Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica

Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2016/2017 II esonero – I chance 19 gennaio 2017 Traccia A

Cognome____________________ Nome____________________ N° Matricola____________________

1) Dare la definizione di forma differenziale esatta e di forma differenziale chiusa. Dimostrare, poi, che la forma differenziale $\omega = \frac{4y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{4x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ è chiusa ma non è estta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

7 pts.

2) Quanto valgono i seguenti integrali? Motivare la risposta:

(a) $\displaystyle\int_{\partial^- Q} z^2 \mathrm{d}z,$ dove Q è il quadrato di vertici $0, 1, 1+i, i$;

(b) $\displaystyle i\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2e^{it})}{4e^{2it}}\mathrm{d}t.$

7 pts.

3) Quali sono i residui in 1 delle seguenti funzioni:

(a) $\displaystyle f(z) = \frac{\pi}{z-1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \cos z;$

(b) $\displaystyle g(z) = \frac{\pi}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \cos z;$

(c) $h(z) = (z-1)^4 e^{1/(z-1)}.$

6 pts.

4) Sia $\displaystyle f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^8}$. Dimostrare che $\mathrm{Res}(f; i) = -\mathrm{Res}(f; -i)$.

7 pts.

5) sapendo che $\displaystyle\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-4}{k\pi}\sin(k\pi x)$ è la serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0,2]$, calcolare $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^4\pi^4} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right)$. Quali fra le seguenti serie non sono sicuramente la serie di soli coseni di f? Motivare la risposta:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(1)} \cos(k\pi x/2);$

(b) $\displaystyle\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(2)} \cos(k\pi x);$

(c) $\displaystyle\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(3)} \cos(k\pi x/2).$

8 pts.