Politecnico di Bari
AA 2019-2020

Corsi Unificati
Analisi Matematica
Classe C
Tracce di esame con svolgimenti

Docente: Prof. E. Caponio

A.A. 2017/2018 Prova parziale 06 novembre 2017 Traccia A

1) (a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$\left|\frac{i}{i-1}\right| e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

(b) Determinare il dominio della seguente funzione; stabilire se è monotona crescente e specificare il tipo di monotonia; motivare la risposta:

$$f(x) = \sqrt{\pi - \arccos x}.$$

8 pts.

2) Calcolare i limiti in 0, da destra, e in $+\infty$ per la funzione

$$f(x) = \frac{(\sin x)^2 - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}}.$$

Cosa si può dire riguardo ai suoi zeri nell'intervallo $(0, +\infty)$? Motivare la risposta.

8 pts.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} \mathrm{d}x.$$

6 pts.

4) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$: $D(\sin x) = \cos x$.

8 pts.

1) (a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$\left|\frac{2-i}{i}\right| e^{-\pi i}.$$

(b) Determinare il dominio della seguente funzione; stabilire se è monotona crescente e specificare il tipo di monotonia; motivare la risposta:

$$f(x) = \log\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right).$$

8 pts.

2) Calcolare i limiti in 0, da destra, e in $+\infty$ per la funzione

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x}) + \sqrt[3]{x} - x^2}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + x^2}.$$

Cosa si può dire riguardo ai suoi zeri nell'intervallo $(0, +\infty)$? Motivare la risposta.

8 pts.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^2+2}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x.$$

6 pts.

4) Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $x > 0$: $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$.

8 pts.

A.A. 2017/2018 Prova parziale 06 novembre 2017 Traccia C

1) (a) Determinare in forma cartesiana

$$\sqrt[3]{-8i}.$$

(b) Stabilire che l'insieme X seguente è limitato, ha massimo e calcolare, inoltre, l'estremo inferiore:

$$X = \left\{ \arctan \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

8 pts.

2) Determinare l'immagine della seguente funzione, determinando i suoi punti di minimo e massimo locale, la sua monotonia e i suoi asintoti:

$$f(x) = x^3 e^{-x^2} - 1.$$

8 pts.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x.$$

6 pts.

4) Dimostrare, senza usare il Teorema di de L'Hopital, né la formula di Taylor, che per ogni $a > 0$, $a \neq 1$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}.$$

8 pts.

A.A. 2017/2018 Prova parziale 06 novembre 2017 Traccia D

1) (a) Determinare in forma cartesiana
$$\sqrt[4]{-81}.$$

(b) Stabilire che l'insieme X seguente è illimitato superiormente, limitato inferiormente ed ha minimo:
$$X = \left\{ 2^{1+n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

8 pts.

2) Determinare l'immagine della seguente funzione, determinando i suoi punti di minimo e massimo locale, la sua monotonia e i suoi asintoti:
$$f(x) = x^2 e^{-|x|} + 1.$$

8 pts.

3) Calcolare il seguente integrale:
$$\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

6 pts.

4) Dimostrare, senza usare il Teorema di de L'Hopital, né la formula di Taylor, che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

8 pts.

N° punto traccia

1) a)$_1$ Determinare la forma cartesiana del numero complesso

A) $\left|\frac{i}{1-i}\right| e^{i\frac{\pi}{2}}$

B) $\left|\frac{2-i}{i}\right| e^{-\pi i}$

a)$_2$ Determinare in forma cartesiana

C) $\sqrt[3]{-8i}$

D) $\sqrt[4]{-81}$

Svolgiamo la traccia B); la traccia A) è analoga

$|i| = 1 \quad |2-i| = \sqrt{5}$ quindi

$\left|\frac{2-i}{i}\right| = \frac{|2-i|}{|i|} = \sqrt{5}$

$e^{-\pi i} = -1$ quindi

$\left|\frac{-i}{1+i}\right| e^{-\pi i} = -\sqrt{5}$

C) $\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{|-8i|} \; e^{\left(\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \frac{2\pi}{3}k\right)i} \qquad k=0,1,2$

$= \sqrt[3]{8} \; e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi k\right)i} \qquad k=0,1,2$

Quindi otteniamo le 3 radici $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $2e^{\frac{7}{6}\pi i}$, $2e^{\frac{11}{6}\pi i}$ cioè

rispettivamente, $2i$, $2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

D) $\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{|-81|} \; e^{\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{2\pi}{4}k\right)i}, \quad k=0,1,2,3$

$= 3\, e^{\left(\pi/4 + \frac{\pi}{2}k\right)i}, \quad k=0,1,2,3$

Otteniamo quindi $3e^{i\frac{\pi}{4}}$, $3e^{i\frac{3}{4}\pi}$, $3e^{i\frac{5}{4}\pi}$, $3^{i\frac{7}{4}\pi}$ cioè

rispettivamente $3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) Determinare il dominio della seguente funzione. Stabilire se è monotona e specificare il tipo di monotonia. Motivare la risposta

A) $f(x) = \sqrt{\pi - \arccos x}$

B) $f(x) = \log\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$

Stabilire che l'insieme X seguente:

C) è limitato, ha massimo, calcolare l'inf.

$X = \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \,;\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

D) è illimitato superiormente, limitato inferiormente, ha minimo

$X = \left\{ 2^{\sqrt{n+1}} : n \in \mathbb{N} \right\}$

A) Deve essere $x \in [-1,1]$ e $\pi - \arccos x \geq 0$. Poiché $0 \leq \arccos x \leq \pi$, quest'ultima disuguaglianza è soddisfatta $\forall\, x \in [-1,1]$. Quindi $\operatorname{dom} f = [-1,1]$

Poiché $y = \arccos x$ è strettamente decrescente $y = -\arccos x$ è strettamente crescente e quindi f è strettamente crescente in quanto composta da due funzioni strettamente crescenti

B) è analogo salvo che f è strettamente decrescente in quanto composta da una funzione strettamente crescente $y = \log x$ e una strettamente decrescente $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Il suo dominio è $\mathbb{R}$.

C) X coincide con l'immagine della successione $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$;

poiché $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\quad 0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$

X è limitato. La successione $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ è strettamente decrescente in quanto composta da una successione strettamente decrescente $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ e una funzione strett. crescente $y = \operatorname{arctg} x$. Quindi $\max\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

e $\inf\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right) = \lim \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = 0$

D) Analogamente: $2^{\sqrt{n+1}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ quindi $\left(2^{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata inferiormente. Inoltre $\left(2^{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente in quanto composta della successione $(\sqrt{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ e della funzione $y = 2^x$ entrambe strettamente crescenti. Quindi $\min\left(2^{\sqrt{n+1}}\right) = 2^{\sqrt{1}} = 2$

e $\sup\left(2^{\sqrt{n+1}}\right) = \lim 2^{\sqrt{n+1}} = +\infty$

2) Calcolare i limiti in 0 da destra e in $+\infty$ per la funzione

A) $f(x) = \dfrac{(\sin x)^2 - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}}$

B) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + \sqrt[3]{x} - x^2}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + x^2}$

Cosa si può dire riguardo ai suoi zeri nell'intervallo $(0,+\infty)$? Motivare la risposta

A) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x) - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\left(\frac{(\sin x)^2}{\sqrt{x}} - 1 + 2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{x}\left(\frac{(\sin(2\sqrt{x}))^2}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + 1\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{0 - 1 + 0}{0 + 0 + 1}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\sin x)^2 - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(\frac{(\sin x)^2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\right)}{x\left(\frac{(\sin(2\sqrt{x}))^2}{x} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= 1 \cdot \frac{(0 - 0 + 2)}{0 + 1 + 0} = 2$$

Poiché per $x \geq 0$

$(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x} = 0$ se e solo se tutti e tre gli addendi sono nulli, f è continua su $(0,+\infty)$. Dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) \cdot \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\sqrt{2} < 0$, esiste almeno uno zero in $(0,+\infty)$.

B) È analoga ad A: nel limite per $x \to 0^+$, è sufficiente raccogliere in evidenza $\sqrt[3]{x}$ sia al numeratore che al denominatore; in quello per $x \to +\infty$, x^2.

C)-D) Determinare l'immagine delle seguenti funzioni determinandone i suoi punti di minimo e massimo locale, la sua monotonia, i suoi asintoti

C) $f(x) = x^3 e^{-x^2} - 1$

D) $f(x) = x^2 e^{-|x|} + 1$

C) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $f \in C^0(\mathbb{R})$

$f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}(-2x) = x^2 e^{-x^2}(3 - 2x^2)$

$f'(x) > 0 \iff 3 - 2x^2 > 0 \wedge x \neq 0 \iff -\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x < \sqrt{\frac{3}{2}} \wedge x \neq 0$

Quindi per il criterio di stretta monotonia (la derivata prima di f è non-negativa e l'insieme dei punti su cui si annulla non contiene alcun intervallo)

f è strettamente crescente su $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ e strettamente decrescente su $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ e su $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

Quindi $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ è un massimo locale stretto e $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ è un minimo. Dato che $\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)^{3/2}}{e^{x^2}} \overset{y=x^2}{=\!=} \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{3/2}}{e^y} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$. Analogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Quindi f ha asintoto orizzontale la retta $y = -1$ sia per $x \to +\infty$, sia per $x \to -\infty$. Poiché $f(x_1) > -1$ (dato che $x_1^3 e^{-x_1^2} > 0$) e $f(x_2) < -1$ (dato che $x_2^3 e^{-x_2^2} = -x_1 e^{-x_1^2} < 0$)

i punti $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ e $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

sono quindi di massimo e minimo (assoluto) per f

dunque $f(\mathbb{R}) = \left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right), f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right]$ dato che f è continua

D) dom $f = \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Poiché f è pari possiamo

studiarla sull'intervallo $[0,+\infty)$. Su tale intervallo

$f(x) = x^2 e^{-x} + 1$, $f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x e^{-x}(2-x)$;

quindi $f'(x) > 0 \iff 2-x>0 \wedge x \neq 0 \iff x \neq 0, x < 2$

Quindi, per il criterio di stretta monotonia (la derivata prima di f è non-negativa e l'insieme dei punti su cui si annulla non contiene alcun intervallo)

f è strettamente crescente su $[0,2]$ e strettamente decrescente su $[2,+\infty)$. Pertanto 2 è un punto di massimo assoluto per f.

Essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} + 1 = 1$, la retta $y=1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Poiché $f(x) \geq 1$ $\forall x \in [0,+\infty)$ e $f(0)=1$

0 è un punto di minimo (assoluto) per f.

Poiché f è continua e pari, abbiamo

$$f(\mathbb{R}) = f([0,+\infty)) = [1, f(2)] = \left[1, \frac{4}{e^2}+1\right]$$

3) Calcolare il seguente integrale

A) $\int \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\,dx$

B) $\int \frac{x^2+2}{x^2+3x+2}\,dx$

C) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

D) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

A) $$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

quindi $$\int \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\,dx = \int 1\,dx - 2\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= x - 2\log|x+1| + c$$

B) $$\frac{x^2+2}{x^2+3x+2} = \frac{x^2+3x+2 \;\; -3x}{x^2+3x+2} = 1 - \frac{3x}{x^2+3x+2} =$$

$$= 1 - \frac{3x}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{3x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x+2A+B}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-2A \\ -A=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-3 \\ B=6 \end{cases}$$

Quindi $$\int \frac{x^2+2}{x^2+3x+2}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx - \int \frac{6}{x+2}\,dx$$
$$= x + 3\log|x+1| - 6\log|x+2|$$

C) Integriamo per parti:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = -x\,\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1-x)^{-\frac{1}{2}+1} + 2\int (1-x)^{\frac{1}{2}}$$
$$= -2x(1-x)^{\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + c$$

D) Integriamo per parti:

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = x\,\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{3}{2}+1}(1+x)^{\frac{5}{2}} + c$$

4) A) Dimostrare che $\forall x \in \mathbb{R}$: $D\sin x = \cos x$

B) Dimostrare che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall x > 0$: $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$

C)-D) Dimostrare senza usare il teorema di l'Hopital, né la formula di Taylor che

C) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$$

D) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

A.A. 2017/2018 Prova parziale 15 gennaio 2018 Traccia A

1) (a) Calcolare modulo e argomento principale del numero complesso $z = (1 - \sqrt{3}i)^5$

(b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \log_{1/2}(\sqrt{x+1} - 2).$$

8 pts.

2) Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = x(\log^2 x - 2\log x).$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = e$. Scrivere infine la formula di Taylor per f di ordine 2, centro $x_0 = e$, col resto di Peano.

8 pts.

3) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x(\log^2 x - 2\log x + 1)}.$$

Calcolare poi la media integrale di f nell'intervallo $[4, 6]$.

6 pts.

4) Enunciare e dimostrare il criterio di stretta monotonia (per un solo tipo di monotonia) su un intervallo. Fornire poi un esempio di una funzione strettamente monotona su un intervallo ma che abbia almeno un punto in cui la derivata è nulla.

8 pts.

1) - a) Calcolare modulo e argomento principale del numero complesso $z = (1-\sqrt{3}i)^5$

Scriviamo $1-\sqrt{3}i$ in forma trigonometrica

$\rho = \sqrt{1+3} = 2$ $\quad \begin{cases} 1 = 2\cos\theta \\ -\sqrt{3} = 2\sin\theta \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \theta = -\frac{\pi}{3}$

quindi usando la formula di De-Moivre

$$\left(2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{3}\pi\right)\right)$$

per cui il modulo di z è 2^5 e un suo argomento è $-\frac{5}{3}\pi$

Per determinare l'argomento principale sommiamo a $-\frac{5}{3}\pi$ un multiplo di 2π in modo che $-\frac{5}{3}\pi + 2k\pi \in [-\pi, \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $-\frac{5}{3}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{3} \in [-\pi,\pi)$, l'argomento principale è $\frac{\pi}{3}$

1) - b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+1} - 2\right)$$

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \text{ e } \sqrt{x+1} - 2 > 0\}$$

quindi $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} > 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 > 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \end{cases}$

f è composta dalle funzioni $x \in (3,+\infty) \mapsto \sqrt{x+1} - 2 \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1}-2)$

la funzione $\sqrt{x+1} - 2$ è strettamente crescente mentre $\log_{\frac{1}{2}} x$ è strettamente decrescente quindi f è strettamente decrescente e dunque

$$\operatorname{im}(f) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 3^+} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

2) Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = x(\log^2 x - 2\log x)$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = e$. Scrivere la formula di Taylor per f di ordine 2, centro $x_0 = e$ col resto di Peano.

f è definita in $(0,+\infty)$ ed è continua su tale insieme. Gli eventuali asintoti sono quindi da cercare in 0 e in $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\log^2 x - 2\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0 - 0 = 0$$ Non c'è asintoto verticale

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\log^2 x\left(1 - \frac{2}{\log x}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \log^2 x\left(1 - \frac{2}{\log x}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Non ci sono quindi asintoti orizzontali né obliqui per $x\to+\infty$

L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = e$ è

$$y = f(e) + f'(e)(x-e)$$

$$f(e) = e(1-2) = -e$$

$$f'(x) = \log^2 x - 2\log x + x\left(2\log x \cdot \frac{1}{x} - 2\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \log^2 x - 2\log x + 2\log x - 2 = \log^2 x - 2$$

$f'(e) = -1$; quindi la retta tangente richiesta ha equazione

$$y = -e - (x-e) = -x$$

La formula di Taylor di centro e ordine 2 col resto di Peano è

$$f(x) = f(e) + f'(e)(x-e) + \frac{f''(e)}{2}(x-e)^2 + o((x-e)^2) \quad \text{per } x\to e$$

$f''(x) = 2\log x \cdot \frac{1}{x}$; $f''(e) = \frac{2}{e}$ quindi otteniamo:

$$f(x) = -x + \frac{1}{e}(x-e)^2 + o((x-e)^2), \text{ per } x\to e$$

3) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \frac{\log x}{\log^2 x - 2\log x + 1}$$

Calcolare poi la media integrale di f sull'intervallo $[4,6]$

Posto $t = \log x$ l'integrale indefinito di f si ottiene da

$$\int \frac{t}{t^2 - 2t + 1}\, dt = \int \frac{t}{(t-1)^2}\, dt = \int \frac{t-1+1}{(t-1)^2}\, dt = \int \frac{1}{t-1}\, dt + \int \frac{1}{(t-1)^2}\, dt$$

$$= \log|t-1| - \frac{1}{t-1} + c$$

quindi $\displaystyle \int \frac{1}{x} \frac{\log x}{\log^2 x - 2\log x + 1}\, dx = \log|\log x - 1| - \frac{1}{\log x - 1} + c$

La media integrale richiesta è

$$\frac{1}{2} \int_4^6 \frac{1}{x} \frac{\log x}{\log^2 x - 2\log x + 1}\, dx = \frac{1}{2}\left(\log|\log x - 1| \Big|_4^6 - \frac{1}{\log x - 1} \Big|_4^6 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log(\log 6 - 1) - \log(\log 4 - 1) - \frac{1}{\log 6 - 1} + \frac{1}{\log 4 - 1} \right)$$

4) Enunciare e dimostrare il criterio di stretta monotonia su un intervallo

Si veda, ad esempio, pagg. 147-148 del Marcellini-Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno" Liguori Editore, 2002.

Esempi possibili sono:

- $f(x) = x^3$ (strettamente crescente, $f'(x) = 0$ per $x = 0$)
- $f(x) = -x^3$ (" decrescente, ")
- $f(x) = e^{x^3}$ (" crescente, " ")
- $f(x) = e^{-x^3}$ (" decrescente, " ")
- . . .

A.A. 2017/2018 Prova parziale 15 gennaio 2018 Traccia A

1) (a) Calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\pi^2}{4\pi^n};$$

(b) Determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + (-1)^n \log(n^2+1)}{2n^{5/2} - 1}.$$

8 pts.

2) Determinare il dominio della funzione
$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2-y} \log(x - y^2 + 2)$$
e rappresentarlo sul piano. Dire se è un insieme limitato, aperto, connesso. Stabilire inoltre che non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Stabilire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0, f(1,0))$ e determinarne l'equazione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ dove v è il versore associato al vettore $w = (-1,-1)$.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

8 pts.

4) Dare la definizione di sottoinsieme del piano misurabile e di aerea per un sottoinsieme misurabile. Dimostrare poi che il rettangoloide sotteso da una funzione continua positiva su $[a,b] \subset \mathbb{R}$ è misurabile e che la sua aerea è uguale a $\int_a^b f(x)dx$.

6 pts.

1) - a)

Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\pi^2}{4\pi^n}$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\pi^2}{4\pi^n} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\pi^n} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{n-3}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^k} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\frac{\pi-1}{\pi}} = \frac{1}{4(\pi-1)}$$

1) - b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + (-1)^n \log(n^2+1)}{2n^{5/2} - 1}$$

$$\frac{n + (-1)^n \log(n^2+1)}{2n^{5/2}-1} = \frac{n\left(1 + (-1)^n \frac{\log(n^2+1)}{n}\right)}{n^{5/2}\left(2 - \frac{1}{n^{5/2}}\right)} \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n^{3/2}} \in \mathbb{R}$ anche la serie assegnata converge

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2-y} \log(x-y^2+2)$$

e rappresentarlo nel piano. Dire se è un insieme limitato, aperto, connesso.

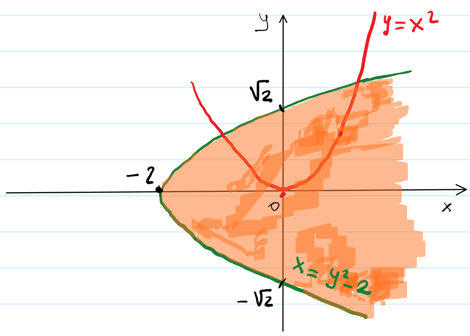
Stabilire, inoltre, che non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

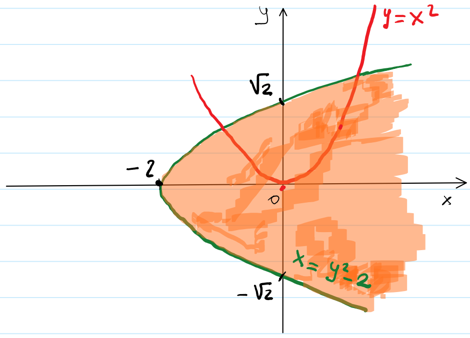
Stabilire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0,f(1,0))$

e determinarne l'equazione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

dove v è il versore associato al vettore $w=(-1,-1)$

dom f : $\begin{cases} x-y^2+2>0 \\ x^2-y \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > y^2-2 \\ y \neq x^2 \end{cases}$





Il dominio di f è dunque dato dall'insieme colorato in figura
I punti delle parabole $y=x^2$ e $x=y^2-2$ non appartengono ad esso.
È un insieme illimitato, aperto, non è connesso
$(0,0) \in D(\operatorname{dom} f)$. Valutiamo f lungo le rette del fascio
proprio di centro $(0,0)$: $y=mx$

$$f(x,mx) = \frac{x^2+mx}{x^2-mx}\log\left(x-m^2x^2+2\right)$$

$$= \frac{x+m}{x-m}\log\left(x-m^2x+2\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x+m}{x-m}\log(x-m^2x+2) = -\log 2, \quad \forall m\neq 0$$

Se $m=0$, cioè $y=0$ otteniamo $f(x,0) = \frac{x^2}{x^2}\log(x+2) = \log(x+2)$
Poiché $\lim\limits_{x\to0}\log(x+2) = \log(2) \neq -\log 2$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.
Altra possibilità è quella di valutare
f lungo la parabola di equazione $y=-x^2$
(che è una curva passante per $(0,0)$ e contenuta nel dominio per x in un intorno di 0)

$$f(x,-x^2) = \frac{x^2-x^2}{x^2+x^2}\log\left(x-x^4+2\right) = 0$$

e quindi $\lim\limits_{x\to0} f(x,-x^2)=0$

Poiché il limite lungo la parabola di equazione $y=-x^2$ è
diverso dal limite lungo le rette del fascio $y=mx$ il limite
di f in $(0,0)$ non esiste

f è una funzione derivabile con derivate continue su $\operatorname{dom} f$
quindi è differenziabile in ogni punto del suo dominio
In particolare è differenziabile in $(1,0)$ e quindi esiste il
piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0,f(1,0))$
la sua equazione è

$$z = f(1,0) + \nabla f(1,0) \cdot (x-1, y) =$$

$$f(1,0) = \log 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2-y) - (x^2+y)2x}{(x^2-y)^2} \log(x-y^2+2) + \frac{x^2+y}{x^2-y} \frac{1}{x-y^2+2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{2-2}{1} \log 3 + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y+(x^2+y)}{(x^2-y)^2} \log(x-y^2+2) + \frac{x^2+y}{x^2-y} \frac{1}{x-y^2+2}(-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{1+1}{1} \log 3 + 0 = 2\log 3$$

Dunque l'equazione del piano tangente richiesto è

$$z = \log 3 + \left(\frac{1}{3}, 2\log 3\right) \cdot (x-1, y) = \log 3 + \frac{1}{3}(x-1) + 2\log 3\, y$$

Il versore associato a w è $\frac{w}{|w|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e dunque (dato che f è differenziabile in $(1,0)$)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{3}, 2\log 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{2}} - \sqrt{2}\log 3$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

La soluzione è

$$y(x) = e^{\int_1^x \frac{1}{s} ds} \left(1 + \int_1^x -\frac{1}{s^2} e^{-\int_1^s \frac{1}{z} dz} ds \right)$$

$$= e^{\log x} \left(1 + \int_1^x -\frac{1}{s^2} e^{-\log s} ds \right)$$

$$= x \left(1 + \int_1^x -\frac{1}{s^3} ds \right) = x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} \Big|_1^x \right) =$$

$$= x \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{x}{2} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) = \frac{x^2+1}{2x}$$

4) Dare la definizione di sottoinsieme del piano misurabile e di area per un sottoinsieme misurabile. Dimostrare poi che il rettangoloide sotteso da una funzione continua su $[a,b] \subset \mathbb{R}$ è misurabile e che la sua area è uguale a $\int_a^b f(x)dx$

A è misurabile se $\mathbb{1}_A$ è integrabile. In tal caso

$|A| := \int \mathbb{1}_A$ (con $|A|$ indichiamo l'area di A)

A è misurabile se $\mathbb{1}_A$ è integrabile. In tal caso

$$|A| := \int_A \mathbb{1}_A \qquad (\text{con } |A| \text{ indichiamo l'area di } A)$$

Dato che f è continua, il suo grafico è un insieme misurabile del piano di misura nulla, quindi il rettangoloide R sotteso da f è misurabile in quanto ∂R è misurabile (∂R è unione del grafico di f e di tre segmenti) e $|\partial R| = 0$

Usando le formule di riduzione otteniamo

$$|R| = \int_R \mathbb{1}_R = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_a^b \left(f(x) - 0 \right) dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

A.A. 2017/2018 Prova parziale 5 febbraio 2018 Traccia A

1) (a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso $z = (2i-2)^4$;

(b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2^{\sqrt{x-1}}+1}.$$

8 pts.

2) Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2\pi$. Stabilire infine che x_0 è un punto di massimo locale stretto per f.

8 pts.

3) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1}.$$

Calcolare poi la media integrale di f nell'intervallo $[0, \pi/4]$.

6 pts.

4) Enunciare e dimostrare il teorema dei carabinieri per il limite di una funzione.

8 pts.

1-a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$z = (2i-2)^4$

$$z = 2^4 (i-1)^4 = 2^4 \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^4 = 2^6 e^{3\pi i} = 2^6(-1) = -2^6$$

1)-b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2^{\sqrt{x-1}+1}}.$$

$\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0\} = [1, +\infty);$

f è composta da $x \in [1,+\infty) \longmapsto \sqrt{x-1}+1 \longmapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x-1}+1}$

quindi è strettamente decrescente, $\mathrm{im}(f) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ f(1)\right] = \left(0, \frac{1}{2}\right]$

2) Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 2\pi$. Stabilire se $x_0 = 2\pi$ è un punto di massimo per f.

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f \in C^0(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ quindi gli eventuali asintoti sono

da cercare in 0 e in $+\infty$ e $-\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\text{th. Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$: Non ci sono asintoti verticali in 0

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\left|\frac{\cos x - 1}{x^2}\right| \leq \frac{2}{x^2} \to 0$ quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

analogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Dunque la retta $y=0$ è asintoto orizzontale

sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

Retta tangente: $y = f(2\pi) + f'(2\pi)(x - 2\pi)$

$$f(2\pi) = \frac{1-1}{(2\pi)^2} = 0$$

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)\, x^2 - (\cos x - 1) 2x}{x^4} = -\frac{\sin x \cdot x + 2(1-\cos x)}{x^3}$$

$f'(2\pi) = 0$; quindi la retta tangente ha equazione $y = 0$

2π è un punto di massimo (assoluto) per f in quanto $f(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathrm{dom} f$
Allo stesso risultato si può arrivare calcolando la derivata seconda
e osservando che $f''(2\pi) < 0$:

$$f''(x) = -\frac{(\cos x \cdot x + \sin x + 2\sin x) x^3 - (\sin x \cdot x + 2(1-\cos x)) 3x^2}{x^6}$$

$$f''(2\pi) = -\frac{2\pi \cdot (2\pi)^3}{(2\pi)^6} = -\frac{1}{4\pi^2}$$ che è negativo

3) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x \cdot \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1}$$

Calcolare poi la media integrale di f sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Posto $t = \cos x$, otteniamo:

$$-\int \frac{t}{t^2+2t+1}\,dt = -\int \frac{t}{(t+1)^2}\,dt = -\int \frac{t+1-1}{(t+1)^2}\,dt = -\int \frac{1}{t+1}\,dt + \int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= -\log|t+1| - \frac{1}{t+1} + c \text{ ; quindi}$$

$$\int \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1}\,dx = -\log|\cos x + 1| - \frac{1}{\cos x + 1} + c$$

Media integrale : $$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1}\,dx = -\frac{4}{\pi}\left(\log|\cos x + 1| + \frac{1}{\cos x + 1}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left(\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1} - \log 2 - \frac{1}{2}\right)$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema dei carabinieri per il limite di una funzione

Siano $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cap D(X)$. Supponiamo che $\exists U \in \mathcal{I}(x_0)$
tale che $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ e che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0} g(x)$
con $\ell \in \mathbb{R}$ allora $\exists \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

Dobbiamo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U_1 \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c $\forall x \in U_1 \cap X \setminus \{x_0\}$: $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

Sia quindi $\varepsilon > 0$. Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0} g(x)$, esistono $U_2 \in \mathcal{I}(x_0)$ e $U_3 \in \mathcal{I}(x_0)$ tali che $\forall x \in U_2 \cap X \setminus \{x_0\}$: $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ e $\forall x \in U_3 \cap X \setminus \{x_0\}$: $l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$.

Sia quindi $U_1 = U \cap U_2 \cap U_3$. Essendo intersezione di tre intorni di x_0, U_1 è un intorno di x_0; inoltre $\forall x \in U_1 \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha

$$l - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \varepsilon,$$

come volevasi dimostrare.

A.A. 2017/2018 Prova parziale 05 febbraio 2018 Traccia A

1) (a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{e^3}{8e^n};$$

(b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+(-1)^n \log n}{n^{3/2}-1}.$$

8 pts.

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2-y+1} \arcsin(y-x^2-1)$$

e rappresentarlo sul piano. Dire se è un insieme limitato, aperto, convesso. Stabilire inoltre che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Stabilire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(0,1/2,f(0,1/2))$ e determinarne l'equazione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1/2)$ dove v è il versore associato al vettore $w=(-1,-1)$.

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Dimostrare che se $f \in R(Q)$, Q rettangolo contenuto in $\mathbb{R}^2$, e $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in Q$, allora $\int_Q f \geq 0$. Dimostrare inoltre che se $g \in R(Q)$ e $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in Q$, allora $\int_Q f \leq \int_Q g$.

6 pts.

1)-a) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{e^3}{8e^n}$

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{e^3}{8e^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^3 \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{e^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^3 \frac{1}{e^4} \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{e^{n-4}} = \frac{1}{8e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e^k}$$

$$= \frac{1}{8e} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{e-1}$$

1)-b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + (-1)^n \log n}{3n^{3/2} - 1}$$

$$\frac{n + (-1)^n \log n}{3n^{3/2} - 1} = \frac{n\left(1 + \frac{(-1)^n \log n}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}\left(3 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)} \sim \frac{1}{3n^{\frac{1}{2}}}$$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3n^{\frac{1}{2}}} = +\infty$ anche la serie assegnata diverge positivamente

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2-y+1} \arcsin\left(y-x^2-1\right)$$

e rappresentarlo nel piano. Dire se è un insieme

limitato, aperto, convesso.

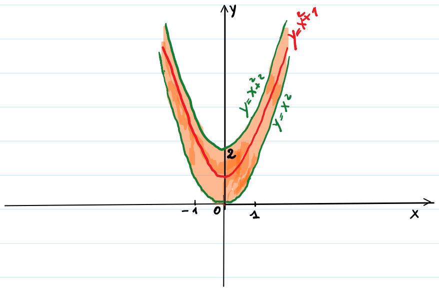
Stabilire, inoltre, che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Stabilire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $\left(0, \frac{1}{2}, f(0,\frac{1}{2})\right)$

e determinarne l'equazione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}\left(0, \frac{1}{2}\right)$

dove v è il versore associato al vettore $w = (-1,-1)$

$$\text{dom} f : \quad \begin{cases} -1 \le y - x^2 - 1 \le 1 \\ y - x^2 - 1 \ne 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - x^2 \le 2 \\ y - x^2 \ge 0 \\ y \ne x^2 + 1 \end{cases}$$



Il dominio della funzione è l'insieme colorato in figura; i punti delle parabole $y = x^2+2$ e $y = x^2$ appartengono al dominio mentre i punti della parabola $y = x^2+1$ non appartengono ad esso.

È quindi un insieme illimitato, non è aperto (in quanto i punti delle parabole $y = x^2$ e $y = x^2+2$ non sono interni), non è chiuso (poiché i punti della parabola $y = x^2+1$ sono di frontiera ma non appartengono al dominio);

non è convesso (in quanto, ad esempio, il segmento che unisce due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_1) aventi stesso ordinato $y_1 > 2$ non è contenuto nel dominio.

Osserviamo che f è continua in $(0,0)$ quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

f è derivabile con derivate parziali continue in $\mathring{\operatorname{dom} f}$ quindi è differenziabile in ogni punto di $\mathring{\operatorname{dom} f}$. In particolare è differenziabile in $(0, \frac{1}{2})$ e dunque esiste il piano tangente al grafico di f in $(0, \frac{1}{2}, f(0,\frac{1}{2}))$. L'equazione di tale piano è

$$z = f(0,\tfrac{1}{2}) + \nabla f(0,\tfrac{1}{2}) \cdot (x, y - \tfrac{1}{2})$$

$$f(0,\tfrac{1}{2}) = \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2-y+1) - (y+x^2)2x}{(x^2-y+1)^2} \arcsin(y-x^2-1) + \frac{y+x^2}{x^2-y+1} \frac{1}{\sqrt{1-(y-x^2-1)^2}} (-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y+1+(y+x^2)}{(x^2-y+1)^2} \arcsin(y-x^2-1) + \frac{y+x^2}{x^2-y+1} \frac{1}{\sqrt{1-(y-x^2-1)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\tfrac{1}{2}) = 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{4}} \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = 4\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Quindi l'equazione del piano è

$$z = -\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Il versore associato a w è $\frac{w}{|w|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e dunque (dato che f è differenziabile in $(0,\frac{1}{2})$)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,\tfrac{1}{2}) = \nabla f(0,\tfrac{1}{2}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0, -\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

La soluzione è $y(x) = e^{\int_1^x \frac{1}{s^2} ds} \left(0 + \int_1^x -\frac{1}{s^3} e^{-\int_1^s \frac{1}{\tau^2} d\tau} ds\right)$

$$= e^{-\frac{1}{s}} \left(\int -\frac{1}{s^3} e^{\frac{1}{\tau}\Big|_1^s} ds \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{s}\Big|_1^x} \left(\int_1^x -\frac{1}{s^3} e^{\frac{1}{c}\Big|_1^s} ds \right)^1$$

$$= e^{-\frac{1}{x}+1} \left(\int_1^x -\frac{1}{s^3} e^{\frac{1}{s}-1} ds \right)$$

$$= \frac{e}{e^{1/x}} \frac{1}{e} \int_1^x -\frac{1}{s^3} e^{\frac{1}{s}} ds$$

$\frac{1}{s} = t$; $dt = -\frac{1}{s^2} ds$

$$= \frac{1}{e^{1/x}} \int_1^{1/x} t e^t dt = \frac{1}{e^{1/x}} \left(t e^t \Big|_1^{\frac{1}{x}} - \int_1^{\frac{1}{x}} e^t \right) =$$

$$= \frac{1}{e^{1/x}} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - e - e^{\frac{1}{x}} + e \right) = \frac{1}{x} - 1$$

4) Dimostrare che se $f \in \mathcal{R}(Q)$, $Q \subset \mathbb{R}^2$ rettangolo e $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in Q$ allora $\int_Q f \geq 0$. Dimostrare inoltre che se $g \in \mathcal{R}(Q)$ e $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in Q$, allora $\int_Q f \leq \int_Q g$

Poiché $f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in Q$: $\inf_Q f \geq 0$

e quindi $\int_Q f \geq \inf_Q f \cdot |Q| \geq 0$

Poiché $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in Q$, $(g-f)(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in Q$

e quindi $0 \leq \int_Q g - f = \int_Q g - \int_Q f$

A.A. 2017/2018 Prova parziale 23 febbraio 2018 Traccia A

1) (a) Calcolare, in forma cartesiana, le radici terze di $27i$.

(b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \log_{1/3}(x^3 + 1) + e^{-x+1}.$$

8 pts.

