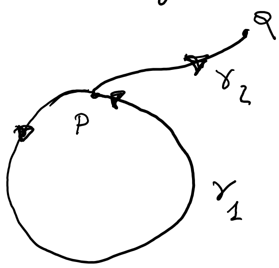
# Esonero Complementi di Analisi Matematica

mercoledì 20 gennaio 2016 11:00

1) Sia $\omega$ una forma differenziale definita in $\mathbb{R}^2$ esatta e sia $f$ una sua primitiva.

Quanto vale $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma$ è la curva in figura?




$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$f(Q) = 1 \qquad f(P) = -1$

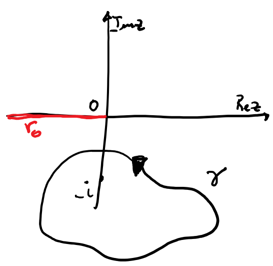
Giustificare la risposta

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega .$$ Poiché $\omega$ è esatta $\int_{\gamma_1} \omega = 0$

mentre $$\int_{\gamma_2} \omega = f(Q) - f(P) = 2$$

2) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{Log}_0 z}{(i+z)^3 z}\, dz$$ dove $\gamma$ è la curva in figura




Poiché la determinazione principale del logaritmo è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus r_0$, la funzione $f(z) = \log_0 z / z$ è olomorfa sul dominio che ha per bordo $\gamma$. Dalla seconda formula di rappresentazione di Cauchy otteniamo allora

$$\int_\gamma \frac{\log_0 z}{(i+z)^3 z}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(-i)$$

$\frac{1}{z} - \log z$

$\gamma \quad (i+z)^3 z$ è:

$$f'(z) = \frac{\frac{1}{z} z - \mathrm{Log}_0 z}{z^2} = \frac{1 - \mathrm{Log}_0 z}{z^2}$$

$$f''(z) = \frac{-\frac{1}{z} z^2 - (1 - \mathrm{Log}_0 z) 2z}{z^4} = - \frac{1 + 2(1 - \mathrm{Log}_0 z)}{z^3}$$

Quindi $f''(-i) = - \dfrac{3 + 2i\frac{\pi}{2}}{i} = - \dfrac{3 + i\pi}{i}$

da cui l'integrale assegnato è uguale $-3\pi - i\pi^2$

3) Calcolare $(1+i)^i$

$$(1+i)^i = e^{i \,\mathrm{Log}_0 (1+i)} = e^{i\left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}} e^{i \log\sqrt{2}}$$

4) Qual è l'immagine mediante la funzione esponenziale della retta $r_1$ data da tutti i numeri complessi $z$ per cui $\mathrm{Im}\, z = -\pi$ ?

Se $z \in r_1$ allora $z = x - \pi i$ e quindi $e^z = e^x e^{-i\pi}$; questi sono numeri complessi che hanno argomento principale $-\pi$ e modulo uguale a $e^x$, quindi $e(r_1)$ è la semiretta uscente dall'origine che forma un angolo uguale a $-\pi$ con il semiasse dei numeri reali positivi, cioè la semiretta $r_0$ dell'esercizio 2, privata dell'origine.

5) Determinare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z^3}}$$

e stabilire di che tipo sono quelle isolate.
Ha senso calcolare il residuo all'infinito?
In caso affermativo come possiamo ottenere concretamente tale residuo?

$$\sin \frac{1}{z^3} = 0 \iff \frac{1}{z^3} = k\pi \iff z = \frac{1}{\sqrt[3]{k\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

radici cubiche in $\mathbb{C}$

Quindi le singolarità di $f$ sono $\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{k\pi}} \right\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$

$0$ non è isolata dato che $\left| \frac{1}{\sqrt[3]{k\pi}} \right| = \frac{1}{|\sqrt[3]{k\pi}|}$

radice cubica in $\mathbb{R}$

e $\lim_{k \to \pm\infty} \frac{1}{|\sqrt[3]{k\pi}|} = 0$.

Poiché $D \sin\left(\frac{1}{z^3}\right) = \cos\left(\frac{1}{z^3}\right)\left(-\frac{3}{z^4}\right)$

$$D \sin\left(\frac{1}{z^3}\right)\Big|_{z=z_n} = \cos(k\pi) \cdot \left(-\frac{3}{(\sqrt[3]{k\pi})^4}\right)$$

in $\mathbb{C}$

$(-1)^k \left(-\frac{3}{(\sqrt[3]{k\pi})^4}\right) \neq 0$, $z_k$ è uno zero semplice per la funzione $\sin \frac{1}{z^3}$ e quindi è un polo semplice per $f$.

Dato che tutte le singolarità di $f$ sono contenute in $D(0,1)$, $\infty$ è una singolarità isolata per $f$ e quindi ha senso calcolarne il residuo

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) =$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin z^3}$$

0 è un polo di ordine 5 per $-\frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z^3)}$

dato che $\lim_{z\to 0} -z^5 \frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z^3)} = \lim_{z\to 0} -\frac{z^3}{\sin(z^3)} = 1$

Quindi $\operatorname{Res}(f,\infty) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{4!}\left(D^{(4)} \frac{z^3}{\sin z^3}\right)$

6) Calcolare

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma(r)} \frac{e^{-z^2}}{z-1}\,dz \quad , \text{ dove } \gamma(r) \text{ è la}$$

semicirconferenza di centro 1 e raggio $r$ con diametro sull'asse dei numeri reali percorsa in senso antiorario. Giustificare la risposta

Poiché $\lim_{z\to 1} (z-1)\frac{e^{-z^2}}{z-1} = \frac{1}{e}$

per il lemma del piccolo cerchio

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma(r)} \frac{e^{-z^2}}{z-1}\,dz = \frac{1}{e}\pi i$$

(Si osservi che il risultato è indipendente dal fatto che $\gamma$ sia la semicirconferenza contenuta nel semipiano $\operatorname{Im} z \geq 0$ o quella contenuta in $\operatorname{Im} z \leq 0$)