1° TURNO

1)-a) Determinare la forma esponenziale del numero

$$\frac{(i-1)\,i}{i+1}$$

$$i-1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$i+1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$$

Quindi $\dfrac{(i-1)i}{1+i} = \dfrac{\sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}\, e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}} = e^{i\pi}$

1) - b)

Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = \sinh\left(\log_{\frac{1}{2}} x^3\right) + \arccos x$$

dom f: deve essere $x^3 > 0$ e cioè $x > 0$.

Poiché $y = \arccos x$ è definita su $[-1, 1]$ il dominio di f è $(0, 1]$

Poiché $\sinh\left(\log_{\frac{1}{2}} x^3\right)$ è composta da due funzioni stett. crescenti e una stett. decrescente, è stett. decrescente ed, essendo $y = \arccos x$, stett. decrescente f è anche stett. decrescente.

Poiché $f \in C^0((0,1])$, $\operatorname{Im} f = \left[f(1), \lim_{x \to 0^+} f(x)\right)$
$= [0, +\infty)$

2) Determinare dominio, asintoti per la funzione:

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2-1}$$

Determinare poi la miglior approssimazione lineare di f nel punto $x = 0$.

dom f: $\begin{cases} x+2>0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$ quindi dom $f = (-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

nel punto $x=0$.

$\mathrm{dom} f$: $\begin{cases} x+2>0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$ quindi $\mathrm{dom} f = (-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

$f \in C^0(\mathrm{dom} f)$. Vediamo se ha asintoti verticali nei punti -2, -1 e 1

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \frac{-\infty}{3} = -\infty$ la retta $x=-2$ è asintoto verticale a dx

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{\log(1+(x+1))}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

quindi la retta $x=-1$ non è asintoto verticale né a dx né a sx

$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \log 3 / 0^\pm = \pm\infty$, quindi $x=1$ è asintoto verticale sia a dx che a sx

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} / 2x = 0$, dunque $y=0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

f è derivabile in 0 e quindi ammette miglior approssimazione lineare data da

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(0) + f'(0)x$$

$$f(0) = -\log 2$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+2}(x^2-1) - \log(x+2) \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2}$$

quindi $x \in \mathbb{R} \mapsto -\log 2 - \frac{1}{2}x$ è la miglior approssimazione lineare di f in 0

3) Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{0} \sqrt{|x+1|}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} \sqrt{|x+1|}\,dx &= \int_{-2}^{-1} \sqrt{|x+1|}\,dx + \int_{-1}^{0} \sqrt{|x+1|}\,dx \\
&= \int_{-2}^{-1} \sqrt{-1-x}\,dx + \int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}\,dx \\
&= -\frac{1}{\frac{3}{2}}(-1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{\frac{3}{2}}(x+1)\Big|_{-1}^{0} \\
&= 0 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 0 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

4) Enunciare e dimostrare la caratterizzazione della monotonia di una funzione derivabile

Si veda il teorema 7.21 del manuale

2° turno

1) - a)

Determinare le radici quarte del numero complesso $-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$$\left| -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right| = 3$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}}\right) - \pi = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi$$

Dunque $-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 3e^{-i\frac{2}{3}\pi}$

e $\sqrt[4]{3e^{-i\frac{2}{3}\pi}} = \sqrt[4]{3}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3$

1) - b) Determinare dominio, tipo di monotonia e immagine della funzione:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot 2^{x^2-1}$$

$\operatorname{dom} f = [0, +\infty)$

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ con $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 2^{x^2-1}$;

sia g che h sono positive su $(0, +\infty)$ e strett. crescenti

quindi il loro prodotto, f, è anche strett. crescente

Poiché $f \in C^0([0, +\infty))$, $\operatorname{Im} f = [f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x))$

$$= [0, +\infty)$$

2) Si calcolino i seguenti limiti

2) Si calcolino i seguenti limiti

a) $\lim_{x \to -2} \frac{(3+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{\arcsin(x+2)}$;

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - e^x x - \sin x}{x^2+1}$.

a) $\lim_{x \to -2} \frac{(3+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{\arcsin(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{(1+(x+2))^{\frac{1}{2}} - 1}{x+2} \, \frac{x+2}{\arcsin(x+2)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

b) $\frac{x^2 - e^x x - \sin x}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{e^x x}{x^2+1} - \frac{\sin x}{x^2+1}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x x}{x^2+1} = \frac{0}{+\infty} = 0$

$0 \le \left| \frac{\sin x}{x^2+1} \right| \le \frac{1}{x^2+1}$; quindi $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} = 0$

$\frac{1}{x^2+1} \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

Il limite b) è dunque uguale a 1

3) Scrivere la formula di Taylor (col resto di Peano) di centro 1 e ordine 2 per la funzione $f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (x-1)^4$.

