Appello Analisi Matematica II modulo

martedì 14 febbraio 2017 14:30

1) Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1-\log(2k-1)}{k^2-2k}$$

Poiché $\dfrac{1-\log(2k+1)}{k^2-2k} = \dfrac{1}{k^2-2k} - \dfrac{\log(2k+1)}{k^2-2k}$

possiamo studiare il carattere delle serie numeriche

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2-2k}$ e (2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\log(2k+1)}{k^2-2k}$: se entrambe convergono

anche la serie assegnata converge;

$\dfrac{1}{k^2-2k} \sim \dfrac{1}{k^2}$ per cui (1) converge

$k^{3/2}\dfrac{\log(2k+1)}{k^2-2k} \longrightarrow 0$ quindi per il criterio degli infinitesimi

anche (2) converge

2) Dimostrare che il seguente problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione definita su $\mathbb{R}$.
Dimostrare anche che tale soluzione monotona crescente

$$\begin{cases} y' = \cos^2(xy)\sin^2(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Sia $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos^2(xy)\sin^2(xy)$. Dato che f è prodotto delle funzioni $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \cos^2(xy)$ e $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \sin^2(x,y)$ che sono entrambe di classe C^1 anche $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Quindi $(*)$ ha una ed una sola soluzione locale. Poiché f è limitata (infatti $0\le f(x,y)\le 1, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$) tale soluzione è definita su $\mathbb{R}$.

Inoltre, dal fatto che f è non negativa abbiamo anche che $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad y'(x) = \cos^2(x\,y(x))\sin^2(x\,y(x)) \geq 0$
quindi y è monotona crescente su $\mathbb{R}$.

3) Sia $f(x,y) = \dfrac{x \log(x^2 - y^2 + 1)}{x+y}$. Determinare e rappresentare sul piano l'insieme A su cui f è differenziabile.
Stabilire poi se f ha derivata direzionale nel punto $(1,0)$ rispetto al versore $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e in caso positivo

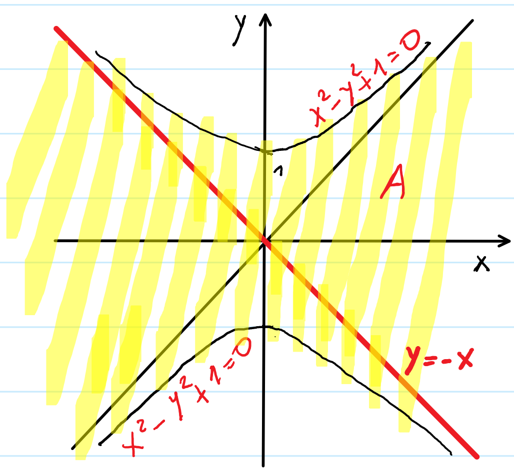
calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

f è definita su $\quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + 1 > 0 \wedge x \neq -y\}$.
Osserviamo che dalle regole di derivazione f è derivabile su B
$$\forall (x,y) \in B: \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\log(x^2-y^2+1)}{x+y} + x\,\frac{2x}{x^2-y^2+1}\cdot\frac{1}{x+y} - x\log(x^2-y^2+1)\,\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy}{x^2-y^2+1}\cdot\frac{1}{x+y} - x\log(x^2-y^2+1)\,\frac{1}{(x+y)^2}$$

entrambe queste funzioni sono definite e continue su B
quindi $A = B$. $\quad A$ è l'insieme tratteggiato in giallo

retta $y=-x$ esclusa



Dato che $(1,0)\in A$, f ha derivata direzionale secondo qualunque direzione in $(1,0)$ e inoltre

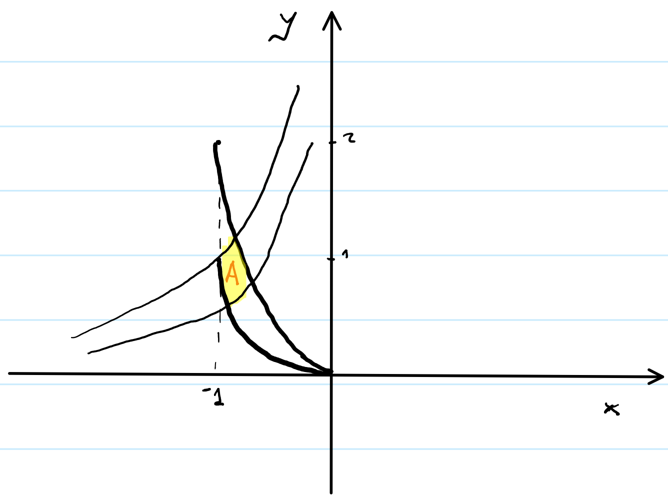
$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = Df(1,0)\cdot v = \left(1, -\log 2\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\log 2}{\sqrt{2}}$$

4) Calcolare l'integrale

$$\int_A x^4 y \, dx\, dy \quad \text{dove } A = \left\{(x,y) : x^2 \le y \le 2x^2, \; -1 \le xy \le -\frac{1}{2}\right\}$$

Osserviamo che A è l'insieme qui rappresentato in figura



Poniamo $\frac{y}{x^2} = u$ e $xy = v$

Quindi $1 \le u \le 2$ e $-1 \le v \le -\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial(u,v)}{} = -\frac{2y}{} - \frac{y}{} = -\frac{3y}{} = -3u$$

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{2y}{x^2} - \frac{y}{x^2} = -\frac{3y}{x^2} = -3u$$

Quindi $\quad \det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\dfrac{1}{3u}$

$$\int_A x^4 y \, dx\, dy = \int_A \frac{x^4}{y} y^2 \, dx\, dy = \int_{[1,2]\times[-1,-\frac{1}{2}]} \frac{v^2}{u} \cdot \frac{1}{3u} \, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} v^2 dv \cdot \int_1^2 \frac{du}{u^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} v^3 \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{u} \Big|_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{8} + 1 \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{144}$$