Politecnico di Bari
CUC Ingegneria Civile
CdL Ingegneria Ambientale e del Territorio
AA 2007-2008

Corso di Analisi Matematica - Tracce di esame

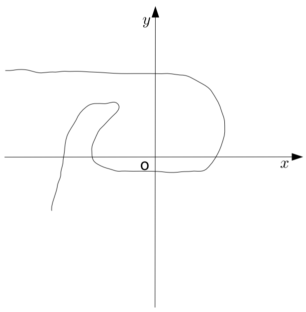
Docenti: Prof.ssa G. Cerami, Dott. E. Caponio

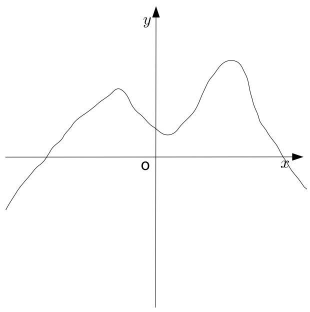
A.A 2007/2008 Esonero del 26 Novembre 2007 Traccia A

1) Dare la definizione di estremo superiore e di massimo di un insieme. Calcolare poi l'estremo superiore, l'estremo inferiore ed eventualmente il massimo e il minimo dell'insieme

$$X = \{\frac{1}{1+3^{1-n}}, n \in \mathbb{N}\}.$$

2) Dire motivando la risposta se i seguenti possono essere i grafici di una funzione e, in caso affermativo, se la funzione sia ingettiva:





3) Dare la definizione di serie e di serie convergente.

Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + e^{-n}}{n^3 + n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^{4/3}}.$$

4) Determinare il campo di esistenza e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1} - |x|}{x}$$

5) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x) = \log(3 - \sin x \cos x).$$

6) Enunciare il Tereoma di derivazione delle funzioni inverse.

Stabilire, poi, che la funzione

$$f(x) = 3x^2 + \log_2 x,$$

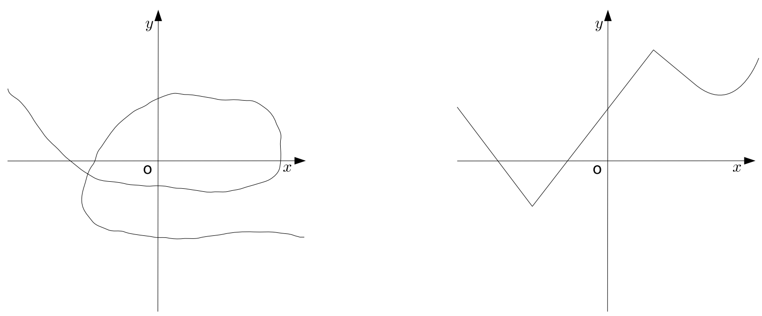
è invertibile e calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y = 13$.

A.A 2007/2008 Esonero del 26 Novembre 2007 Traccia B

1) Dare la definizione di estremo superiore e di massimo di un insieme. Calcolare poi l'estremo superiore, l'estremo inferiore ed eventualmente il massimo e il minimo dell'insieme

$$X = \{\frac{1}{1-2^{1-n}},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1\}.$$

2) Dire motivando la risposta se i seguenti possono essere i grafici di una funzione e, in caso affermativo, se la funzione sia ingettiva:



3) Dare la definizione di serie e di serie divergente positivamente.

Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}n - 2^{-n}}{n^3 + 2n}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(e^n)}{n^{3/2}}.$$

4) Determinare il campo di esistenza e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-1} - x}{x}$$

5) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x) = \log(2 - \cos^2 x).$$

6) Enunciare il Tereoma di derivazione delle funzioni inverse.

Stabilire, poi, che la funzione

$$f(x) = 2^{-x} + \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

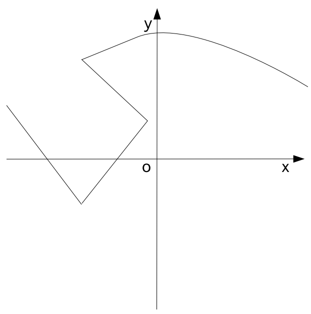
è invertibile e calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y = \frac{3}{2}$.

