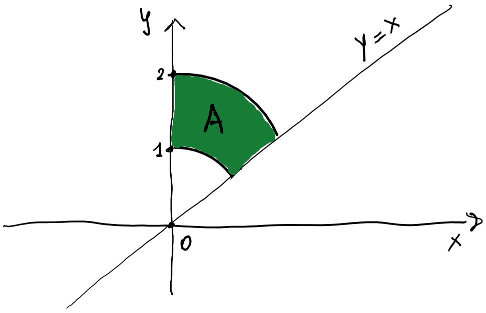
1) Sia A il sottoinsieme del piano definito da

$$A = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 < 4 \,,\; y > x \,,\; x > 0\}$$

Rappresentarlo graficamente

Calcolare poi l'integrale

$$\int_A (x^2+y^2) \log(1+x^2+y^2)\, dx\, dy$$



In coordinate polari A è dato da

$$\left\{ (\rho,\theta) : 1<\rho<2 \,,\; \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2} \right\}$$

Passando alle coordinate polari e usando le formule di riduzione nel piano (ρ,θ) l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \rho^2 \log(1+\rho^2)\, \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^2 \rho^3 \log(1+\rho^2)\, d\rho \underset{dt = 2\rho d\rho}{\overset{\rho^2 = t}{=}} \frac{\pi}{8} \int_1^4 t \log(1+t)\, dt$$

$$= \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{2} t^2 \log(1+t) \Big|_1^4 - \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{t^2}{1+t}\, dt \right)$$

$$= \pi \log 5 - \frac{\pi}{16} \log 2 - \frac{\pi}{16} \int_1^4 \frac{t^2-1+1}{1+t}\, dt$$

$$= \pi \log 5 - \frac{\pi}{16} \log 2 - \frac{\pi}{16} \int_1^4 (t-1)\, dt + \int_1^4 \frac{1}{1+t}\, dt \Big)$$

$$= \pi \log 5 - \frac{\pi}{16} \log 2 - \frac{\pi}{16} \left[\left(\frac{t^2}{2} - t \right) \Big|_1^4 + \log(1+t) \Big|_1^4 \right]$$

$$= \pi \log 5 - \cancel{\frac{\pi}{16} \log 2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{32} - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{16} \log 5 + \cancel{\frac{\pi}{16} \log 2}$$

$$= \pi \log 5 - \cancel{\frac{\pi}{16}\log 2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{32} - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{16}\log 5 + \cancel{\frac{\pi}{16}\log 2}$$

$$= \frac{15}{16}\pi \log 5 + \frac{-8\pi - 2\pi + \pi}{32} = \frac{15}{16}\pi \log 5 - \frac{9}{32}\pi$$

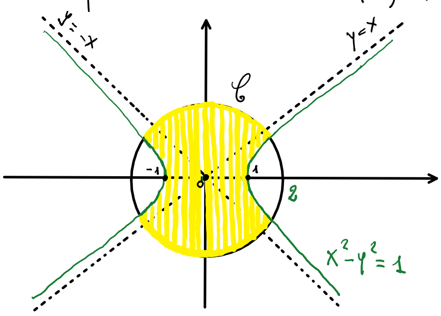
2) Si determini il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - \log(1 - x^2 + y^2)$$

e lo si rappresenti sul piano.
Dire se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi. Stabilire che f è differenziabile nei punti interni al suo dominio. Determinare quindi l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,0,f(0,0))$.
Come si colloca tale piano rispetto al piano (x,y)?

dom f :
$$\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ 1 - x^2 + y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 - y^2 < 1 \end{cases}$$

Le equazioni $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 - y^2 = 1$ rappresentano, rispettivamente, la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $(0,0)$ e raggio 2 e l'iperbole con vertici $(1,0)$ e $(-1,0)$ e asintoti $y = \pm x$



Chiaramente i punti (x,y) che soddisfano $x^2+y^2 \leq 4$ sono quelli del disco che ha per bordo $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ è inclusa) mentre quelli che soddisfano $x^2 - y^2 < 1$ sono tra i due rami dell'iperbole (iperbole esclusa)

Il dominio quindi è l'insieme colorato di giallo in figura, iperbole (in verde) esclusa.
Poiché ci sono punti dell'iperbole che sono di frontiera per dom f ma non appartengono a dom f, dom f non è chiuso; poiché ci sono punti di $\mathcal{C}$ che appartengono a dom f e non sono interni a dom f, dom f non è aperto.
dom f è limitato dato che è contenuto in $B(0,2)$. È anche connesso per archi.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \cdot (-2x) + \frac{1}{1-x^2+y^2}(-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}(-2y) + \frac{1}{1-x^2+y^2}\,2y$$

Come si vede entrambe le derivate parziali esistono e sono continue in $\mathring{\text{dom}} f$ quindi f è differenziabile in $\mathring{\text{dom}} f$. Pertanto esiste il piano tg al grafico di f nel punto $(0,0,f(0,0))$ (dato che $(0,0) \in \mathring{\text{dom}} f$) e la sua equazione è

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y$$

$$= 2 + 0\cdot x + 0\cdot y \quad \text{cioè}$$

$z = 2$. Essendo del tipo $z = k$, il piano tg è parallelo al piano (x,y) (infatti $(0,0)$ è un punto stazionario per f).

