1) - a) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right]\sqrt{n}\right)^{2n}$$

Osserviamo che $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{4}}>1 \quad \forall n\geq 1$, quindi la serie assegnata è a termini positivi

Possiamo applicare il criterio della radice

$$\left(\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right]\sqrt{n}\right)^{2n/n}=\left(\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{4}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^{2}$$

Ricordando che $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{x}=\frac{1}{4}$, otteniamo

che

$$\left(\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{4}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^{2}\longrightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{1}{16}<1$$

e quindi la serie converge

b) Determinare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

La serie assegnata è uguale a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}=\left(-\frac{2}{3}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$=-\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}=$$

$$=-\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=-\left(\frac{2}{3}\right)\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$$

2) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y)=e^{x}\left(xy-(x-y)^{2}\right)$$

e studiarne la natura

$f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2})$, $f(x,y)=e^{x}\left(-x^{2}-y^{2}+3xy\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{x}\left(3xy-x^{2}-y^{2}\right)+e^{x}\left(-2x+3y\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x}\left(-2y+3x\right)$$

$$\begin{cases} e^{x}\left(3xy-x^{2}-y^{2}-2x+3y\right)=0\\ e^{x}\left(-2y+3x\right)=0\end{cases}\iff$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ \frac{9}{2}x^2 - x^2 - \frac{9}{4}x^2 - 2x + \frac{9}{2}x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ \frac{5}{2}x\left(\frac{x}{2}+1\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

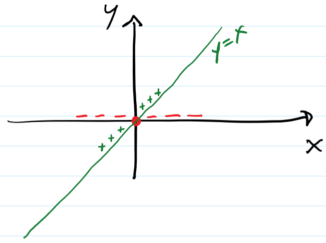
f ha dunque due punti critici $O(0,0)$ e $P(-2,-3)$

$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$$

Osserviamo che per $y=0$ $f(x,0) = -x^2 \leq 0$

mentre sulla retta $y=x$, $f(x,x) = -x^2-x^2+3x^2 = x^2 \geq 0$

quindi O è un punto di sella



Nel punto $P(2,3)$ applichiamo il metodo della matrice Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x(3xy - x^2 - y^2 - 2x + 3y) + e^x(3y - 2x - 2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = e^x(-2y+3x) + 3e^x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2e^x$$

$$H_f(-2,-3) = \begin{pmatrix} -7e^{-2} & 3e^{-2} \\ 3e^{-2} & -2e^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(-2,-3) = 14e^{-2} - 9e^{-2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-3) = -7e^{-2} < 0$$

quindi P è di max locale forte

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos(2x) + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

l'eq. omogenea associata $y''+4y=0$ ha eq. caratteristica

$\lambda^2+4=0$ che ha soluzioni $\lambda = \pm 2i$. Il suo integrale generale è quindi

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa con il metodo di similarità. Possiamo suddividere il termine noto

$f(x) = \cos(2x) + 1$ nella somma di $f_1(x) = \cos(2x)$ e $f_2(x) = 1$

$y'' + 4y = 1$ ha ovviamente soluzione $y \equiv \frac{1}{4}$

e^{0x}

Consideriamo ora $y'' + 4y = \cos(2x)$;
poiché $2i$ è soluzione dell'eq. caratteristica
cerchiamo una soluzione del tipo

$$\tilde{y}(x) = x\left(k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)\right)$$

$$\tilde{y}'(x) = k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x) + x\left(-2k_1 \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x)\right)$$
$$= \cos(2x)\left[k_1 + 2k_2 x\right] + \sin(2x)\left[k_2 - 2k_1 x\right]$$

$$\tilde{y}''(x) = -2\sin(2x)\left[k_1 + 2k_2 x\right] + \cos(2x)\left[2k_2\right]$$
$$+ 2\cos(2x)\left[k_2 - 2k_1 x\right] + \sin(2x)\left[-2k_1\right]$$
$$= -4k_2 x \sin(2x) - 4k_1 \sin(2x) + 4k_2 \cos(2x) - 4k_1 x \cos(2x)$$

Imponendo che $\tilde{y}$ risolve l'eq. completa otteniamo

$$-\cancel{4k_2 x \sin(2x)} - 4k_1 \sin(2x) + 4k_2 \cos(2x) - \cancel{4k_1 x \cos(2x)} + \cancel{4k_1 x \cos(2x)} + \cancel{4k_2 x \sin(2x)} = \cos(2x)$$

da cui

$$\begin{cases} -4k_1 = 0 \\ 4k_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\tilde{y}(x) = \frac{x}{4}\sin(2x)$$

L'integrale generale dell'eq. assegnata è quindi

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}\left(x \sin 2x + 1\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo la soluzione del problema di Cauchy

$y(0) = c_1 + \frac{1}{4} = 0$ da cui $c_1 = -\frac{1}{4}$

Quindi $y'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 2c_2 \cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x)$

Quindi $y'(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + 2c_2\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x)$

$0 = y'(0) = 2c_2$ da cui $c_2 = 0$.

La soluzione è quindi

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(x\sin(2x) - \cos(2x) + 1 \right)$$

4) Dare la definizione di insieme compatto in $\mathbb{R}^n$.
Enunciare e dimostrare poi il teorema di Weierstrass per una funzione continua su K compatto di $\mathbb{R}^n$.

Per la definizione, si veda ad esempio la lezione 34; per enunciato e dimostrazione, la lezione 35.