N°Exe - TRACCIA

1) - a) - A Scrivere in forma cartesiana il num. complesso $2^{\sqrt{2}} i\, e^{-2+\pi i}$

Calcolare poi le radici 4

$$2^{\sqrt{2}} i\, e^{-2+\pi i} = 2^{\sqrt{2}} e^{-2} \underbrace{e^{\pi i}}_{=-1} i = -2^{\sqrt{2}} e^{-2} i$$

Per calcolare le radici quarte, si tenga conto che $\left|-2^{\sqrt{2}} e^{-2} i\right| = \dfrac{2^{\sqrt{2}}}{e^2}$

e $\operatorname{Arg}\left(-2^{\sqrt{2}} e^{-2} i\right) = \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ quindi

$$\sqrt[4]{-2^{\sqrt{2}} e^{-2} i} = \frac{2^{\sqrt{2}/4}}{\sqrt{e}}\, e^{-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}}, \quad K = 0,1,2,3$$

1) - a) - B

Determinare parte reale, parte immaginaria e modulo del num. $\pi e^{-3+\pi/4\, i}$. Calcolare poi la potenza di esponente 20

$$\pi e^{-3+\pi/4\, i} = \frac{\pi}{e^3} e^{\frac{\pi}{4} i} = \frac{\pi}{e^3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{e^3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

quindi $\operatorname{Re}\left(\pi e^{-3+\frac{\pi}{4} i}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{2e^3} = \operatorname{Im}\left(\pi e^{-3+\frac{\pi}{4} i}\right)$

$$\left|\pi e^{-3+\frac{\pi}{4} i}\right| = \left|\pi e^{-3} e^{\frac{\pi}{4} i}\right| = \frac{\pi}{e^3}$$

$$\left(\pi e^{-3+\frac{\pi}{4} i}\right)^{20} = \frac{\pi^{20}}{e^{60}} e^{i\, 20 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^{20}}{e^{60}} e^{i 5\pi} = -\frac{\pi^{20}}{e^{60}}$$

1) - b)

Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

A - $f(x) = \left(\sinh(x^3)\right)^{1/\sqrt{2}} \cdot (x+1)$

dom f : deve essere $\sinh(x^3) \geq 0$ quindi $x^3 \geq 0$ cioè $x \geq 0$
quindi dom f $= [0, +\infty)$

Monotonia: osserviamo che le funzioni $f_1(x) = \left(\sinh(x^3)\right)^{1/\sqrt{2}}$

e $f_2(x) = x+1$ sono entrambe positive su $(0, +\infty)$

inoltre $f_1 = x \in [0, +\infty) \mapsto x^3 \mapsto \sinh(x^3) \mapsto \left(\sinh(x^3)\right)^{1/\sqrt{2}}$

e tutte le funzioni componenti sono strett. crescenti.

Poiché anche f_2 è strettamente crescente, f è strettamente crescente in quanto prodotto di due funzioni positive su $(0, +\infty)$. Dato che

$f(0)=0$, f è stett. crescente su $[0,+\infty)$

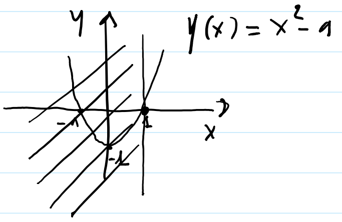
Immagine: $f \in C^0([0,+\infty))$ poiché prodotto delle funzioni continue f_1 e f_2. Quindi $\mathrm{Im}(f) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [0,+\infty)$

B- $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) + (x^3-1)^{-1/\sqrt{2}}$

dom f: deve essere $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^3-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \vee x<-1 \\ x>1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \end{cases}$

$$\mathrm{dom}\, f = (1,+\infty)$$

Monotonia:



È chiaro che su $(1,+\infty)$ la funzione $y(x)=x^2-1$ è strettamente crescente

Poiché $y(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ è strettam. decrescente

la funzione $f_1(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)$ è " " .

$f_2(x) = (x^3-1)^{-1/\sqrt{2}}$ è anch'essa composta da una funzione stett. crescente, $y(x)=x^3-1$, e una strettamente decrescente $y=x^{-1/\sqrt{2}}$

Essendo somma di due funzioni stett. decrescenti, anche f lo è.

Immagine: $f \in C^0((1,+\infty))$ dato che è somma di due funzioni continue su $(1,+\infty)$; quindi $\mathrm{Im} f = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x))$
$= (-\infty,+\infty)$

2) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

A- $\lim_{x\to0} \frac{\log(1+tg^2(x))}{2\arcsin^2 x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + \log(2^x-1) + x^{10}}{x^2 + 2^{x+1} - \mathrm{arctg}\, x}$

Poiché $tg^2(x) \sim x^2$ per $x\to0$ e $\arcsin^2 x \sim x^2$, abbiamo

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(1+tg^2(x))}{2\arcsin^2 x} = \lim_{x\to0} \frac{\log(1+x^2)}{2x^2} \overset{x^2=y}{=} \lim_{y\to0} \frac{\log(1+y)}{2y} = \frac{1}{2}$$