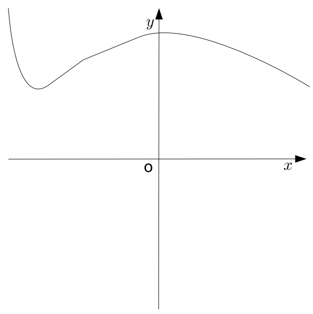
A.A 2007/2008 Esonero del 26 Novembre 2007 Traccia C

1) Dare la definizione di estremo superiore e di massimo di un insieme. Calcolare poi l'estremo superiore, l'estremo inferiore ed eventualmente il massimo e il minimo dell'insieme

$$X = \{\frac{1}{2-2^{n-1}}, n \in \mathbb{N},\ n > 2\}.$$

2) Dire motivando la risposta se i seguenti possono essere i grafici di una funzione e, in caso affermativo, se la funzione sia ingettiva:





3) Dare la definizione di serie e di serie assolutamente convergente.

Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3^{-n}}{n^4 + n}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(2n-1)}{n^{5/2}}.$$

4) Determinare il campo di esistenza e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-1} - 1}{x}$$

5) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x) = \log(2 + \sin x \cos x).$$

6) Enunciare il Tereoma di derivazione delle funzioni inverse.

Stabilire, poi, che la funzione

$$f(x) = 2x^4 + \log_2 x,$$

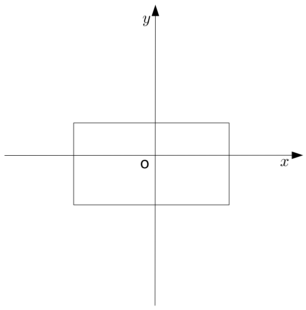
è invertibile e calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y = 33$.

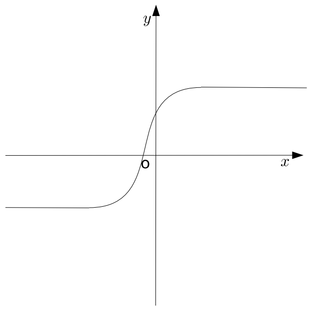
A.A 2007/2008 Esonero del 26 Novembre 2007 Traccia D

1) Dare la definizione di estremo superiore e di massimo di un insieme. Calcolare poi l'estremo superiore, l'estremo inferiore ed eventualmente il massimo e il minimo dell'insieme

$$X = \{\frac{2}{2-3^{n-2}}, n \in \mathbb{N}\}.$$

2) Dire motivando la risposta se i seguenti possono essere i grafici di una funzione e, in caso affermativo, se la funzione sia ingettiva:





3) Dare la definizione di serie e di serie divergente negativamente.

Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}n - 4^{-n}}{n^3+n}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sin(n-1)}{2n^{7/3}}.$$

4) Determinare il campo di esistenza e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2-4}+|x|}{x}$$

5) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x) = \log(2-\sin^2 x).$$

6) Enunciare il Tereoma di derivazione delle funzioni inverse.

Stabilire, poi, che la funzione

$$f(x) = 2^x - \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

è invertibile e calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y = \frac{7}{2}$.

A.A 2007/2008 Appello del 12 Febbraio 2008 Traccia A

1) Dare la definizione di funzione ingettiva.

Determinare l'insieme di definizione e stabilire se le seguenti funzioni sono ingettive:

$$f(x) = \arccos(x^2 - 1), \qquad g(x) = \log_4(x^3 - 1).$$

2) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{7}\right)^n .$$

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n + 2^n}{n + 3^n}.$$

3) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} + x \sin \frac{1}{x}.$$

4) Stabilire se l'equazione

$$x^5 + e^x - x = 8$$

ha una sola soluzione nell'intervallo $[1, 2]$.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \log_{1/2}(x \sin y).$$

6) Considerare la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2 - y} y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Calcolare, usando la definizione, la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ secondo una qualsiasi direzione $v = (v_1, v_2)$. Enunciare il teorema di rappresentazione della derivata direzionale per mezzo del gradiente e verificare se esso valga, traendo le opportune conclusioni sulla differenziabilità di f in $(0, 0)$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \left((x + y)^4 + 1\right) (x - y)^2 \log(x - y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -4 < x + y < -2, \ -3 < y - x < -2\}$.

A.A 2007/2008 Appello del 12 Febbraio 2008 Traccia B

1) Dare la definizione di funzione ingettiva.

