



Politecnico di Bari  
CdL Ingegneria Informatica e Automazione  
CdL Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni  
AA 2015-2016

Complementi di Analisi Matematica  
Tracce di esame (con svolgimenti)  
Docente: Prof. E. Caponio

- 1) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione  $f(t) = e^{-it} \sin(2t)$  specificando per quali  $s \in \mathbb{C}$  è ben definita.
- 2) Stabilire se  $\frac{s+1}{s-i}$  può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.
- 3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2t) & 0 \leq t \leq \pi \\ \cos t & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- 4) Stabilire qual è la funzione di trasferimento dell'equazione  $y'' - 6y' + 9y = 0$ . Calcolarne poi la sua antitrasformata.
- 5) Stabilire per quali  $x \in \mathbb{R}$  la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{nx+1}}$$

converge puntualmente. Calcolarne poi la somma.

- 1) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione  $f(t) = e^{-t} \cos(3t)$  specificando per quali  $s \in \mathbb{C}$  è ben definita.
- 2) Stabilire se  $s^2 - i$  può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.
- 3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} \cos(3t) & 0 \leq t \leq \pi \\ \sin t & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- 4) Stabilire qual è la funzione di trasferimento dell'equazione  $y'' + 2y' + y = 0$ . Calcolarne poi la sua antitrasformata.
- 5) Stabilire per quali  $x \in \mathbb{R}$  la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (x^2 - 1)^n$$

converge puntualmente. Calcolarne poi la somma.

- 1) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione  $f(t) = e^{it}t^2$  specificando per quali  $s \in \mathbb{C}$  è ben definita.
- 2) Stabilire se  $\frac{i-s}{1+s}$  può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.
- 3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} \sin(3t) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \cos t & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- 4) Stabilire qual è la funzione di trasferimento dell'equazione  $y'' - 4y' + 4y = 0$ . Calcolarne poi la sua antitrasformata.
- 5) Stabilire per quali  $x \in \mathbb{R}$  la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

converge puntualmente. Calcolarne poi la somma.

- 1) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione  $f(t) = e^t t^3$  specificando per quali  $s \in \mathbb{C}$  è ben definita.
- 2) Stabilire se  $\frac{s^2 - 1}{s}$  può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.
- 3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- 4) Stabilire qual è la funzione di trasferimento dell'equazione  $y'' - 2y' + y = 0$ . Calcolarne poi la sua antitrasformata.
- 5) Stabilire per quali  $x \in \mathbb{R}$  la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{nx-3}$$

converge puntualmente. Calcolarne poi la somma.

# Esonero Complementi di Analisi Matematica

giovedì 12 novembre 2015 12:00

1) Calcolare le trasformate di Laplace delle funzioni

A)  $f(t) = e^{-it} \sin(2t)$

B)  $f(t) = e^{-t} \cos(3t)$

C)  $f(t) = e^{-it} t^2$

D)  $f(t) = e^{-t} t^3$

specificando per quali  $s \in \mathbb{C}$  converge.

Usando le proprietà delle trasformate si ottiene subito

A)  $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{2}{4 + (s+i)^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}s > 0$

B)  $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}s > -1$

C)  $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{2}{s+(s+i)^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}s > 0$

D)  $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{(s-i)^3}{(s-i)^4}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}s > 1$

2) stabilire se la funzione

A)  $\frac{s+1}{s-i}$

B)  $s^2 - i$

C)  $\frac{i-s}{1+s}$

D)  $\frac{s^2-1}{s}$

può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.

Rendere la risposta

(la risposta è negativa per tutte le tracce finiti:

- A)  $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \frac{s+i}{s-i} = 1 \neq 0$  per  $s$  che varia nella retta  $x+iy$ ,  $y \in \mathbb{R}$  fissata
- B) finito  $\bar{y} \in \mathbb{R}$ ,  $s = x+i\bar{y}$ ,  $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} s^2 - i =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \bar{y}^2 + 2ix\bar{y} - i = +\infty \neq 0$
- C)  $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \frac{i-s}{1+s} = -1 \neq 0$  per  $s$  che varia sulla retta  $x+i\bar{y}$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}$  fissato
- D) finito  $\bar{y} \in \mathbb{R}$ ,  $s = x+i\bar{y}$ ,  $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \frac{s^2 - 1}{s} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \bar{y}^2 + 2ix\bar{y} - 1}{x + i\bar{y}} = +\infty \neq 0$

3) Calcolare la trasformata del segnale

- A)  $f(t) = \begin{cases} \sin 2t & 0 \leq t \leq \pi \\ \cos t & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
- B)  $f(t) = \begin{cases} \cos 3t & 0 \leq t \leq \pi \\ \sin t & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
- C)  $f(t) = \begin{cases} \sin 3t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \cos t & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
- D)  $f(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

A) Poiché  $f(t) = \sin_+(2t) - \sin_+(2(t-\pi)) - \cos_+(t-\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{2}{s^2 + 4} - e^{-\pi s} \frac{2}{s^2 + 4} - e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{2}{4+s^2} - e^{-\pi s} \frac{2}{4+s^2} - e^{-\pi s} \frac{s}{s^2+1}$$

B)  $f(t) = \cos_+(3t) + \cos_+(3(t-\pi)) - \sin_+(t-\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{9+s^2} + e^{-\pi s} \frac{s}{9+s^2} - e^{-\pi s} \frac{1}{1+s^2}$$

C)  $f(t) = \sin_+(3t) - \sin_+(3(t-2\pi)) + \cos_+(t-2\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{3}{9+s^2} - e^{-2\pi s} \frac{3}{9+s^2} + e^{-2\pi s} \frac{s}{s^2+1}$$

D)  $f(t) = \cos_+(2t) - \cos_+(2(t-2\pi)) + \sin_+(t-2\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{4+s^2} - e^{-2\pi s} \frac{s}{4+s^2} + e^{-2\pi s} \frac{1}{1+s^2}$$

4) Dire qual'è la funzione di trasferimento dell'equazione

A)  $y'' - 6y' + 9y = 0$

B)  $y'' + 2y' + y = 0$

C)  $y'' - 6y' + 4y = 0$

D)  $y'' - 2y' + y = 0$

Calcolare, poi, la sua antitrasformata.

Per definizione, la funzione di trasferimento è

$\frac{1}{P(s)}$  dove  $P=P(s)$  è il polinomio caratteristico

dell'equazione; quindi:

A)  $\frac{1}{s^2 - 6s + 9} = \frac{1}{(s-3)^2}$

B)  $\frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2}$

$$C) \frac{1}{s^2 - 4s + 4} = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$D) \frac{1}{s^2 - 2s + 1} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

d'ultim' trasformata è quindi la funzione.

- A)  $te^{3t}$       B)  $t e^{-t}$       C)  $te^{2t}$       D)  $t e^t$

E) stabilire per quali  $x \in \mathbb{R}$  la serie

$$A) \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{mx+1}}$$

$$B) \sum_{m=1}^{+\infty} (x^2 - 1)^m$$

$$C) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^m}$$

$$D) \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{mn-3}$$

converge puntualmente. Calcolare poi la somma.

$$A) \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{mx+1}} = \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{3 \cdot (3^x)^m} = \frac{1}{3} \sum_{m=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^x}\right)^m$$

e quindi converge se e solo se  $-1 < \frac{1}{3^x} < 1$

cioè se  $x \geq 0$ . La sua somma è stata calcolata

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{3^x}} - 1 - \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3^{2x}} \right)$$

B) Converge se e solo se  $-1 < x^2 - 1 < 1$  cioè

$$0 < x^2 < 2 \text{ ossia } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$$

La sua somma è data da

$$\frac{1}{1-(x^2-1)} - 1 = \frac{1}{2-x^2} - x^2$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \text{ e quindi}$$

$$x \text{ è solo se } -1 < \frac{1}{1+x^2} < 1 \text{ ossia } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

La sua somma è data da

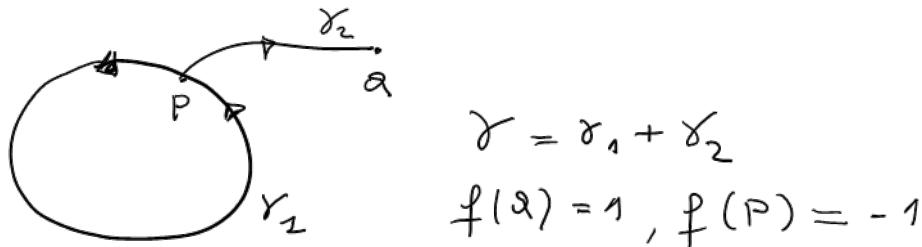
$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} - 1 = \frac{1+x^2}{x^2} - 1 = \frac{1}{x^2}$$

$$D) \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{nx-3} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} (2^x)^n \text{ e}$$

quindi converge se e solo se  $2^x < 1$  cioè  
se  $x < 0$ , la sua somma è data da

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-2^x} - \frac{1}{8}$$

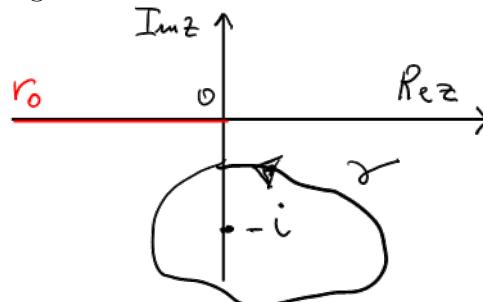
- 1) Sia  $\omega$  una forma differenziale esatta definita su  $\mathbb{R}^2$  e sia  $f$  una sua primitiva. Quanto vale  $\int_{\gamma} \omega$ , dove  $\gamma$  è la curva rappresentata in figura? Giustificare la risposta.



- 2) Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log}_0 z}{(i+z)^3 z} dz,$$

dove  $\gamma$  è la curva rappresentata in figura:



- 3) Calcolare la forma esponenziale del numero complesso  $(1+i)^i$ .
- 4) Qual è l'immagine mediante la funzione esponenziale della retta  $r_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = -\pi\}$ ? Motivare la risposta.
- 5) Determinare le singolarità della funzione  $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z^3}}$  e stabilire di che tipo sono quelle isolate. Ha senso calcolare il residuo di  $f$  all'infinito? In caso affermativo, com'è possibile ottenere concretamente tale residuo?
- 6) Calcolare

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma(r)} \frac{e^{-z^2}}{z-1} dz,$$

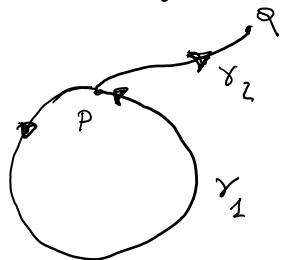
dove  $\gamma(r)$  è la semicirconferenza di centro 1 e raggio  $r$  con diametro sull'asse dei numeri reali percorsa in senso antiorario. Motivare la risposta.

