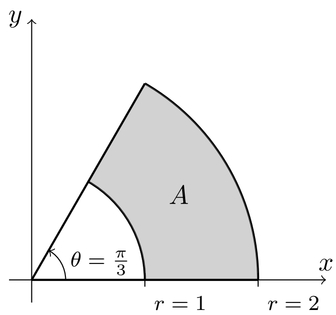
Possibile svolgimento della prova del 15 settembre 2025 – Modulo B

1) Disegniamo sul piano il dominio di integrazione A (è il settore circolarel'area colorata

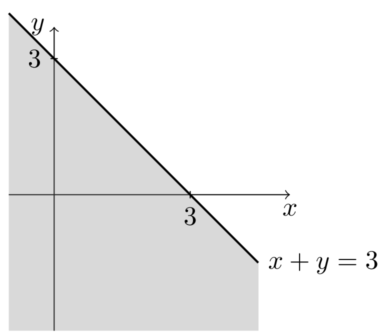


In coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, il dominio d'integrazione A è quindi dato da $1 \le \rho \le 2$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$.

Passando alle coordinate polari abbiamo:

$$\int_A \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta=0}^{\pi/3}\int_{r=1}^{2} \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{\pi/3}\mathrm{d}\theta\right)\left[\tfrac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_1^2 = \frac{\pi}{6}\ln\frac{5}{2}.$$

2) *Dominio.* Deve essere $3 - x - y > 0$, dunque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y < 3\}$, semipiano aperto sotto la retta $x + y = 3$.



Gradiente e punti critici. $\nabla f(x,y) = \left(2(x-1) - \dfrac{1}{3-x-y},\ 2(y+2) - \dfrac{1}{3-x-y}\right)$. I punti critici soddisfano

$$\begin{cases} 2(x-1) - \dfrac{1}{3-x-y} = 0 \\ 2(y+2) - \dfrac{1}{3-x-y} = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo $2(x-1) = 2(y+2) \Rightarrow y = x - 3$; sostituendo nella prima equazione, otteniamo $(2x-2)(6-2x) = 1$, cioè $4x^2 - 16x + 13 = 0$. Quindi

$$x_{1,2} = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad y_{1,2} = x_{1,2} - 3 = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Abbiamo quindi due punti critici $P_1 = (2 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $P_2 = (2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$, entrambi interni a D.

Natura dei punti critici. La matrice Hessiana di f è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2-\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{con } \alpha = \alpha(x,y) = \frac{1}{(3-x-y)^2} > 0.$$

Quindi $\det H(x,y) = (2-\alpha)^2 - \alpha^2 = 4(1-\alpha)$

Nel punto P_1, abbiamo $\alpha(2+\frac{\sqrt{3}}{2}, -1+\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} > 1$, quindi $\det H(P_1) < 0$: P_1 *è un punto di sella.*

Nel punto P_2, $\alpha(2-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} < 1$, quindi $\det H(P_2) > 0$ e $2-\alpha(P_2) > 0$: P_2 *è minimo locale stretto.*

Derivata direzionale. Poiché f è di classe C^∞ sul suo dominio, è differenziabile su D e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot v = (1,3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = -\sqrt{2}.$$

3) *Soluzioni singolari.* Ponendo il fattore in y uguale a zero si trovano le soluzioni costanti $y \equiv 0$ e $y \equiv -1$, escluse dal metodo di separazione delle variabili.

Integrale generale. Per $y \neq 0, -1$ separiamo le variabili:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(y+1)} = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x, \qquad \frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}.$$

Integrando: $\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \mathrm{e}^x + C$. Ponendo $K = \pm \mathrm{e}^C \neq 0$ ed esplicitando:

$$\frac{y}{y+1} = K\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{K\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}{1-K\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}.$$

Problema di Cauchy. Con $y(0) = 1$ si ha $\frac{K\,\mathrm{e}}{1-K\,\mathrm{e}} = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2\mathrm{e}}$, dunque

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}.$$

4) *(Enunciato e dimostrazione del criterio della radice).* Sia $\sum a_n$ con $a_n \geq 0$ e $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

- Se $L < 1$ allora $\sum a_n$ converge. *Dim.* Scelto r con $L < r < 1$, per definizione di limite, esiste N tale che $\sqrt[n]{a_n} < r$ per $n \geq N$, quindi $a_n < r^n$ per $n \geq N$ e per confronto con la geometrica $\sum r^n$ segue la convergenza.
- Se $L > 1$ la serie diverge positivamente . *Dim.* Scelto r con $1 < r < L$,Di nuovo per la definizione di limite, esiste N tale che $\sqrt[n]{a_n} > r$ per $n \geq N$, quindi $a_n > r^n > 1$ per $n \geq N$ e pertanto (a_n) non converge a zero. Dato che la serie $\sum a_n$ è a termini non negativi, essa deve divergere positivamente
- Se $L = 1$ il criterio è inconcludente.

Applicazioni.

$$\text{(i)} \quad a_n = \frac{n^3}{3^n} \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} < 1 \;\Rightarrow\; \sum \frac{n^3}{3^n} \text{ converge.}$$

$$\text{(ii)} \quad a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt[n]{n^2+1} \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3}\sqrt[n^2]{n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt[n]{n^2+1} \text{ converge.}$$