Cosa si può dedurre riguardo al centro?

$f(1) = 1$

$f'(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \frac{\pi}{2} - 4(x-1)^3$

$f'(1) = 0$

$$f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 12(x-1)^2$$

$$f''(1) = 0 - \frac{\pi^2}{2} - 0 = -\frac{\pi^2}{2}$$

La formula di Taylor di centro 1 e ordine 2 è quindi

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right).$$

Poiché $f'(1)=0$ e $f''(1)<0$ 1 è un punto di massimo locale forte.

4) Enunciare e dimostrare il teorema sulla derivabilità di una funzione in un punto x_0 sapendo che f è derivabile a dx e sx di x_0.

Si veda il Th. 7.23 del manuale

3° turno

1)-a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$z = \frac{e^{2-\pi i}}{i-2}$$

$$e^{2-\pi i} = e^2 e^{-\pi i} = -e^2$$

$$\frac{-e^2}{i-2} = \frac{-e^2(i+2)}{i^2-4} = \frac{e^2}{5}(i+2) = \frac{2e^2}{5} + \frac{e^2}{5}i$$

1)-b) Determinare dominio, tipo di monotonia e immagine della funzione

$$= \frac{1}{\frac{1}{e^{x+1}} + (\pi - \mathrm{arctg}\, x)}$$

Osserviamo che $\pi - \mathrm{arctg}\, x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi

$\frac{1}{e^{x+1}} + (\pi - 2\operatorname{arctg} x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e pertanto il dominio di f è $\mathbb{R}$

Osserviamo che $y = \frac{1}{e^{x+1}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{x+1}$ è strett. decrescente

e $y = -\operatorname{arctg} x$ è anche strett. decrescente dunque

$y = \frac{1}{e^{x+1}} + \pi - \operatorname{arctg} x$ è strett. decrescente e quindi f essendo la funzione reciproca di questa è strett. crescente.

$f \in C^0(\mathbb{R})$ e quindi $\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) , \lim_{x \to +\infty} f(x) \right)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty + \pi + \frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{0 + \pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

quindi $\operatorname{Im} f = \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$

2) Calcolare

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x - x^2) - x}{3\operatorname{tg} x + x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\,\log^2 x + 2^{x+1}}{x + \sqrt{x}}$

a) $$\frac{\sin(2x - x^2) - x}{3\operatorname{tg} x + x} = \frac{\sin(2x - x^2)}{3\operatorname{tg} x + x} - \frac{x}{3\operatorname{tg} x + x}$$

$$= \frac{\sin(2x - x^2)}{2x - x^2} \cdot \frac{2x - x^2}{3\operatorname{tg} x + x} - \frac{x}{x\left(3\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 1\right)}$$

$$= \underbrace{\frac{\sin(2x - x^2)}{2x - x^2}}_{\xrightarrow{x \to 0}\ 1} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{x}(2 - x)}{\cancel{x}\left(3\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 1\right)}}_{\xrightarrow{x \to 0}\ \frac{2}{3+1}} - \underbrace{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(3\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 1\right)}}_{\xrightarrow{x \to 0}\ \frac{1}{3+1}}$$

quindi il limite in a) è uguale a $\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

b) $$\frac{\sqrt{x}\,\log^2 x + 2^{x+1}}{x + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\,\log^2 x}{x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} + \frac{2\, 2^x}{x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \frac{\log^2 x}{\ } \cdot \frac{1}{\ } + 2\,\frac{2^x}{\ } \cdot \frac{1}{\ } \xrightarrow{x \to +\infty} 0 \cdot 1 + 2 \cdot (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

$$= \frac{\log^2 x}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 2\frac{2^x}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow{x\to+\infty} 0\cdot 1 + 2\cdot(+\infty)\cdot 1 = +\infty$$

c) Determinare gli eventuali punti di estremo locale e globale della funzione

$$f(x) = \log(1-x^2) - x^2$$

$\operatorname{dom} f = (-1,1)$

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} - 2x = \frac{-2x - 2x + 2x^3}{1-x^2} = \frac{2x(x^2-2)}{1-x^2}$$

Poiché $1-x^2>0$ e $x^2-2<0$ nel dominio di f

$f'(x) > 0 \iff x \in (-1,0)$

quindi f è strett crescente su $(-1,0)$ e strett. decrescente su $(0,1)$

0 quindi è un punto di massimo locale (e anche globale) forte.

A) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto di un intervallo.

Dimostrare che se f è derivabile in x_0 f è continua in x_0.

Dare un esempio di una funzione continua in un punto ma non derivabile.

Si veda la Definizione 7.3 e il Teorema 7.6 del manuale.

Un esempio è $f(x) = |x|$ in $x=0$

4° turno

1) - a) Calcolare in forma cartesiana

$$\left(\sqrt{3} - i\right)^{12}$$

$$\left|\sqrt{3} - i\right| = 2$$

$$\arg\left(\sqrt{3}-i\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Quindi $\sqrt{3}-i = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$ e $\left(\sqrt{3}-i\right)^{12} = 2^{12} e^{-i 2\pi} = 2^{12}$

1) - b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \arcsin(3-x) + \log_{\frac{1}{e}}(\sinh x)$$

dom f: $\begin{cases} 3-x \le 1 \\ 3-x \ge -1 \\ \sinh x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 4 \\ x > 0 \end{cases}$

Quindi dom $f = [2, 4]$

$x \in [2,4] \mapsto 3-x$ è strett. decrescente e quindi anche

$x \in [2,4] \mapsto \arcsin(3-x)$ lo è; analogamente

$x \in [2,4] \mapsto \log_{\frac{1}{e}}(\sinh x)$ è strett. decrescente in quanto composta

da una funzione strett. crescente e una strett. decrescente

f in quanto somma di funzioni strett. decrescenti è dunque strett. decrescente

$f \in C^0([2,4])$ e quindi

$$\operatorname{Im} f = [f(4), f(2)] = \left[-\frac{\pi}{2} + \log_{\frac{1}{e}}(\sinh(4)), \frac{\pi}{2} + \log_{\frac{1}{2}}(\sinh(2))\right]$$

2) Calcolare

a) $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x+1}\right)}{x^{\frac{1}{3}}\, 3^x}$

a) $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} = \frac{1}{2}^{\frac{1}{0^-}} = \frac{1}{2}^{-\infty} = +\infty$

Poiché $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$,

il limite a) è uguale a $+\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x+1}\right)}{x^{\frac{1}{3}}\, 3^x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x+1}\right)}{\frac{2}{x+1}} \cdot \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} 3^x}$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x+1}\right)}{\frac{2}{x+1}} = 1$; consideriamo

$\frac{2}{(x+1)\cdot x^{\frac{1}{3}} 3^x}$; osserviamo che $(x+1)\, x^{\frac{1}{3}}\, 3^x > 0$ per $x < -1$

e quindi dato che $(x+1)\, x^{\frac{1}{3}}\, 3^x = x^{\frac{4}{3}} 3^x + x^{\frac{1}{3}} 3^x \to 0$

avremo che $\frac{2}{(x+1)\, x^{\frac{1}{3}}\, 3^x} \to \frac{2}{0^+} = +\infty$

Pertanto $\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x+1}\right)}{x^{\frac{1}{3}}\, 3^x} = +\infty$

3) Studiare la convessità della funzione

$$f(x) = x^2 - x + \log(1-x)$$

$$\operatorname{dom} f = (-\infty, 1)$$

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{1-x}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2(1-x)^2 - 1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) > 0 \iff 2(1-x)^2 - 1 > 0 \iff 2 - 4x + 2x^2 - 1 > 0$$

$$\iff 2x^2 - 4x + 1 > 0$$

$2x^2 - 4x + 1$ ha radici $\dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Quindi $f''(x) > 0$ per $x \in \left(-\infty, -1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $f''(x) < 0$ per $x \in \left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ e dunque

f è strettamente convessa su $\left(-\infty, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

e strettamente concava su $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

4) Enunciare e dimostrare il teorema sulla derivata di una funzione inversa

Si veda il Teorema 7.14 del manuale