Esonero Analisi Matematica modulo II

venerdì 22 aprile 2016 14:30

1) Stabilire se i seguenti integrali convergono

A) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}\, dx$; $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3} + \sin(x-2)}$ B) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\, dx$; $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2} + (x-2)e^{x-2}}$

A) • $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}\, dx$ converge; infatti $\displaystyle\frac{\cos x - 1}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} -\frac{1}{2}$ quindi l'integrando è limitata in un intorno destro di 0; inoltre $\displaystyle\left|\frac{\cos x - 1}{x^2}\right| \le \frac{2}{x^2}$ e dunque dato che $\displaystyle\frac{2}{x^2}$ è integrabile in ogni intervallo del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$ anche $\displaystyle\frac{\cos x - 1}{x^2}$ è ivi assolutamente integrabile e dunque integrabile

• $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3} + \sin(x-2)}$ converge; infatti

$$\frac{1}{(x-2)^{2/3} + \sin(x-2)} = \frac{1}{(x-2)^{2/3} + (x-2) + o(x-2)} \sim \frac{1}{(x-2)^{2/3}} \quad \text{per } x \to 2^+$$

B) • $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\, dx$ converge; infatti $\displaystyle\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} \to 1$ per $x \to 0$ e quindi l'integrando è limitato in un intorno destro di 0; inoltre $\displaystyle 0 < \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$ e possiamo concludere come nell'esercizio della traccia A.

• $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2} + (x-2)e^{x-2}}$ converge; infatti $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x-2} + (x-2)e^{x-2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-2}\left(1 + \sqrt{x-2}\, e^{x-2}\right)} \sim \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{per } x \to 2^+$$

2) Calcolare la somma della serie

A) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{4^n}$ B) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{4}{3^n}$

In entrambe le tracce si tratta di una serie geometrica moltiplicata per una costante. Nella traccia A la ragione

è $\frac{1}{4}$, nello B è $\frac{1}{3}$, quindi entrambe convergono.
Le loro somme però non $\frac{1}{1-q}$ in quanto in entrambe l'indice iniziale NON È 0!

Per la A) si parte da $n=3$ quindi occorre sottrarre alla somma della serie la somma dei primi 3 termini (cioè $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$) ovvero $s_2 = \frac{1-\frac{1}{q^3}}{1-q}$; analogamente per la traccia B.

$$A)\quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{4^n} = 3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{4^n} = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \underbrace{\frac{1-\frac{1}{4^3}}{1-\frac{1}{4}}}_{s_2}\right) =$$

$$= \frac{3}{4^3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4^2}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{16}$$

$$B)\quad \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{4}{3^n} = 4\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{3^n} = 4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \underbrace{\frac{1-\frac{1}{3^4}}{1-\frac{1}{3}}}_{s_3}\right) =$$

$$= \frac{4}{3^4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3^3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{27}$$

3) Stimare l'errore che si commette approssimando la somma delle serie

A) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+10}$ B) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3+5}$

con la sua somma parziale A) s_9 B) s_4

A) Sappiamo che nel caso di una serie a segni alterni $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \in \mathbb{R}$ l'errore $|s - s_n| \leq \frac{1}{a_{n+1}}$, quindi nel nostro caso tale errore è minore di $\frac{1}{10^2+10} = \frac{1}{110}$

B) $|s - s_4| \leq \frac{1}{a_5} = \frac{1}{5^3+5} = \frac{1}{130}$

B) $|s - s_4| \le \dfrac{1}{a_5} = \dfrac{1}{5^3+5} = \dfrac{1}{130}$

4) Stabilire il caratere della seguente serie

A) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{(k-1)^3}{3k^3+1}\right)^{k-1}$ B) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{k^2-1}{2(k+1)^2}\right)^{k+1}$

A) La serie è a termini positivi. Possiamo usare il criterio della radice. Dobbiamo calcolare:

$\displaystyle\lim_k \left(\frac{(k-1)^3}{3k^2+1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$; Osserviamo che la base tende a $+\infty$ mentre l'esponente tende a 1 quindi il risultato del limite è $(+\infty)^1 = +\infty$ dunque la serie diverge

Potevamo anche osservare che la serie è a termini positivi e che la successione che la definisce $\left(\dfrac{(k-1)^3}{3k^2+1}\right)^{k-1}$ non tende a 0 dato che il suo limite si presenta nella forma $+\infty^{+\infty}$ e quindi è uguale a $+\infty$

B) Usiamo il criterio della radice. Dobbiamo calcolare:

$\displaystyle\lim_k \left(\frac{k^2-1}{2(k+1)^2}\right)^{\frac{k+1}{k}}$; poiché la base tende a $\frac{1}{2}$ e l'esponente a 1 il risultato è $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} < 1$, dunque la serie converge

5) Stabilire se la funzione

A) $f(x,y) = e^{\sqrt{y^2-x}}\, x$ B) $f(x,y) = \log(xy) + x^2y^2$

ha piano tangente al suo grafico nel punto

A) $(-1,0,f(-1,0))$ B) $(-1,-1,f(-1,-1))$

e in caso affermativo scriverne l'equazione

A) $\mathrm{dom}\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x \ge 0\}$; il punto $(-1,0)$ è interno a $\mathrm{dom}\, f$. f ha derivate parziali continue all'interno suo dominio quindi per il teorema del differenziale è differenziabile in $(-1,0)$ e ammette piano tangente nel punto $(-1,0,f(-1,0))$. L'equazione di tale piano è

$z = f(-1,0) + \langle \nabla f(-1,0), (x+1, y) \rangle$ cioè

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\sqrt{y^2-x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{y^2-x}} x + e^{\sqrt{y^2-x}}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = \frac{e}{2} + e = \frac{3}{2} e$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{\sqrt{y^2-x}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{y^2-x}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = 0$

$f(-1,0) = -e$

Quindi l'equazione è

$z = -e + \frac{3}{2} e (x+1)$ cioè $z = \frac{3}{2} e x + \frac{1}{2} e$

B) dom $f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0 \}$.

dom f è aperto ed $f \in C^1(\text{dom} f)$. Dunque per il teorema del differenziale f è differenziabile in $(-1,-1)$ ed ha piano tangente al suo grafico in $(-1,-1, f(-1,-1))$

$f(-1,-1) = \log 1 + 1 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{xy} + 2xy^2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = -1 - 2 = -3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{xy} + 2yx^2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = -3$

Quindi l'equazione del piano tangente è

$z = 1 + \langle (-3,-3), (x+1, y+1) \rangle =$

$= 1 - 3(x+1) - 3(y+1)$ cioè

$z = 1 - 3x - 3 - 3y - 3$

$z = -3x - 3y - 5$