1) Stabilire che la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - \log(x^n)}{n^3+1}$$

non converge totalmente su $(0,1]$, mentre converge totalmente su ogni intervallo $[a,1]$ con $a \in (0,1)$.

$$\frac{x^n - \log x^n}{n^3+1} = \frac{x^n - n\log x}{n^3+1} \geq 0 \quad \forall x \in (0,1]$$

Fissiamo n e consideriamo la funzione $f_n(x) = \dfrac{x^n - n\log x}{n^3+1}$

$$f_n'(x) = \frac{n x^{n-1} - n\frac{1}{x}}{n^3+1} = \frac{1}{x}\frac{1}{n^3+1}(n x^n - 1)$$

Poiché $\frac{1}{x}\frac{1}{n^3+1} > 0 \ \forall x \in [0,1)$ e $n x^n - 1 \leq 0 \ \forall x \in (0,1]$

$f_n'(x) \leq 0 \ \forall x \in (0,1]$ dunque f_n è monotona decrescente su $(0,1]$. Poiché $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty \ \forall n \geq 1$

$\sup_{x \in (0,1)} f_n(x) = +\infty$ e la serie assegnata non può convergere totalmente su $(0,1)$. Sull'intervallo $[a,1]$ abbiamo invece

$$\sup_{x \in [a,1]} f_n(x) = f_n(a) = \frac{a^n - n\log a}{n^3+1}$$

Studiamo la convergenza della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n - n\log a}{n^3+1}$ (*)

$$-\frac{n\log a}{n^3+1} \sim -\frac{\log a}{n^2} \quad \text{dunque} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n\log a}{n^3+1} \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^3+1}} = \frac{a}{\sqrt[n]{n^3+1}} \longrightarrow a < 1 \quad \text{quindi anche} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^3+1} \in \mathbb{R}$$

Pertanto (*) converge e dunque la serie assegnata converge totalmente su $[a,1]$

1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di un segnale periodico. Usarlo poi per calcolare la trasformata del segnale periodico g di periodo 2 ottenuto estendendo per periodicità la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ -1 & \text{se } t \in (1,2] \end{cases}$$

Per il teorema si vedano, ad esempio, gli appunti sulla mia pagina web

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 f(t)\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(\int_0^1 e^{-st}\, dt - \int_1^2 e^{-st}\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^1 + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_1^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s} e^{-s} \right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} e^{-2s} \right), \quad \forall s \in \mathbb{C} \ \operatorname{Re} s > 0$$

2) Enunciare e dimostrare almeno un teorema sul calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze in $\mathbb{C}$

Si vedano, ad esempio, pagg. 37-38 degli appunti

3) Dimostrare che

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,1)} \frac{\sin z + \cos z}{(z^2 - z(1-i))^2}\, dz + \int_{\mathcal{E}^-(i)} \frac{e^z}{(z^2 - z(1-i))^2}\, dz = 0$$

dove $\mathcal{C}^+(0,1)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1 orientata positivamente ed $\mathcal{E}^-(i)$ è l'ellisse di centro i con un asse parallelo all'asse dei reali e lunghezza 2 e l'altro coincidente con l'asse degli immaginari puri di lunghezza 3, orientato negativamente

È sufficiente usare la seconda formula di rappresentazione di Cauchy. Infatti $(z^2 - z(1-i))^2 = z^2 (z-(1-i))^2$ quindi posto

$$g(z) = \frac{\sin z + \cos z}{(z-1+i)^2} \quad e \quad h(z) = \frac{e^z}{(z-1+i)^2}$$

entrambe queste funzioni sono olomorfe, rispettivamente, in $D(0,1)$ e all'interno del dominio avente per bordo $\mathcal{E}^+(i)$

quindi

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,1)} \frac{g(z)}{(z-1+i)^2}\, dz = 2\pi i\, g'(0)$$

$$g'(z) = \frac{(\cos z - \sin z)(z-1+i)^2 - 2(z-1+i)(\sin z + \cos z)}{(z-1+i)^4}$$

$$g'(0) = \frac{(-1+i)^2 - 2(-1+i)}{(-1+i)^4} = \frac{-1+i-2}{(-1+i)^3} = \frac{-3+i}{(-1+i)^3}$$

