1 -a) Calcolare in forma cartesiana

$$\left[i\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\right]^{10}$$

$$i^{10} = i^{8}\cdot i^{2} = 1\cdot(-1) = -1$$

$$\sqrt{2}-\sqrt{2}i = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{quindi} \quad \left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^{10} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = 2^{10}e^{-\frac{5}{2}\pi i}$$

Pertanto $\left[i\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\right]^{10} = -2^{10}e^{-\frac{5}{2}\pi i} = -2^{10}e^{-\frac{\pi}{2}i} = -2^{10}(-i) = 2^{10}i$

1 -b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = 2^{\sqrt{x^3-1}}(x-1)$$

dom f: $\quad x^3-1 \geq 0 \iff x \geq 1 \quad$ quindi dom $f = [1,+\infty)$

Osserviamo che f è il prodotto delle due funzioni

$f_1(x) = 2^{\sqrt{x^3-1}}$ e $f_2(x) = x-1$

$y = x^3-1$ strett. crescente

$y = \sqrt{x^3-1}$ " "

$y = 2^{\sqrt{x^3-1}}$ " "

f_2 strett. crescente

$f_2(x) > 0$ per $x > 1$

Quindi f è strettamente crescente su $(1,+\infty)$ in quanto prodotto di due funzioni positive e strett. crescente. Dato che $f(1) = 0$ f è strett. crescente anche su $[1,+\infty)$

$f \in C^0([1,+\infty))$ e quindi Im $f = \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [0,+\infty)$

2) Determinare dominio, asintoti e gli eventuali punti estremali della funzione

$$f(x) = e^{-x} \frac{x}{x-1}$$

Disegnarne il grafico dopo averne studiato il segno

$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Asintoti verticali:

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = e^{-1} \frac{1}{0^+} = +\infty$ $x = 1$ è asintoto verticale a dx per f

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = e^{-1} \frac{1}{0^-} = -\infty$ " " " " a sx "

Asintoti orizzontali

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \cdot 1 = 0$, $y = 0$ " " orizzontale per $x \to +\infty$ "

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \cdot 1 = +\infty$ NO ASINTOTO

Asintoto obliquo per $x \to -\infty$:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$: si presenta nella forma indet. $+\infty \cdot 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \frac{x}{x-1}$$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{y \to +\infty} -\frac{e^{y}}{y} = -\infty$ per gerarchia degli infiniti

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ quindi $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \cdot 1 = -\infty$

non c'è dunque asintoto obliquo

Punti di estremo:

Poiché f è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ i punti di estremo per f sono necessariamente punti critici

Poiché f è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ i punti di estremo per f sono necessariamente punti critici

$$f'(x) = -e^{-x} \frac{x}{x-1} + e^{-x} \frac{x-1-x}{(x-1)^2} =$$

$$e^{-x} \left(-\frac{x}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) =$$

$$= e^{-x} \frac{-x(x-1)-1}{(x-1)^2} = e^{-x} \frac{-x^2+x-1}{(x-1)^2}$$

$f'(x) > 0 \iff x^2 - x + 1 < 0$ poiché $\Delta = 1 - 4 < 0$

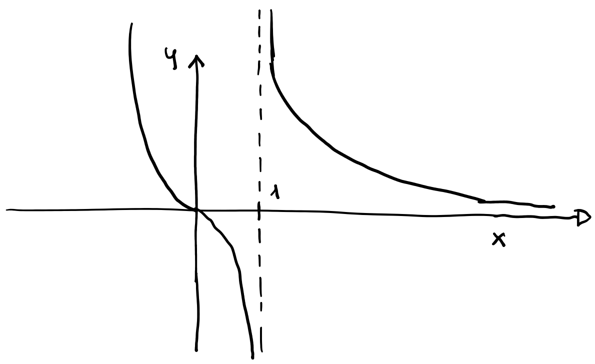
questa disequazione non ha soluzione quindi

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dunque f è strett. decrescente

negli intervalli $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$.

Pertanto f non ha punti estremali dato che non ha punti critici

Segno : $f(x) > 0 \iff \frac{x}{x-1} > 0 \iff x > 1 \vee x < 0$



3) Calcolare

$$\int_{-1}^{2} |x| \log(x^2+2)\, dx$$

$$\int_{-1}^{2} |x| \log(x^2+2)\, dx = \int_{-1}^{0} -x \log(x^2+2)\, dx + \int_{0}^{2} x \log(x^2+2)\, dx$$

Posto $x^2 = t$ e quindi $dt = 2x\, dx$, due integrali qui sopra sono uguali a

$$-\frac{1}{2} \int^{0} \log(t+2)\, dt + \frac{1}{2} \int^{4} \log(t+2)\, dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^0 \log(t+2)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^4 \log(t+2)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \log(t+2)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^4 \log(t+2)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \log(t+2)\,dt + \frac{1}{2}\int_1^4 \log(t+2)\,dt \qquad (*)$$

$$\int \log(t+2)\,dt = t\log(t+2) - \int \frac{t}{t+2}\,dt =$$

$$= t\log(t+2) - \int 1\,dt + 2\int \frac{1}{t+2}\,dt =$$

$$= t\log(t+2) - t + 2\log(t+2) + c$$

$$= (t+2)\log(t+2) - t + c$$

quindi $$(*) = (t+2)\log(t+2)\Big|_0^1 - 1 + \frac{1}{2}(t+2)\log(t+2)\Big|_1^4 - \frac{3}{2}$$

$$= 3\log 3 - 2\log 2 - \frac{5}{2} + 3\log 6 - \frac{3}{2}\log 3$$

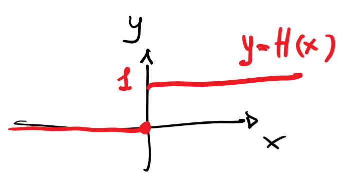
$$= \frac{3}{2}\log 3 - \frac{5}{2} + \log 2 + 3\log 3$$

$$= \frac{9}{2}\log 3 + \log 2 - \frac{5}{2}$$

4) Dare la definizione di funzione continua in un punto
Enunciare e dimostrare (usando il teorema degli zeri per le funzioni continue) il Teorema dei valori intermedi
Fornire un esempio di una funzione che non soddisfa la proprietà enunciata nella tesi di tale teorema.

Per la definizione, si veda ad esempio la lezione 15.
Per il Teorema, la lezione 19.
Esempio fra gli infiniti possibili

$H:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$



$H(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$ che non è un intervallo, quindi
H non trasforma un qualunque intervallo in un intervallo
e di fatti H non è continua su $\mathbb{R}$ (non è continua in $x=0$)