1) - a) Stabilire che il modulo del numero complesso

$$z = (1-i)^8 e^{i\theta}$$

è costante al variare di $\theta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo.

Poiché $\forall \theta \in \mathbb{R}$: $|e^{i\theta}| = 1$, $|z| = |(1-i)^8| \, |e^{i\theta}| = |(1-i)^8| = |1-i|^8$

$$\sqrt{2}^8 = 16$$

1)-b) Stabilire che la successione

$$\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (*)$$

è limitata superiormente e illimitata inferiormente. Determinarne il massimo.

La successione assegnata è somma delle successioni

$$\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n^2} \right)_{n\in\mathbb{N}} \quad e \quad \left(\log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Entrambe sono strettamente decrescenti in quanto composte da una successione strettamente crescente e una funzione strettamente decrescente:

$$n\in\mathbb{N} \mapsto n^2 \mapsto \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n^2} \quad e \quad n\in\mathbb{N} \mapsto n+1 \longmapsto \log_{\frac{1}{3}}(n+1)$$

Quindi la successione $(*)$ è anch'essa strettamente decrescente e dunque

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right) = \max_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \log_{\frac{1}{3}}(0+1) = 1$$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right) = \lim_{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) = 0 - \infty = -\infty$$

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \cos\left(\pi \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} \right)$.

Determinare inoltre i suoi eventuali asintoti. Stabilire infine che $x = \frac{5}{4}$ è un punto stazionario per f e che è un punto di minimo

dom f : $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ $\qquad (-\infty, -1] \cup [1,2) \cup (2,+\infty)$

Cerchiamo gli asintoti orizzontali:

Osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x-2} = 1$

e $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \Big/ x-2 = -1$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \cos(\pi \cdot 1) = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cos(\pi \cdot (-1)) = -1$$

Dunque f ha asintoto orizzontale sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$

Stabiliamo ora se f ha asintoto verticale in $x=2$

Poiché $\lim_{x\to 2^\pm} \frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \pm\infty$ e sappiamo che

$\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$ non esiste, f non ha asintoti verticali

Calcoliamo ora la derivata di f e verifichiamo che

$$f'(x) = -\pi \sin\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) \frac{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}(x-2) - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2}$$

$$= -\pi \sin\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) = \frac{x(x-2) - x^2+1}{(x-2)\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= -\pi \sin\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) \frac{x^2-2x-x^2+1}{(x-2)\sqrt{x^2-1}} = -\pi \sin\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right)\frac{1-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'\left(\frac{5}{4}\right) = -\pi \sin\left(\frac{\pi\sqrt{\frac{9}{16}}}{\frac{5}{4}-2}\right) \frac{1-\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\sqrt{\frac{9}{16}}}$$

$$= -\pi \sin \frac{\pi\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} \frac{1-\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\frac{3}{4}} = -\pi \sin(-\pi) \_\_ = 0$$

Quindi $\frac{5}{4}$ è interno al dominio di f ed è un punto stazionario per f

$$f''(x) = -\pi^2 \cos\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right)\left(\frac{1-2x}{(x-2)(\sqrt{x^2-1})}\right)^2 - \pi \sin\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) D\left(\frac{1-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$f''\left(\frac{5}{4}\right) = -\pi^2\cos(-\pi)\left(\frac{1-\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\frac{3}{4}}\right)^2 - 0 = \pi^2(\_\_)^2 > 0$$

Quindi $\frac{5}{4}$ è un punto di minimo locale forte per f.

Quindi $\frac{5}{4}$ è un punto di minimo locale forte per f.

Si poteva anche osservare che $f\left(\frac{5}{4}\right) = \cos(-\pi) = -1$
e poiché la funzione coseno non assume valori minori di -1
$x = \frac{5}{4}$ è un punto di minimo per f (assoluto) interno all'intervallo
$[1, 2]$ su cui f è derivabile; per il teorema di Fermat allora
deve essere $f'\left(\frac{5}{4}\right) = 0$.

3) Determinare $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}.$$ Quindi

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{x^2-1}\,dx = x + \int \frac{2}{(x-1)(x+1)}\,dx$$
$$= x - \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$
$$= x - \log|x+1| + \log|x-1| + c$$

4)

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle

Si veda, ad esempio, pag. 144 del manuale Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori 2002