Politecnico di Bari
CdL Ingegneria Informatica e Automazione
AA 2012-2013

Complementi di Analisi Matematica
Tracce di esame (con svolgimenti)

Docente: Dott. E. Caponio

A.A. 2012/2013 Appello 11 Luglio 2013 Traccia A

1) Studiare la convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^n - 1)x}{e^n}.$$

Dire poi, motivando la risposta, su quali intervalli la serie converge totalmente.

2) Enunciare e dimostrare almeno un teorema per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze.

3) Determinare e rappresentare sul piano l'immagine dell'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}z \in [-1, 1],\ \mathrm{Im}z \in [0, \pi]\},$$

mediante la funzione esponenziale in $\mathbb{C}$.

4) Determinare la funzione armonica coniugata di $u(x, y) = 2x + y - 2$ che sui punti della retta di equazione $y = x/2$ sia uguale a 1.

5) Dare la definizione di residuo all'infinito per una funzione $f \in H(\mathbb{C} \setminus K)$, con K sottoinsieme limitato di $\mathbb{C}$. Dimostrare, poi, che $\mathrm{Res}(f, \infty) = \mathrm{Res}\Big(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\Big)$.

6) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2 + x + 1} \mathrm{d}x$$

Per gli anni accademici precedenti al 2012/2013, si sostituiscano gli esercizi 4) e 5) con i seguenti:

4) Calcolare come serie il seguente integrale

$$\int_0^1 \cos(x^3)\mathrm{d}x$$

5) Dare la definizione di residuo in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ per una funzione $f \in H(D'(z_0, \delta))$, $\delta > 0$. Dimostrare, poi che per un polo di ordine 1,

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Possibile svolgimento prova del 11/07/2013

1) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^n-1)x}{e^n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{e^n}}_{1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{e^n}}_{2}$$

1 : è una serie di potenze; il coefficiente a_n è $\frac{1}{e^{n-1}}$,

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{e^{n-1}}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{e}{e^n}} = \frac{1}{e}$$

Dunque il suo raggio di convergenza è $\rho = e$.
Per $x = e$ si ottiene la serie numerica definita dalla successione costante di costante valore e e quindi diverge positivamente. Per $x = -e$ si ottiene $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} e$ e quindi è indeterminata.

2 : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{e^n} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n} \in \mathbb{R}$

Dunque la serie di partenza converge puntualmente sull'intervallo $(-e, e)$.

Essa converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[-a, a]$ con $0 \leq a < e$ dato che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{(x^n-1)x}{e^n} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{e^n} + \frac{|x|}{e^n} \leq \frac{a^{n+1}}{e^n} + \frac{a}{e^n}, \ \forall x \in [-a, a], \quad e$$

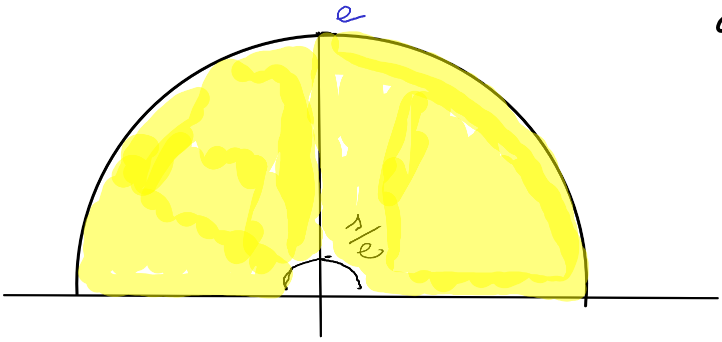
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^{n+1}}{e^n} + \frac{a}{e^n} \right) = a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{e}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n} \right).$$

La prima serie converge in quanto serie geometrica di ragione $\frac{a}{e} \in (-1, 1)$ moltiplicata per a; la seconda converge come si può vedere subito usando, ad esempio, il criterio della radice.

2) Si veda, ad esempio, p. 37 degli appunti

3) Sia $z \in A$, $z = x + iy$

$e^z = e^x e^{iy}$. Dunque l'immagine di A mediante la funzione esponenziale è data da tutti i numeri complessi che hanno modulo $\rho = e^x$, $x \in [-1, 1]$, (e cioè $\frac{1}{e} \leq \rho \leq e$) e argomento principale uguale a $y \in [0, \pi]$. Quindi essa è l'insieme colorato in giallo.



4) Deve essere $v_y = u_x$ e $v_x = -u_y$

Dunque $v_y(x,y) = 2$ e $v_x(x,y) = -1$

Integrando rispetto a y la prima equazione otteniamo

$v(x,y) = 2y + g(x)$, dove g è una qualunque funzione di classe C^∞ su $\mathbb{R}$. Dalla seconda equazione

$g'(x) = -1$, cioè $g(x) = -x + c$

Dunque $v(x,y) = 2y - x + c$. Poiché sui punti della retta $y = \frac{x}{2}$, v deve valere 1 otteniamo che $c = 1$.

5) Si veda ad esempio p. 125 degli appunti.

6) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+x+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{2(x^2+x+1)}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i3x}}{2(x^2+x+1)}\,dx$$

Sia $f(z) = \dfrac{1}{2(z^2+z+1)}$, $g_1(z) = e^{i3z} f(z)$ e $g_2(z) = e^{-i3z} f(z)$.

Poiché $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$,

possiamo usare il lemma di Jordan per il semipiano dei numeri con parte immaginaria positiva e la sua versione per l'altro semipiano

Pertanto, dato che $\dfrac{\cos(3x)}{x^2+x+1}$ è assolutamente integrabile su $(-\infty,+\infty)$, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{2(x^2+x+1)}\,dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(g_1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$= 2\pi i \, e^{i\frac{3}{2}(-1+\sqrt{3}i)} \Big/ 2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi i \, e^{i\frac{3}{2}(-1+\sqrt{3}i)}}{\sqrt{3}\,i} = \frac{\pi\, e^{i\frac{3}{2}(-1+\sqrt{3}i)}}{\sqrt{3}}$$

Analogamente $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i3x} \Big/ 2(x^2+x+1)\,dx = -2\pi i\,\mathrm{Res}\left(g_2, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$= \frac{-2\pi i\, e^{-i\frac{3}{2}(-1-\sqrt{3}i)}}{2\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)} = -\frac{\pi\, e^{-i\frac{3}{2}(-1-\sqrt{3}i)}}{-\sqrt{3}}$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+x+1}\,dx = \frac{\pi\, e^{-i\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\, e^{+i\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}} \left(e^{-i\frac{3}{2}} + e^{i\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{3}{2}\right) e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

A.A. 2012/2013 Appello 3 Settembre 2013 Traccia A

1) Studiare la convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2+1} - 1.$$

Stabilire inoltre se la convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$ e, in caso contrario, su un qualunque insieme del tipo $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, $a > 0$.

2) Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. Dimostrare che se essa converge in $\bar{z} \in \mathbb{C}$ allora converge in modulo per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z - z_0| < |\bar{z} - z_0|$.

3) Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z^2-1)(z-i)} \mathrm{d}z,$$

dove γ è l'ellisse avente asse maggiore di estremi i punti 0 e $2i$ e asse minore di lunghezza 1 percorso in senso orario. Dire, inoltre, motivando la risposta, se il risultato cambia considerando un ellisse con stesso asse maggiore, stesso orientamento, asse minore di lunghezza $a > 0$.

4) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Dare la definizione di selezione α del logaritmo. Determinare poi e rappresentare sul piano il sottoinsieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ per cui $\mathrm{Log}_0(z) = \mathrm{Log}_\pi(z)$.

5) Enunciare e dimostrare il II teorema dei residui.

6) Scrivere la serie di soli coseni della funzione $f(x) = (x-1)^2$, $x \in [0,1]$. Stabilire poi che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Per l'anno accademico 2009/2010, si sostituisca l'esercizio 6) con il seguente:

6) Scrivere la serie di Fourier della $f(x) = (x-1)^2$, $x \in [-1,1]$ e se ne discuta la convergenza puntuale e uniforme.

Possibile svolgimento prova del 03/09/2013

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n(0) = -1$

Per $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f_n(\bar{x}) \longrightarrow -1$

Per cui la funzione costante di costante valore -1 è la funzione limite puntuale della successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su $\mathbb{R}$.

