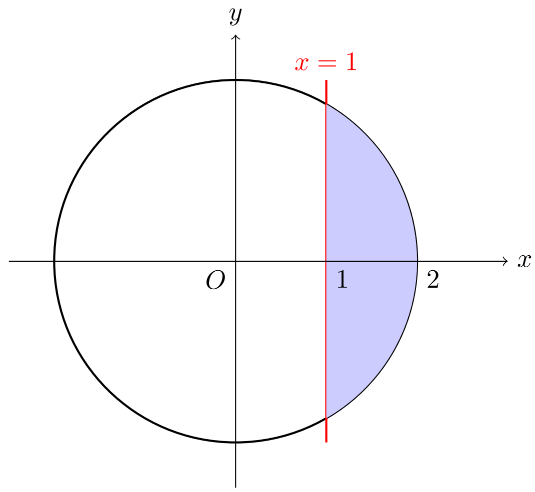
Possibile svolgimento della prova del 24 febbraio 2026 – Modulo B

1) L'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 1\}$ è un segmento circolare (la porzione di cerchio tagliata dalla corda verticale $x = 1$).



Passiamo in coordinate polari: $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$. Determiniamo gli estremi:

- Intersezione retta-cerchio: $1^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$. Gli angoli sono $\pm\arctan(\sqrt{3}) = \pm\frac{\pi}{3}$. Quindi $\theta \in [-\pi/3, \pi/3]$.
- Raggio: Per un θ fissato, ρ varia dalla retta $x = 1$ (ovvero $\rho\cos\theta = 1 \Rightarrow \rho = 1/\cos\theta$) alla circonferenza $\rho = 2$.

L'integrale diventa:

$$I = \iint_A x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} (\rho\cos\theta)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} \mathrm{d}\theta.$$

$$I = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\left(8 - \frac{1}{\cos^3\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(8\cos\theta - \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta.$$

Sfruttando la simmetria (funzione pari su intervallo simmetrico):

$$I = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(8\cos\theta - \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta.$$

Calcolando le primitive ($8\sin\theta$ e $-\tan\theta$) otteniamo:

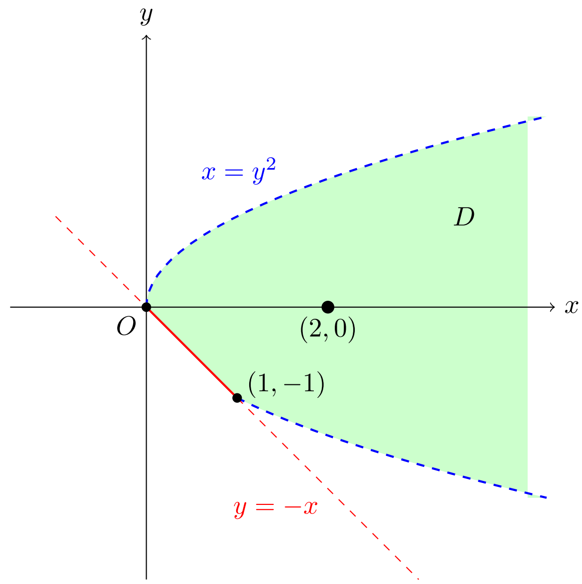
$$I = \frac{2}{3}\left(4\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}(3\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

2) Il campo vettoriale è $F(x, y) = \left(\ln(x - y^2),\ e^{\sqrt{x+y}},\ \frac{x}{y^2+1}\right)$.

Dominio:

- $\ln(x - y^2) \Rightarrow x - y^2 > 0 \Rightarrow x > y^2$ (regione "interna" alla parabola con asse x, concavità a destra).
- $e^{\sqrt{x+y}} \Rightarrow x + y \geq 0 \Rightarrow y \geq -x$ (semipiano sopra la retta $y = -x$).
- $\frac{x}{y^2+1}$ definita ovunque.

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2 \wedge y \geq -x\}$. L'intersezione tra $x = y^2$ e $y = -x$ si ha per $-y^2 = y \Rightarrow y(y + 1) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ e $(1, -1)$.



Il dominio non è chiuso (bordo parabola escluso), non è aperto (bordo retta incluso parzialmente), non è limitato, è connesso per archi.

Differenziabilità: Le prime due componenti del campo F sono composizioni di funzioni elementari C^∞ nei punti interni del loro dominio naturale con polinomi, la terza componente è una funzione razionale definita su $\mathbb{R}^2$ e quindi è di classe C^∞. Deduciamo che F è di classe C^∞ su un intorno di $(2, 0)$ (in realtà su $\mathring{D}$) e quindi è ivi differenziabile.

Matrice jacobiana in $(2, 0)$**:**

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x - y^2} & \frac{-2y}{x-y^2} \\ \dfrac{e^{\sqrt{x+y}}}{2\sqrt{x+y}} & \frac{e^{\sqrt{x+y}}}{2\sqrt{x+y}} \\ \dfrac{1}{y^2+1} & \frac{-2xy}{(y^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

Valutando in $(2, 0)$:

$$J_F(2, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) L'equazione $y' = \frac{2x}{1+x^2}(y^2 - 1)$ è a variabili separabili.

Soluzioni singolari: $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$.

Integrale generale:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 1} = \int \frac{2x}{1 + x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln(1 + x^2) + c.$$

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2c}(1 + x^2)^2 \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = K(1 + x^2)^2, \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ricavando y:

$$y(x) = \frac{1 + K(1 + x^2)^2}{1 - K(1 + x^2)^2}.$$

Soluzione che soddisfa $y(0) = 0$**:** Sostituendo nella forma implicita: $\frac{-1}{1} = K(1)^2 \Rightarrow K = -1$. Sostituendo nella forma esplicita:

$$y(x) = \frac{1 - (1 + x^2)^2}{1 + (1 + x^2)^2} = \frac{1 - (1 + 2x^2 + x^4)}{2 + 2x^2 + x^4} = -\frac{x^4 + 2x^2}{x^4 + 2x^2 + 2}.$$

Unicità: La funzione $f(x,y) = \frac{2x}{1+x^2}(y^2-1)$ e la sua derivata parziale rispetto a y, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4xy}{1+x^2}$, sono funzioni continue su tutto $\mathbb{R}^2$ (il denominatore $1+x^2$ non si annulla mai). Pertanto, sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità locale di Cauchy: per ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passa una ed una sola soluzione massimale del problema di Cauchy.

4) **Definizione:** Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{A}$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un versore. Si dice derivata direzionale di f in x_0 lungo v il limite:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t},$$

se esiste in $\mathbb{R}$.

Teorema: Se f è differenziabile in x_0, allora esistono tutte le derivate direzionali in x_0 e vale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v.$$

Dimostrazione: Dalla definizione di differenziabilità:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{per } h \to 0.$$

Poniamo $h = tv$. Se $t \to 0$, allora $h \to 0$ e $\|h\| = |t|$.

$$f(x_0 + tv) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot (tv) + o(|t|).$$

Dividendo per t ($t \neq 0$):

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \nabla f(x_0) \cdot v + \frac{o(|t|)}{t}.$$

Poiché $\lim_{t \to 0} \frac{o(|t|)}{t} = 0$, passando al limite si ottiene la tesi. $\square$