Politecnico di Bari
CUC Ingegneria Civile
CdL Ingegneria Ambientale e del Territorio
AA 2008-2009

Corso di Analisi Matematica - Tracce di esame

Docenti: Prof.ssa G. Cerami, Dott. E. Caponio

A.A 2008/2009 I Esonero 24 Novembre 2008 Traccia A

1) Dare la definizione di estremo superiore e di massimo di un insieme. Verificare che i seguenti insiemi hanno come estremo superiore 3 e dire, motivando la risposta, in quali casi 3 è anche il massimo.

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \log_{\frac{1}{3}} x \geq -1\right\}, \\ B &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3n+5}{n+2}, n \in \mathbb{N}\right\}, \\ C &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\right\}. \end{aligned}$$

2) Dare la definizione di serie numerica e di serie indeterminata.

Stabilire il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2 + (n - n^{\frac{3}{2}}) \cos(\frac{\pi n}{2})}{n^3}.$$

3) Studiare la continuità della funzione f, indicando il tipo di discontinuità negli eventuali punti in cui f non è continua.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{3x} - 1}{x} & \text{se } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^{2 \sin x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

4) Dare la definizione di derivata di una funzione in un punto. Sia poi $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile; dimostrare che f è decrescente se e solo se $f'(x) \leq 0$, per ogni $x \in (a,b)$. Dire infine, motivando la risposta, se è vero che f è strettamente decrescente se e solo se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione.

$$f(x) = \arcsin(x-2) - 2x\sqrt{1-(x-2)^2}.$$

Studiarne la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto.

A.A 2008/2009 I Esonero 24 Novembre 2008 Traccia B

1) Dare la definizione di estremo inferiore e di minimo di un insieme. Verificare che i seguenti insiemi hanno come estremo inferiore 4 e dire, motivando la risposta, in quali casi 4 è anche il minimo.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \log_{\frac{1}{2}} x \leq -2 \right\}, \\ B &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4n+13}{n+3}, n \in \mathbb{N} \right\}, \\ C &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9x + 20 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

2) Dare la definizione di serie numerica e di serie convergente.

Stabilire il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^4 + (n^3 - n)\sin(\frac{\pi n}{4})}{n^5}.$$

3) Studiare la continuità della funzione f, indicando il tipo di discontinuità negli eventuali punti in cui f non è continua.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log_3(1+2x)}{x} & \text{se } -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ (2x)^{\sin x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

4) Dare la definizione di derivata di una funzione in un punto. Sia poi $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile; dimostrare che f è decrescente se e solo se $f'(x) \leq 0$, per ogni $x \in (a,b)$. Dire infine, motivando la risposta, se è vero che f è strettamente decrescente se e solo se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione.

$$f(x) = \arccos(x-1) - 2x\sqrt{1-(x-1)^2}.$$

Studiarne la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto.

A.A 2008/2009 I Esonero 24 Novembre 2008 Traccia C

1) Dare la definizione di estremo inferiore e di minimo di un insieme. Verificare che i seguenti insiemi hanno come estremo inferiore $\frac{1}{3}$ e dire, motivando la risposta, in quali casi $\frac{1}{3}$ è anche il minimo.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \log_{\frac{1}{9}} x \leq \frac{1}{2} \right\},$$
$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n^2+2}{3n^2}, n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 4x + 1 = 0 \right\}.$$

2) Dare la definizione di serie numerica e di serie convergente assolutamente.

Stabilire il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^3 + (n^2 - 3n)\cos(\frac{\pi n^2}{2})}{n^4}.$$

3) Studiare la continuità della funzione f, indicando il tipo di discontinuità negli eventuali punti in cui f non è continua.

$$f(x) = \begin{cases} (\tan x)^x & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\log_2(1-9x^2)}{x^2} & \text{se } -\frac{1}{3} < x < 0 \end{cases}$$

4) Dare la definizione di derivata di una funzione in un punto. Sia poi $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile; dimostrare che f è decrescente se e solo se $f'(x) \leq 0$, per ogni $x \in (a,b)$. Dire infine, motivando la risposta, se è vero che f è strettamente decrescente se e solo se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione.

$$f(x) = \arcsin(1-x) - 2x\sqrt{1-(1-x)^2}.$$

Studiarne la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto.

A.A 2008/2009 I Esonero 24 Novembre 2008 Traccia D

1) Dare la definizione di estremo superiore e di massimo di un insieme. Verificare che i seguenti insiemi hanno come estremo superiore 9 e dire, motivando la risposta, in quali casi 9 è anche il massimo.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} | \log_{\frac{1}{3}} x \geq -2\right\},$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{9n^2+8}{n^2+1}\right\},$$
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 10x + 9 = 0\right\}.$$

2) Dare la definizione di serie numerica e di serie divergente positivamente.

