1) Sia $f(t) = \sin_+^2(t-\pi)$. Calcolare $f * H$, dove H è la funzione di Heaviside.

Sappiamo che $f*H$ è il segnale che per $t>0$ è dato da

$$(f*H)(t) = \int_0^t f(\tau)H(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_0^t \sin_+^2(\tau-\pi)\,d\tau$$

Ora se $t\in[0,\pi]$: $\sin_+^2(\tau-\pi) = 0 \quad \forall \tau\in[0,t]$ e quindi

$$(f*H)(t) = 0 \quad \forall t\in[0,\pi]$$

Se $t>\pi$: $\sin_+^2(\tau-\pi) = \sin^2(\tau-\pi) = \sin^2(\tau) \quad \forall\tau>\pi$

e $\sin_+^2(\tau-\pi) = 0 \quad \forall\tau\in[0,\pi]$ quindi

$$(f*H)(t) = \int_0^t \sin_+^2(\tau-\pi) = \int_\pi^t \sin^2(\tau)\,d\tau =$$

$$\int_\pi^t \sin^2(\tau)\,d\tau = -\sin\tau\cos\tau\Big|_\pi^t + \int_\pi^t \cos^2(\tau)\,d\tau =$$
$$= -\sin t\cos t + \int_\pi^t (1-\sin^2(\tau))\,d\tau$$
$$= -\sin t\cos t + t-\pi - \int_\pi^t \sin^2(\tau)\,d\tau\text{, cioè}$$

$$\int_\pi^t \sin^2(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}\left(\sin t\cos t - t+\pi\right)$$

In definitiva

$$(f*H)(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t\le\pi \\ -\frac{1}{2}(\sin t\cos t - t+\pi) & \text{se } t>\pi \end{cases}$$

1) Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \cos\left(\pi\frac{n^2x^2}{n^2x^2+1}\right)$$

Se $x=0$: $\dfrac{\pi n^2\cdot x^2}{n^2x^2+1} = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ quindi

$$f_n(0) = \cos(0) = 1 \quad \forall n \quad \text{e} \quad \lim_n f_n(0) = 1$$

Fissato $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, abbiamo che $\dfrac{n^2 \bar{x}^2}{n \bar{x}^2 + 1} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$

quindi $\cos\left(\pi \dfrac{n^2 \bar{x}^2}{n^2 \bar{x}^2 + 1}\right) \to \cos(\pi) = -1$

Dunque f_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Poiché le funzioni f_n sono continue su $\mathbb{R}$ mentre il limite puntuale f ha una discontinuità in 0, f_n non converge a f uniformemente in quanto se per assurdo $f_n \to f$ unif. su $\mathbb{R}$ allora f sarebbe continua su $\mathbb{R}$; in particolare anche in 0.

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + n}{n^2+1} (x-1)^n \qquad (*)$$

Calcoliamo il raggio di convergenza di $(*)$

$$\lim_n \frac{e^{n+1} + n+1}{(n+1)^2 + 1} \frac{n^2+1}{e^n + n} = \lim_n \frac{e\, e^n + n+1}{e^n + n} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = e \cdot 1 = e$$

quindi $\rho = \dfrac{1}{e}$

L'intervallo di convergenza di $(*)$ è $\left(1 - \dfrac{1}{e}, 1 + \dfrac{1}{e}\right)$

Studiamo la convergenza negli estremi di tale intervallo

Per $x = 1 - \dfrac{1}{e}$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + n}{n^2+1} (-1)^n \frac{1}{e^n} \qquad (\square)$$

che è a segni alterni. Osserviamo che

$$\frac{e^n + n}{e^n(n^2+1)} \xrightarrow{n} 0$$

Sia ora $f(x) = \dfrac{e^x + x}{e^x(x^2+1)}$

$$f'(x) = \frac{(e^x+1)(e^x(x^2+1)) - (e^x+x)(e^x(x^2+1) + 2xe^x)}{e^{2x}(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^{2x} - x\,e^x(x^2+1) - 2x^2e^x}{e^{2x}(x^2+1)^2}$$

$$= e^{2x}\left(-2x + \frac{x^2+1}{e^x} - \frac{x(x^2+1)}{e^x} - \frac{2x^2}{e^x}\right)$$

Poiché $-2x + \dfrac{x^2+1}{e^x} - \dfrac{x(x^2+1)}{e^x} - \dfrac{2x^2}{e^x} \longrightarrow -\infty$ per $x \to +\infty$

il numeratore di $f'(x)$ è definitivamente negativo

Quindi $\dfrac{e^n+n}{e^n(n^2+1)}$ è definitivamente monotona decrescente

e per il criterio di Leibniz, la serie $(\square)$ converge

Per $x = 1 + \frac{1}{e}$, otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n+n}{n^2+1} \cdot \frac{1}{e^n}$$

$$\frac{e^n+n}{e^n(n^2+1)} \sim \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Quindi converge (osserviamo anche che la stessa stima asintotica dà la convergenza in modulo di $(\square)$ e quindi potevamo dedurre che $(\square)$ converge senza usare il criterio di Leibniz).

