Politecnico di Bari
AA 2016-2017

Corsi Unificati
Analisi Matematica
modulo B – corsi B e C
Tracce di esame (con svolgimenti)

Docente: Prof. E. Caponio

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C

A.A. 2016/2017 Appello 16 gennaio 2017 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N^o Matricola__________Corso___

1) Dimostrare che

$$\exists \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

6 pts.

2) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{y-1}}{x^2 - 1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8 pts.

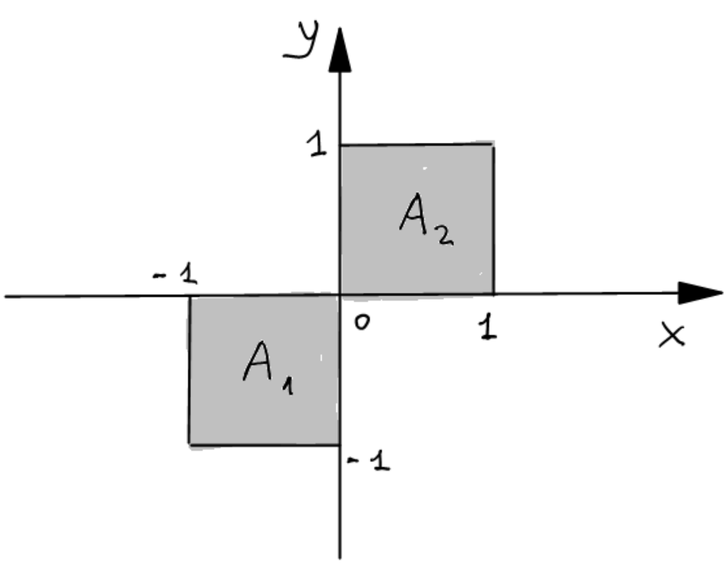
3) Stabilire se la funzione $f(x, y) = \sin\left(\dfrac{x - y}{x + y}\pi\right)$ ammette limite nel punto $(0, 0)$. Stabilire poi se f è differenziabile in $(x_0, y_0) = (1, 0)$ e, in caso positivo, determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.

9 pts.

4) Calcolare

$$\int_A (x + y) \sin x \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme rappresentato in grigio in figura:



$A = A_1 \cup A_2$

7 pts.

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C

A.A. 2016/2017 Appello 16 gennaio 2017 Traccia B

Cognome__________Nome__________N° Matricola________Corso___

1) Enunciare e dimostrare il teorema di confronto per la convergenza di $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, essendo f una funzione non-negativa, definita in $[a, b)$ e integrabile su ogni intervallo $[a, c]$, $c \in [a, b)$.

6 pts.

2) Determinare l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' + 2y = \sin(\sqrt{2}x).$$

8 pts.

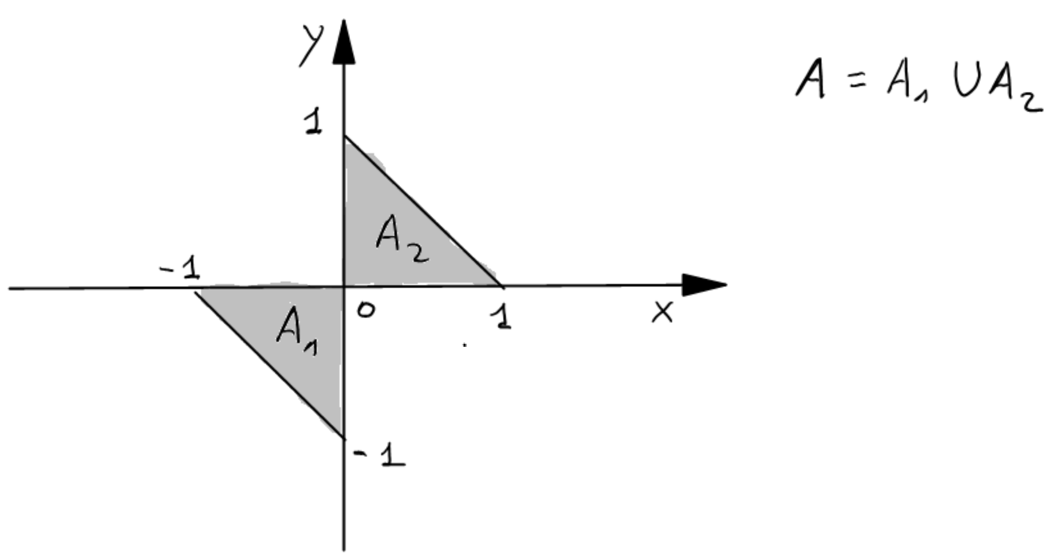
3) Stabilire se la funzione $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\pi\right)$ ammette limite nel punto $(0, 0)$. Stabilire poi se f è differenziabile in $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e, in caso positivo, determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.

9 pts.

4) Calcolare

$$\int_A |x|y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme rappresentato in grigio in figura:



7 pts.

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C

A.A. 2016/2017 Appello 16 gennaio 2017 Traccia C

Cognome________________ Nome________________ N° Matricola__________ Corso___

1) Sia $f \in C^0\big([a,+\infty)\big)$. Dimostrare che se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l > 0$ allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$.

6 pts.

2) Determinare l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' - 3y' = x - e^x.$$

8 pts.

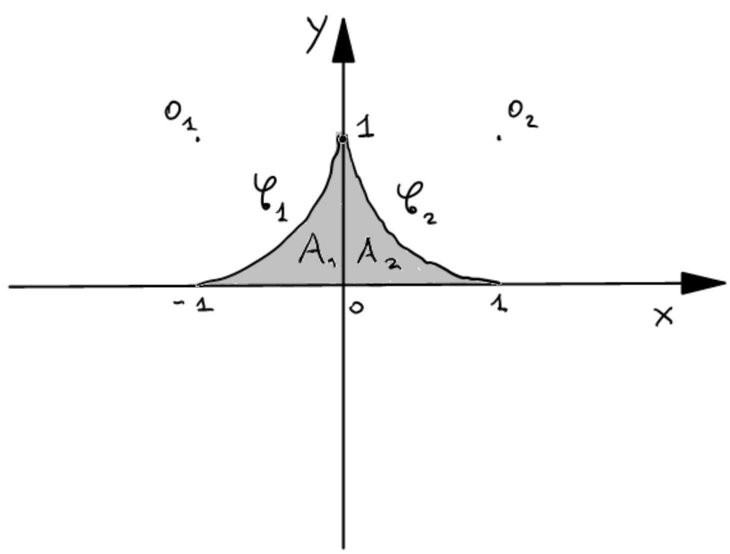
3) Stabilire se la funzione $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{2x-y}{2x+y}\right)$ ammette limite nel punto $(0,0)$. Stabilire poi se f è differenziabile in $(x_0,y_0) = (1,0)$ e, in caso positivo, determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$.

9 pts.

4) Calcolare

$$\int_A (y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme rappresentato in grigio in figura:



$A = A_1 \cup A_2$

$\mathcal{C}_1$ arco della circonferenza di centro $O_1\,(-1,1)$ e raggio 1

$\mathcal{C}_2$ arco della circonferenza di centro $O_2\,(1,1)$ e raggio 1

7 pts.

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C

A.A. 2016/2017 Appello 16 gennaio 2017 Traccia D

Cognome________________Nome________________N° Matricola________Corso____

1) Dimostrare che se una funzione non-negativa $f \in C^0\big([a,b)\big)$, $b \in \mathbb{R}$, è un infinito di ordine $\alpha > 1$ per $x \to b^-$ allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = +\infty$..

6 pts.

2) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + (x-1)^2 \\ y(1) = e \end{cases}$$

8 pts.

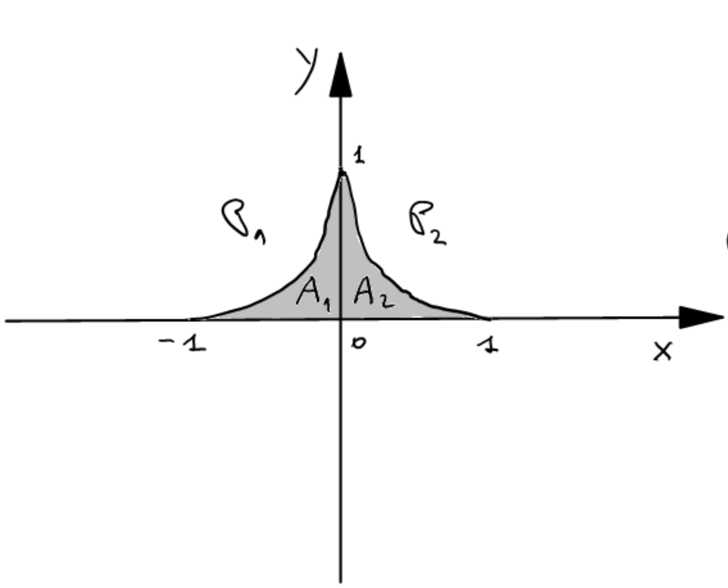
3) Stabilire se la funzione $f(x,y) = \left(\dfrac{x+2y}{x-2y}\right)^{2/5}$ ammette limite nel punto $(0,0)$. Stabilire poi se f è differenziabile in $(x_0,y_0) = (0,1)$ e, in caso positivo, determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$.

9 pts.

