1) - a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=3}^{n} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

È una serie geometrica di ragione $\left(-\frac{2}{3}\right)$ quindi converge dato che la ragione è compresa tra -1 e 1. Poiché k parte da 3 la somma è data da

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \left(\frac{2}{3}\right)^h = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \sum_{h=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^h =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{8}{27}\frac{3}{5} = -\frac{8}{45}$$

1) - b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \sin\left(\frac{2}{n^3}\right)$$

È una serie a termini non negativi; poiché

$$\frac{n^3}{2} \sin\left(\frac{2}{n^3}\right) = \sin\left(\frac{2}{n^3}\right) \Big/ \frac{2}{n^3} \longrightarrow 1$$

la successione $n^2 \sin\left(\frac{2}{n^3}\right)$ è asintotica a $\frac{2}{n}$ e dato che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} = +\infty$ la serie divergente positivamente

2) Sia $F(u,v) = \left(\sqrt{u^2-v^2} , \frac{1}{\log(u+v)} \right)$

Si determini il dominio naturale di F e lo si rappresenti sul piano

Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, connesso per archi, limitato.

Determinare l'insieme su cui F è differenziabile.

Sia poi $g(x,y) = xy$.

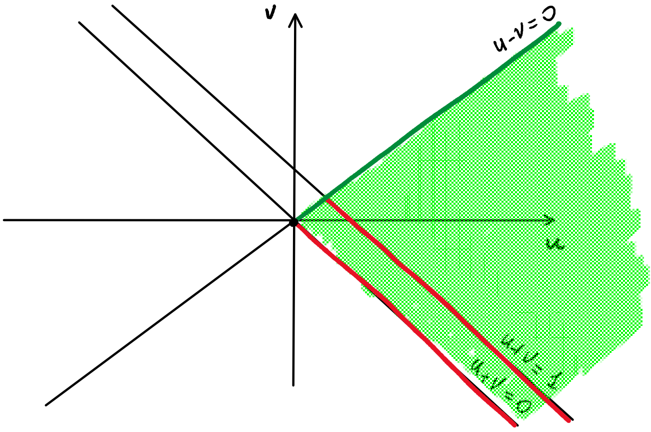
Calcolare $\nabla(g \circ F)(2,0)$, usando la regola della catena.

F ha componenti $F_1(u,v) = \sqrt{u^2-v^2}$ e $F_2(u,v) = \frac{1}{\log(u+v)}$

$\operatorname{dom} F = \operatorname{dom} F_1 \cap \operatorname{dom} F_2$

$\operatorname{dom} F_1$: $u^2 - v^2 \geq 0 \iff (u-v)(u+v) \geq 0$

$\operatorname{dom} F_2$: $u+v > 0$, $u+v = 1$



Il dominio di F è la regione colorata qui a fianco. Le semirette in rosso sono escluse mentre quella in verde è inclusa. dom F quindi non è né aperto né chiuso. (i punti della semiretta in verde appartengono a dom F ma non sono interni quindi dom F non è aperto. I punti delle semirette rosse sono punti di frontiera per dom F ma non appartengono a dom F che quindi non è neanche chiuso)

dom F non è connesso per archi dato che punti da parte opposta rispetto alla semiretta $u+v=1$ non possono essere connessi da una curva continua senza tagliare la stessa semiretta. Ovviamente dom F non è limitato.

Poiché F_1 e F_2 sono differenziabili su $\overset{\circ}{\widehat{\mathrm{dom}\,F}}$ (dato che sono funzioni di classe C^1 su $\overset{\circ}{\widehat{\mathrm{dom}\,F}}$, la differenziabilità su tale insieme segue dal Teorema del differenziale totale).