Determinare l'insieme di definizione e stabilire se le seguenti funzioni sono ingettive:

$$f(x) = \arcsin(1 - x^3), \qquad g(x) = (x^{1/3} - 1)^2.$$

2) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} 7 \left(\frac{1}{8}\right)^n.$$

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 3^n}{2n^3 + 4^n}.$$

3) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} + x \cos \frac{1}{x}.$$

4) Stabilire se l'equazione

$$x^7 + e^x - x = 5$$

ha una sola soluzione nell'intervallo $[1, 2]$.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \log_2(y \cos x).$$

6) Considerare la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{y^2+x} x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Calcolare, usando la definizione, la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ secondo una qualsiasi direzione $v = (v_1, v_2)$. Enunciare il teorema di rappresentazione della derivata direzionale per mezzo del gradiente e verificare se esso valga, traendo le opportune conclusioni sulla differenziabilità di f in $(0, 0)$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \left((x - y)^5 - 1\right) (x + y)^2 \log(x + y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x + y < 2,\ 1 < y - x < 3\}$.

A.A 2007/2008 Appello del 12 Febbraio 2008 Traccia C

1) Dare la definizione di funzione ingettiva.

Determinare l'insieme di definizione e stabilire se le seguenti funzioni sono ingettive:

$$f(x) = \arctan(x^2+1), \qquad g(x) = e^{2x^3-3}.$$

2) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3-3^n}{\log n + 5^n}.$$

3) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^3-2}{x^2} + x^2 \sin\frac{1}{x^2}.$$

4) Stabilire se l'equazione

$$x^6 + e^x - 2x = 5$$

ha una sola soluzione nell'intervallo $[1,2]$.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \log_{1/3}(x\cos y).$$

6) Considerare la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2^{xy}x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Calcolare, usando la definizione, la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ secondo una qualsiasi direzione $v = (v_1, v_2)$. Enunciare il teorema di rappresentazione della derivata direzionale per mezzo del gradiente e verificare se esso valga, traendo le opportune conclusioni sulla differenziabilità di f in $(0,0)$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D (x-y)^5(x+y)^2\log(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \frac{1}{2} < x+y < 1,\ 2 < y-x < 4\}$.

A.A 2007/2008 Appello del 12 Febbraio 2008 Traccia D

1) Dare la definizione di funzione ingettiva.

Determinare l'insieme di definizione e stabilire se le seguenti funzioni sono ingettive:

$$f(x) = \log_{1/2}(x^3 + x), \qquad g(x) = \sin(x^3).$$

2) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log^2 n + 5^n}{n + 7^n}.$$

3) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2} + x^2 \cos \frac{1}{x^2}.$$

4) Stabilire se l'equazione

$$x^8 + e^x - 2x = 4$$

ha una sola soluzione nell'intervallo $[1, 2]$.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \log_3(y \sin x).$$

6) Considerare la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y 3^{x-y}}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Calcolare, usando la definizione, la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ secondo una qualsiasi direzione $v = (v_1, v_2)$. Enunciare il teorema di rappresentazione della derivata direzionale per mezzo del gradiente e verificare se esso valga, traendo le opportune conclusioni sulla differenziabilità di f in $(0, 0)$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D (x + y)^2 (x - y)^2 \log(x - y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -2 < x + y < -1, \ -3 < y - x < -1\}$.

A.A 2007/2008 Appello del 27 Febbraio 2008 Traccia A

1) Dare la definizione di funzione e di insieme immagine di una funzione. Determinare l'insieme di definizione e l'insieme immagine della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{e^x - 3} + 2.$$

Stabilire, infine, se tale funzione è iniettiva e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

2) Dare la definizione di successione convergente ad $l \in \mathbb{R}$.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} - n.$$

Enunciare il Teorema di confronto per i limiti di successioni ed utilizzarlo per calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5 + 4\cos n}{11} \right)^n.$$

3) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n(n-1)} - \frac{1}{(2n)^{2/5}} \right).$$

4) Determinare gli eventuali punti di estremo locale e assoluto e tracciare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = x^2 - \log(x^2 - 1), \qquad x \in [-3 - 1) \cup (1, 4].$$

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Enunciare, poi, il Teorema del differenziale e verificare se si può applicare nel punto $(0,0)$ alla funzione

$$f(x, y) = \sqrt[3]{y} x^2.$$

Verificare, infine, che tale funzione è differenziabile in $(0,0)$ usando la definizione.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{x}{2 - y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano delimitato dalla parabola di equazione $y = 1 - x^2$ e dai semiassi positivi delle x e delle y.