Stabilire il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^3 + (\sqrt{n} - n^2)\sin(\pi + 2n)}{n^4}.$$

3) Studiare la continuità della funzione f, indicando il tipo di discontinuità negli eventuali punti in cui f non è continua.

$$f(x) = \begin{cases} (3x)^{\tan x} & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{9^{2x^2} - 1}{x^2} & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

4) Dare la definizione di derivata di una funzione in un punto. Sia poi $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile; dimostrare che f è decrescente se e solo se $f'(x) \leq 0$, per ogni $x \in (a,b)$. Dire infine, motivando la risposta, se è vero che f è strettamente decrescente se e solo se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione.

$$f(x) = \arccos(2-x) - 2x\sqrt{1-(2-x)^2}.$$

Studiarne la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto.

A.A 2008/2009   Esercizi delle tracce del 10 Febbraio 2009

1) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue.

Stabilire, poi, che l'equazione

$$2^{x^2-x} = \frac{4}{1+\frac{x^2}{3}},$$

ha almeno due soluzioni.

2) Stabilire per quali valori del parametro reale $a \in \mathbb{R} \setminus \{2/3\}$ la seguente serie converge e calcolarne la somma.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+a}{2-3a} \right)^n .$$

3) Dare la definizione di funzione convergente per $x \to +\infty$.

Determinare inoltre gli asintoti della funzione $f(x) = \log_2(2^{3x}3 - 1)$.

4) Studiare la monotonia e gli eventuali punti di massimo e di minimo locale della funzione

$$f(x) = e^{-x^2}(x + |2x-1|).$$

5) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(y-2)^2 \sin \frac{\pi}{(1-y)^2}}{x^2 - 2x + (y-2)^2 + 1}.$$

6) Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = 2 - y^2(y - x^2 + 1)^3$ e stabilirne la natura.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{y}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ e^{-x/2} < y < e^{x/2}\}.$$

8) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' = 3(x-1)e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Esercizi delle tracce del 10 Febbraio 2009

1) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue.

Stabilire poi che l'equazione
$$2^{x^2-x} = \frac{6}{2+\frac{x^4}{2}},$$
ha almeno due soluzioni.

2) Stabilire per quali valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2/3\}$ la seguente serie converge e calcolarne la somma.
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a-2}{2a+3}\right)^n.$$

3) Dare la definizione di funzione divergente positivamente per $x \to -\infty$.

Determinare inoltre gli asintoti della funzione $f(x) = \log_4(4^{2x}3 - 2)$.

4) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo e locale della funzione
$$f(x) = e^{-x^2}(2x + |4x-1|).$$

5) Calcolare, se esiste, il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(y+2)^2 \cos\frac{\pi}{(1+x)}}{x^2 - 2x + (y+2)^2 + 1}.$$

6) Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = 1 - y^2(y - x^2 + 2)^3$ e stabilirne la natura.

7) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D \frac{y}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 0,\ e^{x/2} < y < e^{-x/2}\}.$$

8) Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' + y' = e^x(3x+1) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Esercizi delle tracce del 10 Febbraio 2009

1) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue.

Stabilire poi che l'equazione
$$3^{x^2-x} = \frac{5}{2+5x^2},$$
ha almeno due soluzioni.

2) Stabilire per quali valori del parametro reale $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ la seguente serie converge e calcolarne la somma.
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2a+1}{a-2}\right)^n.$$

3) Dare la definizione di funzione divergente negativamente per $x \to +\infty$.

Determinare inoltre gli asintoti della funzione $f(x) = \log_3(3^{2x}2 - 4)$.

4) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo locale della funzione
$$f(x) = e^{-x^2}(|3x+1| - x).$$

5) Calcolare, se esiste, il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)^2 \sin\frac{\pi}{(2+x)^2}}{y^2 - 4y + (x+1)^2 + 4}.$$

6) Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = y^2(x^2 - 2 - y)^3 - 1$ e stabilirne la natura.

7) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D \frac{y^2}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 0,\ e^{x/3} < y < e^{-x/3}\}.$$

8) Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' + 4y = (2x-1)e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Esercizi delle tracce del 10 Febbraio 2009

1) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue.

Stabilire poi che l'equazione

$$4^{x^2-x} = \frac{7}{3+2x^2},$$

ha almeno due soluzioni.

