1) - a)

Determinare la forma esponenziale del numero complesso

$$\left(-\frac{3^{2/7}}{2}+3^{2/7}\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^7$$

$$\left(-\frac{3^{2/7}}{2}+3^{2/7}\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7=\left(3^{2/7}\right)^7\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7$$

Poiché $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{\frac{2}{3}\pi i}$

$$\left(3^{2/7}\right)^7\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7=3^2\cdot\left(e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^7=9\,e^{\frac{14}{3}\pi i}=9\,e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

b) Determinare il dominio e l'immagine delle funzioni

$f(x)=\arcsin(x^3-1)$; $g(x)=\sinh\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)$

f: dato che la funzione $y=\arcsin x$ è definita su $[-1,1]$

deve essere $\begin{cases}x^3-1\geq -1\\ x^3-1\leq 1\end{cases}$ $\begin{cases}x^3\geq 0\\ x^3\leq 2\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 0\\ x\leq\sqrt[3]{2}\end{cases}$

Quindi $\operatorname{dom}f=[0,\sqrt[3]{2}]$

f è una funzione strettamente crescente in quanto composta da funzioni strettamente crescenti inoltre è continua quindi

$\operatorname{Im}f=\left[f(0),f(\sqrt[3]{2})\right]=\left[\arcsin(-1),\arcsin 1\right]=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

g: la funzione $y=\sinh x$ è definita su $\mathbb{R}$, quindi $\operatorname{dom}g$ è uguale al dominio della funzione $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, cioè $(0,+\infty)$

Anche g è composta da due funzioni monotone

$x\in(0,+\infty)\mapsto\log_{\frac{1}{2}}x$ strett. decrescente e

$x\in\mathbb{R}\mapsto\sinh x$ strett. crescente

Quindi g è strettamente decrescente. Essendo composta da funzioni continue, è continua e dunque $\operatorname{Im}g=\left(\lim_{x\to+\infty}g(x),\lim_{x\to 0^+}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

2) Determinare dominio e asintoti della funzione

$$f(x)=\frac{x^8-x-2}{(x-1)(x+1)^2}$$

Stabilire, poi, il numero di zeri reali di f.

$\operatorname{dom}f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. f è continua nel suo dominio dato che è una funzione razionale. Gli unici asintoti verticali sono quindi da cercare nei punti -1 e 1 dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. f è continua nel suo dominio dato che è una funzione razionale. Gli unici asintoti verticali sono quindi da cercare nei punti -1 e 1.

$\lim_{x \to 1^+} f(x)$: il numeratore tende a -2 il denominatore tende a 0^+ dato che $x-1>0$ se $x \to 1^+$ e $(x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; quindi $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

e la retta $x = 1$ è asintoto verticale a destra

Analogamente $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ dato che il numeratore tende a 0^-

e la retta $x = 1$ è anche asintoto verticale a sinistra

$\lim_{x \to -1} f(x)$: il numeratore tende a 0 e anche il denominatore

Possiamo applicare il teorema di de L'Hopital

$$\lim_{x \to -1} \frac{8x^7 - 1}{(x+1)^2 + 2(x+1)(x-1)} = \left[\frac{-9}{0} \right]$$

Studiamo il segno del denominatore: $(x+1)^2 + 2(x+1)(x-1) > 0$

$\iff (x+1)(x+1+2x-2) = (x+1)(3x-1)$

Quindi il denominatore assume valori positivi in un intorno sinistro di -1 e negativi su un intorno destro, pertanto

$$+\infty = \lim_{x \to -1^+} \frac{8x^7 - 1}{(x+1)^2 + 2(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1^+} f(x) \quad \text{e}$$

$$-\infty = \lim_{x \to -1^-} \frac{8x^7 - 1}{(x+1)^2 + 2(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1^-} f(x)$$

quindi la retta $x = -1$ è asintoto verticale sia a dx che a sx.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^8}{x^3} = +\infty$ non c'è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^8}{x^4} = +\infty$ " " " obliquo " "

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^8}{x^3} = -\infty$ " " " orizzontale " $x \to -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^8}{x^4} = +\infty$ " " " obliquo " "

Gli zeri di f sono gli zeri del polinomio $p(x) = x^8 - x - 2$ al numeratore

poiché $p(0) = -2$ e $\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = +\infty$, per il teorema degli zeri

delle funzioni continue p ha almeno uno zero x_1 in $(0, +\infty)$ e almeno uno x_2 in $(-\infty, 0)$

Cerchiamo di capire se ci sono altri zeri reali.

$p'(x) = 8x^7 - 1$; $p'(x) > 0 \iff x > \frac{1}{\sqrt[7]{8}}$

Quindi p è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[7]{8}}\right)$

e strettamente crescente su $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{8}}, +\infty\right)$ da cui deduciamo che

x_1 e x_2 sono gli unici zeri di p e dunque di f.

Basta osservare che $x_0 = \frac{1}{\sqrt[7]{8}}$ è un minimo assoluto di p e

$p\left(\frac{1}{\sqrt[7]{8}}\right) < p(0) < 0$; pertanto $x_1 \in \left(\frac{1}{\sqrt[7]{8}}, +\infty\right)$

dove p è strettamente crescente e $x_2 \in (-\infty, 0) \subset \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[7]{8}}\right)$

dove p è strettamente decrescente

3) Calcolare

$$\int_1^e \frac{x+1}{x(\log x + x)}\, dx$$

Esiste $\bar{x} \in (1, e)$ tale che $\frac{\bar{x}+1}{\bar{x}(\log \bar{x} + \bar{x})} = \frac{\log(1+e)}{e-1}$? Giustificare la risposta.

Posto $\log x + x = t$, $dt = \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = \frac{1+x}{x}\, dx$

abbiamo $$\int_1^{1+e} \frac{1}{t}\, dt = \log t \Big|_1^{1+e} = \log(1+e)$$

Dato che la media integrale su $[1, e]$ della funzione integranda è

dunque $\frac{\log(1+e)}{e-1}$ e la funzione integranda è continua, $\bar{x}$ esiste

per il teorema della media integrale per le funzioni continue

4) Dare la definizione di funzione avente limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Enunciare e dimostrare il teorema del doppio confronto per l'esistenza del limite di una funzione

Per la definizione si veda p. 82 del manuale. Per enunciato e dimostrazione, si vedano le pagg. 88 e 89 del manuale