Politecnico di Bari
CUC Ingegneria dell'Informazione
L3 Ingegneria Informatica
AA 2005-2006

Corso di Analisi Matematica I - Tracce di esame

Docente: Dott. E. Caponio

A.A 2005/2006 Esercizi delle tracce della I prova di esonero del 4 Novembre 2005

1) Disegnare, partendo dalla conoscenza dei grafici delle funzioni elementari, i grafici delle seguenti funzioni:

$$f(x) = |\cos x|; \quad g(x) = \log_2(-x); \quad h(x) = e^{3-x}.$$
$$f(x) = |\tan x|; \quad g(x) = \log_{1/2}(2-x); \quad h(x) = e^{-x}.$$
$$f(x) = |\sin x|; \quad g(x) = 1 - \log_{1/2}(x); \quad h(x) = e^{1-x}.$$
$$f(x) = |\log x|; \quad g(x) = 1 - \sin x; \quad h(x) = \frac{1}{2-x}.$$
$$f(x) = |x^3|; \quad g(x) = \sin(x - \pi/2); \quad h(x) = 2\log_4(1-x).$$

2) Stabilire quali delle seguenti funzioni sono monotone e indicarne il tipo di monotonia:

$$f(x) = 2^{-x} + \log_{1/2}(x-1); \quad g(x) = \mathrm{sign}(x^3); \quad h(x) = \arctan(x^3).$$
$$f(x) = 3^{2x} + \log_3(x+1); \quad g(x) = H(2x+1); \quad h(x) = e^{x^5}.$$
$$f(x) = \log_{1/2}(x-1) + \log_{1/4}(x+1); \quad g(x) = |x-1|; \quad h(x) = \frac{1}{2^{x^3}}.$$

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \left(x^2 \log_{1/3} \frac{x-2}{x+1}\right)^{\tan x}.$$
$$f(x) = \left(\sin^2 x \log_{1/2} \frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{4x-1}}.$$
$$f(x) = \left(x^2 \log_{1/4} \frac{x+1}{x-1}\right)^{1/\sin x}.$$

4) Calcolare il seguente limite;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{\log_2(x^2 - 2x - 1)}.$$
$$\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{1-x}{\sqrt[5]{x^2}\log_3(x^2)}\right).$$

5) Stabilire se esiste una soluzione dell'equazione:

$$\log x - 2\cos(2x) + 10 = 0.$$
$$2\log x - \sin(3x) - 12 = 0.$$

A.A 2005/2006 Esercizi delle tracce assegnate alle prove del 13 Dicembre 2005

1) Siano H e sign rispettivamente la funzione di Heaviside e la funzione segno. Determinare esplicitamente la legge funzionale e rappresentare il grafico delle funzioni

$$\begin{array}{ll} H(\sin(x)) & \sin(\pi H(x)); \\ H(\cos x) & \cos(\pi H(x)); \\ \mathrm{sign}(\sin x) & \sin(\pi \mathrm{sign}(x)); \\ \mathrm{sign}(\cos x) & \cos(\pi \mathrm{sign}(x)). \end{array}$$

2) Dire, motivando la risposta, se le seguenti funzioni sono monotone e indicarne il tipo di monotonia

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2\log_{1/e}(1-x), & g(x) = (2x-1)^{\sqrt{2}} + \arctan(x^3). \\ f(x) = \sqrt{2}\log_{1/4}(e^{-x}), & g(x) = \sqrt[4]{x-2} + 2^{x^3}. \\ f(x) = 3\arctan\left(\dfrac{1}{2^x}\right), & g(x) = \sqrt[3]{2x-1} + (1+x)^3. \\ f(x) = 2^{\sqrt{x-1}}, & g(x) = \dfrac{1}{2^{x-1}} + \log_{1/4}(x^3). \end{array}$$