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2007/2008 Appello del 27 Febbraio 2008 Traccia B

1) Dare la definizione di funzione e di insieme immagine di una funzione. Determinare l'insieme di definizione e l'insieme immagine della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{e^{-x} - 1} + 3.$$

Stabilire, infine, se tale funzione è iniettiva e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

2) Dare la definizione di successione convergente ad $l \in \mathbb{R}$.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} 3n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 5} \right).$$

Enunciare il Teorema di confronto per i limiti di successioni ed utilizzarlo per calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3 - 2 \sin n}{7} \right)^n.$$

3) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(2n-1)} - \frac{1}{(3n)^{4/5}} \right).$$

4) Determinare gli eventuali punti di estremo locale e assoluto e tracciare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right), \qquad x \in [-10, -1) \cup (0, 5].$$

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Enunciare, poi, il Teorema del differenziale e verificare se si può applicare nel punto $(0,0)$ alla funzione

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x} y^2.$$

Verificare, infine, che tale funzione è differenziabile in $(0,0)$ usando la definizione.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{x}{1+y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano delimitato dalla parabola di equazione $y = 1 + x^2$, dai semiassi positivi delle x e delle y e dalla retta di equazione $x = 1$.

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2007/2008 Appello del 27 Febbraio 2008 Traccia C

1) Dare la definizione di funzione e di insieme immagine di una funzione. Determinare l'insieme di definizione e l'insieme immagine della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\log x - 2} + 1.$$

Stabilire, infine, se tale funzione è iniettiva e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

2) Dare la definizione di successione convergente ad $l \in \mathbb{R}$.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sin^2 n}.$$

Enunciare il Teorema di confronto per i limiti di successioni ed utilizzarlo per calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{8+\cos n}\right)^{n}.$$

3) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)(n-2)} - \frac{1}{(n/2)^{3/4}}\right).$$

4) Determinare gli eventuali punti di estremo locale e assoluto e tracciare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = x^2 - 3 + \log(1-x^2), \qquad x \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{3}, 1).$$

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Enunciare, poi, il Teorema del differenziale e verificare se si può applicare nel punto $(0,0)$ alla funzione

$$f(x,y) = \sqrt[5]{y}x^3.$$

Verificare, infine, che tale funzione è differenziabile in $(0,0)$ usando la definizione.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{x}{1-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano delimitato dalla parabola di equazione $y = -x^2$ dal semiasse negtivo delle x e dalla retta di equazione $x = -1$.

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y = \cos 3x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2007/2008 Appello del 27 Febbraio 2008 Traccia D

1) Dare la definizione di funzione e di insieme immagine di una funzione. Determinare l'insieme di definizione e l'insieme immagine della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\arctan x - \frac{\pi}{4}} - 2.$$

Stabilire, infine, se tale funzione è iniettiva e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

2) Dare la definizione di successione convergente ad $l \in \mathbb{R}$.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\sin n}.$$

Enunciare il Teorema di confronto per i limiti di successioni ed utilizzarlo per calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{9+\sin n}\right)^{n}.$$

3) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)(n+3)} - \frac{1}{(n/3)^{2/3}}\right).$$

4) Determinare gli eventuali punti di estremo locale e assoluto e tracciare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}, \qquad x \in [-4 - 0) \cup (1, 5].$$

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Enunciare, poi, il Teorema del differenziale e verificare se si può applicare nel punto $(0,0)$ alla funzione

$$f(x,y) = \sqrt[5]{x}y^4.$$

Verificare, infine, che tale funzione è differenziabile in $(0,0)$ usando la definizione.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{x}{2+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano delimitato dalla parabola di equazione $y = x^2 - 1$ e dai semiassi negativi delle x e delle y.

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y = \sin 3x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2007/2008 Appello del 7 Maggio 2008 Traccia A

1) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n - \cos(n^n)}{n - n^3}.$$

2) Dare la definizione di funzione continua in un punto. Stabilire per quali valori del paramentro $a \in \mathbb{R}$, la seguente funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^a + \sin(x^2)}{x^3 + x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
è continua in 0. Classificare inoltre, per i restanti valori di a, il tipo di discontinuità che f ha in 0.