# Esonero Complementi di Analisi Matematica

mercoledì 20 gennaio 2016 11:00

1) Sia  $\omega$  una forma differenziale obiettiva in  $\mathbb{R}^2$  e sia  $f$  una sua primitiva.

Quanto vale  $\int_{\gamma} \omega$  dove  $\gamma$  è la curva in figura?



$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$f(Q) = 1 \quad f(P) = -1$$

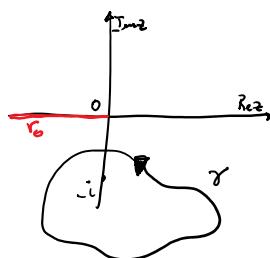
Giustificare la risposta

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega . \text{ Poiché } \omega \text{ è obiettiva } \int_{\gamma_1} \omega = 0$$

$$\text{mentre } \int_{\gamma_2} \omega = f(Q) - f(P) = 2$$

2) Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{\log_0 z}{(i+z)^3} dz \text{ dove } \gamma \text{ è la curva in figura}$$



Poiché la determinazione principale del logaritmo è discontinua in  $\mathbb{C} \setminus r_0$ , la funzione  $f(z) = \log_0 z / z$  è discontinua

sul dominio che ha per bordo  $\gamma$ . Dalla seconda formula di rappresentazione di Cauchy otteniamo allora

$$\int_{\gamma} \frac{\log_0 z}{(i+z)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(-i)$$

$$\cdot \quad \Im z = 1.00 \pi$$

$\gamma (1+z)^{\frac{1}{z}}$

$$f'(z) = \frac{\frac{1}{z}z - \log z}{z^2} = \frac{1 - \log z}{z^2}$$

$$f''(z) = \frac{-\frac{1}{z}z^2 - (1-\log z)2z}{z^4} = -\frac{1+2(1-\log z)}{z^3}$$

$$\text{Quindi } f''(-i) = -\frac{3+2i\frac{\pi}{2}}{i} = -\frac{3+i\pi}{i}$$

da cui l'integrale svolto è uguale  $-3\pi - i\pi^2$

3) Calcolare  $(1+i)^i$

$$(1+i)^i = e^{i \log_0(1+i)} = e^{i(\log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4})} = \\ = e^{-\frac{\pi}{4}} e^{i \log \sqrt{2}}$$

b) Qua è l'immagine reale della funzione esponenziale  
dello zettà  $r_1$  data da tutti i numeri complessi  $z$  per cui  
 $\operatorname{Im} z = -\pi$ ?

Se  $z \in r_1$ , allora  $z = x - \pi i$  e quindi  $e^z = e^x e^{-i\pi}$ ;

questi sono numeri complessi che hanno argomento principale

$-\pi$  e modulos uguali a  $e^x$ , quindi  $e(r_1)$  è

la semiretta uscita dall'origine che forma un angolo

uguale a  $-\pi$  con il senso dei numeri reali positivi,

cioè la semiretta  $r_0$  dell'esercizio 2, privata dell'origine.

5) Determinare le singolarità delle funzioni

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z^3}}$$

e stabilire di che tipo sono quelle isolte

Ha senso calcolare il limite all'infinito?

In caso affermativo come possiamo ottenere concretamente tale rendito?

$$\sin \frac{1}{z^3} = 0 \iff \frac{1}{z^3} = k\pi \iff z = \frac{1}{\sqrt[3]{k\pi}}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

radici cubiche in  $\mathbb{C}$

Quindi le singolarità di  $f$  sono  $\{\infty\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{k\pi}} \right\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$

$$\text{Ora si è voluto dato che } \left| \frac{1}{\sqrt[3]{k\pi}} \right| = \frac{1}{|\sqrt[3]{k\pi}|}$$

$$\text{e } \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|\sqrt[3]{k\pi}|} = 0. \quad \text{radice cubica in } \mathbb{R}$$

$$\text{Poiché } D \sin \left( \frac{1}{z^3} \right) = \cos \left( \frac{1}{z^3} \right) \left( -\frac{3}{z^4} \right)$$

$$D \sin \left( \frac{1}{z^3} \right) \Big|_{z=z_k} = \cos \left( k\pi \right) \cdot \left( -\frac{3}{(\sqrt[3]{k\pi})^4} \right)$$

$$(-1)^k \left( -\frac{3}{(\sqrt[3]{k\pi})^4} \right) \neq 0, \quad z_k \text{ è uno zero semplice}$$

per la funzione  $\sin \frac{1}{z^3}$  e quindi è un polo semplice per  $f$ .

Dato che tutte le singolarità di  $f$  sono contenute in  $D(0,1)$ ,  $\infty$  è una singolarità isolata per  $f$  e quindi ha sens calcolare il rendito

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res} \left( -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right) =$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{\sin z^3}$$

0 è un polo di ordine 5 per  $-\frac{1}{z^2} \frac{1}{\sin(z^3)}$

$$\text{dato che } \lim_{z \rightarrow 0} -z^5 \frac{1}{z^2} \frac{1}{\sin(z^3)} = \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{z^3}{\sin(z^3)} = 1$$

$$\text{Quindi } \text{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4!} \left( D^{(4)} \frac{z^3}{\sin z^3} \right)$$

6) Calcolo

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma(r)} \frac{e^{-z^2}}{z-1} dz, \text{ dove } \gamma(r) \text{ è la}$$

semicirconferenza di centro 1 e raggi r con orientazione sull'asse dei numeri reali percorso in senso antiorario. Giustificare la risposta

$$\text{Poiché } \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{e^{-z^2}}{z-1} = \frac{1}{e}$$

per il lemma del falso arco

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma(r)} \frac{e^{-z^2}}{z-1} dz = \frac{1}{e} \pi i$$

(si osservi che il risultato è indipendente dal fatto che  $\gamma$  sia la semicirconferenza contenuta nel semipiano  $\text{Im } z \geq 0$  o quelle contenute in  $\text{Im } z \leq 0$ )

- 1)** Calcolare la trasformata di Laplace del segnale associato alla funzione

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t/2) & t < 2\pi \\ \sin(3t) & t \geq 2\pi \end{cases}$$

specificando quale sia la sua ascissa di convergenza.

*Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:*

- 1)** Studiare la convergenza puntuale e uniforme in  $\mathbb{R}$  della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2^n}{3^n} (x-1)^n.$$

- 2)** Calcolare

$$\int_{C^+(0,1/2)} \frac{e^{z-1}}{z^2(i+z)^2} dz,$$

dove  $C^+(0, 1/2)$  è la circonferenza di centro 0 e raggio  $1/2$  percorsa in senso antiorario

- 3)** Enunciare e dimostrare il teorema di Hermite-Liouville.  
**4)** Determinare le soluzioni dell'equazione  $z^i = 1$ . Giustificare la risposta.  
**5)** Dare la definizione di residuo all'infinito. Dimostrare poi il II teorema dei residui.  
**6)** Calcolare, usando il metodo dei residui,

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4} dx.$$

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

associato alla funzione  $f(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{t}{2}\right) & t < 2\pi \\ \sin(3t) & t \geq 2\pi \end{cases}$

specificando le sue ascisse di convergenza

$$f_+(t) = \cos_+\left(\frac{t}{2}\right) + \cos_+\left(\frac{1}{2}(t-2\pi)\right) + \sin_+(3(t-2\pi))$$

quindi

$$\mathcal{L}(f_+)(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}} e^{-2\pi s} + \frac{3}{s^2 + 9} e^{-2\pi s}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re}s > 0$$

quindi  $\sigma(f_+) = 0$

1) Studiare convergenza puntuale e uniforme in  $\mathbb{R}$  delle

ANNI  
PRECEDENTI  
AL 2014/15

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1 - 2^m}{3^m} (x-1)^m$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|1 - 2^{m+1}|}{3^{m+1}} \cdot \frac{3^m}{|1 - 2^m|^m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{2^m} - 1}{2^m - 1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

quindi  $f = \frac{2}{3}$  per  $x = 1 + \frac{3}{2}$  otteniamo

la sua somma  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1 - 2^m}{3^m} \frac{3^m}{2^m}$

Picché  $\frac{1 - 2^m}{3^m} \frac{3^m}{2^m} = \frac{1}{2^m} - 1 \rightarrow -1 \neq 0$

essa non converge

Analogamente per  $x = 1 - \frac{3}{2}$  otteniamo

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1 - 2^m}{3^m} \left(-\frac{3}{2}\right)^m = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{1 - 2^m}{2^m}$$

e poiché  $1 - 2^m (-1)^m$  non ha limite per  $m \rightarrow \infty$

$$\text{e poiché } \frac{1-2^m}{2^m} (-1)^m \text{ non ha limite per } m \rightarrow \infty$$

e poiché  $\frac{1-2^m}{2^m} (-1)^m$  non ha limite per  $m \rightarrow \infty$

anch'esso non converge. Di conseguenza, le serie di potenze assegnate convergono puntualmente in  $(\frac{1-3}{2}, \frac{1+3}{2})$  e uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in  $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

2) Calcolo

$$\int_{C^+(0, \frac{1}{2})} \frac{e^{z-1}}{z^2 (z+i)^2} dz, \text{ dove } C^+(0, \frac{1}{2}) \text{ è la circonferenza di centro } 0 \text{ e raggio } \frac{1}{2} \text{ percorsa in senso antiorario}$$

Poiché la funzione  $f(z) = \frac{e^{z-1}}{(z+i)^2}$  è olomorfa

su  $D(0, \frac{1}{2})$  possiamo applicare la I formula di rappresentazione di Cauchy ottenendo

$$\int_{C^+(0, \frac{1}{2})} \frac{e^{z-1}}{z^2 (z+i)^2} = 2\pi i D \frac{e^{z-1}}{(z+i)^2} \Big|_{z=0}$$

$$D \frac{e^{z-1}}{(z+i)^2} = \frac{e^{z-1} (z+i)^2 - 2(z+i) e^{z-1}}{(z+i)^4}$$

$$\text{ovvero l'integrale assegnato è uguale a } 2\pi i \left( -\frac{1}{e} - \frac{2i}{e} \right) = -\frac{2\pi i}{e} (1+2i)$$

3) Enunciare e dimostrare il Teorema di Hermite-Liouville

Si veda e.g. p. 92 degli appunti

4) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$z^i = 1$$

$$z^i = e^{i \operatorname{Log} z} = e^{-\operatorname{Arg} z + i \log |z|} = e^{-\operatorname{Arg} z} e^{i \log |z|}$$

Dunque deve essere  $\begin{cases} \log |z| = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -\operatorname{Arg} z = 0 \end{cases}$

da cui  $|z| = e^{2k\pi}$  e  $\operatorname{Arg} z = 0$   
per cui le soluzioni sono reali positive e date da  $z = e^{2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$

5) Dare la definizione di resistore all'infinito

Dimostrare poi il II teorema dei residui.