2) Stabilire per quali valori del parametro reale $a \in \setminus\{-1\}$ la seguente serie converge e calcolarne la somma.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3a-2}{a+1} \right)^n .$$

3) Dare la definizione di funzione convergente per $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Determinare inoltre gli asintoti della funzione $f(x) = \log_5(5^{2x}2 - 1)$.

4) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali di massimo e di minimo locale della funzione

$$f(x) = e^{-x^2}(|5x+1| - 2x).$$

5) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(-2,-1)} \frac{(x+2)^2 \sin \frac{4\pi}{(1-y)^2}}{y^2 + 2y + (x+2)^2 + 1}.$$

6) Determinare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = y^2(x^2 - 3 - y)^3 + 2$ e stabilirne la natura.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{y^2}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ e^{-x/3} < y < e^{x/3}\}.$$

8) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 9y = (x-2)e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 23 Febbraio 2009 Traccia A

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan\left((-1)^{n-1}(3-n)\right)}{n^2+\log(n^4)}.$$

2) Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e obliqui della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 2^x}{2x^2 - \log(1-x)}.$$

3) Dare la definizione di funzione monotona decrescente e di funzione convessa.

Studiare la monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto e studiare la convessità della funzione

$$f(x) = \frac{\log_{1/2} x}{x^5}.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale. Usarlo poi per dimostrare (senza calcolare l'integrale!) che

$$\int_{-1}^{1} (1 + x^2 + e^{x^2})\mathrm{d}x \geq 4.$$

5) Dare la definizione di punto interno, di accumulazione e di frontiera per un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y^2-1}{1-x^2}}\log(2+xy),$$

farne una rappresentazione grafica e dire, motivando la risposta, se esso sia un insieme aperto, chiuso, limitato.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{x^3 - xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}\}.$$

7) Studiare il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1+y}}{x} \\ y(3) = 2 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 23 Febbraio 2009 Traccia B

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan\left((-1)^n n^3\right)}{n^2 + \log(n^2)}.$$

2) Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e obliqui della funzione

$$f(x) = \frac{3^x - 2x^4}{x^3 - \log(2-x)}.$$

3) Dare la definizione di funzione monotona crescente e di funzione concava.

Studiare la monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto e studiare la convessità della funzione

$$f(x) = \frac{\log_{1/3} x}{x^3}.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale. Usarlo poi per dimostrare (senza calcolare l'integrale!) che

$$\int_0^3 (1 + x^4 + e^{x^2})\mathrm{d}x \geq 6$$

5) Dare la definizione di punto interno, di accumulazione e di frontiera per un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-1}{1-y^2}}\log(3+xy).$$

farne una rappresentazione grafica e dire, motivando la risposta, se esso sia un insieme aperto, chiuso, limitato.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{y^3 - 2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -x \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}\}.$$

7) Studiare il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{x^2} \\ y(3) = 1/2 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 23 Febbraio 2009 Traccia C

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan\big((-1)^{n+1}(2+n)\big)}{n^3+\log(n^3)}.$$

2) Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e obliqui della funzione

$$f(x) = \frac{2x^4 - 3^x}{x^3 + \log(-x)}.$$

3) Dare la definizione di funzione monotona crescente e di funzione convessa.

Studiare la monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto e studiare la convessità della funzione

$$f(x) = \frac{\log_{1/2} x}{x^4}.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale. Usarlo poi per dimostrare (senza calcolare l'integrale!) che

$$\int_{-1}^{2} (1 - x^2 + e^{-x^2})\mathrm{d}x \leq 6.$$

5) Dare la definizione di punto interno, di accumulazione e di frontiera per un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{4-x^2}{9-y^2}}\log(-1-xy).$$

farne una rappresentazione grafica e dire, motivando la risposta, se esso sia un insieme aperto, chiuso, limitato.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{yx - y^3}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, -\sqrt{3}x \leq y \leq x\}.$$

7) Studiare il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt[3]{1+y}}{x+2} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 23 Febbraio 2009 Traccia D

1) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan\left((-1)^n n^2\right)}{n^2+\log(n^3)}.$$

2) Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e obliqui della funzione
$$f(x) = \frac{x^5+2^x}{3x^2-\log(3-x)}.$$

3) Dare la definizione di funzione monotona decrescente e di funzione concava.

Studiare la monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto e studiare la convessità della funzione
$$f(x) = \frac{\log_{1/3} x}{x^2}.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale. Usarlo poi per dimostrare (senza calcolare l'integrale!) che
$$\int_{-1}^{1} (1-x^4+e^{-x^2})\mathrm{d}x \leq 4.$$

5) Dare la definizione di punto interno, di accumulazione e di frontiera per un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Determinare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{4-y^2}{9-x^2}}\log(-1-xy).$$
farne una rappresentazione grafica e dire, motivando la risposta, se esso sia un insieme aperto, chiuso, limitato.