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + w^2 y = \cos(wt) + t \quad (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

dove w è una costante positiva

Sappiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $y'' + w^2 y = \cos(wt) + t$ e cioè l'equazione $y'' + w^2 y = 0$ del moto di un oscillatore armonico sono date da $y(t) = A\cos(wt - \varphi)$ al variare di $A \geq 0$ e $\varphi \in [-\pi\ \pi]$ (si veda, ad esempio la lezione 48)

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa con il principio di sovrapposizione cioè cerchiamo separatamente una soluzione $\tilde{y}_1$ per $y'' + w^2 y = t$ e una soluzione $\tilde{y}_2$ per $y'' + w^2 y = \cos(wt)$

$y'' + w^2 y = t$

$\tilde{y}_1(t) = at + b$ quindi

$w^2(at + b) = t$ cioè

$$\begin{cases} w^2 a = 1 \\ w^2 b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{1}{w^2} \end{cases} \text{ quindi}$$

$\tilde{y}_1(t) = t/w^2$

$y'' + w^2 y = \cos(wt)$

Poiché w è soluzione dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata cerchiamo $\tilde{y}_2(t)$ del tipo

$\tilde{y}_2(t) = t(k_1\cos(wt) + k_2\sin(wt))$

$$\tilde{y}_2'(t) = k_1\cos(wt) + k_2\sin(wt) + t(-k_1 w\sin(wt) + k_2 w\cos(wt))$$
$$= (k_1 + tk_2 w)\cos(wt) + (k_2 - tk_1 w)\sin(wt)$$

$$\tilde{y}_2''(t) = k_2 w\cos(wt) - w(k_1 + tk_2 w)\sin(wt) -$$
$$- k_1 w\sin(wt) + w(k_2 - tk_1 w)\cos(wt)$$
$$= (2wk_2 - tk_1 w^2)\cos(wt) - (2wk_1 + tk_2 w^2)\sin(wt)$$

Quindi $\tilde{y}_2(t)$ deve soddisfare l'equazione

$$(2\omega k_2 - t k_1 \omega^2)\cos(\omega t) - (2\omega k_1 + t k_2 \omega^2)\sin(\omega t) + \omega^2 t k_1 \cos(\omega t) + \omega^2 t k_2 \sin(\omega t) = \cos(\omega t)$$

cioè

$2\omega k_2 \cos(\omega t) - 2\omega k_1 \sin(\omega t) = \cos(\omega t)$ da cui

$$\begin{cases} 2\omega k_2 = 1 \\ 2\omega k_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 1/2\omega \end{cases}$$

quindi $\tilde{y}_2(t) = \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t)$ e

$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = t\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{2\omega}\sin(\omega t)\right)$. Quindi l'integrale generale di (*) è

$y(t) = A\cos(\omega t - \varphi) + t\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{2\omega}\sin(\omega t)\right)$. Determiniamo ora A e φ in modo da soddisfare le condizioni iniziali del problema di Cauchy.

$0 = y(0) = A\cos\varphi$

$$y'(t) = -A\omega\sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{2\omega}\sin(\omega t) + \frac{t}{2}\cos(\omega t)$$

$0 = y'(0) = A\omega\sin\varphi + \frac{1}{\omega}$

quindi deve essere

$$\begin{cases} A\cos\varphi = 0 \\ A\omega\sin\varphi = -\frac{1}{\omega} \end{cases}$$

Moltiplicando ambo i membri della prima equazione per ω otteniamo

$$(\square)\begin{cases} A\omega\cos\varphi = 0 \\ A\omega\sin\varphi = -\frac{1}{\omega} \end{cases}$$

; elevando al quadrato entrambi i membri in entrambe le equazioni otteniamo

$$\begin{cases} A^2\omega^2\cos^2\varphi = 0 \\ A^2\omega^2\sin^2\varphi = \frac{1}{\omega^2} \end{cases}$$

; sommando membro a membro otteniamo

$A^2\omega^2 = \frac{1}{\omega^2}$ da cui $A^2 = \frac{1}{\omega^4}$ e quindi $A = \frac{1}{\omega^2}$

Quindi $(\square)$ diviene $\begin{cases} \frac{1}{\omega}\cos\varphi = 0 \\ \frac{1}{\omega}\sin\varphi = -\frac{1}{\omega} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = -1 \end{cases}$ cioè $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

La soluzione cercata è quindi $y(t) = \frac{1}{\omega^2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + t\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{2\omega}\sin(\omega t)\right)$

4) Dare la definizione di punto di minimo locale forte per una funzione di due o più variabili reali.

Enunciare e dimostrare il Teorema di Weierstrass per funzioni di più variabili reali

Per la definizione richiesta, enunciato e dimostrazione del Teorema di Weierstrass si veda, ad esempio, la Lezione 35.