Si veda e.g. p. 125 e p. 127 degli appunti

6) Calcolare, usando il metodo dei residui

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4} dx$$

Poiché  $\frac{2x^2}{4+x^4} \sim \frac{2}{x^2}$  per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{2x^2}{4+x^4}$

è integrabile in senso improprio su  $[0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{4+x^4} dx \quad \text{dato che}$$

$$\frac{2x^2}{4+x^4} \text{ è pari}$$

$$\text{Calcoliamo dunque } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{4+x^4} dx$$

Sia  $f(z) = \frac{z^2}{4+z^4}$ , estensione a  $\mathbb{C}$  dell'integrandi

Poiché  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ , per il lemma

Poiché  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ , per il lemma

$$\text{del grande cerchio } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{4+x^4} = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2))$$

dove  $z_1$  e  $z_2$  sono le radici quarte di  $-4$  che appartengono al semipiano  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$   
e dunque  $z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Sia  $z_1$  che  $z_2$  sono poli semplici per  $f$

(dato che sono zeri semplici per il denominatore  
e il numeratore è non nullo in essi)

$$\text{quindi } \operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = 2^{-\frac{5}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{z_2^2}{4z_2^3} = \frac{1}{4z_2} = 2^{-\frac{5}{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

Quindi l'integrale orogonale è uguale a

$$2\pi i 2^{-\frac{5}{2}} \left( e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) =$$

$$= 2^{-\frac{3}{2}} \pi i \left( -2i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2^{-1} \pi i^2 = \frac{\pi}{2}$$

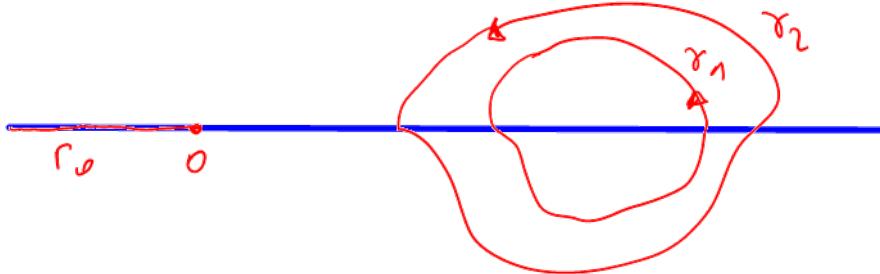
- 1) Stabilire quale fra le seguenti forme differenziali non è sicuramente esatta sul suo dominio. Motivare la risposta.

- (a)  $\frac{y}{x^2 + y^2 + 1} dx - \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} dy,$   
 (b)  $2xe^{x^2+y^2} dx + 2ye^{x^2+y^2} dy,$   
 (c)  $(\cos(xy) - xy \sin(xy)) dx - x^2 \sin(xy) dy.$

- 2) Dimostrare che

$$\int_{\gamma_1} \text{Log}_0 z dz = \int_{\gamma_2} \text{Log}_0 z dz,$$

dove  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono le curve rappresentate in figura, orientate nel verso antiorario:



- 3) Verificare che  $i$  è uno zero di molteplicità 1 per il polinomio  $p(z) = 1 - iz - z^4 + z^6$ . Che tipo di singolarità è  $i$  per la funzione  $f(z) = \frac{iz}{p(z)}$ ? Quanto vale il residuo di  $f$  in  $i$ ?
- 4) Calcolare modulo e argomento principale di  $(1+i)^{1-i}$ .
- 5) Scrivere la serie di Laurent di centro 0 della funzione  $f(z) = z^{10}e^{-1/z^4}$ . In quali punti essa converge a  $f$ ? (Motivare la risposta). Che tipo di singolarità è 0 per  $f$ ? (Motivare la risposta). Quanto vale  $\text{Res}(f, 0)$ ?
- 6) Come è definita la serie di soli seni di una funzione  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  (assolutamente integrabile su  $[0, T]$ )? Tale serie coincide con la serie di Fourier di  $f$ ? Motivare la risposta.

1) Stabilire quali delle seguenti forme differenziali non è esatta  
Riservare le risposte

$$(a) \frac{y}{x^2+y^2+1} dx - \frac{x}{x^2+y^2+1} dy$$

$$(b) 2x e^{x^2+y^2} dx + 2y e^{x^2+y^2} dy$$

$$(c) (\cos(xy) - xy \sin(xy)) dx - x^2 \sin(xy) dy$$

Le (a) poiché non è chiusa ((b) e (c) sono chiuse e quindi sono definite su  $\mathbb{R}^2$   
sono tutte esatte). Infatti

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2+y^2+1} \right) = \frac{x^2+y^2+1 - 2y^2}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{x^2-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

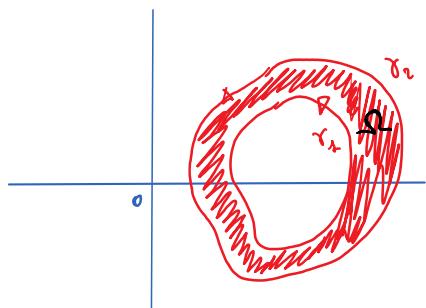
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2+1} \right) = \frac{x^2+y^2+1 - 2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{y^2-x^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Chiaramente la prima funzione non è uguale alla seconda su  $\mathbb{R}^2$ .

2) Dimostrare che

$$\int_{\gamma_1} \log_z dz = \int_{\gamma_2} \log_z dz \text{ dove } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ sono le}$$

curve disegnate in figura orientate nel verso antiorario



La funzione  $f(z) = \log_z$  è  
olomorfa sul dominio  $S_2$  che  
ha come bordo le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ,  
per cui  $\int_{\partial S_2} \log_z dz = \int_{\gamma_2^+} \log_z dz +$

$$+ \int_{\gamma_1^-} \log_z dz \text{ e quindi}$$

$$\int_{\gamma_2^+} \log_z dz = \int_{\gamma_1^+} \log_z dz$$

Oppure si osserva subito che essendo  $\log_z$  olomorfo in i domini

$T_1$  e  $T_2$  che hanno per bordo, rispettivamente,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si ha, per le  
tecniche di Cauchy-Goursat  $\int_{\gamma_1^+} \log z dz = 0 = \int_{\gamma_2^+} \log z dz$ .

3) Si consideri il polinomio

$$p(z) = 1 - iz - z^3 + z^6$$

Si verifichi che  $i$  è uno zero per  $p$ . Che ordine ha  $i$ ?

Che tipo di singolarità è  $-i$  per la funzione  $f(z) = \frac{iz}{p(z)}$ ?

Quanto vale il residuo di  $f$  in  $i$ ?

$$p(i) = 1 + i - 1 + i^2 = 0$$

$$p'(z) = -i - 4z^3 + 6z^5, \quad p'(i) = -i + 4i + 6i = 9i \neq 0$$

quindi  $i$  è uno zero semplice. Di conseguenza, dato che il numeratore di  $f$  non è nullo in  $i$ ,  $i$  è un polo

$$\text{semplice per } f \text{ e } \text{Res}(f, i) = \frac{i^2}{p'(i)} = -\frac{1}{9i}$$

4) Calcolare modulo e argomento principale di  $(1+i)^{1-i}$

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\log(1+i)} = e^{(1-i)(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4})} = \\ = e^{\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}} e^{i(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2})} \quad \text{quindi}$$

$$|(1+i)^{1-i}| = e^{\log\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}} \quad \text{e Arg}((1+i)^{1-i}) = \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2} \\ (\text{si osservi che } \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2} \in [-\pi, \pi])$$

5) Scrivere la serie di Laurent di centro 0 della funzione

$$f(z) = z^{10} e^{-\frac{1}{z^4}}. \quad \text{In quali punti essa converge a } f? \quad (\text{Motivare le risposte})$$

Che tipo di singolarità è 0 per  $f$ ? (Motivare le risposte). Quanto vale  $\text{Res}(f, 0)$ ?

$$f(z) = z^{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z^4}\right)^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z^{4k-10}}$$

Questa è la serie di Laurent di  $f$  ed essendo  $f$  olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , essa converge a  $f \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Poiché contiene infiniti termini del tipo  $a_k z^k$  con  $k$  negativo,  $\sigma$  è una singolarità essenziale per  $f$ .  $\text{Res}(f, \sigma)$  è il coefficiente del termine  $z^{-1}$ . Esso si otterrebbe per  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $4k - 10 = -1$ . Questa equazione non ha soluzioni intere, quindi rimane nullo solo il termine  $z^{-1}$ , ovvero  $a_{-1} = \text{Res}(f, \sigma) = 0$

- 6) Cosa è la serie di soli seni di una funzione  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  assolutamente integrabile?

Tale serie coincide con la serie di Fourier di  $f$ ? Motivare la risposta

È la serie di Fourier dello estensione periodica di  $f$  su  $[-T, T]$

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, T] \\ -f(-t), & t \in [-T, 0) \end{cases}$$

Ovviamente i miei coefficienti sono definiti da

$$b_k = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T \tilde{f}(t) \sin\left(\frac{2\pi k t}{2T}\right) dt = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \tilde{f}(t) \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right) dt$$

$$\text{e la serie di cui è } \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right)$$

La serie di Fourier di  $f$  avrà in genere anche i coefficienti

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt, \quad k \geq 1$$

e i coefficienti  $b_k$  definiti da

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt, \quad k \geq 1$$

$$\text{La serie è quindi } a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)$$

e non coincide con le rette che sono gli zeri di  $f$ .