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D \frac{3yx-x^3}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{9} \leq x^2+y^2 \leq 1, \sqrt{3}x \leq y \leq x\}.$$

7) Studiare il problema di Cauchy,
$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1+2y^2}}{yx} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 07 Maggio 2009 Traccia A

1) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n^2}-1}{2^{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-2}}.$$

2) Si considerino le funzioni
$$f(x)=\sqrt{x}, \qquad g(y)=\frac{\frac{1}{2^y}}{\frac{1}{2^y}-1}.$$
Determinare le funzioni composte $(f\circ g)(y)$ e $(g\circ f)(x)$ indicando l'insieme su cui sono definite.

3) Studiare asintoti, monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione
$$f(x)=-x+\log\frac{x-1}{2x+1}.$$

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione.

Si consideri poi $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ e sia $F\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ una sua primitiva tale che $F(a)=F(b)$. Dedurre che esiste $c\in(a,b)$ tale $f(c)=0$.

5) Stabilire se esiste il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{2y^2+x^4}.$$

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D y^2\sqrt{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2<y<0,\ \frac{1}{x}<y<x\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,
$$\begin{cases} 2y''+5y'+2y=e^{-x/2} \\ y(0)=0=y'(0) \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 07 Maggio 2009 Traccia B

1) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^{n^2}-2}{3^{n^3+1}\sqrt[4]{n-2}}.$$

2) Si considerino le funzioni
$$f(x) = \log x, \qquad g(y) = \frac{2^y}{2^y - 1}.$$
Determinare le funzioni composte $(f \circ g)(y)$ e $(g \circ f)(x)$ indicando l'insieme su cui sono definite.

3) Studiare asintoti, monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione
$$f(x) = x + \log \frac{x-2}{2x-1}.$$

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione.

Si consideri poi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sua primitiva tale che $F(a) = F(b)$. Dedurre che esiste $c \in (a, b)$ tale $f(c) = 0$.

5) Stabilire se esiste il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3}{x^3 + y^6}.$$

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D x^2\sqrt{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y,\ y < x,\ y < \frac{1}{x},\ x < 2\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,
$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -e^x \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 07 Maggio 2009 Traccia C

1) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n^4}-3}{2^{n^4+2}\sqrt[4]{n^2-1}}.$$

2) Si considerino le funzioni
$$f(x) = \log x, \qquad g(y) = \frac{3^y}{1-3^y}.$$
Determinare le funzioni composte $(f \circ g)(y)$ e $(g \circ f)(x)$ indicando l'insieme su cui sono definite.

3) Studiare asintoti, monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione
$$f(x) = x + \log \frac{1-x}{2-x}.$$

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione.

Si consideri poi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una sua primitiva tale che $F(a) = F(b)$. Dedurre che esiste $c \in (a,b)$ tale $f(c) = 0$.

5) Stabilire se esiste il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{2y^3 + x^6}.$$

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D x^2\sqrt{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0,\ x < y,\ \frac{1}{x} < y,\ -2 < x\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,
$$\begin{cases} 2y'' - 3y' + y = e^{x/2} \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 07 Maggio 2009 Traccia D

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^{n^2}-1}{3^{n^2+2}\sqrt[3]{n^2-3}}.$$

2) Si considerino le funzioni

$$f(x)=\sqrt{x}, \qquad g(y)=\frac{\frac{1}{3^y}}{1-\frac{1}{3^y}}.$$

Determinare le funzioni composte $(f\circ g)(y)$ e $(g\circ f)(x)$ indicando l'insieme su cui sono definite.

3) Studiare asintoti, monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione

$$f(x)=-x+\log\frac{3-x}{1-2x}.$$

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione.

Si consideri poi $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ e sia $F\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ una sua primitiva tale che $F(a)=F(b)$. Dedurre che esiste $c\in(a,b)$ tale $f(c)=0$.

5) Stabilire se esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+2y^4}.$$

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D y^2\sqrt{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<2,\ x<y<\frac{1}{x}\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} 3y''+2y'-y=e^{x/3} \\ y(0)=0=y'(0) \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 29 Giugno 2009 Traccia A

1) Enunciare almeno un criterio di convergenza (a scelta) per le serie a termini positivi.

Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n! - (n-1)!}{(n-2)! n^{7/2}}.$$

2) Sia $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Scrivere cosa vuol dire che f è limitata e che f non è limitata. Dire poi motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- ogni funzione $f\colon (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ monotona crescente e tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ è limitata;
- per ogni funzione $f\colon (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ non limitata inferiormente si ha che
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

3) Studiare asintoti, monotonia e determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione
$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{5}x + 3.$$

4) Enunciare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

Stabilire poi se la seguente funzione è invertibile e nel caso lo sia calcolare la derivata della sua funzione inversa nel punto $y_0 = 1$.
$$f(x) = 4^{-(x-\pi)} + \sin x, \qquad x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}).$$

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{\cos(x^2 - y^2)}$$
e rappresentarlo graficamente. Stabilire poi se f è differenziabile in ogni punto del suo insieme di definizione. Stabilire, infine, se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0, 0)$ e, nel caso esista, determinare la sua equazione.

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D x^2y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} < y < x^2,\ \frac{1}{5} < xy < 1\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,
$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{x^2 - 4} - x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 29 Giugno 2009 Traccia B

1) Enunciare almeno un criterio di convergenza (a scelta) per le serie a termini positivi.

Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n-2)! n^{9/2}}.$$

2) Sia $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Scrivere cosa vuol dire che f è limitata superiormente e che f non è limitata superiormente. Dire poi motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- per ogni funzione $f\colon (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ non limitata superiormente si ha che
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty;$$
- ogni funzione $f\colon (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ monotona decrescente e tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ è limitata.

3) Studiare asintoti, monotonia e determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione
$$f(x) = \sqrt{5}x - 1 - \sqrt{4x^2 - 1}.$$

4) Enunciare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

Stabilire poi se la seguente funzione è invertibile e nel caso lo sia calcolare la derivata della sua funzione inversa nel punto $y_0 = 1$.
$$f(x) = \frac{1}{2^{x-\pi/2}} + \cos x, \qquad x \in (0, \pi).$$

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x, y) = \frac{\cos(x^2 + y^2)}{\sin(xy)}$$
e rappresentarlo graficamente. Stabilire poi se f è differenziabile in ogni punto del suo insieme di definizione. Stabilire, infine, se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ e, nel caso esista, determinare la sua equazione.

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D \frac{y^2}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} < y < x^2,\ \frac{1}{2} < xy < 1\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,
$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{4 - x^2} + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 29 Giugno 2009 Traccia C

1) Enunciare almeno un criterio di convergenza (a scelta) per le serie a termini positivi.

Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{(n-1)! n^{7/2}}.$$

2) Sia $f \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Scrivere cosa vuol dire che f è limitata e che f non è limitata. Dire poi motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- per ogni funzione $f \colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ non limitata superiormente si ha che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$
- ogni funzione $f \colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ monotona crescente e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ è limitata.

3) Studiare asintoti, monotonia e determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione
$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - 2x + 1.$$

4) Enunciare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

Stabilire poi se la seguente funzione è invertibile e nel caso lo sia calcolare la derivata della sua funzione inversa nel punto $y_0 = 1$.
$$f(x) = 3^{x-\pi} - \sin x, \qquad x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}).$$

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{\sin(y^2 - x^2)}$$
e rappresentarlo graficamente. Stabilire poi se f è differenziabile in ogni punto del suo insieme di definizione. Stabilire, infine, se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0, \sqrt{\pi/2})$ e, nel caso esista, determinare la sua equazione.

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D x^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} < y < x^2,\ \frac{1}{3} < xy < 1\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 y}{x^3 + 1} - 2x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 29 Giugno 2009 Traccia D

1) Enunciare almeno un criterio di convergenza (a scelta) per le serie a termini positivi.

Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)! - n!}{n! n^4}.$$

2) Sia $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Scrivere cosa vuol dire che f è limitata inferiormente e che f non è limitata inferiormente. Dire poi motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- ogni funzione $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ monotona decrescente e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ è limitata;
- per ogni funzione $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ non limitata inferiormente si ha che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

3) Studiare asintoti, monotonia e determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione
$$f(x) = 2x - 2 - \sqrt{2x^2 - 1}.$$

4) Enunciare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

Stabilire poi se la seguente funzione è invertibile e nel caso lo sia calcolare la derivata della sua funzione inversa nel punto $y_0 = 1$.
$$f(x) = \frac{1}{5^{x-3\pi/2}} - \cos x, \qquad x \in (\pi, 2\pi).$$

5) Determinare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 - y^2)}{\cos(xy)}$$
e rappresentarlo graficamente. Stabilire poi se f è differenziabile in ogni punto del suo insieme di definizione. Stabilire, infine, se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0,0)$ e, nel caso esista, determinare la sua equazione.