2) Calcolare il dominio e gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \left(\frac{2 + x^2}{x^2 - 4}\right)^x.$$

Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 4$. Cosa si può dire sulla monotonia di f in un intorno di x_0?

8 pts.

3) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = x \arctan(x^2).$$

6 pts.

4) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per le funzioni reali di variabile reale.

8 pts.

1) a) Calcolare $\sqrt[3]{27i}$ in forma cartesiana

$|27i| = 27 \quad Arg(27i) = \frac{\pi}{2}$ quindi

$$\sqrt[3]{27i} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right)\right), \quad k=0,1,2$$

$= 3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ (per $k=0$)

$ -3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ (per $k=1$)

$ -3i$ (per $k=2$)

b) dom f : $x^3+1>0 \iff x>-1$

f è somma delle funzioni

$g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^3+1)$ che è strett. decrescente in quanto composto da $g_1(x) = x^3+1$ strettamente crescente e $g_2(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ strettamente decrescente

e

$h(x) = e^{-x+1} = e \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^x$ che è strettamente decrescente

Quindi anche f è strettamente decrescente

$$\operatorname{Im} f := f((-1,+\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-1^+} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$$

2) dom f: $\frac{2+x^2}{x^2-4} > 0 \iff x^2-4>0 \iff x>2 \vee x<-2$

$f \in C^0((-\infty,-2) \cup (2,+\infty))$ quindi gli unici asintoti verticali sono da cercare in 2 da dx e in -2 da sx

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)^x = (+\infty)^2 = +\infty$$ dunque la retta $x=2$ è asintoto verticale a dx

$$\lim_{x\to-2^-}\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)^x = (+\infty)^{-2} = 0$$ $x=-2$ non è asintoto

$$\lim_{x \to -2^-} \left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)^x = (+\infty)^{-2} = 0 \qquad x=-2 \text{ non è asintoto}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x \log\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \log \frac{x^2+2}{x^2-4} = \lim_{x \to +\infty} x \left(\log\left(1 + \frac{6}{x^2-4}\right)\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{x^2-4} \frac{\log\left(1 + \frac{6}{x^2-4}\right)}{\frac{6}{x^2-4}} = 0 \cdot 1 = 0$$

Quindi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^0 = 1$ e dunque la retta $y=1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. In modo analogo si vede che la stessa retta è asintoto orizzontale anche per $x \to -\infty$.

f è derivabile sul suo dominio, quindi in $x_0 = 4$ il grafico di f ammette retta tangente

$$f'(x) = e^{x \log\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)} \left(\log \frac{x^2+2}{x^2-4} + x \frac{x^2-4}{x^2+2} \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+2)}{(x^2-4)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)^x \left(\log \frac{x^2+2}{x^2-4} - \frac{12x^2}{(x^2+2)(x^2-4)} \right)$$

$$f'(4) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\log \frac{3}{2} - \frac{12 \cdot 16}{18 \cdot 12} \right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\log \frac{3}{2} - \frac{8}{9} \right) < 0$$

L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 4$ è

$$y = f(4) + f'(4)(x-4) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\log \frac{3}{2} - \frac{8}{9} \right)(x-4)$$

Poiché $f'(4) < 0$ e f' è continua dal teorema della permanenza del segno delle funzioni continue si ha che $f'(x) < 0$ in un intorno di $x_0 = 4$ e quindi f è strettamente decrescente in tale intorno.

3) $$\int x\, \mathrm{artg}\, x^2 \overset{x^2=t\,;\ dt=2x\,dx}{=} \frac{1}{2}\int \mathrm{artg}\, t\, dt = \frac{1}{2} t \,\mathrm{arctg}\, t - \frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t^2}\, dt$$
$$= \frac{1}{2} t\, \mathrm{arctg}\, t - \frac{1}{4}\log(1+t^2) + c = \frac{1}{2} x^2 \mathrm{arctg}\, x^2 - \frac{1}{4}\log(1+x^4) + c$$

4) Si veda ad esempio, p. 106 e pagg. 112-113 del manuale Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori Ed.

A.A. 2017/2018 Prova parziale 23 febbraio 2018 Traccia A

1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} dxdy$$

dove A è il sottoinsieme del I quadrante del piano compreso tra la retta di equazione $y = 1/2$, l'asse delle y e la circonferenza di centro 0 e raggio 2.

8 pts.

2) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = (x+y)(x^2-y+1)^2$$

e studiarne la natura

8 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = e^{-2x} + x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

8 pts.

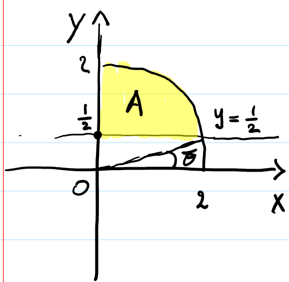
4) Dare la definizione di serie numerica. Dare poi la definizione di serie numerica regolare. Dimostrare che una serie numerica a termini non negativi è regolare.

6 pts.

1) Calcolare $\displaystyle\int_A \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$

dove A è il sottoinsieme del I quadrante compreso tra la retta di equazione $y=\frac{1}{2}$, l'asse delle y e la circonferenza di centro 0 e raggio 2

A è l'insieme rappresentato in figura



In coordinate polari (θ,ρ) esso è definito da $\bar\theta \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ dove $\bar\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ è l'angolo tale che $2\sin\bar\theta = \frac{1}{2}$ quindi $\bar\theta = \arcsin\frac{1}{4}$

$\rho \le 2$ e inoltre, poiché la retta $y=\frac{1}{2}$ ha equazione in coordinate polari $\rho\sin\theta = \frac{1}{2}$,

$\rho \ge \frac{1}{2\sin\theta}$.

Quindi in coordinate polari, l'insieme di integrazione è un insieme normale rispetto all'asse delle θ
Usando quindi la formula di riduzione otteniamo

$$\int_A \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{2}\frac{\rho^3\sin^3\theta}{\rho^4}\,\rho\,d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{2}d\rho = \int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\left(2-\frac{1}{2\sin\theta}\right)d\theta$$

$$= 2\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta =$$

Calcoliamo separatamente i due integrali qui sopra

$$2\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta = 2\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\, d\theta =$$

$$= -2\cos\theta \Big|_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\cos^3\theta \Big|_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= +2\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3}\cos^3\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \Big|_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{8}\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\, d\theta$$

Per cui $-\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{8}\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$
$-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}$

e $-\frac{1}{2}\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{16}\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{4}$

2) Determinare i punti stazionari della funzione
$f(x,y) = (x+y)(x^2-y+1)^2$ e studiarne la natura

f è un polinomio quindi di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2-y+1)^2 + 2(x+y)(x^2-y+1)\,2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2-y+1)^2 - 2(x+y)(x^2-y+1)$$

$$\begin{cases}(x^2-y+1)^2 + 2(x+y)(x^2-y+1)\,2x = 0\\(x^2-y+1)^2 - 2(x+y)(x^2-y+1) = 0\end{cases}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases}2(x+y)(x^2-y+1)(2x+1) = 0\\(x^2-y+1)(x^2-y+1-2x-2y) = 0\end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono l'unione delle soluzioni dei seguenti 3 sistemi:

1. $\begin{cases}x^2-y+1=0\\0=0\end{cases}$ quindi la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y=x^2+1$ è una curva di punti critici

1. $\begin{cases} x^2-y+1=0 \\ 0=0 \end{cases}$ quindi la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y=x^2+1$ è una curva di punti critici

2. $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2-y+1-2(x+y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ x^2-y+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ x^2+x+1=0 \end{cases}$

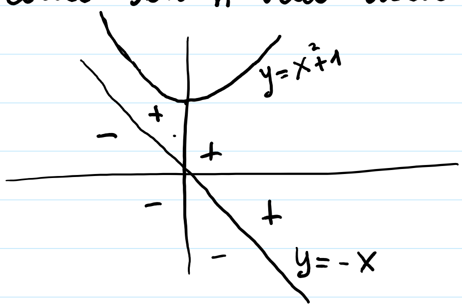
che non ha soluzioni dato che la seconda equazione non ha soluzioni reali

3. $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}-y+1+1-2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ 3y=\frac{9}{4} \end{cases} \quad P_1\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

Studiamo la natura dei punti critici $(\bar{x},\bar{y})\in\mathcal{P}$

$$f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y)$$

Poiché il segno di f è uguale al segno della funzione $g(x,y)=x+y$ abbiamo che tutti i punti $(\bar{x},\bar{y})\in\mathcal{P}$ sono di minimo locale non forte dato che $x+y>0$ in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$ come ben si vede dalla figura qui sotto



Studiamo ora la natura di P_1

$$f_{xx}(x,y) = 2(x^2-y+1)2x + 2(x^2-y+1)2x + 8(x+y)x^2 + 4(x+y)(x^2-y+1)$$

$$f_{yy}(x,y) = -2(x^2-y+1) - 2(x^2-y+1) + 2(x+y)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4x(x^2-y+1) - 2(x^2-y+1) - 4x(x+y)$$

$$f_{xx}\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+1\right)(-1) + 2\cdot\frac{1}{2}(-1) + 8\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} + 4\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$$

$$= -1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = -1$$

$$f_{yy}\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = -2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$f_{xy}\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = f_{yx}\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = -2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$$

$\left|H_f\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\right| = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 < 0$ quindi P_1 è di sella

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = e^{-2x} + x \qquad (*) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

l'equazione caratteristica dell'omogenea associata è

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ che ha soluzioni 1 e -2

quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Una soluzione particolare di $(*)$ si ottiene sommando una di

$y'' + y' - 2y = e^{-2x}$ e una di $y'' + y' - 2y = x$

Usando il metodo di similarità per entrambe otteniamo

$\bar{y}_1(x) = x k e^{-2x}$

$\bar{y}_1'(x) = k e^{-2x} - 2kx e^{-2x}$

$\bar{y}_1''(x) = -4k e^{-2x} + 4kx e^{-2x}$ quindi

$-3k e^{-2x} = e^{-2x}$ da cui $k = -\frac{1}{3}$

$\bar{y}_2(x) = ax + b$

$\bar{y}_2'(x) = a$

$\bar{y}_2''(x) = 0$ quindi

$0 + a - 2ax - 2b = x$

da cui

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ -2a = 1 \end{cases}$$ cioè

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$ quindi

$\bar{y}_2(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Pertanto l'integrale generale di (*) è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} x e^{-2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{4}$$

$$y'(x) = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{2}{3} x e^{-2x} - \frac{1}{2}$$

$$y'(0) = c_1 - 2c_2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

Deve dunque essere $\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{1}{4} = 1 \\ c_1 - 2c_2 - \frac{5}{6} = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{5}{4} \\ c_1 - 2c_2 = -\frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} 3c_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \\ c_1 + c_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{7}{9} \\ c_2 = \frac{5}{4} - \frac{7}{9} = \frac{17}{45} \end{cases}$$

4) Per le definizioni si veda, ad esempio, pag. 259 del manuale Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori Ed.
Per il teorema si veda pag 264 dello stesso.

A.A. 2017/2018 Prova parziale 19 aprile 2018 Traccia A

1) (a) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 e^{-2-i\frac{\pi}{4}}$.

(b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \arccos(x-1) - x^3.$$

8 pts.

2) Determinare dominio e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{(-x)^{\sqrt{2}} + \sin x}{\sqrt{|x|} - 1}.$$

Stabilire poi che f è strettamente decrescente in un intorno di $-\infty$

8 pts.

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{1+x}} \mathrm{d}x.$$

6 pts.

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass per le funzioni continue.

8 pts.

