglio: ci dà anche, fissato  $z_0 \in \Omega$ , quanto può essere al massimo il raggio  $\delta$  per cui  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$  (\*) ,  $\forall z \in D(z_0, \delta)$ .

Inoltre nelle dimostrazioni è sufficiente che il disco  $D(z_0, \delta)$  sia contenuto in  $\Omega$  e quindi le (\*) è valido  $\forall z \in \Omega$  con  $|z-z_0| < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ . Per cui le (\*) vale  $\forall \delta \leq \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$  *ovviamente queste distanze dipendono da  $z_0$ !* La distanza di un punto  $z_0$  da un insieme  $X$  è per definizione  $d(z_0, X) := \inf_{x \in X} |z_0 - x|$ .

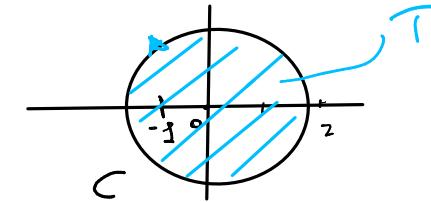
Ad esempio se sappiamo che  $f \in H(C)$  allora  $\forall z_0 \in C$  le (\*) è vera  $\forall z \in \Omega$ .

Oss2 Perché la cava  $\delta$  è arbitraria abbiamo che se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono curve regolari tanto che risulta il braccio di dimensione contenente  $z_0$  allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) \frac{dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z_0) = \int_{\gamma_2} f(z) \frac{dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$

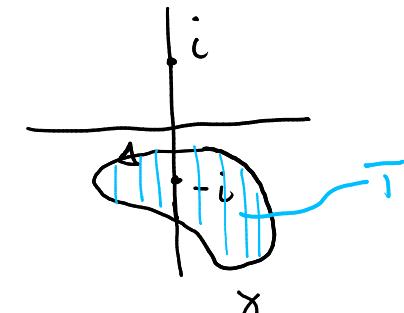
Esercizi Page 75 of 184  
 - calcolare  $\int_C \frac{(z^3-1)^8}{z+1} dz$ , dove  $C$  è la circonferenza di centro 0 e raggio 2  
 orientata nel verso antiorario

Perché  $f(z) = (z^3-1)^8$  è singolare su  $C$  e  $-1$  è  
 un punto interno al disco  $D(0,2)$  di cui  $C$  è il bordo



abbidiamo per le formule di Cauchy:  $\int_C \frac{(z^3-1)^8}{z+1} dz = \int_C \frac{(z^3-1)^8}{z - (-1)} dz = f(-1) 2\pi i = (-2)^8 \cdot 2\pi i = 256\pi i$

- calcolare  $\int_{\gamma} \frac{(z-i)^4}{(z+i)^6} dz$  (II) dove  $\gamma$  è la curva qui  
 disegnata



$$(\square) = \int_{\gamma} \frac{(z-i)^4}{(z - (-i))^6} dz$$

$f(z) = (z-i)^4$ ,  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , è intre . Per le II formule di rappresentazione  
 di Cauchy si ha

$$0 = f^{(5)}(-i) \cdot \frac{2\pi i}{5!} = \int_C \frac{(z-i)^4}{(z+i)^6} dz$$

$$\int_{\gamma} \frac{(z-i)^4}{(z+i)^5} = f^{(4)}(-i) \frac{2\pi i}{4!} = \frac{4!}{4!} 2\pi i = 2\pi i,$$

$\gamma$  come nell'esercizio precedente

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)^2(z-i)^2} dz, \text{ dove } \gamma \text{ è la circonferenza di centro } -2i \text{ e raggio } 2 \text{ orientata in verso antiorario.}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$$

$f: (\mathbb{C} \setminus \{i\}) \rightarrow \mathbb{C}$ , è olomorfa

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} dz = f'(-i) \frac{2\pi i}{1!} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f'(z) = \frac{-2(z-i)}{(z-i)^4} = -\frac{2}{(z-i)^3}$$

$$f'(-i) = -\frac{2}{(-2i)^3} = \frac{-2}{-8(i)} = -\frac{1}{4i}$$

Def  $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$  si dice zero per f se  $f(z_0) = 0$

Def Sia  $f \in H(\Omega)$ ,  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{C}$ ;  $z_0 \in \Omega$  si dice zero oh ordine m per f se esiste  $\exists \delta > 0$  e  $g \in H(D(z_0, \delta))$  t.c.  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ ,  $\forall z \in D(z_0, \delta)$  e  $g(z_0) \neq 0$

Teo Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto e  $f \in H(\Omega)$

$z_0 \in \Omega$  zero oh ordine m per f  $\Leftrightarrow f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  
 $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ .

dim  $\Rightarrow$ : Sia  $g \in H(D(z_0, \delta))$  tale che

$$\forall z \in D(z_0, \delta); f(z) = (z - z_0)^m g(z); \quad g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}$$

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k+m}$$

$$= \sum_{h=m}^{+\infty} a_{h-m} (z - z_0)^h \Rightarrow f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k = 0, \dots, m-1$$

$$\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = a_0 = g(z_0) \neq 0$$

dim <= : Poiché  $f \in H(\Omega)$ ,  $f$  è analitica in  $\Omega$  e quindi anche in  $z_0$ . Di Page 78 of 184

$\exists \delta > 0$  tale che  $\forall z \in D(z_0, \delta)$  si ha:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k = (z-z_0)^m \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^{k-m} \stackrel{k-m=h}{=}$$

$$= (z-z_0)^m \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{f^{(m+h)}(z_0)}{(m+h)!} (z-z_0)^h$$

sia  $f$  la somma di queste serie di potenze

$f$  è misurabilmente definito in  $D(z_0, \delta)$  perché le serie che lo definiscono deve convergere su  $D(z_0, \delta)$ . In quanto somma di una serie di potenze  $f$  è olomorfa

e risulta  $f(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$  è il primo coefficiente della serie

Def

$\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $\Omega$  aperto,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$  è uno zero isolato per  $f$  se

$f(z_0) = 0$  e  $\exists \delta > 0$  tale che  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D'(z_0, \delta)$

Tes 2

$$\Omega \subset \mathbb{C} \text{ aperto}, \quad f \in H(\Omega)$$

$z_0 \in \Omega$  è uno zero isolato per  $f \Leftrightarrow z_0$  è uno zero di ordine finito

Dimo  $\Rightarrow$ : per assurdo suppongo che sia uno zero di ordine infinito cioè

$f^{(k)}(z_0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ . Ma  $f$  è olomorfa in  $z_0$ , quindi è analitica intorno a  $z_0$

$\exists \delta > 0$  tale che  $\forall z \in D(z_0, \delta)$  si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = 0 !$$

cioè  $f$  è nulla su  $D(z_0, \delta)$  in contraddizione con il fatto che  $z_0$  è uno zero isolato

$\Leftarrow$ : se  $z_0$  non è isolato allora  $\exists \{z_n\} \subset \Omega$  t.c.  $z_n \rightarrow z_0$  e  $f(z_n) = 0, z_n \neq z_0 \forall n \in \mathbb{N}$

Per ipotesi sappiamo che  $\exists m \in \mathbb{N}, \exists \delta > 0$  ed  $\exists g \in H(D(z_0, \delta))$  tali che

$$g(z_0) \neq 0 \quad \& \quad f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad \forall z \in D(z_0, \delta)$$

$g$  è continua in  $z_0$ , quindi poiché  $z_n \rightarrow z_0$ ,  $g(z_n) \rightarrow g(z_0)$

Ma  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^m g(z_n)$ . Poiché  $z_n \neq z_0$ , allora  $g(z_n) = 0$   
dunque  $g(z_0) = \lim_n g(z_n) = 0 !$   $\blacksquare$

## Teo (Principio di identità per le funzioni olomorfe)

Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , aperto CONNESSO ed  $f, g \in H(\Omega)$

Se l'insieme dei punti su cui  $f = g$  sono uguali ha almeno un punto di accumulazione

$$\text{in } \Omega \text{ allora } f(z) = g(z), \forall z \in \Omega$$

Oss1 dice che l'insieme dei punti su cui  $f = g$  coincide ha almeno un punto di accumulazione in  $\Omega$  equivale a dire che

$\exists \{z_n\} \subset \Omega$  tale che  $\forall n \in \mathbb{N}: f(z_n) = g(z_n)$  ed  $\exists z_0 \in \Omega$  tale che  $\begin{matrix} z_n \rightarrow z_0 \\ z_n \neq z_0, \forall n \end{matrix}$ .  
 $z_0$  è un punto di accumulazione per l'insieme  $A = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$

Oss2 il teorema è equivalente a :

(□) se  $h \in H(\Omega)$  e l'insieme degli zeri  $Z_h$  di  $h$  ha almeno un punto di accumulazione allora  $h(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$

Infatti l'enunciato (□) è congruente del teorema come subito si vede prendendo  $h = f$  e  $g = 0$ . Viceversa se vale (□) allora il teorema è anche vero come si vede subito prendendo  $h = f - g$ .

Dimostriamo quindi il teorema, dimostrandolo (□) :

dim: sia  $z_0$  punto di accumulazione di  $Z_h$  e

sia  $Z_h^* := \{ z \in Z_h : z \text{ ha molteplicità infinita} \} \subset Z_h \subset \mathbb{S}$

Osserviamo che  $Z_h^* \neq \emptyset$  in quanto  $z_0 \in Z_h$

Infatti poiché  $z_0$  è p.p. di accumulazione per  $Z_h$ ,  $\exists \{t_m\} \subset Z_h$  tale che  $t_m \rightarrow z_0$ ,  $t_m \neq z_0$ ; poiché  $f$  è continua  $0 = f(t_m) \xrightarrow{m} f(z_0)$  e dunque  $z_0$  è uno zero non isolato per  $f$  (quindi  $z_0$  ha molteplicità infinita)

Se dimostriamo che  $Z_h^* = \mathbb{S}$ , il teorema è dimostrato.

Supponiamo allora per assurdo che  $Z_h^* \neq \mathbb{S}$ . avremo  $\exists z_1 \in \mathbb{S} - Z_h^*$

Poiché  $\mathbb{S}$  è connesso, esiste una curva continua  $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{S}$ , tale che  $\gamma(0) = z_0$  e  $\gamma(1) = z_1$ . sia  $A = \{ t \in [0,1] : \gamma(t) \in Z_h^* \} \subset [0,1]$

dovunque  $A \neq \emptyset$  dato che  $0 \in A$  (dato che  $\gamma(0) = z_0 \in Z_h^*$ )

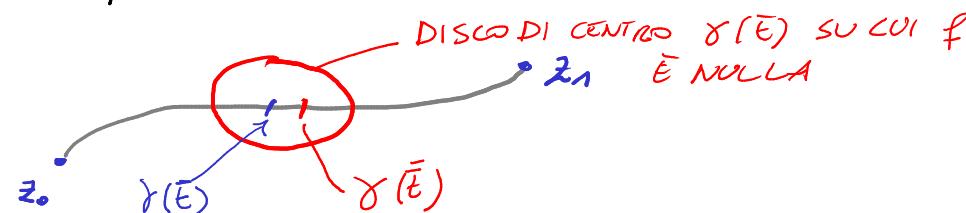
Sia  $\bar{t} = \sup A$  e supponiamo che  $\bar{t} < 1$ .

Per definizione di estremo superiore di un insieme  $\exists \{t_m\} \subset A$  t.c.  $t_m \rightarrow \bar{t}$

Poiché  $\gamma$  è continuo,  $f \circ \gamma$  è continua e quindi  $0 = f(\gamma(t_m)) \xrightarrow{m} f(\gamma(\bar{t}))$

Dunque  $\gamma(\bar{t})$  è uno zero non isolato per  $f$ , cioè  $\gamma(\bar{t}) \in Z_h^*$ .

Ma allora poiché  $f$  è studiata esiste un disco di centro  $\gamma(\bar{t})$  in cui  $f$  è nulla e quindi  $\exists \bar{t} > \bar{t}$  tale che  $f(\gamma(\bar{t})) = 0$  e  $\gamma(\bar{t})$  non è isolato



Questo è assurdo poiché  $\bar{t} = \sup A$ . Dunque  $\bar{t} = 1$  e quindi anche

$\gamma(1) = z_1$  è uno zero non isolato di  $f$  (dato che  $\exists \{t_m\} \subset A$ ,  $t_m \rightarrow 1$

$0 = f(\gamma(t_m)) \rightarrow f(\gamma(1)) = z_1$ ), cioè  $z_1 \in Z_h^* !!$

## Funzione esponenziale in $\mathbb{C}$

Consideriamo la serie di potenze in  $\mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} ; \quad \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{k!}} = 0 \Rightarrow r = +\infty$$

Chiamiamo  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $e^z := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ . Considero la funzione  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = e^z$

In quanto somma di una serie di potenze tale funzione è analitica quindi olomorfa su  $\mathbb{C}$ . Si può dimostrare che  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ :  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ .

Se  $\operatorname{Im} z = 0$ , cioè per  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \rightarrow \text{exp in campo reale!}$$

Quindi  $f(x) = e^x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tale funzione è l'unica estensione OLOMORFA SU  $\mathbb{C}$  della funzione esponenziale in campo reale. Infatti se

Supponiamo che esiste  $g \neq f$  t.c.  $g \in H(\mathbb{C})$  e  $g|_{\mathbb{R}} = f|_{\mathbb{R}} = \exp$

Poiché  $g$  e  $f$  coincidono su  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  ed  $\mathbb{R}$  ha punti di accumulazione, per il principio identità delle funzioni olomorfe  $f(z) = g(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

Analogamente definiamo le funzioni  $z \in \mathbb{C} \mapsto \sin z$ ,  $z \in \mathbb{C} \mapsto \cos z$  estensione olomorfe delle analoghe funzioni in campo reale:

$$\sin z := \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{se } z = x \in \mathbb{R} \text{ abbiamo} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{se } z = x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

Se  $\theta \in \mathbb{R}$  e consideriamo  $z = i\theta$ , abbiamo:

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} i^k \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta$$

dato che  $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1,$   
 $i^7 = -i, i^8 = 1, \dots$  e così via

Abbiamo quindi dimostrato che

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

E quindi se  $z = x+iy$ ,  $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

Sia  $z \in \mathbb{C}$ . Consideriamo il  $e^{-iz}$

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} i^k \frac{z^k}{k!} ;$$

$$e^{-iz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k i^k \frac{z^k}{k!}$$

Da cui segue che

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

e

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Dimostriamo ora che  $\forall z \in \mathbb{C}$ :

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\forall z \in \mathbb{R} : \text{Sappiamo che } \sin^2 z + \cos^2 z = 1 ,$$

le funzioni  $g = z \in \mathbb{C} \mapsto \sin^2 z + \cos^2 z$  e  $f = z \in \mathbb{C} \mapsto 1$  sono olomorfe su  $\mathbb{C}$

Poiché  $g|_{\mathbb{R}} = f|_{\mathbb{R}}$  e  $\mathbb{R}$  ha punti di accumulazione,  $f = g$  su  $\mathbb{C}$

Dimostriamo che:

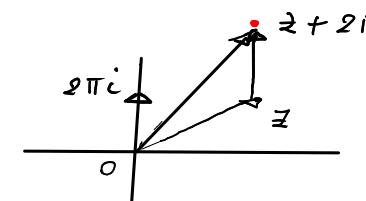
1)  $\forall z \in \mathbb{C} : e^z \neq 0$ . Infatti se  $z = x+iy$ ,  $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$  quindi

$$|e^z| = |e^x (\cos y + i \sin y)| = |e^x| |\cos y + i \sin y| = e^x \cdot 1 \neq 0$$

(abbiamo così anche visto che  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ ; quindi  $z \mapsto e^z$  non è una funzione limitata dato che per  $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$  si ha che  $|e^z| \rightarrow +\infty$ )

2)  $f(z) = e^z$  è periodica di periodo  $2\pi i$ ; infatti  $e^z = e^{z+2\pi i}$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  dato che

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z (1 + 0i) = e^z \cdot 1$$



3)  $D e^z = e^z$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ; infatti poiché

la serie delle derivate della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{z^h}{h!} = e^z, \text{ applicando il teorema di}$$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$  si dice che

derivazione termine a termine ottengono quindi  $D e^z = e^z$ .

$$\begin{aligned} 4) D \cos z &= D \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{1}{2} (i e^{iz} - i e^{-iz}) = \frac{i}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) = \\ &= - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = - \sin z, \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$5) \text{ Analogamente, } D \sin z = \cos z, \forall z \in \mathbb{C}$$

6) le funzioni  $\sin z$  e  $\cos z$  non sono limitate in  $\mathbb{C}$  infatti  
per  $z = it$ ,  $t \in \mathbb{R}$

$$\cos(it) = \frac{e^{i(it)} + e^{-i(it)}}{2} = \frac{e^{-t} + e^t}{2} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{(e^{-t} + e^t)}{2} = +\infty$$

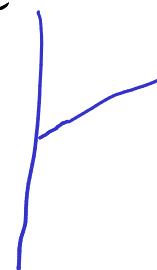
$$\sin(it) = \frac{e^{i(it)} - e^{-i(it)}}{2i} = \frac{e^{-t} - e^t}{2i} = \frac{e^t - e^{-t}}{2i}$$

$$e \left| \frac{e^t - e^{-t}}{2i} \right| = \left| \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right| \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow \pm\infty$$

Funzioni iperboliche in  $\mathbb{C}$

Def

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$


Sono definite in  $\mathbb{C}$ . Sono paritive e

sono definite come estensioni analitiche in  $\mathbb{C}$   
delle analoghe funzioni complesse

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Sono le uniche estensioni analitiche possibili!

$$\Delta \sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

$$\Delta \cosh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$$

$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1 \quad \text{perché se } z=x \in \mathbb{R}: (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

## LOGARITMI DI UN NUMERO COMPLESSO

Pensiamo  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Quali sono i numeri  $z \in \mathbb{C}$  t.c.  $e^z = w$ ? Scriviamo  $w$  in forma esponenziale  $w = |w| e^{i\arg w}$ ; Argomento principale di  $w$ : è l'argomento che appartiene all'intervolo  $[-\pi, \pi]$

Si dà  $z = x + iy$ , dove deve essere:

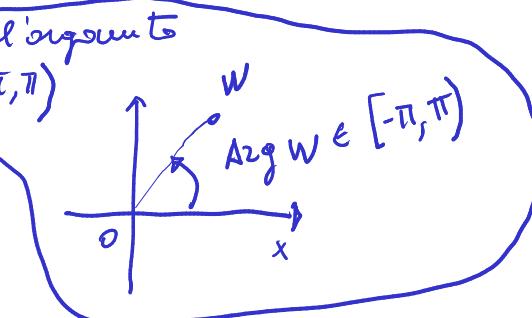
$$e^z = e^x e^{iy} = |w| e^{i\arg w} \quad \text{quindi}$$

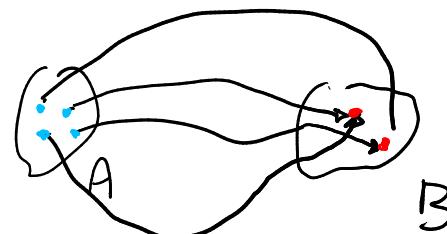
dove ovvero  $e^x = |w|$ , cioè  $x = \log |w|$  e  $y = \arg w + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Quindi  $z = \log |w| + i(\arg w + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

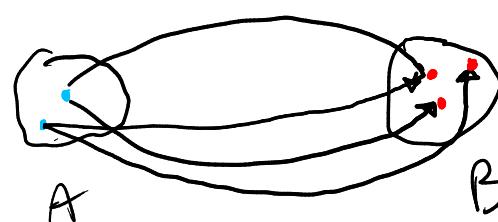
L'insieme di numeri complessi  $\left\{ \log |w| + i(\arg w + 2k\pi) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$  prende il nome di "logaritmo di  $w$ " e si indica col simbolo  $\log w$ .

