Appello Complementi di Analisi Matematica

mercoledì 20 gennaio 2016 11:00

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale associato alla funzione $f(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{t}{2}\right) & t < 2\pi \\ \sin(3t) & t \geq 2\pi \end{cases}$

specificando la sua ascissa di convergenza

$$f_+(t) = \cos_+\left(\frac{t}{2}\right) + \cos_+\left(\frac{1}{2}(t-2\pi)\right) + \sin_+\left(3(t-2\pi)\right)$$

quindi

$$\mathcal{L}(f_+)(s) = \frac{s}{s^2+\frac{1}{4}} + \frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}e^{-2\pi s} + \frac{3}{s^2+9}e^{-2\pi s}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} s > 0$$

quindi $\sigma(f_+) = 0$

ANNI PRECEDENTI AL 2014/15

1) Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2^n}{3^n}(x-1)^n$$

$$\lim_n \frac{|1-2^{n+1}|}{3^{n+1}} \frac{3^n}{|1-2^n|} = \lim_n \frac{2 2^n - 1}{2^n - 1} \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

quindi $\rho = \frac{3}{2}$ per $x = 1 + \frac{3}{2}$ otteniamo

la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2^n}{3^n}\frac{3^n}{2^n}$

Poiché $\frac{1-2^n}{3^n}\frac{3^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} - 1 \longrightarrow -1 \neq 0$

essa non converge

Analogamente per $x = 1 - \frac{3}{2}$ otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2^n}{3^n}\left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1-2^n}{2^n}$$

e poiché $\frac{1-2^n}{2^n}(-1)^n$ non ha limite per $n \to \infty$

e poiché $\frac{1-2^n}{2^n}(-1)^n$ non ha limite per $n \to \infty$

anch'essa non converge. Di conseguenza, la serie di potenze assegnata converge puntualmente in $\left(1-\frac{3}{2}, 1+\frac{3}{2}\right)$ e uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

2) Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,\frac{1}{2})} \frac{e^{z-1}}{z^2(z+i)^2}\,dz$$

, dove $\mathcal{C}^+(0,\frac{1}{2})$ è la circonferenza di centro 0 e raggio $\frac{1}{2}$ percorsa in senso antiorario

Poiché la funzione $f(z) = \frac{e^{z-1}}{(z+i)^2}$ è olomorfa su $D(0,\frac{1}{2})$ possiamo applicare la I formula di rappresentazione di Cauchy ottenendo

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,\frac{1}{2})} \frac{e^{z-1}}{z^2(z+i)^2} = 2\pi i \, D \frac{e^{z-1}}{(z+i)^2}\Big|_{z=0}$$

$$D \frac{e^{z-1}}{(z+i)^2} = \frac{e^{z-1}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{z-1}}{(z+i)^4}$$

quindi l'integrale assegnato è uguale a $2\pi i\left(-\frac{1}{e} - \frac{2i}{e}\right) =$

$$= -\frac{2\pi i}{e}(1+2i)$$

3) Enunciare e dimostrare il Teorema di Hermite-Liouville

Si veda e.g. p. 92 degli appunti

4) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$z^i = 1$$

$$z^i = e^{i \operatorname{Log}_0 z} = e^{i(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z))}$$
$$= e^{-\operatorname{Arg} z + i \log|z|} = e^{-\operatorname{Arg} z}\, e^{i \log|z|}$$

Dunque deve essere $\begin{cases} \log|z| = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ -\operatorname{Arg} z = 0 \end{cases}$

poiché il II membro è uguale a 1

da cui $|z| = e^{2k\pi}$ e $\operatorname{Arg} z = 0$

per cui le soluzioni sono reali positive e date da $z = e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

5) Dare la definizione di residuo all'infinito.
Dimostrare poi il II teorema dei residui.

Si veda e.g. p. 125 e p. 127 degli appunti

6) Calcolare, usando il metodo dei residui

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4}\, dx$$

Poiché $\frac{2x^2}{4+x^4} \sim \frac{2}{x^2}$ per $x \to +\infty$, $\frac{2x^2}{4+x^4}$ è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4}\, dx$$ dato che

$\frac{2x^2}{4+x^4}$ è pari

Calcoliamo dunque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{4+x^4}\, dx$

Sia $f(z) = \frac{z^2}{4+z^4}$, estensione a $\mathbb{C}$ dell'integranda

Poiché $\lim_{|z| \to \infty} z f(z) = 0$, per il lemma

Poiché $\lim_{|z|\to\infty} z\, f(z) = 0$, per il lemma del grande cerchio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{4+x^4} = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2)\right)$

dove z_1 e z_2 sono le radici quarte di -4 che appartengono al semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ e dunque $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, $z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$

Sia z_1 che z_2 sono poli semplici per f (dato che sono zeri semplici per il denominatore e il numeratore è non nullo in essi)

quindi $\mathrm{Res}(f, z_1) = \dfrac{z_1^2}{4 z_1^3} = \dfrac{1}{4 z_1} = 2^{-\frac{5}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \frac{z_2^2}{4 z_2^3} = \frac{1}{4 z_2} = 2^{-\frac{5}{2}} e^{-i\frac{3}{4}\pi}$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$2\pi i\, 2^{-\frac{5}{2}} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3}{4}\pi} \right) =$$

$$= 2^{-\frac{3}{2}} \pi i \left(-2i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2^{-1} \pi i^2 = \frac{\pi}{2}$$