1) Studiare il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^3}{x^{9/2}} \operatorname{arctg}(x^6)\, dx$$

la funzione integranda è continua in $(0,+\infty)$ quindi è integrabile in ogni intervallo del tipo $[a,b] \subset (0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^3}{x^{9/2}} \operatorname{arctg}(x^6) = \lim_{x\to 0^+} (1+x^3)\, \frac{\operatorname{arctg}(x^6)}{x^6} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

quindi l'integranda è limitata in un intorno destro di 0 e dunque integrabile in $[0,b]$ con $b>0$

$$\frac{1+x^3}{x^{9/2}} \operatorname{arctg}(x^6) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{9/2-3}} \quad \text{per } x \to +\infty$$

poiché $\frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} > 1$ e la funzione $g(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{3/2}}$

è integrabile su $[b,+\infty)$, anche la funzione $\frac{1+x^3}{x^{9/2}} \operatorname{artg}(x^6)$ è ivi integrabile.

Come conseguenza l'integrale assegnato è convergente.

2) Si consideri la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y) = \left(e^{-x^2+y}(x+y),\ x+y,\ \sin(\pi x y) \right)$$

Si stabilisca se è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ e si determini la sua matrice Jacobiana nel punto $(-1,1)$

Si consideri poi la sua prima componente.

Se ne determinino i punti stazionari e se ne studi la natura

F ha componenti di classe C^∞ ($F_1(x,y) = e^{-x^2+y}(x+y)$ è il prodotto di un polinomio con la funzione composta dall'esponenziale di base e un polinomio, quindi è di classe C^∞, $F_2(x,y) = x+y$ è un polinomio, $F_3(x,y) = \sin(\pi x y)$ è composta da un polinomio e dalla funzione seno quindi è anch'essa di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$)

quindi è differenziabile $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-x^2+y}(-2x)(x+y) + e^{-x^2+y} & e^{-x^2+y}(x+y) + e^{-x^2+y} \\ 1 & 1 \\ \pi y \cos(\pi x y) & \pi x \cos(\pi x y) \end{pmatrix}$$

Quindi $J_F(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -\pi & \pi \end{pmatrix}$

Cerchiamo i punti stazionari di F_1

$$\begin{cases} e^{-x^2+y}\left[-2x(x+y)+1\right] = 0 \\ e^{-x^2+y}\left[x+y+1\right] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x(x+y)+1 = 0 \\ x+y+1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = -1 \\ 2x+1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

l'unico punto stazionario è $P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$H_{F_1}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x^2+y}(-2x)(-2x(x+y)+1) + e^{-x^2+y}(-4x-2y) & e^{-x^2+y}(-2x)(x+y+1) + e^{-x^2+y} \\ e^{-x^2+y}(-2x)(x+y+1) + e^{-x^2+y} & e^{-x^2+y}(x+y+1) + e^{-x^2+y} \end{pmatrix}$$

$$H_F(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \Big(\; e^{\frac{1}{4}} \cdot 1 \cdot 1 + e^{\frac{1}{4}}(2-1) \qquad e^{\frac{1}{4}} \cdot 1 \cdot 1 + e^{\frac{1}{4}} \; \Big)$$

$$H_{F_1}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{4}}\cdot 1\cdot 1 + e^{\frac{1}{4}}(2-1) & e^{\frac{1}{4}}\cdot 1\cdot 1 + e^{\frac{1}{4}} \\ 2e^{\frac{1}{4}} & e^{\frac{1}{4}}\cdot 1 + e^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{\frac{1}{4}} & 2e^{\frac{1}{4}} \\ 2e^{\frac{1}{4}} & 2e^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$

Quindi

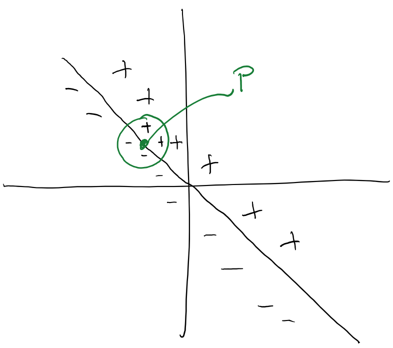
$\det H_{F_1}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0$ e non possiamo stabilire la natura di $P\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ col "metodo dell'Hessiano".

$$F_1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}\cdot 0 = 0$$

Quindi $F_1(x,y) - F_1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = F_1(x,y) = e^{-x^2+y}(x+y)$

Il segno di $F_1(x,y)$ è uguale al segno di $g(x,y) = x+y$

Poiché $y+x>0$ se $y>-x$ in ogni intorno di P



esistono punti in cui F_1 è positiva e punti in cui è negativa.