4) Calcolare

$$\int_A y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme rappresentato in grigio in figura:



$A = A_1 \cup A_2$

$\mathcal{P}_1$ arco della parabola di vertice $(-1,0)$ e asse parallelo all'asse delle y

$\mathcal{P}_2$ arco della parabola di vertice $(1,0)$ e asse parallelo all'asse delle y

7 pts.

entrambe le parabole passanti per per il punto $(0,1)$

1)

A) Dimostrare che $\exists \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$

si veda, ad esempio, la lez. 3

B) Enunciare e dimostrare il teorema di confronto per la convergenza di un integrale improprio su un intervallo $[a, b)$
Si veda ad esempio la lez. 1

C) Sia $f \in C^0([a, +\infty))$. Dimostrare che se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l > 0$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

Si veda, ad esempio, la lez. 2

D) Dare la definizione di funzione che è un infinito di ordine α per $x \to b^-$, $b \in \mathbb{R}$
Dimostrare che se una funzione $f \in C^0([a, b))$, $b \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$, è un infinito di ordine $\alpha > 1$ allora $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$

Si veda, ad esempio, la lez. 2

2)

A) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{y-1}}{x^2 - 1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione $y' = e^{y-1} \frac{1}{x^2-1}$ è a variabili separabili. Poiché la funzione $h(y) = e^{y-1}$ non si annulla in alcun punto $y \in \mathbb{R}$, possiamo dividere e ottenere

$\frac{y'}{e^{y-1}} = \frac{1}{x^2-1}$; integrando ambo i membri otteniamo

$$-e^{1-y} = -\frac{1}{2}\left(\log(x+1) - \log(1-x)\right) + c$$

(si tenga presente che essendo il punto iniziale $x_0 = 0$ in un intorno di 0, $1-x > 0$)

Dovendo essere $y(0) = 1$, ricaviamo c :

$-1 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + c$ cioè $c = -1$

quindi $1-y = \log\left(\log\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)$ da cui

$y(x) = 1 - \log\left(\log\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)$

B) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$y'' + 2y = \sin\sqrt{2}x$

Il polinomio caratteristico associato all'equazione è λ^2+2

Esso ha radici $\pm\sqrt{2}i$. L'equazione omogenea associata ha

quindi integrale generale $y(x) = c_1\sin(\sqrt{2}x) + c_2\cos(\sqrt{2}x)$

Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}$ con il metodo di similarità

Poiché $\sqrt{2}$ è soluzione del polinomio caratteristico $\bar{y}$ è da determinare

tra le funzioni di tipo $\bar{y}(x) = x\left(k_1\cos(\sqrt{2}x) + k_2\sin(\sqrt{2}x)\right)$

$$\bar{y}'(x) = k_1\cos(\sqrt{2}x) + k_2\sin(\sqrt{2}x) + x\left(-k_1\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) + k_2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\right)$$

$$= \left(k_1 + \sqrt{2}k_2x\right)\cos(\sqrt{2}x) + \left(k_2 - k_1\sqrt{2}x\right)\sin(\sqrt{2}x)$$

$$\bar{y}''(x) = \sqrt{2}k_2\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}(k_1+\sqrt{2}k_2x)\sin(\sqrt{2}x) - k_1\sqrt{2}x\sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}(k_2 - k_1\sqrt{2}x)\cos(\sqrt{2}x)$$

$$= \left(2\sqrt{2}k_2 - 2k_1x\right)\cos(\sqrt{2}x) - \left(2\sqrt{2}k_1 + 2k_2x\right)\sin(\sqrt{2}x)$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$2\sqrt{2}k_2\cos(\sqrt{2}x) - 2\sqrt{2}k_1\sin(\sqrt{2}x) = \sin(\sqrt{2}x) \quad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}k_2 = 0 \\ -2\sqrt{2}k_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 = 0 \\ k_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Quindi $\bar{y}(x) = -\frac{x}{2\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x)$

L'integrale generale dell'equazione assegnata è dunque

$$y(x) = c_1\sin(\sqrt{2}x) + c_2\cos(\sqrt{2}x) - \frac{x}{2\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x)$$

C) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$y'' - 3y' = x - e^x$

Il polinomio caratteristico associato all'equazione è
$\lambda^2 - 3\lambda$. Esso ha radici 0 e 3.
L'equazione omogenea associata ha integrale generale
$y(x) = c_1 + c_2 e^{3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Il termine noto dell'equazione $g(x) = x - e^x$ non è del tipo per cui si possa usare direttamente il metodo di similarità. Possiamo, però, considerare
$g_1(x) = x$ e $g_2(x) = -e^x$ e determinare una soluzione $y_1 = y_1(x)$ di $y'' - 3y' = x$ (1)
e una $y_2 = y_2(x)$ di $y'' - 3y' = -e^x$, (2)
usando il metodo di similarità; la funzione somma $y_1 + y_2$ è una soluzione di $y'' - 3y' = x - e^x$.

(1): dato che 0 è una radice del polinomio caratteristico cerchiamo $y_1(x)$ del tipo $y_1(x) = x(ax+b)$

$y_1'(x) = ax + b + ax = 2ax + b$

$y_1''(x) = 2a$. Quindi deve essere

$2a - 6ax - 3b = x$ cioè $\begin{cases} -6a = 1 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases}$

da cui $a = -\frac{1}{6}$ e $b = -\frac{1}{9}$

quindi $y_1(x) = -x\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{9}\right)$

(2): cerchiamo $y_2(x)$ del tipo $y_2(x) = ke^x$

Deve essere $ke^x - 3ke^x = -e^x$ cioè $-2ke^x = -e^x$ da cui $k = \frac{1}{2}$

Quindi $y(x) = -x\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2}e^x$ è una soluzione dell'equazione assegnata.

L'integrale generale è dunque

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{3x} - x\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2}e^x$$

D) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + (x-1)^2 \\ y(1) = e \end{cases}$$

Sappiamo che la soluzione del problema è data da

$$y(x) = e^{\int_1^x 1 ds} \cdot \left(e + \int_1^x (s-1)^2 e^{-\int_1^s 1 d\tau} \right)$$

$$= e^{x-1} \left(e + \int_1^x (s-1)^2 e^{-(s-1)} ds \right)$$

Calcoliamo $\int_1^x (s-1)^2 e^{-(s-1)} ds$ ponendo $(s-1) = t$

$$\int_0^{x-1} t^2 e^{-t} dt = -t^2 e^{-t} \Big|_0^{x-1} + 2\int_0^{x-1} t e^{-t} dt =$$

$$= -(x-1)^2 e^{-(x-1)} - 2te^{-t}\Big|_0^{x-1} + 2\int_0^{x-1} e^{-t} dt$$

$$= -(x-1)^2 e^{-(x-1)} - 2(x-1)e^{-(x-1)} - 2e^{-(x-1)} + 2$$

La soluzione è quindi

$$y(x) = e^x - (x-1)^2 - 2(x-1) - 2 + 2e^{x-1}$$

3) Stabilire se la funzione

A) $f(x,y) = \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\pi\right)$

B) $f(x,y) = \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\pi\right)$

C) $f(x,y) = \mathrm{artg}\left(\frac{2x-y}{2x+y}\right)$

D) $f(x,y) = \left(\frac{x+2y}{x-2y}\right)^{2/5}$

ammette limite nel punto $(0,0)$.

Stabilire poi se è differenziabile in $(x_0,y_0) =$

A) $(1,0)$

B) $(0,1)$

C) $(1,0)$

D) $(0,1)$

e in caso positivo determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

In tutte le tracce f non ha limite in $(0,0)$ in quanto la funzione f è del tipo

$g \circ h$ con h funzione omogenea di grado 0

e g funzione continua su $\mathbb{R}$ (non costante)

Quindi sulle rette del fascio proprio di centro $(0,0)$, $y = mx$

h assume valore costante c_m dipendente da m

e quindi $\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} g(c_m) = g(c_m)$

In tutte le tracce f è differenziabile in (x_0, y_0) in quanto (x_0, y_0) è interno al dominio di f (che è aperto) ed f è C^∞ sul suo dominio. Quindi per il teorema del differenziale f è differenziabile in (x_0, y_0).

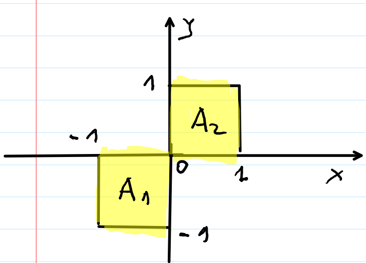
L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (*)$$

è quindi sufficiente valutare f in (x_0, y_0) calcolare poi le sue derivate parziali (con le regole di derivazione), valutarle in (x_0, y_0) e sostituire in $(*)$

4) Calcolare il seguente integrale

A) $\int_A (x+y) \sin x \, dx\, dy$ dove A è l'insieme rappresentato in figura



$A = A_1 \cup A_2$

Poiché l'immagine del dominio A_1 mediante la simmetria rispetto all'origine è il dominio A_2 ed f è invariante rispetto a tale simmetria (infatti

$f(-x, -y) = (-x - y) \sin(-x) = (x+y) \sin x = f(x, y)$)

l'integrale assegnato è uguale a

$2 \int (x+y) \sin x \, dx\, dy = 2 \int^1 \left(\int^1 (x+y) \sin x \, dx \right) dx$

l'integrale assegnato è uguale a

$$2\int_{A_2}(x+y)\sin x\,dx\,dy = 2\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y)\sin x\,dy\right)dx$$