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D \frac{x}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} < y < x^2,\ \frac{1}{4} < xy < 1\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 y}{3 - x^3} + x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 15 Luglio 2009 Traccia A

1) Determinare estremo superiore ed inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$\left\{ \frac{\cos(n\pi)}{\log_{1/2}(2n+2)} \;\Big|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = xe^{\cos(1/x^2)-1}.$$

3) Dare la definizione di funzione continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e di punto di discontinuità di I specie.

Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, dire motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vero o false:

- se f è continua in $x_0 \in I$ allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha
$$f(x) > f(x_0) + \frac{1}{100};$$
- se f è continua e $x_1, x_2 \in I$ con $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) = 0$ allora esiste x_0 tale che $f(x_0) = \frac{f(x_1)}{121}$.

4) Enunciare il teorema degli zeri per una funzione continua.

Stabilire poi che la seguente equazione

$$\sqrt{1-x^2} = \arctan x$$

ha una sola soluzione reale.

5) Dare la definizione di differenziabilità in un punto per una funzione di due variabili reali.

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(|x|+y)e^x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire se sia continua, derivabile, differenziabile nei punti $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D |x+y|(2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < -x,\ x^2+y^2 < 1\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 15 Luglio 2009 Traccia B

1) Determinare estremo superiore ed inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$\left\{ \frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{\log_{1/3}(3n+4)} \;\Big|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = xe^{\cos(1/x)-1}.$$

3) Dare la definizione di funzione continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e di punto di discontinuità eliminabile.

Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, dire motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vero o false:

- se f è continua in $x_0 \in I$ allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha
$$f(x) < f(x_0) - \frac{1}{200};$$
- se f è continua e $x_1, x_2 \in I$ con $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) = 0$ allora esiste x_0 tale che $f(x_0) = \frac{f(x_1)}{100}$.

4) Enunciare il teorema degli zeri per una funzione continua.

Stabilire poi che la seguente equazione

$$\sqrt{1 - x^2} = x \arctan x$$

ha due sole soluzioni reali.

5) Dare la definizione di differenziabilità in un punto per una funzione di due variabili reali.

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(|y| + x)e^y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire se sia continua, derivabile, differenziabile nei punti $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D |x - y|(x + 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > x,\ x^2 + y^2 < 1\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = y^2 - 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 15 Luglio 2009 Traccia C

1) Determinare estremo superiore ed inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$\left\{ \frac{\cos(n\pi)}{\log_{1/3}(2n+3)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = x e^{\sin(1/x^2)}.$$

3) Dare la definizione di funzione continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e di punto di discontinuità di I specie.

Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, dire motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vero o false:

- se f è continua e $x_1, x_2 \in I$ con $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) = 0$ allora esiste x_0 tale che $f(x_0) = \frac{f(x_1)}{200}$;
- se f è continua in $x_0 \in I$ allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{50}.$$

4) Enunciare il teorema degli zeri per una funzione continua.

Stabilire poi che la seguente equazione

$$\sqrt{1 - x^2} = \arcsin x$$

ha una sola soluzione reale.

5) Dare la definizione di differenziabilità in un punto per una funzione di due variabili reali.

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(|x| + y)\cos x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire se sia continua, derivabile, differenziabile nei punti $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D |x + y|(x - 3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y < -x,\ x^2 + y^2 < 1\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(y+1)^2}{x+1} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 15 Luglio 2009 Traccia D

1) Determinare estremo superiore ed inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$\left\{ \frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{\log_{1/2}(3n+5)} \;\Big|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = xe^{\sin(1/x)}.$$

3) Dare la definizione di funzione continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e di punto di discontinuità eliminabile.

Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, dire motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vero o false:

- se f è continua e $x_1, x_2 \in I$ con $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) = 0$ allora esiste x_0 tale che $f(x_0) = \frac{f(x_1)}{10^{10}}$;
- se f è continua in $x_0 \in I$ allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha

$$f(x) \leq f(x_0) - \frac{1}{250}.$$

4) Enunciare il teorema degli zeri per una funzione continua.

Stabilire poi che la seguente equazione

$$\sqrt{1-x^2} = x \arccos x$$

ha una sola soluzione reale.

5) Dare la definizione di differenziabilità in un punto per una funzione di due variabili reali.

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(|y| + x)\cos y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire se sia continua, derivabile, differenziabile nei punti $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D |y - x|(2y - x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y < x,\ x^2 + y^2 < 1\}.$$

7) Risolvere il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = y^2 - y - 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2008/2009 Appello del 23 Settembre 2009 Traccia A

1) Stabilire il carattere della serie seguente e, nel caso sia convergente, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n+1}}{2^{2n}}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{5x}{x^2-9}}.$$

3) Enunciare il teorema di Weierstrass e il teorema di Fermat.