Pertanto P è di sella.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$P)\quad \begin{cases} y'' + 2y = \cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}t & (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica di $y''+2y=0$ è $\lambda^2+2=0$

che ha soluzioni $\lambda = \pm\sqrt{2}i$ quindi l'integrale generale dell'omogenea associata all'equazione (*) è

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare col metodo di similarità per le equazioni:

$$y'' + 2y = \cos(\sqrt{2}t)$$

Poiché $\sqrt{2}i$ è soluzione dell'equazione caratteristica cerchiamo $\tilde{y}_1(t)$ del tipo

$$\tilde{y}_1(t) = t\,(k_1 \cos(\sqrt{2}t) + k_2 \sin(\sqrt{2}t))$$

$$\tilde{y}_1'(t) = k_1 \cos(\sqrt{2}t) + k_2 \sin(\sqrt{2}t) + $$
$$- \sqrt{2}t\, k_1 \sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}t\, k_2 \cos(\sqrt{2}t)$$

$$y'' + 2y = t$$

$$\tilde{y}_2(t) = at + b$$

$\tilde{y}_2'(t) = a$, $\tilde{y}''(t) = 0$; deve quindi essere

$2at + 2b = t$ cioè $b = 0$ e $a = \frac{1}{2}$

$$\tilde{y}_1''(t) = \sqrt{2}\, k_2 \cos(\sqrt{2}t) - (k_1 + \sqrt{2}t\, k_2)\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t)$$
$$- \sqrt{2}\, k_1 \sin(\sqrt{2}t) + (k_2 - \sqrt{2}t\, k_1)\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t)$$

Deve quindi essere

$$\sqrt{2}\, k_2 \cos(\sqrt{2}t) - (k_1 + \sqrt{2}t\, k_2)\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t)$$
$$- \sqrt{2}\, k_1 \sin(\sqrt{2}t) + (k_2 - \sqrt{2}t\, k_1)\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) + 2t\,(k_1 \cos(\sqrt{2}t) + k_2 \sin(\sqrt{2}t)) = \cos(\sqrt{2}t)$$

cioè

$$2\sqrt{2}\, k_2 \cos(\sqrt{2}t) - 2\sqrt{2}\, k_1 \sin(\sqrt{2}t) = \cos(\sqrt{2}t)$$ da cui

$$k_1 = 0 \quad e \quad k_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Quindi una soluzione di (*) è $\tilde{y}(t) = \frac{t}{2\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + \frac{1}{2}t$

Tutte le soluzioni di (*) sono quindi date da

Tutte le soluzioni di (*) sono quindi date da

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t) + \frac{t}{2\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + \frac{1}{2}t$$

$y(0)=0 \iff c_1 = 0$; quindi

$$y'(t) = \sqrt{2}\, c_2 \cos(\sqrt{2}t) + \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{2}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{2}$$

$y'(0) = 0 \iff 0 = \sqrt{2}\, c_2 + \frac{1}{2}$ da cui $c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

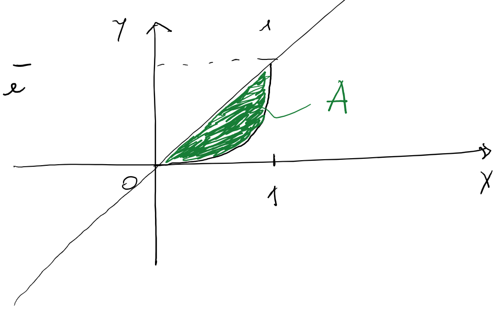
2

4) Enunciare la formula di riduzione per un dominio normale rispetto all'asse delle x e la formula di inversione

Applicare la formula di inversione all'integrale

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\, dy \right) dx \quad , \quad \text{con } f \in C^0(\mathbb{R}^2)$$

Per le formule si veda, ad esempio, la lezione 43.



L'insieme di integrazione è l'insieme A in verde qui a fianco che è normale anche rispetto all'asse delle y

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 \ , \ y \le x \le \sqrt{y} \}$ e quindi

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx \right) dy$$