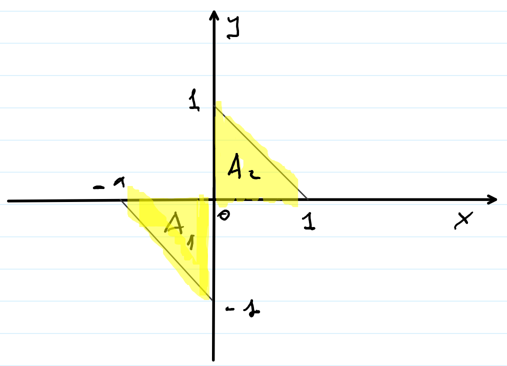
$$= 2\int_0^1 x\sin x\,dx + 2\int_0^1 \sin x\left(\int_0^1 y\,dy\right)dx$$

$$= -2\,x\cos x\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \cos x\,dx + \int_0^1 \sin x\,dx$$

$$= -2\cos 1 + 2\sin 1 - \cos 1 + 1$$

$$= 2\sin 1 - 3\cos 1 + 1$$

B) $\int_A |x|y^2\,dx\,dy$ dove A è l'insieme rappresentato in figura



$A = A_1 \cup A_2$

Poichè l'immagine del dominio A_1 mediante la simmetria rispetto all'origine è il dominio A_2 ed f è invariante rispetto a tale simmetria (infatti

$$f(-x,-y) = |-x|(-y)^2 = |x|\,y^2 = f(x,y)\ )$$

l'integrale assegnato è uguale a

$$2\int_{A_2}|x|y^2\,dx\,dy = 2\int_{A_2} x y^2\,dx\,dy = 2\int_0^1 x\left(\int_0^{1-x} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= 2\int_0^1 x\ \frac{1}{3}y^3\Big|_0^{1-x} dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x\,(1-x)^3\,dx$$

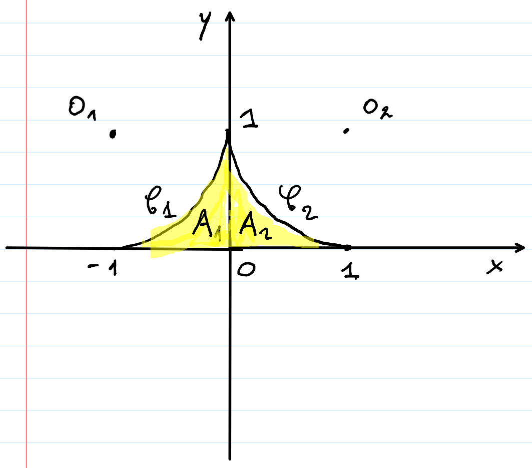
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x\,(1-3x+3x^2-x^3)\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}\ \frac{-10+15-4}{20} = \frac{1}{30}$$

C)

- 3 (2   4   5)   3   20   30

c) $\int\limits_A (y-1)\,dx\,dy$ dove A è l'insieme rappresentato in figura



$A = A_1 \cup A_2$

$\mathscr{C}_1$ arco di circonferenza di centro $O_1(-1,1)$ e raggio 1

$\mathscr{C}_2$ arco di circonferenza di centro $O_2(1,1)$ e raggio 1

Poiché l'immagine del dominio A_1 mediante la simmetria rispetto all'asse delle y è il dominio A_2 ed f è invariante rispetto a tale simmetria (infatti

$f(-x, y) = y-1 = f(x,y)$)

l'integrale assegnato è uguale a $2\int\limits_{A_2} (y-1)\,dx\,dy$

A_2 è un dominio normale rispetto all'asse delle y

infatti è definito da $0 \le y \le 1$ e $0 \le x \le 1 - \sqrt{1-(y-1)^2}$

(si tenga presente che l'equazione della circonferenza di cui $\mathscr{C}_2$ è un arco è $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ da cui $|x-1| = \sqrt{1-(y-1)^2}$ ed essendo $x < 1$ lungo $\mathscr{C}_2$ si ha $1-x = \sqrt{1-(y-1)^2}$).

Quindi

$$2\int\limits_{A_2}(y-1)\,dx\,dy = 2\int_0^1 (y-1)\left(\int_0^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} dx\right) dy$$

$$= 2\int_0^1 (y-1)\left(1-\sqrt{1-(y-1)^2}\right) dy$$

$$= 2\int_0^1 (y-1)\,dy - 2\int_0^1 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$$

1

$$= 2\int_0 (y-1)\,dy - 2\int_0 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$$

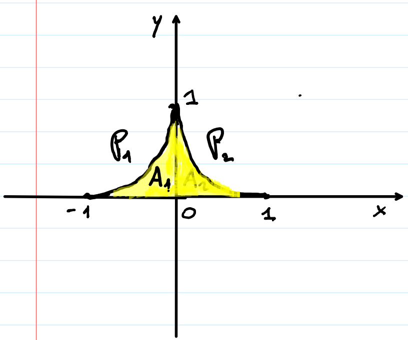
$$= (y-1)^2\Big|_0^1 - 2\int_0^1 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$$

Calcoliamo $-2\int_0^1 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$ per sostituzione ponendo $1-(y-1)^2 = t$ (quindi $dt = -2(y-1)\,dy$);

otteniamo $\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $-1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

D) $\int_A y^2\,dxdy$ dove A è l'insieme rappresentato in figura



$A = A_1 \cup A_2$

P_1 arco di parabola di vertice $V_1(-1,0)$ e asse parallelo all'asse delle y

P_2 arco di parabola di vertice $V_2(1,0)$ e asse parallelo all'asse delle y

entrambi passanti per il punto $(0,1)$

Poiché l'immagine del dominio A_1 mediante la simmetria rispetto all'asse delle y è il dominio A_2 ed f è invariante rispetto a tale simmetria (infatti

$f(-x, y) = y^2 = f(x,y)$)

l'integrale assegnato è uguale a $2\int_{A_2} y^2\,dxdy$

A_2 è un dominio normale rispetto all'asse delle x definito da $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le (x-1)^2$

(infatti la parabola di cui P_2 è un arco ha equazione $y = (x-1)^2$)

Quindi $2\int_{A_2} y^2\,dxdy = 2\int_0^1 \left(\int_0^{(x-1)^2} y^2\,dy\right)dx = 2\int_0^1 \frac{1}{3}y^3\Big|_0^{(x-1)^2}dx$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (x-1)^6\,dx = \frac{2}{21}(x-1)^7\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{21}\left(0 - (-1)^7\right) = \frac{2}{21}$$

Politecnico di Bari
Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C
A.A. 2016/2017 Appello 6 febbraio 2017 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola__________Corso___

1) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{2}{3^k}.$$

Stabilire poi il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{3^k} - \frac{k^2}{1+2k^3} \cos(k\pi) \right).$$

7 pts.

2) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^{2x}\cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

3) Dare la definizione di compatto in $\mathbb{R}^n$. Enunciare, poi, la caratterizzazione dei compati mediante le successioni. Enunciare e dimostrare, infine, il Teorema di Weierstrass per le funzioni di più variabili reali.

8 pts.

4) Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\})$. Esprimere il seguente integrale invertendo l'ordine di integrazione:

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{1}^{2x^2+1} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Calcolare poi l'integrale doppio di sopra con $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

7 pts.

Politecnico di Bari
Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C
A.A. 2016/2017 Appello 6 febbraio 2017 Traccia B

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola__________Corso____

1) Dimostrare che la seguente serie è convergente:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{k+1}{k^2+3}.$$

Stimare anche l'errore che si commette approssimando la sua somma con la somma parziale di indice 10.

7 pts.

2) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y = e^{2x} \sin(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

3) Dare la definizione di connesso in $\mathbb{R}^n$. Enunciare, poi, la caratterizzazione degli aperti connessi di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare, infine, che una funzione differenziabile su un aperto connesso A e avente in A gradiente nullo è costante su A.

8 pts.

4) Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\})$. Esprimere il seguente integrale invertendo l'ordine di integrazione:

$$\int_{-2}^{0} \left(\int_{2}^{\sqrt{4+x^2}} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Calcolare poi l'integrale doppio di sopra con $f(x,y) = \frac{x}{y^3}$.

7 pts.

1)

A) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=3}^{+\infty} 2\frac{1}{3^k}$$

Stabilire, poi, il carattere della seguente serie

$$\sum_{k=3}^{+\infty}\left(2\frac{1}{3^k} - \frac{k^2}{1+2k^3}\cos(k\pi)\right) \quad (*)$$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} 2\frac{1}{3^k} = 2\cdot\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = 2\cdot\frac{1}{3^3}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{3^{k-3}} = 2\cdot\frac{1}{3^3}\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{3^h} =$$

$$= \frac{2}{27}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{27}\frac{3}{2} = \frac{1}{9}$$

Dato che $\sum_{k=3}^{+\infty} 2\frac{1}{3^k}$ converge, se dimostriamo che $\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{k^2}{1+2k^3}\cos(k\pi)$ $(**)$

anche $(*)$ converge in quanto somma di serie convergenti

Poiché $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $(**)$ è a $\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{k^2}{1+2k^3}(-1)^k$ che è una

serie a segni alterni.

Poiché $\frac{k^2}{1+2k^3} \to 0$, è sufficiente dimostrare, per il criterio di Leibniz,

che la successione $\left(\frac{k^2}{1+2k^3}\right)_{k\geq 3}$ è decrescente

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^2}{1+2x^3}$

$$f'(x) = \frac{2x(1+2x^3) - 6x^4}{(1+2x^3)^2} = \frac{2x - 2x^4}{(1+2x^3)^2} = \frac{2x}{(1+2x^3)^2}(1-x^3)$$

Per $x>0$: $f'(x) < 0 \iff 1 - x^3 < 0 \iff x > 1$

Quindi f è strettamente decrescente per $x>1$ e dunque anche $\left(\frac{k^2}{1+2k^3}\right)_{k\geq 3}$ lo è

B) Stabilire che la seguente serie è convergente

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\frac{k+1}{k^2+3} \quad (*)$$

$k=0 \qquad\qquad k^2+3$

Stimare anche l'errore che si commette approssimando la sua somma con la somma parziale di indice 10

Poiché $\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(*)$ è uguale alla serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2+3}$.

