1)

(a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{2}{4^k}$$

(b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \log k}{k^3+1}$$

(a) Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ priva dei primi 4 termini e moltiplicata per 3

Quindi $$\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{2}{4^k} = 2 \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = 2 \frac{1}{4^4} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{4^h}$$

$$= \frac{2}{4^4} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{2^8 \frac{3}{2^2}} = \frac{1}{3 \cdot 2^5}$$

(b) Usando il criterio degli infinitesimi si deduce che la serie assegnata converge. Infatti

$$k^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{k \log k}{k^3+1} = \frac{k^{\frac{5}{2}} \log k}{k^3+1} =$$

$$= \frac{k^{\frac{5}{2}} \log k}{k^3\left(1+\frac{1}{k^3}\right)} = \frac{\log k}{k^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k^3}} \longrightarrow 0$$

2) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (x-y+2)\, x y$$

e studiarne la natura

$$f_x(x,y) = xy + y(x-y+2)$$

$$f_y(x,y) = -xy + x(x-y+2)$$

I punti critici di f sono i punti (x,y) che risolvono:

$$\begin{cases} xy + y(x-y+2) = 0 \\ -xy + x(x-y+2) = 0 \end{cases}$$

sommando membro a membro e prendendo la I equazione otteniamo:

$$\begin{cases}(x-y+2)(x+y)=0\\ xy+y(x-y+2)=0\end{cases} \iff \begin{cases} y=-x\\ -x^2-x^2-x^2-2x=0\end{cases} \lor \begin{cases}x-y+2=0\\ xy=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-x(3x+2)=0\\ y=-x\end{cases} \quad \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \quad \begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\ y=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases} \lor \begin{cases}y=0\\ x=-2\end{cases}$$

sono punti della retta di equazione $y=x+2$

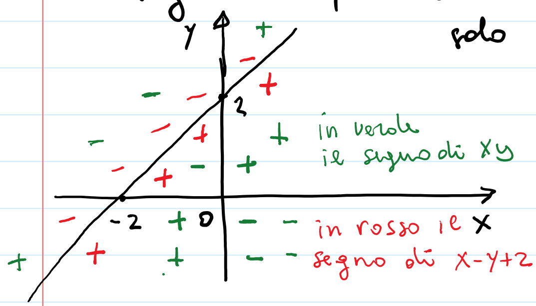
f ha dunque 4 punti critici $P_1(0,0)$, $P_2\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ $P_3(0,2)$ $P_4(-2,0)$

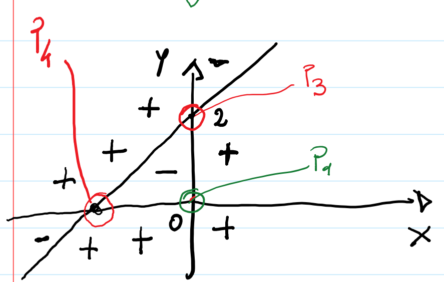
Osserviamo che la natura di P_1, P_3 e P_4 può essere subito stabilita studiando il segno di

$f(x,y)-f(P_i)=f(x,y)$ $\forall i=1,3,4$ dato che $f(P_i)=0$

Il segno di f si ottiene subito dato che dipende solo dal segno di

$x-y+2$ e xy





Si vede subito che P_1, P_3, P_4 sono punti di sella dato che ognuno di essi non ha alcun intorno su cui f ha segno definito.

Per stabilire la natura di P_2 calcoliamo la matrice Hessiana di f

$$f_{xx}(x,y)=y+y=2y$$

$$f_{yy}(x,y)=-x-x=-2x$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=x+x-2y+2$$

$$\left(4 \quad -\frac{2}{3} \right.$$

$$H_f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$\left|H_f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{12}{9} > 0$; $\frac{4}{3} > 0$ quindi P_2 è un minimo locale forte

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = xe^x \quad (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ che ha radici $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.
Quindi l'equazione omogenea associata a $(*)$ ha integrale generale

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione $\bar{y}$ di $(*)$ con il metodo di similarità. Poiché 1 è radice del polinomio caratteristico

$\bar{y} = \bar{y}(x) = x(k_1 + k_2 x)e^x$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\bar{y}'(x) = (k_1 + k_2 x)e^x + k_2 x e^x + x(k_1 + k_2 x)e^x$$
$$= k_1 e^x + xe^x(2k_2 + k_1) + k_2 x^2 e^x$$

$$\bar{y}''(x) = k_1 e^x + e^x(2k_2 + k_1) + xe^x(2k_2 + k_1) + 2k_2 x e^x + k_2 x^2 e^x$$
$$= e^x(2k_2 + 2k_1) + xe^x(4k_2 + k_1) + k_2 x^2 e^x$$

Quindi imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione otteniamo

$$\underline{e^x(2k_2 + 2k_1)} + xe^x(4k_2 + k_1) + \cancel{k_2 x^2 e^x} \underline{- 3k_1 e^x} - 3xe^x(2k_2 + k_1) - \cancel{3k_2 x^2 e^x}$$
$$+ 2xk_1 e^x + \cancel{2k_2 x^2 e^x} = xe^x$$

ossia

$e^x(2k_2 - k_1) + xe^x(-2k_2) = xe^x$ e pertanto deve essere

$e^x(2k_2 - k_1) + xe^x(-2k_2) = xe^x$ e pertanto deve essere

$$\begin{cases} 2k_2 - k_1 = 0 \\ -2k_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 = -\frac{1}{2} \\ k_1 = -1 \end{cases}$$

quindi $\bar{y}(x) = x\left(-1 - \frac{1}{2}x\right)e^x$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene imponendo che $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^x$ soddisfi le condizioni iniziali

$0 = y(0) = c_2 + c_2$ da cui $c_2 = -c_1$

$$y'(x) = c_1 e^x - 2c_1 e^{2x} - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^x - \frac{x}{2}e^x - x\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^x$$

$0 = y'(0) = c_1 - 2c_1 - 1$ da cui $c_1 = -1$

La soluzione è quindi $y(x) = -e^x + e^{2x} - x\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^x$

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A (x^2+y^2)\,xy\,dx\,dy$$

dove A è il settore di corona circolare di raggi 1 e 2 e ampiezza $\frac{\pi}{2}$ tagliato dagli assi cartesiani nel II quadrante

Passando alle coordinate polari

$$\int_A (x^2+y^2)\,xy\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_1^2 \rho^5 \cos\theta\sin\theta\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \cdot \int_1^2 \rho^5\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cdot \frac{1}{6}\rho^6\Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{12}\cdot\left(2^6 - 1\right)$$

12