1)-a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$z = \left|\frac{i+1}{i-2}\right| e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left|\frac{i+1}{i-2}\right| = \frac{|i+1|}{|i-2|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad ; \quad e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Quindi $z = \frac{1}{\sqrt{10}} - \sqrt{\frac{3}{10}}\, i$

b) Determinare dominio ed eventuale monotonia delle funzioni

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2^{x-1}}\right) \; ; \qquad g(x) = \sqrt{x^4-16} + \operatorname{arctg}(\log(x-2))$$

f è definita su $\mathbb{R}$ dato che $\frac{1}{2^{x-1}} > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, inoltre è strettamente crescente in quanto composta delle funzioni strettamente decrescenti

$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2^{x-1}}$ e $x \in (0,+\infty) \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x$.

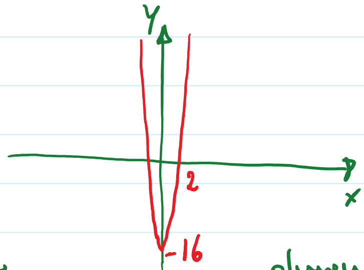
dom g : $\begin{cases} x^4-16 \geq 0 \\ x-2>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \vee x \leq -2 \\ x>2 \end{cases} \quad \{ x>2$

g è strettamente crescente in quanto somma delle funzioni

$g_1(x) = \sqrt{x^4-16}$ che è strettamente crescente su $(2,+\infty)$

(infatti $g_1(x)$ è composta da $g_3(x) = x^4-16$ e $g_4(x) = \sqrt{x}$

Il grafico di g_3 è



e quindi g_3 è strettamente crescente su $(2,+\infty)$;

g_4 è strettamente crescente dunque g_1 è strettamente crescente su $(2,+\infty)$)

e $g_2(x) = \arctan(\log(x-2))$ anch'esso strettamente crescente poiché composta da funzioni strettamente crescenti

2) Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = x + \frac{\log(1+x^3)}{x}$.

Si consideri poi il prolungamento continuo $\tilde{f}$ di f in 0. Dimostrare

Si consideri poi il prolungamento continuo $\tilde{f}$ di f in 0. Dimostrare che $\tilde{f}$ è derivabile in 0

dom f : $\begin{cases} x^3+1>0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1 \\ x \neq 0 \end{cases}$; quindi dom $f = (-1,0) \cup (0,+\infty)$

f è continua nel suo dominio quindi cerchiamo gli eventuali asintoti verticali solo in -1 (da dx) e in 0.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \left[-1 \; \frac{-\infty}{-1}\right] = +\infty$$: la retta $x=-1$ è as. vert. a dx

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x + \frac{\log(1+x^3)}{x^3} \cdot x^2 = 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

Quindi non ci sono asintoti verticali in 0

Cerchiamo ora eventuali asintoti orizzontali per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = [+\infty + 0] = +\infty$$: non c'è as. orizz. per $x \to +\infty$

Vediamo dunque se f ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\log(1+x^3)}{x^2} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+x^3)}{x} = 0$$

Quindi la retta $y=x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Poiché $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, f è prolungabile per continuità in 0.

Il suo prolungamento continuo $\tilde{f}$ è la funzione definita in $(-1,+\infty)$ con legge $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (-1,+\infty) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Verifichiamo che $\tilde{f}$ è derivabile in 0

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(0+h) - \tilde{f}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h + \frac{\log(1+h^3)}{h} \right) / h$$
$$= \lim 1 + \frac{\log(1+h^3)}{h^2} = \lim 1 + \frac{\log(1+h^3)}{h^3} h = 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 + \frac{\log(1+h^3)}{h^2} = \lim_{h\to 0} 1 + \frac{\log(1+h^3)}{h^3}\, h = 1 + 1\cdot 0 = 1$$

quindi $\tilde f$ è derivabile in 0 e $\tilde f'(0) = 1$

3) Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+\sqrt{|x|+4}}\,dx$

Poiché l'integrande è pari, l'integrale assegnato è uguale a

$$2\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{|x|+4}}\,dx = 2\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{x+4}}\,dx \underset{\substack{x=t^2-4\\ dx=2t\,dt}}{\overset{\sqrt{x+4}=t}{=}} 2\int_2^{\sqrt6} \frac{1}{1+t}\,2t\,dt$$

$$= 4\int_2^{\sqrt6}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 4(\sqrt6-2) - 4\log(1+t)\Big|_2^{\sqrt6} =$$

$$= 4(\sqrt6-2) - 4\log\frac{1+\sqrt6}{3}$$

4) Si veda il Teorema 7.34 a pag. 217 e il Teor. 7.35 a pag. 222 del manuale consigliato