3) Determinare insieme di definizione, asintoti e monotonia della funzione
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + x.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale. Usarlo poi per stabilire (senza calcolare esplicitamente l'integrale!) che
$$\int_{-4}^{-1} \left(\frac{1}{2}\cos^3(3^x - x) + 2\right) \mathrm{d}x > 4.$$

5) Determinare e rappresentare graficamente il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui è definita la funzione
$$f(x,y) = \frac{e^{x^2-y} + 1}{\log(x - y^2)}.$$
Provare, poi, che su tale insieme f è differenziabile. Stabilire, infine, se nel punto $P = (2,0)$ esiste il piano tangente al grafico di f e in caso affermativo scriverne l'equazione.

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D \frac{\cos(xy)}{2 + \cos(xy)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme definito da
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < xy < \frac{\pi}{2},\ x < y < 2x\}.$$

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = -\dfrac{3x^2}{1+x^3} y + \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+x^3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

A.A 2007/2008 Appello del 7 Maggio 2008 Traccia B

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - \sin(n^3)}{n^2-1}.$$

2) Dare la definizione di funzione continua in un punto. Stabilire per quali valori del paramentro $a \in \mathbb{R}$, la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sin x)^a + x^3}{x^5 + x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in 0. Classificare inoltre, per i restanti valori di a, il tipo di discontinuità che f ha in 0.

3) Determinare insieme di definizione, asintoti e monotonia della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-2}\right) - x.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale. Usarlo poi per stabilire (senza calcolare esplicitamente l'integrale!) che

$$\int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{3}\sin^2(2^{-x} + x) + 2\right) \mathrm{d}x > 6.$$

5) Determinare e rappresentare graficamente il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui è definita la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(2x+y^2) - 1}{\log(x^2 - y^2)}.$$

Provare, poi, che su tale insieme f è differenziabile. Stabilire, infine, se nel punto $P = (2,0)$ esiste il piano tangente al grafico di f e in caso affermativo scriverne l'equazione.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{3 + \sin\left(\frac{y}{x}\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < xy < 1,\ \frac{\pi}{2}x < y < \frac{2\pi}{3}x\}.$$

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2x}{1+x^2}y - \dfrac{1}{x^3}\dfrac{1}{1+x^2} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

A.A 2007/2008 Appello del 7 Maggio 2008 Traccia C

1) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2 - \cos(\frac{1}{n})}{n^4 - n}.$$

2) Dare la definizione di funzione continua in un punto. Stabilire per quali valori del paramentro $a \in \mathbb{R}$, la seguente funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^a - \sin^3(x)}{x^3 + x^5} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
è continua in 0. Classificare inoltre, per i restanti valori di a, il tipo di discontinuità che f ha in 0.

3) Determinare insieme di definizione, asintoti e monotonia della funzione
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+2}{x-3}\right) - x.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale. Usarlo poi per stabilire (senza calcolare esplicitamente l'integrale!) che
$$\int_{-3}^{-1} \left(2 - \frac{1}{4}\cos^2(x - x^2 \log|x|)\right) \mathrm{d}x < \frac{43}{9}.$$

5) Determinare e rappresentare graficamente il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui è definita la funzione
$$f(x,y) = \frac{2^{x-y} + x}{\log(2x^2 + y)}.$$
Provare, poi, che su tale insieme f è differenziabile. Stabilire, infine, se nel punto $P = (1,0)$ esiste il piano tangente al grafico di f e in caso affermativo scriverne l'equazione.

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D \frac{\sin(xy)}{2 - \sin(xy)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme definito da
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < xy < \frac{\pi}{2},\ x < y < 2x\}.$$

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{1+x^2}y - \dfrac{1}{x^3}\sqrt{1+x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

A.A 2007/2008 Appello del 7 Maggio 2008 Traccia D

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n \log\left(1-\frac{1}{n}\right) - \sin^3(n)}{n^2-1}.$$

2) Dare la definizione di funzione continua in un punto. Stabilire per quali valori del paramentro $a \in \mathbb{R}$, la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sin(x^a) + x^2}{x^4 + 2x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in 0. Classificare inoltre, per i restanti valori di a, il tipo di discontinuità che f ha in 0.