$$\int_{\mathcal{E}^-(i)} \frac{h(z)\, dz}{(z-1+i)^2} = -2\pi i\, h'(0)$$

$$h'(z) = \frac{e^z (z-1+i)^2 - 2(z-1+i)e^z}{(z-1+i)^4}$$

$$h'(0) = \frac{(-1+i)^2 - 2(-1+i)}{\dots} = \frac{-3+i}{(\dots)^3}$$

$$h'(0) = \frac{(-1+i)^2 - 2(-1+i)}{(-1+i)^4} = \frac{-3+i}{(-1+i)^3}$$

4) Data $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, con g e $h \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto,
dimostrare che se h ha uno zero di molteplicità m in $z_0 \in \Omega$
e $g(z_0) \neq 0$ allora f ha un polo di ordine m in z_0
Dimostrare inoltre che nel caso in cui $m = 1$

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Si vedano ad esempio, pag 118 degli appunti, per la prima parte e pag 141 per la seconda parte

5) Usando il metodo dei residui calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \sin t}{1+t^4}\, dt \quad (*)$$

Osserviamo che $\left| \frac{t \sin t}{1+t^4} \right| \leq \frac{|t|}{|1+t^4|} \sim \frac{1}{|t|^3}$ per $t \to \pm\infty$
quindi $\frac{t \sin t}{1+t^4}$ è integrabile su $\mathbb{R}$.

$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ quindi $(*) = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{it}}{1+t^4} - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{-it}}{1+t^4}$ $(**)$

$$-\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{-it}}{1+t^4}\, dt \overset{-t=u}{=} -\frac{1}{2i}\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{u e^{iu}}{1+u^4}\, du = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u e^{iu}}{1+u^4}\, du$$

quindi $(**) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{it}}{1+t^4}\, dt$ $(***)$

Sia $f(z) := \frac{z}{1+z^4}$ e $g(z) := f(z)\, e^{iz}$.
Poiché $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$, per il lemma
di Jordan, otteniamo che $(***) = 2\pi \left(\mathrm{Res}\left(g, \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \mathrm{Res}\left(g, -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)$ $(\square)$

Dato che $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono poli semplici per g,
i cui residui sono uguali, rispettivamente, a

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}{4 e^{i\frac{3}{4}\pi}} \quad \text{e} \quad \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}\, e^{i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}{4 e^{i\frac{9}{4}\pi}}$$

Quindi $(\square) = \frac{\pi}{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} + e^{-i\frac{3}{2}\pi}\, e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)$

$$= \frac{\pi}{2}\, e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-i\, e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\, e^{-i\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-i e^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + i e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}} - e^{-i\frac{1}{\sqrt{2}}}}{i} \right) = \pi e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}$$

6) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = e^{|x|}$, $x \in [-1,1]$
Dimostrare poi che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(e + (-1)^{k+1})}{k^2\pi^2 + 1} = 1$

Poiché f è pari $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{|x|} dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} e^{|x|} \cos\left(\frac{2\pi k x}{2}\right) dx = 2 \int_0^1 e^x \cos(k\pi x) \quad (*)$$

$$(*) = \frac{2}{k\pi} e^x \sin(k\pi x) \Big|_0^1 - \frac{2}{k\pi} \int_0^1 e^x \sin(k\pi x)\, dx$$

$$= 0 + \frac{2}{k^2\pi^2} e^x \cos(k\pi x) \Big|_0^1 - \frac{2}{k^2\pi^2} \int_0^1 e^x \cos(k\pi x)\, dx$$

quindi $\displaystyle\left(1 + \frac{1}{k^2\pi^2}\right) 2 \int_0^1 e^x \cos(k\pi x)\, dx = \frac{2}{k^2\pi^2} \left(e \cos(k\pi) - 1 \right)$

cioè $\displaystyle a_k = \frac{2}{k^2\pi^2 + 1} \left(e(-1)^k - 1 \right)$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$e - 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2\pi^2 + 1} \left(e(-1)^k - 1 \right) \cos(k\pi x)$$

Per $x = 1$ essa converge a $f(1) = e$ e quindi

$$e - 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2\pi^2 + 1} \left(e(-1)^k - 1 \right) (-1)^k = e$$

cioè $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2\pi^2 + 1} \left(e + (-1)^{k+1} \right) = 1$