Ogni elemento di tale insieme è soluzione dell'equazione nell'inconosciuto  $z$ ,  $e^z = w$ .



$A \xrightarrow{f} B$ 


funzione (univoca)

 $A \xrightarrow{f} B$ 


funzione plurivoca

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \sqrt[n]{z}$

è plurivoca :

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \left( \frac{\operatorname{Arg} z}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k=0, \dots, n-1$

ad ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  vengono associati  $n$  numeri complessi

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \operatorname{Log} z = \log |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{è plurivoca}$

ad ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  viene associato un insieme numerabile di numeri complessi

Selezione o determinazione del logaritmo

Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $[\alpha - \pi, \alpha + \pi)$

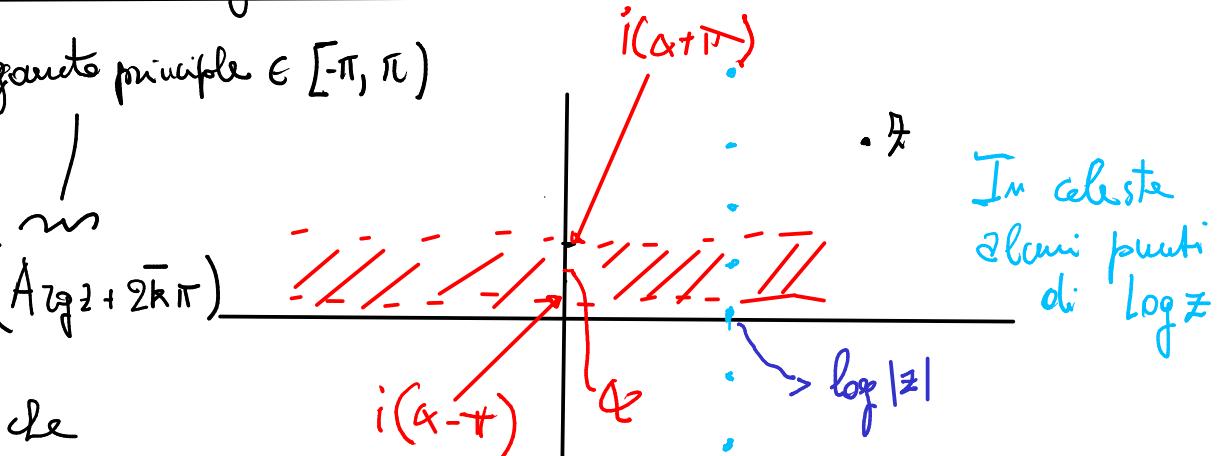
Argomento principale  $\in [-\pi, \pi)$

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \text{Log}_\alpha(z) := \log|z| + i(\text{Arg} z + 2k\pi)$$

con  $k \in \mathbb{Z}$  tale che

$$\text{che } \text{Arg} z + 2k\pi \in [\alpha - \pi, \alpha + \pi)$$

Osservo che  $k$  dipende da  $\alpha$  e  $\text{Arg} z$  ma è univocamente determinato



In celeste  
alcuni punti  
di  $\text{Log} z$

Def Si chiama determinazione principale del logaritmo quella che si ottiene per  $\alpha = 0$ :  $z \mapsto \text{Log}_0 z = \log|z| + i\text{Arg} z$

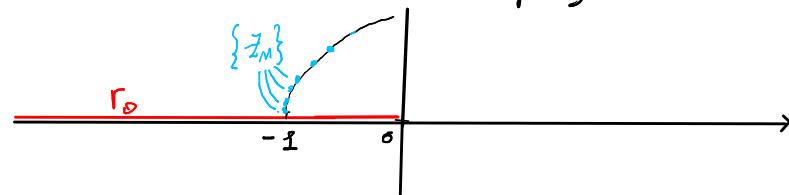
Quindi  $\text{Log}_0 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  (in realtà dato che  $\text{Arg} z \in [-\pi, \pi]$ ) ha  
sue immagini in  $\mathbb{C}$  stesa in  $\mathbb{C}$   
 $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z \in [-\pi, \pi]\}$ )

Log<sub>0</sub> è continua in  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\} := \Omega$

Infatti è evitato di non contenere nell'aperto  $\Omega$

Vediamo che non è continua sui punti della semiretta  $R_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$

Prendiamo ad esempio il punto  $-1$  (per tutti gli altri punti di tale semiretta si può ragionare in modo analogo).



$$\operatorname{Log}_0(-1) = -i\pi$$

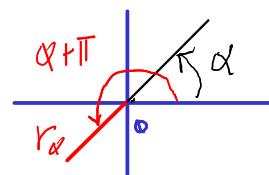
Si consideri la successione  $\{z_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = e^{i(\pi - \frac{1}{n})}; \text{ poiché } i(\pi - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} i\pi, \quad z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

$$\operatorname{Log}_0(z_n) = \log|z| + i \operatorname{Arg} z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + i\left(\pi - \frac{1}{n}\right) = i\pi \neq -i\pi = \operatorname{Log}_0(-1)$$

Se TAGLIO del  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  la semiretta  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$   
allora  $\Omega$  è un  $\Omega$  logo è una funzione continua e olomorfa.

Analogamente se considero la selezione  $\alpha$  del logaritmo, esse è continua e olomorfa sul primo taglio  $\mathbb{C} \setminus r_\alpha$  dove  $r_\alpha$  è la semiretta uscente da  $0$  individuata dall'angolo  $\alpha - \pi$  (oppure  $\alpha + \pi$ )



Vediamo che  $\text{Log}_0$  è olomorfa su  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ , Page 91 of 184  
e che  $D \text{Log}_0(z) = \frac{1}{z}$

Intanto verifichiamo che essa è l'inversa della funzione esponenziale

ristretta alla striscia  $S_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi \leq \operatorname{Im} z < \pi\}$ .

$$\begin{aligned} \text{Sia } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ allora } z = |z| e^{i \arg z} \text{ e } e^{\text{Log}_0(z)} = e^{\log |z| + i \arg z} \\ = e^{\log |z|} e^{i \arg z} = |z| e^{i \arg z} = z \end{aligned}$$

Sia ora  $z \in S_0$ ,  $z = x + iy$ , quindi  $-\pi \leq y < \pi$

$$\text{Log}_0(e^z) = \text{Log}_0(e^x e^{iy}) = \log(e^x) + iy = x + iy, \text{ dato che } |e^x e^{iy}| = e^x$$

Ora sia  $z_0 \in \Omega$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\text{Log}_0(z) - \text{Log}_0(z_0)}{z - z_0} &\stackrel{e^{-\text{Log}_0 z}}{=} \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{W - W_0}{e^W - e^{W_0}} = \\ &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{\frac{1}{e^W - e^{W_0}}}{\frac{w - w_0}{e^W - e^{W_0}}} = \frac{1}{\frac{1}{e^{W_0}}} = \frac{1}{z_0} \end{aligned}$$

Quindi per  $z \rightarrow z_0$  dato che  $\text{Log}_0$  è continua su  $\Omega$  si ha che  $\text{Log}_0 z \rightarrow \text{Log}_0 z_0 = w_0$

Def Siamo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $w \in \mathbb{C}$ . Possiamo definire la potenza di  $z$  con esponente complesso  $w$

$$\text{Come } z^w := e^{w \text{Log}_0 z} = e^{w(\log |z| + i \arg z)}$$

$$\text{In particolare se } w \in (0, +\infty), z^w = e^{w \log |z|} e^{wi \arg z} = |z|^w e^{iw \arg z}$$

Alcune conseguenze del fatto che una funzione olomorfa è analitica  
sulle I e II formule di rappresentazione di Cauchy.

### Teorema di HERMITE - LIOUVILLE

Sia  $f \in H(\mathbb{C})$  tale che esistono  $L, R \in (0, +\infty)$  e  $\nu \in [0, +\infty)$  tali che

$$|f(z)| \leq L |z|^\nu \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| > R \text{ allora}$$

$f$  è un polinomio di grado al più  $\lfloor \nu \rfloor$

parti intere dei numeri  $\rightarrow$

#### Corollario (immediato)

$f \in H(\mathbb{C})$  e  $\exists L > 0$  t.c.  $|f(z)| \leq L$ , allora  $f$  è costante

Cioè se  $f$  è olomorfa e limitata su  $\mathbb{C}$  allora è costante

Dimo Dato che  $f$  è olomorfa su  $\mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-0)^{k+1}} dz$$

dove  $\gamma(t) = r e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  è la frontiera, orientata in senso antiorario, del disco di centro 0 e raggio r. Devo dimostrare che

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ con } k \geq \lfloor \nu \rfloor + 1.$$

Punto  $r > R$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned}
 |\alpha_k| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{k+1}} rie^{it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{it})|}{|r^{k+1} e^{i(k+1)t}|} r dt \\
 &\leq \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f e^{it}|^{\nu}}{r^k} dt = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^{\nu}}{r^k} dt = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{r^{k-\nu}} \int_0^{2\pi} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} 2\pi L \cdot \frac{1}{r^{k-\nu}} = \frac{L}{r^{k-\nu}}
 \end{aligned}$$

$$|\alpha_k| \leq L / r^{k-\nu} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \text{se } k > \nu.$$

Dunque  $\forall k \geq [\nu] + 1 : \alpha_k = 0$  e  $f(z) = a_0 + \alpha_{[\nu]} z + \dots + \alpha_{[\nu]} z^{[\nu]}$

## Teoreme fondamentale dell'algебре

Ogni polinomio di grado  $n \geq 1$  ha almeno uno zero in  $\mathbb{C}$

Conseguenze

Sia  $z_1 \in \mathbb{C}$  tale che  $p(z_1) = 0$ . Poiché  $p = p(z)$  è analitica in  $\mathbb{C}$ ,  $p(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_1)^k$ .  
Ma  $p$  è un polinomio di grado  $n$ , quindi  $a_k = 0 \quad \forall k \geq n+1$  e dunque

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{k=0}^n a_k (z - z_1)^k = a_0 + a_1 (z - z_1) + \dots + a_n (z - z_1)^n = a_1 (z - z_1) + a_2 (z - z_1)^2 + \dots + a_n (z - z_1)^n = \\ &= (z - z_1) q(z) = (z - z_1) (z - z_2) h(z) = \dots = (z - z_1) \dots (z - z_n) \cdot a_n \\ &\quad \hookrightarrow z_2 \text{ zero del polinomio, di grado } n-1, \quad q = q(z). \end{aligned}$$

Cioè ogni polinomio  $p$  di grado  $n$  ha  $n$  zeri in  $\mathbb{C}$  (NON NECESSARIAMENTE DISTINTI!)

ed è uguale al prodotto di  $n$  polinomi (si dice che "si fattORIZZA")

di grado 1 del tipo  $z - z_k$ , dove  $z_k$  è uno degli  $n$  zeri del  $p$ , per il coefficiente di  $z^n$

Dim

Per esempio supponiamo che  $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Consideriamo

$$h(z) = \frac{1}{p(z)} \quad \text{Quindi } h \in H(\mathbb{C})$$

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |p(z)| = +\infty \Rightarrow \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |h(z)| = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0$$

Quindi dalle definizioni di limite per  $|z| \rightarrow +\infty$ , per  $\varepsilon = 1$

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| > \delta : |h(z)| < 1$$

$$\text{Se } L = \max \left\{ 1, \max_{z \in \overline{D(0, \delta)}} |h(z)| \right\}.$$

Quindi  $|h(z)| \leq L, \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow h \text{ è costante } \neq 0$  (dato che  $h(z) = \frac{1}{p(z)}$ )

quindi  $p(z) = \frac{1}{h(z)}$  è anche costante, in contraddizione con l'ipotesi che

$p$  è un polinomio di grado  $\geq 1$ .

Abbiamo visto che se  $f = u + i v \in H(\Omega)$ ,  $\Omega$  aperto, allora  $u$  e  $v$  sono funzioni armoniche. Ci chiediamo ora se esiste una funzione armonica  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  in  $\Omega$  e armonica ( $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ ), esista una funzione  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa di cui  $u$  sia la parte reale.

In altri termini ci chiediamo se esiste un'altra funzione

$v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^2$  in  $\Omega$ , tale che  $v$  soddisfia le condizioni di Cauchy - Riemann (e quindi anche  $v$  è armonica e possiamo prendere  $f = u + i v$ ).

Se assumiamo che  $\Omega$  sia sottile semplicemente connesso, poniamo rispondere facilmente e affermativamente alle domande.

Infatti poniamo di considerare le forme differenziali di classe  $C^1$  in  $\Omega$

$$w = -\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{dy} dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{dx} dy.$$

Poiché  $u$  è armonica  $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  in  $\Omega$  e quindi  $w$  è chiusa

Dato che  $\Omega$  è semplicemente connesso,  $w$  è esatta. Sia  
oltre  $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva per  $w$ . Dov'è essere quindi

$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$  e  $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ , cioè  $u, V$  soddisfano le  
condizioni di Cauchy-Riemann.

Assegnate  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $u$  armonica, una funzione  $v \in C^2(\Omega)$   
armonica e tale che  $f = u + iv$  sia olomorfa, si dice  
armonica coniugata di  $u$ . Abbiamo quindi dimostrato che ogni funzione  
armonica su un aperto semplicemente connesso ammette armonica coniugata

Vogliamo ora dimostrare che se  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è armonica

$\forall z_0 \in \Omega : u(z_0) = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} u(z) ds$ , dove  $\gamma$  è una qualsiasi

circonferenza di centro  $z_0$  e  $L(\gamma)$  è la sua lunghezza (la relazione dice  
che una funzione armonica sul centro di un disco vale quanto le  
sue medie integrali sul bordo dello stesso disco)

Inoltre siamo prudere  $f \in H(\Omega)$  tale che  $f = u + iv$  con le componenti congiunte di  $u$ . Per le formule di rappresentazione di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz , \quad \text{con } \gamma(t) = z_0 + r e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

quindi  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} \cdot ie^{it} dt =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) r dt$$

Quindi  $u(z_0) + iV(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) r dt + \frac{i}{2\pi r} \int_0^{2\pi} V(z_0 + re^{it}) r dt$

da cui egualando parti reali e parti immaginarie di I e II membro otteniamo  $u(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) r dt = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} u ds$ .

## Serie numeriche bilatero

Consideriamo una funzione  $k \in \mathbb{Z} \mapsto a_k \in \mathbb{C}$  (che indicheremo con  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ )

Con il simbolo  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$  che indicherà série numerica bilatero indichiamo

la funzione  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  e le sue incisioni numeriche ad esse associate

$\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  e  $\{s_m^-\}_{m \in \mathbb{N}}$  così definite

$s_m := \sum_{k=0}^m a_k$  e  $s_m^- = \sum_{k=-m}^{-1} a_k$ .  $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  è ovviamente la successione delle somme parziali della serie numerica in  $\mathbb{C}$

È quella delle serie numeriche in  $\mathbb{C}$   $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k \underset{k=-n}{=} \sum_{h=1}^{+\infty} a_{-h}$

Def  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$  converge se entrambe le serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  e  $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k$  convergono. In tal

caso si ha  $a =$  la somma di  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  e  $b =$  quella di  $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k$

La somma  $a + b$  di  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$  è per definizione la somma di  $a + b$  cioè

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k$$

## SERIE DI LAURENT

Si dice serie di Laurent ogni serie bilatera di potenze, quindi ogni serie del tipo  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$ , con  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$  e  $z_0 \in \mathbb{C}$ .  
 $z_0$  si dice centro della serie di Laurent.

Intervale di convergenza di una serie di Laurent.

Si consideri la serie di Laurent  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$  e le serie

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (z - z_0)^k}_\text{SERIE DI POTENZE}$$

SIA  $R_1$  IL SUO RAGGIO  
DI CONVERGENZA

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_k (z - z_0)^k}_\text{SERIE DI POTENZE}$$

$$\frac{1}{z - z_0} = w$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_k w^{-k} = \sum_{h=1}^{+\infty} \alpha_{-h} w^h$$

Sia  $R_2$  il suo raggio  
di convergenza

Ora si dimostra che  $\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_k (z - z_0)^k$  converge

$$\forall z \text{ t.c. } \frac{1}{|z - z_0|} < R_2 \quad \text{cioè se } |z - z_0| > \frac{1}{R_2}$$

Se fino a  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  le sue bilanze  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (\bar{z} - z_0)^k$  converge, per definizione,

se  $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (\bar{z} - z_0)^k$  converge e se  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\bar{z} - z_0)^k$  conv., quindi se  $\frac{1}{R_2} < |\bar{z} - z_0| < R_1$

Una qualsiasi serie di Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  può quindi avere insieme di convergenza dato da

I)  $\emptyset$ , se  $\frac{1}{R_2} > R_1$

II) se  $\frac{1}{R_2} = R_1$  l'insieme di convergenza è vuoto o contiene punti sulla circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $R_1$

III) una cerchia circolare se  $\frac{1}{R_2} < R_1 : \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{R_2} < |z - z_0| < R_1\}$

(con l'aggiunta di eventuali punti sul bordo di tale cerchia)

IV) un disco buco se  $R_2 = +\infty$  e  $R_1 \in (0, +\infty)$  :  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R_1\}$

(con l'aggiunta di eventuali punti sulla circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $R_1$ )

V) il complementare di un disco se  $R_2 \in (0, +\infty)$  e  $R_1 = +\infty$  :  $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{R_2} < |z - z_0|\}$   
 (con l'aggiunta di eventuali punti sulla circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $\frac{1}{R_2}$ )

VI) il piano buco se  $R_2 = +\infty$  e  $R_1 = +\infty$  :  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

Consideriamo una serie di Laurent che converge e supponiamo che converga su  $\mathbb{C}_{r_1, r_2}$ ,  $0 < r_1 < r_2$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \mathbb{C}_{r_1, r_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

Rispetto alle notazioni usate  
le pagine precedenti  $r_1 = \frac{1}{R_2}$   
 $r_2 = R_1$

Si  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}_{r_1, r_2}$ , la sua somma

Dimostriamo che la somma  $f$  è olomorfa in  $\mathbb{C}_{r_1, r_2}$ . Infatti

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k}_{f_1(z)} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k}_{f_2(z)}$$

$f_1$  è olomorfa su  $\mathbb{C}_{r_1, r_2}$  in quanto  $\mathbb{C}_{r_1, r_2} \subset D(z_0, r_2)$  che è il disco di convergenza della serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$  che è la somma di  $f_1$ . Anche  $f_2$  è olomorfa su  $\mathbb{C}_{r_1, r_2}$ . Infatti  $f_2(z) = g\left(\frac{1}{w}\right)$ , dove  $g$  è la somma della serie di potenze  $\sum_{h=1}^{+\infty} a_{-h} w^h$  e  $w = \frac{1}{z - z_0}$ , cioè  $f_2$  è componibile della funzione  $g$  che è olomorfa su  $D(0, \frac{1}{r_1})$  e della funzione razionale  $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$  che è olomorfa su  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ; quindi  $f_2$  è olomorfa sull'insieme dei  $z \in \mathbb{C}$  tali che  $\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{r_1}$  cioè  $|z - z_0| > r_1$  e dunque, in particolare, è olomorfa su  $\mathbb{C}_{r_1, r_2}$ .