1)-a) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 \cdot e^{-2-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-1-2i}{2} = -i$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1 \;; \quad e^{-2-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{e^2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{e^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Quindi $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 e^{-2-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{e^2}\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{1}{e^2}\frac{\sqrt{2}}{2}$

1)-b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \arccos(x-1) - x^3$$

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x-1 \le 1\} = [0,2]$$

La funzione $g(x) = \arccos(x-1)$ è strettamente decrescente in quanto composta da una funzione strettamente decrescente ($y=\arccos x$) e una strett. crescente ($y = x-1$); la funzione $h(x) = -x^3$ è anche essa strett. decrescente. Dunque f è strett. decrescente in quanto somma di due funzioni strett. decrescenti. Essendo poi f anche continua $\operatorname{im} f = [f(2), f(0)] = [-8, \pi]$

2) Determinare dominio e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{(-x)^{\sqrt{2}} + \sin x}{\sqrt{|x|} - 1} \;;$$

stabilire poi che f è strettamente decrescente in un intorno di $-\infty$

f è definita per $-x \ge 0$ e se $\sqrt{|x|} - 1 \ne 0$ quindi per $x \le 0$ e $|x| = 1$ cioè $x \ne \pm 1$. Dunque $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0]$

f è continua nel suo dominio, dunque l'unico punto in cui sono da cercare eventuali asintoti verticali è $x_0 = -1$

$\lim_{x \to -1^+} f(x)$ si presenta nella forma $\frac{\ell}{0}$ $\ell = 1 - \sin 1$. Poiché il denominatore

tende a 0 assumendo valori negativi e $\ell > 0$ il risultato è $-\infty$
quindi $x = -1$ è asintoto verticale a dx per f.

$\lim_{x \to -1^-} f(x)$ si presenta nella forma $\frac{\ell}{0}$, con denominatore questa volta che assume valore positivi quindi il risultato del limite è $+\infty$
e $x = -1$ è anche asintoto verticale a sx per f.

Cerchiamo l'eventuale asintoto per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^{\sqrt{2}} + \sin x}{\sqrt{|x|} - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^{\sqrt{2}}}{\sqrt{|x|}} \frac{\left(1 + \sin x / (-x)^{\sqrt{2}}\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{|x|}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^{\sqrt{2}}}{(-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \sin x / (-x)^{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{|x|}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (-x)^{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} \cdot 1 = +\infty .$$

Non c'è asintoto orizz. per $x \to -\infty$

Analogamente $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} -(-x)^{\sqrt{2} - \frac{3}{2}} \cdot 1 = 0$

dato che $\sqrt{2} - \frac{3}{2} < 0$

Poiché $\lim_{x \to -\infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ non c'è neanche asintoto obliquo per $x \to -\infty$

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{2}\,(-x)^{\sqrt{2}-1} \cdot (-1) + \cos x\right)\left(\sqrt{|x|} - 1\right) - \left((-x)^{\sqrt{2}} + \sin x\right) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \operatorname{sign} x}{\left(\sqrt{|x|} - 1\right)^2}$$

$= -1$ per $x<0$

Poiché il denominatore è non-negativo il segno di f dipende solo dal segno del numeratore che per $x \to -\infty$ è asintotico a

$$-\sqrt{2}\,(-x)^{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-x)^{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} = \left(-\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)(-x)^{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} \to -\infty, \text{ per } x \to -\infty$$

Quindi il numeratore è definitivamente negativo per $x \to -\infty$
e dunque $f'(x) < 0$ definitivamente e dunque f è strettamente decrescente definitivamente per $x \to -\infty$

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{2 - x}{\sqrt{1 + x}} \, dx$$

Integrando per parti

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{1+x}}\,dx = (2-x)\,2\sqrt{1+x} + 2\int \sqrt{1+x}\,dx$$

$$= (2-x)\,2\sqrt{1+x} + \frac{4}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + c$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass

Si vedano pagg. 114-115 del manuale Marcellini-Sbordone "Elementi di analisi matematica uno", Liguori Editore 2002

A.A. 2017/2018 Prova parziale 19 aprile 2018 Traccia A

1) Calcolare il seguente integrale
$$\int_A \log(xy+1)dxdy$$
dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 1,\ \frac{1}{2}x \leq y \leq x\}$.

8 pts.

2) Determinare i punti critici della funzione
$$f(x,y) = (xy)^4(x-y+1)$$
e studiarne la natura

8 pts.

3) Determinare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (y \log y)\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

8 pts.

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat per una funzione di due variabili reali.

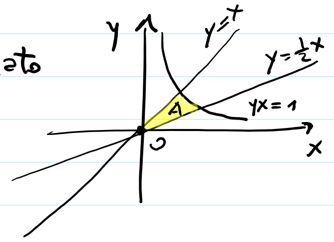
6 pts.

1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \log(xy+1)\,dx\,dy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le xy \le 1 \ \wedge \ \frac{1}{2}x \le y \le x\}$

A è l'insieme rappresentato in figura in giallo



Facciamo un cambio di variabile ponendo

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \qquad \text{quindi} \quad 0 \le u \le 1 \quad e \quad \frac{1}{2} \le v \le 1$$

cioè nel piano (u,v) l'insieme A è mappato dalla trasformazione qui sopra nell'insieme $B = [0,1] \times [\frac{1}{2}, 1]$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2\frac{y}{x} = 2v. \text{ Quindi}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right|^{-1} = \frac{1}{2v}$$

Pertanto $\displaystyle\int_A \log(xy+1)\,dx\,dy = \int_B \log(u+1)\frac{1}{2v}\,du\,dv =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \log(u+1)\,du \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{v}\,dv =$$

$$\frac{1}{2} \log v \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \cdot \left(u \log(u+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{u+1}\,du \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \log\frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - 1 + \log(u+1)\Big|_0^1 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \log\frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - 1 + \log 2 \right) =$$

$$= +\frac{1}{2} \log 2 \cdot (2\log 2 - 1)$$

2) Determinare i punti critici della funzione

$f(x,y) = (xy)^4(x-y+1)$ e studiarne la natura

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(xy)^3 y(x-y+1) + (xy)^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(xy)^3 x(x-y+1) - (xy)^4$$

$$\begin{cases} 4(xy)^3 y(x-y+1) + (xy)^4 = 0 \\ 4(xy)^3 x(x-y+1) - (xy)^4 = 0 \end{cases}$$

sommando membro a membro e riscrivendo la 1ª equazione otteniamo:

$$\begin{cases} 4(xy)^3(x-y+1)(x+y) = 0 \\ 4(xy)^3 y(x-y+1) + (xy)^4 = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} xy = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (x-y+1) = 0 \\ (xy)^4 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y = 0 \\ 4x^7(2x+1) + x^8 = 0 \end{cases}$$

tutti i punti dell'asse delle x e quelli dell'asse delle y sono critici

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^7(8x+4+x) = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

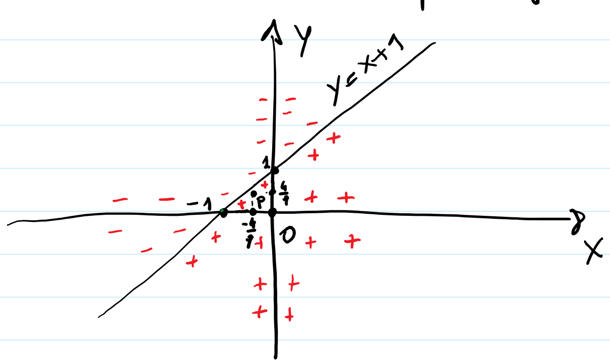
$P_1 = (0,1)$ e $P_2 = (-1,0)$ sono punti critici

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{4}{9} \\ y = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$(0,0)$ è critico $\qquad P_3 = \left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$

Iniziamo ad analizzare la natura dei punti trovati.
Cominciamo con i punti sugli assi cartesiani. Poiché su ognuno di essi f si annulla, la loro natura dipende dal segno di f in un intorno del punto fissato. Poiché il segno di f dipende solo dal segno di $g(x,y) = x-y+1$



abbiamo per i punti sull'asse delle x, $(\bar{x},0)$, e per quelli nell'asse delle y, $(0,\bar{y})$:

se $\bar{x} > -1 \to$ minimo locale non forte
" $\bar{x} < -1 \to$ massimo " "
$(-1,0)$ è di sella
" $\bar{y} > 1 \to$ massimo " "
" $\bar{y} < 1 \to$ minimo " "
$(0,1)$ è di sella

Infine studiamo la natura del punto $P = \left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$

$$f_{xx}(x,y) = 12(xy)^2 y^2 (x-y+1) + 4(xy)^3 y + 4(xy)^3 y =$$

$$= 12(xy)^2 y^2 (x-y+1) + 8(xy)^3 y$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 12(xy)^3(x-y+1) + 4(xy)^3(x-y+1) - 4(xy)^3 y + 4(xy)^3 x$$
$$= 16(xy)^3(x-y+1) + 4(xy)^3(x-y)$$

$$f_{yy}(x,y) = 12(xy)^2x^2(x-y+1) - 4(xy)^3x - 4(xy)^3x =$$
$$= 12(xy)^2x^2(x-y+1) - 8(xy)^3x$$

$$f_{xx}\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right) = 12\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{4}{9}\right)^7 = \left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{4}{3}-\frac{32}{9}\right) = -\frac{20}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^6 = -5\left(\frac{4}{9}\right)^7$$

$$f_{xy}\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right) = -16\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{1}{9}\right) + 4\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{8}{9}\right) =$$
$$= \left(\frac{4}{9}\right)^6\left(-\frac{16}{9}+\frac{32}{9}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)^6\frac{16}{9} = 4\left(\frac{4}{9}\right)^7$$

$$f_{yy}\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right) = 12\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{4}{9}\right)^7 = -5\left(\frac{4}{9}\right)^7$$

$$H_f\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right) = \begin{pmatrix} -5\left(\frac{4}{9}\right)^7 & 4\left(\frac{4}{9}\right)^7 \\ 4\left(\frac{4}{9}\right)^7 & -5\left(\frac{4}{9}\right)^7 \end{pmatrix}$$

$\left|H_f\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)\right| = 25\left(\frac{4}{9}\right)^{14} - 16\left(\frac{4}{9}\right)^{14} > 0$ quindi $P\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)$ è di massimo locale forte

Allo stesso risultato si può giungere osservando che f è nulla sul bordo del triangolo di vertici $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ ed è positiva al suo interno. P è interno a tale triangolo e quindi per il teorema di Weierstrass P deve necessariamente essere il punto di massimo della restrizione di f a tale triangolo.

3) Determinare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y\log y)\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$y' = (y\log y)\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ è un'equazione a variabili separabili

Essa ammette un'unica soluzione singolare data da $y(x) = 1$, $\forall x \in (-1,1)$

Dato che in 0, la soluzione è uguale a 2, possiamo escludere che $y(x) = 1$ sia la soluzione cercata e possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per $y\log y$ (osserviamo anche che la soluzione sarà > 1) ottenendo

$$\frac{y'}{y\log y} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{quindi} \quad \int\frac{dy}{y\log y} = \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

cioè $\quad \log(\log y) = \int \frac{x\,dx}{\quad} = -\sqrt{1-x^2} + c$

cioè $\log(\log y) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + c$

Poiché $y(0) = 2$ otteniamo $\log(\log 2) = -1 + c$ da cui

$c = 1 + \log(\log 2)$

Quindi $\log y = e^{-\sqrt{1-x^2}+1}\, e^{\log(\log 2)} = e^{-\sqrt{1-x^2}+1} \cdot \log 2$

cioè $y(x) = e^{\log 2 \cdot e^{-\sqrt{1-x^2}+1}} = \left(e^{\log 2}\right)^{e^{-\sqrt{1-x^2}+1}}$

$$= 2^{e^{1-\sqrt{1-x^2}}}$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat per una funzione di due variabili reali

Si veda, ad esempio, pag. 73-74 del manuale Fusco, Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica due", Liguori Editore

A.A. 2017/2018 Prova parziale 25 giugno 2018 Traccia A

1) (a) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})\right)^4$.

(b) Stabilire che il seguente insieme A è illimitato superiormente e limitato inferiormente:

$$A=\{(n-1)^{\frac{1}{3}} : n\in\mathbb{N}\}\bigcup\{\arctan k : k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}\}.$$

8 pts.

2) Determinare dominio e asintoti della funzione

$$f(x)=\frac{x\log(1-x^2)}{2x-1}.$$

Dire, motivando la risposta, se f è derivabile in $x=0$ e in caso affermativo determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0,f(0))$

8 pts.

3) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

6 pts.

4) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue.

8 pts.