Osserviamo che $\frac{k+1}{k^2+3} \to 0$, per cui se dimostriamo che la successione $\left(\frac{k+1}{k^2+3}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente, per il criterio di Leibniz avremo che essa converge

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.

$$f'(x) = \frac{x^2+3-2x^2-2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{x^2+2x-3}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x) < 0 \iff x^2+2x-3>0$; quest'ultima disuguaglianza è soddisfatta per $x<-3 \vee x>1$. Dunque, per $k\geq 1$ la successione $\left(\frac{k+1}{k^2+3}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente

Detta s la somma di $(*)$ sappiamo che

$$|s-s_{10}| \leq a_{11} = \frac{11+1}{11^2+3} = \frac{12}{124} = \frac{3}{31}$$

2) 4) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+4y = e^{2x}\cos(2x) & (*) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata ($y''+4y=0$) è λ^2+4, che ha radici $\pm 2i$. L'integrale generale di $y''+4y=0$ è quindi $y(x) = c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$.

Cerchiamo una soluzione di $(*)$ con il metodo di similitudine

$$\bar{y}(x) = e^{2x}(k_1\cos(2x)+k_2\sin(2x))$$

$$\bar{y}'(x) = 2e^{2x}\left(k_1\cos(2x)+k_2\sin(2x)\right)+2e^{2x}\left(-k_1\sin(2x)+k_2\cos(2x)\right)$$
$$= 2e^{2x}\left((k_1+k_2)\cos(2x)+(k_2-k_1)\sin(2x)\right)$$
$$\bar{y}''(x) = 4e^{2x}\left((k_1+k_2)\cos(2x)+(k_2-k_1)\sin(2x)\right)+$$
$$+4e^{2x}\left(-(k_1+k_2)\sin(2x)+(k_2-k_1)\cos(2x)\right)$$
$$= 4e^{2x}\cdot\left(2k_2\cos(2x)-2k_1\sin(2x)\right)$$

Imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione di (*) otteniamo
$$4e^{2x}\left(2k_2\cos(2x)-2k_1\sin(2x)\right)+4e^{2x}\left(k_1\cos(2x)+k_2\sin(2x)\right)=e^{2x}\cos(2x)$$
da cui
$$e^{2x}\left((8k_2+4k_1)\cos(2x)+(4k_2-8k_1)\sin(2x)\right)=e^{2x}\cos(2x)$$
e quindi deve essere
$$\begin{cases} 8k_2+4k_1=1 \\ 4k_2-8k_1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8k_2+4k_1=1 \\ k_2=2k_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1=\frac{1}{20} \\ k_2=\frac{1}{10} \end{cases}$$

L'integrale generale di (*) è quindi
$$y(x) = c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+e^{2x}\left(\frac{1}{20}\cos(2x)+\frac{1}{10}\sin(2x)\right)$$
Cerchiamo ora la soluzione del problema di Cauchy
$$y(0) = c_1+\frac{1}{20}$$
$$y'(0) = 2c_2+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}$$
Quindi deve essere
$$c_1 = -\frac{1}{20} \quad e \quad c_2 = -\frac{3}{20}$$

B) Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''-4y = e^{2x}\sin(2x) \quad (*) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$
È analoga ad A): in questo caso il polinomio caratteristico ha radici reali ± 2. L'omogenea

associato a (*) ha integrale generale

$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$. Col metodo di similarità

cerchiamo $\bar{y}$ del tipo $\bar{y}(x) = e^{2x}(k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x))$.

otteniamo $\bar{y}(x) = e^{2x}\left(-\frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)\right)$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene per i valori seguenti di c_1 e c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{1}{10} = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{10} \\ c_1 - c_2 = \frac{3}{20} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{10} - c_2 \\ -2c_2 = \frac{1}{20} \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = -\frac{1}{40} \\ c_1 = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

3) A) Dare la definizione di compatto in $\mathbb{R}^n$.
Enunciare, poi, la caratterizzazione dei compatti mediante le successioni.
Enunciare e dimostrare, infine, il teorema di Weierstrass per le funzioni di più variabili

Si vedano, ad esempio, le lezioni 15 e 16

B) Dare la definizione di connesso in $\mathbb{R}^n$
Enunciare, poi, la caratterizzazione degli aperti connessi di $\mathbb{R}^n$.
Dimostrare infine che una funzione differenziabile su un aperto connesso a gradiente nullo è costante

Si vedano, ad esempio, le lezioni 14 e 17-18

4) Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

Esprimere il seguente integrale invertendo l'ordine di integrazione

A) $$\int_{-1}^{0}\left(\int_{1}^{2x^2+1} f(x,y)\,dy\right)dx$$

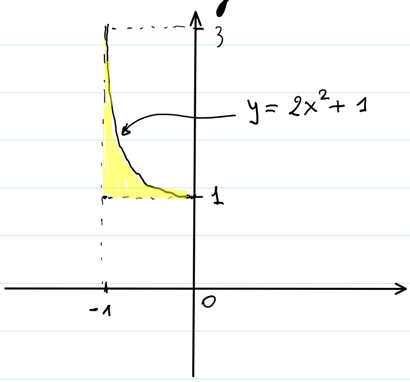
B) $$\int_{-2}^{0}\left(\int_{2}^{\sqrt{4+x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Calcolare poi uno dei due integrali doppi con

A) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

B) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^3}$

A) Rappresentiamo sul piano, munito di un sistema xy di assi cartesiani ortogonali l'insieme di integrazione



Esso è un insieme normale anche rispetto all'asse delle y:

$1 \le y \le 3$ e $-1 \le x \le -\sqrt{\frac{y-1}{2}}$; quindi

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{1}^{2x^2+1} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{1}^{3} \left(\int_{-1}^{-\sqrt{(y-1)/2}} f(x,y)\,dx \right) dy$$

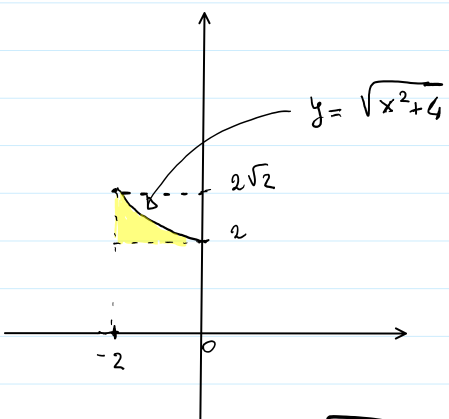
Calcoliamo

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{1}^{2x^2+1} \frac{x}{y}\,dy \right) dx = \int_{-1}^{0} x \; \log y \Big|_{1}^{2x^2+1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x \log(2x^2+1)\,dx \overset{2x^2+1=t}{=\!=} \frac{1}{4}\int_{3}^{1} \log t\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\; t \log t \Big|_{3}^{1} - \frac{1}{4}\int_{3}^{1} dt = -\frac{3}{4}\log 3 + \frac{1}{2}$$

B) Analogamente alla traccia A, l'insieme di integrazione è normale anche rispetto all'asse delle y:



$2 \le y \le 2\sqrt{2}$

$-2 \le x \le -\sqrt{y^2-4}$

Quindi

$$\int_{-2}^{0} \left(\int_{2}^{\sqrt{x^2+4}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{2}^{2\sqrt{2}} \left(\int_{-2}^{-\sqrt{y^2-4}} f(x,y)\,dx \right) dy$$

$0 \quad \sqrt{x^2+4}$

$0 \quad \sqrt{x^2+4}$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(\int_{2}^{\sqrt{x^2+4}}\frac{x}{y^3}\,dy\right)dx = \int_{-2}^{0} x\left(\int_{2}^{\sqrt{x^2+4}}\frac{1}{y^3}\,dy\right)dx$

$$= \int_{-2}^{0} x\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2}\Big|_{2}^{\sqrt{x^2+4}}\right) dy =$$

$$= \int_{-2}^{0} x\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\frac{x}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{8}\int_{-2}^{0} x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\log(x^2+4)\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{16}x^2\Big|_{-2}^{0} =$$

$$= -\frac{2}{4}\log 2 + \frac{3}{4}\log 2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\log 2 - 1)$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C

A.A. 2016/2017 Appello 24 febbraio 2017 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N$^{\circ}$ Matricola__________Corso____

1) Enunciare e dimostrare il criterio della radice per le serie numeriche. Fornire poi un esempio in cui tale criterio non può essere applicato.

6 pts.

2) Determinare la soluzioni singolari e l'integrale generale in forma implicita dell'equazione:

$$y' = \cos^2(\pi y)\frac{(x-1)^2}{x}$$

8 pts.

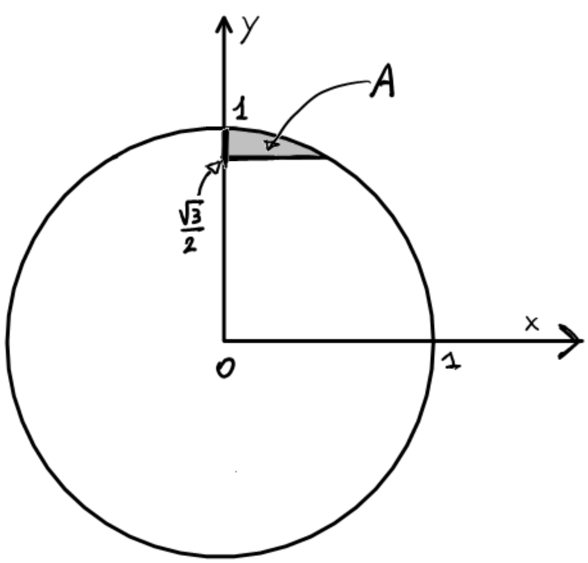
3) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2 + 1)$ e studiarne la natura

8 pts.

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A (y^2x + x^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme rappresentato in figura in grigio.



8 pts.