Oss

D'ora sappiamo nelle serie di potenze olomorfe che ogni serie di Laurent di centro  $z_0$  è convergente sulle "bole"  $\mathcal{B}_{r_1 r_2}(z_0)$

oltre in avanti  $\mathcal{B}_{r_1 r_2}(z_0)$  potrà indicare:

- una cerchia circolare  $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$  se  $0 < r_1 < r_2 < +\infty$
- l'interno delle chiusure del disco  $D(z_0, r_1)$  se  $0 < r_1 < r_2 = +\infty$
- il disco buco  $D(z_0, r_2)$  se  $0 = r_1 < r_2 < +\infty$
- il piano buco  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  se  $0 = r_1 = r_2 = +\infty$

Converge tollerante (e quindi uniformemente) se ogni insieme compatto contenuto in  $\mathcal{C}_{r_1 r_2}(z_0)$

Riflessione fra i coefficienti di una serie di Laurent e le somme delle stesse sui

Consideriamo una serie di Laurent  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$  e supponiamo che converge in  $\mathcal{C}_{r_1 r_2}(z_0)$ .

$$\text{Sia } f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \forall z \in \mathcal{B}_{r_1 r_2}(z_0)$$

Sia  $m \in \mathbb{Z}$  e consideriamo

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-m} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-m}$$

Page 104 of 184

Se  $r > 0$ , su  $r_1 < r < r_2$  e calcoliamo l'integrale di  $\frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$  sulle circonference  $C(z_0, r)$

di centro  $z_0$  e raggio  $r$  dirette nel verso antiorario

$$\int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} dz = \int_{C^+(z_0, r)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-m} dz ; \quad \text{poiché } C(z_0, r) \text{ è}$$

un insieme compatto contenuto in  $C_{r_1, r_2}$ , la serie di Laurent

converge uniformemente ad  $f$  sulle stesse circonference. Possiamo quindi usare il Teorema di integrazione termine a termine e ottenere:

$$\int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{C^+(z_0, r)} a_k (z-z_0)^{k-m} dz . \quad \text{Valutiamo questi integrali}$$

di questi integrali. L'equazione parametrica di  $C^+(z_0, r)$  è  $t \in [0, 2\pi] \rightarrow z_0 + re^{it}$ , quindi

$$\begin{aligned}
 \int_{C^+(z_0, r)} a_k (z - z_0)^{k-m} dz &= \int_0^{2\pi} a_k r^{k-m} e^{it(k-m)} \cdot i r e^{it} dt \\
 &= a_k i r^{k-m+1} \int_0^{2\pi} e^{it(k-m+1)} dt = \begin{cases} a_k i r^{k-m+1} \frac{e^{it(k-m+1)}}{i(k-m+1)} \Big|_0^{2\pi}, & \text{se } k-m+1 \neq 0 \\ a_k i \int_0^{2\pi} dt, & \text{se } k-m+1 = 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{a_k i r^{k-m+1}}{i(k-m+1)} (e^{2\pi i (k-m+1)} - 1), & \text{se } k \neq m-1 \\ 2\pi i a_{m-1}, & \text{se } k = m-1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq m-1 \\ 2\pi i a_{m-1} & \text{se } k = m-1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dunque

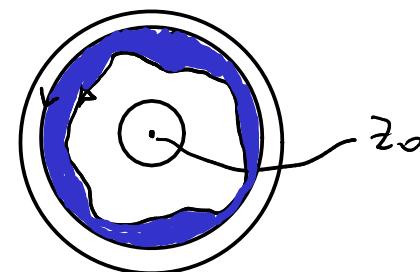
$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

Oss1

Osserviamo che se la serie di Laurent  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z)$  in  
 risulta ad una serie di potenze (cioè  $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ) la (\*) è corretta  
 con quello che già sappiamo cioè  $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = (\star), \quad \forall m \in \mathbb{N}$ .

Osserviamo anche che gli integrali sono indipendenti dal raggio  $r$  che abbiamo preso,  $\text{re}(r_1, r_2)$ .

NON SOLO: fissato  $m$ ,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz = a_m$ , qualunque sia la curva chiusa, regolare e chiusa, avente supporto in  $C_{r_1, r_2}$  che racchiude  $z_0$ , orientata nel verso antiorario; questo perché poniamo sempre purore sulle circonferenze  $C(z_0, r)$  che racchiudono le



curve  $\gamma$  e considerare il dominio  $T$  individuato da tali due curve (nella figura qui sopra è il dominio colorato in blu). Poiché la funzione  $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}$  è olomorfa su  $T$  salvo lesioni di Cauchy-Goursat ricaviamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial T} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} dt = \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} + \left\{ \int_{-\gamma} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} dt \right\} = \\ &= \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} - \left\{ \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} dt \right\} \quad \text{de cui} \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} \frac{dt}{t-z_0} = \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} dt \end{aligned}$$

Svilupabilità in serie di Laurent di una funzione olomorfa su una  
corona circolare (o su un disco buco e sul piano buco)

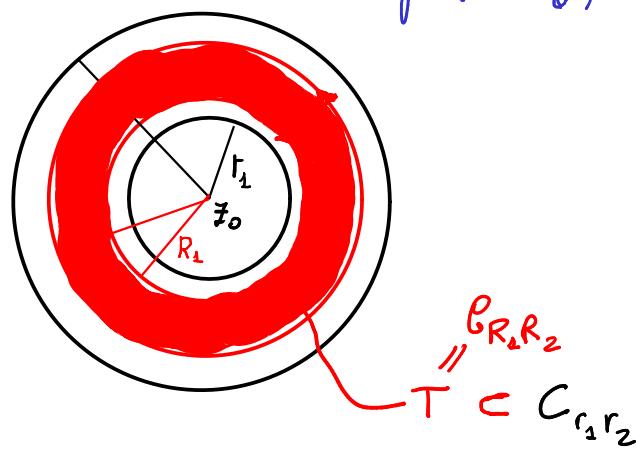
Tesi

Sia  $f \in \mathcal{H}(G_{r_1 r_2}(z_0))$ ,  $0 < r_1 < r_2 \leq +\infty$

allora  $\exists \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  t.c.  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \forall z \in G_{r_1 r_2}(z_0)$

Dimo L'unicità dello sviluppo l'abbiamo già dimostrato.

infatti se  $f$  è sviluppatibile in serie di Laurent di centro  $z_0$ , cioè se  $f$  è la somma  
di due serie di Laurent, allora necessariamente i coefficienti  $a_k$  sono  
dati da  $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e per ogni curva  $T$  chiusa, semplice  
e regolare a tratti, orientata nel verso antiorario  
che circondi  $z_0$  e avere supporto in  $G_{r_1 r_2}(z_0)$



Sia  $z \in G_{r_1 r_2}$ :  $r_1 < |z-z_0| < r_2$ . Consideriamo  
 $R_1, R_2 \in (0, +\infty)$  tali che  
 $r_1 < R_1 < R_2 < r_2$  e in modo che  
 $R_1 < |z-z_0| < R_2$

Per  $\zeta \in \mathcal{C}(z_0, R_2) : |\zeta - z_0| > |z - z_0| \Rightarrow \frac{|\zeta - z_0|}{|\zeta - z_0|} < 1$

Per  $\zeta \in \mathcal{C}(z_0, R_1) : |\zeta - z_0| < |z - z_0| \Rightarrow \frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} < 1$

Per le I formule di rappresentazione di Cauchy dato che  $f$  è olomorfa in  $T$  e  $z \in T$ .

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial T} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\mathcal{C}^-(z_0, R_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Si tenga presente la convenzione per l'orientamento positivo delle frontiere di un dominio  $T$  come quello in rosso nelle figure !!

Su  $\mathcal{C}(z_0, R_1)$  abbiamo quindi

$$\frac{1}{z - z} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{z}{1 - \frac{z - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(z - z_0)^k}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(z - z_0)^k} d\zeta \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)} \frac{(z - z_0)^k}{(z - z_0)^k} d\zeta = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^k$$

Su  $\mathcal{C}(z_0, R_1)$  abbiamo invece

$$\frac{1}{z-z} = \frac{1}{z-z_0 + z_0 - z} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{h=0}^{+\infty} \left( \frac{z-z_0}{z-z_0} \right)^h$$

Quindi

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{z-z} dz &= +\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^h}{(z-z_0)^h} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{z-z_0} \frac{(z-z_0)^h}{(z-z_0)^h} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{h+1}} \cdot \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} f(z) (z-z_0)^h dz \\ &\quad \underbrace{- (h+1)=k}_{\alpha_k, k < 0} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right) (z-z_0)^k \end{aligned}$$

Dato che come visto all'inizio delle lezione, gli integrali

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \quad e \quad \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

sono indipendenti dalle curve su cui si introduce ( $\Rightarrow$  perche' che queste circonferenze sono chiuse e regolari e tratti, che circonferenza  $z_0$  e con supporto in  $C_{R_1, R_2}(z_0)$ , e ottenere

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right) (z-z_0)^k, \quad \forall z \in C_{R_1, R_2}(z_0)$$

## Def Singolarità isolate per una funzione olomorfa

Si  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $\delta > 0$  e  $f: D'(z_0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}$ . Si dice che  $z_0$  è una singolarità isolata per  $f$  se  $f \in H(D'(z_0, \delta))$ .

## Classificazione delle singolarità isolate

Se  $f \in H(D'(z_0, \delta))$  (anche  $z_0$  è una singolarità isolata per  $f$ ).

Consideriamo lo sviluppo in serie di potere per  $f$  in  $D'(z_0, \delta)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Def Si dice che  $z_0$  è una singolarità eliminabile se

$$a_m = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$$

Dimostrare se  $z_0$  è una singolarità eliminabile allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D'(z_0, \delta)$$

Sia  $f \in H(D'(z_0, \delta))$

$z_0$  è eliminabile  $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Leftrightarrow \exists r > 0, r < \delta \in \exists L > 0 :$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |f(z)| \leq L \quad \forall z \in D'(z_0, r)$$
Dimo

(1)

 $\Rightarrow$ 

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D'(z_0, \delta),$$

Sia  $g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0, \delta)$ . Chiaravante abbiamo

$f(z) = g(z), \quad \forall z \in D'(z_0, \delta)$ . Inoltre  $g$  è olorofa in  $D(z_0, \delta)$  (quindi è continua)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = a_0 \in \mathbb{C}$$

(2)  $\Rightarrow$  Sia  $\exists l = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  olorofa per  $\epsilon = 1 \quad \exists r > 0, r < \delta$ , tale che

$\forall z \in D(z_0, r) : |f(z) - l| < 1$  quindi

$$|f(z) - l| \leq (|f(z)| - |l|) \leq |f(z) - l| < 1 \quad \text{ora} \quad |f(z)| \leq \underbrace{|l| + 1}_{= L}, \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

Rete da dimostrare che se  $\exists 0 < \delta < L > 0$  tali che  $|f(z)| \leq L, \forall z$

Allora  $z_0$  è una singolarità eliminabile

$$\forall n \in \mathbb{Z} : a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{(z_0, r')}}^+ \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz , \text{ dove } 0 < r' < r$$

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_{(z_0, r')}}^+ \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \max_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{f(z_0 + r'e^{it})}{(r'e^{it})^n} \right| 2\pi r'$$

$$\leq 2\pi \frac{L}{(r')^n}$$

$$\text{Se } n < 0, \lim_{r' \rightarrow 0} \frac{L}{(r')^n} = 0 \text{ e}$$

quindi otte che  $|a_n|$  non dipende da  $r$ , dove avere

$$|a_n| = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

Se  $f \in H(\Omega - \{z_0\})$ ,  $\Omega$  aperto,  $z_0 \in \Omega$  e  $z_0$  è una singolarità eliminabile allora  $f$  può essere definito (si dice "estesa") anche in  $z_0$  in modo da essere olomorfa anche in  $z_0$ .

Tale estensione è unica ed è data da

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega - \{z_0\} \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

Ovviamente  $g(z)$  è uguale a  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ ,  $\forall z$  in un opportuno disco di centro  $z_0$ , e  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$  è lo sviluppo in serie di Laurent di  $f$  nello stesso disco buco.

Esempio:

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ;  $f$  è definita in  $\mathbb{C} - \{0\}$  ed è ivi olomorfa. Oltre che le risposte chi due funzioni olomorfe se  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

Dunque 0 è una singolarità isolata di  $f$ . Lo sviluppo di Laurent di centro 0 per  $f$  si ottiene subito oltre che

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ e quindi}$$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

qui nella sviluppo di Laurent non compare mai termine con esponente negativo: 0 è una singolarità eliminabile

## Def di polo di ordine m

Sia  $f \in H(D'(z_0, \delta))$  e si consideri il suo rilieppo in serie di Laurent di centro  $z_0$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad \forall z \in D'(z_0, \delta) \quad (*) . \quad \text{La singolarità (isolata) } z_0$$

si dice polo di ordine m,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$  se sullo rilieppo di Laurent di f

$$(\text{cioè se in } (*)) \quad a_k = 0 \quad \forall k < -m \quad \text{e} \quad a_{-m} \neq 0$$

### Teorema

Se  $f \in H(D'(z_0, \delta))$  allora

$$z_0 \text{ è un polo} \stackrel{(1)}{\iff} \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ t.c. } \exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) \neq 0 \stackrel{(2)}{\iff} \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$$

Dim  $\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ :

$z_0$  è un polo. Supponiamo che il suo ordine sia m,  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ; quindi

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in D'(z_0, \delta), \quad \text{con} \quad a_{-m} \neq 0$$

$$f(z) (z-z_0)^m = (z-z_0)^m \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{m+n}$$

$$\stackrel{n=m+h}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h-m} (z-z_0)^h. \quad \text{Quindi} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h-m} (z-z_0)^h \right) = a_{-m} \neq 0$$

(2)  $\Rightarrow$ : Per ipotesi sappiamo che  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Consideriamo

l'estensione olomorfa di  $(z - z_0)^m f(z)$  in  $z_0$ :  $g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^m f(z) & \text{se } z \in D'(z_0, \delta) \\ l & \text{se } z = z_0 \end{cases}$

Dunque,  $\forall z \in D'(z_0, \delta)$  abbiamo:

$$(3) \quad f(z) = g(z)/(z - z_0)^m, \text{ da cui } \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} \left(= \frac{|l|}{0^+}\right) = +\infty$$

$\Rightarrow$ : Resta da dimostrare che  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty \Rightarrow z_0$  è un polo:

$$\text{Se } g(z) = \frac{l}{f(z)}. \text{ Quindi } \lim_{z \rightarrow z_0} |g(z)| = 0 \text{ da cui } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$$

Inoltre possiamo scegliere  $\exists r > 0, r < \delta$  per cui  $g \in H(D(z_0, r))$ ,  $D'(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ , dato che  $f(z) \neq 0$  in un intorno di  $z_0$  (si ricordi che  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$ ). Dunque  $z_0$  è una singolarità eliminabile per  $g$ . Consideriamo

l'estensione olomorfa di  $g$  in  $z_0$ :  $h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{se } z \in D'(z_0, r) \\ 0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}$ . Chiaramente

$z_0$  è una zero isolata per  $h$  e quindi esiste  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  e  $h_1 \in H(D(z_0, r))$  tale che

$$h(z) = (z - z_0)^n h_1(z), \quad \forall z \in D(z_0, r) \text{ e } h_1(z_0) \neq 0$$

poniamo quindi anche ovunque  $h_1(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(z_0, r)$  (dato che se  $\exists \bar{z} \in D(z_0, r)$

eh che  $h_1(\bar{z}) = 0$ , allora anche  $h(\bar{z}) = 0$  e quindi  $g(\bar{z}) = 0$  cioè  $|f(\bar{z})| \rightarrow +\infty$  per  $\bar{z} \rightarrow \bar{z}$  ma questo è assurdo dato che  $f$  ha come unica singolarità in  $D(z_0, \delta)$  il punto  $z_0$ )

Dunque per ogni

$z \in D'(z_0, r)$  si ha  $\frac{1}{f(z)} = g(z) = h(z) = (z-z_0)^m h_1(z)$ , ove cui

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \left( \frac{1}{h_1(z)} \right) \in H(D(z_0, r))$$

dove è la funzione reciproca di  $h_1$  che non si annulla in alcun punto di  $D(z_0, r)$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m} (z-z_0)^{n-m}$$

$$= \sum_{k=-m}^{+\infty} g_{k+m} (z-z_0)^k, \quad \forall z \in D(z_0, r). \quad \text{Inoltre l'sviluppo in serie}$$

di Laurent deve valere  $\forall z \in D'(z_0, r)$  in quanto  $f \in H(D'(z_0, r))$ . Dunque  $z_0$  è un polo o si ottiene  $m$  per  $f$  visto che il primo coefficiente non nullo in tale serie si ottiene per  $k=-m$ :  $a_{-m+m} = a_0 = \frac{1}{h_1(z_0)} \neq 0$

Def (SINGOLARITÀ ESSENZIALE)

Sia  $f \in H(D'(z_0, r))$ ,  $z_0$  si dice singolarità essenziale se non è né un polo né un singolare eliminabile, né un polo e quindi se nello sviluppo in serie di Laurent di  $f$  intorno a  $z_0$  ci sono infiniti coefficienti con indice negativo che sono non nulli e successivamente, se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  non esiste e risultato (finito o infinito)  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$

Esempi

•  $f(z) = \frac{1-z^2}{(z+i)^2 z^3}$  ha polo di ordine 2 in  $-i$  e di ordine 3 in 0

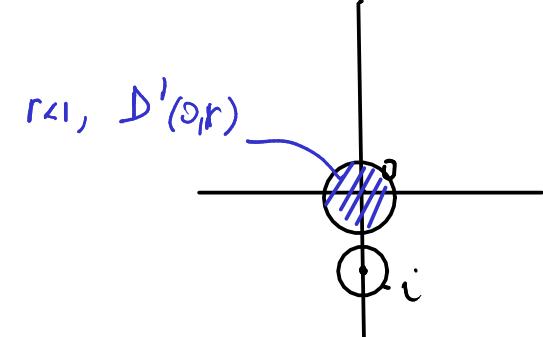
$$f: \mathbb{C} \setminus \{-i, 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-i, 0\})$$

0 è un polo di ordine 3 sotto che

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-z^2}{(z+i)^2} = \frac{1}{i^2} = -1$$

Analogamente:

$$(z+i)^2 f(z) \xrightarrow{z \rightarrow -i} 2/-i \neq 0, \text{ quindi } -i \text{ è un polo di ordine 2}$$



In generale se  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  con  $p$  è un polinomio e  $p(z_0) \neq 0$  e  $z_0$  è uno

zero di ordine  $m$  per  $q$  allora  $z_0$  è un polo di ordine  $m$  per  $f$

↪  $\exists r_0 < r \in \mathbb{R}$   $\forall h \in H(D(z_0, r))$  t.c.  $q(z) = (z-z_0)^m h(z)$ ,  $h(z_0) \neq 0$

$$f(z) = \frac{p(z)}{h(z)} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^m} \text{ quindi } \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{h(z)} = \frac{p(z_0)}{h(z_0)} \neq 0$$

In modo analogo se  $f(z) = \frac{g(z)}{\ell(z)}$  con  $g$  e  $\ell$  funzioni qualsiasi olomorfe

e  $z_0 \in \mathbb{C}$  è uno zero di ordine  $m$  per  $g$  e  $g(z_0) \neq 0$  si ha che  
 $z_0$  è un polo di ordine  $m$  per  $f$ .