1) - a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$z = \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^4$$

$$z = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^4$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\pi} = -1$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^4 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

quindi $z = -i$

1)-b) Stabilire che il seguente insieme A è illimitato superiormente e limitato inferiormente

$$A = \left\{(n-1)^{\frac{1}{3}} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\operatorname{artg} k : k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\right\}$$

Osserviamo che l'insieme $B = \left\{(n-1)^{\frac{1}{3}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ è l'insieme dei valori assunti dalla successione $\left\{(n-1)^{\frac{1}{3}}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Poiché $\lim_n (n-1)^{\frac{1}{3}} = +\infty$ B è illimitato superiormente

Inoltre tale successione è strettamente crescente e quindi B ha minimo

uguale al valore assunto per $n=0$ dalla successione cioè -1

Analogamente $C = \{\operatorname{artg} k : k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$ coincide con l'insieme

dei valori assunti dalla successione $\{\operatorname{artg}(-n)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$

Poiché $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{artg}(-n) \leq \operatorname{artg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

concludiamo che C è un insieme limitato

Dunque $A = B \cup C$ è illimitato superiormente (in quanto B lo è)

e limitato inferiormente dato che $\forall a \in A$ $a > -\frac{\pi}{2}$ visto che

$a \geq -1 > -\frac{\pi}{2}$ se $a \in B$ e $a > -\frac{\pi}{2}$ se $a \in C$

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{x \log(1-x^2)}{2x-1}$

Determinare inoltre i suoi eventuali asintoti

2) ... $f(x) = \frac{x\log(1-x^2)}{2x-1}$

Determinare inoltre i suoi eventuali asintoti.
Dire, motivando la risposta se f è derivabile in 0 e in caso positivo determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto $(0, f(0))$.

$$\operatorname{dom} f: \begin{cases} 1-x^2>0 \\ 2x-1\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1<x<1 \\ x\neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi $\operatorname{dom} f = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Osserviamo che f è continua sul suo dominio in quanto rapporto di funzioni continue. Gli eventuali asintoti sono quindi da cercare nei punti $x=-1, 1, \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{-1\cdot(-\infty)}{-3} = -\infty \; ; \quad x=-1 \text{ è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1\cdot(-\infty)}{1} = -\infty \; ; \quad x=1 \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x)$: si presenta nella forma $\frac{\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{4}\right)}{0}$

per $x\to\frac{1}{2}^-$ il denominatore tende a 0 assumendo valori negativi,
poiché $\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{4}\right)<0$, $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ $\quad x=\frac{1}{2}$ è asintoto verticale a sx
Analogamente $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$ " " " " dx

f è derivabile in 0 in quanto quoziente di funzioni derivabili su $\operatorname{dom} f$

$$f'(x) = \frac{\left(\log(1-x^2) + \frac{x}{1-x^2}(-2x)\right)(2x-1) - x\log(1-x^2)\,2}{(2x-1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(0+0)(-1)-0}{1} = 0$$

L'equazione della retta tangente al grafico di f in $(0, f(0)) = (0,0)$ è dunque $y=0$

3) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quindi $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt = \cos t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $\displaystyle\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

4) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue

Si veda, ad esempio, pag. 108 del manuale Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori 2002

A.A. 2017/2018 Prova parziale 25 giugno 2018 Traccia A

1) Stabilire che il seguente integrale converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx.$$

6 pts.

2) Sia

$$f(x,y) = \frac{xe^{-x^2+y^2}}{\sqrt{y-x^2-1}}.$$

Determinare e rappresentare graficamente sul piano il dominio di f. Dire se esso è un insieme aperto, chiuso, compatto, limitato. Stabilire se esiste il piano tangente al grafico di f in tutti i suoi punti. In caso affermativo calcolare l'equazione del piano tangente nel punto $(0,2,f(0,2))$. Determinare anche $\frac{\partial f}{\partial v}(0,2)$, con$v = (\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3})$

10 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = xe^{-x} + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per la convergenza di una serie numerica.

6 pts.

1) Studiare la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx$$

Osserviamo che la funzione integranda $f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2}$ è continua su $(0,+\infty)$

Sia quindi $c \in (0,+\infty)$ e cerchiamo di stabilire che entrambi gli integrali impropri $\int_0^c \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx$ e $\int_c^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx$ convergono

Poiché $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^3 x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \sin x \, \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0 \cdot 1 = 1$, f ha in 0 una discontinuità eliminabile e quindi $\int_0^c \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx \in \mathbb{R}$

Poiché $\left| \frac{\sin^3 x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ e la funzione $\frac{1}{x^2}$ è integrabile su $[c,+\infty)$, f è assolutamente integrabile e quindi integrabile anche su $[c,+\infty)$.

2) Sia $f(x,y) = \dfrac{x\, e^{-x^2+y^2}}{\sqrt{y-x^2-1}}$

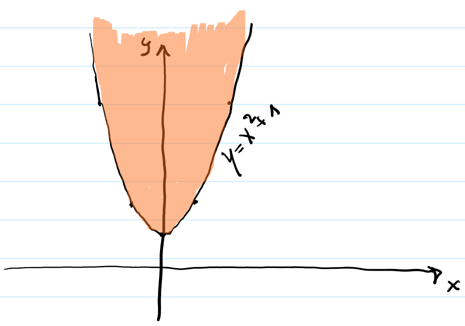
Determinare e rappresentare nel piano il dominio di f.

Dire se esso è un insieme aperto, chiuso, compatto, limitato

Stabilire se esiste il piano tangente al grafico di f in tutti i punti del suo dominio. In caso affermativo calcolare l'equazione del piano tangente nel punto $(0,2,f(0,2))$

Determinare anche $\frac{\partial f}{\partial v}(0,2)$ dove v è il versore di componenti $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

dom f: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 - 1 > 0\}$



Il dominio di f è quindi la regione di piano in arancione. I punti della parabola di equazione $y = x^2+1$ non appartengono al dominio.

Esso è un insieme aperto, illimitato (non è quindi chiuso, né compatto)

Poiché f è il quoziente delle funzioni $x\, e^{-x^2+y^2}$ e $\sqrt{y-x^2-1}$

(la prima è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, la seconda $C^\infty(\text{dom} f)$)

che sono entrambe derivabili con derivate parziali continue in ogni che sono entrambe derivabili con derivate parziali continue in ogni punto del dominio di f, per il teorema del differenziale, f è differenziabile nel suo dominio. Esiste quindi il piano tangente al grafico di f in tutti i punti del dominio.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(e^{-x^2+y^2} - 2x^2 e^{-x^2+y^2}\right)\sqrt{y-x^2-1} + x\, e^{-x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y-x^2-1}} \cdot x}{y-x^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy e^{-x^2+y^2}\sqrt{y-x^2-1} - x\, e^{-x^2+y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-x^2-1}}}{y-x^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = e^4 \qquad ; \qquad f(0,2) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 0$$

Il piano tg nel punto $(0,2,0)$ ha quindi equazione

$$z = 0 + e^4 x + 0(y-2) = e^4 x$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,2) = \nabla f(0,2) \cdot v = \frac{1}{3} e^4 .$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = x e^{-x} + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata a $y'' - y' = 0$ ha insieme

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Usiamo il metodo di similarità per determinare una soluzione particolare. Poiché il termine noto della equazione cioè $f(x) = x e^{-x} + 1$ è somma della funzione $x e^{-x}$ e della funzione costante di costante valore 1, applichiamolo separatamente alle equazioni:

$$y'' + y' = x e^{-x}$$

-1 è soluzione dell'omogenea associata quindi cerchiamo $\tilde{y}_1$ del tipo

$$\tilde{y}_1(x) = x\,(k_1 + k_2 x) e^{-x}$$

$$\tilde{y}_1'(x) = (k_1 + k_2 x) e^{-x} + x\, k_2 e^{-x} - x(k_1 + k_2 x) e^{-x}$$

$$y'' + y' = 1 \cdot (e^{0x})$$

0 è soluzione dell'omogenea associata, cerchiamo $\tilde{y}_2$ del tipo $\tilde{y}_2(x) = kx$;

$k = 1$, quindi $\tilde{y}_2(x) = x$

$$\tilde y_1'(x) = (k_1+k_2x)e^{-x} + x\,k_2\,e^{-x} - x(k_1+k_2x)\,e^{-x}$$

$$\tilde y_1''(x) = k_2e^{-x} - (k_1+k_2x)e^{-x} + k_2e^{-x} - xk_2e^{-x}$$
$$- (k_1+k_2x)e^{-x} - xk_2e^{-x} + x(k_1+k_2x)e^{-x}$$

Quindi $\tilde y_2''(x) + \tilde y_2'(x) =$

$$k_2e^{-x} - \cancel{(k_1+k_2x)e^{-x}} + k_2e^{-x} - \cancel{xk_2e^{-x}} - (k_1+k_2x)e^{-x} - xk_2e^{-x} + \cancel{x(k_1+k_2x)e^{-x}}$$
$$+ \cancel{(k_1+k_2x)e^{-x}} + \cancel{x\,k_2\,e^{-x}} - \cancel{x(k_1+k_2x)\,e^{-x}}$$
$$= (2k_2-k_1)e^{-x} - 2xk_2\,e^{-x}$$

Deve quindi essere $(2k_2-k_1-2xk_2)e^{-x} = xe^{-x}$

cioè $\begin{cases} 2k_2-k_1=0 \\ -2k_2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} k_2=-\frac{1}{2} \\ k_1=-1 \end{cases}$

Una soluzione particolare per l'equazione assegnata è dunque

$$\tilde y(x) = \tilde y_1(x)+\tilde y_2(x) = x\left(-1-\frac{1}{2}x\right)e^{-x} + x =$$

L'integrale generale è

$$y(x) = C_1 + C_2e^{-x} + x\left(1-\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{-x}\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = C_1 + C_2$$

$$y'(x) = -C_2e^{-x} + 1 - \left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{-x} + x\left(-\frac{1}{2}e^{-x} + \left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{-x}\right)$$

$$y'(0) = -C_2 + 1 - 1 = -C_2$$

$\begin{cases} -C_2=0 \\ C_1+C_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} C_2=0 \\ C_1=0 \end{cases}$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi $y(x) = x\left(1-\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{-x}\right)$

4) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per la convergenza di una serie numerica

Si veda uno dei manuali consigliati.

A.A. 2017/2018 Prova parziale 09 luglio 2018 Traccia A

1) (a) Stabilire che il modulo del numero complesso $z = (1-i)^8 e^{i\theta}$ è costante al variare di $\theta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo.

(b) Stabilire che la successione

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{1/3}(n+1) \right)_{n\in\mathbb{N}},$$

è limitata superiormente e illimitata inferiormente. Determinarne il valore di massimo.

8 pts.

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right).$$

Determinare inoltre i suoi asintoti. Stabilire infine che $x = \frac{5}{4}$ è un punto stazionario per f e che è un punto di massimo.

8 pts.

3) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1} \mathrm{d}x.$$

6 pts.

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

8 pts.

1) - a) Stabilire che il modulo del numero complesso

$$z = (1-i)^8 e^{i\theta}$$

è costante al variare di $\theta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo.

Poiché $\forall \theta \in \mathbb{R}$: $|e^{i\theta}| = 1$, $|z| = |(1-i)^8| \, |e^{i\theta}| = |(1-i)^8| = |1-i|^8$

$$\sqrt{2}^8 = 16$$

1)-b) Stabilire che la successione

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (*)$$

è limitata superiormente e illimitata inferiormente. Determinarne il massimo.

La successione assegnata è somma delle successioni

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \right)_{n\in\mathbb{N}} \quad e \quad \left(\log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Entrambe sono strettamente decrescenti in quanto composte da una successione strettamente crescente e una funzione strettamente decrescente:

$$n\in\mathbb{N} \mapsto n^2 \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \quad e \quad n\in\mathbb{N} \mapsto n+1 \longmapsto \log_{\frac{1}{3}}(n+1)$$

Quindi la successione $(*)$ è anch'essa strettamente decrescente e dunque

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right) = \max_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \log_{\frac{1}{3}}(0+1) = 1$$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right) = \lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) = 0 - \infty = -\infty$$

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \cos\left(\pi \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right)$.

