Politecnico di Bari

Corso di Analisi Matematica II per Ingegneria Informatica (corso A)

Tracce di esame AA 2003-2004

Docenti: Prof.ssa G. Cerami, Dr. E. Caponio

A.A 2003/2004 Esonero 19 Febbraio 2004 Traccia A

1) Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\diamond \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\diamond \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)(n-1).$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left((n-1)^3 x^4\right)}{n^2\sqrt{n}}.$$

Si consideri poi la serie delle derivate della precedente e se ne determini l'insieme di convergenza puntuale.

3) Si determini l'insieme di definizione, rappresentandolo graficamente sul piano, della seguente funzione:

$$f(x,y) = \log\left(y^2 - \frac{x^2}{4}\right).$$

Si rappresentino poi graficamente le curve di livello di f.

4) Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{(x-1)y}}{(x-1)^2+y^2}.$$

A.A 2003/2004 Esonero 19 Febbraio 2004 Traccia B

1) Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\diamond \sum_{n=1}^{+\infty} 2\sqrt{n}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\diamond \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)(n-1).$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie seguente:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos\left((n^2-2)\sqrt{x}\right)}{n\sqrt{n-1}}.$$

Si consideri poi la serie delle derivate della precedente e se ne determini l'insieme di convergenza puntuale.

3) Si determini l'insieme di definizione, rappresentandolo graficamente sul piano, della seguente funzione:

$$f(x,y) = \log\left(\frac{x^2}{4}-y^2\right).$$

Si rappresentino poi graficamente le curve di livello di f.

4) Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^{x(y-1)}}{x^2+(y-1)^2}.$$

A.A 2003/2004 Esonero 19 Febbraio 2004 Traccia C

1) Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\diamond \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right),$$

$$\diamond \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) n^2.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left((1-n^2)e^x\right)}{n\sqrt[3]{n}}.$$

Si consideri poi la serie delle derivate della precedente e se ne determini l'insieme di convergenza puntuale.

3) Si determini l'insieme di definizione, rappresentandolo graficamente sul piano, della seguente funzione:

$$f(x,y) = \log\left(\frac{y^2}{4} - x^2\right).$$

Si rappresentino poi graficamente le curve di livello di f.

4) Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(-2,0)} \frac{e^{(x+2)y^2}}{(x+2)^2 + y^2}.$$

A.A 2003/2004 Esonero 19 Febbraio 2004 Traccia D

1) Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\diamond \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)\log\left(1+\frac{1}{n+2}\right),$$

$$\diamond \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)n^2.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\left((n-2)^3\log x\right)}{n^2\sqrt{n}}.$$

Si consideri poi la serie delle derivate della precedente e se ne determini l'insieme di convergenza puntuale.

3) Si determini l'insieme di definizione, rappresentandolo graficamente sul piano, della seguente funzione:

$$f(x,y)=\log\left(x^2-\frac{y^2}{4}\right).$$

Si rappresentino poi graficamente le curve di livello di f.

4) Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)}\frac{e^{x^2(y+2)}}{x^2+(y+2)^2}.$$

A.A 2003/2004 Esonero 29 Marzo 2004 Traccia A

1) Siano A un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ ed $f\colon A \to \mathbb{R}$. Quali condizioni deve soddisfare **per definizione** f per essere differenziabile nel punto (x_0, y_0)?

Si enunci inoltre una condizione sufficiente perché f sia differenziabile in A.

2) Siano A un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si dia la definizione di derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo una fissata direzione.

Sia poi $f(x, y) = \tan(x^2 y + \pi)$ e $v = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1, 0)$.

3) Stabilire se la funzione $f(x, y) = \log(x^2 - y^2) + xy$ ammette punti di massimo o di minimo.

Stabilire poi se f è limitata.

4) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2x\tan(x^2)y = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

5) Sia A l'insieme definito da

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > -2,\ x + y < -1,\ y < x,\ y > 2x\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x - y}{x + y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Esonero 29 Marzo 2004 Traccia B

1) Siano A un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ ed $f\colon A \to \mathbb{R}$. Quali condizioni deve soddisfare **per definizione** f per essere differenziabile nel punto (x_0, y_0)?

Si enunci inoltre una condizione sufficiente perché f sia differenziabile in A.

2) Siano A un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si dia la definizione di derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo una fissata direzione.

Sia poi $f(x, y) = \tan(xy^2 - \pi)$ e $v = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 1)$.

3) Stabilire se la funzione $f(x, y) = \log(y^2 - x^2) + xy$ ammette punti di massimo o di minimo.

Stabilire poi se f è limitata.

4) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2x\cot(x^2)y = x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

5) Sia A l'insieme definito da

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 1,\ x + y < 2, y > x, y < 2x\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_A \frac{x - y}{x + y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Esonero 17 Aprile 2004 Traccia A

1) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \frac{\cos(x^2+y)}{\mathrm{e}^{\sqrt{xy+1}}},$$

è differenziabile nel punto P di coordinate $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)$. Determinare poi l'equazione del piano tangente in P al grafico di f.

2) Determinare i punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x,y) = x^3(y^2 + 2x^2 - 1).$$

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' = x^2 - 1.$$

4) Sia A l'insieme definito da

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y + x < 0,\ y^2 + x^2 < 1,\ y^2 + x^2 > \frac{1}{4} \right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{2x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5) Sia $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$ una curva piana. Quali proprietà deve soddisfare per definizione γ per essere una curva rettificabile? Si enunci inoltre una condizione sufficiente perché γ sia rettificabile.

A.A 2003/2004 Esonero 17 Aprile 2004 Traccia B

1) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y^2)}{\mathrm{e}^{\sqrt{xy+1}}},$$

è differenziabile nel punto P di coordinate $(0, \sqrt{\pi})$. Determinare poi l'equazione del piano tangente in P al grafico di f.

2) Determinare i punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x,y) = x^3(x^2 + 2y^2 - 2).$$

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' = x^2 + 1.$$

4) Sia A l'insieme definito da

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y + x < 0,\ y^2 + x^2 < 1,\ y^2 + x^2 > \frac{1}{4} \right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5) Sia $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$ una curva piana. Quali proprietà deve soddisfare per definizione γ per essere una curva rettificabile? Si enunci inoltre una condizione sufficiente perché γ sia rettificabile.

A.A 2003/2004 Appello 29 Marzo 2004 Traccia A

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(|x^3 + y|x)}{\sqrt{-y}}.$$

Tracciare poi la curva di livello $c = 0$.

2) Stabilire il carattere della serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}.$$

3) Studiare la convergenza totale uniforme e puntuale della serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2-1)^n}{3^n}.$$

4) Siano A un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si dia la definizione di derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo una fissata direzione.

Si enunci poi una condizione sufficiente per l'esistenza della derivata direzionale nel punto (x_0, y_0) secondo una qualsiasi direzione.

5) Calcolare i punti di massimo e minimo relativo della della funzione

$$f(x,y) = |x|(x^2 - y^2 - 1).$$

6) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{1-x} = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

7) Sia A l'insieme definito da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 1,\ x + y < 2, y > 3x, y < 4x\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x+y}{x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Appello 29 Marzo 2004 Traccia B

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(|x^2+y|x)}{\sqrt{-y}}.$$

Tracciare poi la curva di livello $c = 0$.

2) Stabilire il carattere della serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

3) Studiare la convergenza totale uniforme e puntuale della serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2-2)^n}{4^n}.$$

4) Siano A un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si dia la definizione di derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo una fissata direzione.

Si enunci poi una condizione sufficiente per l'esistenza della derivata direzionale nel punto (x_0, y_0) secondo una qualsiasi direzione.