$f(z) = \frac{z}{1-e^z}$  ha una sing. eliminabile in 0 e poli di ordine 1 ai punti  $\{2k\pi i\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$

$$f \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi i\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Si osservi che  $\{2k\pi i\}_{k \in \mathbb{Z}}$  è un insieme discreto di punti cioè  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $2k\pi i$  è una singolarità isolata

Infatti  $e^z = 1 \iff z = \log 1 = \log|z| + i(2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
 $= 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{1-e^z} = ?$ ;  $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \Rightarrow 1-e^z = -z + o(z) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{-z+o(z)} =$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z \left( -1 + \frac{o(z)}{z} \right)} = -1 \Rightarrow 0 \text{ è una sing. eliminabile}$$

Si oss.

$l(z) = 1-e^z$ ,  $l \in H(0)$ .  $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ :  $2k\pi i$  è uno zero semplice per  $l$  visto che  $l'(z) = -e^z$  e  $l'(2k\pi i) = -e^{2k\pi i} \neq 0$

Quindi  $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $2k\pi i$  è un polo semplice (cioè di ordine 1) per  $f$ .

$f(z) = \frac{1}{\sin z}$  ha polo di ordine 1 nei punti  $\{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\lim_{z \rightarrow k\pi} f(z) = 0 : \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1$$

$$2iz = \log 1 = \log(1|) + i(0 + 2k\pi) = i2k\pi \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre i punti  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sono tutti zeri semplici per la funzione  $\sin z$ .

$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$  ha una singolarità essenziale in 0 :

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto -\frac{1}{z} \mapsto e^{-\frac{1}{z}}$  quindi  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ , in quanto composte delle funzioni olomorfe in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{dunque} \quad \forall z \neq 0 : e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} = \\ \stackrel{k=-h}{=} \sum_{h=-\infty}^0 \frac{(-1)^h}{(-h)!} z^h$$

Dunque sullo sviluppo di Laurent di  $f(z) = e^{-z}$  di centro 0, i coefficienti con indice  $n \leq 0$  sono non nulli e pertanto, per definizione, 0 è una singolarità essenziale.

Oss

L'immagine mediante la funzione  $f(z) = e^{-\frac{z}{2}}$  di un qualsiasi intorno lucato dello 0 è  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Infatti, sia  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , facciamo vedere che

$\exists z \in (\text{disco lucato di centro } 0 \text{ e raggio } r > 0, \text{ piccolo e fisso})$  tale che  $e^{-\frac{z}{2}} = w$

Dove essere:

$$-\frac{1}{2} = \operatorname{Log} w = \operatorname{Log}|w| + i(\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{quindi}$$

$$z_k = \frac{-1}{\operatorname{Log}|w| + i(\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi)} \xrightarrow[\substack{k \rightarrow -\infty \\ k \rightarrow +\infty}]{} 0 \rightarrow \left( \operatorname{Log}|w| + i(\operatorname{Arg}(z) + 2n\pi) \right) \xrightarrow[\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \rightarrow -\infty}]{} +\infty$$

Questo è un fatto generale per le singolarità essenziali. Neppure si può dimostrare il seguente teorema:

Sia  $\Omega$  aperto,  $z_0 \in \Omega$ ,  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ . Se  $z_0$  è una singolarità essenziale allora  $\forall r > 0$  tale che  $D'(z_0, r) \subset \Omega$  si ha  $f(D'(z_0, r)) = \mathbb{C}$  oppure  $f(D'(z_0, r)) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

cioè l'immagine mediante  $f$  di un qualsiasi intorno buco di  $z_0$ , o è il piano o è il piano buco.

Def (RESIDUO)

Sia  $f \in \mathcal{H}(D'(z_0, \delta))$ . Si definisce RESIDUO DI  $f$  IN  $z_0$  e si indica con  $\text{Res}(f, z_0)$ , il coefficiente del termine  $\frac{1}{z-z_0}$  nello sviluppo di Laurent di  $f$  di centro  $z_0$ . Per intenderlo

$$\boxed{\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz},$$

dove  $\Gamma$  è una qualsiasi curva chiusa regolare a tratti orientata nel verso antiorario che ha il bordo di un dominio aperto  $T$  tale che  $z_0 \in T$  e  $z_0$  sia l'unica singolarità di  $f$  in  $T$ . [semplice]

Oss In particolare, se  $z_0$  è una singolarità eliminabile (o se  $f$  è olomorfa anche in  $z_0$ )  $\text{Res}(f, z_0) = 0$

Sia  $f \in H(\Omega - \{z_1, \dots, z_e\})$ ,  $z_1, \dots, z_e \in \Omega$ ,  $\Omega$  aperto.

e sia  $\gamma$  una curva chiusa semplice  $\gamma$  compresa  $\Omega$  e che circondi tutte le singolarità  $z_j$ ,  $j \in \{1, \dots, e\}$ . Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^e \operatorname{Res}(f, z_j)$$

Dim Sia  $T$  il dominio avendo come bordo  $\gamma$  e

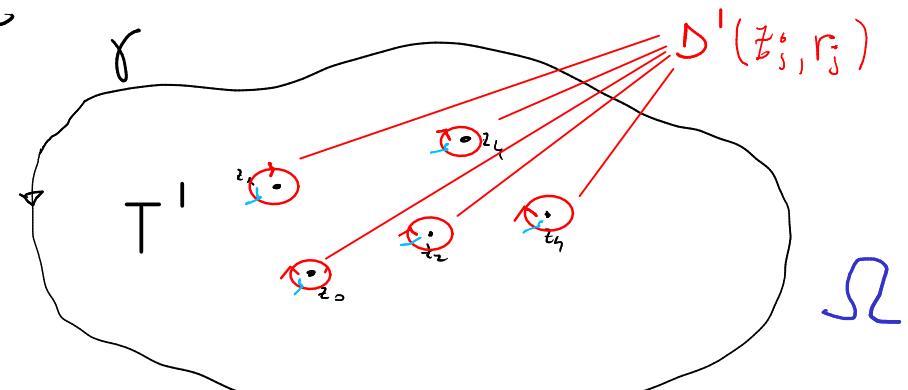
sia  $T' = T \cup \bigcup_{j=1}^l D(z_j, r_j)$ , dove i

dischi  $D(z_j, r_j)$  sono stati scelti con  
raggi sufficientemente piccoli da essere

contenuti in  $T$ . Poiché  $f$  è analitica in  $T'$

$$0 = \int_{\partial T'} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{j=1}^l \int_{\partial D(z_j, r_j)} f(z) dz , \text{ quindi}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \sum_{j=1}^l \left( \int_{\partial D(z_j, r_j)} f(z) dz \right) = \sum_{j=1}^l \int_{\partial^+ D(z_j, r_j)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^e \operatorname{Res}(f, z_j) \quad \blacksquare$$



Il Teorema dei residui mette in luce l'importanza di conoscere il residuo in una singolarità. Vediamo come sia possibile calcolarlo nel caso in cui le singolarità siano un polo semplice (cioè di ordine 1) e più in generale un polo di ordine  $m > 1$ .

- Nel caso di un polo semplice (cioè un polo di ordine 1)  $z_0$ , poiché

$$f(z) = \sum_{m=-1}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m, \quad \forall z \text{ in un altro buco di centro } z_0, \text{ abbiamo}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{m=-1}^{+\infty} a_m (z-z_0)^{m+1} = a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

- Nel caso di un polo di ordine  $m > 1$

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m, \quad \forall z \text{ in un altro buco di centro } z_0, D'(z_0, S)$$

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{m+n} = \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h-m} (z-z_0)^h \rightarrow \text{è una serie di potenze di cui somme}$$

è uguale a  $(z-z_0)^m f(z), \forall z \in D'(z_0, \delta)$

Il coefficiente del monomio  $z-z_0$  con esponente uguale a  $-1$

si ottiene per  $h-m = -1$  cioè  $h = m-1$ , quindi per le relazioni che legano i coefficienti di una serie di potenze alle derivate nel centro delle somme otteniamo:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} D^{(m-1)} ((z-z_0)^m f(z))$$

Singolarità all'infinito e residuo all'infinito

Sia  $K \subset \mathbb{C}$  compatto (cioè  $K$  è chiuso e limitato),

$$\Omega = \mathbb{C} - K \quad \text{e} \quad f \in H(\Omega)$$

Def

Si definisce residuo all'infinito di  $f$  e si indica con  $\text{Res}(f, \infty)$  il numero complesso

$$\text{Res}(f, \infty) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz$$

semplificare

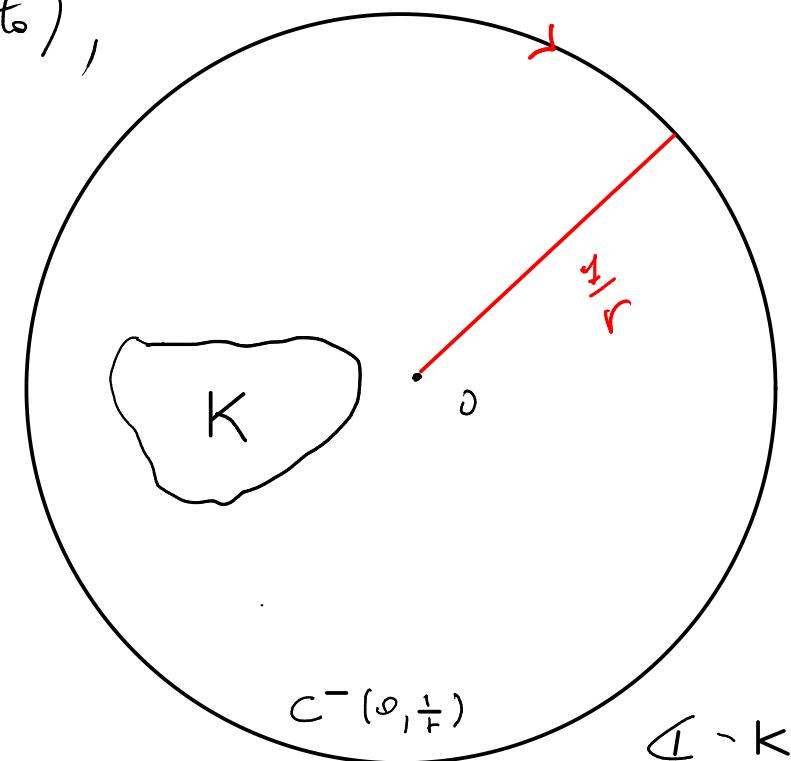
dove  $\gamma^-$  è una qualsiasi curva chiusa regolare a tratti orientata nel verso ORARIO che circondi il compatto  $K$  (In particolare si può prendere una curva  $\gamma^-$  una circonferenza di centro  $0$  e raggio sufficientemente grande, orientata nel verso orario)

Prop

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

dim

$$\text{Per definizione} \quad \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho^+(0, r)} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$$



Occorre però che la funzione  $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$  sia olomorfa sul disco <sup>Page 126 of 184</sup>  $D'(0, r)$ .

Poiché  $f$  è olomorfa fuori del complesso  $K$ , se  $r$  è sufficientemente piccolo,  $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \in H(D'(0, r))$  (dato che  $\frac{1}{|z|} < r \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{r}$ )

Ora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho^+(0, r)} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{-1}{f^2(e^{it})^2} f\left(\frac{1}{re^{it}}\right) r e^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r^2} e^{-2it} f\left(\frac{1}{r} e^{-it}\right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}(0, \frac{1}{r})} f(z) dz = \\ &= \text{Res}(f, \infty) \end{aligned}$$

## II teorema dei residui

Sia  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{z_1, \dots, z_n\})$  (quindi  $f$  è olomorfa su un insieme del tipo

$\mathbb{C} \setminus K$ , con  $K \subset \mathbb{C}$  compatto  $= \{z_1, \dots, z_n\}$ ). Allora  $\sum_{k=0}^n \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0$

Dim

"singolarità al finito" + "singolarità all'infinito"

Sia  $r > 0$  tale che  $z_i \in D(0, r)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Per il I teorema dei residui

$$\int_{\gamma^+ D(0,r)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, z_i) ; \text{ ma } \int_{\partial^+ D(0,r)} f(z) dz = - \int_{\partial^- D(0,r)} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$$

Quindi  $2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, z_i) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$ .  $\blacksquare$

Calcolare i residui della funzione  $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$  in tutti i punti di  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-1, 2i, -2i\})$$

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)}$$

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z+2i)} = \frac{-4 - 4i}{(2i+1)^2(4i)} \neq 0$$

Quindi  $2i$  è un polo semplice e  $\text{Res}(f, 2i) = \frac{-4 - 4i}{(2i+1)^2(4i)}$

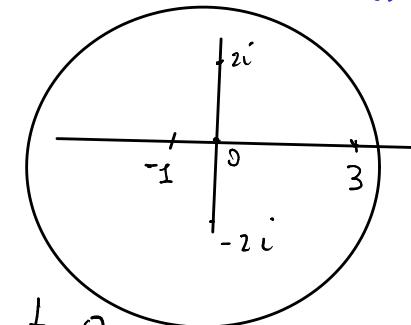
$$\text{Analogamente } \text{Res}(f, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(z+2i) f(z)}{(z-2i)^2} = \frac{-4 + 4i}{(3-2i)^2(-4i)} \neq 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 4} = \frac{3}{5} \neq 0, \text{ quindi } -1 \text{ è un polo di ordine 2}$$

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} D((z+1)^2 f(z))$$

$$D\left(\frac{z^2 - 2z}{z^2 + 4}\right) = \frac{(2z-2)(z^2+4) - (z^2-2z)2z}{(z^2+4)^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{(2z-2)(z^2+4) - (z^2-2z)2z}{(z^2+4)^2} = \frac{-4 \cdot 5 + 6}{25} = -\frac{16}{25} = \text{Res}(f, -1)$$



$f$  è olomorfa, salvo escluso, all'esterno del disco  $D(0, 3)$  per cui ha singolarità anche al infinito dell'infinito

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right), 0\right)$$

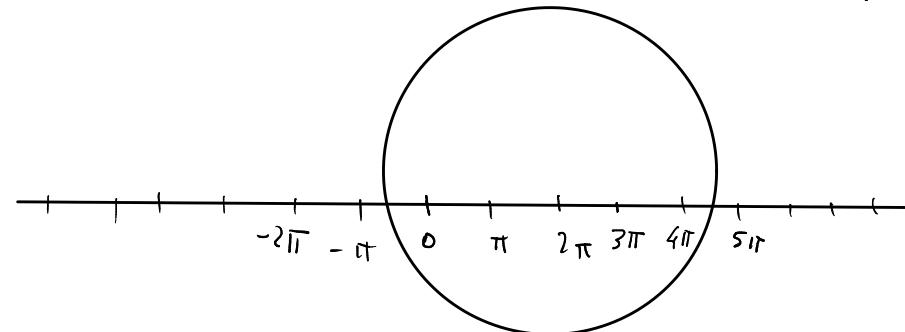
$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= -\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z^2} - \frac{z}{z}}{\left(\frac{1}{z} + z\right)^2 \left(\frac{1}{z^2} + 4\right)} = \frac{\frac{1-2z}{z^2}}{\cancel{\left(\frac{1+z}{z}\right)^2} \frac{1+4z^2}{z^2}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) = \\ &= -\frac{1-2z}{(1+z^2)(1+4z^2)}. \quad \text{Poiché } \exists \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{1-2z}{(1+z^2)(1+4z^2)} = -1, \text{ o è una} \end{aligned}$$

singularità eliminabile per la funzione  $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$  e dunque  $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$

- Calcolare i residui di  $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$  nei punti singolari (ha senso calcolare il residuo in  $\infty$ ?)

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}})$$

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} |K\pi| = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{K \rightarrow -\infty} |K\pi| = +\infty$$



e dunque  $\infty$  non è una singolarità isolata (cioè l'insieme su cui  $f$  è olomorfa non è solo tipo  $\mathbb{C} \setminus k$ , con  $k$  compatto) e quindi non ha senso calcolare  $\operatorname{Res}(f, \infty)$ .

Abbiamo già visto in precedenza che ogni dei punti  $k\pi$  è una zero semplice per tutti quanti essi sono fatti semplici e

$$\text{Res}(f, k\pi) = \lim_{z \rightarrow k\pi} (z - k\pi) f(z) = \frac{e^{k\pi}}{D \sin z / z - k\pi} = \frac{e^{k\pi}}{(-1)^k}$$

- Determinare le singolarità di  $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$  e dire se ha senso calcolare il residuo in 0.

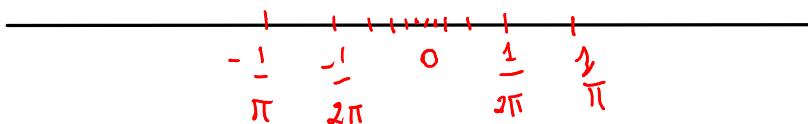
$$\sin w = 0 \iff w = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \frac{1}{z} = 0 \iff \frac{1}{z} = k\pi \iff z = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \left( \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k\pi} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \right))$$

Non ha senso calcolare il residuo in 0 poiché 0 non è una singolarità isolata

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{k\pi} = 0$$



Ha senso invece calcolare il residuo di  $f$  all'infinito dato che le singolarità di  $f$  costituiscono un insieme compatto

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = ? \quad \text{CALCOLARE PER ESERCIZIO!}$$

- Calcolare il residuo in 0 di  $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$

$\forall z \neq 0 \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$  quindi

Il residuo è il coefficiente del termine  $\frac{1}{z}$

che si ottiene per  $2n-4=-1$  cioè per  $n = \frac{3}{2}$

Quindi il coefficiente di  $\frac{1}{z}$  è nullo e

$$\frac{\sin z}{z^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!}$$

è la serie di Laurent di centro 0 della funzione  $\sin z / z^5$

$n$  deve essere intero!

$$\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z^5}, 0\right) = 0$$

- Calcolare il residuo in 0 della funzione  $f(z) = z^6 \sin \frac{1}{z}$

$\forall z \neq 0 \quad \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}} \cdot \frac{1}{(2n+1)!}$ , quindi 0 è una sing. essenziale per la funzione  $\sin \frac{1}{z}$

$$z^6 \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n-5}} \cdot \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$2n-5=1 \rightarrow n=3$$

$$\text{Res}\left(z^6 \sin \frac{1}{z}, 0\right) = (-1)^3 \cdot \frac{1}{7!} = -\frac{1}{7!}$$

- Determinare i residui in tutti i punti singolari per la funzione  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 1}$

$$z^2 - 3z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \quad / \quad \begin{cases} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ovvero

$$f \in H\left(\mathbb{C} \setminus \left\{0, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}\right)$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ z \rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}}} \frac{1}{(z - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(z - \frac{3-\sqrt{5}}{2})} e^{\frac{1}{z-2}} = \frac{\frac{1}{e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}}{\sqrt{5}} = \text{Res}(f, \frac{3+\sqrt{5}}{6})$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ z \rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2}}} \frac{1}{(z - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(z - \frac{3+\sqrt{5}}{2})} e^{\frac{1}{z-2}} = -\frac{\frac{1}{e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}}{\sqrt{5}} = \text{Res}(f, \frac{3-\sqrt{5}}{6})$$

Chiamiamo ora di stabilità olo che tipo di singolarità è 0 per  $f$ . Dovendone non può essere una singolarità eliminabile dato che  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  (se esistesse dovrebbe essere il  $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$  ma così non è poiché 0 è sing. essenziale per  $e^{\frac{1}{z}}$ )

Supponiamo per ora che sia un polo

allora dovrebbe esistere  $k > 0$  tale che  $\lim_{z \rightarrow 0} z^k f(z) = l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

quindi  $\left| \frac{z^k}{z^2 - 3z + 1} e^{\frac{1}{z}} \right| \xrightarrow[z \rightarrow 0]{} |l|$  e quindi  $|e^{\frac{1}{z}}| \xrightarrow[z \rightarrow 0]{} +\infty$ , dato

che  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z^2 - 3z + 1|}{|z|^k} = +\infty$ , ma anche questo contraddice il fatto che 0 è una singolarità semplice per la funzione  $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ .

Come possiamo calcolare  $\text{Res}(f, 0)$ ? (Non è facile ottenere in questo caso lo sviluppo di Laurent in 0 per  $f$ )

Possiamo però far ricorso al II teorema dei residui:

$\text{Res}(f, \infty) + \text{Res}\left(f, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + \text{Res}\left(f, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \text{Res}(f, 0) = 0$ , quindi il residuo in 0 delle singolarità-

chiamiamo di calcolare  $\text{Res}(f, 0)$  (sperando che sia più facile di calcolare  $\text{Res}(f, 0)$ )

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z} + 1} \cdot e^{\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-3z+z^2}{z^2}} \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

Dato che la funzione  $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-3z+z^2}$  ha una singolarità eliminabile in 0

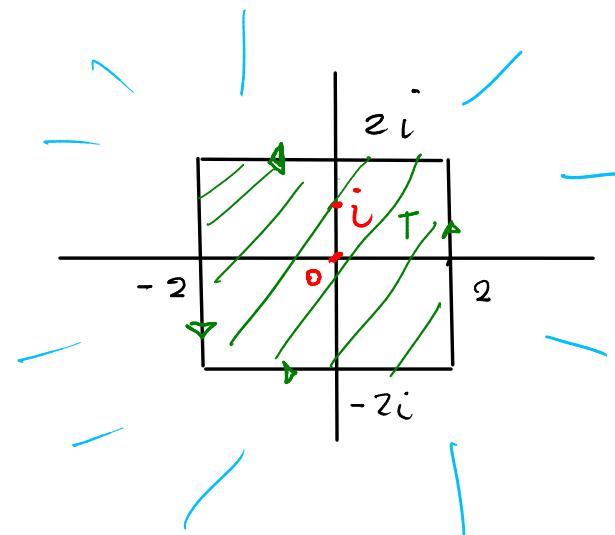
$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0, \text{ allo cui } \operatorname{Res}(f, 0) = -\operatorname{Res}(g, \frac{3+\sqrt{5}}{2}) - \operatorname{Res}(g, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0$$

- Calcolare

$$\int_{\gamma^+ T} e^{\frac{1}{z^2 - iz}} dz, \text{ dove } T \text{ è il quadrato } T = \{z \in \mathbb{C} \mid |Re z| \leq 2, |Im z| \leq 2\}$$

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0, i\})$  otta che

$$z^2 - iz = 0 \Leftrightarrow z=0 \vee z=i$$



$$\int_{\gamma_T} e^{\frac{1}{z^2-i^2}} dz = 2\pi i \left( \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, i) \right) = -2\pi i \text{Res}(f, 0)$$

↑  
 Teorema del caile  
↑  
 II termine del caile

$$f\left(\frac{z}{z^2}\right) \left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{\frac{z^2}{z^2}-i^2}} = -\frac{1}{z^2} e^{\frac{z^2}{1-iz}}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \left(-\frac{1}{z^2}\right) e^{\frac{z^2}{1-iz}} = \lim_{z \rightarrow 0} -e^{\frac{z^2}{1-iz}} = -e^0 = -1 \neq$$

quindi 0 è un polo di ordine 2 per  $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

$$\text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1!} D\left(z^2 \left(-\frac{1}{z^2}\right) f\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$D\left(-f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -Df\left(\frac{1}{z}\right) = -D e^{\frac{z^2}{1-iz}} = -e^{\frac{z^2}{1-iz}} \frac{2z(1-iz)-z^2(-1)}{(1-iz)^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(-e^{\frac{z^2}{1-iz}} \frac{2z(1-iz)+z^2}{(1-iz)^2}\right) = -e^0 \frac{0+0}{1} = 0$$

quindi  $\text{Res}(f, 0) = 0$  e anche l'integrale che avevamo da calcolare è uguale a 0.

## Integrale improprio su $\mathbb{R}$ di una funzione continua

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua su  $\mathbb{R}$ . Vogliamo valutare  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

1<sup>a</sup> caso da fare: stabilire se  $f$  è integrabile in senso improprio su  $\mathbb{R}$

Ricordiamo che se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua su  $\mathbb{R}$ ,  $f$  è integrabile assolutamente in senso improprio su  $[a, +\infty)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  (rispettivamente su  $(-\infty, b]$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ) se

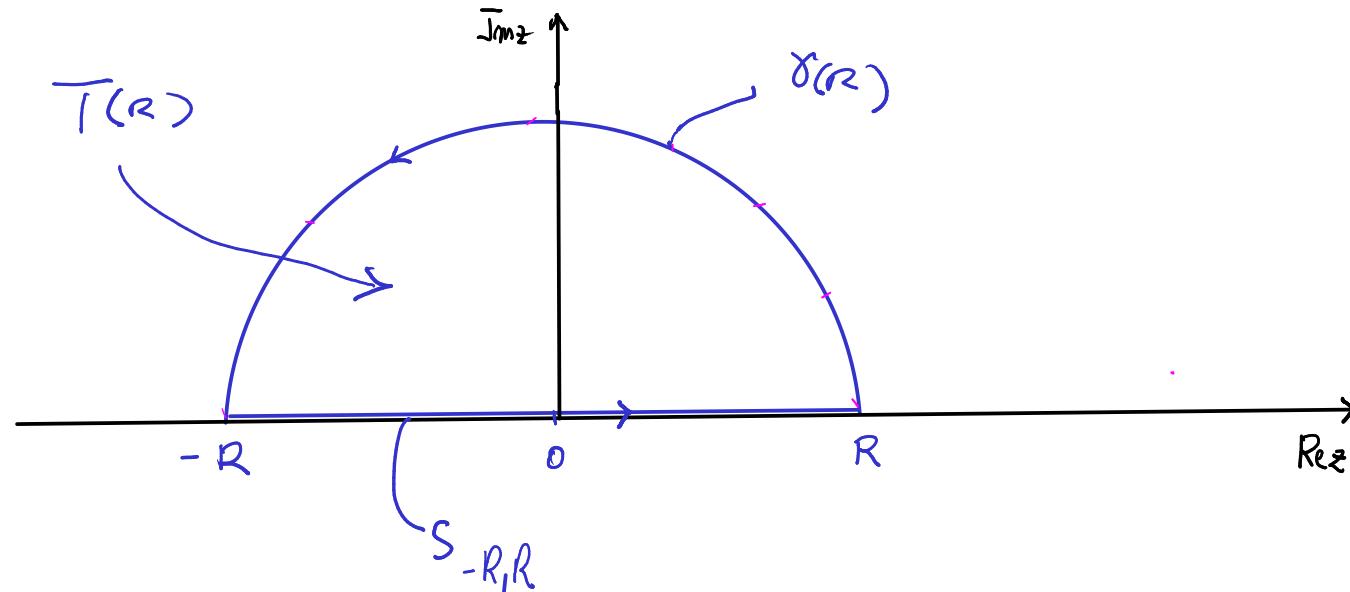
$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}, \text{ con } \alpha > 1, \text{ definitivamente per } x \rightarrow +\infty \quad (\text{risp. per } x \rightarrow -\infty)$$

Ricordiamo anche che se  $f$  è assolutamente integrabile su  $(-\infty, b]$  o su  $[a, +\infty)$  è anche integrabile in senso improprio nello stesso intervallo

Passo alla base del metodo dei residui

Supponiamo che  $f$  abbia un'estensione analitica (che indicheremo con  $\tilde{f}$ ) tranne che in un numero finito di punti su  $\mathbb{C}$ .

Consideriamo la curva  $\Gamma(R)$  in blu in figura (diciendo  $O$  e  $\omega$  i raggi  $R$ ) data dal seguente  $S_{R,R}$  e dalla semicirconferenza  $\delta(R)$  e sia  $T(R)$  il dominio che ha come frontiera  $\Gamma$ .



Allora abbiamo:

$$\int_{\Gamma(R)} \widetilde{f}(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \overline{T(R)}} \text{Res}(\widetilde{f}, z_k)$$

$\sim$   
z<sub>k</sub> singolare per  $\widetilde{f}$ ,  $z_k \in \overline{T(R)}$

||

$$\int_{S_{-R,R}} \widetilde{f}(z) dz + \int_{\gamma(R)} \widetilde{f}(z) dz \quad (\square) . \quad \text{I due segmenti } S_{-R,R} \text{ ha equazione}$$

$$S_{-R,R} (t) = (t, 0), \quad t \in [-R, R]; \quad \text{quindi } (S'_{-R,R})'(t) = (1, 0) \quad \text{e dunque } (\square) \text{ è uguale a}$$

$$(\square) = \int_{-R}^R \tilde{f}(t, 0) \cdot (1, 0) dt + \int_{\Delta(R)} \tilde{f}(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt + \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z) dz$$

Passaggio al limite per  $R \rightarrow +\infty$  e supposemo che  $\exists \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^{\infty} f(t) dt = \Lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\text{Res}\left(\tilde{f}, z_k\right) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(t) dt + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^\infty \tilde{f}(t) dt$$

$\int_R^\infty \tilde{f}(t) dt$

$R \rightarrow +\infty$

$\Delta_2$

$$\text{cioè} \quad (\text{VP}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = A_1 - A_2$$

## VALORE PRINCIPALE: -

se  $f$  é integrável alors

$$:= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_c^a f(t) dt + \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = (\text{VP}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

È quindi fondamentale sapere calcolare  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} \widetilde{f}(t) dt$ .

Un teorema per il calcolo di  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} \widetilde{f}(z) dz$

Se

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \widetilde{f}(z) = 0 \quad \text{allora}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} \widetilde{f}(z) dz = 0$$

Esempio

$$\bullet \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx ; \quad f(x) = \frac{x}{1+x^6}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ed } \bar{e} \text{ continua}$$

$0 < f(x) \leq \frac{1}{x^6} \quad \forall x > 0$  e quindi  $f$  è integrabile in senso improprio su  $[0, +\infty)$

Consideriamo l'estensione di  $f$  a  $\mathbb{C}$ :

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{1+z^6} \quad f \in H(\mathbb{C} \setminus \{\sqrt[6]{-1}\})$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \tilde{f}(z) = 0 \quad \text{per} \quad \frac{z}{1+z^6} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{z^5} \right) \cdot \left( \frac{1}{\frac{z^6+1}{z^6}} \right) = 0$$

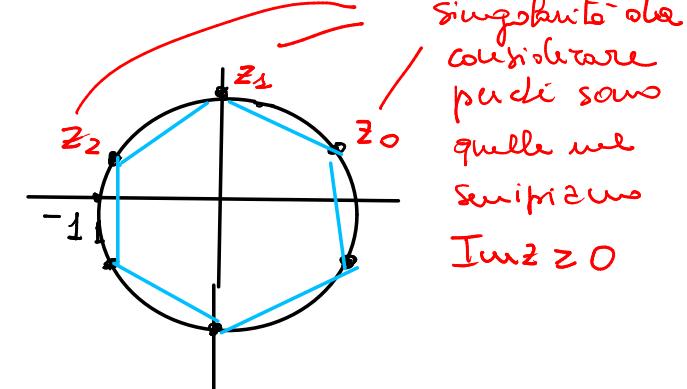
Usando il metodo dei residui dato che  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \tilde{f}(z) = 0$

otteniamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} = \pi i \sum_{k=0,1,2} \operatorname{Res} (\tilde{f}, z_k)$$

$z_k = \sqrt[6]{-1}$

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right)}, \quad k=0,1,2,3,4,5$$



$$\frac{1}{1+z^6} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_5)}, \quad \text{quindi le singolarità } z_n \text{ sono}$$

tutte poli semplici e  $\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{1}{1+z^6} = \frac{1}{(z_k - z_0)\dots(z_k - z_5)}$

Un modo "più furbo" per calcolare questo

limite è il seguente:

poiché  $p(z) = 1 + z^6$  è nullo in  $z_k$  (cioè  $p(z_k) = 0$ )

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{1 + z^6} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\frac{1}{p(z)}}{\frac{z - z_k}{z - z_k}} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{p(z) - p(z_k)}$$

$$= \frac{1}{p'(z_k)} = \frac{1}{6z_k^5}$$

in questi prodotti  
c'sono tutti i fattori  
del tipo  $z_k - z_i$   
dove  $z_i$  sono le zeri  
resto soli -1 tranne,  
ovviamente, quello che  
si ottiene per  $i = k$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx =$$

$$= \pi i \sum_{k=0,1,2} \operatorname{Res}(\tilde{f}, t_k) = \pi i \left( \frac{1}{6z_0^5} + \frac{1}{6z_1^5} + \frac{1}{6z_2^5} \right)$$

OSS

Lo stesso tipo di ragionamento può essere ripetuto per calcolare  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ , dove

$p$  e  $q$  sono polinomi,  $q$  privo di zeri reali,

con  $(\deg p) + 2 \leq (\deg q)$ .

In questo caso:  $\frac{p(x)}{q(x)}$  è assolutamente integrabile in senso improprio sul  $\mathbb{R}$

e inoltre  $\frac{p(z)}{q(z)} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$ .

## Integrali di tipo Fourier

Sono integrali del tipo  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iwt} dt, \quad w \in \mathbb{R} - \{0\}$

(si chiudono così perché entrano in gioco sulle definizioni di trasformata di Fourier di  $f$ )

Oss1

Poiché  $\cos(wt) = \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}$  e  $\sin(wt) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$  si ha i seguenti integrali

del tipo  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(wt) dt$  o  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(wt) dt$  rientrano in queste classi

Oss2

Poiché l'integrandone è  $f(t) e^{iwt}$ , se  $f$  si può estendere ad una funzione  $\tilde{f}$  che sia in  $\mathcal{C}$  meno un numero finito di punti allora  $\tilde{f}(z) e^{iwt}$  estende in modo analitico, sullo stesso insieme dove è analitica  $\tilde{f}$ , la funzione  $t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) e^{iwt}$

Nell'applicazione del metodo dei residui occorre calcolare

lim  $\int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z) e^{iwt} dz$ ,  $\gamma(R)$  semicirconferenza di centro 0 e raggio  $R$  orientata in senso antiorario e avente immagine nel semipiano  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$

Quando l'integrande è del tipo  $z \mapsto f(z) e^{i\omega z}$ ,  $\omega > 0$ , forniamo  
usare a tale scopo il lemma di Jordan.

Lemma di Jordan (per il semipiano  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ )

Se  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{f}(z) = 0$  e  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\omega > 0$

allora

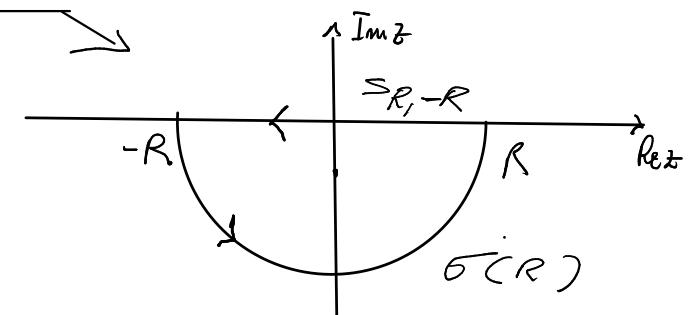
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\sigma(R)} e^{i\omega z} \tilde{f}(z) dz = 0$$

C'è anche una versione del lemma di Jordan per il semipiano  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$   
cioè per  $R$  così in cui  $\omega < 0$ . Quando  $\omega < 0$  si considera un cammino  
 $\Gamma(R)$  fatto in questo modo

Lemma di Jordan (per il semipiano  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$ )

Se  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{f}(z) = 0$  e  $\omega < 0$

allora:  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\sigma(R)} e^{i\omega z} \tilde{f}(z) dz = 0$



- Si vogliamo calcolare  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2} dx$ , con  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$

Osserviamo che  $\left| \frac{\cos(kx)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$  e quindi la funzione  $\frac{\cos(kx)}{1+x^2}$  è integrabile in senso improprio su  $[0, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{2(1+x^2)} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{2(1+x^2)} dx \\ &= \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx \right). \end{aligned}$$

Iniziamo col calcolare l'integrale ① :

Consideriamo l'estensione complessa della funzione integranda  $g(z) = \frac{e^{ikz}}{1+z^2}$

$g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{i, -i\})$ . Osserviamo che  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{1+z^2} = 0$  quindi possiamo applicare le tecniche di Jordan (per il semipiano  $\text{Im } z \geq 0$ , dato che  $k > 0$ ) e ottenere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

Sono da considerare solo le singolarità di  $f$  che appartengono al semipiano  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ !

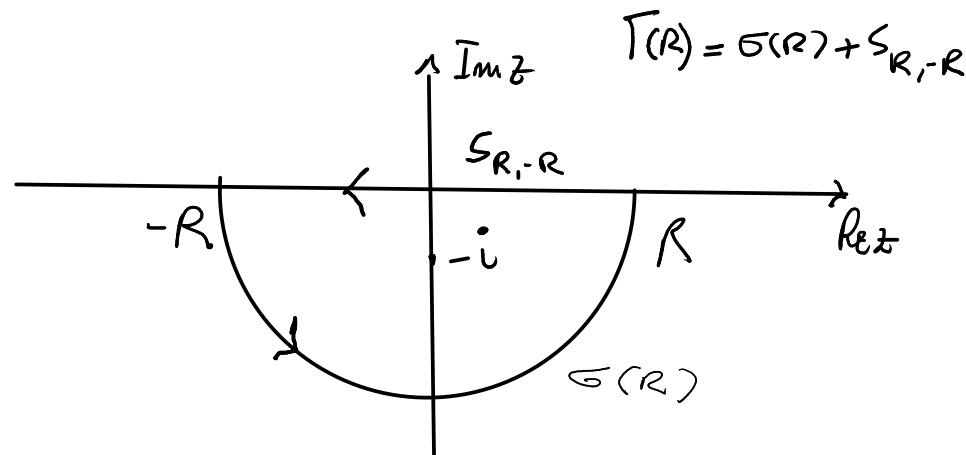
Il punto  $i$  è polo semplice per  $f$ . Infatti  $\lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{ikz}}{(z+i)} = \frac{e^{ikz}}{2i}$ .