Studiamo la convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.

$$\left| f_n(x) - (-1) \right| = \frac{|nx|}{n^2x^2+1}$$

Consideriamo, per n fissato in $\mathbb{N}$, la funzione

$g_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Tale funzione è dispari, per cui possiamo limitarci a studiarla sull'intervallo $[0,+\infty)$

$$g_n'(x) = \frac{n^3x^2 + n - 2n^3x^2}{(n^2x^2+1)^2},$$

per cui $g_n'(x) > 0$ in $[0,+\infty)$ se e solo se $0 \le x < \frac{1}{n}$

dunque le funzioni $|f_n(x)+1|$ assumono massimo assoluto su $\mathbb{R}$ nei punti $x_n^1 = \frac{1}{n}$ e $x_n^2 = -\frac{1}{n}$

Chiaramente $\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right)+1 \right| = \left| f_n\left(-\frac{1}{n}\right)+1 \right| = \frac{1}{2}$

e quindi la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$

Su un insieme A del tipo $(-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$, $a>0$

$$\max_{x\in A} \left| f_n(x) + 1 \right| = \left| f_n(a) + 1 \right| = \frac{na}{n^2a^2+1}$$

Poiché $\dfrac{na}{n^2a^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, la convergenza è uniforme su A.

2) Si veda ad esempio p. 34 degli appunti

3) Sia $g(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^2-1}$; g è olomorfa sul dominio aperto avente per bordo l'ellisse γ e quindi dalla I formula di rappresentazione di Cauchy

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{z-i}\,dz = -2\pi i\, g(i) = -2\pi i \frac{e^{-1}}{-2} = \frac{\pi i}{e}$$

Se considerassimo l'integrale su un qualunque ellisse γ_a come descritto nella traccia il risultato sarebbe lo stesso in quanto la funzione g continuerebbe ad essere olomorfa sul dominio avente per frontiera γ_α e la formula di rappresentazione di Cauchy darebbe ancora

$$\int_{\gamma_\alpha} \frac{g(z)}{z-i}\,dz = -2\pi i\, g(i)$$

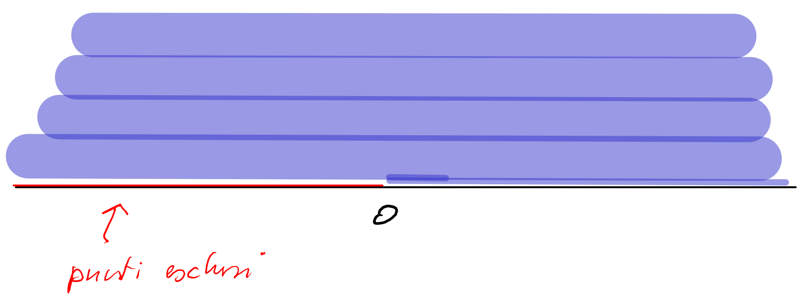
4) $\operatorname{Log}_\alpha(z) = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\bar{k}\pi)$
dove k_α è l'intero per cui $\operatorname{Arg} z + 2\bar{k}\pi \in [\alpha-\pi, \alpha+\pi)$

$\log_0(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$

$\log_\pi(z) = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\bar{k}\pi)$
con $\bar{k}$ in modo che $\operatorname{Arg} z + 2\bar{k}\pi \in [0, 2\pi)$

Per cui se z è un numero complesso tale che $\operatorname{Arg} z \in [0,\pi)$

$\log_0(z) = \log_\pi(z)$,
dato che è sufficiente prendere $\bar{k}=0$ per avere
$\operatorname{Arg} z + 2\pi\bar{k} \in [0, 2\pi)$ quando $\operatorname{Arg} z \in [0,\pi)$
Tale insieme è rappresentato in figura in blu



5) Si vede, ad esempio, p. 127 degli appunti

6) $b_k = 0$

$$a_0 = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$a_k = 2\int_0^1 (x-1)^2 \cos(\pi k x)\, dx =$$

$$= 2(x-1)^2 \frac{\sin(\pi k x)}{\pi k}\Big|_0^1 - \frac{4}{\pi k}\int_0^1 (x-1)\sin(\pi k x)\, dx$$

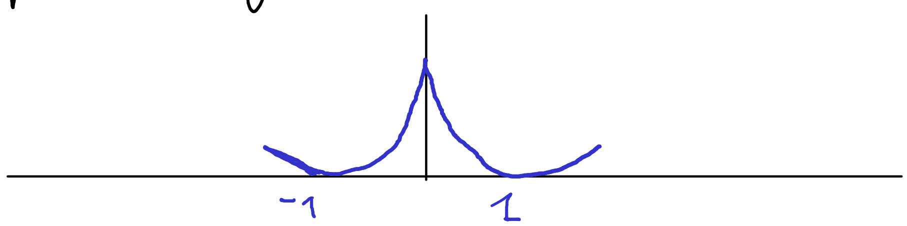
$$= 0 + \frac{4}{(\pi k)^2}(x-1)\cos(\pi k x)\Big|_0^1 - \frac{4}{(\pi k)^2}\int_0^1 \cos(\pi k x)\, dx$$

$$= \frac{4}{(\pi k)^2} - \frac{4}{(\pi k)^3}\sin(\pi k x)\Big|_0^1 = \frac{4}{(\pi k)^2}$$

Per cui la serie di soli coseni di f è

$$\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k x)$$

Poiché l'estensione periodica di periodo 2 dell'estensione pari di f sull'intervallo $[-1,1]$ è continua ed è di classe C^∞ su un intorno del punto 1,



tale serie converge in 1 a $f(1) = 0$

cioè
$$\frac{1}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2} = 0$$

da cui
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

A.A. 2012/2013 Appello 23 Settembre 2013 Traccia A

1) Determinare l'insieme di convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\log k} \left(x - \frac{1}{2} \right)^k .$$

Stabilire poi su quali insiemi la convergenza è uniforme.

2) Dare la definizione di funzione complessa analitica in un punto z_0 di un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Fornire poi un paio di esempi di funzioni analitiche su tutto il piano complesso. Dire infine, motivando la risposta, perché una funzione analitica su Ω è ivi olomorfa.

3) Dare la definizione di polo semplice. Dimostrare che il residuo in $z_0 \in \mathbb{C}$ per una funzione avente un polo semplice in z_0 è uguale a $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

4) Dire, motivando la risposta, se l'insieme $\left\{ \frac{k}{k^2+1} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ possa essere l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ che non sia costante di costante valore 0.

5) Calcolare l'integrale

$$\int_{C^+} \frac{z^2 - 1}{z^3 + 1} \mathrm{d}z,$$

dove C^+ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

6) Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in [0, \pi) \\ 0 & \text{se } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

estesa per periodicità su $\mathbb{R}$ con periodo 2π. Discuterne poi convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$.

Possibile svolgimento prova del 23/09/2013

1) Si tratta di una serie di potenze. Il raggio di convergenza è dato da $\rho = 1$ poiché

$$\lim_k \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_k \frac{\log k}{\log(k+1)} = \lim_k \frac{\log k}{\log k + \log(1+\frac{1}{k})} = 1$$

Poiché il centro della serie è $x_0 = \frac{1}{2}$, l'intervallo di convergenza è dato da $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Per $x = -\frac{1}{2}$, la serie diviene: $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\log k} (-1)^k =$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\log k} = +\infty$$

Per $x = \frac{3}{2}$, la serie diviene: $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}$ che converge per il criterio di Leibniz.

Pertanto l'insieme di convergenza è l'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e per il teorema di Abel la convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $\left[-\frac{1}{2}+\varepsilon, \frac{3}{2}\right]$, con $\varepsilon \in (0, 2]$

2) si veda, ad esempio, p. 49 degli appunti per la definizione e p. 47 per il fatto che una funzione analitica è olomorfa

3) Si veda, per esempio, p. 114 degli appunti per la definizione e p. 124 per il residuo in un ~~polo~~ semplice

4) Poiché 0 è punto di accumulazione per l'insieme $\left\{\frac{k}{k^2+1}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ (infatti $\lim_{k \to \infty} \frac{k}{k^2+1} = 0$)

se esistesse una tale funzione per il principio di identità delle funzioni olomorfe dovrebbe essere la funzione costante di costante valore 0 (equivalentemente: se l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa ha un punto di accumulazione allora tale funzione è costante di costante valore 0 (p. 80))

5) La funzione integranda ha 3 singolarità al finito date da $\sqrt[3]{-1}$. Queste appartengono al disco aperto di centro 0 e raggio 2, dunque $f \in H(\mathbb{C} - \{\sqrt[3]{-1}\})$ e direttamente

dalla definizione di residuo all'infinito

$$\int_{C^+} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty)$$

Oppure si ragioni così: per il I teorema dei residui

$$\int_{C^+} \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{3} \operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^3+1}, z_j\right),$$

dove z_j sono le 3 radici cubiche di -1.