Fornire poi un esempio di una funzione, continua su un intervallo chiuso e limitato, derivabile in ogni punto interno di tale intervallo e la cui derivata non è nulla in alcun punto. Dire, giustificando la risposta, perché questo non contrasta con la tesi del teorema di Fermat.

4) Dare la definizione di funzione invertibile ed enunciare il teorema di derivazione delle funzioni inverse. Determinare, poi, campo di esistenza e immagine di

$$f(x) = 3x^2 + \log_2 x,$$

provare che f è invertibile e mediante il teorema suddetto calcolare

$$(f^{-1})'(13).$$

5) Dare la definizione di derivata direzionale secondo una direzione (v_1, v_2) in un punto $P(x_0, y_0)$ di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Considerare, poi, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^3}{(x^2-y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui f è definita. Stabilire inoltre che nel punto $(0,0)$ esistono le derivate direzionali di f secondo una qualsiasi direzione diversa da quelle dei versori $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6) Calcolare l'area del sottoinsieme A del piano definito da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 4x^2,\ -2y^2 \leq x \leq -y^2\}.$$

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 16y = x - \cos 4x$$

1) Stabilire il carattere della serie seguente e, nel caso sia convergente, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{e^{2n}}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{2x}{x^2-4}}.$$

3) Enunciare il teorema di Weierstrass e il teorema di Fermat.

Fornire poi un esempio di una funzione, continua su un intervallo chiuso e limitato, derivabile in ogni punto interno di tale intervallo e la cui derivata non è nulla in alcun punto. Dire, giustificando la risposta, perché questo non contrasta con la tesi del teorema di Fermat.

4) Dare la definizione di funzione invertibile ed enunciare il teorema di derivazione delle funzioni inverse. Determinare, poi, campo di esistenza e immagine di

$$f(x) = x + x^3 + \sqrt{3+x}$$

provare che f è invertibile e mediante il teorema suddetto calcolare

$$(f^{-1})'(4).$$

5) Dare la definizione di derivata direzionale secondo una direzione (v_1, v_2) in un punto $P(x_0, y_0)$ di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Considerare, poi, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^5}{(x-2y)^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui f è definita. Stabilire inoltre che nel punto $(0,0)$ esistono le derivate direzionali di f secondo una qualsiasi direzione diversa da quelle dei versori $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

6) Calcolare l'area del sottoinsieme A del piano definito da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x^2 \leq y \leq -x^2,\ y^2 \leq x \leq 4y^2\}.$$

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 9y = x + \sin 3x$$

A.A 2008/2009 Appello del 23 Settembre 2009 Traccia C

1) Stabilire il carattere della serie seguente e, nel caso sia convergente, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{e^{2n+1}}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{3x}{2x^2-8}}.$$

3) Enunciare il teorema di Weierstrass e il teorema di Fermat.

Fornire poi un esempio di una funzione, continua su un intervallo chiuso e limitato, derivabile in ogni punto interno di tale intervallo e la cui derivata non è nulla in alcun punto. Dire, giustificando la risposta, perché questo non contrasta con la tesi del teorema di Fermat.

4) Dare la definizione di funzione invertibile ed enunciare il teorema di derivazione delle funzioni inverse. Determinare, poi, campo di esistenza e immagine di

$$f(x) = \log_3 x + e^x + e$$

provare che f è invertibile e mediante il teorema suddetto calcolare

$$(f^{-1})'(2e).$$

5) Dare la definizione di derivata direzionale secondo una direzione (v_1, v_2) in un punto $P(x_0, y_0)$ di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Considerare, poi, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y)^6}{x^2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui f è definita. Stabilire inoltre che nel punto $(0,0)$ esistono le derivate direzionali di f secondo una qualsiasi direzione diversa da quelle dei versori $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$.

6) Calcolare l'area del sottoinsieme A del piano definito da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3x^2 \leq y \leq -x^2,\ -4y^2 \leq x \leq -y^2\}.$$

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y = x + \cos 2x$$

A.A 2008/2009 Appello del 23 Settembre 2009 Traccia D

1) Stabilire il carattere della serie seguente e, nel caso sia convergente, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{\pi^{n+1}}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = (x+3)e^{\frac{10x}{x^2-2}}.$$

3) Enunciare il teorema di Weierstrass e il teorema di Fermat.