3) Determinare insieme di definizione, asintoti e monotonia della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + x.$$

4) Enunciare il Teorema della media integrale. Usarlo poi per stabilire (senza calcolare esplicitamente l'integrale!) che

$$\int_{-3}^{2} \left(\frac{1}{2}\sin^3(x^2 - \arctan x) + 1\right) \mathrm{d}x < \frac{61}{8}.$$

5) Determinare e rappresentare graficamente il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui è definita la funzione

$$f(x,y) = \frac{\arctan(-x-y-2) - x}{\log(y^2 - x^2 - 1)}.$$

Provare, poi, che su tale insieme f è differenziabile. Stabilire, infine, se nel punto $P = (0,2)$ esiste il piano tangente al grafico di f e in caso affermativo scriverne l'equazione.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{2 - \cos\left(\frac{y}{x}\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < xy < 1,\ \frac{\pi}{2}x < y < \frac{2\pi}{3}x\}.$$

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{1+x^3}y - \dfrac{1}{x^4}\sqrt[3]{1+x^3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

A.A 2007/2008 Appello del 30 Giugno 2008 Traccia A

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n-2}} \left(\log n - (-1)^n\right).$$

2) Enunciare il teorema di Waierstrass. Stabilire poi per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{a}\right) + x^2}{\sin x} & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del teorema.

3) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x-3} e^{-\frac{1}{x^2-1}} + |x|.$$

4) Enunciare le condizioni per l'approssimabilità di una funzione con il suo polinomio di Taylor di ordine n.

Scrivere il polinomio di Taylor di centro $x_0 = 1$ e di ordine 3 per la funzione $f(x) = \sin^2(\pi x)$.

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto del piano. Enunciare una condizione sufficiente per la differenziabilità di una funzione in un punto di un aperto del piano.

Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = 2x^3 + x(|y| - 2) + 3y$$

è differenziabile in $(0,0)$.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{x - \sqrt{x^2+y^2}}{y + \sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x < y,\ \sqrt{3}x < y\}.$$

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$2^{x-y}y' + x = 0.$$

A.A 2007/2008 Appello del 30 Giugno 2008 Traccia B

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n-3}}\big((-1)^n + \log n\big).$$

2) Enunciare il teorema di Waierstrass. Stabilire poi per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{x}{a}\sin x + x^2}{\sin(x^2)} & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ \frac{1}{4} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del teorema.

3) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} e^{-\frac{1}{x^2-2}} - |x|.$$

4) Enunciare le condizioni per l'approssimabilità di una funzione con il suo polinomio di Taylor di ordine n.

Scrivere il polinomio di Taylor di centro $x_0 = -1$ e di ordine 3 per la funzione $f(x) = \log(2-x^2)$.

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto del piano. Enunciare una condizione sufficiente per la differenziabilità di una funzione in un punto di un aperto del piano.

Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = y(|x|+1) - x - y^2$$

è differenziabile in $(0,0)$.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x - \sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < 2,\ y < -\frac{\sqrt{3}}{3}x,\ \sqrt{3}x < y\}.$$

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$3^{y-x}y' + x = 0.$$

A.A 2007/2008 Appello del 15 Luglio 2008 Traccia A

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!\cos n}{(n+1)!}.$$

2) Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni continue. Usarlo poi per dimostrare che l'equazione

$$\arctan\frac{1}{1-x} = x + \pi,$$

ha almeno una soluzione negativa. Stabilire poi se tale soluzione è unica.

3) Determinare insieme di definizione, asintoti e monotonia della funzione

$$f(x) = \log(x^2 - 2) - \log(2 - x).$$

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione. Enunciare, poi, il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua. Dire, motivando la risposta, se esiste una primitiva di f che in x_0 assume il valore -1.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \left(\frac{y+2x}{3x^2+y^2-1}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione di due variabili. Calcolare infine la derivata direzionale della funzione f, su definita, nel punto $(1,0)$ e secondo la direzione del versore $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D |xy| \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; | x^2 + y^2 \leq 4, \; x^2 \leq y^2 \leq 3x^2\}.$$

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 4y = e^x - x.$$

A.A 2007/2008 Appello del 15 Luglio 2008 Traccia B

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-2)! \sin n}{n!}.$$

2) Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni continue. Usarlo poi per dimostrare che l'equazione

$$e^{\frac{x}{1+x^2}} = x,$$

ha almeno una soluzione maggiore di 1. Stabilire poi se tale soluzione è unica.