Per il II teorema dei residui

$$\sum_{j=1}^{3} \operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^3+1}, z_j\right) = -\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^3+1}, \infty\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^3+1}, \infty\right) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2}\frac{\frac{1}{z^2}-1}{\frac{1}{z^3}+1}, 0\right) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z}\frac{1-z^2}{1+z^3}, 0\right)$$

$= -1$ dato che 0 è un polo semplice per la funzione

$-\frac{1}{z}\frac{1-z^2}{1+z^3}$ e $\lim_{z\to 0} z\left(\frac{-1}{z}\frac{1-z^2}{1+z^3}\right) = -1$

dunque $$\int_{C^+} \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = 2\pi i\cdot(1) = 2\pi i$$

c)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}\pi^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\cos(kx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(1-x)\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot 0 \quad - \frac{1}{k^2\pi}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k^2\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\sin(kx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-(1-x)\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left(-(1-\pi)(-1)^k+1\right) + 0 = \frac{1}{k\pi}\left((\pi-1)(-1)^k+1\right)$$

La serie di Fourier di f è dunque data da

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\pi}\left(1-(-1)^k\right)\cos(kx)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\left((\pi-1)(-1)^k+1\right)\sin(kx)$$

essa converge puntualmente ad f su $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$

Nei punti del tipo $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, converge a $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}=\frac{\overbrace{f((2k\pi)^+)}^{1}+\overbrace{f((2k\pi)^-)}^{0}}{2}\right).$$

Nei punti del tipo $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, converge $\frac{1-\pi}{2}$

$$\left(\frac{1-\pi}{2}=\frac{\overbrace{f(((2k+1)\pi)^+)}^{0}+\overbrace{f(((2k+1)\pi)^-)}^{1-\pi}}{2}\right)$$

La convergenza a f è uniforme su ogni intervallo del tipo $[k\pi+\varepsilon,(k+1)\pi-\varepsilon]$, $k\in\mathbb{Z}$, $\varepsilon\in(0,\pi)$

A.A. 2012/2013 Appello 11 Novembre 2013 Traccia A

1) Determinare la funzione f limite puntuale in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{10\sqrt{n} - \sin(n^2 x)}{n}.$$

Stabilire poi se (f_n) converge uniformemente ad f su $\mathbb{R}$.

2) Dare la definizione di funzione reale analitica in un intervallo (a, b). Sia poi $f \in C^\infty\big((a, b)\big)$; fornire una condizione sufficiente perché f sia analitica in (a, b).

3) Determinare l'insieme dei numeri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$\operatorname{Log}_0(i - 1) = \operatorname{Log}_\alpha(i - 1).$$

4) Dare la definizione di zero isolato per una funzione $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω aperto. Dimostrare poi che per una funzione f olomorfa in Ω, $z_0 \in \Omega$ è uno zero isolato di f se e solo z_0 è uno zero di ordine finito.

5) Determinare le singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{1 - e^{z^2}},$$

specificandone il tipo.

6) Usando il metodo dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t) - \sin t}{\sin t + 2} \mathrm{d}t.$$

Possibile svolgimento prova del 11/11/13

1) Fissato $\bar{x} \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{10\sqrt{n} + \sin(n^2 \bar{x})}{n} \right| \leq \frac{10\sqrt{n} + 1}{n} \quad , \forall n$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

$$0$$

Quindi $\lim_n f_n(\bar{x}) = 0 \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}$, cioè la funzione limite puntuale su $\mathbb{R}$ è la funzione di costante valore 0.

Poiché fissato $\bar{n} \in \mathbb{N}$, come sopra si ha $\left| f_{\bar{n}}(x) - 0 \right| \leq \frac{10\sqrt{\bar{n}} + 1}{\bar{n}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

la convergenza a è anche uniforme su $\mathbb{R}$.

2) Si veda, per esempio, pag 49 degli appunti per la definizione e pag. 52 per una condizione sufficiente.

3) $\operatorname{Log}_0 (i-1) = \log\sqrt{2} + i\frac{3}{4}\pi$

$\operatorname{Log}_\alpha (i-1) = \log\sqrt{2} + i\beta$, con β argomento di $i-1$ che appartiene all'intervallo $[\alpha - \pi, \alpha + \pi)$.

Affinché $\operatorname{Log}_\alpha (i-1)$ sia uguale a $\operatorname{Log}_0 (i-1)$ deve quindi essere $\beta = \frac{3}{4}\pi$ e cioè $\alpha - \pi \leq \frac{3}{4}\pi < \alpha + \pi$ da cui

$\alpha \leq \frac{3}{4}\pi + \pi = \frac{7}{4}\pi$ e $\alpha > \frac{3}{4}\pi - \pi = -\frac{\pi}{4}$

Quindi l'uguaglianza è soddisfatta se e solo se $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right]$

4) Si veda, ad esempio, pag. 79 degli appunti.

5) Le singolarità al finito di f sono tutti gli zeri della funzione al denominatore $1-e^{z^2}$ e cioè

$$z^2 = \mathrm{Log}\, 1 = \log 1 + i(0+2k\pi) = i\,2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

quindi per $k=0$ abbiamo $z^2=0$ cioè $z=0$

per $k>0$; $z = \sqrt{i\,2k\pi} = \begin{cases} \sqrt{2k\pi}\, e^{i\pi/4} \\ \sqrt{2k\pi}\, e^{i\frac{5}{4}\pi} \end{cases}$

per $k<0$, $z = \sqrt{i\,2k\pi} = \begin{cases} \sqrt{-2k\pi}\, e^{i\frac{3}{4}\pi} \\ \sqrt{-2k\pi}\, e^{i\frac{7}{4}\pi} \end{cases}$

0 è una singolarità eliminabile dato che $\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{1-e^{z^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{1-e^h} = -1$

Sia $\mathcal{Z}$ l'insieme delle singolarità rimanenti e sia $w \in \mathcal{Z}$

Sia g la funzione al denominatore. Poiché $g'(z) = -2z\, e^{z^2}$

$g'(w) = -2w\, e^{w^2} = -2w \neq 0$ e quindi ogni $w \in \mathcal{Z}$ è uno zero semplice per g e quindi un polo di ordine 1 per f.

6) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t - \sin t}{\sin t + 2}\, dt = \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) - \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) + 2}\, \frac{1}{zi}\, dz =$$

(dove $D(0,1)$ è il disco di centro 0 e raggio 1)

$$= \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{\frac{z^4+1}{z^2} - \frac{z^2-1}{z}\cdot\frac{1}{i}}{\frac{z^2-1}{z}\,\frac{1}{i} + 4}\, \frac{1}{zi}\, dz = \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{\frac{(z^4+1)i - z(z^2-1)}{z^2 i}}{z^2-1+4zi}\, dz$$

$$= \frac{1}{i}\int_{\partial^+ D(0,1)} \underbrace{\frac{iz^4 - z^3 + z + i}{z^2(z^2+4zi-1)}}_{f} dz = \frac{1}{i}\, 2\pi i \sum_{\substack{z \text{ sing. di } f \\ z \in D(0,1)}} \mathrm{Res}(f, z)$$

Le singolarità di f sono 0 e gli zeri di $z^2+4zi-1$ cioè

$$z = -2i \pm \sqrt{-4+1} = \begin{cases} -2i + \sqrt{3}\, i \in D(0,1) \\ -2i - \sqrt{3}\, i \notin D(0,1) \end{cases}$$

0 è polo di ordine 2 dato che

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{iz^4 - z^3 + z + i}{z^2 + 4zi - 1} = -i \neq 0$$

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} D\left(z^2 f(z)\right) = \lim_{z\to 0} \frac{(i4z^3 - 3z^2 + 1)(z^2 + 4zi - 1) - (iz^4 - z^3 + z + i)(2z + 4i)}{(z^2 + 4zi - 1)^2}$$

$$= -1 + 4 = 3$$

$(\sqrt{3}-2)i$ è invece un polo semplice per f dato che

$$\lim_{z\to(\sqrt{3}-2)i} \left(z - (\sqrt{3}-2)i\right) f(z) = \lim_{z\to(\sqrt{3}-2)i} \frac{iz^4 - z^3 + z + i}{z^2\left(z - (-\sqrt{3}-2)i\right)} =$$

$$= \frac{i\left((\sqrt{3}-2)i\right)^4 - \left((\sqrt{3}-2)i\right)^3 + (\sqrt{3}-2)i + i}{-(\sqrt{3}-2)^2 \, 2\sqrt{3}\, i} =$$

$$= -\frac{i\left((\sqrt{3}-2)^4 + (\sqrt{3}-2)^3 + (\sqrt{3}-2) + 1\right)}{i\,(\sqrt{3}-2)^2\, 2\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{(\sqrt{3}-2)^3\left((\sqrt{3}-2)+1\right) + (\sqrt{3}-2) + 1}{(\sqrt{3}-2)^2\, 2\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{\left((\sqrt{3}-2)+1\right)\left((\sqrt{3}-2)^3 + 1\right)}{(\sqrt{3}-2)^2\, 2\sqrt{3}} = -\frac{(\sqrt{3}-1)\left((\sqrt{3}-2)+1\right)\left((\sqrt{3}-2)^2 - (\sqrt{3}-2) + 1\right)}{(\sqrt{3}-2)^2\, 2\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{(\sqrt{3}-1)^2\left(3 + 4 - 4\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3\right)}{(\sqrt{3}-2)^2\, 2\sqrt{3}} = -\frac{(\sqrt{3}-1)^2\, 5\,(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-2)^2\, 2\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{5\,(3 + 1 - 2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-2)^2\, 2\sqrt{3}} = -\frac{10\,(2-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}-2)^2\, 2\sqrt{3}} = -\frac{5}{\sqrt{3}} = Res\left(f, (\sqrt{3}-2)i\right)$$

Per cui l'integrale assegnato è uguale a $2\pi\left(Res(f,0) + Res(f,(\sqrt{3}-2)i)\right) =$

$$= 2\pi\left(3 - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$$

A.A. 2012/2013 Appello 20 Gennaio 2014 Traccia A

1) Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(n\big(\arctan(1/n) - \arctan(-1/n)\big)\Big)^n z^n.$$

AA 2012/2013:

2) Dare la definizione di funzione conforme. Dimostrare che una funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e tale che $f'(z) \neq 0$, per ogni $z \in \Omega$, è conforme.

