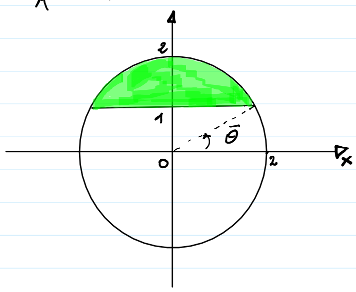
1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy \,, \quad \text{dove } A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4 \,;\ y\ge 1\}$$



L'insieme di integrazione A è rappresentato in figura. Conviene calcolare l'integrale assegnato in coordinate polari. A tal fine determiniamo dapprima l'angolo $\bar\theta$; deve essere

$2\sin\bar\theta = 1$ quindi $\bar\theta = \frac{\pi}{6}$

Quindi le coordinate θ dei punti in A varia da $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{5}{6}\pi$

Cerchiamo ora l'equazione della retta $y=1$ in coordinate polari;

deve essere $\rho\sin\theta = 1$ da cui $\rho = \frac{1}{\sin\theta}$.

Pertanto in coordinate polari l'insieme di integrazione è definito da

$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5}{6}\pi$, $\frac{1}{\sin\theta}\le\rho\le 2$ e l'integrale assegnato è uguale a:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2}\frac{\rho\sin\theta}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\sin\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2}d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin\theta\left(2-\frac{1}{\sin\theta}\right)d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(2\sin\theta-1)\,d\theta =$$

$$= -2\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{2}{3}\pi = -2\left(\cos\frac{5}{6}\pi-\cos\frac{\pi}{6}\right)-\frac{2}{3}\pi$$

$$= -2\left(-2\cos\frac{\pi}{6}\right)-\frac{2}{3}\pi = 4\frac{\sqrt3}{2}-\frac{2}{3}\pi = 2\sqrt3-\frac{2}{3}\pi$$

2) Determinare e rappresentare sul piano il dominio della funzione

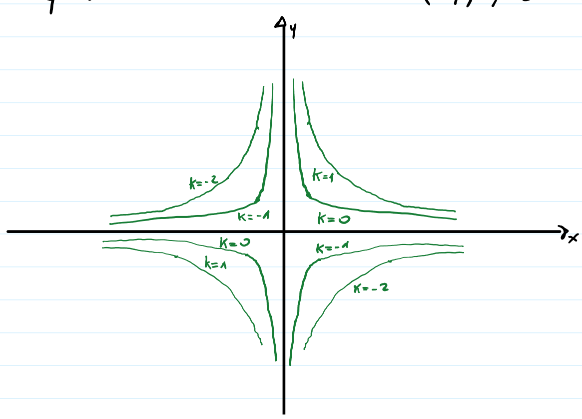
$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(xy)}$$

Dire se si tratta di un insieme, aperto, chiuso, limitato, connesso per archi

Stabilire se $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

Stabilire infine se $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ dove $v=\left(-\frac{1}{\sqrt7},\sqrt{\frac{6}{7}}\right)$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

dom f: deve essere $\cos(xy)\neq 0$ cioè $xy\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$



Dunque il dominio di f è costituito dal piano privo dei punti della famiglia di iperboli equilatere riferite ai propri asintoti di equazione $xy=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

(In figura ho rappresentato solo le iperboli che si ottengono per $k=-2,-1,0,1$)

Si tratta di un insieme aperto

iperboli che si ottengono per $K = -2, -1, 0, 1$)

Si tratta di un insieme aperto (dato che stiamo considerando il complementare della controimmagine di $\{0\}$ mediante la funzione continua $g(x,y) = \cos(xy)$, quindi il complementare di un insieme chiuso) illimitato, non connesso per archi (dato che ad esempio i punti $(-10, 10)$ e $(10, 10)$ non possono essere congiunti mediante una curva continua che non intersechi alcune delle iperboli).

f è continua sul suo dominio in quanto rapporto di funzioni continue; essendo $(0,0)$ un punto di accumulazione per dom f, si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$$

f è anche derivabile sul suo dominio con derivate continue (poiché quozienti di funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$); esiste quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v \rangle$$

Calcoliamo $\nabla f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\cos(x+y)\cos(xy) + \sin(x+y)\sin(xy)\,y}{\cos^2(xy)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos(x+y)\cos(xy) + \sin(x+y)\sin(xy)\,x}{\cos^2(xy)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1+0}{1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{1+0}{1} = 1$$

Quindi $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \left\langle (1,1), \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, \sqrt{\frac{6}{7}}\right) \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{6}{7}} = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{7}}$

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale in forma implicita dell'equazione

$$y' = x^2 \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili $y' = g(y) f(x)$ con $g(y) = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$ e $f(x) = x^2$. Le soluzioni singolari sono con $g(y) = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$ e $f(x) = x^2$. Le soluzioni singolari sono le funzioni costanti $y(x) = \bar{y}$ tali che $g(\bar{y}) = 0$; per l'equazione assegnata quindi abbiamo solo $y(x) = 0$ dato che 0 è l'unica soluzione di $g(y) = 0$

Possiamo quindi assumere che $y(x) \neq 0$, $\forall x$ e dividere ambo i membri per g:

$y' \cdot \frac{e^y + 1}{e^y - 1} = x^2$ integrando ambo i membri otteniamo

$$\int y' \frac{e^y + 1}{e^y - 1} dx = \int x^2 dx$$ cioè

$$\int \frac{e^y + 1}{e^y - 1} dy = \frac{1}{3}x^3 + c$$

Posto $e^y = t$ $\left(\begin{array}{l} dt = e^y dy \\ dy = \frac{dt}{t} \end{array} \right)$ il primo integrale diviene

$\int \frac{t+1}{(t-1)t} dt$. Usiamo il metodo della riduzione in fratti semplici: $\frac{t+1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + Bt}{t(t-1)} = \frac{(A+B)t - A}{t(t-1)}$

Deve quindi essere $\begin{cases} A + B = 1 \\ -A = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$; quindi

$$\int \frac{t+1}{(t-1)t} dt = -\int \frac{1}{t} dt + \int \frac{2}{t-1} dt = -\log|t| + 2\log|t-1|, \quad t = e^y$$

cioè $-\log e^y + 2\log|e^y - 1| = -y + \log((e^y - 1)^2)$

Per cui, l'integrale generale in forma implicita è dato da

$$\log((e^y - 1)^2) - y = \frac{1}{3}x^3 + c$$

4) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$

Scrivere quando f si dice derivabile parzialmente rispetto ad x_i in $\bar{x}$. Se f è derivabile parzialmente rispetto ad x_i in $\bar{x}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ cos'è il gradiente di f in $\bar{x}$? Ricordare infine quando f si dice differenziabile in $\bar{x}$.

Per le definizioni, si vedano pagg. 329, 330, 333 del manuale