Politecnico di Bari
CUC Ingegneria dell'Informazione
CdL Ingegneria delle Telecomunicazioni
AA 2006 - 2007

Corso di Analisi Matematica II - Tracce di esame

Docente: Dott. E. Caponio

A.A 2006/2007 I prova di esonero del 4 Maggio 2007 Traccia A

1) Dare la definizione di serie numerica divergente positivamente.

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(e-\frac{1}{e^n}\right)e^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n^3-\pi}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-2+n\log n}{n^{5/2}}.$$

2) Enunciare il teorema di integrazione per serie.

Applicarlo per determinare lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{x}$.

Applicarlo infine per calcolare con un errore inferiore a 1/100

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{y^4(x+1)^2\log\sqrt{(x+1)y}}{(x+1)^{3/2}+\sqrt{y}}.$$

Dare, quindi, la definizione di punto di accumulazione per un insieme. Stabilire inoltre se il punto $(-1,0)$ è di accumulazione per l'insieme di definizione di f e in tal caso calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y).$$

4) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto; dimostrare che se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in A$, allora f è continua in x_0.

Considerare poi le funzioni $g(x,y) = xe^y + 2$ e $f(\xi,\eta) = (\xi\eta, \xi-\eta)$. Dimostrare che la funzione $g \circ f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ e calcolare $\nabla(g\circ f)(\xi,\eta)$, per ogni $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$.

A.A 2006/2007 I prova di esonero del 4 Maggio 2007 Traccia B

1) Dare la definizione di serie numerica convergente.

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\pi-\frac{\pi}{2^n})2^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n^2-e}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+n+n\log(n^2)}{n^{5/2}}.$$

2) Scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

Enunciare poi il teorema di integrazione per serie.

Applicarlo per calcolare con un errore inferiore a $1/100$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y)=\frac{y^3(x-1)^3\log[(x^2-1)y]}{(x-1)^2+y^2}.$$

Dare, quindi, la definizione di punto di accumulazione per un insieme. Stabilire inoltre se il punto $(1,0)$ è di accumulazione per l'insieme di definizione di f e in tal caso calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y).$$

4) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto.

Sia $A\subset\mathbb{R}^n$ un insieme aperto; dimostrare che se $f\colon A\to\mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0\in A$, allora f è continua in x_0.

Considerare poi le funzioni $g(x,y)=ye^x-1$ e $f(\xi,\eta)=(\xi+\eta,\xi\eta)$. Dimostrare che la funzione $g\circ f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ e calcolare $\nabla(g\circ f)(\xi,\eta)$, per ogni $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$.

Gruppo A

1) Considerare la successione di funzioni $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan nx}{nx} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

se ne calcoli il limite puntuale in $\mathbb{R}$ e si dica, motivando la risposta, se la convergenza è uniforme.

2) Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze ed f la sua somma. Scrivere la relazione esistente tra $D^{(n)}f(x_0)$ e a_n.

Usarla poi per calcolare

$$D^{(5)}\left(\frac{1}{1-16x^2}\right)(0).$$

3) Stabilire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{xy-y+2x-2}{x^2-y^2-2x-4y-3}.$$

4) Considerare le funzioni $f(\xi,\eta) = (\xi^2-\eta^2, \cos(\xi\eta))$ e $g(x,y) = (\arctan(xy), xy)$. Dimostrare che la funzione $g \circ f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Calcolare poi il suo differenziale nel punto $(0,1)$.

Gruppo B

5) Si determini la soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^2+y^2}{ty} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

6) Considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\dfrac{t+y^2}{t^2+1}\right) - y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Stabilire per quali $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il problema ha un'unica soluzione. Stabilire inoltre se (al variare di (t_0, y_0)) le soluzioni sono definite su $\mathbb{R}$.

7) Dimostrare che la 1-forma

$$\omega = y(2xe^{x^2y} - 1)\mathrm{d}x + x(xe^{x^2y} - 1)\mathrm{d}y$$

è esatta e se ne calcoli una primitiva. Calcolare poi

$$\int_\gamma \omega$$

dove $\gamma = \gamma(t) = \big(2\cos(3t), \frac{1}{2}\sin(3t)\big)$, $t \in [0, \frac{2\pi}{3}]$.

8) Calcolare

$$\iint_D \frac{x}{y}\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le xy \le 2,\ \frac{x}{2} \le y \le x\}$.

A.A 2006/2007 II appello e II esonero del 17 Luglio 2007 Traccia A

Gruppo A

1) Studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2} \frac{1}{(4-x^2)^n}.$$

2) Enunciare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Verificare, inoltre, che non si applica sull'intervallo $[0,1]$ alla successione

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{k} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{k} < x \le 1 \end{cases}$$

specificando quale ipotesi del teorema non è soddisfatta.

3) Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\log(x^2+y^2)$$

4) Dimostrare che la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2y-1}{x^2-y^2}\sin(x+y)$$

è differenziabile in ogni punto del suo dominio.

Calcolare poi l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0,\pi)$.

Gruppo B

5) Determinare i punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x,y) = 2y^2 \log(2+x) + x^2 y^2.$$

Stabilire inoltre se f ha punti di minimo e massimo assoluti

6) Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e si consideri $t \in I \mapsto A(t)$, con $A(t)$ matrice $n \times n$ avente per elementi funzioni di classe C^1. Dimostrare che gli n problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = e_i \end{cases}$$

dove $t_0 \in I$ e $\{e_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, forniscono n soluzioni linearmenti indipendenti del sistema $y' = A(t)y$ e che ogni altra soluzione si scrive come combinazione lineare di queste.