Dunque il residuo di  $f$  in  $i$  è uguale a  $\frac{e^{-k}}{2i}$  e  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{(1+x^2)} dx = 2\pi i \frac{e^{-k}}{2i} = \pi e^{-k}$

Calcoliamo ora l'altro integrale. Abbiamo altre possibilità: o usare il metodo dei residui e il Lemma di Jordan per il semipiano  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$  (si osservi che nel secondo integrale l'argomento della funzione esponenziale è  $-ikx$  e  $-k < 0$ ) o fare un cambio di variabile, ponendo  $-x = y$ , con il quale si ottiene che il secondo integrale è uguale al primo.

Per esercizio calcoliamo usando sia modo il metodo dei residui.

Scegliere come cammino di integrazione le circonferenze  $-i$  delle estensioni olomorfe  $\mathcal{S}$  delle funzioni integrande (cioè  $g(z) = \frac{e^{-ikz}}{1+z^2}$ ) le curve  $\Gamma(R)$  in figure



Si osservi che queste volte il seguente è percorso nel verso opposto al caso precedente e quindi

$$\int_{\sigma_{R,-R}} g(z) dz = - \int_{\sigma(R)} g(z) dz = - \int_{-R}^R g(x) dx$$

Applicando questi il Lemma dei residui e il Lemma di Jordan per  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$ ,

Oteviamo:

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, -i) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx . \quad \text{Ora anche } -i \text{ è un polo semplice per } f \text{ e}$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{e^{-ikz}}{(z-i)(z+1)} = \cancel{e^{\frac{-ik(-1)}{-2i}}} = \cancel{e^{\frac{-k}{-2i}}}.$$

e quindi  $2\pi i \frac{e^{-k}}{-2i} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx$  da cui  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-k}$

In definitiva l'integrale cercato è uguale a  $\frac{1}{i} (\pi e^{-k} + \pi e^{-k}) = \frac{\pi}{2} e^{-k}$ .

Vogliamo ora calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Oss 1

Si può dimostrare che la funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  NON è assolutamente integrabile su  $(0, +\infty)$  ma è solo integrale.

Dss 2

L'estensione a  $\mathbb{C}$  di  $\frac{\sin x}{x}$ , cioè la funzione  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  ha in 0 una singolarità eliminabile; dato però che  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \cdot \frac{\sin z}{z} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sin z$  non esiste

non c'è speranza di usare il teorema visto nelle lezioni precedenti per calcolare

l'area  $\int_{P_R} \frac{\sin z}{z} dz$ . Possiamo invece usare il teorema di Jordan, come visto sopra e fatto di prendere un cammino de "tagli fuori" la singolarità in 0 di  $\frac{1}{z}$ .

Verifichiamo qui dettagli in che modo:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ è una funzione pari per cui} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

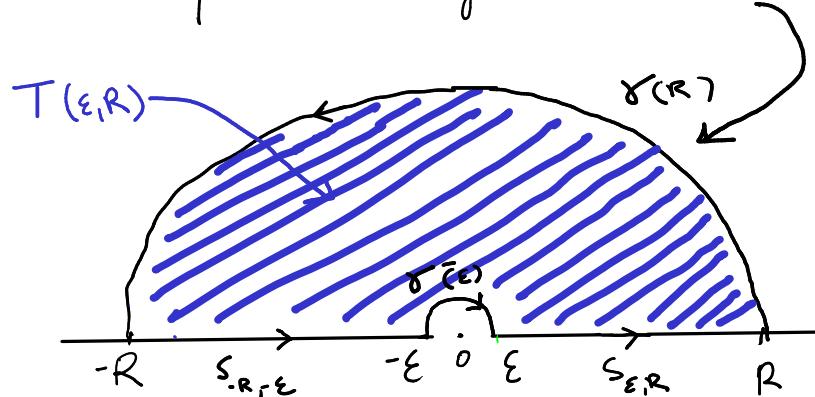
$$\text{Ora} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx}_{(1)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{-2ix} dx}_{(2)}$$

Calcoliamo l'integrale (1):

l'esternare a  $\mathbb{C}$  di  $\frac{\ell'^x}{2ix}$  è la funzione  $\frac{\ell^{iz}}{2iz}$  che si chiama in  $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Consideriamo quindi il seguente diagramma. Nel piano  $T(\varepsilon, R)$ , il cui bordo è la curva definita dalle semicirconferenze  $\gamma(R)$ , del segmento  $S_{-R, -\varepsilon}$  delle semicirconferenze

$\bar{\gamma}(\varepsilon)$  e del segmento  $S_{\varepsilon, R}$  non ci sono singolarità per cui:



Th. di Cauchy-Goursat



$$0 \quad = \int_{T(\varepsilon, R)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz =$$

$$= \int_{\gamma(R)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ell'^x}{2ix} dx + \int_{\bar{\gamma}(\varepsilon)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{\ell'^x}{2ix} dx$$

Per  $R \rightarrow +\infty$  e poi per  $\varepsilon \rightarrow 0$  otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ell'^x}{2ix} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\gamma}(\varepsilon)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\gamma}(\varepsilon)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz$$

Per il termine che fornisce il secondo termine è 0. Per calcolare il primo termine Page 150 of 184  
il seguente termine è essenziale:

Termino

Sia  $h$  olomorfa in  $D'(z_0, \delta)$  e  $z_0$  singolarità isolata per  $h$  se

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} (z - z_0) h(z) = \lambda \in \mathbb{C} \quad (\text{quindi } z_0 \text{ è un polo semplice se } \lambda \neq 0)$$

allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} h(z) dz = i \lambda \pi$$

- In particolare se  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) h(z) = 0$  allora  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} h(z) dz = 0$

Nell'applicazione al calcolo delle nostre integrazioni si ottiene che  $z_0 = 0$  e

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{z^2}}{2iz} = \frac{1}{2i} \quad \text{e quindi}$$

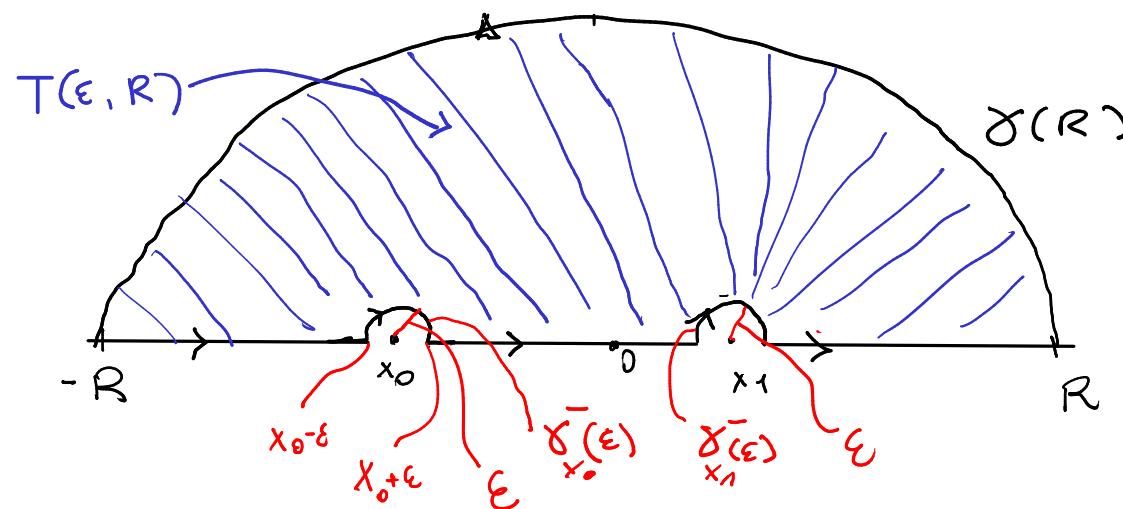
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta(\epsilon)}^{\frac{1}{2iz}} dz = i\pi \frac{1}{2i}, \text{ dunque} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx = \frac{\pi}{2}$$

Per calcolare l'integrale ② potremo usare il lemma di Jordan per il semipiano di numeri complessi  $\mathbb{C}$ , tali che  $\operatorname{Im} z < 0$  e il lemma qui sopra con  $\alpha = \pi$ ,  $\beta = 2\pi$  oppure - possiamo osservare che

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{2ix} dx \stackrel{-x=y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy}}{-2iy} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy}}{2iy} dy = \frac{\pi}{2}$$

Quindi l'integrale s'è quindi uguale a  $\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$ .

In generale, se  $f$  ha punti singolari sull'asse dei numeri reali, ad esempio nei punti  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ , poniamo considerare il cammino seguente



Supponiamo che  $f$  non possa estendersi ad una funzione olomorfa nel piano complesso tranne che su un insieme finito di punti e consideriamo il dominio  $T(\epsilon, R)$  (trattagliato in blu) il cui bordo è lo curve in nero nelle figure qui sopra. Dal I Teorema dei residui abbiamo

$$2\pi i \sum_{\substack{z \text{ in sing. per } f \\ z_k \in T(\epsilon, R)}} \operatorname{Res}(f, z_k) = \int_{\partial T(\epsilon, R)} f(z) dz = \int_{\gamma(R)} f(z) dz + \int_{S_{-R, x_0 - \epsilon}} f(z) dz - \int_{S_{x_0 + \epsilon, x_1 - \epsilon}} f(z) dz - \int_{\gamma_{x_1}(\epsilon)} f(z) dz + \int_{S_{x_1 + \epsilon, R}} f(z) dz$$

farando tendere  $R \rightarrow +\infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$  otteniamo (VP)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du \rightarrow$  perciò che esistono

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} f(z) dz \quad e \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{x_1}(\epsilon)} f(z) dz \quad e \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{x_1 + \epsilon, R}} f(z) dz.$$

## Serie di Fourier

Si  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une funzione assolutamente integrabile

DEF

Si definisce COEFFICIENTE (k-ESIMO) DI FOURIER ( $k \in \mathbb{Z}$ ) DI f il numero

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (\in \mathbb{C})$$

DEF

Si definisce SERIE DI FOURIER DI f la serie hilbertiana di funzioni

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$$

Un polinomo trigonometrico in  $\mathbb{R}$  è una funzione del tipo

$$t \in \mathbb{R} \mapsto a_0 + \sum_{k=0}^m a_k \cos(kt) + \sum_{k=0}^m b_k \sin(kt), \text{ dove}$$

$$k \in \mathbb{N} \text{ e } a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

Vediamo che la serie  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$  possa essere scritta come  $a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kt)$

$$e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt); \text{ poiché } \cos(-kt) = \cos(kt) \text{ e } \sin(-kt) = -\sin(kt)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cos(kt) + i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \sin(kt) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cos(kt) + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \cos(kt) + i \left( \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \sin(kt) + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \sin(kt) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \cos(-kt) + i \left( \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \sin(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \sin(-kt) \right) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{c_0}_{a_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{(c_k + c_{-k})}_{a_k} \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} i(c_k - c_{-k}) \sin(kt)$$

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt = \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt}$$

$\forall k \in \mathbb{N}, k > 0$

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (e^{-ikt} + e^{ikt}) / 2 dt$$

$$= \boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2i \cdot i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (e^{-ikt} - e^{ikt}) / 2 dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (-\sin(kt)) dt = \boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt}$$

## RICONDIZIONE DEL CASO DI UNA FUNZIONE DEFINITA SU $[a, b] \supset [-\pi, \pi]$

Se poniamo che  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  assolutamente integrabile in  $[a, b]$ , possiamo scrivere la serie di Fourier di  $f$  usando le definizioni viste per funzioni definite su  $[-\pi, \pi]$ . Infatti è sufficiente considerare il cambio di variabile, cioè la trasformazione,

$$\tau \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{b-a}{2\pi} \tau + \frac{a+b}{2} \in [a, b]$$

$$\text{e la funzione } g(\tau) = f\left(\frac{b-a}{2\pi} \tau + \frac{a+b}{2}\right)$$

I coefficienti di Fourier di  $g$  sono dati da

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) e^{-ik\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{b-a}{2\pi} \tau + \frac{a+b}{2}\right) e^{-ik\tau} d\tau;$$

usando le formule di integrazione per sostituzioni ponendo  $x = \frac{b-a}{2\pi} \tau + \frac{a+b}{2}$   
e cui  $\tau = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \frac{2\pi}{b-a}$  e  $d\tau = \frac{b-a}{2\pi} dx$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{b-a} \left(x - \frac{b+a}{2}\right)} dx = e^{+ik\pi \frac{b+a}{b-a}} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{b-a} x} dx$$

La serie di Fourier di  $f$  è data da

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( e^{+ik\pi \frac{b-a}{b-a}} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a} x} dx \right) e^{ik\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \frac{2\pi}{b-a}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a} x} dx \right) e^{ik\frac{2\pi}{b-a} x} \end{aligned}$$

per cui la serie di Fourier di  $f = f(x)$ ,  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  è data da

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a} x} dx \right) e^{ik\frac{2\pi}{b-a} x}$$

O, equivalentemente, da:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} kx\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{b-a} kx\right)$$

ove  $a_0 = a_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

$$a_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} kx\right) dx, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$b_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| \sin\left(\frac{2\pi}{b-a} kx\right) dx, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

In particolare se  $[a, b] = [0, T]$

$$f_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right), \text{ con}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx$$

OSS.

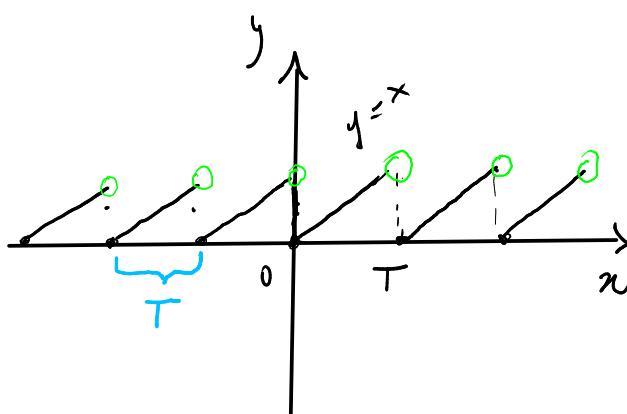
Osserviamo che se la serie di Fourier di  $f$  converge puntualmente in  $[a, b]$

allora dato che le funzioni che costituiscono i termini delle serie sono periodiche di periodo  $b-a$  la somma si può estendere per periodicità

su  $\mathbb{R}$ , con periodo  $b-a$ , tale estensione sarà ovviamente la soluzioe della serie  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Per questo motivo quando mi corrolo di stabilire se una funzione  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è puntualmente la somma delle sue serie di Fourier  
 le si estende per periodicità su  $\mathbb{R}$ , con periodo  $b-a$ , ad una funzione  
 $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (chiamata  $\tilde{f}(x + (b-a)) = \tilde{f}(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ )

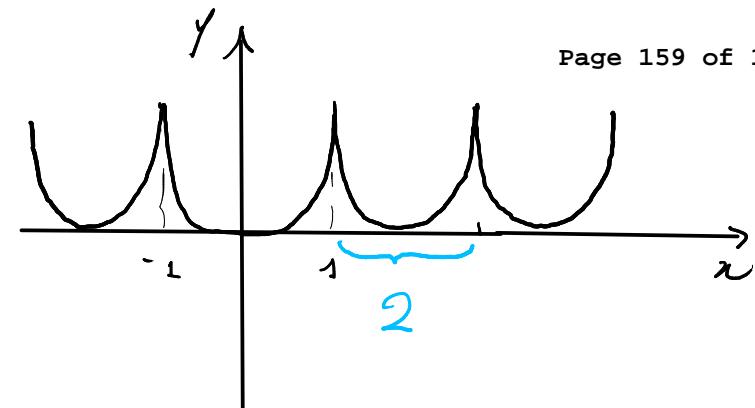
Chiamiamo meglio con degli esempi cose si intende per prolungamento periodico  
 di periodo  $b-a$  di una funzione definita in  $[a, b]$ .



In queste figure le funzioni

$$f(x) = x \quad \text{per } x \in [0, T]$$

è stata prolungata per periodicità su  $\mathbb{R}$  in modo da ottenere una funzione periodica. Nei punti  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  si è posto  $\tilde{f}(kT) = f(0)$ .



In quest'altra figura la funzione

$$f(x) = x^2 \quad \text{se } x \in [-1, 1]$$

è stata prolungata per periodicità su  $\mathbb{R}$  con periodo 2. Poiché  $f(-1) = f(1)$  il prolungamento periodico di  $f$  è continuo anche nei punti  $2m+1$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

- Una osservazione da fare è che il prolungamento periodico è univocamente definito se e solo se  $f(a) = f(b)$ .

Se  $f(a) \neq f(b)$  in tutti i punti del tipo  $b + k(b-a)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  bisogna scegliere come definire  $\tilde{f}$ , non esiste una selta canonica ( $\tilde{f}(b + k(b-a)) = \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ ).

SERIE DI SOLI SENI E SERIE DI SOLI COSENI DI  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

Sia  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , assolutamente integrabile su  $[0, T]$ .

Possiamo estendere  $f$  ad una funzione definita su  $[-T, T]$  che sia pari oppure dispari.

Ad esempio se  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, T]$

l'estensione pari è data da  $g(x) = |x|$ ,  $x \in [-T, T]$ , mentre l'estensione dispari è  $h(x) = x$ ,  $\forall x \in [-T, T]$ .

In generale se  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , la sua estensione pari a  $[-T, T]$  è

$$\text{definita da } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, T] \\ f(-x) & \text{se } x \in [-T, 0) \end{cases}$$

mentre la sua estensione dispari è definita da

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } x \in (0, T] \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-T, 0) \end{cases}$$

[2] dove gli Fourier di  $g$  su  $[-T, T]$  è una serie di soli valori

(dato che  $b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T g(x) \sin\left(\frac{\pi k}{T} x\right) dx = 0, \forall k$ , poiché l'integrande è dispari)

che si chiama SERIE DEI COSENI (DI FOURIER) DI  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

I suoi coefficienti sono quindi

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T g(x) \cos\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx$$

mentre la serie gli Fourier di  $h$  su  $[-T, T]$  è una serie di soli seni

(dato che  $a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T h(x) \cos\left(\frac{\pi k}{T} x\right) dx = 0, \forall k$ , poiché l'integrande è dispari)

che si chiama SERIE DEI SENI (DI FOURIER) DI  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .

I suoi coefficienti sono quindi

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T h(x) \sin\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx$$

Enunciamo ora un altro risultato importante riguardante la convergenza della serie di Fourier di  $f \in L^2$

### Torneo

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e si supponga che il quadrato di  $f$ ,  $(f(t))^2$  sia assolutamente integrabile su  $[a, b]$ . Allora

le successioni delle somme parziali delle serie di Fourier di  $f$

$$S_m = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikt} \text{ converge a } f \quad \underline{\text{in misura quadratica}}$$

cioè

$$\int_a^b |S_m(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Il seguente, altrettanto importante risultato, riguarda invece la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier:

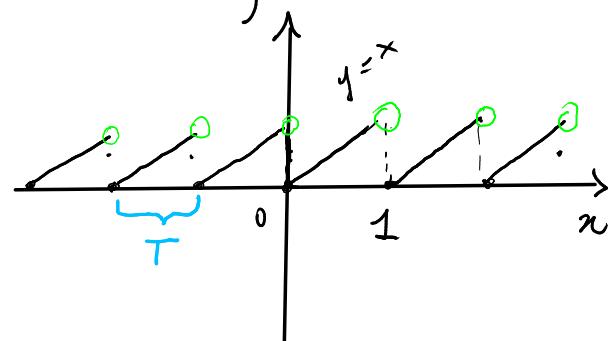
Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  assolutamente integrabile e consideriamo prolungamento periodico  $\tilde{f}$  di  $f$  a  $\mathbb{R}$  di periodo  $b-a$ .