Per il secondo limite abbiamo:

$$\frac{2^x + \log(2^x-1) + x^{10}}{x^2 + 2^{x+1} - \mathrm{arctg}\, x} = \frac{\cancel{2^x}\left(1 + \frac{\log(2^x-1)}{2^x} + \frac{x^{10}}{2^x}\right)}{\cancel{2^x}\left(2 + \frac{x^2}{2^x} - \frac{\mathrm{arctg}\, x}{2^x}\right)}$$

$\cancel{2^x}\left(2+\frac{x^2}{2^x}-\frac{\operatorname{arctg}x}{2^x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2^x-1)}{2^x}\overset{2^x=y}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{\log(y+1)}{y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\log\left(y\left(1+\frac{1}{y}\right)\right)}{y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{y}+\frac{\log(1+1/y)}{y}=0+\frac{0}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{2^x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2^x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{-\operatorname{arctg}x}{2^x}=\frac{-\frac{\pi}{2}}{+\infty}=0$$

quindi anche il II limite è uguale a $\frac{1}{2}$

B - $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+\sin(x^{\frac{1}{3}})}{\operatorname{tg}x+x}$; $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-\operatorname{arctg}x+\log(1+|x|)}{3^x+\operatorname{arctg}x+\log(2+|x|)}$

$\sin x^{\frac{1}{3}}\sim x^{\frac{1}{3}}$ e $\operatorname{tg}x\sim x$ per $x\to0^+$, pertanto il primo limite è uguale a $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+x^{\frac{1}{3}}}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{1}{3}}(1+x^{1/6})}{2x}=$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2x^{2/3}}\left(1+x^{1/6}\right)=+\infty\cdot1=+\infty$$

$$\frac{2^x-\operatorname{arctg}x+\log(1+|x|)}{3^x+\operatorname{arctg}x+\log(2+|x|)}=\frac{\log(1+|x|)}{\log(2+|x|)}\cdot\frac{2^x/\log(1+|x|)-\frac{\operatorname{arctg}x}{\log(1+|x|)}+1}{3^x/\log(2+|x|)+\frac{\operatorname{arctg}x}{\log(2+|x|)}+1};$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{\log(1+|x|)}=\frac{0}{+\infty}=0$; analogamente $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{\log(2+|x|)}=0$, inoltre

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{\log(1+|x|)}=\frac{-\frac{\pi}{2}}{+\infty}=0$, così come $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{\log(2+|x|)}=0$ e quindi

$\displaystyle\frac{2^x/\log(1+x)-\frac{\operatorname{arctg}x}{\log(1+x)}+1}{3^x/\log(2+x)+\frac{\operatorname{arctg}x}{\log(2+x)}+1}\xrightarrow{x\to-\infty}1$. Infine

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\log(1+|x|)}{\log(2+|x|)}\overset{y=1+|x|}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{\log(1+y)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{\log\left(y\left(1+\frac{1}{y}\right)\right)}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{\log y+\log\left(1+\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\cancel{\log y}}{\cancel{\log y}\left(1+\log\left(1+\frac{1}{y}\right)/\log y\right)}$$

$$=\frac{1}{1+0/+\infty}=\frac{1}{1+0}=1$$

3) Calcolare il seguente integrale

A - $\displaystyle\int\frac{2^x+2}{2^x+1}\,dx$

$\displaystyle\frac{2^x+2}{}=1+\frac{1}{}$ quindi l'integrale assegnato è

$$\frac{2^x+2}{2^x+1} = 1 + \frac{1}{2^x+1}$$ quindi l'integrale assegnato è

uguale a $\int \left(1+\frac{1}{2^x+1}\right) dx = x + \int \frac{1}{2^x+1}\, dx$

posto $2^x = t$, quindi $dt = 2^x \log 2\, dx$, l'ultimo integrale è

uguale a $\int \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{t \log 2}\, dt = \frac{1}{\log 2} \int \frac{1}{(t+1)t}\, dt$; poiché

$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ e $t > 0$ otteniamo

$$\frac{1}{\log 2}\left(\log t - \log(t+1)\right) + c, \quad t = 2^x$$

quindi l'integrale assegnato è uguale a $x + \frac{1}{\log 2}\left(\log 2^x - \log(2^x+1)\right) + c$

$$= 2x - \frac{\log(2^x+1)}{\log 2} + c$$

B- $\int \frac{1}{x\sqrt{x+3}}\, dx$; poniamo $\sqrt{x+3} = t$, quindi $x = t^2 - 3$ e $dx = 2t\, dt$, ottenendo

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+3}}\, dx = \int \frac{1}{(t^2-3)t}\, 2t\, dt = 2\int \frac{1}{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}\, dt =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{3}} \int \left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\log|t-\sqrt{3}| - \log|t+\sqrt{3}|\right) + c, \quad t = \sqrt{x+3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{|\sqrt{x+3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} + c$$

4) A - Dare la definizione di funzione derivabile in un punto e su un intervallo.
Enunciare e dimostrare poi il Teorema di Cauchy usando il Teorema di Rolle

Si veda pag. 198 del manuale consigliato per enunciato e dimostrazione

B- Dare la definizione di funzione crescente.
Dimostrare poi che se $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo è derivabile allora f crescente $\iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
Fornire poi un esempio di una funzione strettamente crescente su un intervallo che ha punti in cui la derivata è nulla

Si veda fascicolo delle dimostrazioni del manuale consigliato.

Esempio: $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$, ha derivata nulla in 0 ed è strettamente crescente