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \Big(\log_{1/4}(x^2-1) - \log_{1/4}(x+1)\Big)^{1/2} \sin\left(\frac{1}{x-\pi}\right).$$

$$f(x) = \log\left(\frac{x-1}{\log_{1/2}(\sin x)}\right).$$

$$f(x) = \Big(\log_{1/2}(\tfrac{1}{2}\cos^2 x)\Big)^x.$$

4) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x^3}) - 1}{x\sin x}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\arctan(\frac{1}{x^2}) + 1}{x\tan x}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^{1/2}\cos(\frac{\pi}{2}x) + 1}{(x-1)\log x}.$$

5) Sia I un intervallo aperto e sia $x_0 \in D(I)$. Si consideri $f\colon I \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$. Dire, motivando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere.

a) $f \le 2$ in I;
b) esiste $\bar{x} \in I$ per cui $f(\bar{x}) < \frac{3}{2}$;
c) f è continua in x_0.

a) $f \ge 0$ in I:
b) esiste $\bar{x} \in I$ per cui $f(\bar{x}) > \frac{1}{2}$;
c) f è continua in x_0.

6) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange.

7) Determinare gli asintoti, gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{2x}}.$$

$$f(x) = \log(x^4) - x^2.$$

$$f(x) = (1 - x)^{-\frac{1}{2}} - x.$$

8) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 4 (col resto di Peano) della funzione:

$$f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{2}}.$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}.$$

$$f(x) = \sin(\arctan x).$$

9) Dire, motivando la risposta, se la funzione

$$G(x) = \int_{\pi \cosh x}^{0} s \cos(s^2) \sin(s^2) \mathrm{ds}$$

$$G(x) = \int_{\sinh x}^{-1} \frac{\arctan s}{1 + s^2} \mathrm{ds}$$

è derivabile in 0. Determinare, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di G nel punto $(0, G(0))$.

A.A 2005/2006 Esercizi delle tracce assegnate alle prove del 22 Dicembre 2005

1) Disegnare, partendo dalla conoscenza dei grafici delle funzioni elementari, i grafici delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 1 - |x|; \qquad g(x) = \log_{10}(10 - x).$$
$$f(x) = x + |x|; \qquad g(x) = \frac{1}{2^{1-x}}.$$
$$f(x) = |2x| - 1; \qquad g(x) = 3^{3-x}.$$
$$f(x) = |x| - 2x; \qquad g(x) = \mathrm{tg}(\pi + x) - \pi.$$

2) Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \frac{x - 2x^3}{\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt[4]{(x-2)(x+1)}}.$$
$$f(x) = \left(\frac{x^2 - x + 1}{\sqrt[3]{4} - x}\right)^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^{\log_2 x}.$$
$$f(x) = x^x \log(\sin^2 x - 1).$$

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^-} (\mathrm{tg}(-x))^{2x}.$$
$$\lim_{x \to 0^+} (\sin(x/2))^{3x}.$$
$$\lim_{x \to +\infty} (\log 2x)^{\frac{1}{\log x}}.$$

4) Dimostrare che ogni successione convergente è limitata.

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona crescente. Dimostrare che $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.

5) Sia I un intervallo aperto. Dire, motivando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a) ogni funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile su I è limitata;

b) ogni funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile su I è monotona;

c) ogni funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile su I è dotata di primitiva.

Sia I un intervallo chiuso. Dire, motivando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a) ogni funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile su I è limitata;

b) ogni funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile su I è monotona;

c) ogni funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile su I ha derivata continua.

6) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 4 (col resto di Peano) della funzione:

$$f(x) = \log(1 + 2\sin x).$$
$$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$
$$f(x) = \mathrm{e}^{\arctan(3x)}.$$

7) Determinare una primitiva, espressa mediante funzioni elementari, della funzione

$$f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}.$$
$$f(x) = x^2 \cos(x^3)\, \mathrm{e}^{x^3}.$$
$$f(x) = \frac{2}{2\sqrt{x} + 1}.$$

8) Scrivere in forma cartesiana il numero complesso

$$\mathrm{e}^{i\pi}\, \frac{2+i}{1-i}.$$
$$\mathrm{e}^{-i\pi}\, \frac{1+2i}{2-i}.$$
$$\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\, \frac{1}{1-i}.$$