5) Calcolare i punti di massimo e minimo relativo della della funzione

$$f(x,y) = |y|(x^2+y^2-1).$$

6) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \dfrac{xy}{1+x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

7) Sia A l'insieme definito da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0,\ x+y < 1, y > 2x, y < 3x\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_A \frac{x+y}{x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Appello 17 Aprile 2004 Traccia A

1) Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{\log(1+n^2)}.$$

Determinarne inoltre l'insieme di convergenza puntuale e uniforme.

2) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$. Quale proprietà deve soddisfare per definizione A per essere connesso?

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{\log(x+y)-1}}{\sin(xy)}.$$

Dire poi, motivando la risposta, se tale insieme è aperto, chiuso, connesso, convesso.

4) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \frac{\cos(x^2+y)}{\mathrm{e}^{\sqrt{xy+1}}},$$

è differenziabile nel punto P di coordinate $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)$. Determinare poi l'equazione del piano tangente in P al grafico di f.

5) Determinare i punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x,y) = x^3(y^2+2x^2-1).$$

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' = x^2 - 1.$$

7) Sia A il seguente insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y+x < 0,\ y^2+x^2 < 1,\ y^2+x^2 > \frac{1}{4}\right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{2x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Appello 17 Aprile 2004 Traccia B

1) Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{\log(1+n^2)}.$$

Determinarne inoltre l'insieme di convergenza puntuale e uniforme.

2) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$. Quale proprietà deve soddisfare per definizione A per essere convesso?

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{\log(x+y)+1}}{\cos(xy)}.$$

Dire poi, motivando la risposta, se tale insieme è aperto, chiuso, connesso, convesso.

4) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y^2)}{\mathrm{e}^{\sqrt{xy+1}}},$$

è differenziabile nel punto P di coordinate $(0, \sqrt{\pi})$. Determinare poi l'equazione del piano tangente in P al grafico di f.

5) Determinare i punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x,y) = x^3(x^2+2y^2-2).$$

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' = x^2 + 1.$$

7) Sia A il seguente insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y+x<0,\ y^2+x^2<1,\ y^2+x^2>\frac{1}{4}\right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Appello 5 Luglio 2004 Traccia A

1) Stabilire il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n \log n - 1}{n^3}.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2} x^n.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \log\left(\frac{x + y}{y - 1}\right).$$

Delineare poi l'andamento delle curve di livello di f.

4) Dimostrare che la funzione

$$f(x, y) = \sin(\sqrt{x + y}) e^{x^2 y},$$

è differenziabile in tutti i punti interni al suo insieme di definizione.

5) Dire, motivando la risposta, se per l'equazione differenziale

$$y'' + y^2 = 0$$

è vero che una combinazione lineare di due soluzioni è ancora una soluzione.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y' - 2y = xe^{-x}.$$

7) Sia A l'insieme definito da

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi,\ -\pi < x + y < -\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{\cos(x + y)}{x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Appello 5 Luglio 2004 Traccia B

1) Stabilire il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n \log n - 2}{n^4}.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^3} x^n.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \log\left(\frac{x-y}{x+1}\right).$$

Delineare poi l'andamento delle curve di livello di f.

4) Dimostrare che la funzione

$$f(x, y) = \cos(\sqrt{x+y})e^{xy^2},$$

è differenziabile in tutti i punti interni al suo insieme di definizione.

5) Dire, motivando la risposta, se per l'equazione differenziale

$$y'' - \sqrt{y} = 0$$

è vero che una combinazione lineare di due soluzioni è ancora una soluzione.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y' - 2y = xe^{2x}.$$

7) Sia A l'insieme definito da

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \pi,\ -\pi < x + y < -\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{\sin(x+y)}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Appello 23 Luglio 2004 Traccia A

1) Stabilire il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\arctan(n^2+1)}{(n+1)^2}.$$

2) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}.$$

Dopo aver determinato l'insieme di definizione A delle funzioni che costituiscono la serie, determinare i sottoinsiemi di A su cui la serie converge totalmente.