Politecnico di Bari
Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C
A.A. 2016/2017 Appello 24 febbraio 2017 Traccia B

Cognome______________Nome______________N^o Matricola________Corso___

1) Enunciare e dimostrare il criterio degli infinitesimi per le serie numeriche. Fornire poi un esempio in cui tale criterio consente di stabilire la convergenza di una serie e invece il criterio del confronto asintotico fallisce.

6 pts.

2) Determinare la soluzioni singolari e l'integrale generale in forma implicita dell'equazione:

$$y' = \tan(\pi - y)\frac{x-1}{x^2}$$

8 pts.

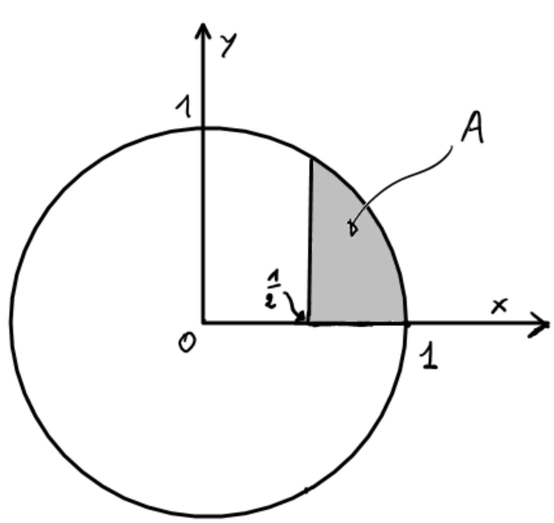
3) Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = \cos(x^2 + 2y^2 + 1)$ e studiarne la natura

8 pts.

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A (x^2y + y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme rappresentato in figura in grigio.



8 pts.

1)
A) Enunciare e dimostrare il criterio della radice per le serie numeriche

Fornire poi un esempio in cui tale criterio non può essere applicato

Si veda, ad esempio, la lezione 7

B) Enunciare e dimostrare il criterio degli infinitesimi per le serie numeriche
Fornire un esempio in cui tale criterio consente di stabilire la convergenza di una serie e invece il criterio del confronto asintotico fallisce

Si veda, ad esempio, la lezione 6

2) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma implicita dell'equazione

A) $y' = \cos^2(\pi y)\,\dfrac{(x-1)^2}{x}$ (*)

B) $y' = tg\,(\pi - y)\,\dfrac{x-1}{x^2}$ (**)

A) È un'equazione a variabili separabili. Le soluzioni singolari sono le funzioni costanti $y=\bar{y}$ per cui $\cos^2(\pi\bar{y})=0$ quindi

$\pi\bar{y} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ cioè $\bar{y} = \dfrac{1}{2}+k$, $k\in\mathbb{Z}$

Assumendo quindi che $y \neq \frac{1}{2}+k$, possiamo dividere ambo i membri (*)

$\dfrac{y'}{\cos^2(\pi y)} = \dfrac{(x-1)^2}{x}$; integrando otteniamo

$\displaystyle\int \frac{dy}{\cos^2(\pi y)} = \int \frac{(x-1)^2}{x}\,dx$ cioè

$\dfrac{1}{\pi}\,tg\,(\pi y) = \displaystyle\int\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)dx$ da cui $\dfrac{1}{\pi}\,tg\,(\pi y) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \log|x| + c$

B) Analogamente ad A) le soluzioni singolari sono date da

$tg\,(\pi-\bar{y}) = 0$ cioè $\pi - \bar{y} = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ da cui $\bar{y} = \pi(1-k)$, $k\in\mathbb{Z}$

Assumendo che $y \neq \pi(1-k)$, $k\in\mathbb{Z}$, e dividendo ambo i membri di (**)

per $tg\,(\pi - y)$ otteniamo

per $tg(\pi-y)$ otteniamo

$$\frac{y'}{tg(\pi-y)} = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{da cui} \quad \int \frac{dy}{tg(\pi-y)} = \int \frac{x-1}{x^2}\,dx \,, \quad \text{quindi}$$

$$\int \frac{\cos(\pi-y)}{\sin(\pi-y)}\,dy = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$-\log|\sin(\pi-y)| = \log|x| + \frac{1}{x} + c$$

3) Determinare i punti critici della funzione

A) $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2 + 1)$

B) $\varphi(x,y) = \cos(x^2 + 2y^2 + 1)$

studiarne la natura

A) $f_x(x,y) = \cos(x^2 - y^2 + 1)\,2x$

$f_y(x,y) = \cos(x^2 - y^2 + 1)\,(-2y)$

$$\begin{cases} \cos(x^2-y^2+1)\,2x = 0 \\ \cos(x^2-y^2+1)(-2y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \left(\begin{cases} x=0 \\ -y^2+1 = \frac{\pi}{2}+k\pi \,, \ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y = \pm\sqrt{1-\frac{\pi}{2}-k\pi} \end{cases} \right)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \left(\begin{cases} y=0 \\ x^2+1 = \frac{\pi}{2}+k\pi \,, \ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi-1} \end{cases} \right)$$

$$\begin{cases} x^2-y^2+1 = \frac{\pi}{2}+k\pi \,, \ k\in\mathbb{Z} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ per la realtà della radice

$k\in\mathbb{N}$ per la realtà della radice

Dunque i punti critici di f sono $(0,0)$,
$V_{1,k} = \left(0, \pm\sqrt{1-\frac{\pi}{2}-k\pi}\right)$, $k\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}$, $V_{2,k} = \left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi-1}, 0\right)$, $k\in\mathbb{N}$

e i punti delle iperboli di equazione

$$x^2 - y^2 + 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \,, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Osserviamo che per $k\in\mathbb{N}$ tali iperboli intersecano l'asse delle x e hanno vertici, fissato $k\in\mathbb{N}$, in $\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi-1}, 0\right)$ mentre per $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ esse intersecano l'asse delle y con vertici $\left(0, \pm\sqrt{1-\frac{\pi}{2}-k\pi}\right)$.
Dunque le famiglie di punti critici $V_{1,k}$ e $V_{2,k}$ appartengono a tali iperboli e possono essere studiate insieme a tutti i punti di esse.

Osserviamo che se $x^2 - y^2 + 1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

allora $f(x,y) = 1$. Dato che $\forall (x,y)\in\mathbb{R}: -1 \le f(x,y) \le 1$ tutti i punti di tali iperboli sono di massimo assoluto

Se $x^2 - y^2 + 1 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, allora $f(x,y) = -1$ e i punti di queste altre iperboli sono di minimo assoluto

Resta da analizzare la natura di $(0,0)$

$$f_{xx}(x,y) = -\sin(x^2-y^2+1)\,4x^2 + 2\cos(x^2-y^2+1)$$
$$f_{yy}(x,y) = \sin(x^2-y^2+1)(-4y^2) - 2\cos(x^2-y^2+1)$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \sin(x^2-y^2+1)\,4xy$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2\cos 1 & 0 \\ 0 & -2\cos 1 \end{pmatrix}$$

$|H_f(0,0)| = -4(\cos 1)^2 < 0$ quindi $(0,0)$ è di sella

B) $f_x(x,y) = -\sin(x^2+2y^2+1)\,2x$

$f_y(x,y) = -\sin(x^2+2y^2+1)\,4y$

$$\begin{cases} -\sin(x^2+2y^2+1)\,2x = 0 \\ -\sin(x^2+2y^2+1)\,4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ \sin(2y^2+1)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ 2y^2+1 = k\pi,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases} \ (1)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ \sin(x^2+1)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x^2+1 = k\pi,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases} \ (2)$$

$$\begin{cases} \sin(x^2+2y^2+1)=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+2y^2+1 = k\pi,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \\ 0=0 \end{cases}$$

Come nell'esercizio della traccia A i punti che si ottengono dai sistemi (1) e (2) appartengono anche alle ellissi di equazione

$$x^2+2y^2+1 = k\pi,\quad k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Se $x^2+2y^2+1 = 2k\pi$, $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ (risp. $x^2+2y^2+1 = \pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$) $f(x,y)=1$ (risp. $f(x,y)=-1$). Poiché $-1\le f(x,y)\le 1$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, i punti delle ellissi $x^2+2y^2+1 = 2k\pi$ $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, (risp. $x^2+2y^2+1 = \pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$) sono di massimo (risp. minimo) assoluto.