Determinare inoltre i suoi eventuali asintoti. Stabilire infine che $x = \frac{5}{4}$ è un punto stazionario per f e che è un punto di minimo

dom f : $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ $\quad (-\infty, -1] \cup [1,2) \cup (2,+\infty)$

Cerchiamo gli asintoti orizzontali:

Osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x-2} = 1$

e $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \Big/ x-2 = -1$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \cos(\pi \cdot 1) = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cos(\pi \cdot (-1)) = -1$$

Dunque f ha asintoto orizzontale sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$

stabiliamo ora se f ha asintoto verticale in $x=2$

Poiché $\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \pm\infty$ e sappiamo che

$\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$ non esiste, f non ha asintoti verticali

Calcoliamo ora la derivata di f e verifichiamo che

$$f'(x) = -\pi \sin\left(\pi\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) \frac{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}(x-2) - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2}$$

$$= -\pi\sin\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) = \frac{x(x-2) - x^2+1}{(x-2)\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= -\pi\sin\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right)\frac{x^2-2x-x^2+1}{(x-2)\sqrt{x^2-1}} = -\pi\sin\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right)\frac{1-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'\left(\frac{5}{4}\right) = -\pi \sin\left(\frac{\pi\sqrt{\frac{9}{16}}}{\frac{5}{4}-2}\right)\frac{1-\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\sqrt{\frac{9}{16}}}$$

$$= -\pi \sin\frac{\pi\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} \frac{1-\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\frac{3}{4}} = -\pi\sin(-\pi)\,\_\_ = 0$$

Quindi $\frac{5}{4}$ è interno al dominio di f ed è un punto stazionario per f

$$f''(x) = -\pi^2\cos\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right)\left(\frac{1-2x}{(x-2)(\sqrt{x^2-1})}\right)^2 - \pi\sin\left(\frac{\pi\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) D\left(\frac{1-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$f''\left(\frac{5}{4}\right) = -\pi^2\cos(-\pi)\left(\frac{1-\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\frac{3}{4}}\right)^2 - 0 = \pi^2\left(\_\_\right)^2 > 0$$

Quindi $\frac{5}{4}$ è un punto di minimo locale forte per f.

Quindi $\frac{5}{4}$ è un punto di minimo locale forte per f.

Si poteva anche osservare che $f\left(\frac{5}{4}\right) = \cos(-\pi) = -1$
e poiché la funzione coseno non assume valori minori di -1
$x = \frac{5}{4}$ è un punto di minimo per f (assoluto) interno all'intervallo
$[1, 2]$ su cui f è derivabile; per il teorema di Fermat allora
deve essere $f'\left(\frac{5}{4}\right) = 0$.

3) Determinare $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}.$$ Quindi

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{x^2-1}\,dx = x + \int \frac{2}{(x-1)(x+1)}\,dx$$

$$= x - \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= x - \log|x+1| + \log|x-1| + c$$

4)

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle

Si veda, ad esempio, pag. 144 del manuale Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori 2002

A.A. 2017/2018 Prova parziale 9 luglio 2018 Traccia A

1) a) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+\sin n)^n}{n^{1+n}}.$$

b) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{2}{2^n}.$$

8 pts.

2) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = xe^{-x^2+y^2}$$

e studiarne la natura.

8 pts.

3) Determinare le eventuali soluzioni singolari e l'integrale generale, in forma implicita, dell'equazione

$$y' = xy^2 e^{x-\frac{1}{y}}.$$

Determinare inoltre la funzione $y = y(x)$ soluzione che in $x = 1$ vale 1.

8 pts.

4) Dare la definizione di dominio del piano, normale rispetto all'asse delle x. Dimostrare che un tale dominio è misurabile.

6 pts.

1)-a) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+\sin n)^n}{n^{n+1}}$$

Possiamo usare il criterio della radice (osserviamo che la serie è a termini non negativi)

$$\sqrt[n]{\frac{(1+\sin n)^n}{n^{n+1}}} = \frac{1+\sin n}{\sqrt[n]{n}\cdot n} \quad ; \text{ poiché } \sqrt[n]{n} \to 1 \text{ abbiamo}$$

$$\lim_n \frac{1+\sin n}{\sqrt[n]{n}\cdot n} = \lim_n \frac{1+\sin n}{n} = 0$$ e pertanto la serie assegnata converge

1)-b) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{2}{2^n}$$

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{2}{2^n} = 2\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^5}\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-5}} = \frac{1}{2^4}\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{2^h} =$$

$$= \frac{1}{2^4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

2) Sia $f(x,y) = x\, e^{-x^2+y^2}$

Determinare i punti critici di f e studiarne la natura

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2+y^2} - 2x^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\, e^{-x^2+y^2}\, 2y$$

$$\begin{cases} e^{-x^2+y^2}(1-2x^2) = 0 \\ 2e^{-x^2+y^2}\, xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ 1-2x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ e^{-x^2+y^2} = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

Abbiamo quindi due punti critici $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Poiché $f(x,y) = -f(-x,y)$, possiamo limitarci a studiare la sola natura di P_1

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x\, e^{-x^2+y^2}(1-2x^2) - 4x\, e^{-x^2+y^2} & (1-2x^2)\,2y\, e^{-x^2+y^2} \\ (1-2x^2)\,2y\, e^{-x^2+y^2} & 2e^{-x^2+y^2}x + 4y^2 x\, e^{-x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$\det\left(H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right) = -4/e < 0$ quindi P_1 è di sella (dunque anche P_2 è di sella).

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale (in forma implicita) dell'equazione

$$y' = x y^2 e^{x - 1/y}$$

Determinare poi la funzione $y = y(x)$ soluzione che in $x=1$ vale 1.

Si tratta di una equazione a variabili separabili dato che

$$y' = x e^x \, y^2 e^{-1/y}.$$

L'unica soluzione singolare è quindi $y \equiv 0$. Supponendo quindi che $y = y(x)$ non si annulli in alcun punto, possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per $y^2 e^{-\frac{1}{y}}$ ottenendo

$$\frac{y'}{y^2 e^{-\frac{1}{y}}} = x e^x \quad \text{da cui} \quad \int \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2}\, dy = \int x e^x \, dx$$

cioè $\quad -e^{\frac{1}{y}} = x e^x - e^x + c$

ossia $\quad e^{\frac{1}{y}} = e^x(1-x) + c. \quad (*)$

Questo è dunque l'integrale generale in forma implicita.

Determiniamo la soluzione $y = y(x)$ che in $x=1$ vale 1. Deve essere:

$y(1) = 1 \quad$ cioè $\quad e = e \cdot 0 + c \quad$ ossia $\quad c = e$

Da $(*)$, poiché il primo membro è positivo deduciamo che anche $e^x(1-x) + e$ deve essere positivo.

Quindi la soluzione che in 1 è uguale a 1 è

$$y(x) = \frac{1}{\log\left(e^x(1-x) + e\right)}$$

$$y(x) = \frac{1}{\log\left(e^{x}(1-x)+e\right)}$$

4) Dare la definizione di dominio del piano normale rispetto all'asse delle x
Dimostrare poi che un tale dominio è misurabile

Per la definizione si veda ad esempio pag. 201 del manuale "Elementi di Analisi Matematica due" di N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori 2001.

Per la dimostrazione della misurabilità di un insieme normale si ricordi che un insieme limitato del piano è misurabile se e solo se la sua frontiera è misurabile ed ha misura nulla. Poiché la frontiera di un dominio normale è unione di due segmenti e dei grafici di due funzioni continue e sappiamo che ognuno di questi è misurabile con misura nulla, la tesi è dimostrata.

A.A. 2017/2018 Prova parziale 10 settembre 2018 Traccia A

1) (a) Determinare in forma cartesiana le radici quadrate del numero complesso $z = 16e^{-i\pi/3}$.

(b) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \arctan(\arccos x).$$

Stabilire inoltre che f è monotona, specificando il tipo di monotonia. Determinarne poi l'immagine.

8 pts.

2) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi)^2 + \sin x}{e^{x-\pi} - 1};$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x^2+x)}{x^2+x};$$

si consideri poi la funzione $f(x) = \dfrac{\arctan(x^2+x)}{x^2+x}$ e si mostri che è definitivamente strettamente decrescente per $x \to +\infty$.

8 pts.

3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x + 1} \mathrm{d}x.$$

6 pts.

4) Dare la definizione di punto di minimo relativo per una funzione reale di variabile reale. Enunciare poi il teorema di Fermat e dimostrarlo nel caso di un punto di minimo relativo.

8 pts.

1) - a) Determinare in forma cartesiana, le radici quadrate del numero complesso

$$16\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Il numero assegnato è in forma esponenziale. Possiamo ricavare le sue due radici quadrate in forma esponenziale e poi determinarne la forma cartesiana

$$z_1 = \sqrt{16}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = 4\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_2 = \sqrt{16}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{2}\right)} = 4\, e^{i\frac{5}{6}\pi} = 4\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

b) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\arccos x)$$

stabilire inoltre che f è monotona specificando il tipo di monotonia. Della funzione de Determinarne poi l'immagine.

f è composta dalle funzioni $g(x) = \operatorname{arctg} x$ e $h(x) = \arccos x$

$f = g \circ h$. Poiché il dominio di h è l'intervallo $[-1,1]$

(e g è definita su $\mathbb{R}$) anche il dominio di f è $[-1,1]$

Poiché h è strett. decrescente e g è strett. crescente

f è strett. decrescente. Essendo h e g continue,

anche f è continua e la sua immagine è

quindi l'intervallo $[f(1), f(-1)]$ cioè $[0, \operatorname{arctg}\pi]$

2) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi)^2 + \sin(x)}{e^{x-\pi} - 1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2+x}$

Si consideri poi la funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2+x}$ e

si mostri che è definitivamente strettamente decrescente per $x\to+\infty$

a) posto $x-\pi=y$ il limite assegnato è uguale

a $\lim_{y\to 0} \frac{y^2+\sin(y+\pi)}{e^y-1} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2-\sin y}{e^y-1}$

$= \lim_{y\to 0} \sin y \left(\frac{y^2}{\sin y} - 1 \right) \Big/ e^y - 1$

$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \left(\frac{y^2}{\sin y} - 1 \right) \Big/ \frac{e^y-1}{y}$

$= 1 \left(1 \cdot 0 - 1 \right) \big/ 1 = -1$

b) $\left| \frac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2+x} \right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2+x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2+x} = 0$

Al fine di rispondere all'ultimo quesito, calcoliamo la derivata di f

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+(x^2+x)^2}(2x+1)(x^2+x) - \operatorname{arctg}(x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

Poiché il denominatore di f' è positivo per $x>0$ il segno di f' (per $x>0$) è uguale al segno del suo denominatore cioè al segno di

$(2x+1)\left(\frac{x^2+x}{1+(x^2+x)^2} - \operatorname{arctg}(x^2+x) \right)$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} (2x+1)\left(\frac{x^2+x}{1+(x^2+x)^2} - \operatorname{arctg}(x^2+x) \right)$

$= +\infty \left(0 - \frac{\pi}{2} \right) = -\infty$, per il teorema della permanenza del segno, f' è negativa in un intorno di $+\infty$, e di conseguenza f è strettamente decrescente nello stesso intorno, che era quello che si voleva mostrare.

3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x + 1}\, dx$$

Posto $\sin x = t$, per sostituzione l'integrale diviene $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+t+1}\, dt = \int \frac{1}{t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\, dt$

$$= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dt$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\, \operatorname{artg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{artg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

4) Dare la definizione di punto di minimo relativo per una funzione reale di variabile reale. Enunciare poi il teorema di Fermat e dimostrarlo nel caso di un punto di minimo relativo.

Si veda, ad esempio, il manuale consigliato "Elementi di Analisi Matematica 1" di P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori 2002, pagg. 141, 142

A.A. 2017/2018 Prova parziale 10 settembre 2018 Traccia A

1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{x^2}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme del piano definito da $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2;\ \frac{1}{2}y^2 < x < y^2\}$.

7 pts.