- 1) La serie di Fourier di  $f$  converge a  $\tilde{f}(t)$  in ogni punto  $t \in \mathbb{R}$  in cui  $\tilde{f}$  è continua ed esistono finite le derivate destre e sinistre; (quindi in particolare in ogni punto in cui  $\tilde{f}$  è derivabile).
- 2) Se  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$  allora la convergenza è uniforme su  $\mathbb{R}$ . Inoltre la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso in cui  $\tilde{f}$  è continua e derivabile con derivate continue finite che in un numero finito di punti dove esistono finite le derivate destre e sinistre.

- 3) In ogni punto  $t \in \mathbb{R}$  in cui  $\tilde{f}$  ha discontinuità di I specie ed in cui esistono limiti  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(\bar{t}+h) - \tilde{f}(\bar{t}_+)}{h} \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{f}(\bar{t}+h) - \tilde{f}(\bar{t}_-)}{h} \in \mathbb{R}$

La serie di Fourier di  $\tilde{f}$  converge a  $\frac{\tilde{f}(\bar{t}_+) + \tilde{f}(\bar{t}_-)}{2}$   
 ovvero  $\tilde{f}(\bar{t}_+) := \lim_{t \rightarrow \bar{t}^+} \tilde{f}(t)$  e  $\tilde{f}(\bar{t}_-) := \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tilde{f}(t) dt$

Ad esempio, ricordiamoci la funzione  $f$  in figura ( $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ )



In tutti i punti  $t = m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  tale funzione ha discontinuità di

specie.  $\tilde{f}(m_-) = \lim_{t \rightarrow m^-} \tilde{f}(t) = 1$  e  $\tilde{f}(m_+) = \lim_{t \rightarrow m^+} \tilde{f}(t) = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m_+)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m+h - m}{h} = 1$$

dato che nell'intervallo  $[m, m+1]$ ,  $f(u) = u - m$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m_-)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{m+h - (m-1)}{h} = 1$$

dato che nell'intervallo  $[m-1, m]$ ,  $f(u) = u - (m-1)$

Quindi le condizioni nelle 3) del Teorema precedente sono soddisfatte e la serie di Fourier di  $f$  converge a  $\frac{1}{2}$  in ogni punto  $t = m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

La convergenza a  $\tilde{f}$  è uniforme in ogni intervallo chiuso  $[c, d] \subset (m, m+1)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  in quanto su tali intervalli  $\tilde{f}$  è di classe  $C^1$ .

Enunciamo infine una relazione fra l'integrale di  $f^2(t)$  e la serie dei coefficienti Fourier di questo.

### Identità di Parseval

Sia  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f^2$  sia integabile su  $[a,b]$ . Allora le serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$  sono convergenti ( $a_k$  e  $b_k$  sono i coefficienti di Fourier di  $f$  su  $[a,b]$ ) e mi ha

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$$

↳ identità di Parseval

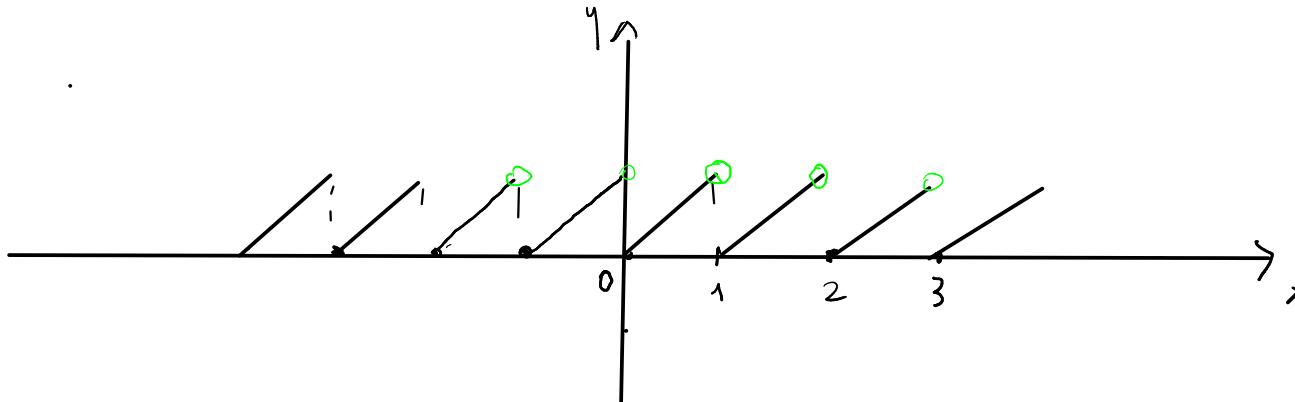
Si tenga presente che su alcuni testi l'identità di Parseval viene scritta così

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 .$$

La differenza con le formule evidenziate qui sopra sta nel primo termine della serie degli  $a_k$  che è dato da  $\frac{a_0^2}{4}$ .

Questa differenza è ovvia al fatto che in tali testi  $a_0$  è definito come  $\frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  e non come  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  (ovviamente con tale definizione il primo termine nella serie di Fourier diviene  $\frac{a_0}{2}$ ).

- Suivere le sue di Fourier della funzione  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$   
e studiare la convergenza puntuale e uniforme



Sue di Fourier di  $f$  in  $[0,1]$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{1} \int_0^1 f(t) \cos\left(\frac{2\pi k t}{1}\right) dt = 2 \int_0^1 t \cos(2\pi k t) dt =$$

$$= 2 \left[ t \frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k} dt$$

$$= 0 + \frac{1}{k\pi} \left[ \frac{\cos(2\pi kt)}{2k\pi} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left[ \frac{1}{2k\pi} - \frac{1}{2k\pi} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} b_k &= 2 \int_0^1 t \sin(2k\pi t) dt = 2 \left[ -t \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} dt \\ &= 2 \left( -\frac{1}{2k\pi} \right) + 2 \left[ \frac{\sin(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{k\pi} \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier di  $f$  è

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \sin(2\pi kt) \quad \text{Tale serie converge puntualmente a } \tilde{f},$$

ove  $\tilde{f}$  è il prolungamento a  $\mathbb{R}$  periodico di periodo 1 di  $f$ ,

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  e converge a  $\frac{1}{2}$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}$  dato da

$\forall t \in \mathbb{Z}$ ,  $\sin(2\pi kt) = 0$ ,  $\forall k$ , e quindi la serie si riduce al solo termine  $a_0 = \frac{1}{2}$

D'altra parte:

$\tilde{f}$  ha discontinuità di I specie in ogni punto  $t \in \mathbb{Z}$ :

Oltre a  $\tilde{f}(t) = t - m$ , se  $t \in [m, m+1]$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  e dunque

$$\lim_{\substack{\sim \\ t \rightarrow m^+}} \tilde{f}(t) = \lim_{\substack{\sim \\ t \rightarrow m^+}} (t - m) = 0$$

$$\text{e } \lim_{\substack{\sim \\ t \rightarrow m^-}} \tilde{f}(t) = \lim_{\substack{\sim \\ t \rightarrow m^-}} t - (m-1) = 1 = \tilde{f}(m^-);$$

e inoltre i seguenti limiti esistono e sono finiti

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m^+)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m+h - m - 0}{h} = 1$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m^-)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{m+h - (m-1) - 1}{h} = 1$$

Infini la serie converge a  $\tilde{f}$  uniformemente in ogni intervallo chiuso  $[c, d] \subset (m, m+1)$

oltre che  $\tilde{f}$  è di classe  $C^1$  su tali intervalli.

Ricaviamo che la serie dei segni è quella dei valori di  $f$ .

L'estensione chisponi di  $f$  sull'intervallo  $(-1, 1)$  è ovviamente data da  $h(x) = x$ . Estendiamo  $h$  per periodicità a  $\mathbb{R}$  con periodo 2 (convenzione di assegnare in  $-1$  il valore  $-1$ ). Denotiamo con  $\tilde{h}$  tale estensione.

$$\begin{aligned} \text{Poiché } \tilde{h} \text{ è dispari } a_k &= 0, \forall k; b_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x \sin\left(\frac{2\pi}{2} kx\right) dx = 2 \int_0^1 x \sin(k\pi x) dx \\ &= -\left[x \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} dx = -2\left(\frac{(-1)^k}{k\pi} - 0\right) + 2 \left[\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_0^1 \\ &= -2 \frac{(-1)^k}{k\pi} + 0 \end{aligned}$$

Quindi la serie dei segni di Fourier è data da  $-2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi x)$

Tale serie dunque converge a  $\tilde{h}$  in  $\mathbb{R} \setminus \{2m+1\}_{m \in \mathbb{Z}}$ , uniformemente in ogni intervallo chiuso  $[c, d] \subset (2m+1, 2m+3)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Nei punti  $x = 2m+1$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  converge a 0

Per l'identità di Parseval deve essere  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-2 \frac{(-1)^k}{k\pi}\right)^2$ , quindi abbiamo che

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{cioè} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Estendiamo ora  $f$  a  $[-1, 1]$  come funzione pari. Tale estensione è funzione  $\tilde{l}(x) = |x| \quad x \in [-1, 1]$ . Ricaviamo la serie di Fourier di  $\tilde{l}$ .

Questa volta  $b_k = 0$  perché  $\tilde{l}$  è pari

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}; \quad a_k = 2 \int_0^1 x \cos\left(\frac{2\pi k x}{2}\right) dx = \\ &= 2 \left[ x \frac{\sin(\pi k x)}{\pi k} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(\pi k x)}{\pi k} dx = 2 + 2 \left. \frac{\cos(\pi k x)}{(\pi k)^2} \right|_0^1 = \\ &= 2 \left( \frac{(-1)^k}{(\pi k)^2} - \frac{1}{(\pi k)^2} \right) = \begin{cases} 0 & se k \in \text{pari} \\ -\frac{2}{(\pi k)^2} & k \in \text{dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Allora la serie dei coefficienti di  $f$  è data da

$$\frac{1}{2} - 2 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{[\pi(2h+1)]^2} \cos(\pi(2h+1)x) \quad \text{Data che } \tilde{l}, \text{ estensione periodica di } l \text{ a } \mathbb{R}$$

Così periodo 2 è continuo e oltrivoltile ovunque tranne che nei punti  $x = m \in \mathbb{Z}$ , dove comunque esistono finiti derivate destre e sinistre, la convergenza di tale serie di  $\tilde{l}$ , estensione periodica di  $l$  a  $\mathbb{R}$  con periodo 2, è uniforme su  $\mathbb{R}$ .

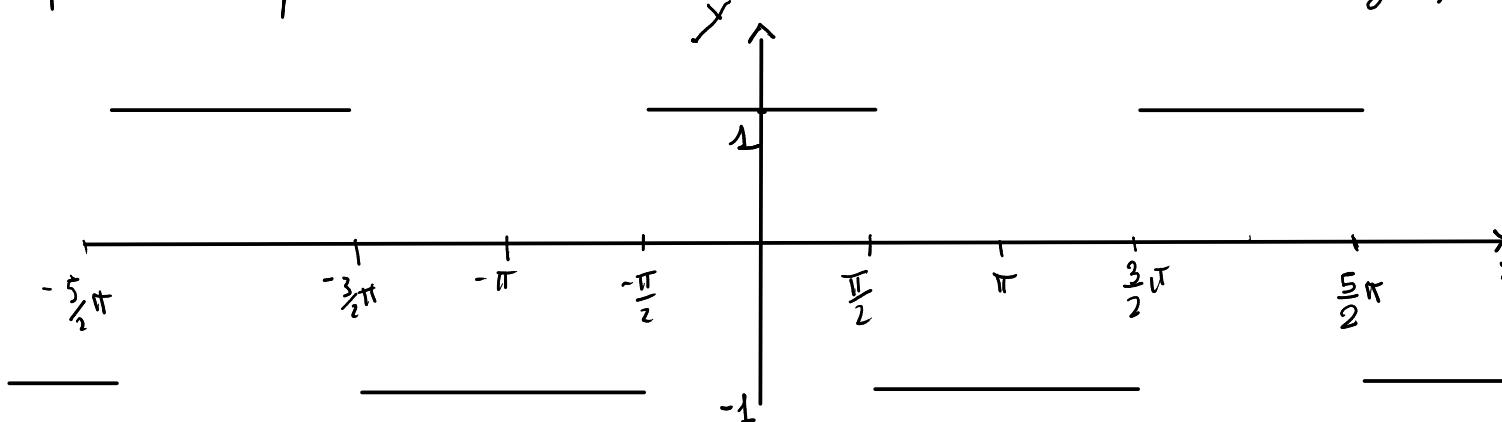
- Scrivere la serie di Fourier della funzione  $f$  pari, definita in  $[0, \pi]$  da

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & \text{se } t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Discutere la convergenza puntuale e uniforme.

Dimostrare la formula  $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$ .

(Si noti che  $f$  è obliqua solo su  $[0, \pi]$ , ma poiché abbiamo l'informazione che è pari e  $2\pi$  periodica possiamo "ricostruirla" su  $\mathbb{R}$ . Il suo grafico è:



Dato che  $f$  è pari,  $b_k = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(kt) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(kt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin(kt)}{k} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k} + \frac{2}{\pi} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k} = \frac{4}{k\pi} \sin(k\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

=  $\begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1 \\ & h \in \mathbb{N} \end{cases}$  (caso K dispari)

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2h+1} \cdot (-1)^h, \text{ con } k = 2h+1, h \in \mathbb{N}$$

Analogli la serie di Fourier di  $f$  è data da  $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \cos((2h+1)t)$

Essa converge a  $f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , converge a 0  $\forall t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ;

converge uniformemente a  $f$  in ogni intervallo chiuso non contenente alcun punto del tipo  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

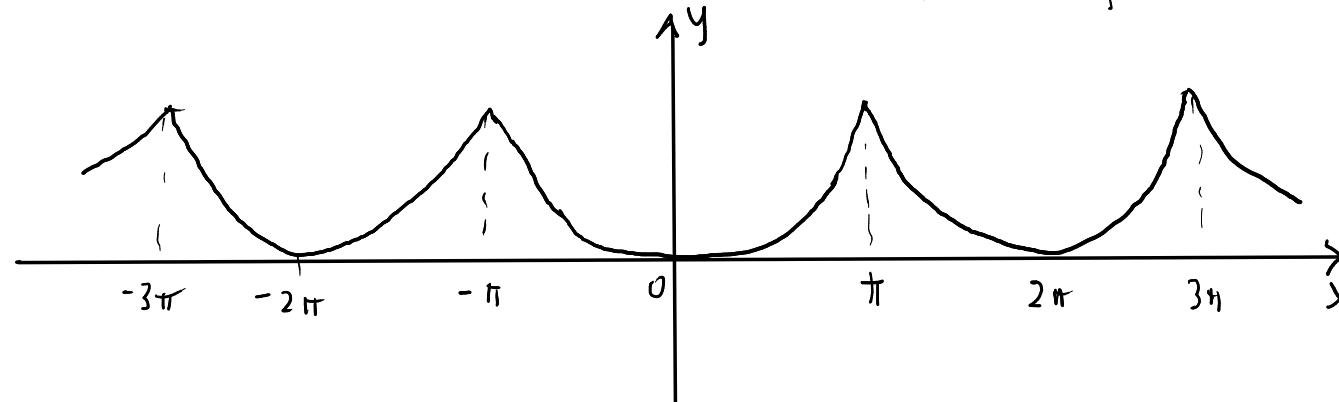
Per  $t=0$  la serie olivente  $\frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} = f(0) = 1$  de cui  $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} = \frac{\pi}{4}$ .

- Sviluppare in serie di Fourier la funzione  $f(x) = x^4$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  estesa per periodicità a  $\mathbb{R}$ , con periodo  $2\pi$ ,

Stabilire se la convergenza a  $\hat{f}$  (sua estensione periodica) è uniforme su  $\mathbb{R}$ .

Dimostrare, infine, che:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

L'estensione periodica di  $f$ , che denotiamo con  $\hat{f}$  ha questo andamento



Tale funzione è poi quindi i coefficienti  $b_k$  sono nulli  $\forall k \geq 1, k \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{5} \pi^5 = \frac{\pi^4}{5}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 \cos(kt) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} \left[ t^4 \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi - \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi 4t^3 \sin(kt) dt = \\
 &= \frac{2}{k\pi} \left[ \frac{4t^3 \cos(kt)}{k} \right]_0^\pi - \frac{8}{k^2\pi} \int_0^\pi 3t^2 \cos(kt) dt = \\
 &= \frac{2}{k^2\pi} 4\pi^3 (-1)^k - \frac{8}{k^3\pi} \left[ 3t^2 \sin(kt) \right]_0^\pi + \frac{24}{k^3\pi} \int_0^\pi 2t \sin(kt) dt \\
 &= \frac{8\pi^2}{k^2} (-1)^k - \frac{48}{k^3\pi} \left[ t \frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi + \frac{48}{k^4\pi} \int_0^\pi \cos(kt) dt \\
 &= \frac{8\pi^2}{k^2} (-1)^k - \frac{48}{k^4\pi} \pi (-1)^k + \frac{48}{k^4\pi} \left[ \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi = (-1)^k \left[ \frac{8\pi^2}{k^2} - \frac{48}{k^4} \right]
 \end{aligned}$$

La serie di Fourier di  $f$  è quindi:

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left( \frac{8\pi^2}{k^2} - \frac{48}{k^4} \right) \cos(kt) \quad (\square)$$

e converge uniformemente (e quindi puntualmente) su  $\mathbb{R}$  dato che la sua estensione periodica su  $\mathbb{R}$  di periodo  $2\pi$  e

continua su  $\mathbb{R}$  ed è olorabile con derivate continue su  $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2m\pi\}_{m \in \mathbb{Z}}$  e nei punti dove non è derivabile, cioè  $\{\pi + 2m\pi\}_{m \in \mathbb{Z}}$ , esistono finite le derivate destra e le derivate sinistra.