Analizziamo $(0,0)$:

$$f_{xx}(x,y) = -\cos(x^2+2y^2+1)\,4x^2 - 2\sin(x^2+2y^2+1)$$

$$f_{yy}(x,y) = -\cos(x^2+2y^2+1)\,16y^2 - 4\sin(x^2+2y^2+1)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\cos(x^2+2y^2+1)\,8xy$$

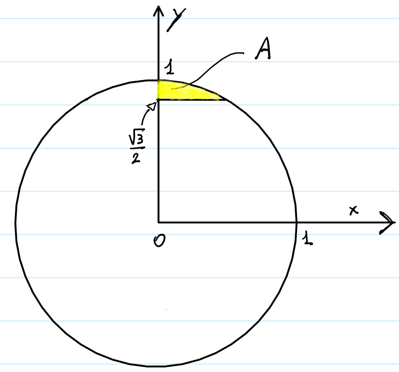
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2\sin(1) & 0 \\ 0 & -4\sin(1) \end{pmatrix}$$

$|H_f(0,0)| = 8(\sin(1))^2 > 0$; $-2\sin(1) < 0$ quindi

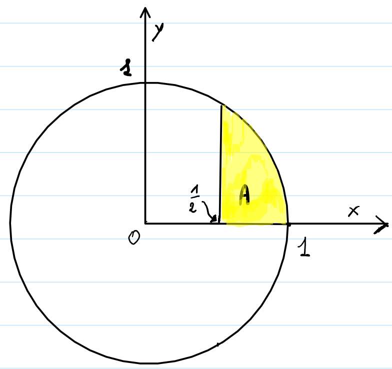
$(0,0)$ è un punto di massimo locale stretto

4) Calcolare il seguente integrale

A) $\int_A (y^2x + x^3)\,dx\,dy$ dove A è l'insieme rappresentato in figura in giallo



B) $\int_A (x^2y + y^3)\,dx\,dy$, dove A è l'insieme rappresentato in figura in giallo



A) In coordinate polari A è l'insieme dato da $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$

e $\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta} < \rho < 1$ (la retta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ha equazione nel piano θ,ρ data da $\rho\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ da cui $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2\cos\theta}$)

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}}^{1} \rho^2 \cdot \rho\cos\theta \cdot \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \; \frac{1}{5}\rho^5 \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}}^{1} \; d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\theta - \cos\theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 \frac{1}{\sin^5\theta} \right) d\theta$$

$$= \left(\sin\theta \Big|^{\frac{\pi}{2}} + \sin^{-4}\theta \Big|^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sin^3\theta \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 \frac{\sin^{-4}\theta}{4} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{5}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right)$$

B) In coordinate polari A è l'insieme dato da $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ e $\frac{1}{2\cos\theta} < \rho < 1$ (la retta $x = \frac{1}{2}$ ha equazione nel piano θ, ρ data da $\rho\cos\theta = \frac{1}{2}$ da cui $\rho = \frac{1}{2\cos\theta}$)

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} \rho^2 \cdot \rho\sin\theta \cdot \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \left(\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} \rho^4 \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \, \frac{1}{5}\rho^5 \Big|_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin\theta - \frac{1}{2^5}\frac{\sin\theta}{\cos^5\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2^5}\frac{1}{4}\cos^{-4}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^7}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} - 1\right)\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2^7}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{2^6 - 2^4 + 1}{2^7}$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{16 \cdot 3 + 1}{2^7} = \frac{49}{5} \cdot \frac{1}{128}$$

Politecnico di Bari
Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C
A.A. 2016/2017 Appello 21 aprile 2017 Traccia A

Cognome____________________ Nome____________________ N^o Matricola__________ Corso____

1) Stabilire se i seguenti integrali convergono. Motivare la risposta.

(a)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{2x^{5/2}+x}\mathrm{d}x;$$

(b)

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(4-x)\log(x-1)}.$$

8 pts.

2) Determinare l'integrale generale di un'equazione lineare del I ordine in forma normale: $y' = a(x)y + b(x)$, con $a, b \in C^0([c,d])$.

6 pts.

3) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = (x-y+1)(x+y-1)x$ e studiarne la natura.

8 pts.

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{\cos(xy-\pi)}{y-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme definito da $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le y \le 3, 0 \le x \le \frac{\pi}{2y}\right\}$.

8 pts.

1) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono. Motivare la risposta

(a) $$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{2x^{5/2}+x}\,dx$$

(b) $$\int_2^3 \frac{dx}{(4-x)\log(x-1)}$$

(a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x^{5/2}+x}$ è continua su $[1,+\infty)$ inoltre

$$0 \le \frac{\operatorname{arctg} x}{2x^{5/2}+x} \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2x^{5/2}+x} \le \frac{\pi}{4x^{5/2}} \quad \forall x \ge 1$$

Dato che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}}\,dx \in \mathbb{R}$ per il criterio del confronto anche l'integrale assegnato converge

(b) $g(x) = \dfrac{1}{\log(x-1)+(3-x)}$ è continua e non-negativa su $(2,3]$

poiché $\log(x-1) = \log(1+(x-2)) = x-2 + o(x-2)$, abbiamo:

$$\frac{1}{(4-x)\log(x-1)} = \frac{1}{(4-x)(x-2+o(x-2))}$$

$$= \frac{1}{(x-2)(4-x)\left(1+\frac{o(x-2)}{x-2}\right)} \sim \frac{1}{2(x-2)} \quad \text{per } x\to 2$$

Dato che $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-2}\,dx = +\infty$ anche l'integrale assegnato diverge positivamente

2) Determinare l'integrale di un'equazione differenziale lineare del I ordine: $y' = a(x)y + b(x)$ con $a, b \in C^0([c,d])$

Si vedano ad esempio gli appunti della lezione 10

3) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = (x-y+1)(x+y-1)x$ e studiarne la natura

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. $\quad f_x(x,y) = (x+y-1)x + (x-y+1)x + (x-y+1)(x+y-1)$

$$= 2x^2 + x^2 - (y-1)^2 = 3x^2 - (y-1)^2$$

$$f_y(x,y) = -x(x+y-1) + (x-y+1)x =$$

$$= x(-2y+2)$$

$$\begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ 3x^2 - (y-1)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\vee$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 3x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

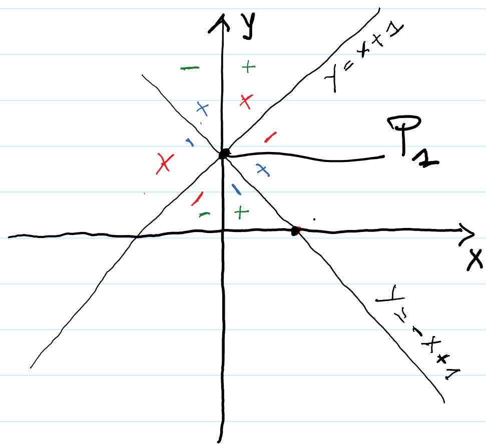
Abbiamo quindi 1 punto critico $P_1(0,1)$

Notiamo che $f(P_1) = 0$, quindi per studiarne la sua natura possiamo studiare il segno di

$f(x,y) - f(P_1) = f(x,y)$;

tale segno dipende dal segno delle funzioni $x-y+1$, $x+y-1$, x:

① ② ③



Come si vede non esiste alcun intorno di P_1 su cui f ha segno definito quindi P_1 è di sella

4) Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{1}{y-1} \cos(xy - \pi)\, dx\, dy$$

dove A è l'insieme: $A = \{(x,y) : 2 \le y \le 3 \ \wedge \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2y}\}$

$\cos(xy - \pi) = -\cos(xy)$ quindi l'integrale assegnato è uguale a $-\int_A \frac{\cos(xy)}{y-1}\,dx\,dy$.

A è un dominio normale rispetto all'asse delle y per cui:

$$-\int_A \frac{\cos(xy)}{y-1}\,dx\,dy = -\int_2^3 \frac{1}{y-1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2y}} \cos(xy)\,dx\right)dy = -\int_2^3 \frac{1}{y-1}\,\frac{\sin(xy)}{y}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2y}} dy$$

$$= -\int_2^3 \frac{1}{y(y-1)}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = -\int_2^3 \frac{1}{y(y-1)}\,dy =$$

$$-\int_2^3 \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)dy = -\log(y-1)\Big|_2^3 + \log y\Big|_2^3 =$$

$$= -\log 2 + \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{4}$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C

A.A. 2016/2017 Appello 26 giugno 2017 Traccia A

Cognome______________________Nome______________________N^o Matricola__________Corso___

1) Si consideri la serie numerica $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Dare la definizione di somma parziale n-esima, s_n. Si consideri poi $x \in \mathbb{R} \setminus 1$ e la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k. \qquad (*)$$

Dimostrare che in questo caso $s_n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Studiare poi il carattere della serie $(*)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6 pts.

2) Sia $f(x,y) = (x^2-y^2)\log(x^2-y^2)$. Stabilire su quale insieme f è differenziabile. Motivare la risposta. Rappresentare inoltre graficamente tale insieme. Si consideri, poi, $P = (1,0)$. Dire se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $\big(1, 0, f(1,0)\big)$ e, in caso positivo, determinarne l'equazione.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = e^x - 1 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

8 pts.

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A x^2y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme definito da $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \le x \le 2y^2,\ y > 0,\ x < 1\big\}$.

8 pts.

1) Si consideri la serie numerica $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Dare la definizione di somma parziale n-esima, s_n.

Si consideri poi $x \in \mathbb{R}$ e la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad (*)$$

Dimostrare che $s_n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Stabilire poi il carattere della serie $(*)$ al variare di x in $\mathbb{R}$.

Si veda, ad esempio, la lezione 5 degli appunti

2) Sia $f(x,y) = (x^2-y^2)\log(x^2-y^2)$

Stabilire su quale insieme f è differenziabile.

Motivare la risposta. Rappresentare inoltre graficamente tale insieme

Si consideri poi $P=(1,0)$.

Dire se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0,f(1,0))$ e in caso positivo calcolarne l'equazione

Osserviamo che f è definita sul sottoinsieme A del piano

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2 > 0\}$ che è un insieme aperto, Le derivate parziali di f sono date da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\log(x^2-y^2) + (x^2-y^2)\frac{1}{x^2-y^2}\,2x =$$
$$= 2x\left(\log(x^2-y^2)^2 + 1\right)$$

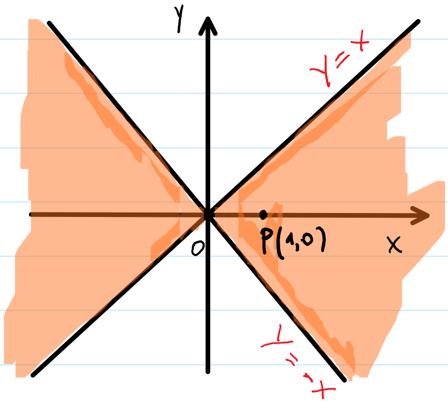
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\log(x^2-y^2) + (x^2-y^2)\frac{1}{x^2-y^2}(-2y)$$
$$= -2y\left(\log(x^2-y^2)+1\right)$$

Entrambe queste funzioni sono continue su A quindi per il Teorema del differenziale f è differenziabile su A.