- 1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale  $g$  periodico di periodo  $\pi$  associato alla funzione  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \cos(2t)$ .

*Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:*

- 1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in  $[0, 1]$  della successione di funzioni:

$$f_n(t) = \frac{te^{-nt}}{1 + n^2 t^2}.$$

- 2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) x^n$ .
- 3) Dare la definizione di funzione armonica su un aperto del piano e di armonica coniugata di una funzione armonica. Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza di una armonica coniugata.

- 4) Calcolare

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z - i)^2 z} dz,$$

dove  $C^+(0, 2)$  è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata nel verso antiorario.

- 5) Dimostrare che se  $z_0$  è un polo di ordine  $m > 1$  per una funzione  $f$  allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{1}{(m-1)!} D^{m-1}((z - z_0)^m f(z)) \right).$$

- 6) Sia  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \in [-1, 0] \\ e^x & x \in (0, 2] \end{cases}$$

e siano  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(b_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  i coefficienti di Fourier di  $f$ . Calcolare la somma della serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ .

- 1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale g periodico di periodo  $\pi$  associato alla funzione  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \cos(2t)$

$$\begin{aligned} L(g)(s) &= \frac{1}{1-e^{-s\pi}} \int_0^{\pi} e^{-st} \cos(2t) dt = \\ &= \frac{1}{1-e^{-s\pi}} L(\cos_+(2t) - \cos_+(2(t-\pi)))(s) \\ &= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left( \frac{s}{4+s^2} - e^{-\pi s} \frac{s}{4+s^2} \right) = \frac{s}{4+s^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re}s > 0 \end{aligned}$$

Oppure semplicemente si osservi che il segnale periodico g coincide con  $\cos_+(2t)$  e quindi  $L(g)(s) = L(\cos_+(2t))$ ,  $\forall s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}s > 0$  (Attenzione! se si osserva che  $g(t) = \cos_+(2t)$ , allora per ricavare  $L(g)(s)$  non usare le formule sulle trasformate di un segnale periodico e quindi non si fattore  $\frac{1}{1-e^{-\pi s}}$  ma componi!

Così  $L(g)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} L(\cos_+(2t)) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{s}{4+s^2} \xrightarrow{\pi \rightarrow \infty} \frac{s}{4+s^2}$  e sbagliate!

1)

AA precedente Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione  $f_m(t) = \frac{t e^{-mt}}{1+m^2 t^2}$

Osserviamo che  $\lim_m f_m(t) = 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ . Echiamo dunque di

stabilire se  $f_m$  converge uniformemente a 0 su  $[0, 1]$

Poiché  $\left| \frac{t e^{-mt}}{1+m^2 t^2} \right| \leq \underbrace{t e^{-mt}}_{g_m(t)} \quad \forall t \in [0, 1],$

vorremo ancora di stabilire che posto  $H_m := \max_{t \in [0, 1]} t e^{-mt}$

$$H_m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty.$$

Fissato  $m \in \mathbb{N}$ ,  $g_m'(t) = e^{-mt} - mt e^{-mt} = e^{-mt}(1-mt)$

Per cui  $g_m'$  è crescente da  $[0, \frac{1}{m}]$  e decrescente da  $[\frac{1}{m}, 1]$

$$H_m \text{ è quindi uguale a } f_m\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} e^{-1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Dunque  $\left| \max_{t \in [0, 1]} f_m(t) \right| \leq H_m = \frac{1}{m}$  e quindi anche  $\|f_m\| \rightarrow 0$

cioé fu converge uniforme su  $[0,1]$  a 0

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n^2} x^n$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1) \sin \frac{1}{(n+1)^2}}{n \sin \frac{1}{n^2}} = \frac{(n+1)^2 \sin \frac{1}{(n+1)^2}}{n^2 \sin \frac{1}{n^2}} \cdot \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Il raggio di convergenza delle serie è quindi 1 e l'intervallo di convergenza  $(-1, 1)$ . Per  $x=1$  ottieniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n^2}; \text{ poiché } n \sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n} \text{ essa non converge}$$

Per  $x=-1$  ottieniamo

$$\sum (-1)^n n \sin \frac{1}{n^2}. \text{ Cerchiamo di stabilire se le ipotesi del criterio di Leibniz sono soddisfatte:}$$

Divisando  $n \sin \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ . Consideriamo ora la funzione

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x^2}; f'(x) = \sin \frac{1}{x^2} + x \cos \frac{1}{x^2} \left( -\frac{2}{x^3} \right) \\ = \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} \cos \frac{1}{x^2}$$

Osserviamo che per  $x > 1$   $\cos \frac{1}{x^2} > 0$  e quindi su  $(1, +\infty)$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \tan \frac{1}{x^2} < \frac{2}{x^2}$$

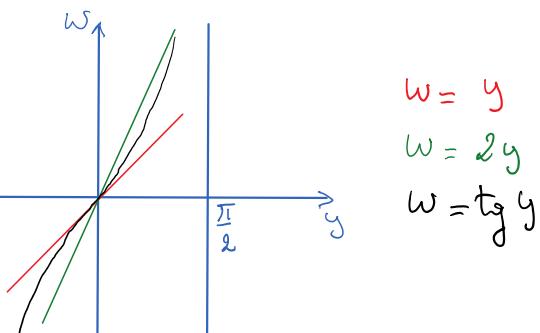
Se poniamo  $\frac{1}{x^2} = y$  queste equivale a  $\tan y < 2y$

Che per  $y < \delta$  con  $\delta > 0$  piccolo, cioè per  $x > \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

$x$  soddisfatto dato

$$\text{che } D \tan y \Big|_{y=0} = 1$$

$$D 2y \Big|_{y=0} = 2$$



$$17=0$$



Pertanto la successione  $m \sin \frac{1}{m^2}$  è definitivamente convergente e quindi per il criterio di Leibniz la serie  $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m m \sin \frac{1}{m^2}$  converge.

In definitiva, l'insieme di convergenza puntuale è  $[-1, 1]$  e si ha convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo  $[-1, a]$ , con  $-1 \leq a < 1$ .

- 3) Dare le definizioni di funzione armonica e di armonica coniugata di una funzione armonica. Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza di una armonica coniugata

Si vede, ad esempio, p. 96-97 appunti

- 4) Calcolo

$$\int_{\Gamma^+(0,2)} \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-i)^2 z} dz$$

dove  $\Gamma^+(0,2)$  è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata nel verso antiorario

$f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-i)^2 z}$  ha due singolarità 0 e i. i è un polo

di ordine 2, 0 una singolarità essimile. Entrambe le singolarità appartengono a  $D(0,2)$

Possiamo quindi usare le I e le II tecniche di calcoli per calcolo

$$\int_{\Gamma^+(0,2)} f(z) dz$$

$$\int_{\Gamma^+(0,2)} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, -i) + \operatorname{Res}(f, 0)) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$$

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} + (\frac{1}{z})^{-1}\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{\sin z}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2 \frac{1}{z^2}} = -\frac{1}{z^2} \frac{\sin z}{\frac{(1-iz)^2}{z^4}} = -\frac{z^2 \sin z}{(1-iz)^2}$$

Come si vede 0 non è un singolarità per  $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

per cui  $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$  e l'integrale assegnato è anch'esso nullo.

5) Dimostrare se  $z_0$  è un polo di ordine  $m$  per  $f$

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{1}{(m-1)!} D^{(m-1)} ((z-z_0)^m f(z)) \right)$$

Si veda, ad esempio, p. 124 degli appunti.

$$6) \text{ Sia } f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [-1, 0] \\ e^x & x \in (0, 2] \end{cases}$$

e risuoi  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(b_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  i coefficienti di Fourier di  $f$ .

Calcolare le somme delle serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$

$$\text{Dalla identità di Parseval: } \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f^2(x) dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 \right)$$

$$\text{per cui } \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) = 2 \left( \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f^2(x) dx - a_0^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f^2(x) dx &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f^2(x) dx + \frac{1}{3} \int_0^2 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 (x-1)^2 dx + \frac{1}{3} \int_0^2 e^{2x} dx \\ &= \left[ \frac{1}{6} (x-1)^3 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{6} e^{2x} \right]_0^2 = -\frac{1}{9} + \frac{8}{9} + \frac{1}{6} (e^4 - 1) \\ &= \frac{7}{9} - \frac{1}{6} + \frac{e^4}{6} = \frac{11}{18} + \frac{e^4}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0^2 &= \left( \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx \right)^2 = \left( \frac{1}{3} \int_{-1}^0 (x-1) dx + \frac{1}{3} \int_0^2 e^{2x} dx \right)^2 = \\ &= \left( \frac{1}{6} (x-1)^2 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{3} e^{2x} \Big|_0^2 \right)^2 = \\ &= \left( \frac{1}{6} - \frac{4}{6} + \frac{1}{3} e^2 - \frac{1}{3} \right)^2 = \\ &= \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^2 \right)^2 = \left( -\frac{5}{6} + \frac{1}{3} e^2 \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \left( -\frac{1}{2} - \bar{3} + \bar{3}^* \right) - \left( -\bar{6} - 3^* \right)$$

$$= \frac{25}{36} - \frac{10}{18}e^2 + \frac{1}{9}e^4$$

Dunque

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 = 2 \left( \frac{11}{18} + \frac{e^4}{6} - \frac{25}{36} - \frac{1}{9}e^4 + \frac{5}{9}e^2 \right)$$

$$= 2 \left( -\frac{1}{12} + \frac{e^4}{18} + \frac{5}{9}e^2 \right) =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{e^4}{9} + \frac{10}{9}e^2$$

- 1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di Laplace di un segnale periodico.

6 pts.

*Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:*

- 1) Enunciare il Teorema di integrazione termine a termine. usarlo poi per calcolare per serie il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx.$$

6 pts.

- 2) Stabilire se la serie di potenze in  $\mathbb{C}$  data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} (z-1)^n.$$

converge nel punto  $z = 2i$ .

8 pts.

- 3) Enunciare il Principio di identità delle funzioni olomorfe e fornire, poi, almeno una sua applicazione.

