

Cognome_____Nome_____N° Matricola_____

- 1) (a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

- (b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2 \log^3 n + 1}.$$

7 pts.

- 2) Stabilire quale sia l'insieme su cui la funzione $f(x, y) = (x - y^2)^2 x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, è differenziabile, motivando la risposta. Calcolare poi $\frac{\partial f}{\partial v}(-1, -1)$, dove v è il versore di componenti $(\cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta})$, con $\bar{\theta} = \pi + \frac{\pi}{3}$.

Determinare infine i punti critici di f e studiarne la natura.

9 pts.

- 3) Determinare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (x - 1)y + e^{\frac{x^2}{2}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

7 pts.

- 4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \log(x + y) x \, dx dy,$$

dove A è l'insieme definito da

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1 < x + y < 2\}.$$

7 pts.