1) - a)

Calcolare in forma esponenziale

$$\left(\frac{\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}{i}\right)^{10}$$

$$\frac{\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}{i} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\left|-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right| = 3$$

$$\operatorname{Arg}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right) - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi$$

Quindi $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = 3e^{-i\frac{5}{6}\pi}$ e

$$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)^{10} = \left(3e^{-i\frac{5}{6}\pi}\right)^{10} = 3^{10}e^{-i\frac{25}{3}\pi}$$

1) - b)

Determinare dominio, tipo di monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{8 - x^3}$$

dom f : $8 - x^3 \geq 0 \iff x^3 \leq 8 \iff x \leq 2$

quindi dom $f = (-\infty, 2]$

f è composta dalle funzioni f_1 e f_2 con

$f_1(x) = 8 - x^3$ e $f_2(x) = \sqrt[4]{x}$

stett. decrescente — stett. crescente

Quindi f è stett. decrescente.

Poiché $f \in C^0((-\infty, 2])$, $\operatorname{Im} f = [f(2), \lim_{x\to-\infty} f(x))$
$= [0, +\infty)$

2) Determinare i punti di minimo e massimo locale e assoluto per la funzione

$f(x) = (1 - x^2)^4$. Se ne disegni il grafico.

Si calcoli poi $\lim_{x\to 1} g\circ f(x)$ con

$g(y) = \log_3 (1 - y^2) / 2y^2$

f è un polinomio e quindi è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ e i suoi punti di estremo locale devono quindi essere punti stazionari. Notiamo anche che f è pari e quindi possiamo limitarci a studiarla sull'intervallo $[0, +\infty)$.

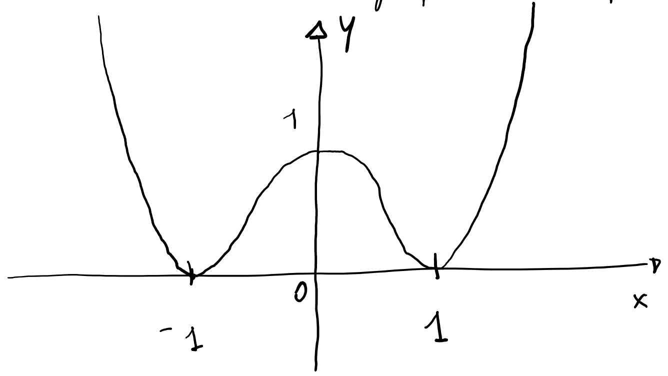
$f'(x) = 4(1-x^2)^3(-2x)$, quindi 0 è un punto stazionari per f e se $x > 0$

$$f'(x) > 0 \iff 1 - x^2 < 0 \iff x > 1$$

Dunque f è strett. crescente in $(1, +\infty)$ e strett. decrescente in $(0, 1)$. Quindi $x = 0$ è un massimo locale forte e $x = 1$ è un minimo locale forte. Dato che f è pari $x = -1$ è anche un minimo locale forte.

Osserviamo che $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e poiché $f(\pm 1) = 0$ $x = \pm 1$ sono minimi assoluti.

Dato che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, f non è limitata superiormente e quindi non ha punti di massimo assoluto. Il grafico di f è quindi di questo tipo



Poiché $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$, dal teorema sul limite delle funzioni composte

$$\lim_{x \to 1} g \circ f(x) = \lim_{y \to 0} g(y) = \lim_{y \to 0} \frac{\log_3(1 - y^2)}{2y^2}$$

$$\overset{-y^2 = z}{=} \lim_{z \to 0} -\frac{1}{2} \frac{\log_3(1+z)}{z} = -\frac{1}{2 \log 3}$$

3) Calcolare la media integrale di $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ sull'intervallo $[0,2]$

La media integrale richiesta è

$$\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 1\,dx - \int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$; posto $\sqrt{x} = t$ (e quindi

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \quad \text{cioè} \quad dx = 2\sqrt{x}\,dt = 2t\,dt$$

otteniamo

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Quindi la media richiesta è uguale a

$$1 - \sqrt{2} + \log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

4) Dare la definizione di funzione convessa e di funzione strettamente convessa su un intervallo.

Fornire un esempio (anche solo graficamente) di una funzione convessa ma non strettamente convessa.

Stabilire infine che la funzione

Stabilire infine che la funzione

$$f(x) = e^{2x^2} + 2x - 1$$

è strett. convessa su $\mathbb{R}$

Per le definizioni e un possibile esempio si veda la lezione 23.

Dato che f è derivabile 2 volte su $\mathbb{R}$ (f è in realtà $C^\infty(\mathbb{R})$) è sufficiente verificare che $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x\, e^{2x^2} + 2$$

$$f''(x) = 4\, e^{2x^2} + (4x)^2 e^{2x^2} = 4e^{2x^2}\,(1 + 4x^2)$$

che è una funzione positiva su $\mathbb{R}$ in quanto prodotto di due funzioni positive.