Per rappresentare graficamente tale insieme osserviamo che

$$x^2-y^2>0 \iff (x-y)(x+y)>0 \iff \begin{cases} y<x \\ y>-x \end{cases} \vee \begin{cases} y>x \\ y<-x \end{cases}$$

Pertanto A è l'insieme ombreggiato in figura



Il punto $P(1,0) \in A$ quindi f è differenziabile in P ed esiste il piano tangente al suo grafico in $(1,0,f(1,0))$

la sua equazione è $z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\,y$

$f(1,0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=0$.

quindi l'equazione del piano è $z = 2(x-1)$

3) Determinare le soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = e^x - 1 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata a

$$y'' + y = e^x - 1 \qquad (*)$$

è $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Per determinare una soluzione particolare consideriamo separatamente le equazioni

$y'' + y = -1$ e $y'' + y = e^x$

$\tilde{y}(x) = k_1 \, , \ k_1 \in \mathbb{R}$ è soluzione se e solo se $k_1 = -1$

$\tilde{y}(x) = k_2 e^x$ è soluzione se e solo se $k_2 e^x + k_2 e^x = e^x$ cioè $2k_2 e^x = e^x$ da cui $k_2 = \frac{1}{2}$

Quindi una soluzione particolare di $(*)$ è $\tilde{y}(x) = \frac{1}{2} e^x - 1$

L'integrale generale dell'equazione $(*)$ è quindi dato da

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x - 1 \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene determinando c_1 e c_2 che soddisfino le condizioni iniziali

$-1 = y(0) = c_1 + \frac{1}{2} - 1$ da cui $c_1 = -\frac{1}{2}$

$y'(x) = +\frac{1}{2} \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{2} e^x$

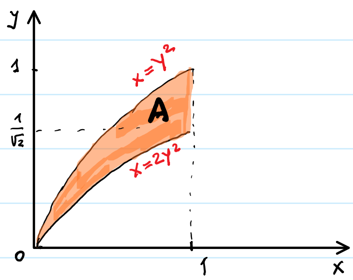
$1 = y'(0) = c_2 + \frac{1}{2}$ da cui $c_2 = \frac{1}{2}$

4) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_A x^2y^2\,dx\,dy$$ dove A è l'insieme

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \le x \le 2y^2, \quad y>0, \; x<1$$

A è il seguente insieme



È un insieme normale rispetto all'asse delle x definito da $0 \le x \le 1$ e $\sqrt{\frac{x}{2}} \le y \le \sqrt{x}$

L'integrale assegnato è quindi uguale a

$$\int_0^1 x^2 \left(\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} y^2\,dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \; \frac{1}{3} y^3 \Big|_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^{\frac{7}{2}} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \; \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{9} \; x^{\frac{9}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{27} \; \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C

A.A. 2016/2017 Appello 10 luglio 2017 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N$^{\text{o}}$ Matricola__________Corso___

1) Stabilire che il seguente integrale improprio diverge positivamente:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}} \arctan\left(\frac{x^2}{x^3+3}\right) \mathrm{d}x.$$

6 pts.

2) Determinare il dominio della funzione reale di due variabili reali $f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x-y)$ e rappresentarlo graficamente sul piano. Dimostrare poi che f è differenziabile, sul suo dominio. Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$, al variare del versore $v = (v_1, v_2)$.

8 pts.

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = -e^{-3x} \log x.$$

8 pts.

4) Dare la definizione di dominio normale rispetto ad uno dei due assi cartesiani. Richiamare poi le formule di riduzione per l'integrale di una funzione continua su un dominio normale D. Dimostrare infine che nel caso in cui D sia il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ si ha

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$$

8 pts.

1) Stabilire che il seguente integrale improprio diverge positivamente

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$$

La funzione integranda è continua su $(0,+\infty)$ ed ha un'asintoto verticale a destra per $x \to 0^+$

Possiamo quindi considerare separatamente

$$\int_0^{a} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx \quad e \quad \int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$$

dove a è un qualunque numero in $(0,+\infty)$

Studiamo $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx$

Poiché $\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

e $\sqrt{\frac{x+2}{x}} \longrightarrow 1$ per $x \to +\infty$

$\sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

e quindi $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx = +\infty$

Dato che $\sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) > 0$ su $(0,+\infty)$

$\displaystyle\int_0^{a} \sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \neq -\infty$ e dunque $\displaystyle\int_0^a \dots + \int_a^{+\infty} \dots$ non è una forma indeterminata; d'altro canto per $x \to 0^+$

$\sqrt{\frac{x+2}{x}} \sim \sqrt{\frac{2}{x}}$ e $\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{x^2}{x^3+4} \sim \frac{x^2}{4}$ quindi

$\sqrt{\frac{x+2}{x}}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) \sim \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{2}}$ per $x \to 0^+$, di conseguenza la funzione integranda ha limite finito $(=0)$ per $x \to 0^+$ ed è quindi integrabile su $[0,a]$

Pertanto

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x}} \arctg\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right) dx = +\infty$$

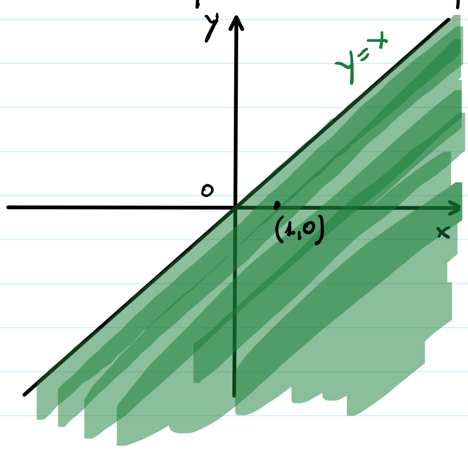
2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x-y)$$

Rappresentarlo graficamente sul piano. Dimostrare poi che f è differenziabile sul suo dominio. Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ al variare del versore $v = (v_1, v_2)$.

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$$

Dunque il dominio di f è aperto ed è dato da i punti (x,y) per cui $y < x$: è quindi il semipiano aperto colorato in figura



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\log(x-y) + \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\log(x-y) - \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

Entrambe le derivate parziali sono continue su dom f e quindi per il teorema del differenziale f è differenziabile su dom f.

Il punto $(1,0) \in \operatorname{dom} f$.

Poiché f è ivi differenziabile $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v =$

$$= 1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = v_1 - v_2$$

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = -e^{-3x}\log x$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ che ha un'unica soluzione $\lambda = -3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie (dato che il termine noto $g(x) = -e^{-3x}\log x$ non rientra nella classe di funzioni per cui è possibile applicare il metodo di similarità)

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^{-3x} + c_2'(x)\, x e^{-3x} = 0 \\ c_1'(x)\,(-3e^{-3x}) - c_2'(x)\,(e^{-3x} - 3x e^{-3x}) = -e^{-3x}\log x \end{cases}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^{-3x} \\ -e^{-3x}\log x & e^{-3x} - 3x e^{-3x} \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & -e^{-3x}\log x \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & x e^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3x e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-6x} - 3x e^{-6x} + 3x e^{-6x} = e^{-6x}$$

$$c_1'(x) = \frac{x e^{-6x}\log x}{e^{-6x}} = x \log x$$

$$c_2'(x) = \frac{-e^{-6x}\log x}{e^{-6x}} = -\log x$$

$$c_1(x) = \int x \log x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2$$

$$c_2(x) = -\int \log x \, dx = -x\log x + x$$

L'integrale generale è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}\log x - \frac{1}{4}x^2 e^{-3x} - x^2 e^{-3x}\log x + x^2 e^{-3x}$$

$$y(x) = c_1 e + c_2 x e + \frac{1}{2} x e \log x - \frac{1}{4} x e - x e \log x + x e$$

$$= c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{3}{4} x^2 e^{-3x} - \frac{1}{2} x^2 e^{-3x} \log x$$

4) Dare le definizione di dominio normale rispetto ad uno dei due assi cartesiani. Richiamare poi le formule di riduzione per l'integrale di una funzione continua su un dominio normale D.

Dimostrare infine che nel caso in cui D sia il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e f è continua su D si ha

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Si vedano, ad esempio, le lezioni 22-23, per le definizioni.

L'ultima parte dell'esercizio è un'immediata conseguenza delle formule di riduzione tenendo presente che T è normale rispetto ad entrambi gli assi cartesiani:

$$T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le 1-x \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 1 \ \wedge \ 0 \le x \le 1-y \}$$

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C

A.A. 2016/2017 Appello 6 ottobre 2017 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola__________Corso____

1)

- Calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(e-2)^n}{e}.$$
- Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n - 2}{n^{3/2} - n}.$$

6 pts.

2) Determinare il dominio della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) = (x^2 y - e^{\sqrt{x^2-y^2}})^{1/3}$$

e rappresentarlo graficamente sul piano. Stabilire poi che f ha derivata direzionale nel punto $(1,0)$ secondo il versore $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = 2e^{-x} - x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Enunciare la formula del cambio di variabili per un integrale doppio. Dimostrare inoltre che detto $J_\varphi(x,y)$ lo Jacobiano della trasformazione $\varphi = \varphi(x,y)$, lo Jacobiano della trasformazione inversa $\varphi^{-1} = \varphi^{-1}(u,v)$ è dato da $\dfrac{1}{J_\varphi(\varphi^{-1}(u,v))}$

8 pts.