A.A 2005/2006 Esercizi delle tracce assegnate alle prove del 14 Febbraio 2005

[1-1.tex] A partire dalla conoscenza dei grafici delle funzioni elementari, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \log_4(e - x); \qquad g(x) = \frac{1}{2^x} + 1; \qquad h(x) = |x^3| - 1.$$

[1-2.tex] A partire dalla conoscenza dei grafici delle funzioni elementari, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\log_{1/2}(e + x); \qquad g(x) = \frac{1}{4^x} - 1; \qquad h(x) = |\arcsin x| + 1.$$

[2-1.tex] Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \arcsin \frac{2x - 1}{4 - x^2}.$$

[2-2.tex] Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x \log x}{2x^2 - x - 1}}.$$

[3-1.tex] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{2^x - 3^x + 1}{\log x}.$$

[3-2.tex] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log_2(x^2) - \log_2 x + 1}{e^{1/x}}.$$

[4-1.tex] Scrivere la definizione di primitiva di una funzione. Dimostrare, poi, che la differenza di due primitive di una funzione, definita su un intervallo, è costante.

[4-2.tex] Scrivere la definizione di funzione strettamente decrescente. Dimostrare, poi, che se $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è strettamente decrescente e derivabile allora $f'(x) \leq 0$, per ogni $x \in (a, b)$.

[5-1.tex] Stabilire, motivando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l;$

b) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} |f(x)| = l > 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l;$

c) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \Longrightarrow f$ e g assumono gli stessi valori in un intorno di x_0.

[5-2.tex] Stabilire, motivando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l;$

b) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0 \Longrightarrow f > g$ in un intorno di x_0;

c) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f^2(x) = l > 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \sqrt{l}.$

[6-1.tex] Usare la formula di MacLaurin per provare il “limite notevole”:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

[6-2.tex] Usare la formula di MacLaurin per provare il “limite notevole”:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

[7-1.tex] Stabilire se la seguente funzione è invertibile e, in caso affermativo, calcolare, se esiste, la derivata della funzione inversa nel punto $y_0 = 1$:

$$f(x) = 2\log(x^{1/2}) + \sqrt[3]{x}.$$

[7-2.tex] Stabilire se la seguente funzione è invertibile e, in caso affermativo, calcolare, se esiste, la derivata della funzione inversa nel punto $y_0 = 1$:

$$f(x) = e^{-2x} - \arctan x.$$

[8-1.tex] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx.$$

[8-2.tex] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-3}^{-2} \frac{x^3+2}{x^2-1} dx.$$

A.A 2005/2006 traccia tipo dell'appello del 3 Aprile 2005

1) Dare la definizione di funzione iniettiva. Dire, motivando le risposte, quale delle funzioni seguenti sono surgettive:

1. la funzione $x \mapsto \log_2 x$ da $]0, +\infty[$ in $]-\infty, +\infty[$;
2. la funzione $x \mapsto x^3 + x + 1$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$;
3. la funzione $x \mapsto 6 - 3x^2$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$;

2) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{\sqrt{x^2 - 9x + 14} + 8 - x} - \log(x^5 - 5\,x^3 + 4\,x)$$

3) Scrivere la definizione di successione convergente. Dire, motivando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(**Nota.** Possono esser tutte vere, solo alcune, o anche nessuna.)

1. Ogni successione limitata è convergente.
2. Ogni successione positiva è limitata.
3. Ogni successione negativa e crescente è convergente.
4. Ogni successione crescente è inferiormente limitata.

4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x - x^2}{3^x + \arctan(x^3)} \qquad\qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan(3\,x^3)}{x\cos(5\,x) - x}.$$

5) Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile. Dire quale delle seguenti affermazioni sono vere, e, in caso affermativo, dimostrarle:

- se f è crescente allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$;
- se f è strettamente crescente allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$;
- se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ allora f è crescente;
- se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$ allora f è strettamente crescente.