Vediamo (□) che  $t = \pi$ , poiché  $\cos(kt) = (-1)^k$ , otteniamo

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8\pi^2}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{48}{k^4} = f(\pi) = \pi^4$$

$$\text{da cui } 48 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{5} - \pi^4 + 8\pi^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \\ = -\frac{4}{5}\pi^4 + 8\pi^2 \frac{\pi^2}{6} = \frac{8}{15}\pi^4$$

$$\text{e quindi } \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{48} \cdot \frac{8}{15} \pi^4 = \frac{\pi^4}{90}$$

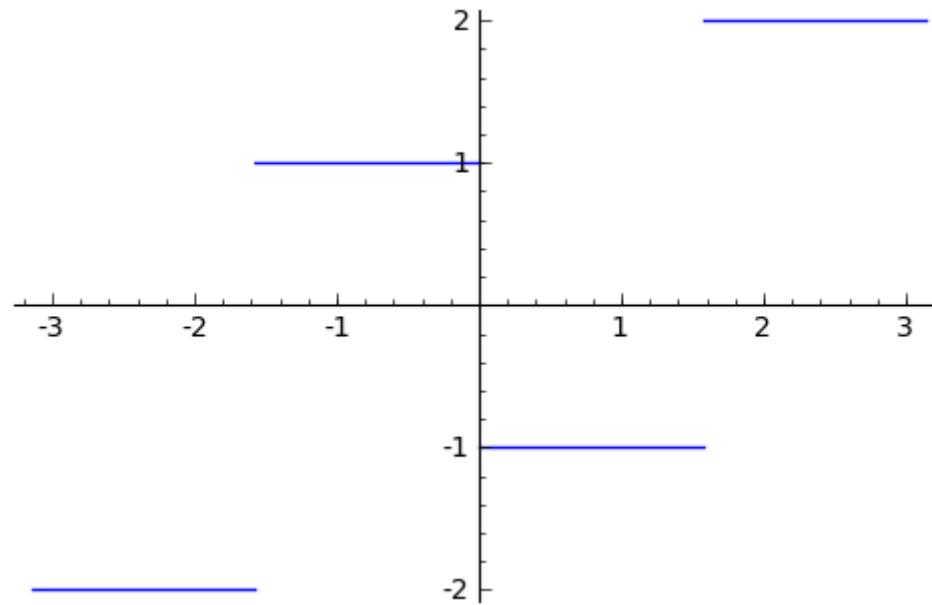
# serie di Fourier

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \in (-\pi, -\pi/2) \\ 1 & \text{se } x \in (-\pi/2, 0) \\ -1 & \text{se } x \in (0, \pi/2) \\ 2 & \text{se } x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

estesa per periodicità su  $\mathbb{R}$

```
f1(x) = -1
f2(x) = 2
f3(x) = 1
f4(x) = -2
f = Piecewise([[-pi,-pi/2],f4],[-pi/2,0],f3),[(0,pi/2],f1],[pi/2,pi],f2])
g = Piecewise([[-2*pi,-(3/2)*pi],f1],[-(3/2)*pi,-pi],f2),[(-pi,-pi/2],f4),[-pi/2,0],f3],
[(0,pi/2],f1),[(pi/2,pi],f2),[(pi,(3/2)*pi],f4),[((3/2)*pi,2*pi],f3]])
a = plot(f)
show(a, aspect_ratio = 1, figsize = 5)
```



Possiamo calcolare i coefficienti di Fourier di  $f$ . Ad esempio il coefficiente di indice 6 della serie dei coseni è 0 (così come tutti quanti gli altri, dato che  $f$  è dispari) mentre il coefficiente di indice 6 della serie dei seni è uguale a  $\frac{2}{7\pi}$

```
f.fourier_series_cosine_coefficient(7, pi)
```

```
0
```

```
f.fourier_series_sine_coefficient(7, pi)
```

```
 $\frac{2}{7\pi}$ 
```

Nelle stringhe qui sopra, come nelle successive, il numero 'pi' tra parentesi indica che  $f$  è stata prolungata per periodicità su  $\mathbb{R}$  con periodo  $2\pi$  e che se ne sta considerando lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

Possiamo anche ottenere una qualunque somma parziale della serie di Fourier. Ad esempio la somma parziale di indice 7 è uguale a:

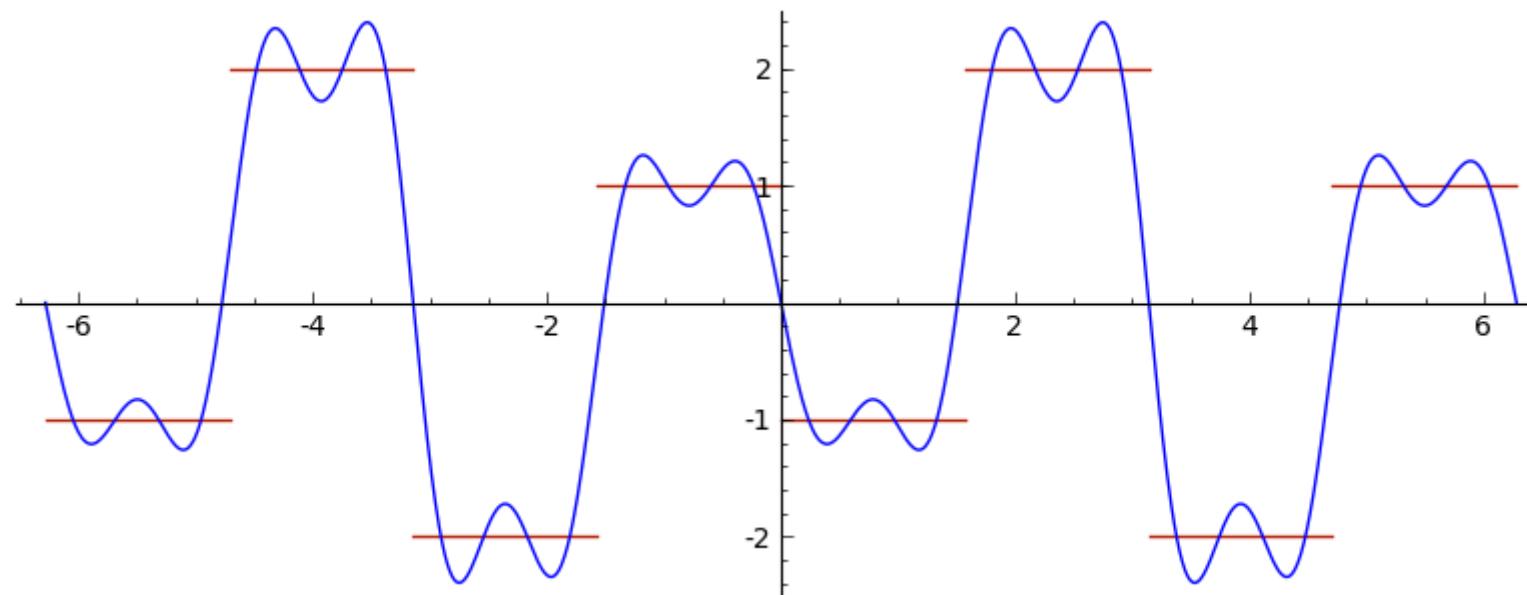
$$\begin{aligned} \text{f.fourier\_series\_partial\_sum}(8,\pi) \\ -\frac{6 \sin(2x)}{\pi} + \frac{2 \sin(3x)}{3\pi} + \frac{2 \sin(5x)}{5\pi} - \frac{2 \sin(6x)}{\pi} + \frac{2 \sin(7x)}{7\pi} + \frac{2 \sin(x)}{\pi} \end{aligned}$$

Disegniamo infine la funzione  $f$  (in rosso) e la somma parziale di indice 7 e poi di indice 14 della sua serie di Fourier (in blù); ad esempio nell'intervallo  $(-2\pi, 2\pi)$  abbiamo

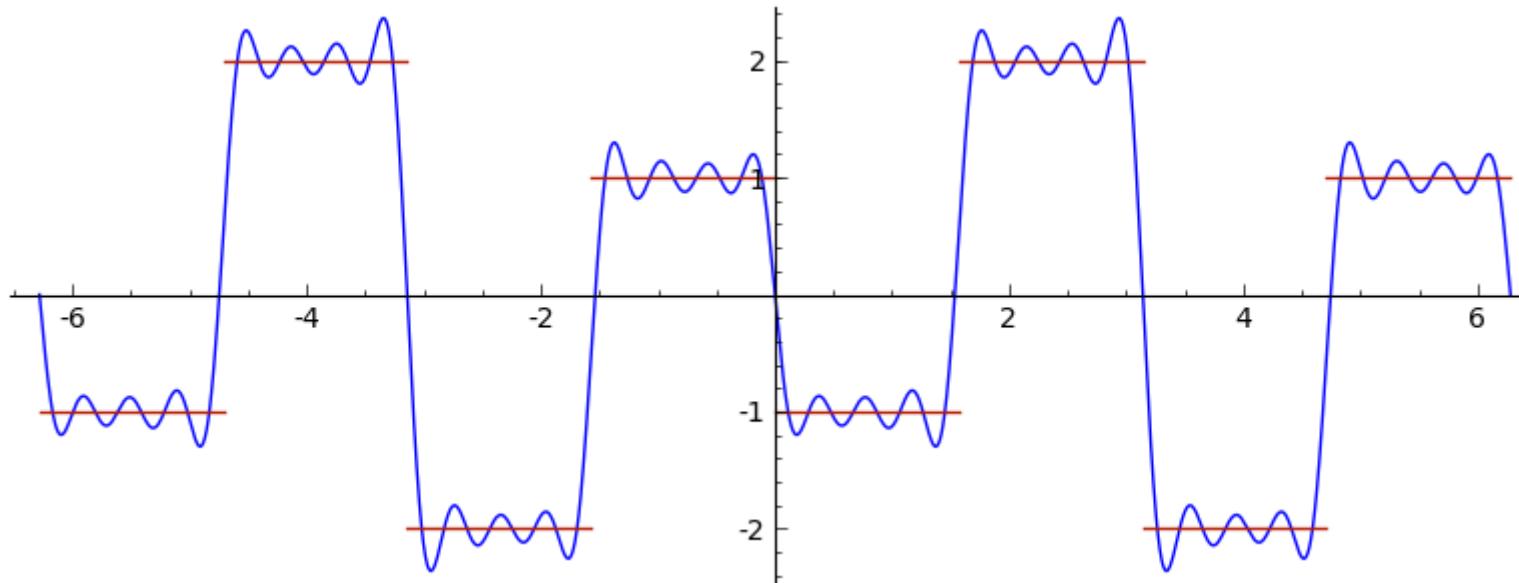
```
b = g.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0), plot_points=40)
```

```
c= f.plot_fourier_series_partial_sum(8,pi, -2*pi,2*pi)
```

```
show(b + c, aspect_ratio=1)
```



```
d = f.plot_fourier_series_partial_sum(15,pi,-2*pi,2*pi)
show(d + b, aspect_ratio=1)
```



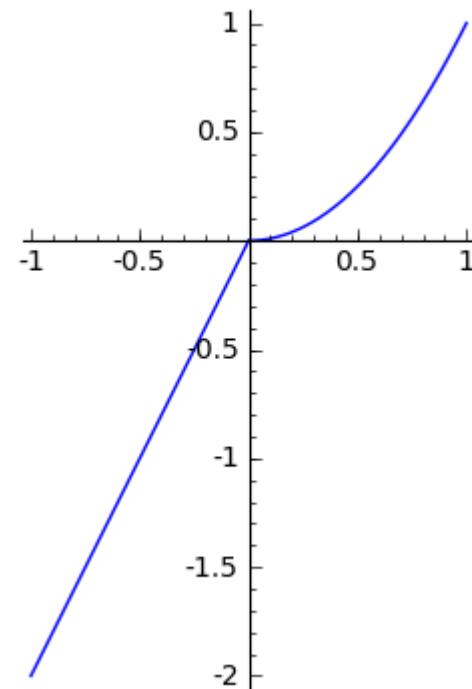
Vediamo un altro esempio. Consideriamo la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in (-1, 0) \\ x^2 & \text{se } x \in [0, 1) \end{cases}$$

estesa per periodicità su  $\mathbb{R}$  con periodo 2, scriviamo la somma parziale di indice 5 e infine confrontiamo i grafici di  $h$  (in rosso) e della somma parziale di indice 5 della sua serie di Fourier (in blu) nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

```

h1(x)= x^2
h2(x)= 2*x
h = Piecewise([[( -1,0),h2],[(0,1),h1]])
a = plot(h)
show(a, aspect_ratio=1, figsize = 5)
    
```

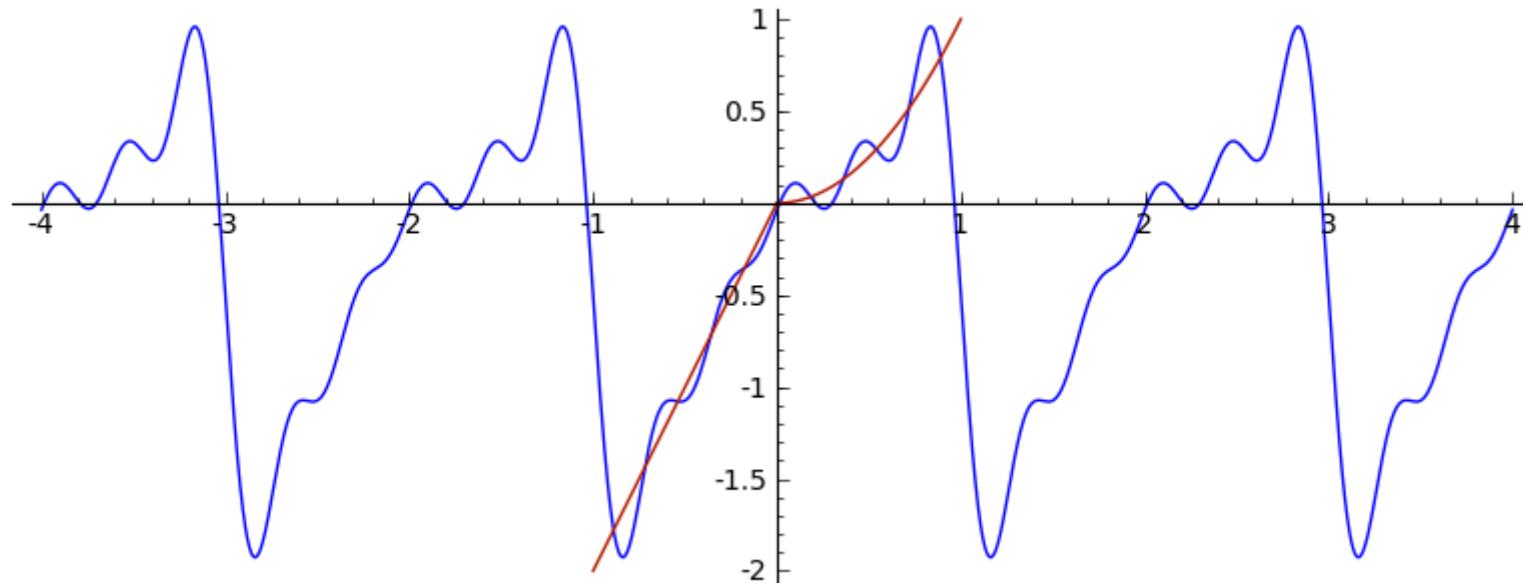


```
h.fourier_series_partial_sum(6,1)
```

$$\frac{3 \sin(\pi x)}{\pi} - \frac{3 \sin(2 \pi x)}{2 \pi} + \frac{\sin(3 \pi x)}{\pi} - \frac{3 \sin(4 \pi x)}{4 \pi} + \frac{3 \sin(5 \pi x)}{5 \pi} + \frac{2 \cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{\cos(2 \pi x)}{2 \pi^2} + \frac{2 \cos(3 \pi x)}{9 \pi^2} + \frac{\cos(4 \pi x)}{8 \pi^2} + \frac{2 \cos(5 \pi x)}{25 \pi^2} - \frac{4 \sin(\pi x)}{\pi^3} -$$

```
b = h.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0), plot_points=40)
c = h.plot_fourier_series_partial_sum(6,1,-4,4)
```

```
show(c + b, aspect_ratio=1)
```



Infine un esempio di una funzione il cui prolungamento periodico su  $\mathbb{R}$  è una funzione continua in ogni punto. Consideriamo la funzione

$$l(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in (-1, 0) \\ x^2 & \text{se } x \in [0, 1) \end{cases}$$

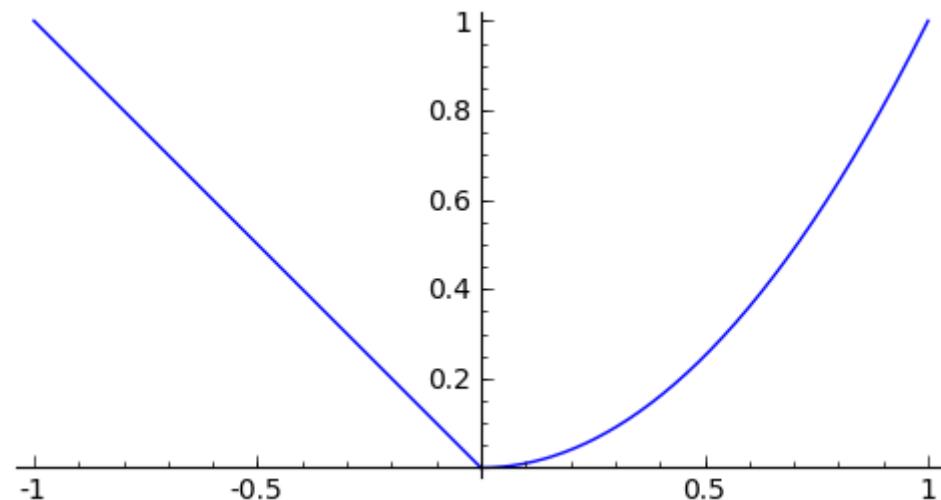
estesa per periodicità su  $\mathbb{R}$  con periodo 2 e confrontiamo i grafici di  $l$  (in rosso) e della somma parziale di indice 4 della sua serie di Fourier nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

```

11(x)= x^2
12(x)= -x
l = Piecewise([[-1,0),12],[(0,1),11])
a = plot(l)

```

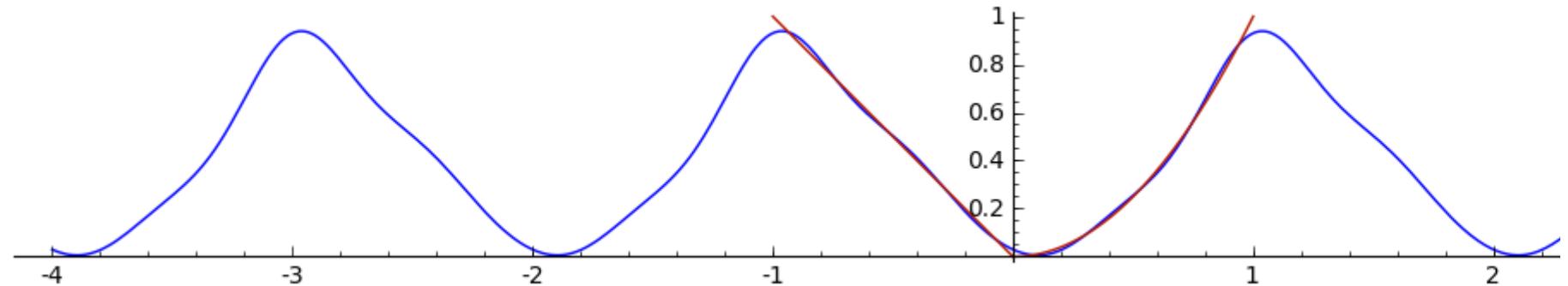
```
show(a, aspect_ratio=1, figsize = 5)
```



```
b = l.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0), plot_points=40)
```

```
c = l.plot_fourier_series_partial_sum(5,1,-4,4)
```

```
show(c + b, aspect_ratio=1, figsize = 12)
```



Come si vede, grazie alla maggiore regolarità dell'estensione periodica di  $l$  rispetto ai due casi precedenti, la somma parziale di indice 4 già approssima  $l$  in modo pressoché perfetto.

