1)-a) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=4}^{+\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^4 \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2^5}{3^4}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2^5}{3^3} = \frac{32}{27}$$

1)-b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2\log n + 1}$$

$$\frac{n-1}{n^2\log n + 1} \sim \frac{n}{n^2\log n} \sim \frac{1}{n\log n}$$

Poiché $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = +\infty, \quad \forall a > 1$

per il criterio dell'integrale la serie $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} = +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

e quindi per il criterio del confronto asintotico anche la serie assegnata diverge positivamente

2) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = xy(x^2-y^2)^2$$

e studiarne la natura

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$f_x(x,y) = y(x^2-y^2)^2 + 2xy(x^2-y^2)2x$$

$$f_y(x,y) = x(x^2-y^2)^2 - 2xy(x^2-y^2)2y$$

$$\begin{cases} y(x^2-y^2)(5x^2-y^2) = 0 \\ x(x^2-y^2)(x^2-5y^2) = 0 \end{cases}$$

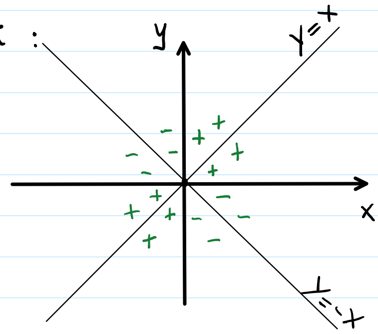
$$\begin{cases} y = 0 \\ x^5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 = y^2 \\ x(6x^2)(x^2-25x^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x^2 = y^2 \\ -24\cdot 6\cdot x^5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

I punti critici sono dunque $(0,0)$ e tutti i punti che soddisfano l'equazione $x^2-y^2=0$ ossia $(x-y)(x+y)=0$ ovvero tutti i punti delle bisettrici $b_1: y=x$ e $b_2: y=-x$. Osserviamo che $(0,0)$ appartiene ad entrambe queste rette e quindi la sua natura può essere studiata insieme a quella degli altri punti di tali rette.

Sia quindi $(\bar{x},\bar{y}) \in b_1 \cup b_2$; poiché $f(\bar{x},\bar{y})=0$ per studiare il segno di $f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})$ in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$ è sufficiente studiare il segno di f. Questo dipende solo dal fattore xy; abbiamo quindi:



dunque se $(\bar{x},\bar{y}) \in b_1$ e $\bar{x} \neq 0$, $(\bar{x},\bar{y})$ è un minimo locale

se $(\bar{x},\bar{y}) \in b_2$ e $\bar{x} \neq 0$, $(\bar{x},\bar{y})$ è un massimo locale

$(0,0)$ è un punto di sella

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' = x e^{-2x} & (*) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata all'equazione $(*)$

$\lambda^2 + 2\lambda = 0$ che ha soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = -2$

L'integrale generale dell'omogenea associata è quindi dato da

$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}$

Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}$ di $(*)$ col metodo di similarità: poiché -2 è soluzione dell'equazione caratteristica $\bar{y}$ è data da

$$\bar{y}(x) = x(ax+b)e^{-2x} = (ax^2+bx)e^{-2x}$$

$$\bar{y}'(x) = (2ax+b)e^{-2x} - 2(ax^2+bx)e^{-2x} = e^{-2x}\left(-2ax^2+2(a-b)x+b\right)$$

$$\bar{y}''(x) = -2e^{-2x}\left(-2ax^2+2(a-b)x+b\right) + e^{-2x}\left(-4ax+2(a-b)\right)$$

$$= e^{-2x}\left(4ax^2 - 4(2a-b)x + 2a-4b\right)$$

Quindi

$$e^{-2x}\left(\cancel{4ax^2} - 4(2a-b)x + 2a - 4b \cancel{-4ax^2} + 4(a-b)x + 2b\right) = xe^{-2x}$$

$$e^{-2x}\left(-4ax + 2a - 2b\right) = xe^{-2x}$$ da cui

$$\begin{cases} -4a = 1 \\ 2a-2b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

L'integrale generale di $(*)$ è quindi dato da

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} - \frac{x}{4}(x+1)e^{-2x}$$

$$y(0) = 1 \iff c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(x) = -2c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}(x+1)e^{-2x} - \frac{x}{4}e^{-2x} + \frac{x}{2}(x+1)e^{-2x}$$

$$y'(0) = 0 \iff -2c_2 - \frac{1}{4} = 0 \iff c_2 = -\frac{1}{8}$$

e quindi $c_1 = 1 - c_2 = \frac{9}{8}$

4) Dare la definizione di derivata direzionale in un punto di un aperto secondo la direzione v per una funzione di più variabili reali. Dimostrare poi che se f è differenziabile in un punto di un aperto allora f è derivabile in tale punto secondo qualunque direzione.

Per la definizione si veda pag. 329 del manuale consigliato. Per la dimostrazione si veda pag. 334