In definitiva $(*)$ converge puntualmente su $\left[1-\frac{1}{e}, 1+\frac{1}{e}\right]$. Per il teorema di Abel la convergenza è anche uniforme sullo stesso intervallo

3) Dare la definizione di integrale di una funzione continua $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lungo una curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ regolare a tratti.

Dimostrare poi che $\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \ell(\gamma)$

dove $\ell(\gamma)$ è lunghezza della curva γ.

Si veda, ad esempio, p. 64 degli appunti

4) Dare la definizione di singolarità eliminabile.

Dimostrare poi che se $f \in H(D'(z_0, \delta))$ ed $\exists L \geq 0$ t.c. $|f(z)| \leq L$, $\forall z \in D'(z_0,\delta)$, allora z_0 è una singolarità eliminabile per f.

Si vedano p. 110 e p. 112 degli appunti

5) Calcolare

$$\int_{\partial^+ Q} \frac{z^2 e^{1/z^2}}{z^3+z}\, dz \,, \qquad (*)$$

dove Q è il quadrato di vertici $2(1+i)$, $2(i-1)$, $-2(1+i)$, $2(1-i)$

Le singolarità della funzione $f(z) = \dfrac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}}{z^3+z}$ sono 0 e $\pm i$ entrambe appartenenti a $\mathring{Q}$

Possiamo usare il I e il II teorema dei residui per calcolare $(*)$

$$(*) = 2\pi i \left(\text{Res}(f,0) + \text{Res}(f,i) + \text{Res}(f,-i) \right) = -2\pi i \,\text{Res}(f,\infty)$$

$$\text{Res}(f,\infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^4} \frac{e^{z^2}}{\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}} = -\frac{e^{z^2}}{1+z^2} \frac{1}{z}$$

$$\lim_{z\to 0} -\frac{e^{z^2}}{1+z^2}\frac{1}{z}\cdot z = \lim_{z\to 0} \frac{-e^{z^2}}{1+z^2} = -1$$

Quindi 0 è un polo semplice per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

e $\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -1$. Pertanto

$$(*) = -2\pi i\,(-1) = 2\pi i$$

6) Calcolare la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\in[0,1] \\ x^2 & \text{se } x\in[1,2] \end{cases}$$

Dimostrare poi che $\displaystyle\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^h 2 - 1}{\pi^2 h^2} = -\frac{1}{3}$

Sia $\tilde{f} = \tilde{f}(x)$ l'estensione pari di f all'intervallo $[-2,2]$

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)\,dx = \frac{2}{4}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{6}(8-1) = \frac{7}{6}$$

$$a_K = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{2\pi}{4}kx\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx = \int_1^2 x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx$$

$$= x^2\frac{2}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\Big|_1^2 - \frac{4}{\pi k}\int_1^2 x\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{8}{\pi^2k^2}\,x\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\Big|_1^2 - \frac{8}{\pi^2k^2}\int_1^2\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{16}{\pi^2k^2}\cos(k\pi) - \frac{8}{\pi^2k^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

$$- \frac{16}{\pi^3k^3}\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{16}{\pi^2k^2}(-1)^k - \frac{8}{\pi^2k^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{16}{\pi^3k^3}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

Quindi la serie di soli coseni di f è data da

$$\frac{7}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)$$, dove gli a_k sono quelli calcolati sopra

Per $x = 1$ la serie converge a $\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

Quindi $$\frac{7}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \frac{1}{2}$$

Poiché $$\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h \end{cases}$$

Otteniamo
$$\sum_{h=1}^{+\infty} a_{2h}(-1)^h = \frac{1}{2} - \frac{7}{6} = -\frac{2}{3}$$

se k è pari ($k=2h$, con $h \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$)

$$a_{2h} = \frac{16}{\pi^2(2h)^2} - \frac{8(-1)^h}{\pi^2(2h)^2}$$ e quindi

$$\sum_{h=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi^2h^2} - \frac{(-1)^h 2}{\pi^2h^2}\right)(-1)^h = \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^h 4 - 2}{\pi^2h^2} =$$

$$2\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^h 2 - 1}{\pi^2h^2} = -\frac{2}{3}$$ da cui $$\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^h 2 - 1}{\pi^2h^2} = -\frac{1}{3}$$