Cosa si può dedurre infine riguardo alla convergenza uniforme e puntuale?

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\arcsin(x^2+y^2)}{\log((2x-y)(y-x))}.$$

4) Enunciare il Teorema di Schwarz e illustrarne il contenuto con un esempio.

5) Determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x,y) = xye^{-x^2+y-2}.$$

6) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{\log x} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

7) Sia A l'insieme definito da

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ \frac{1}{2} < \sqrt{y^2+x^2} < 1\right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A x\log(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Appello 23 Luglio 2004 Traccia B

1) Stabilire il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n^2-1)}{(n+1)^2}.$$

2) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{\sqrt{-x}}.$$

Dopo aver determinato l'insieme di definizione A delle funzioni che costituiscono la serie, determinare i sottoinsiemi di A su cui la serie converge totalmente.

Cosa si può dedurre infine riguardo alla convergenza uniforme e puntuale?

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\arccos(x^2+y^2)}{\log((x-2y)(y-x))}.$$

4) Enunciare il Teorema di Schwarz e illustrarne il contenuto con un esempio.

5) Determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x,y) = xye^{x-y^2+3}.$$

6) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{1}{x^2\log x} \\ y(2) = 0 \end{cases} .$$

7) Sia A l'insieme definito da

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x<0,\ y<0,\ 1<\sqrt{y^2+x^2}<2\right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_A y\log(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Appello 21 Settembre 2004 Traccia A

1) Stabilire il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{n^2}.$$

2) Calcolare il limite puntuale $f = f(x)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}.$$

Stabilire inoltre se $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$.

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 + y) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)}.$$

4) Enunciare il Teorema di Lagrange per funzioni di due variabili.

5) Determinare i punti di minimo e di massimo relativo della funzione

$$f(x, y) = (4x^2 - 1)e^{-x^2 - y^2}.$$

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{1 + x^2}.$$

7) Sia A l'insieme definito da

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 2,\ -x^2 < y < 0\right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{2x^3}{xy - 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Appello 13 Dicembre 2004 Traccia A

1) Stabilire il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{(\log n)^3}.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\log(1+2n)}.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\log(y^2-1)} - \arccos(xy).$$

4) Scrivere la definizione di differenziabilità e di derivabilità in un punto e in un insieme per una funzione di due variabili reali. Mostrare, con un esempio, che la derivabilità in un punto non implica la continuità.

5) Determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x,y) = |x-y|(2x^2+y^2-1).$$

6) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{x}{x^2+1} y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ y(1) = \sqrt{2} \end{cases}$$

7) Sia A l'insieme definito da

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 2,\ \frac{4x}{\pi} < y < \frac{6x}{\pi} \right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x^2}{y^2} \tan \frac{x}{y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

A.A 2003/2004 Appello 7 Gennaio 2005

1) Stabilire il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log \frac{n}{n^2-1}}{n^4(1-\cos\frac{1}{n})}.$$

2) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si consideri la funzione $f_n(x) = x^n e^{-nx+1}$. Si calcoli il limite puntuale della successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nell'intervallo $[0, +\infty)$ e si dimostri che la convergenza puntuale è anche uniforme.

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione e le curve di livello della funzione

$$f(x,y) = \log\left(\log\frac{x^2-y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

4) Scrivere la definizione di punto di minimo relativo per una funzione di due variabili reali. Si considerino, poi, $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con Ω aperto, e $(x_0, y_0) \in \Omega$ punto di minimo relativo per f, in cui f è differenziabile. Dimostrare che per ogni vettore v di modulo 1, si ha $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$.

5) Determinare i punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x,y) = |x^2 - y|(2x - 2y - 1).$$

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' - y' + y = \frac{1}{\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)}.$$

7) Calcolare il baricentro della curva piana γ di equazioni $\gamma(t) = (2\cos^2 t, \sin^2 t)$, $t \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$.