Fornire poi un esempio di una funzione, continua su un intervallo chiuso e limitato, derivabile in ogni punto interno di tale intervallo e la cui derivata non è nulla in alcun punto. Dire, giustificando la risposta, perché questo non contrasta con la tesi del teorema di Fermat.

4) Dare la definizione di funzione invertibile ed enunciare il teorema di derivazione delle funzioni inverse. Determinare, poi, campo di esistenza e immagine di

$$f(x) = \arctan(2x+1) + 3^x + \frac{\pi}{4}$$

provare che f è invertibile e mediante il teorema suddetto calcolare

$$(f^{-1})'(1/3).$$

5) Dare la definizione di derivata direzionale secondo una direzione (v_1, v_2) in un punto $P(x_0, y_0)$ di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Considerare, poi, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y^2)^6}{(y-3x)^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui f è definita. Stabilire inoltre che nel punto $(0,0)$ esistono le derivate direzionali di f secondo una qualsiasi direzione diversa da quelle dei versori $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

6) Calcolare l'area del sottoinsieme A del piano definito da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 4x^2,\ 2y^2 \leq x \leq 4y^2\}.$$

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 25y = x - \sin 5x$$

A.A 2008/2009 Appello del 20 Novembre 2009 Traccia A

1) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 \sin(1/n^2)}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = 2x \log\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

3) Enunciare il teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue. Usarlo poi per dimostrare che l'equazione

$$\frac{2}{x} = e^{\frac{x-1}{2+x^2}}$$

ha almeno una soluzione positiva.

4) Studiare continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+|x|) & \text{se } x \leq 0 \\ x^{\sqrt{2}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5) Considerare la funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(1-x^2-9y^2)}{y} - \frac{1}{\sqrt{y+4x^2-1}}.$$

Rappresentarne il dominio sul piano e dire, giustificando la risposta, se esso è un insieme aperto o chiuso.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \left(\frac{y}{x} - 2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1,\ y < 2,\ \log x < y\}$.

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + ey' = e^{-ex}.$$

A.A 2008/2009 Appello del 20 Novembre 2009 Traccia B

1) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \sin(1/n)}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = x \log\left(\frac{x}{x-2}\right).$$

3) Enunciare il teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue. Usarlo poi per dimostrare che l'equazione

$$\frac{1}{x} = e^{\frac{2x+1}{1+x^2}}$$

ha almeno una soluzione positiva.

4) Studiare continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+|x|) & \text{se } x \leq 0 \\ x^{\pi} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5) Considerare la funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(1-x^2-4y^2)}{y} + \frac{1}{\sqrt{4x^2-y-1}}.$$

Rappresentarne il dominio sul piano e dire, giustificando la risposta, se esso è un insieme aperto o chiuso.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\int\!\!\int_A \left(\frac{y}{2x} - 1\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1,\ y < 3,\ \log x < y\}$.

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + \sqrt{2}y' = e^{-\sqrt{2}x}.$$

A.A 2008/2009 Appello del 20 Novembre 2009 Traccia C

1) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \sin(1/2n)}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = x \log\left(\frac{x}{x-3}\right).$$

3) Enunciare il teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue. Usarlo poi per dimostrare che l'equazione

$$\frac{1}{2x} = e^{\frac{x+3}{2x^2+4}}$$

ha almeno una soluzione positiva.

4) Studiare continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+|x|) & \text{se } x \leq 0 \\ x^{\sqrt{3}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5) Considerare la funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1)}{y} + \frac{1}{\sqrt{x+2-y^2}}.$$

Rappresentarne il dominio sul piano e dire, giustificando la risposta, se esso è un insieme aperto o chiuso.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\int\!\!\int_A \left(\frac{2y}{x} + 1\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1,\ y < 1,\ \log x < y\}$.

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + \pi y' = e^{-\pi x}.$$

A.A 2008/2009 Appello del 20 Novembre 2009 Traccia D

1) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 \sin(1/n^3)}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = x \log\left(\frac{x-4}{x}\right).$$

3) Enunciare il teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue. Usarlo poi per dimostrare che l'equazione

$$\frac{1}{3x} = e^{\frac{2-x}{3x^2+2}}$$

ha almeno una soluzione positiva.

4) Studiare continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+|x|) & \text{se } x \leq 0 \\ x^e & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5) Considerare la funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(x^2 + \frac{y^2}{9} - 1)}{y} + \frac{1}{\sqrt{2-x-y^2}}.$$

Rappresentarne il dominio sul piano e dire, giustificando la risposta, se esso è un insieme aperto o chiuso.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \left(\frac{2y}{x} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1,\ y < 4,\ \log x < y\}$.

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2\pi y' = e^{-2\pi x}.$$