1)-a) Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$ esprimendo le soluzioni in forma esponenziale

$$z^6+2e^{-i\pi/3}z=0$$

Mettendo in evidenza z otteniamo

$$z(z^5+2e^{-i\pi/3})=0$$ le cui soluzioni sono

$$z=0 \quad e \quad z=\sqrt[5]{-2e^{-i\pi/3}}.$$

Naturalmente la forma esponenziale di 0 è 0, mentre

$$\sqrt[5]{-2e^{-i\pi/3}} = \sqrt[5]{2\cdot e^{-i\pi}\cdot e^{-i\pi/3}} = 2^{\frac{1}{5}}e^{-i\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{2\pi k}{5}\right)}, \quad k=0,1,2,3,4$$

b) Determinare insieme di definizione e monotonia e immagine della funzione

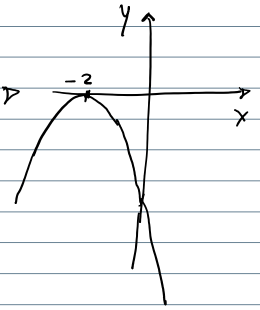
$$f(x) = e^{-(x+2)^2}\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\mathrm{dom} f = (0,+\infty)$$

f è prodotto delle funzioni positive

$$f_1(x) = e^{-(x+2)^2} \quad e \quad f_2(x)=\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$f_1(x) = x\in(0,+\infty)\mapsto -(x+2)^2 \mapsto e^{-(x+2)^2}$$



poiché la funzione $y(x)=-(x+2)^2$ ha grafico

vediamo che per $x>0$ è strettamente **decrescente**;

quindi f_1 è strett. decrescente su $(0,+\infty)$ in

quanto composta da una funzione strett. decrescente e

una strett. crescente ($y=e^x$, all'esterno)

f_2 è anch'essa composta da una funzione strett. decrescente

su $(0,+\infty)$ (cioè $x\in(0,+\infty)\mapsto \frac{1}{x}$) e una strett. crescente

(cioè $x\in[0,+\infty)\mapsto\sqrt{x}$) e dunque è strett. decrescente.

f in quanto prodotto di due funzioni positive strett. decrescenti

è strett. decrescente. Poiché f è continua, abbiamo

dunque anche che $\mathrm{im} f = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)\right) = (0,+\infty)$

2) Determinare il dominio e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{arctg}(\cos^3 x) - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+\pi^{\frac{1}{3}}}$$

Stabilire che f è derivabile in π e scrivere l'equazione della retta tg al suo grafico nel punto $(\pi, f(\pi))$

dom f: $x^{\frac{1}{3}} + \pi^{\frac{1}{3}} \neq 0$ cioè $x \neq -\pi$; dom $f = (-\infty, -\pi) \cup (-\pi, +\infty)$

$f \in C^0(\text{dom} f)$ quindi dobbiamo solo stabilire se f ha asintoti verticali in $x = -\pi$ e asintoti orizzontali ed eventualmente obliqui per $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(\cos^3 \pi) + \pi^{\frac{1}{3}}}{0^+} = \frac{-\frac{\pi}{4} + \pi^{\frac{1}{3}}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\pi^-} f(x) = \frac{-\frac{\pi}{4} + \pi^{\frac{1}{3}}}{0^-} = -\infty$$

quindi la retta $x = -\pi$ è asintoto verticale sia a dx che a sx per f.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\cos^3 x)}{x^{\frac{1}{3}}} - 1\right)}{\cancel{x^{\frac{1}{3}}}\left(1 + \left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

quindi la retta $y = -1$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\cos^3 x)}{x^{\frac{1}{3}}} - 1\right)}{\cancel{x^{\frac{1}{3}}}\left(1 + \left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

quindi la retta $y = -1$ è anche asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

Poiché f è il quoziente di funzioni derivabili su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (si ricordi che $y = x^{\frac{1}{3}}$ non è derivabile in $x = 0$) f è derivabile in $x = \pi$;

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+\cos^6 x} 3\cos^2 x(-\sin x) - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + \pi^{\frac{1}{3}}\right) - \left(\operatorname{arctg}(\cos^3 x) - x^{\frac{1}{3}}\right)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} + \pi^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$

$$f'(\pi) = \left(0 - \frac{1}{3}\pi^{-\frac{2}{3}}\right) 2\pi^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{\pi}{4} - \pi^{\frac{1}{3}}\right)\frac{1}{3}\pi^{-\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{2}{3}\pi^{-\frac{1}{3}} + \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{12} + \frac{\pi^{-\frac{1}{3}}}{3} = \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{12} - \frac{\pi^{-\frac{1}{3}}}{3}$$

$f(\pi) = \dfrac{-\frac{\pi}{4} - \pi^{\frac{1}{3}}}{2\pi^{\frac{1}{3}}}$. Quindi l'equazione della retta tg richiesta è

$$y = -\frac{\pi + 4\pi^{\frac{1}{3}}}{8\pi^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{12} - \frac{\pi^{-\frac{1}{3}}}{3}\right)(x - \pi)$$

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \sin x}{\cos x + 1}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \sin x}{\cos x + 1}\, dx$$

Posto $\cos x = t$, $dt = -\sin x\, dx$ e quindi per sostituzione l'integrale assegnato è uguale a

$$-\int_1^{\frac{\sqrt2}{2}} \frac{t}{t+1}\, dt = \int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 1 - \frac{\sqrt2}{2} - \log(t+1)\Big|_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1} = \frac{1-\sqrt2}{2} - \log\frac{4}{2+\sqrt2}$$

4) Ennunciare e dimostrare la formula di Taylor di ordine n col resto di Peano

Usare la formula di Maclaurin di e^x per dimostrare che $e^{-x^2/2} - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)$ $(\square)$

Per enunciato e dimostrazione si veda la lezione 24

Poiché $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

sostituendo x con $-\dfrac{x^2}{2}$ otteniamo

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$ da cui segue $(\square)$