Altri anni accademici:

2) Enunciare le condizioni di Cauchy-Riemann. Considerare, poi, le funzioni $f(z) = z^2$ e $g(z) = z\bar{z}$. Determinarne parte reale u e parte immaginaria v e verificare se queste soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann su $\mathbb{C}$.

3) Calcolare l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C^+(1,1)} \frac{z}{z^3 - z^2 - z + 1} \mathrm{d}z,$$

dove $C^+(1,1)$ è la circonferenza di centro 1 e raggio 1 orientata nel verso antiorario.

4) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra.

5) Determinare il tipo di singolarità in 0 della funzione $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$. Calcolare poi il residuo nello stesso punto.

AA 2009/2010:

6) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = x,\ x \in (-2, 2)$, estesa per periodicità con periodo 4 a $\mathbb{R}$.

Altri anni accademici:

6) Determinare la serie di soli coseni della funzione $f(x) = x,\ x \in [0, 2]$. Verificare, poi, che in $x = 1$ essa converge a $f(1) = 1$ e che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1)\cos\left(\frac{\pi}{8}k\right) = -\frac{3}{4}.$$

Possibile svolgimento prova del 20/01/13

1) $\lim_n \left(\left(n \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)^n \right)^{\frac{1}{n}} =$

$\lim_n n \left(\operatorname{artg} \frac{1}{n} + \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right) = \lim_n \frac{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 2$

quindi il raggio di convergenza ρ è uguale a $\frac{1}{2}$

2) AA 2012/2013 : si veda, ad esempio, pp. 28-30 degli appunti

3) $z^3 - z^2 - z + 1 = (z-1)^2 (z+1)$

quindi la funzione integranda è uguale a

$\frac{f(z)}{(z-1)^2}$, con $f(z) = \frac{z}{z+1}$.

f è olomorfa in $D(1,1)$; possiamo quindi usare la II formula di rappresentazione di Cauchy ottenendo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C^+(1,1)} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = i \, f'(1) = i \left. \frac{1}{(z+1)^2} \right|_{z=1} = i \, \frac{1}{4} = \frac{i}{4}$$

4) Si veda, ad esempio, pp. 94-95 degli appunti

5) Poiché $\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, abbiamo

$$z^2 \cos \frac{1}{z} = z^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{z^{2k}} \frac{1}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{z^{2(k-1)}} \frac{1}{(2k)!} \quad (*)$$

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

da cui si evince che 0 è una singolarità essenziale

Scriviamo esplicitamente alcuni termini della serie di Laurent (*) per determinare il coefficiente del termine $\frac{1}{z}$

(che sappiamo è per definizione il residuo in 0) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{z^{2(k-1)}} \frac{1}{(2k)!} = z^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\frac{1}{z^2} + \dots$$

Come si vede il termine $\frac{1}{z}$ non compare nello sviluppo di Laurent di f

in 0 cioè il suo coefficiente è nullo, quindi $\operatorname{Res}(f,0) = 0$

6) Per gli AA $\neq$ 2009/2010

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x = 1$$

$$a_k = \int_0^2 x \cos\left(\frac{2\pi}{4} k x\right) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi}{2} k x\right)\Big|_0^2 - \frac{2}{\pi k}\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} k x\right) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left(\sin(k\pi) - 0\right) + \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} k x\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 0 + \frac{4}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

La serie di soli coseni di f è quindi

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} k x\right)$$

Per $x = 1$ otteniamo la serie numerica

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right)$$

osserviamo che $(-1)^k - 1 = 0$ per k pari

mentre $\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) = 0$ per k dispari. Quindi

la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right)$ ha tutti i termini nulli e

quindi la sua somma è 0 per cui

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right) = 1 = f(1)$$

Poiché f è di classe C^∞ su $(0,2)$, sappiamo che la sua serie di soli coseni converge puntualmente a f.

In particolare per $x = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \left((-1)^k - 1 \right) \cos\left(\frac{\pi}{8} k\right)$$

cioè $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \left((-1)^k - 1 \right) \cos\left(\frac{\pi}{8} k\right) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

A.A. 2012/2013 Appello 13 Febbraio 2014 Traccia A

1) Enunciare il teorema di derivazione termine a termine per una serie di funzioni. Usarlo, poi, per stabilire che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n3^{1-n} = \frac{9}{4}$$

2) Dimostrare che una serie di potenze converge totalmente su ogni disco chiuso di raggio strettamente più piccolo del raggio di convergenza.

3) Enunciare la prima formula di rappresentazione di Cauchy. Considerare, poi, la funzione a valori in $\mathbb{C}$

$$r \in (0, +\infty) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{C^+(0,r)} \frac{e^{-z^2}}{z} \mathrm{d}z + \frac{1}{2-i},$$

dove $C^+(0,r)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio r percorsa in verso antiorario. Che tipo di funzione è? Calcolare la sua parte reale e la sua parte immaginaria.

4) Calcolare le soluzioni dell'equazione $e^{i\pi/4} = e^{2z}$.

5) Considerare la serie bilatera di potenze $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. In quale caso il suo insieme di convergenza è sicuramente vuoto? Supponendo, poi, che il suo insieme di convergenza sia una corona circolare aperta C, dimostrare che la sua somma è olomorfa in C.

6) Calcolare

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C^+(0,2)} \frac{z}{z^3 + z^2 - z - 1} \mathrm{d}z,$$

dove $C^+(0,2)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata nel verso antiorario.

Possibile svolgimento prova del 13/02/14

1) Per l'enunciato si veda, ad esempio pag. 7 degli appunti.

Ricordiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$;

la serie delle derivate di $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ è

$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1}$, la quale converge uniformemente in ogni intervallo

$[-a,a] \subset (-1,1)$. Abbiamo quindi:

$$D\left(\frac{1}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{3}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, 3^{1-n}$$

$$\| $$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}$$

2) Si veda, ad esempio, p. 36 degli appunti

3) Per l'enunciato si veda, ad esempio, p. 69 degli appunti

Poiché la funzione $f(z) = e^{-z^2}$ è olomorfa su $\mathbb{C}$, qualunque

sia $r>0$, si ha:
$$\frac{1}{2\pi}\int_{+\mathcal{C}(0,r)} \frac{f(z)}{z}\, dz = i\, f(0) = i.$$

La funzione assegnata è quindi una funzione complessa costante (di variabile reale). La sua parte reale e la sua parte immaginaria sono anch'esse funzioni costanti date da $\operatorname{Re}\left(i + \frac{1}{2-i}\right)$ e $\operatorname{Im}\left(i + \frac{1}{2-i}\right)$ cioè

$$\operatorname{Re}\left(i + \frac{1}{2-i}\right) = \operatorname{Re}\left(i + \frac{2+i}{5}\right) = \frac{2}{5} \quad e$$

$$\operatorname{Im}\left(i + \frac{1}{2-i}\right) = \operatorname{Im}\left(i + \frac{2+i}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

4) Sia $z = x + iy$. Deve essere

$$e^{i\pi/4} = e^{2x} e^{2iy} \quad \text{cioè}$$

$$e^{2x} = 1 \quad e \quad e^{i\pi/4} = e^{2iy} \quad \text{da cui}$$

$$x = 0 \quad e \quad 2y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Dunque le soluzioni sono tutti i numeri complessi dati da

$i\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right)$, al variare di k in $\mathbb{Z}$.