6 pts.

- 4) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}}{x^2 + e^2} dx.$$

8 pts.

- 5) Calcolare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi/2] \\ -1 & x \in (\pi/2, \pi] \end{cases}$$

Dimostrare poi, usando tale serie, che  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$ .

8 pts.

- 1) Enunciare e dimostrare il teorema sulle trasformate di un segnale periodico

Si veda ad esempio gli appunti nelle mie pagine web riguardanti le trasformate di Laplace.

- 1) Enunciare il teorema di integrazione termine a termine. Usarlo poi per

annunciare  
per calcolo

$$\text{calcolare per serie l'integrale: } \int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$$

$$\text{Poiché } \sin(x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{x^{4k+2}}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Integrando termine a termine ottengo dunque

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 x^{4k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{4k+1}$$

- 2) Stabilire se la serie di potenze in  $\mathbb{C}$  data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} (z-1)^n \text{ converge nel punto } z=2i$$

$$\text{Poiché } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{3} \quad \text{il raggio di}$$

convergenza della serie è 3

Quindi la serie converge nel disco  $D(1, 3)$

Poiché  $|2i-1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} < 3$ ,  $2i \in D(1, 3)$   
e la serie omologa converge in  $z=2i$

- 3) Enunciare il "principio di identità per le funzioni olomorfe" e fornire, poi, almeno una sua applicazione

Si veda, ad esempio, p. 80 degli appunti. Possibili applicazioni:

la somma delle mie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  è l'unica estensione olomorfa su  $\mathbb{C}$  della funzione reale  $y = e^x$ ;  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ , etc.

4) Usando il metodo di residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + e^2} dx$$

L'integrandone è una funzione reale d'insiemi in  $\mathbb{C}$   
 $\left| \frac{e^{2ix}}{x^2 + e^2} \right| = \frac{1}{x^2 + e^2} \sim \frac{1}{x^2}$ , quindi è assolutamente

integrabile su  $\mathbb{R}$  e dunque integrabile.

La sua estensione complessa è la funzione

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2 + e^2}$$

Poiché  $\frac{1}{z^2 + e^2} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$ , possiamo applicare il lemma di Jordan nel

semipiano dei numeri complessi con parte immaginaria positiva

Gli zeri della funzione il denominatore sono le radici quadrate di  $-e^2$  cioè  $i\epsilon$  e  $-i\epsilon$

Appartiene al semipiano dei numeri complessi con parte immaginaria positiva solo  $i\epsilon$

che è un polo semplice, quindi

$$\text{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2 + e^2}, i\epsilon\right) = \lim_{z \rightarrow i\epsilon} (z - i\epsilon) \frac{e^{2iz}}{z^2 + e^2} = \frac{e^{2i(i\epsilon)}}{D'(z^2 + e^2)|_{z=i\epsilon}}$$

$$= \frac{e^{-2\epsilon}}{2ie}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + e^2} dx = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2 + e^2}, i\epsilon\right) = 2\pi i \frac{e^{-2\epsilon}}{2ie} = \pi e^{-2\epsilon - 1}$$

5) Calcolare le serie di soli segni delle funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Dimostrare per, usando tale serie, che  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(kx) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(kx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \\ &= \frac{2}{k\pi} \left( -\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + 1 + \cos(k\pi) - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= \frac{2}{k\pi} \left( -2 \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + 1 + (-1)^k \right) \end{aligned}$$

Poiché  $\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 0$  se  $k$  è dispari ed è uguale a  $(-1)^h$  se  $k=2h$

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \frac{2}{2h\pi} (-(-1)^h + 1) & \text{se } k=2h \end{cases}$$

Quindi le serie di soli semi di  $f$  è data da

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{h\pi} (-(-1)^h + 1) \sin\left(h\frac{\pi}{2}\right)$$

Per  $x=\frac{\pi}{4}$  la serie converge a  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Quindi  $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{2}{h\pi} (-(-1)^h + 1) \sin\left(h\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ; poiché

$$\sin\left(h\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^m & \text{se } h=2m+1 \\ 0 & \text{se } h=2m \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi} (2)(-1)^m = 1 \quad \text{cioè} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 4}{(2m+1)} = \pi$$

$$\text{ovvero} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$$

- 1) Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t^2, & t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

7 pts.

*Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:*

- 1) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-n}}{n+1} (x-2)^n.$$

7 pts.

- 2) Sia  $f$  la funzione data da

$$f(z) = e^{\bar{z}}.$$

Determinare l'immagine mediante  $f$  dell'insieme  $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2}\}$  e disegnarla sul piano.

4 pts.

- 3) Enunciare la I Formula di rappresentazione di Cauchy.

Calcolare poi

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{(z-i)(z-2i)(z-3i)}{(z+i)^4} dz,$$

dove  $C^+(0,2)$  è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata in senso antiorario.

7 pts.

- 4) Dare la definizione di residuo.

Calcolare poi il residuo in 0 della funzione  $f(z) = ze^{-i/(3z)}$ .

6 pts.

- 5) Enunciare e dimostrare il I Teorema dei residui.

5 pts.

- 6) Usare l'identità di Parseval con la funzione  $f(x) = x - 1$ ,  $x \in [1, 3]$ , estesa per periodicità con periodo 2 su  $\mathbb{R}$ , per dimostrare che  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2} = \frac{1}{6}$ .

7 pts.

1)  
Da AA  
2014-15

Usando lo transformata di Laplace determinare il segnale  
che risolve:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t^2, t \geq 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Ponendo lo transformata di entrambi i membri dell'equazione, ottieniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y)(s) &= \frac{1+(2s)}{s^2+2s+1} + \frac{\mathcal{L}(t^2_+)(s)}{s^2+2s+1} \\ &= \frac{s+(s+1)}{s^2+2s+1} + \mathcal{L}(t^2_+)(s) \cdot \mathcal{L}(y_0(t)), \end{aligned}$$

dove  $y_0 = y_0(t)$  è la soluzione fondamentale dell'equazione.

$$\text{Poiché } \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad y_0(t) = (te^{-t})_+$$

$$\text{dunque } \mathcal{L}(t^2_+)(s) \cdot \mathcal{L}(te^{-t})_+ = \mathcal{L}(t^2 \ast (te^{-t})_+)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+(s+1)}{(s+1)^2}\right)(t) = 2te^{-t} + e^{-t}$$

$$\text{quindi } y(t) = 2te^{-t} + e^{-t} + \int_0^t (t-u)e^{u-t} u^2 du$$

$$= -u^3 e^{u-t} \Big|_0^t + 3 \int_0^t u^2 e^{u-t} du + t \int_0^t u^2 e^{u-t} du$$

$$= -t^3 + (3+t) \int_0^t u^2 e^{u-t} du$$

$$\int_0^t u^2 e^{u-t} du = u^2 e^{u-t} \Big|_0^t - 2 \int_0^t ue^{u-t} du =$$

$$= t^2 - 2ue^{u-t} \Big|_0^t + 2 \int_0^t e^{u-t} du$$

$$= t^2 - 2t + 2e^{u-t} \Big|_0^t = t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t}$$

$$\text{dunque } y(t) = (2te^{-t} + e^{-t} - t^2 + (3+t)(t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t}))H(t)$$

$$= ($$

$$= (-5e^{-t} + t^2 - 4t + 6)H(t)$$

1) Pre AA 2014-2015 Studiare convergenza puntuale e uniforme delle serie che potesse

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} e^{-m} (x-2)^m$$

$$\lim_m \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} = \lim_m \frac{e^{-m-1}}{e^{-m}} \frac{m}{m+1} = \frac{1}{e}$$

Quindi il rapporto di convergenza della serie è  $p = e$

Per  $x = 2+e$  si ottiene la serie numerica

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} e^{-m} e^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} e^m \quad \text{che converge (per il criterio di Leibniz)}$$

Per  $x = 2-e$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} e^{-m} (-e)^m &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} e^{-m} (-1)^m e^m = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m}}{m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+1} \quad \text{che diverge positivamente} \end{aligned}$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale è  $(2-\epsilon, 2+\epsilon]$

Per il Teorema di Abel

la serie converge uniformemente su ogni intervallo del tipo  $[2-\epsilon+\delta, 2+\epsilon]$  con  $0 < \delta < \epsilon$ .

2) Determinare l'immagine mediante la funzione  $f$ .

dell'insieme  $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2}\}$ , dove

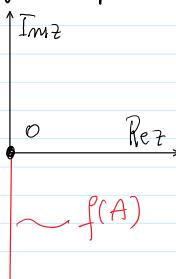
$$f(z) = e^{\bar{z}}. \quad \text{Rappresentare sul piano } f(A).$$

Osserviamo che  $z \in A \iff z = x + i\frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$

$$\text{quindi } f(z) = e^{x-i\frac{\pi}{2}} = e^x e^{-i\frac{\pi}{2}} = -ie^x$$

Poiché  $e^x > 0$ ,  $f(A)$  è la semiretta uscente dall'origine coincidente

con il senso dei numeri immaginari puri con parte immaginaria negativa



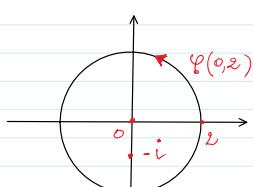
3) Enunciare la "I formula di rappresentazione di Cauchy"

Calcolare poi

$$\int_{\gamma^+(0,2)} \frac{(z-i)(z-2i)(z-3i)}{(z+i)^4} dz$$

dove  $\gamma^+(0,2)$  è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata in senso antiorario

Per l'enunciato della I formula di rappresentazione di Cauchy si vede, ad esempio, p. 69 degli appunti



Poiché  $-i$  è interno al disco  $D(0,2)$  e la funzione  $f(z) = (z-i)(z-2i)(z-3i)$  è olomorfa nel piano uscire le II formula di rappresentazione di Cauchy

Qui noi l'integrale segnato è uguale a  $\frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-i)$

Poiché  $f$  è un polinomio di grado 3 il cui termine di grado 3 è  $z^3$  lo suo ultimo termine è costante ed uguale a 6. Quindi l'integrale segnato è uguale a

$$\frac{2\pi i}{6} 6 = 2\pi i$$

4) Dare la definizione di corona.