7) Risolvere, per $t > 0$ l'equazione differenziale

$$ty' = -(1+t)y + ty^3.$$

8) Calcolare

$$\int_\gamma \left(\log(x+y) + \frac{x}{x+y} \right) \mathrm{d}x + \frac{x}{x+y} \mathrm{d}y,$$

dove $\gamma = \gamma(t) = \big(2 + \cos t, \frac{1}{2} \sin t\big)$, $t \in [0, \pi]$.

A.A 2006/2007 Appello del 17 Settembre 2007 Traccia A

Gruppo A

1) Enunciare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata.

Si consideri poi
$$f_k(x) = \frac{1}{k^2}\cos(kx)$$
e si verifichi che il teorema si applica a tale successione.

2) Studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}\frac{1}{(1-\sqrt{x})^n}.$$

3) Enunciare il Teorema di Schwartz.

Applicarlo poi per stabilire se può esistere una funzione definita in $\mathbb{R}^2$ e ivi di classe C^2 tale che
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy).$$

4) Determinare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x,y) = \frac{x}{y}\cos\frac{y}{x^2-y}$$
e rappresentarlo graficamente. Provare che f è differenziabile in ogni punto del suo insieme di definizione.

Gruppo B

5) Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e sia $(x_o, y_0) \in A$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Dimostrare che se l'Hessiano di f in (x_0, y_0) è definito positivamente allora (x_0, y_0) è di minimo locale forte per f.

6) Determinare l'integrale generale in forma implicita dell'equazione

$$t^2(1 + y)y' = 2.$$

7) Provare che la forma differenziale

$$\frac{-y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y$$

è chiusa ma non esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.

8) Sia $A = [1, 2] \times [0, 1]$. Calcolare l'integrale

$$\iint_A \left(\frac{x}{x + y}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2006/2007 Appello del 20 Novembre 2007 Traccia A

Gruppo A

1) Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos^2 \frac{1}{2n}\right).$$

2) Studiare la convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ della successione di funzioni:

$$f_n(x) = x^2 n^2 e^{-nx}.$$

Stabilire poi, che la convergenza non è uniforme sull'intervallo $[0, +\infty)$.

3) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{\tan(x - y)}.$$

4) Stabilire se esiste il piano tangente al grafico della funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \arctan(e^{xy})$$

nel punto $P = (0, 1)$ e scriverne l'equazione.

Gruppo B

5) Fornire un esempio di un problema di Cauchy per cui non sussiste l'unicità della soluzione.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x - 4.$$

7) Stabilire se la seguente forma differenziale è esatta:

$$w = e^{xy}\mathrm{d}x - e^{xy}\mathrm{d}y.$$

8) Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_A \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16,\ x \leq 0,\ y \leq \frac{1}{2}x\}$.

A.A 2006/2007 Appello del 12 Febbraio 2008 Traccia A

Gruppo A

1) Studiare il carattere delle serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\cos\frac{1}{n}} - 1}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\arctan(n^2-1))^{\frac{1}{2}} + n}{n^2+1}.$$

2) Dimostrare che la serie delle derivate di una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

3) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x^2-2x+4)\sin(y^2)}{y^2x^3-2y^2x^2}.$$

4) Considerare le funzioni $f(\xi,\eta) = (\cos(\xi\eta), \xi^2+\eta^2)$ e $g(x,y) = (\arctan xy, x-y)$. Determinare l'aperto di $\mathbb{R}^2$ su cui la funzione $g \circ f$ è differenziabile e calcolare poi $\mathrm{d}(g \circ f)(0,0)$.

Gruppo B

5) Determinare i punti di estremo locale per la funzione

$$f(x,y) = x^2 y (x-y)^{\frac{1}{3}}.$$

Ha f punti di estremo assoluto? Motivare la risposta.

6) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos 2x + 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

7) Determinare il sottoinsieme del piano su cui è definita la forma differenziale

$$\frac{x^2y^2 - 2xy^3}{(x-y)^2}\mathrm{d}x + \frac{2x^3y - x^2y^2}{(x-y)^2}\mathrm{d}y$$

e stabilire se ivi è esatta.

8) Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_A \left(e^x e^y x \cos(x+y) - y e^y e^x \cos(x+y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x + y < \frac{\pi}{2},\ -3 < y - x < -1\}$.

A.A 2006/2007 Appello del 12 Febbraio 2008 Traccia A

Gruppo A

1) Studiare nell'intervallo $[0,1]$ la convergenza puntuale della successione

$$f_n(x) = \frac{n}{(1+nx)^2}.$$

Stabilire se si ha convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo $[a,1]$ con $0 < a < 1$.

2) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \log((x-y)\sin x)$$

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log(1+x-y)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

4) Considerare le funzioni $f(\xi,\eta) = (\xi\eta, \sin(\xi^2+\eta^2))$ e $g(x,y) = (xye^{xy}, x+y)$. Stabilire se la funzione $g \circ f$ è differenziabile in $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0)$ e, in caso affermativo, calcolare

$$\mathrm{d}(g \circ f)\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right).$$

Gruppo B

5) Stabilire che la funzione

$$f(x,y) = \frac{x-y+1}{2x+y} + \sin xy$$

è differenziabile sul suo insieme di definizione. Calcolare poi $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$, per qualsiasi versore $v = (v_1, v_2)$.

6) Stabilire che esiste una ed una sola soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos t + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si calcoli poi il polinomio di Maclaurin di ordine 3 per la soluzione.

7) Calcolare

$$\int_\gamma (2xy^2 - 1)\mathrm{d}x + 2yx^2\mathrm{d}y,$$

dove $\gamma\colon [0,1] \to R^2$ è la curva di componenti $\gamma(t) = (\frac{1}{t+1}, t)$.

8) Calcolare l'integrale

$$\int\int_A \frac{x^2}{2+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < y < x^2,\ 0 < x < 1\}$.