5) Si veda ad esempio, pp. 101-102 degli appunti

6) $f(z) = \dfrac{z}{z^3 + z^2 - z - 1} = \dfrac{z}{(z+1)^2(z-1)}$, che ha singolarità nei

punti $z = -1$ e $z = 1$. Poiché entrambe le singolarità appartengono a $D(0,2)$, possiamo usare il I e il II teorema dei residui ottenendo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}^+(0,2)} \frac{z}{z^3 + z^2 - z - 1}\, dz = i\left(\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, -1)\right) = - i \operatorname{Res}(f, \infty)$$

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z}}{\left(\frac{1}{z} + 1\right)^2 \left(\frac{1}{z} - 1\right)} = \frac{-\frac{1}{z^3}}{\frac{(1+z)^2}{z^2} \frac{1-z}{z}} =$$

$$= \frac{-1}{(1+z)^2(1-z)}$$

Poiché $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{-1}{(1+z)^2(1-z)} = -1$

0 è una singolarità eliminabile per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ e quindi $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$.

A.A. 2012/2013 Appello 28 Aprile 2014 Traccia A

1) Determinare l'insieme di convergenza uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)(x-1)^n.$$

2) Dimostrare che una funzione olomorfa su Ω aperto di $\mathbb{C}$ è analitica su Ω.

3) Dimostrare che anche in $\mathbb{C}$ vale l'identità $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

4) Determinare il tipo di singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{e^{-1/z^2}}{i-z}.$$

Calcolare, poi, i residui in ognuna di esse.

Per l'anno accademico 2012/2013:

5) Dimostrare che una qualunque funzione armonica su un dominio aperto semplicente connesso ammette armonica coniugata

Per gli altri anni, si sostituisca l'esercizio 5) con il seguente:

5) Dimostrare il Teorema di Hermite-Liouville.

Per l'anno accademico 2009/2010:

6) Scrivere la serie di Fourier della funzione $f(x) = 1 - |x|$, $x \in [-1, 1]$ e se ne discuta convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$.

Per gli altri anni, si sostituisca l'esercizio 6) con il seguente:

6) Scrivere la serie di soli seni della funzione $f(x) = 1 - |x-1|$, $x \in [0, 2]$ e se ne discuta la convergenza uniforme su $\mathbb{R}$. Stabilire poi che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{8}{\big((2j+1)\pi\big)^2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}.$$

Possibile svolgimento prova del 28/04/14

1) Osserviamo che $\forall n \quad \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \geq 0$

$$\lim_n \frac{\sin\left(\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\right)}{\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)} = \lim_n \frac{\sin\left(\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\right)}{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}} \cdot \frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}$$

$$= \lim_n \frac{n+1}{n} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 1$$

Quindi il raggio di convergenza della serie è 1.

Studiamo la convergenza negli estremi dell'intervallo di convergenza dato da $(0,2)$. Per $x = 2$ la serie diviene

$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$; poiché $\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \sim \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ questa diverge.

Per $x=0$, otteniamo $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ che è una serie a segni alterni. Poiché $\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \longrightarrow 0$ ed inoltre $\left\{\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right\}$ è decrescente, per il criterio di Leibniz, la serie converge. Dimostriamo che $\left\{\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right\}$ è decrescente.

Basta osservare che $\frac{n}{n^2+1} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, intervallo su cui la funzione $y = \sin x$ è crescente e che $\frac{n}{n^2+1}$ è decrescente per $n > 1$, la funzione composta $\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ è anch'essa decrescente per $n > 1$.

In definitiva, usando il Teorema di Abel, possiamo affermare che la serie di potenze assegnata converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $[0, 2-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 2$.

2) Si veda ad esempio pag 71 degli appunti

3) Si veda, ad esempio, pag. 84 degli appunti

4) Le singolarità al finito sono $z=0$ e $z=i$

Poiché $\lim_{z\to i} (z-i)\, \dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{i-z} = -e$

i è un polo semplice e $\mathrm{Res}(f,i) = -e$

Dato che $\forall k\in\mathbb{N}$ $\quad \lim_{z\to 0} z^k e^{-\frac{1}{z^2}} \dfrac{1}{i-z} = \dfrac{1}{i} \lim_{z\to 0} z^k e^{-\frac{1}{z^2}}$

e sappiamo che non esiste il $\lim_{z\to 0} z^k e^{-\frac{1}{z^2}}$, qualunque sia $k\in\mathbb{N}$, dato che 0 è una singolarità essenziale per $e^{-\frac{1}{z^2}}$, 0 resta una singolarità essenziale anche per f.

Calcoliamo ora il residuo all'infinito $\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\, \frac{e^{-z^2}}{i-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2}\, \frac{e^{-z^2}}{\frac{iz-1}{z}} = \frac{1}{z}\, \frac{e^{-z^2}}{1-iz}$$

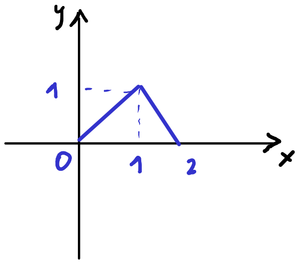
$\lim_{z\to 0} z\, \dfrac{1}{z}\, \dfrac{e^{-z^2}}{1-iz} = 1$ quindi 0 è un polo semplice per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

e $\mathrm{Res}(f,\infty) = 1$

Dal I teorema dei residui $\quad \mathrm{Res}(f,0) = -\mathrm{Res}(f,\infty) - \mathrm{Res}(f,i) = e-1$

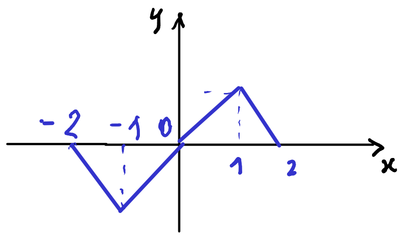
5) Si veda, ad esempio, pag. 96 degli appunti.

6) La funzione f ha grafico



Osserviamo che $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x\in[0,1] \\ 2-x & \text{se } x\in[1,2] \end{cases}$

La sua estensione dispari su $[-2,2]$ ha grafico



e quindi la sua estensione periodica a $\mathbb{R}$ di periodo 4 è continua su $\mathbb{R}$, di classe C^∞ su $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ e in ogni $m\in\mathbb{Z}$ f è derivabile da destra e da sinistra. La serie di soli seni di f converge quindi unif. a f su $\mathbb{R}$.

I coefficienti della serie di soli seni sono dati da

$$b_k = \int_0^2 (1-|x-1|) \sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right) dx =$$

$$= \int_0^1 x \sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right) dx + \int_1^2 (2-x) \sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right) dX =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left(x\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right) dx -$$

$$-\frac{2}{k\pi}\left((2-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\right)\Big|_1^2 - \frac{2}{k\pi}\int_1^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right) dx$$

$$= 0 + \frac{4}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\Big|_0^1 - 0 - \frac{4}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{8}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

Dunque la serie di soli seni di f è $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)$

Per $x=1$ questa converge a $f(x)=1$ cioè

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{(k\pi)^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}k\right) = 1$$

. Poiché $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$

possiamo riscrivere $(*)$ così: $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{8}{((2j+1)\pi)^2} = 1$

Quindi

$$\frac{8}{\pi^2} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{8}{((2j+1)\pi)^2} = 1$$

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica – Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2012/2013 Appello 9 luglio 2014 Traccia A

Cognome____________________ Nome____________________ N° Matricola____________________

1) Studiare la convergenza totale su $\mathbb{R}$ della serie

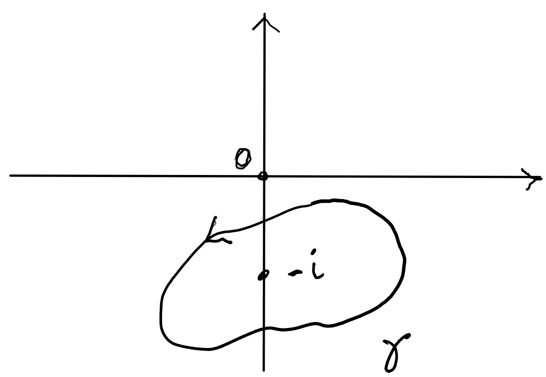
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2x^2}{\frac{1}{3}+n^2x^2} \log(1+\frac{2}{n^2}).$$

2) Dare la definizione di raggio di convergenza e disco di convergenza per una serie di potenze in $\mathbb{C}$. Dimostrare poi che una serie di potenze in $\mathbb{C}$ di centro 0 converge totalmente su ogni disco $D(0,\rho')$ con $0 \le \rho' < \rho$, dove ρ è il raggio di convergenza.

3) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{z^3-2}{z(z+i)^2} \mathrm{d}z,$$

dove γ è la curva in figura percorsa nel verso antiorario.



4) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$e^{z+2\pi i} e^{z-8\pi i} = i.$$

5) Enunciare e dimostrare il I Teorema dei residui.

6) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2+\cos(2t)} \mathrm{d}t.$$

Politecnico di Bari
CUC di Ingegneria Informatica
Complementi di Analisi Matematica – Laurea Ingegneria Informatica e Automazione
A.A. 2012/2013 Appello 9 luglio 2014 Traccia B

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola____________________

1) Studiare la convergenza totale su $\mathbb{R}$ della serie

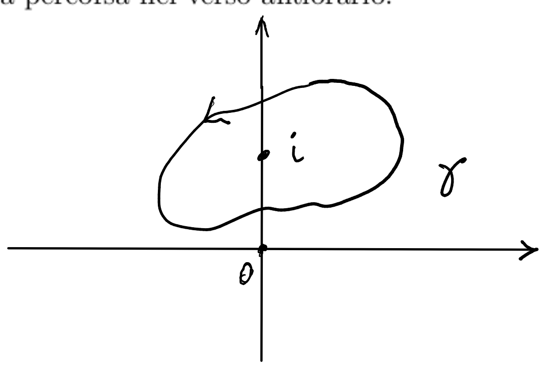
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n|x|}{\frac{1}{2}+n|x|} \arctan(\frac{2}{n^3}).$$

2) Dare la definizione di raggio di convergenza e disco di convergenza per una serie di potenze in $\mathbb{C}$. Dimostrare poi che una serie di potenze in $\mathbb{C}$ di centro 0 converge totalmente su ogni disco $D(0,\rho')$ con $0 \leq \rho' < \rho$, dove ρ è il raggio di convergenza.

3) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{2+z^2}{z^2(z-i)^2} \mathrm{d}z,$$

dove γ è la curva in figura percorsa nel verso antiorario.



4) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$e^{z-2\pi i} e^{z+6\pi i} = -1.$$

5) Enunciare e dimostrare il I Teorema dei residui.

6) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2+\sin(2t)} \mathrm{d}t.$$

Possibile svolgimento prova del 9/7/14

TRACCIA A (la traccia B è del tutto analoga)

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \le \dfrac{2n^2x^2}{\frac{1}{3}+n^2x^2} \le 2$

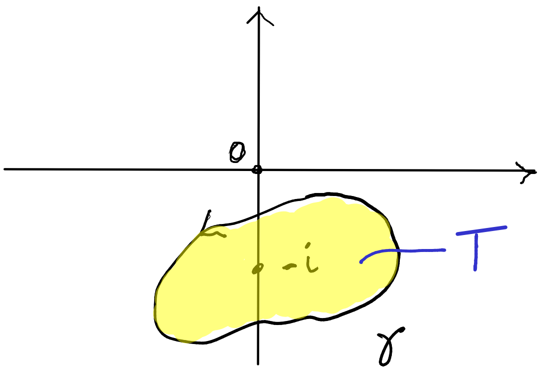
per cui, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \le \dfrac{2n^2x^2}{\frac{1}{3}+n^2x^2} \log\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right) \le 2\log\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$

Poiché $2\log\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right) \sim \dfrac{4}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \in \mathbb{R}$

la serie assegnata converge totalmente su $\mathbb{R}$

2) Si veda, ad esempio, pag 35-36 degli appunti

3) Sia T il dominio avente per bordo γ. Poiché $f(z) = \dfrac{z^3-2}{z}$ è olomorfa su T, possiamo applicare la seconda formula di rappresentazione di Cauchy.



$$\int_\gamma \frac{f(t)}{(z+i)^2} = 2\pi i \, f'(-i)$$

$$f'(z) = \frac{3z^3-(z^3-2)}{z^2}, \qquad f'(-i) = \frac{2i+2}{-1}.$$

Quindi $$\int_\gamma \frac{f(t)}{(z+i)^2} = -2\pi i\,(2+2i) = 4\pi - 4\pi i$$

4) $$e^{z+2\pi i}\, e^{z-8\pi i} = e^{2z-6\pi i} = e^{2z}$$

Quindi $e^{2z} = i \iff 2z = \mathrm{Log}(i) \iff$

$$2z = \log|i| + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff z = \left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)i,\quad k\in\mathbb{Z}$$

5) Si veda, ad esempio, p. 123 appunti

6) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2+\cos(2t)}\,dt = \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2+\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}\,\frac{1}{iz}\,dz$$

$$= \frac{1}{i}\int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{z^2+1}{4z^2+z^4+1}\,dz$$

Le singolarità della funzione integranda sono gli zeri di z^4+4z^2+1

Posto $z^2 = w$, questi sono dati da

$z^2 = -2+\sqrt{3}$ e $z^2 = -2-\sqrt{3}$ → Poiché $|-2-\sqrt{3}|>1$ anche le radici di $-2-\sqrt{3}$ hanno modulo >1; per cui queste singolarità non appartengono a $D(0,1)$

$$\Downarrow$$

$$z = \pm i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Chiaramente entrambe queste singolarità sono poli semplici e quindi

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^4+4z^2+1},\ i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = \lim_{z\to i\sqrt{2-\sqrt{3}}} \left(z-i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\frac{z^2+1}{z^4+4z^2+1}$$

$$= \frac{-(2-\sqrt{3})+1}{D(z^4+4z^2+1)\big|_{z=i\sqrt{2-\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{4i\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(\sqrt{3}-2+2)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}}\, i$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^4+4z^2+1}, -i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = \lim_{z\to i\sqrt{2-\sqrt{3}}} \left(z+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\frac{z^2+1}{z^4+4z^2+1}$$

$$= \frac{-(2-\sqrt{3})+1}{D(z^4+4z^2+1)\big|_{z=-i\sqrt{2-\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{-4i\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(\sqrt{3}-2+2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}}\, i$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$2\pi i\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}}\, i + \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}}\, i\right) = 0$$

A.A. 2012/2013 Appello 1 settembre 2014 Traccia A

1) Studiare la convergenza totale su $[0, +\infty)$ e su $[a, +\infty)$, con $a > 0$, della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 x^n + 1}.$$

2) Dimostrare che se $f = u + iv$ è olomorfa in $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto allora u e v sono differenziabili su Ω e per ogni $z_0 \in \Omega$ soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann.

3) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\sin z = e^{iz}.$$

4) Dimostrare il Teorema fondamentale dell'algebra.

5) Determinare le singolarità e i residui, al finito e all'infinito, della funzione

$$f(z) = \frac{2z^2 - 1}{z^3}.$$

6) Determinare la serie di solo seni della funzione

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2).$$

Stabilire quindi, motivando la risposta che la serie

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{(2h+1)\pi} - \frac{32}{((2h+1)\pi)^3} \right) (-1)^h$$

converge ed ha per somma 1

Per l'anno accademico 2009/2010, si sostituisca l'esercizio 6) con il seguente:

6) Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-2, 2]$$

e discuterne la convergenza uniforme.

PROVA DEL 01|09|14 (POSSIBILE SVOLGIMENTO)

1) Fissato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la funzione $f_n(x) = \frac{1}{n^3 x^n + 1}$ è positiva

strettamente decrescente su $[0, +\infty)$,

per cui $\max_{x \in [0,+\infty)} f_n(x) = f_n(0) = 1$, $\forall n$.

Quindi la serie assegnata non converge totalmente su $[0, +\infty)$

Invece, $\max_{x \in [a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a) = \frac{1}{n^3 a^n + 1}$ e

la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 a^n + 1}$ converge se $a > 1$

in quanto $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^3 a^n + 1}} = \frac{1}{a} < 1$

se $a = 1$ anche converge in quanto $\frac{1}{n^3 + 1} \sim \frac{1}{n^3}$

se $0 < a < 1$ diverge in quanto $\frac{1}{n^3 a^n + 1} \longrightarrow 1$

Dunque la convergenza è totale solo su $[a, +\infty)$ con $a \geq 1$

2) Si vedano, ad esempio, pp. 22-24 degli appunti

3) Poiché $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ l'equazione è equivalente a

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i e^{iz} \quad \text{cioè}$$

$$(1-2i) e^{iz} = \frac{1}{e^{iz}} \iff (1-2i) e^{2iz} = 1 \iff e^{2iz} = \frac{1}{1-2i}$$

$$\iff e^{2iz} = \frac{1+2i}{5} \iff 2iz = \mathrm{Log}\left(\frac{1+2i}{5}\right) =$$

$$= \log \frac{1}{\sqrt{5}} + i\left(\mathrm{Arg}\left(\frac{1+2i}{5}\right) + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff z = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{1+2i}{5}\right) + k\pi + \frac{i}{2}\log\sqrt{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4) si vede, ad esempio, p. 94 degli appunti

5) L'unica singolarità al finito è $z=0$ che è un polo di ordine 3.