Calcolare poi il residuo in 0 delle funzione

$$f(z) = \frac{z}{z} e^{-\frac{i}{3z}}$$

Per la definizione si vede ad esempio p. 122 degli appunti

lo sviluppo in serie di Laurent di centro 0 per f

è dato da

$$z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{-i}{3z} \right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-i)^k}{3^k z^{k-1}} = \\ = z - \frac{i}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{z} + \dots$$

$$\text{Quindi } \operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{18}$$

5) Enunciare e dimostrare il I teorema dei residui.

Si veda ad esempio p. 123 degli appunti

6) Usare l'identità di Parseval e la funzione

$$f(x) = x-1, \quad x \in [1, 3] \quad \text{estesa per periodicità, con periodo } \ell, \text{ su } \mathbb{R}$$

$$\text{per dimostrare che } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2} = \frac{1}{6}$$

Determiniamo i coefficienti di Fourier di f

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_1^3 (x-1) dx = \frac{1}{4} (x-1)^2 \Big|_1^3 = 1$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_1^3 (x-1) \cos \left( \frac{2\pi k x}{2} \right) dx = \int_1^3 (x-1) \cos(k\pi x) dx$$

$$= \frac{1}{k\pi} (x-1) \sin(k\pi x) \Big|_1^3 - \frac{1}{k\pi} \int_1^3 \sin(k\pi x) dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi} \sin(3k\pi) + \frac{1}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi x) \Big|_1^3 =$$

$$= \frac{2}{k\pi} \sin(2k\pi + k\pi) + \frac{1}{k^2 \pi^2} (\cos(3k\pi) - \cos(k\pi))$$

$$= \frac{2}{k\pi} \sin(2k\pi) \cos(k\pi) + \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi) \cos(2k\pi) +$$

$$+ \frac{1}{k^2 \pi^2} \cos(2k\pi + k\pi) - \frac{(-1)^k}{k^2 \pi^2}$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{k^2 \pi^2} (\cos(2k\pi) \cos(k\pi) - \sin(2k\pi) \sin(k\pi)) - \frac{(-1)^k}{k^2 \pi^2}$$

$$= \frac{1}{k^2 \pi^2} (-1)^k -$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 + 0 + \frac{1}{k^2\pi^2} (\omega_{1\text{even}} + \omega_{2\text{odd}}) = \dots = \frac{1}{k^2\pi^2} \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} (-1)^k - \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2} = 0 \\
 b_k &= \frac{2}{2} \int_1^3 (x-1) \sin\left(\frac{2\pi k x}{2}\right) dx = \int_1^3 (x-1) \sin(k\pi x) dx = \\
 &= -\frac{1}{k\pi} (x-1) \cos(k\pi x) \Big|_1^3 + \frac{1}{k\pi} \int_1^3 \cos(k\pi x) dx = \\
 &= -\frac{2}{k\pi} \cos(3k\pi) + \frac{1}{k^2\pi^2} \sin(k\pi x) \Big|_1^3 = \\
 &= -\frac{2}{k\pi} (-1)^k + 0 = \frac{2}{k\pi} (-1)^{k+1}
 \end{aligned}$$

L'identità di Parseval per  $f$  è quindi data da:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_1^3 (x-1)^2 dx &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{k\pi} (-1)^{k+1} \right)^2 \\
 \frac{1}{6} (x-1)^3 \Big|_1^3 &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \\
 \frac{1}{6} 8 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \\
 \frac{4}{3} - 1 &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \quad \text{da cui} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

- 1) Calcolare la trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione dei segnali  $f_1(t) = \cos_+(2(t-1))$ ,  $f_2(x) = H(t-2)$  (dove  $H$  è la funzione di Heaviside), specificandone il dominio.

6 pts.

*Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:*

- 1) Calcolare per serie

$$\int_0^2 e^{-(x-1)^2} dx.$$

6 pts.

- 2) Stabilire se la serie di potenze in  $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log((1+1/n)^n) (z - (1-i))^n,$$

converge in  $z = 1 - i/2$ .

5 pts.

- 3) Dimostrare che se  $z_0$  è uno zero di molteplicità  $m$  per  $f$  funziona olomorfa su un aperto  $\Omega$ ,  $z_0 \in \Omega$ , allora esso è un polo di ordine  $m$  per la funzione  $1/f$ .

5 pts.

- 4) Calcolare i residui nelle singolarità al finito e all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{e^{-1/z^2} z}{(z-i)(z+i)^2}.$$

—

8 pts.

- 5) Enunciare e dimostrare il teorema di Hermite-Liouville. Fornire poi almeno una sua conseguenza.

5 pts.

- 6) Scrivere la serie di soli seni della funzione  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 2]$ . Usarla, poi per stabilire che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{(2h+1)\pi} - \frac{4}{((2h+1)\pi)^3} \right) (-1)^h = \frac{1}{8}.$$

7 pts.

1) Calcolare la trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione di segnali

$$f_1(t) = \cos_+^2(t-1), \quad f_2(t) = H(t-2), \quad \text{dove } H \text{ è la funzione di Heaviside}$$

specificando il suo dominio

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2)(s) = \mathcal{L}(f_1)(s) \cdot \mathcal{L}(f_2)(s) \quad \forall s > \max\{\sigma(f_1), \sigma(f_2)\}$$

$$\text{Poiché } \mathcal{L}(\cos_+(2t)) = \frac{s}{s^2 + 4}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}s > 0 \quad \text{e } \mathcal{L}(H(t-2)) = e^{-2s} \mathcal{L}(f(t))(s), \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}s > \sigma(f)$$

$$\text{abbiamo che } \mathcal{L}(\cos_+(2(t-1))) = e^{-s} \frac{s}{s^2 + 4} \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}s > 0$$

$$\text{Analogamente } \mathcal{L}(H(t-2)) = \frac{e^{-2s}}{s} \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}s > 0$$

$$\text{Quindi } \mathcal{L}(f_1 * f_2)(s) = e^{-s} \frac{s}{s^2 + 4} \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{e^{-3s}}{s^2 + 4} \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}s > 0$$

1) Usando il teorema di integrazione termine a termine calcolare per serie

$$\int_0^2 e^{-(x-1)^2} dx$$

$$e^{-(x-1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-(x-1)^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^{2k}}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{quindi } \int_0^2 e^{-(x-1)^2} dx &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^2 (x-1)^{2k} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1} (x-1)^{2k+1} \Big|_0^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left( -(-1)^{2k+1} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1} (1 - (-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2}{2k+1}$$

2) Stabilire se la serie di potenze in  $\mathbb{C}$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \log \left[ \left( \frac{1+i}{m} \right)^m (z - (1-i))^m \right] \quad \text{converge in } z = 1 - \frac{i}{2}$$

$$a_m = \log \left[ \left( \frac{1+i}{m} \right)^m \right] = m \log \left( \frac{1+i}{m} \right) > 0 \quad \forall m$$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{m+1 \log \left( \frac{1+i}{m+1} \right)}{m \log \left( \frac{1+i}{m} \right)} = \frac{m+1}{m} \frac{\log \left( \frac{1+i}{m+1} \right)}{\log \left( \frac{1+i}{m} \right)} =$$

$$\underbrace{\log \left( \frac{1+i}{m+1} \right)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{m}}_{\rightarrow 1} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

$$\frac{\log\left(\frac{1+i}{m+1}\right)}{\frac{1}{m+1}} \cdot \frac{\frac{1}{i}}{\log\left(\frac{1+i}{m}\right)} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

Ora moltiplichiamo il rapporto di convergenza della serie per  $i$

Poiché  $\left|1 - \frac{i}{2} - (1-i)\right| = \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$  la serie converge nel punto  $1 - \frac{i}{2}$

3) Dimostrare che se  $z_0$  è uno zero di molteplicità  $m$  per

$f$  olomorfa su  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  allora

esso è un polo di ordine  $m$  per  $\frac{1}{f}$

Poiché  $z_0$  ha molteplicità finita, esso è uno zero isolato per  $f$ ;

dunque  $\frac{1}{f}$  ha in  $z_0$  uno singolarità isolata. Inoltre poiché esiste  $g \in H(\Omega)$  t.c.  $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ ,  $g(z_0) \neq 0$ , abbiamo

$$\text{che } \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0)^m}{(z-z_0)^m g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} \neq 0$$

Dunque  $z_0$  è un polo di ordine  $m$  per  $f$

4) Calcolare i residui nello singolareto al finito e all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}} z}{(z-i)(z+i)^2}$$

di singolarità se finito di  $f$  sono  $\{i, -i, 0\}$

$i$  è un polo semplice,  $-i$  è un polo di ordine 2,  $0$  è una singolarità essenziale

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{-\frac{1}{z^2}} z}{(z+i)^2} = \frac{e \cdot i}{-4} = -\frac{e}{4} i$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -i) &= \lim_{z \rightarrow -i} D((z+i)^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow -i} D\left(\frac{e^{-\frac{1}{z^2}} z}{z-i}\right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\left(\frac{1}{z^3} e^{-\frac{1}{z^2}} z + e^{-\frac{1}{z^2}}\right)(z-i) - e^{-\frac{1}{z^2}} z}{(z-i)^2} = \\ &= \frac{\left(\frac{2}{i} e(-i) + e\right)(-2i) + e^i}{-4} = \frac{2e^i + ei}{-4} = -\frac{3}{4} e^i \end{aligned}$$

Poiché  $0$  è una singolarità essenziale, calcoliamo prima il residuo all'infinito

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \underbrace{\frac{e^{-z^2}}{\left(\frac{1-i z}{z}\right)\left(\frac{1+i z}{z}\right)^2}}_{\cdot \frac{1}{z}} = -\frac{e^{-z^2}}{(1-i z)(1+i z)^2}$$

Poiché  $\lim_{z \rightarrow \infty} -\frac{e^{-z^2}}{(1-i z)(1+i z)^2} = -1 \neq 0$   $0$  è un singolare

eliminabile per  $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ . Quindi  $\text{Res}(f, \infty) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Per il II teorema dei residui } \text{Res}(f, 0) &= -\text{Res}(f, \infty) - \text{Res}(f, i) - \text{Res}(f, -i) \\ &= 0 + \frac{e^i}{4} + \frac{3e^{-i}}{4} = ei \end{aligned}$$

