1) - a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^4}{(-2)^n}$$

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^4}{(-2)^n} = 2^4 \sum_{n=4}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^4}{(-2)^4} \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-4}$$

$$= 1 \cdot \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

1) - b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(n-1)\log n}$$

Trattasi di una serie a segni alterni. Possiamo usare il criterio di Leibniz

- $\lim_{n} \frac{n}{(n-1)\log n} = \lim_{n} \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{\log n} = 1 \cdot 0 = 0$

- verifichiamo che la successione $\frac{n}{(n-1)\log n}$ è definitivamente decrescente. A tal fine introduciamo la funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{x}{(x-1)\log x}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)\log x - x\left(\log x + \frac{x-1}{x}\right)}{(x-1)^2 \log^2 x}$$

$$= \frac{(x-1)\log x - x\log x - x + 1}{(x-1)^2 \log^2 x} = \frac{1 - x - \log x}{(x-1)\log^2 x}$$

Il segno di $f'(x)$ è quello di $h(x) = 1 - x - \log x$

Poiché $\lim_{x \to +\infty} 1 - x - \log x = -\infty$, h è def. strett. negativa per $x \to +\infty$ e quindi f è def. strett. decrescente per $x \to +\infty$.

Per il criterio di Leibniz, la serie assegnata è quindi convergente.

2) Si consideri la funzione di due variabili reali a valori in $\mathbb{R}$:

2) Si consideri la funzione di due variabili reali a valori in $\mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \arcsin\left((1-x-y)^2\right)$$

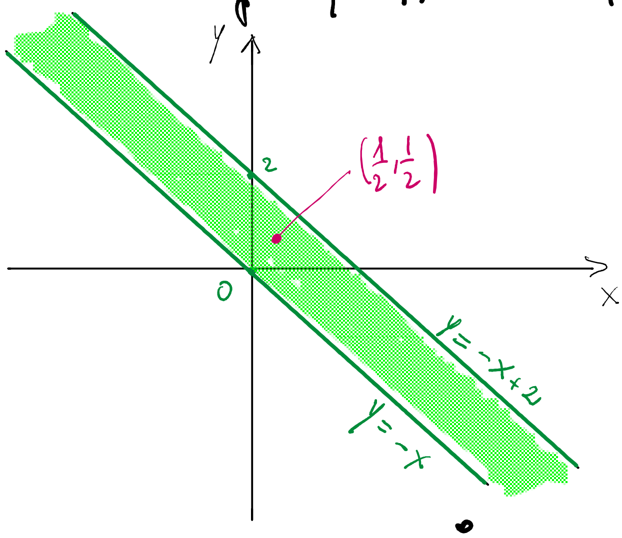
Se ne determini il dominio e lo si rappresenti sul piano. Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.

Stabilire se $\exists \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ rispetto ad un qualunque v e in caso affermativo calcolarla per $v = \left(-\frac{1}{12}, -\frac{\sqrt{143}}{12}\right)$

Dire infine se f ha massimo e minimo globale

$$\text{dom} f : \begin{cases} (1-x-y)^2 \geq -1 & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ (1-x-y)^2 \leq 1 \iff -1 \leq 1-x-y \leq 1 \end{cases}$$

Quindi $\text{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y \geq 0 \ \wedge \ x+y \leq 2\}$



Il dominio di f è la striscia tratteggiata in verde tra le rette $y \geq -x$ e $y \leq 2-x$, rette incluse.
È quindi un insieme chiuso, non limitato, connesso per archi.

Notiamo che $\forall (x,y) \in \overset{\circ}{\text{dom} f}$,

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\left(1-(1-x-y)^4\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot 2(1-x-y)\cdot(-1)$$

$$\text{e } \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\left(1-(1-x-y)^4\right)^{\frac{1}{2}}} \, 2(1-x-y)\cdot(-1)$$

Tali funzioni sono continue su $\overset{\circ}{\text{dom} f}$.

Quindi per il teorema del differenziale f è

Quindi per il teorema del differenziale f è differenziabile in ogni punto interno al suo dominio. In particolare lo è nel punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e dunque in tale punto f ha derivata direzionale secondo qualunque versore v e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \nabla f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot v$$

In particolare per $v = \left(-\frac{1}{12}, -\frac{\sqrt{143}}{12}\right)$ abbiamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\ ;$$ quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = (0,0)\cdot v = 0$$

Poiché la funzione $y = \arcsin x$ ha massimo globale uguale a 1, anche f avrà massimo globale uguale a 1 se troviamo punti $(x,y) \in \operatorname{dom} f$ per i quali $(1-x-y)^2 = 1$. Ovviamente questa uguaglianza è soddisfatta sia per i punti della retta $y=-x$ che per quelli della retta $y = 2-x$, quindi f ha massimo globale.

Dato che l'argomento della funzione arcoseno che appare nella definizione di f è non-negativo e sappiamo che $y = \arcsin x$ è strett. crescente, è chiaro che il minimo di f è uguale a $\arcsin 0 = 0$. Per il punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, abbiamo che l'argomento di arcoseno si annulla e quindi f ha anche minimo globale.

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma implicita dell'equazione

$y'(x) = (e^y - 1)\sqrt{1+x}$

Cercare infine di determinare l'integrale in forma esplicita.

Le soluzioni singolari sono le funzioni costanti $y = \bar{y}$ tali che $e^{\bar{y}} - 1 = 0$ e quindi c'è solo

$y = 0$

$$\int \frac{dy}{e^y - 1} = \int \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$e^y = t \rightarrow y = \log t \rightarrow dy = \frac{1}{t} dt$

$$\int \frac{dt}{(t-1)t} = \int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \log|t-1| - \log|t|, \quad t = e^y$$

$$= \log|e^y - 1| - \log e^y = \log_e \frac{|e^y-1|}{y}$$

Quindi l'integrale generale in forma implicita è dato da

$$\log \frac{|e^y - 1|}{e^y} = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + c$$

$|e^y - 1| = K e^y e^{\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}}, \quad K > 0$ quindi

$e^y - 1 = K e^y e^{\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}}, \quad K \in \mathbb{R}$ (includiamo con $K = 0$ anche la soluzione singolare)

$e^y \left(1 - K e^{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right) = 1$ quindi

$$y = \log\left(\frac{1}{1 - K e^{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}}}\right)$$

4) Dare la definizione (per un insieme limitato)

4) Dare la definizione (per un insieme limitato) di insieme misurabile (nel piano) secondo Peano-Jordan

Enunciare la caratterizzazione degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan basata sulla nozione di insieme di misura nulla.

Usarla, infine, per dimostrare che un dominio normale rispetto ad uno degli assi è misurabile secondo Peano-Jordan

Per la definizione si veda p. 418 Def. 14.8 del manuale consigliato. Per la caratterizzazione si veda il Teorema 14.9 alla stessa pagina.
Per la dimostrazione, si veda il ragionamento a fine p. 421