Poiché $f(z) = \dfrac{2}{z} - \dfrac{1}{z^3}$ → è una serie di Laurent! tutti gli a_k sono nulli tranne a_{-1} e a_{-3}

$$a_{-1} = 2 = \operatorname{Res}(f, 0)$$

$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}(f,0)$ per il II teorema dei residui

6) $$b_k = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} g(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{4}x\right)dx = \int_0^2 x^2 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

dove $g=g(x)$ è l'estensione dispari di f all'intervallo $(-2,2)$

$$\int_0^2 x^2\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)dx = -\frac{2}{k\pi}\left(x^2\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\right)\Big|_0^2 + \frac{4}{k\pi}\int_0^2 x\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)dx$$

$$= -\frac{8}{k\pi}(-1)^k + \frac{8}{(k\pi)^2}\left(x\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\right)\Big|_0^2 - \frac{8}{(k\pi)^2}\int_0^2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)dx$$

$$= -\frac{8}{k\pi}(-1)^k + 0 + \frac{16}{(k\pi)^3}\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{8}{k\pi}(-1)^k + \frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right)$$

Dunque la serie di soli seni di f è data da

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{8}{k\pi}(-1)^k + \frac{16}{(k\pi)^3}\left((-1)^k-1\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$$

Per $x = 1$ questa converge a $f(1) = 1$ dato che f è di classe C^∞ su $[0, 2-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$.

Osserviamo che per k pari (e $x=1$)

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$$

per k dispari cioè $k = 2h+1$, $h \in \mathbb{Z}$

la serie diviene

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{(2h+1)\pi} - \frac{32}{((2h+1)\pi)^3} \right) \sin\left((2h+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (= f(1) = 1)$$

e dato che $\sin\left((2h+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^h$ si ottiene

il risultato richiesto.

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica – Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2012/2013 Appello 19 settembre 2014 Traccia A

Cognome________________________Nome________________________N° Matricola________________________

1) Determinare l'insieme di convergenza della serie in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n - n}.$$

2) Dimostrare che per una qualunque curva continua $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\left| \int_a^b \gamma(t) \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| \mathrm{d}t.$$

3) Dare la definizione di zero di ordine m e di zero isolato per una funzione f olomorfa su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dimostrare, poi, che $z_0 \in \Omega$ è uno zero isolato per f se e solo esiste $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ per cui z_0 è uno zero di ordine m.

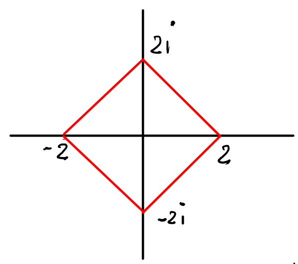
4) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$\sin(iz) = 1.$$

5) Calcolare

$$\int_{\partial^+ D} \frac{z+1}{(z^2+1)^4(z-3)} \mathrm{d}z,$$

done D è il rombo rappresentato in figura



6) Determinare la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1/2) \\ 0 & \text{se } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Calcolare, quindi, la somma della serie

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h 2}{(2h+1)\pi}$$

Per l'anno accademico 2009/2010, si sostituisca l'esercizio 6) con il seguente:

6) Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1/2) \\ 0 & \text{se } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

estesa per periodicità a $\mathbb{R}$ con periodo 1, e discuterne convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$.

PROVA DEL 19/09/2014 . POSSIBILE SVOLGIMENTO

1) $$\lim_{n} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n - n}} = \lim_{n} \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{1}{1-\frac{n}{2^n}}} = \frac{1}{2}$$

Dunque il raggio di convergenza è $\rho = 2$ ed avendo centro -1, sicuramente la serie converge su $(-3,1)$

Per $x=1$ la serie diviene

(*) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n - n}$. Poiché $\frac{2^n}{2^n-n} \xrightarrow{n} 1$, (*) diverge positivamente

Per $x=-3$ la serie diviene

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{2^n - n} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n-n}$$ che è una serie a segni alterni.

Poiché $\frac{2^n}{2^n-n}$ non tende a 0, essa non converge. In definitiva l'insieme di convergenza puntuale è l'intervallo $(-3,1)$

2) Si veda, ad esempio, p. 62 degli appunti

3) " " p. 79 " "

4) $$\sin(iz) = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}$$

quindi l'equazione assegnata è equivalente a

$1 - e^{2z} - 2ie^{z} = 0$ che equivale a $(e^z + i)^2 = 0$ cioè

$e^z = -i$ ovvero $z = \log|-i| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

$= i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

5) Conviene applicare il I e il II teorema dei residui

Infatti le singolarità di $f(z) = \frac{z+1}{(z^2+1)^4(z-3)}$ sono $\{i, -i, 3\}$

Di queste solo i e $-i$ appartengono a D, quindi per il I teorema dei residui

$$\int_{\partial^+ D} f(z) = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\right) \overset{\text{II teor. residui}}{=}$$
$$= -2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,3) + \mathrm{Res}(f,\infty)\right)$$

3 è un polo semplice quindi $\mathrm{Res}(f,3) = \lim_{z \to 3} \frac{z+1}{(z^2+1)^4} = \frac{4}{10^4}$

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z}+1}{\left(\frac{1}{z^2}+1\right)^4\left(\frac{1}{z}-3\right)} = -\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1+z}{z}}{\frac{(1+z^2)^4}{z^8} \frac{1-3z}{z}} = -\frac{z^6(1+z)}{(1+z^2)^4}$$

$\lim_{z\to 0} \frac{-z^6(1+z)}{(1+z^2)^4} = 0$, quindi 0 è una singolarità eliminabile per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

e dunque $Res(f,\infty)=0$. In definitiva l'integrale assegnato è uguale a $\frac{-8\pi i}{10^4}$

6)

Sia g l'estensione pari di f all'intervallo $[-1,1]$.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} g(x)\cos\left(\frac{2\pi k x}{2}\right)dx = 2\int_0^1 f(x)\cos(k\pi x)\,dx =$$

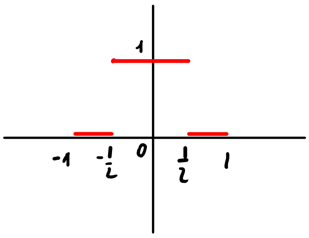
$$= 2\int_0^{1/2}\cos(k\pi x)\,dx = \frac{2}{k\pi}\sin(k\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1,\ h\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Quindi la serie di soli coseni di f è data da

$$\frac{1}{2} + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^h}{(2h+1)\pi}\cos((2h+1)\pi x)$$

Poiché l'estensione pari di f (il cui grafico è in rosso qui sotto)



è di classe C^1 su $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, la serie di soli coseni di f converge a $f(0)=1$ per $x=0$

Dunque $$\frac{1}{2}+\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{(-1)^h 2}{(2h+1)\pi} = 1 \quad \text{cioè} \quad \sum_{h=0}^{+\infty}\frac{(-1)^h 2}{(2h+1)\pi} = \frac{1}{2}.$$

A.A. 2012/2013 Appello 14 novembre 2014 Traccia A

1) Determinare l'insieme di convergenza della serie in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(1/n)}{n^2-1}(x-2)^n.$$

2) Ricavare lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione $f(x) = \arctan x$, $x \in [-1,1]$.

3) Calcolare

$$\int_{\partial^- D(i,1/2)} \frac{z^2-1}{z^3(z-i)^2} \mathrm{d}z.$$

4) Enunciare e dimostrare il I teorema dei residui.

5) Calcolare i residui nelle singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z^2-2iz-1)(z+1)}$$

6) Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

estesa per periodicità a $\mathbb{R}$ con periodo 2. Dimostrare poi che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} = \pi/4.$$

Appello Complementi di Analisi Matematica

venerdì 14 novembre 2014 14:30

1) Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2-1}(x-2)^n .$$

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}{(n+1)^2-1} \cdot \frac{n^2-1}{\cos\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$$

quindi $\rho = 1$. L'intervallo di convergenza è quindi $(1,3)$

Per $x=1$, la serie diviene:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2-1}(-1)^n \qquad (1)$$

Per $x=3$ diviene: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}}{n^2-1} \qquad (2)$

Entrambe queste serie convergono in modulo. Vediamolo per la (1) (la (2) è analoga)

$$\left| \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2-1}(-1)^n \right| = \frac{\left|\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{n^2-1} \leq \frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Poiché $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$, la (1) converge in modulo e quindi converge. Dunque l'insieme di convergenza è $[1,3]$

2) Ricavare lo sviluppo in serie di Mac-Laurin della funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [-1,1]$

Si veda pag. 58 degli appunti

3) Calcolare

$$\int_{\partial^+ D\left(i,\frac{1}{2}\right)} \frac{z^2-1}{z^3(z-i)^2}\,dz$$

La funzione $g(z) = \dfrac{z^2-1}{z^3(z-i)^2}$ ha singolarità 0 e i

Di più $i \in D(i, \frac{1}{2})$ mentre $0 \notin D(i, \frac{1}{2})$

Posto $f(z) = \frac{z^2-1}{z^3}$, $f \in H(D(i,\frac{1}{2}))$ e quindi per la II formula di rappresentazione di Cauchy

$$\int_{\partial D(i,\frac{1}{2})} \frac{f(z)\,dz}{(z-i)^2} = -\int_{\partial^+ D(i,\frac{1}{2})} \frac{f(z)\,dz}{(z-i)^2} = -2\pi i f'(i) = -2\pi i \left.\frac{2z^4-(z^2-1)3z^2}{z^6}\right|_{z=i}$$

$$= -2\pi i \frac{2-(-2)(-3)}{-1}$$

$$= -8\pi i$$

4) Enunciare e dimostrare il I teorema dei residui.