5) Enunciare e dimostrare il teorema di Hermite-Liouville

Fornire poi almeno una conseguenza

Si veda, ad esempio, pagg 92-93 degli appunti

6) Scrivere le serie di sommi delle funzioni

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, \ell]$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2} \int_0^\ell \sin\left(\frac{2k\pi}{\ell}x\right) x^2 dx = \int_0^\ell \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) x^2 dx = \\ &= -\frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) x^2 \Big|_0^\ell + \frac{2}{k\pi} \int_0^\ell 2x \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx = \\ &= -\frac{2}{k\pi} 4\cos(k\pi) + \frac{8}{(k\pi)^2} x \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \Big|_0^\ell - \frac{8}{(k\pi)^2} \int_0^\ell \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx \\ &= -\frac{8}{k\pi} (-1)^k + \frac{8}{(k\pi)^2} (2\sin(k\pi) - 0) + \frac{16}{(k\pi)^3} \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \Big|_0^\ell = \\ &= \frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} + 0 + \frac{16}{(k\pi)^3} (\cos(k\pi) - 1) = \frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3} ((-1)^k - 1) \end{aligned}$$

Dunque la serie richiesta è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3} ((-1)^k - 1) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$$

Per  $x=1$  otteniamo che converge a  $f(1) = 1$ ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3} ((-1)^k - 1) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad (*)$$

$$\text{Dunque} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3} ((-1)^k - 1) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad (\times)$$

Osserviamo che per  $k$  pari  $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ , per  $k$  dispari:  $k = 2h+1$   
 $\sin\left(\frac{(2h+1)\pi}{2}\right) = (-1)^h$ ;

Osserviamo anche che per  $k$  dispari

$$\frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} + \frac{16}{(k\pi)^3} ((-1)^k - 1) = \frac{8}{k\pi} - \frac{32}{(k\pi)^3}$$

Dunque la serie ( $\times$ ) divenire

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left( \frac{8}{(2h+1)\pi} - \frac{32}{((2h+1)\pi)^3} \right) (-1)^h \text{ ed ha somma } 1$$

$$\text{Quindi} \quad \sum_{h=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{(2h+1)\pi} - \frac{4}{((2h+1)\pi)^3} \right) (-1)^h = \frac{1}{8}$$

- 1) Siano  $f$  il segnale periodico di periodo 2 definito dalla funzione  $t \in [0, 2] \mapsto t^2$ , estesa per periodicità su  $[0, +\infty)$  con periodo 2, e  $g$  il segnale  $g(t) = \cos_+(t - 2)$ . Calcolare la trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione di  $f$  e  $g$ .

7 pts.

*Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:*

- 1) Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(t)\sqrt{nt}}{n^2 + 1},$$

dove  $f$  è una funzione limitata su  $[0, a]$ ,  $a > 0$ , converge uniformemente su  $[0, a]$ .

7 pts.

- 2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in  $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n + 4^n}{4^n - 2^n} (x - 1)^n.$$

7 pts.

- 3) Dare la definizione di funzione armonica su un aperto del piano. Dimostrare poi che la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa su un aperto sono ivi armoniche.

5 pts.

- 4) Ricavare la serie di Maclaurin della funzione  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ . Determinare, poi,  $D^{(8)}f(0)$ .

6 pts.

- 5) Enunciare e dimostrare la I formula di rappresentazione di Cauchy.

5 pts.

- 6) Calcolare

$$\int_{\partial+Q} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z - \frac{i}{2})(z + \frac{1}{4})(z - \frac{1}{4})} dz,$$

dove  $Q$  è il quadrato di vertici  $-1 - i, -1 + i, 1 + i, 1 - i$ .

6 pts.

1) Sia  $f$  il segnale periodico di periodo 2 definito dalla funzione  $t \in [0,2] \mapsto f^2$  (estesa per periodicità) e  $g$  il segnale  $\cos_+(t-2)$

Calcolare la trasformata di Laplace del segnale  $f \times g$

Poiché  $\mathcal{L}(f \times g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \mathcal{L}(g)(s) \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}s > 0$   
 è sufficiente calcolare la trasformata di Laplace di  $f$  e  $g$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} t^2 dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left( -\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \Big|_0^2 + \frac{2}{s} \int_0^2 e^{-st} t dt \right) \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left( -\frac{4}{s} e^{-2s} - \frac{2}{s^2} t e^{-st} \Big|_0^2 + \frac{2}{s^3} \int_0^2 e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left( -\frac{4}{s} e^{-2s} - \frac{4}{s^2} e^{-2s} - \frac{2}{s^3} e^{-2s} + \frac{2}{s^3} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\cos_+(t-2))(s) = e^{-2s} \mathcal{L}(\cos_+(t))(s) = e^{-2s} \frac{s}{s^2+1}$$

1) Dimostrare che le serie

Ami  
precedenti  $\sum_{m=0}^{+\infty} f(t) \frac{\sqrt{mt}}{m+1} \quad (*)$

dove  $f$  è una funzione limitata su  $[0, a]$   
 $a > 0$ , converge uniformemente su  $[0, a]$

È sufficiente dimostrare che  $(*)$  converge totalmente su  $[0, a]$

A tale scopo si osservi che

$$\left| f(t) \frac{\sqrt{mt}}{m+1} \right| \leq L \frac{\sqrt{mt}}{m+1} \leq L \sqrt{a} \frac{\sqrt{m}}{m+1} \quad \forall t \in [0, a]$$

dove  $L = \sup_{t \in [0, a]} |f(t)| \in \mathbb{R}$ .

Poiché  $L \sqrt{a} \frac{\sqrt{m}}{m+1} \sim L \sqrt{2} \cdot \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}$ , la serie  $\sum_{m=0}^{\infty} L \sqrt{a} \frac{\sqrt{m}}{m+1}$

Converge e quindi (\*) converge integralmente e uniformemente  
su  $[0, \alpha]$

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della  
serie di potenze

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^m - 3^m + 4^m}{4^m - 2^m} (x-1)^m$$

$$\frac{\frac{2^{m+1} - 3^{m+1} + 4^{m+1}}{4^{m+1} - 2^{m+1}}}{\frac{2^m - 3^m + 4^m}{4^m - 2^m}} = \frac{1 + \frac{1}{2^{m+1}} - \left(\frac{3}{4}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2^{m+1}}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{1 + \frac{1}{2^m} - \left(\frac{3}{4}\right)^m}$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$   
 $1 \quad \quad \quad 1$

Dunque il raggio di convergenza è 1  
d'intervalli di convergenza è  $(0, 2)$

Per  $t = 2$  ottieniamo la serie numerica

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^m - 3^m + 4^m}{4^m - 2^m}$$

Poiché  $\frac{2^m - 3^m + 4^m}{4^m - 2^m} \rightarrow 1$  essa diverge  
propositivamente (in quanto i termini positivi)

Per  $t = 0$  ottieniamo:

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2^m - 3^m + 4^m}{4^m - 2^m} (-1)^m \quad (*)$$

Poiché  $\frac{2^{2k} - 3^{2k} + 4^{2k}}{4^{2k} - 2^{2k}} (-1)^{2k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$

la successione che lo definisce non converge a 0  
e quindi (\*) non converge.

Dunque l'insieme di convergenza puntuale  
della serie assegnata coincide con l'intervalle  
di convergenza  $(0, 2)$ . La serie converge uniformemente.

su ogni intervallo chiuso contenuto in  $[0,2]$ .

3) Dare la definizione di funzione armonica

Dimostrare poi che le parti reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche

Si vede, ad esempio, p. 31 degli appunti

4) Ricavare la serie di MacLaurin della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}. \text{ Determinare, poi, } D^{(8)} f(0)$$

$$\text{Poiché } \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1-(-x^4)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^4)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\text{e quindi } \frac{x^2}{1+x^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k+2}$$

Dunque  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k+2}$  è la serie di MacLaurin di  $f$

In particolare  $\frac{D^{(8)} f(0)}{8!}$  è uguale al coefficiente di  $x^8$  in

tal' serie. L'esponente 8 si ottiene per  $4k+2 = 8$  cioè  $k = \frac{3}{2}$ , che non è intero. Questo ci consente di concludere che nella serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{4k+2}$  non è presente il termine di esponente 8

Dunque  $D^{(8)} f(0) = 0$ .

5) Enunciare e dimostrare le formule di rappresentazione di Cauchy

si vedano, ad esempio, pagg. 69-70 degli appunti

6) Calcolo

$$\int_{\gamma_0^+} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z - \frac{i}{2})(z + \frac{i}{4})(z - \frac{1}{4})} dz \quad (*)$$

$$\gamma_a^+ \int_{\gamma_a} (z - \frac{i}{2})(z + \frac{1}{4})(z - \frac{1}{4})$$

dove  $a$  è il quadrato di vertici  $-1-i, -1+i, 1+i, 1-i$

de risoluzione delle funioni integraute sono tutte contenute all'interno di  $\Omega$ . Dal I e dal II teorema dei residui otteniamo quindi che

$(*) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$ , dove  $f$  è la funzione integranda

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{\left(\frac{1}{z} - \frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{4}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{\left(1 - \frac{z}{2}i\right)\left(1 + \frac{z}{4}\right)\left(1 - \frac{z}{4}\right) \cdot \frac{1}{z^3}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) =$$

$$= \frac{-\frac{1}{z} e^{-\frac{1}{z}}}{\left(1 - \frac{z}{2}i\right)\left(1 + \frac{z}{4}\right)\left(1 - \frac{z}{4}\right)}$$

Questa funzione non ha in 0 una singolarità

$$\left(\text{dato che } \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{\frac{1}{z} e^{-\frac{1}{z}}}{\left(1 - \frac{z}{2}i\right)\left(1 + \frac{z}{4}\right)\left(1 - \frac{z}{4}\right)} (=0) \in \mathbb{C}\right)$$

$$\text{e quindi } \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$$

$$\text{così } (*) = 0.$$

- 1) Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = H(t - 3), & t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

7 pts.

*Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:*

- 1) Si consideri la successione  $f_n(t) = t^{n-1} - \frac{t^n}{n}$ ,  $n \geq 2$ . Se ne studi la convergenza puntuale e uniforme nell'intervallo  $[0, 1]$ .

7 pts.

- 2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in  $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n.$$

6 pts.

- 3) Com'è definita la funzione seno in campo complesso. Qual è la sua relazione con la stessa funzione in campo reale?