3) Determinare insieme di definizione, asintoti e monotonia della funzione

$$f(x) = \log(2-x) + \log(9-x^2).$$

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione. Enunciare, poi, il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua. Dire, motivando la risposta, se esiste una primitiva di f che in x_0 assume il valore 1.

5) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \log \frac{2x^2+3y^2-1}{y+2x}.$$

Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione di due variabili reali. Calcolare infine la derivata direzionale della funzione f, su definita, nel punto $(1,0)$ e secondo la direzione del versore $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D |xy| \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; | x^2+y^2 \leq 4, \; x^2 \leq y^2 \leq 3x^2\}.$$

7) Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' - 3y = 3x - e^{-x}.$$

A.A 2007/2008   Appello del 11 Setembre 2008   Traccia A

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2+n} - 2}{n}.$$

2) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to\pi^-} \tan x \log(\pi^2 - x^2).$$

3) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x}\right) - x.$$

4) Enunciare il Teorema di Rolle. Usarlo, poi, per dimostrare che una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, derivabile due volte nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e avente un punto di minimo e uno di massimo all'interno di I, ha almeno un punto in cui si annulla la derivata seconda.

5) Determinare e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1-2y^2-3x^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determinare poi l'insieme su cui f è differenziabile.

6) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D x\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x,\ 2x-2 \leq y \leq x\}.$$

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' = x^2 + 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

A.A 2007/2008 Appello del 11 Setembre 2008 Traccia B

1) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^3-2n} - 1}{n}.$$

2) Calcolare, se esiste, il seguente limite
$$\lim_{x\to 2\pi} \sin x \log(x-2\pi)^2.$$

3) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione
$$f(x) = xe^{\frac{x^2+4}{x}}.$$

4) Enunciare il Teorema di Rolle. Usarlo poi per dimostrare che una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, derivabile due volte nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e avente due punti di minimo all'interno di I, ha almeno un punto in cui si annulla la derivata seconda.

5) Determinare e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della seguente funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{4x^2 - y^2 + 1}{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Determinare poi l'insieme su cui f è differenziabile.

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D y\sin(2y+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x,\ x+1 \leq y\}.$$

7) Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' + 2y' = x^3 - x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

A.A 2007/2008 Appello del 18 Novembre 2008 Traccia A

1) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4(n^2-1) - 2^n \cos n}{3^n}.$$

2) Determinare gli asintoti della funzione
$$f(x) = x \log \frac{2x-1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3) Stabilire se la funzione $f(x) = 2^{-2x} - x^3$ è invertibile e in caso positivo calcolare, usando il teorema sulla derivata di una funzione inversa, $(f^{-1})'(5)$.

4) Enunciare il Teorema di Lagrange. Usarlo, poi, per dimostrare che se $b > a > 1$
$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < b - a.$$

5) Determinare e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della seguente funzione
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{\sin(x-y)}.$$
Dimostrare poi che f è differenziabile sul suo dominio e determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto di coordinate $(0, -\frac{\pi}{2})$.

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D \frac{x}{xy+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x,\ xy < 1\ x < 2\}.$$

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' - 4y' + 5y = e^{-x} \cos x$$

A.A 2007/2008 Appello del 18 Novembre 2008 Traccia B

1) Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3(1+n^3) - 3^n \sin n}{4^n}.$$

2) Determinare gli asintoti della funzione
$$f(x) = x \log \frac{x+1}{3x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3) Stabilire se la funzione $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{4} - x$ è invertibile e in caso positivo calcolare, usando il teorema sulla derivata di una funzione inversa, $(f^{-1})'(-1)$.

4) Enunciare il Teorema di Lagrange. Usarlo, poi, per dimostrare che se $\frac{1}{4} > b > a > 0$
$$\sqrt{b} - \sqrt{a} > b - a.$$

5) Determinare e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della seguente funzione
$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{\cos(y-x)}.$$
Dimostrare poi che f è differenziabile sul suo dominio e determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto di coordinate $(\pi, 0)$.

6) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D \frac{x}{xy+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove D è il sottoinsieme del piano definito da
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x,\ xy < 1\ x < 2\}.$$

7) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' - 2y' + 5y = e^{-x} \sin x$$