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2(y - x + 1)^2 + 1)^{1/2}}$$

e stabilire che essa è differenziabile sullo stesso. Calcolare quindi l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $\big(1, 1, f(1, 1)\big)$. Determinare infine i suoi punti stazionari stabilendone anche la natura

9 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y + e^{x^3/2} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Dare la definizione di serie numerica. Specificare, poi, cosa si intende per serie regolare. Dimostrare infine che le serie a termini non negativi sono regolari.

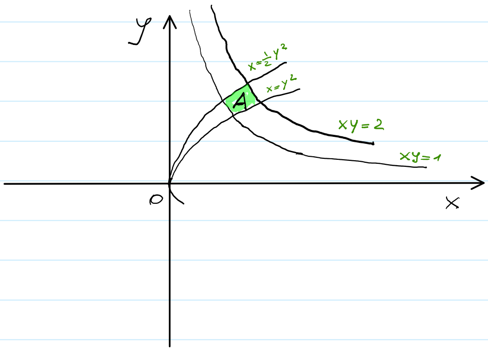
6 pts.

1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{x^2}{y}\,dx\,dy,$$

dove $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2 \,,\ \frac{1}{2}y^2 < x < y^2 \}$.

Rappresentiamo l'insieme A nel piano (in verde)



Conviene considerare il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{x}{y^2} = v \end{cases} \quad (*) \;;$$

l'insieme A nel piano $\{u,v\}$ è dato da $1 < u < 2$ e $\frac{1}{2} < v < 1$ cioè è il rettangolo $[1,2] \times [\frac{1}{2}, 1]$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ \dfrac{1}{y^2} & -\dfrac{2x}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = -\frac{2x}{y^2} - \frac{x}{y^2} = -3\frac{x}{y^2} = -3v$$

Quindi $\left|\left| \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|\right| = \left| -\dfrac{1}{3v} \right| = \dfrac{1}{3v}$

La funzione integranda composta con la inversa della trasforma $(*)$ è data da

$$\frac{x^2}{y} = \frac{x^2 y}{y^2} = \frac{x}{y^2}\, xy = vu$$

L'integrale assegnato nelle coordinate $\{u,v\}$ è quindi dato da

$$\int vu \cdot \frac{1}{3v}\, du\, dv = \frac{1}{3} \int_1^2 u\, du \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1} dv$$

$$\int_{[1,2]\times[\frac{1}{2},1]} vu \cdot \frac{1}{3v}\, du\, dv = \frac{1}{3}\int_1^2 u\, du \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 dv$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}u^2\Big|_1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}(4-1) = \frac{1}{4}$$

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2(y-x+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

e stabilire che essa è differenziabile sullo stesso.
Calcolare quindi l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(1,1,f(1,1))$
Determinare infine i suoi punti stazionari stabilendone la natura

Osserviamo che $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$, poiché l'argomento della funzione radice quadrata al denominatore, e cioè il polinomio $g(x,y) = x^2(y-x+1)^2+1$ assume valori positivi.
Poiché f è composta dunque dalle funzioni g e $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ che sono di classe C^∞ rispettivamente su $\mathbb{R}^2$ e su $(0,+\infty)$, f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ e dunque è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ per il teorema del differenziale.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2(y-x+1)^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left(-2x(y-x+1)^2+2x^2(y-x+1)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2(y-x+1)^2+1)^{3/2}}\left(-2x^2(y-x+1)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2^{5/2}}(-2+2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2^{5/2}}(-2) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

L'equazione del piano tangente nel punto $(1,1,f(1,1))$ è dunque

$$z = f(1,1) + 0\cdot(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1)$$

$z = f(1,1) + 0\cdot(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1)$

Cerchiamo ora i punti stazionari di f.

Osserviamo che il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} -2x(y-x+1)^2 + 2x^2(y-x+1) = 0 \\ -2x^2(y-x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(y-x+1)(-y+x-1+x) = 0 \\ x^2(y-x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-x+1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

quindi le rette $x=0$ e $y=x-1$ sono rette di punti critici

Poiché lungo entrambe tali rette f assume il valore 1, cerchiamo di studiare il segno di $f(x,y) - 1$ cioè

$$\frac{1 - \sqrt{x^2(y-x+1)^2+1}}{\sqrt{x^2(y-x+1)^2+1}}$$

Ovviamente il segno di tale funzione è uguale al segno del suo numeratore. Poiché $x^2(y-x+1)^2 + 1 \geq 1$ è non negativa

$\sqrt{x^2(y-x+1)^2+1} \geq \sqrt{1} = 1$ cioè $1 - \sqrt{x^2(y-x+1)^2+1} \leq 0$

e quindi sia i punti della retta $x=0$ che quelli di $y-x+1=0$ sono punti di massimo locale non forte

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y + e^{x^3/2} \\ y(-1) = 0 \end{cases} \quad (\square)$$

Sappiamo che la soluzione di (□) è data da

$$y(x) = e^{\int_{-1}^{x} t^2\,dt} \left(0 + \int_{-1}^{x} e^{-\int_{-1}^{t} s^2} \cdot e^{t^3/2}\,dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{3}(x^3+1)} \cdot \int_{-1}^{x} e^{-\frac{1}{3}(t^3+1)} e^{t^3/2}\,dt$$

$$= e^{\frac{1}{3}(x^3+1)} \cdot \int_{-1}^{x} e^{-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3} + \frac{t^3}{2}}\,dt = e^{\frac{1}{3}(x^3+1)} e^{-\frac{1}{3}} \int_{-1}^{x} e^{t^3/6}\,dt$$

$$= e^{x^3/3} \int_{-1}^{x} e^{t^3/6}\,dt .$$

4) Dare la definizione di serie numerica. Specificare poi cosa si intende per serie numerica regolare. Dimostrare infine che le serie a termini non negativi sono regolari

Si veda, ad esempio, il manuale consigliato "Elementi di Analisi Matematica 1" di P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori 2002, pagg. 259, 263, 264

A.A. 2017/2018 Prova parziale 9 novembre 2018 Traccia A

1) a) Stabilire se la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\log(n+1)}{n^2+1}.$$

b) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^n}{\pi^{n+1}}.$$

7 pts.

2) Stabilire che la funzione

$$f(x,y) = (x-y+1)(y-x^2)^2$$

è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $\big(1,1,f(1,1)\big)$. Determinare infine i suoi punti stazionari stabilendone anche la natura

9 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' + y = x + e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Dare la definizione di insieme normale rispetto all'asse delle x. Dare poi la formula di riduzione per l'integrale di una funzione $f(x,y) = g(x)h(y)$ continua su un rettangolo $[a,b] \times [c,d]$.

6 pts.

1) a) Stabilire se la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\log(n+1)}{n^2+1}$$

b) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^n}{\pi^{n+1}}$$

a) Possiamo usare il criterio degli infinitesimi: poiché $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$

è sufficiente moltiplicare la successione $\frac{\sqrt{n}\log(n+1)}{n^2+1}$ per n^α con

$\alpha \in (1, \frac{3}{2})$. Infatti, per tali α, $\frac{n^\alpha\sqrt{n}\log(n+1)}{n^2+1} \sim \frac{\log(n+1)}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}} \to 0$

dato che $\frac{3}{2} - \alpha > 0$, quindi la serie converge.

b) $$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^n}{\pi^{n+1}} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{e}{\pi}\right)^3\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^k$$

Poiché $\frac{e}{\pi} \in (-1,1)$, la somma della serie è $\frac{e^3}{\pi^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{e}{\pi}} = \frac{e^3}{\pi^3(\pi-e)}$

2) Stabilire che la funzione

$$f(x,y) = (x-y+1)(y-x^2)^2$$

è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,f(1,1))$.

Determinare infine i punti stazionari di f e studiarne la natura

f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ in quanto è un polinomio (le sue derivate parziali sono definite su $\mathbb{R}^2$ e sono polinomi, quindi sono continue)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y-x^2)^2 + (x-y+1)\,2(y-x^2)(-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -(y-x^2)^2 + (x-y+1)\,2(y-x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0+0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0+0 = 0$$

L'equazione del piano tangente cercato è quindi $z = f(1,1) = 0$

Cerchiamo tutti i punti critici di f. Deve essere

$$\begin{cases} (y-x^2)^2 + (x-y+1)\,2(y-x^2)(-2x) = 0 \\ -(y-x^2)^2 + (x-y+1)\,2(y-x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y+1)(y-x^2)(1-2x) = 0 \\ -(y-x^2)^2 + (x-y+1)\,2(y-x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ -\left(y-\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}-y\right)\left(y-\frac{1}{4}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \left(y-\frac{1}{4}\right)\left(3-2y-y+\frac{1}{4}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} P_1 \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{13}{12} \end{cases} P_2$$

$$\iff \begin{cases} y-x^2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ Tutti i punti della parabola $\wp$ di equazione $y=x^2$ sono critici

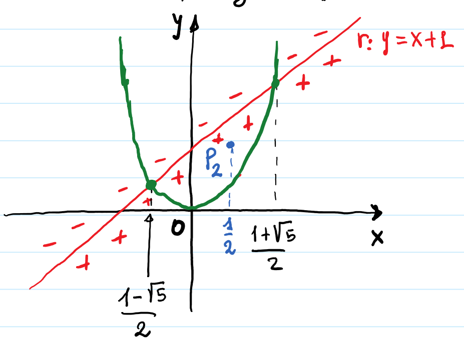
$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ -(y-x^2)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x-x^2+1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ y = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono comunque punti appartenenti alla parabola di equazione $y=x^2$.

Osserviamo che anche $P_1 \in \wp$. L'unico punto critico che non appartiene a $\wp$ è dunque P_2.

Per studiare la natura di un qualunque punto $(\bar{x},\bar{y}) \in \wp$, basta osservare che

$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y)$ e il segno di f dipende solo dal segno del polinomio $x-y+1$. Pertanto per $\bar{x} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\bar{x} < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $(\bar{x},\bar{y})$ è di massimo



per $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \bar{x} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $(\bar{x},\bar{y})$ è di minimo

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}\right)$ e $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}\right)$ sono di sella

Poiché P_2 è interno all'insieme compatto avente bordo da $\wp \cup r$ e f è nulla su tale bordo, risulta che P_2 è di massimo locale forte dato che

$$f(P_2) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{12} + 1\right)\left(\frac{13}{12} - \frac{1}{4}\right)^2 > 0$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' + y = x + e^x \quad (\square) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata $y''-y'+y=0$ è $\lambda^2-\lambda+1=0$

che ha soluzioni $\lambda_{\frac{1}{2}} = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$; quindi l'integrale generale di $y''-y'+y=0$

è $y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

Cerchiamo una soluzione particolare di $(\square)$ con il metodo di similarità applicato separatamente alle equazioni

$y'' - y' + y = x$ e $y'' - y' + y = e^x$

$\tilde{y}_1(x) = ax + b$

$-a + ax + b = x$ da cui

$\begin{cases} b - a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$ quindi

$\tilde{y}_1(x) = x + 1$

$\tilde{y}_2(x) = c e^x$

$ce^x - ce^x + ce^x = e^x$ da cui $c = 1$

cioè $\tilde{y}_2(x) = e^x$

Pertanto l'integrale generale di ($\square$) è $y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + x + 1 + e^x$

$0 = y(0) = c_1 + 2$ da cui $c_1 = -2$

$y'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}\left(-2\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + e^{\frac{x}{2}}\left(-2\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}x) + c_2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\sqrt{3}x)\right) + 1 + e^x$

$0 = y'(0) = \frac{1}{2}(-2) + c_2\frac{\sqrt{3}}{2} + 2$ da cui $c_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(-2\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + x + 1 + e^x$

4) Dare la definizione di insieme normale rispetto all'asse delle x.

Dare poi la formula di riduzione per l'integrale di una funzione

$f(x,y) = g(x)\,h(y)$ continua su un rettangolo $[a,b] \times [c,d]$

$A \subset \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse delle x se $\exists\ \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue

tali che $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a,b] \text{ e } \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$

Dalla formula di riduzione su un insieme normale rispetto all'asse delle x

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)\,h(y)\,dy\right) dx = \int_a^b g(x)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right) dx$$

$$= \left(\int_c^d h(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$