Si veda, ad esempio, p. 123 degli appunti

5) Calcolare i residui nelle singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z^2-2iz-1)(z+1)}$$

$(z^2-2iz-1) = (z-i)^2$, quindi le singolarità sono $\{i, -1\}$. i è un polo di ordine 2, -1 un polo semplice. Per cui

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i} D\left((z-i)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to i} D\left(\frac{\cos z}{z+1}\right) =$$

$$\lim_{z\to i} \frac{-\sin z\,(z+1) - \cos z}{(z+1)^2} = \frac{-\sin i\,(i+1) - \cos i}{(i+1)^2} = \frac{-\frac{e^{-1}-e}{2i}(1+i) - \left(\frac{e^{-1}+e}{2}\right)}{2i}$$

$$Res(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{\cos z}{(z-i)^2} = \frac{\cos(-1)}{(1+i)^2} = \frac{\cos(-1)}{2i} = \frac{e^{-i}+e^{i}}{2i}$$

6) Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ 0 & \text{se } t \in [-1,0) \end{cases}$$

Dimostrare poi che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \int^{1} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{2}kt\right)dt = \int^{1} \cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\Big|_0^1$$

$$a_k = \int_{-1}^{1} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{2}kt\right)dt = \int_0^1 \cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\Big|_0^1$$

$$= 0$$

$$b_k = \int_{-1}^{1} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{2}kt\right)dt = \int_0^1 \sin(k\pi t)\,dt = -\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\left(\cos(k\pi) - 1\right) = \frac{1}{k\pi}\left(1 + (-1)^k\right)$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right)\sin(k\pi t) = \frac{1}{2} + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{(2h+1)\pi}\sin((2h+1)\pi t)$$

Poiché f è di classe C^∞ in un intorno di $t = \frac{1}{2}$, la sua serie di Fourier converge a $f(\frac{1}{2}) = 1$ per $t = \frac{1}{2}$

Quindi:

$$\frac{1}{2} + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{(2h+1)\pi}(-1)^h = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

cioè $\displaystyle \frac{2}{\pi}\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

A.A. 2012/2013 Appello straordinario 17 dicembre 2014 Traccia A

1) Determinare il limite puntuale sull'intervallo $[0, +\infty)$ della successione di funzioni reali

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1 + x^n}.$$

Dire poi se la convergenza è anche uniforme sullo stesso intervallo.

2) Enunciare il teorema sulla derivabilità di una funzione complessa. Stabilire, poi, se la funzione $f(z) = \bar{z}z^2$ è derivabile in $z = 1$.

3) Dare la definizione di zero di ordine m per una funzione olomorfa. Dimostrare, poi, che z_0 è uno zero di ordine m per f se e solo se $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ per ogni $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

4) Calcolare il residuo in 0 per la funzione $f(z) = z^5 \sin(1/z^2)$.

5) Dare la definizione di residuo all'infinito. Dimostrare poi che $\mathrm{Res}(f(z); \infty) = \mathrm{Res}(-\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}); 0)$.

6) Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \\ x^2 & \text{se } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

estesa per periodicità a $\mathbb{R}$ con periodo 2. Dimostrare poi che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(k\pi)^2} = \frac{1}{3}.$$

Appello Complementi di Analisi Matematica

mercoledì 17 dicembre 2014 14:30

1) Determinare il limite puntuale della successione di funzioni $f_n(x) = \frac{x^2}{1+x^n}$ su $[0,+\infty)$. Stabilire, poi, se f_n converge uniformemente nello stesso insieme

- Se $\bar{x} \in [0,1)$, $x^n \xrightarrow{n} 0$, quindi $f_n(\bar{x}) \xrightarrow{n} \bar{x}^2$
- se $\bar{x} = 1$ $f_n(1) = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ quindi $f_n(1) \xrightarrow{n} \frac{1}{2}$
- se $\bar{x} > 1$ $x^n \xrightarrow{n} +\infty$, quindi $f_n(\bar{x}) \xrightarrow{n} 0$

Dunque, il limite puntuale di $\{f_n\}$ è la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$

Poiché le funzioni f_n sono continue su $[0,+\infty)$ se $\{f_n\}$ convergesse uniformemente a f su $[0,+\infty)$, f dovrebbe essere continua. Poiché f ha una discontinuità in $x = 1$ la convergenza non è uniforme su $[0,+\infty)$

2) Per l'enunciato del teorema si veda, ad esempio, pag. 22 degli appunti

Posto $z = x+iy$ $f(z) = (x-iy)(x+iy)^2 =$

$$= (x-iy)(x^2-y^2+2ixy)$$

$$= \underbrace{x(x^2-y^2) + 2y^2x}_{u(x,y)} + i\underbrace{(y(y^2-x^2)+2x^2)}_{v(x,y)}$$

$$u_x(x,y) = x^2 - y^2 + 2x^2 + 2y^2$$

$$v_y(x,y) = y^2 - x^2 + 2y^2$$

Poiché $u_x(1,0) = 3 \neq v_y(1,0) = -1$, f non è derivabile in 1

3) Si vedano, ad esempio, pagg. 77-78 degli appunti

4) $f(z) = z^5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^{2k+1} =$

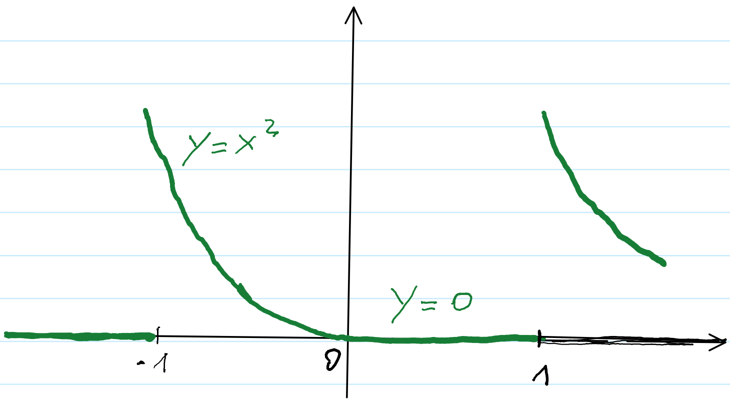
$$= z^5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k+2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k-3}}$$

Il coefficiente del termine $\frac{1}{z}$ si ottiene per $4k-3=1$

cioè $k=1$, quindi $\mathrm{Res}(f,0) = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}$

5) Si veda, ad esempio, pagg. 125-126 degli appunti

6)



$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} x^2 = \frac{1}{6}$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{2}\right) dx = \int_{-1}^{0} x^2 \cos(k\pi x)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{k\pi} \sin(k\pi x)\Big|_{-1}^{0} - \frac{2}{k\pi} \int_{-1}^{0} x \sin(k\pi x)\,dx =$$

$$= 0 + \frac{2}{(k\pi)^2} x \cos(k\pi x)\Big|_{-1}^{0} - \frac{2}{(k\pi)^2} \int_{-1}^{0} \cos(k\pi x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{(k\pi)^2} \cos(k\pi) - \frac{2}{(k\pi)^2} \sin(k\pi x)\Big|_{-1}^{0} = \frac{2(-1)^k}{(k\pi)^2}$$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \sin(k\pi x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2 \sin(k\pi x)\,dx =$$

$$= -x^2 \cos(k\pi x)\Big|^{0} + \frac{2}{\ } \int^{0} x \cos(k\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{x^2}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{k\pi}\int_{-1}^{0^-} x\cos(k\pi x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{2}{(k\pi)^2}\, x\sin(k\pi x)\Big|_{-1}^{0} - \frac{2}{(k\pi)^2}\int_{-1}^{0}\sin(k\pi x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^k}{k\pi} + 0 + \frac{2}{(k\pi)^3}\cos(k\pi x)\Big|_{-1}^{0} = \frac{(-1)^k}{k\pi} + \frac{2}{(k\pi)^3}\left(1-(-1)^k\right)$$

Quindi la serie di Fourier di f è data da

$$\frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{2}{(k\pi)^2}\cos(k\pi x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^k}{k\pi} + \frac{2}{(k\pi)^3}\left(1-(-1)^k\right)\right]\sin(k\pi x)$$

Notiamo che per $x=1$ tale serie converge a $\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2} = \frac{1}{2}$

Quindi $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{2}{(k\pi)^2}(-1)^k + 0$

$\sin(k\pi 1) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

da cui otteniamo $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{(k\pi)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$