6) Calcolare gli asintoti, i massimi e minini della funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}}.$$

7) Calcolare gli integrali:

$$\int_1^{(e-1)^2} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + x}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{3}{2x^2 - 10x - 3}\mathrm{d}x.$$

8) Siano $z = 1 - i$ e $w = i\sqrt{3} + 1$. Calcolare modulo e argomento di z, w e $\frac{z^4}{w^2}$.

A.A 2005/2006 tracce dell'appello del 26 Maggio 2006

1) Disegnare, partendo dalla conoscenza dei grafici delle funzioni elementari, i i grafici delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 2(1-x), \qquad f(x) = \log_3(3-x),$$
$$f(x) = 2|x|-1, \qquad f(x) = (x-1)^{\sqrt{2}}.$$
$$f(x) = 2(4-x), \qquad f(x) = \log_{1/2}(1-x),$$
$$f(x) = x|x|, \qquad f(x) = (x-2)^{1/\sqrt{2}}.$$

2) Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = (2x-2)^{-\frac{1}{10}} + \left(x \log\left(\frac{x-2}{x+1}\right) - 1\right)^{10}.$$
$$f(x) = (\log\left[(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right] + \left(e^{\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}} - 1\right)^8.$$

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} 2(x-1)^{1/3}\log(x^2-2x+1).$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6^{-x}x^4-1}{\log\frac{1}{x}}.$$
$$\lim_{x\to 2}(x-2)^{1/2}\log(x^2-4x+4).$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x x^3+2}{\log\frac{1}{|x|}}.$$

4) Sia I un intervallo aperto e sia f una funzione reale definita su I. Dire, motivando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a) se f continua in x_0 allora f è derivabile in x_0;

b) se f è derivabile a destra in x_0 allora f è continua in x_0;

c) se f è derivabile in I allora f è limitata;

d) se f è derivabile in x_0 allora f è limitata in un intorno di x_0.

5) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 4 (col resto di Peano) della funzione

$$f(x) = \log(1+\sin^2 x).$$
$$f(x) = e^{1-\cos x}.$$

6) Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Si risponda alle seguenti domande, motivando le proprie affermazioni:

i) se $2 \le f \le 4$ può essere $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5$?

ii) Può essere $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ senza che f abbia zeri in $[0,1]$? e se f è continua?

7) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sin x\cos x}\mathrm{d}x.$$
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos 2x}\mathrm{d}x.$$

8) Risolvere nel campo dei numeri complessi la seguente equazione:

$$z^5 + 4iz = 0.$$
$$z^5 - 16iz = 0.$$
$$z^6 + 16iz^2 = 0.$$

A.A 2005/2006 tracce dell'appello del 17 Luglio 2006

1) Dare le definizioni di funzione limitata, funzione limitata inferiormente, funzione limitata superiormente, funzione dotata di minimo assoluto e funzione dotata di massimo assoluto.

Fornire inoltre un esempio, possibilmente fra le funzioni elementari, di:

1. una funzione limitata inferiormente e non dotata di minimo;
2. una funzione limitata superiormente e non dotata di massimo;
3. una funzione illimitata inferiormente;
4. una funzione illimitata superiormente;
5. una funzione dotata di massimo (assoluto);
6. una funzione dotata di minimo (assoluto).

2) Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \frac{x+2}{\log_3(x^2-x)} + \frac{2^{\sqrt{5-x}}}{x+2}$$
$$f(x) = \frac{x+3}{\log_2(x^2+x)} - \frac{3^{\sqrt{5+x}}}{2-x}$$
$$f(x) = \frac{2x+1}{\log_3(x^2-x)} - \frac{3^{\sqrt{5-x}}}{x+2}$$
$$f(x) = \frac{x+1}{\log_2(x^2+x)} + \frac{2^{\sqrt{5+x}}}{2-x}$$
$$f(x) = \frac{x-2}{\log_2(x^2-x)} + \frac{3^{\sqrt{5-x}}}{x+2}$$

