

- 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1, x^2 + y^2 < 4, x > 0, y > 0\}$.

6 pts.

- 2) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \log(x^2 - y^2) + \arctan\left(\frac{x + y}{x - y}\right).$$

Determinare il dominio naturale di f e rappresentarlo sul piano specificando se si tratti di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi. Stabilire se f è differenziabile sul suo dominio. Calcolare poi $\nabla f(2, 1)$ e determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 1, f(2, 1))$. Calcolare infine la derivata direzionale di f nel punto $(2, 1)$ secondo la direzione del vettore $v = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

9 pts.

- 3) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 5y = \cos(2t).$$

Determinare poi la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

8 pts.

- 4) Dare la definizione di serie geometrica di ragione $q \in \mathbb{R}$. Studiarne la convergenza al variare di q e determinare la somma nel caso in cui la serie sia convergente. Dimostrare infine che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n}$$

è convergente e calcolarne la somma.

7 pts.