5 pts.

- 4) Determinare le singolarità al finito e la loro natura per la funzione  $f(z) = 1/(z^2(1 - \cos z))$ .

6 pts.

- 5) Dimostrare che se  $z_0$  è un polo di ordine  $k > 1$  per  $f \in H(D'(z_0, r))$ ,  $r > 0$ , allora  $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} D^{(k-1)}((z - z_0)^k f(z))$ .

5 pts.

- 6) Calcolare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1/2] \\ 2x & \text{se } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Stabilire poi che

$$3 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{((2h+1)\pi)^2}$$

7 pts.

1) Usando la trasformata di Laplace determinare il segnale che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = H(t-3), & t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(H(t-3))(s) \cdot \frac{1}{P(s)} \quad \text{dove } P(s) = s^2 + s + 1$$

quindi  $y(t) = (y_0(t) * H(t-3))(t)$  dove  $y_0$  è la soluzione fondamentale

dell'equazione  $y'' + y' + y = 0$ ,  $t \geq 0$ :

$$y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right)(t)$$

$$\frac{1}{P(s)} = \frac{1}{(s-s_1)(s-\bar{s}_1)} \quad \text{dove } s_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-\bar{s}_1)} = \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{\bar{a}_1}{s-\bar{s}_1}$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} s-s_1 \cdot \frac{1}{P(s)} = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{1}{s-\bar{s}_1} = \frac{1}{\sqrt{3}i} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i$$

$$\begin{aligned} \text{quindi } y_0(t) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}i e^{s_1 t} + \frac{1}{\sqrt{3}}i e^{\bar{s}_1 t} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}i e^{-\frac{1}{2}t} \left( -e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}i e^{-\frac{1}{2}t} \cdot 2i \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned}$$

Quindi  $y(t)$  è il segnale che per  $t > 0$  è dato da

$$y(t) = \int_0^t H(\tau-3) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) d\tau.$$

$$\text{Dunque } y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 3 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-3)\right) d\tau & \text{se } t > 3 \end{cases}$$

$$\text{Calcoliamo } \int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-3)\right) d\tau \quad (\star)$$

$$\begin{aligned} (\star) &= e^{\frac{1}{2}\tau} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-3)\right) \Big|_3^t - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-3)\right) d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}t} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) \Big|_3^t \\ &\quad - \frac{1}{3} \int_3^t e^{\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-3)\right) d\tau \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \left(1 + \frac{1}{3}\right) (\star) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Pertanto } y(t) &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) \right) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} H(t-3) \\ &= \left( 1 - e^{-\frac{t-3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t-3}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) \right) H(t-3) \end{aligned}$$

$$= \left( 1 - e^{-2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{-2}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) \right) + l(t-3)$$

1) Si consideri la successione

Pre AA  
2014-2015

$$f_m(t) = t^{m-1} - \frac{t^m}{m}, \quad m \geq 2$$

Se ne studi convergenza puntuale e uniforme nell'intervallo  $[0,1]$

$$f_m(1) = 1 - \frac{1}{m} \xrightarrow{m \geq 2} 1 \quad \text{quindi } f_m(1) \rightarrow 1$$

$$\text{se } \bar{t} \in [0,1] \quad f_m(\bar{t}) = \bar{t}^{m-1} - \frac{\bar{t}^m}{m} \rightarrow 0$$

Quindi  $f_m$  converge puntualmente alla funzione  $f(t) = \begin{cases} 1 & t=1 \\ 0 & t \in [0,1) \end{cases}$

su  $[0,1]$ . Poiché  $f$  non è continua su  $[0,1]$  mentre  $f_m$  sono tutte continue  $\forall m \geq 2$ ,  $f_m$  non converge uniformemente a  $f$  su  $[0,1]$

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme per le serie di potenze in  $\mathbb{R}$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m + m}{m^2 + 1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^m$$

$$\lim_m \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \lim_m \frac{(-1)(-1)^m + m+1}{(m+1)^2 + 1} \cdot \frac{m^2 + 1}{(-1)^m + m} = 1$$

quindi  $\rho = 1$

L'intervallo di convergenza della serie è  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

Per  $x = -\frac{1}{2}$  la serie diventa

$$(*) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m + m}{m^2 + 1} (-1)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^m m}{m^2 + 1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m^2 + 1} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m m}{m^2 + 1} \quad \text{(1)} \quad \text{(2)}$$

(1):  $\frac{1}{m^2 + 1} \sim \frac{1}{m^2}$  quindi (1) converge

(2):  $\frac{m}{m^2 + 1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  e  $\frac{m}{m^2 + 1}$  è decrescente per  $m \geq 2$  quindi (2) converge

per il criterio di Leibniz

Pertanto (\*) converge

Per  $x = \frac{3}{2}$  la serie diventa  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m + m}{m^2 + 1};$

perché  $\frac{(-1)^m + m}{m^2 + 1} \sim \frac{1}{m}$  essa diverge

In conclusione, la serie assegnata converge puntualmente su  $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  e uniformemente su ogni intervallo del tipo

$$[-\frac{1}{2}, \alpha] \text{ con } \alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

- 3) Come si definisce la funzione seno in campo complesso?  
Qual è la sua ulteriore curva stessa funzione in campo reale?

Si vede pag 83 degli appunti

- 4) Determinare le singolarità di finito e le loro nature per la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-\cos z)}$$

$f$  ha singolarità nel punto  $0$  e in  $\tilde{z}$  tali  $1-\cos z=0$

$$\text{Poiché } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ dunque } e^{iz} + e^{-iz} = 2$$

$$\text{Cioè } e^{2iz} + 1 - 2e^{iz} = 0 \text{ posto } e^{iz} = w$$

questo equivale a dividere  $w^2 - 2w + 1 = 0$  da cui  $w = 1$

ogni  $e^{iz} = 1$  cioè  $iz + 2k\pi i = 0$  da cui  $z = -2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

Poiché  $1-\cos z = 1 - 1 + \frac{z^2}{2} + o(z^2) = \frac{z^2}{2} + o(z^3)$ , si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^4 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z^4 \frac{1}{\frac{z^2}{2} + z^2 o(z^2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^4}{\frac{z^2}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + o(\frac{z^2}{2})} = 0 \neq 0$$

Quindi  $0$  è un polo di ordine 4 per  $f$ .

Analizziamo ora i punti  $z_h = 2h\pi$ ,  $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\text{Poiché } D(1-\cos z) \Big|_{z=2h\pi} = \sin z \Big|_{z=2h\pi} = 0, \forall h$$

$$\text{e } D^2(1-\cos z) \Big|_{z=2h\pi} = \cos z \Big|_{z=2h\pi} = 1 \neq 0, \forall h$$

Abbiamo che  $1-\cos z = \frac{1}{2}(z-2h\pi)^2 + o((z-2h\pi)^2)$  per  $z \rightarrow 2h\pi$

$$\begin{aligned} \text{Pertanto } \lim_{z \rightarrow 2h\pi} (z-2h\pi)^2 f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2h\pi} (z-2h\pi)^2 \frac{1}{\frac{1}{2}(z-2h\pi)^2 (\frac{1}{2} + o((z-2h\pi)^2))} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2h\pi} \frac{1}{\frac{1}{2} + o((z-2h\pi)^2)} = \frac{1}{2h\pi \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{h\pi} \neq 0 \text{ per } h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Quindi  $z_h = 2h\pi$  è un polo di ordine 2

5) Dimostrare che se  $\tilde{z}_0$  è un polo di ordine  $k > 1$  per  $f \in H(D'(z_0, r))$ ,  $r > 0$

$$\text{allora } \operatorname{Res}(f, \tilde{z}_0) = \lim_{z \rightarrow \tilde{z}_0} \frac{1}{(k-1)!} D^{(k-1)}((z-z_0)^k f(z))$$

Si vede pag 124 degli appunti

- 6) Calcolare le serie di poteri della funzione

$$r_1 = x \Gamma(n+1)$$

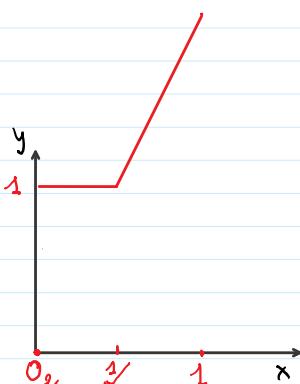
6) Calcolare le serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Stabilire poi che

$$3 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{((2h+1)\pi)^2}$$

Il grafico di  $f(x)$  è il seguente



La sua estensione dispari  $\tilde{f}$  su  $[-1, 1]$  ha quindici discontinuità in tutti i punti  $x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{2}x\right) dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x) dx = \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(k\pi x) dx + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 x \sin(k\pi x) dx = \\ &= -\frac{2}{k\pi} \cos(k\pi x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{k\pi} x \cos(k\pi x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{4}{k\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(k\pi x) dx \\ &= -\frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi} - \frac{4}{k\pi} \cos(k\pi) + \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{4}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi} - \frac{4}{k\pi} (-1)^k + \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{4}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \\ &= \frac{2}{k\pi} \left(1 - 2(-1)^k\right) - \frac{4}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Per  $k$  pari ( $k=2h$ )

$$b_{2h} = -\frac{1}{h\pi}$$

$$b_{2h} = - \frac{1}{h\pi}$$

Per  $k$  dispari ( $k = 2h+1$ )

$$b_{2h+1} = \frac{6}{(2h+1)\pi} - \frac{4}{((2h+1)\pi)^2} (-1)^h$$

Per cui le serie di soli seni di  $f$  è dato da

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \sin(k\pi x) \quad (*)$$

Per  $x = \frac{1}{2}$  tale serie converge a  $f(\frac{1}{2}) = 1$

$$\text{Poiché } \sin(k\pi \cdot \frac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1 \end{cases}$$

tutti i termini di indice  $k$  pari in  $(*)$  sono nulli

e quindi otteniamo

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \left( \frac{6}{(2h+1)\pi} - \frac{4(-1)^h}{((2h+1)\pi)^2} \right) (-1)^h = 1$$

Poiché entrambe le serie

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{6}{(2h+1)\pi} (-1)^h \quad \text{e} \quad \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{((2h+1)\pi)^2} \quad \text{convergono}$$

otteniamo

$$3 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{((2h+1)\pi)^2}$$