3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)} - \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)} - \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}}{\operatorname{sen}^2(x)}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\cdot 2^x + \operatorname{sen}(x^3+2\,x)}{2\cdot 3^x - \arccos(e^{-x})}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\cdot 2^x + \cos(x^4-3\,x)}{2\cdot 3^x + \arccos(2\,e^{-x})}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\cdot 2^x + \operatorname{sen}(x^3+2\,x)}{2\cdot 3^x - \operatorname{arcsen}(e^{-x})}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\cdot 2^x + \cos(x^2+3\,x)}{2\cdot 3^x + \operatorname{arcsen}(3\,e^{-x})}$$

4) Enunciare il **Teorema di Rolle**. Dire, motivando le risposte, quali delle seguenti funzioni verificano le ipotesi del Teorema di Rolle negli intervalli precisati a fianco:

1. $f(x) = \log x + x^3 - 2\,x^2 - 9\,x$, in $[2,3]$;
2. $f(x) = |x|$, in $[-1,1]$;
3. $f(x) = |x| - x$, in $[0,1]$;
4. $f(x) = 3\,x^4 - 2x^2 + x - 3 + 3^{\cos(\pi\,x)}$, in $[0,1]$;

5) Calcolare gli eventuali asintoti, i massimi e minimi (relativi e assoluti) della funzione:

$$f(x) = \log\Big(\frac{2-x}{x^2}\Big),$$
$$f(x) = \log\Big(\frac{2x-1}{x^2}\Big).$$

6) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dare la definizione di **primitiva** di f.

Si risponda alle seguenti domande, **motivando le proprie affermazioni**:

1. se f è integrabile in $[a,b]$, allora f ammette infinite primitive;
2. se f è derivabile in $[a,b]$, allora f ammette almeno una primitiva;
3. se f è continua in $[a,b]$, allora esiste un'unica primitiva F di f tale che $F(b) = 0$;
4. se g è la derivata di f e h è una primitiva di g, allora $f = h$.

7) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^1 \frac{2\,x^2 + x - 1}{2\,x^2 - 2\,x + 1}\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^1 \frac{2\,x^2 - x - 1}{2\,x^2 - 2\,x + 1}\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^1 \frac{2\,x^2 + x - 1}{2\,x^2 + 2\,x + 1}\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^1 \arctan\big(\sqrt{1-x}\big)\mathrm{d}x,$$
$$\int_2^3 \arctan\big(\sqrt{x-2}\big)\mathrm{d}x.$$

8) Trovare modulo e argomento delle radici quarte del numero complesso

$$\big(1 - i\sqrt{3}\big)^2,$$
$$\big(i\sqrt{3} - 1\big)^2,$$
$$\big(1 - i\sqrt{3}\big)^2.$$

A.A 2005/2006 Appello del 19 Settembre 2006 Traccia A

1) Disegnare, partendo dalla conoscenza dei grafici delle funzioni elementari, i grafici delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 2^{1-x}, \qquad f(x) = |x| - x, \qquad f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, \qquad f(x) = 1 + \frac{1}{x},$$

2) Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$\log \left(\frac{\sqrt[4]{\sqrt{x - 2\pi} - \sqrt{x - 3\pi}}}{\log_2 \left(\frac{1}{\cos x} \right)} \right)$$

3) Calcolare il seguente limite, scrivendo esplicitamente i passaggi necessari per pervenire al risultato:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^2) - 2x^2}{x \cos x}$$

4) Sia I un intervallo aperto e sia f una funzione reale definita su I e continua. Siano inolre x_1 e x_2 due numeri reali appartenenti ad I con $x_1 < x_2$. Dire, motivando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a) se $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) > 0$ allora non esiste alcuno zero di f in I;

b) se $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$ allora esiste uno ed un solo zero di f nell'intervallo (x_1, x_2);

c) se $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$ allora esiste almeno uno zero di f in I;

d) se $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) < 0$ gli eventuali zeri di f sono strettamente maggiori di x_2.

5) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - \log x}{x}$$

Se ne determinino le equazioni degli asintoti e della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$.

6) Determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{(1 - x^2)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}}.$$

7) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(2 - x)^3} \mathrm{d}x.$$

8) Determinare parte immaginaria, coniugato e modulo del numero complesso

$$\frac{2 - i}{2e^{\frac{\pi}{2} i}}.$$