Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corso C

A.A. 2022/2023 Prova parziale 7 giugno 2023 Traccia A

Possibile svolgimento

1) Calcolare l'integrale doppio

$$\int_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove D è l'insieme limitato, contenuto nel primo quadrante, avente come bordo l'unione dei punti della parabola $y = x^2$, della retta $y = 1$ e dell'asse delle y.

Svolgimento: L'insieme D è normale sia rispetto all'asse delle x che rispetto all'asse delle y. Possiamo usare le formule di riduzione per calcolare l'integrale. Trattando D come normale rispetto all'asse delle y, integrando quindi prima rispetto a x e poi rispetto a y, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_0^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} y^{3/2} + y^{5/2} \right) dy \\
&= \left[\frac{2}{15} y^{5/2} + \frac{2}{7} y^{7/2} \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{15} + \frac{2}{7} - 0 - 0 = \frac{44}{105}
\end{aligned}$$

Se consideriamo D come normale rispetto all'asse delle x, il calcolo è analogo.

2) Sia $f(x, y) = (x^4 + y^4 - 4xy, xy, x - y)$ una funzione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Calcolare la matrice Jacobiana di f nel punto $(1, 2)$. Si consideri poi la prima componente di f. Se ne determinino i suoi punti critici e se ne studi la natura.

Svolgimento: Calcoliamo la matrice jacobiana di f in un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3 - 4y & 4y^3 - 4x \\ y & x \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Poi dobbiamo sostituire il punto $(1, 2)$ nella matrice:

$$J_f(1,2) = \begin{bmatrix} -4 & 28 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Questa è la matrice jacobiana di f nel punto $(1,2)$.

Per studiare la prima componente di f, ossia $f_1(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$, dobbiamo calcolare le sue derivate parziali e porle uguali a zero:

$$\begin{cases} f_{1x} = 4x^3 - 4y = 0 \\ f_{1y} = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$$

Da questo sistema si ricavano i punti critici di f_1, che sono $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Per determinare la natura di questi punti critici, possiamo usare il criterio del determinante della matrice hessiana di f_1:

$$H_{f_1}(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

Calcolando il determinante di questa matrice nei punti critici, si ha:

$$\det(H_{f_1}(0,0)) = -16$$
$$\det(H_{f_1}(1,1)) = 128$$
$$\det(H_{f_1}(-1,-1)) = 128$$

Quindi il punto $(0,0)$ è un punto di sella (il determinante è negativo), i punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$ sono punti di minimo locale forte (il determinante è positivo e il primo elemento sulla diagonale [anche positivo).

3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = e^{-x}\cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento: Determiniamo, come prima cosa, l'integrale generale dell'equazione omogenea:

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \qquad (*)$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

Le radici sono

$$\lambda = -2 \pm i.$$

Quindi l'integrale generale di (*) è dato da:

$$y_o(x) = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per trovare una soluzione particolare y_p dell'equazione non omogenea, usiamo il metodo di similarità. Poiché $-1+2i$ **non** è soluzione dell'equazione caratteristica cerchiamo y_p del tipo:

$$y_p(x) = e^{-x}\big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\big).$$

Calcoliamone la derivata prima e la derivata seconda:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= e^{-x}\big(-A\cos(2x) - B\sin(2x)\big) + e^{-x}\big(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)\big) \\ y_p''(x) &= e^{-x}\big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\big) + e^{-x}\big(2A\sin(2x) - 2B\cos(2x)\big) \\ &\quad + e^{-x}\big(2A\sin(2x) - 2B\cos(2x)\big) + e^{-x}\big(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)\big) \end{aligned}$$

Sostituendo al primo membro dell'equazione del problema, otteniamo:

$$y_p'' + 4y_p' + 5y_p = e^{-x}\big((-2A+4B)\cos(2x) + (-2B-4A)\sin(2x)\big)$$

e uguagliando tale espressione con il secondo membro otteniamo:

$$\begin{aligned} -2A + 4B &= 1 \\ -2B - 4A &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} A &= -1/10 \\ B &= 1/5 \end{aligned}$$

Pertanto, una soluzione particulare dell'equazione del problema è:

$$y_p(x) = e^{-x}\Big(-\frac{\cos(2x)}{10} + \frac{\sin(2x)}{5}\Big)$$

e l'integrale generale è dato da:

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{-x}\Big(-\frac{\cos(2x)}{10} + \frac{\sin(2x)}{5}\Big)$$

Per trovare c_1 e c_2, usiamo le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$:

$$0 = y(0) = c_1 - 1/10 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1/10$$

Con questo valore di c_1, calcoliamo $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) = -2e^{-2x}\Big(\frac{\cos x}{10} + c_2\sin x\Big) + e^{-2x}\Big(-\frac{\sin x}{10} + c_2\cos x\Big) \\ - e^{-x}\Big(-\frac{\cos(2x)}{10} + \frac{\sin(2x)}{5}\Big) + e^{-x}\Big(\frac{\sin(2x)}{5} + \frac{2\cos(2x)}{5}\Big) \end{aligned}$$

Da cui

$$1 = y'(0) = -2/10 + c_2 + 1/10 + 2/5 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 7/10.$$

La soluzione del problema è quindi

$$y(x) = e^{-2x}\Big(\frac{\cos x}{10} - \frac{3\sin x}{10}\Big) + e^{-x}\Big(-\frac{\cos(2x)}{10} + \frac{\sin(2x)}{5}\Big).$$

4) Dare la definizione di derivata direzionale in un punto. Dimostrare che se una funzione è differenziabile in un punto allora ammette derivata direzionale secondo qualunque direzione.

Svolgimento La derivata direzionale $D_v f(x)$ di una funzione scalare $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in un punto $x \in \mathring{A}$ lungo un versore v è, se esiste finito, il limite:

$$D_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Per dimostrare che una funzione è differenziabile in un punto ammette derivata direzionale secondo qualunque direzione, possiamo usare il seguente argomento.

Se f è differenziabile in x, allora

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \nabla f(x) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

dove $\| \cdot \|$ denota la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$. Sia v un qualsiasi vettore unitario e sia t uno scalare qualunque. Abbiamo allora:

$$f(x+tv) - f(x) - t\nabla f(x) \cdot v = o(\|tv\|) = o(|t|) = o(t), \quad \text{per } t \to 0$$

Concludiamo quindi che esiste

$$D_v f(\mathbf{x}) = \nabla f(x) \cdot v.$$