1) A- Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(e-2)^n}{e}$$

B- Stabilire se la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n - 2}{n^{3/2} - n}$$

converge

A- È una serie geometrica di ragione $e-2$ moltiplicata per $\frac{1}{e}$ e priva dei primi 3 termini. Poiché $e-2 \in (-1,1)$, essa converge

Per calcolarne la somma osserviamo che

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(e-2)^n}{e} = \frac{1}{e} \cdot (e-2)^3 \cdot \sum_{n=3}^{+\infty} (e-2)^{n-3} = \frac{1}{e}(e-2)^3 \sum_{h=0}^{+\infty} (e-2)^h$$

$$= \frac{(e-2)^3}{e} \cdot \frac{1}{1-(e-2)} = \frac{(e-2)^3}{e} \cdot \frac{1}{3-e}$$

B. $$\left| \frac{\cos n - 2}{n^{3/2} - n} \right| \leq \frac{3}{n^{3/2} - n} \sim \frac{3}{n^{3/2}} \quad \forall n \geq 2$$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{n^{3/2}} \in \mathbb{R}$, la serie assegnata converge assolutamente e dunque converge

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \left(x^2 y - e^{\sqrt{x^2 - y^2}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

e rappresentarlo graficamente sul piano.

Stabilire poi che f ha derivata direzionale nel punto $(1,0)$ secondo il versore $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

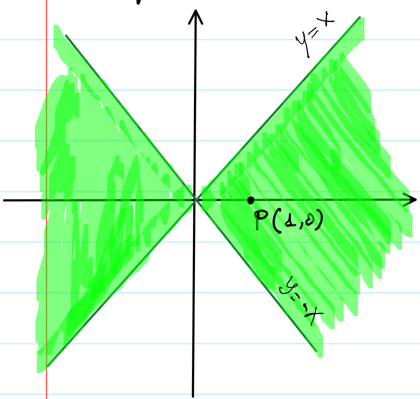
calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

$\mathrm{dom} f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 0 \}$

$$x^2 - y^2 \geq 0 \iff (x-y)(x+y) \geq 0 \iff \begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y < 0 \\ x+y < 0 \end{cases}$$

Dunque il dominio di f è dato dall'insieme tratteggiato in verde in figura



Come si vede il punto P è interno al dominio di f.

f, inoltre, ha derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^2y - e^{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2xy - e^{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^2y - e^{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2 - e^{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{(-2y)}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$$

Queste sono continue nell'interno del dominio di f.
Dunque f è differenziabile in P e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v = \frac{1}{3}(-e)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-e) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{3}(-e)^{-\frac{2}{3}}(1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(e^{\frac{1}{3}} - e^{2/3}\right)$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = 2e^{-x} - x \quad (*) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata a $(*)$ è $\lambda^2+\lambda=0$ che ha soluzioni $\lambda=0$ e $\lambda=-1$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

dunque $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Cerchiamo ora una soluzione delle equazioni

$$y''+y'=2e^{-x} \qquad (1)$$

Poichè -1 è soluzione dell'equazione caratteristica, applichiamo il metodo di similarità con

$$\tilde{y}_1(x) = kxe^{-x}$$

$$\tilde{y}_1'(x) = ke^{-x} - kxe^{-x}$$

$$\tilde{y}_1''(x) = -2ke^{-x} + kxe^{-x}$$

Quindi

$$-2ke^{-x} + \cancel{kxe^{-x}} + ke^{-x} - \cancel{kxe^{-x}} = 2e^{-x}$$

ossia

$$-ke^{-x} = 2e^{-x} \text{ da cui}$$

$$k=-2$$

$$y''+y'=-x \qquad (2)$$

Poichè 0 è soluzione dell'equazione caratteristica, applichiamo il metodo di similarità con

$$\tilde{y}_2(x) = x(a+bx)$$

$$\tilde{y}_2'(x) = a+bx+bx$$

$$\tilde{y}_2''(x) = 2b$$

Quindi

$$2b + a + 2bx = -x$$

da cui

$$\begin{cases} 2b=-1 \\ 2b+a=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ è una soluzione di $(*)$ e dunque il suo integrale generale è $\tilde{y}(x) = c_1 + c_2 e^{-x} - 2xe^{-x} + x\left(1-\frac{1}{2}x\right)$

Determiniamo c_1 e c_2 usando le condizioni iniziali:

$$\tilde{y}(0) = c_1 + c_2$$

$$\tilde{y}'(0) = -c_2 - 2 + 1$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

4) Si enunci la formula del cambio di variabili per un integrale doppio. Dimostrare poi che detto $J_\varphi(x,y)$ lo Jacobiano della trasformazione $\varphi = \varphi(x,y)$, lo Jacobiano della trasformazione inversa $\varphi^{-1} = \varphi^{-1}(u,v)$ è dato da

$$\frac{1}{J_\varphi(\varphi^{-1}(u,v))}$$

Si vedano, ad esempio, gli appunti della lezione 24

Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corsi B e C

A.A. 2016/2017 Prova parziale 6 novembre 2017 Traccia A

Cognome__________________Nome__________________N^o Matricola__________Corso___

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n \log^2(n^2)} - \frac{\log n}{n+1} \right).$$

8 pts.

2) Determinare il dominio della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) = \frac{\log(x-y^2)+1}{\sqrt{(x-1)^3}}$$

e rappresentarlo graficamente sul piano. Stabilire poi che f è differenziabile sul suo dominio e determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 0, f(2,0))$.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+2y}{2+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8 pts.

4) Sia f una funzione continua su D insieme normale chiuso. Dimostrare che esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ tale che $f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\text{area}(D)} \int_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.

6 pts.

1) Stabilire il carattere della seguente serie

A) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n\log^2(n^2)} - \frac{\log n}{n+1}\right)$

Studiamo separatamente le serie

(1) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log^2(n^2)}$ e (2) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log n}{n+1}$

(1): Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x\log^2(x^2)}$

$f(n) = \frac{1}{n\log^2(n^2)}$, $f(x)$ è decrescente e $f(x) = \frac{1}{2x\log^2 x}$ se $x>0$

Poiché $\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\log^2 x}\,dx \in \mathbb{R}$, per il criterio dell'integrale

(1) converge

(2): Poiché $n\frac{\log n}{n+1} \sim \log n \to +\infty$ per il

criterio degli infinitesimi (2) diverge positivamente

La serie assegnata quindi diverge negativamente

2) Determinare il dominio della seguente funzione e rappresentarlo sul piano:

$$f(x,y) = \frac{\log(x-y^2)+1}{\sqrt{(x-1)^3}}$$

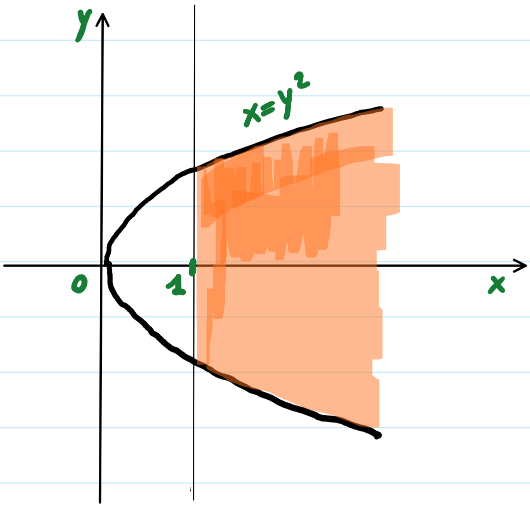
Stabilire poi che f è differenziabile sul suo dominio e determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(2,0,f(2,0))$

Il dominio di f è dato dai punti $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ per cui

Il dominio di f è dato dai punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ per cui

$$\begin{cases} x - y^2 > 0 \\ (x-1)^3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > y^2 \\ x > 1 \end{cases}$$

Esso è dato dall'insieme colorato in figura



Tale insieme è aperto. Le derivate parziali di f sono ben definite in tale insieme. Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x-y^2} \cdot (x-1)^{-\frac{3}{2}} + \left(\log(x-y^2)+1\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(x-1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{x-y^2}\,(x-1)^{-\frac{3}{2}}$$

Poiché sono continue nel dominio di f, f è ivi differenziabile
Esiste dunque il piano tangente al grafico di f in $(2,0,f(2,0))$

La sua equazione è $z = f(2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\,y$

$$f(2,0) = \log 2 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(\log 2 + 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 0$$

Quindi $z = \log 2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\log 2 - 1\right)(x-2)$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+2y}{2+x^2} & (*) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$(*)$ è a variabili $\dfrac{y'}{y^2+2y} = \dfrac{1}{2+x^2}$

Integrando entrambi i membri otteniamo

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \int \frac{dx}{2+x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dy}{y+2} - \int \frac{dy}{y}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\log|y+2| - \log|y|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{y}{y+2}\right|\right)$$

$$\int \frac{dx}{2+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Quindi $\log\left(\left|\dfrac{y}{y+2}\right|^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + C$

Poiché $y(0)=1$ otteniamo $\log\dfrac{1}{\sqrt{3}} = C$

Quindi $\left|\dfrac{y}{y+2}\right|^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}}$

$$\frac{|y|}{|y+2|} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

In un intorno di 0, y è positiva dato che $y(0)=1$
quindi la soluzione rimane tra le due soluzioni

singolari $y \equiv 0 \wedge y \equiv 2$. Dunque $y = y(x) > 0 \ \forall x$ e

$$\frac{y}{y+2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}} \quad \text{da cui}$$

$$y\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}}$$

da cui $y = \dfrac{2 e^{\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{3} - e^{\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}}}$

4) Sia f una funzione continua su D insieme normale del tipo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

con $\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} \in C^0([a,b])$.

Dimostrare che $\exists (\bar{x},\bar{y}) \in D$ t.c. $f(\bar{x},\bar{y}) = \dfrac{1}{\text{Area}D} \displaystyle\int_D f(x,y)\,dx\,dy$

Si vedano, ad esempio, gli appunti della lezione 22