Quindi F è differenziabile su $A = \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{dom}\,F}}$

Poiché $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $g \circ F$ è differenziabile su A e

$$\nabla(g\circ F)(u,v) = \nabla g(F(u,v)) \cdot J_F(u,v)$$

$\nabla g(x,y) = (y, x)$ quindi $\nabla g(F(u,v)) = (F_2(u,v), F_1(u,v))$

$$J_F(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}} & -\frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}} \\ \frac{-\frac{1}{u+v}}{\log^2(u+v)} & \frac{-\frac{1}{u+v}}{\log^2(u+v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}} & -\frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}} \\ -\frac{1}{(u+v)\log^2(u+v)} & -\frac{1}{(u+v)\log^2(u+v)} \end{pmatrix}$$

$$F(2,0) = \left(2, \frac{1}{\log 2}\right)$$

$$\nabla g(F(2,0)) = \left(\frac{1}{\log 2}, 2\right)$$

$$J_F(2,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2\log^2 2} & -\frac{1}{2\log^2 2} \end{pmatrix}$$ e dunque

$$\nabla(g\circ F)(2,0) = \nabla g(F(2,0)) \cdot J_F(2,0) =$$

$$= \left(\frac{1}{\log 2}, 2\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2\log^2 2} & -\frac{1}{2\log^2 2} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log^2 2}, -\frac{1}{\log^2 2}\right)$$

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y = t\cos(2t)$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

Poiché $2i$ è soluzione dell'equazione caratteristica una soluzione particolare avrà la forma

$$\bar{y}(t) = t[(at+b)\cos(2t) + (ct+d)\sin(2t)]$$

$$\bar{y}'(t) = (at+b)\cos(2t) + (ct+d)\sin(2t) + t[a\cos(2t) - 2(at+b)\sin(2t) + c\sin(2t) + 2(ct+d)\cos(2t)]$$

$$\bar{y}''(t) = 2(a\cos(2t) - 2(at+b)\sin(2t) + c\sin(2t) + 2(ct+d)\cos(2t))$$
$$+ t(-2a\sin(2t) - 2a\sin 2t - 4(at+b)\cos(2t) + $$
$$+ 2c\cos(2t) + 2c\cos(2t) - 4(ct+d)\sin(2t))$$

Sostituendo nell'equazione e semplificando otteniamo:

$$= 2(a\cos(2t) - 2(at+b)\sin(2t) + c\sin(2t) + 2(ct+d)\cos(2t))$$
$$+ t(-4a\sin(2t) + 4c\cos(2t) = t\cos(2t)$$

Ossia

$$t\left(-4a\sin(2t)+4c\cos 2t-4a\sin(2t)+4c\cos(2t)\right)$$
$$+\left((2a+4d)\cos(2t)+(-4b+2c)\sin(2t)\right)=t\cos(2t)$$ da cui

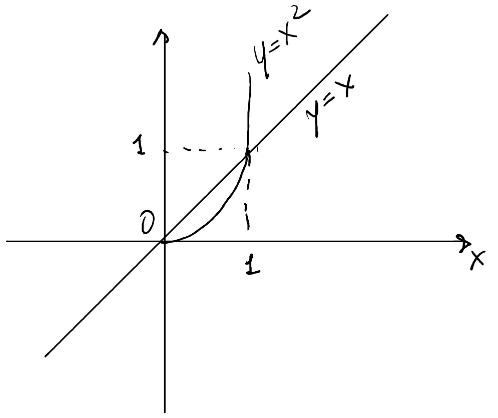
$$\begin{cases} -8a=0 \\ 8c=1 \\ 2a+4d=0 \\ -4b+2c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0 \\ c=\frac{1}{8} \\ d=0 \\ b=\frac{1}{16} \end{cases}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(t)=c_1\cos(2t)+c_2\sin(2t)+t\left(\frac{1}{16}\cos(2t)+\frac{t}{8}\sin(2t)\right)$$

4) Enunciare la formula di riduzione per un integrale doppio su un insieme normale. Usarla per invertire l'ordine di integrazione di

$$\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\right)dx$$, dove f è una funzione continua su $\mathbb{R}^2$.



Possiamo vedere l'insieme

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[0,1]$ e $x^2\le y\le x\}$

come normale rispetto all'asse delle y:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\in[0,1]$ e $y\le x\le\sqrt{y}\}$

Quindi $$\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dy\right)dx$$