

1) Stabilire se i seguenti integrali convergono

A) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$; $\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3} + \sin(x-2)}$ B) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{x^2} dx$; $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2} + (x-2)e^{x-2}}$

A) • $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$ converge; infatti $\frac{\cos x - 1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$ quindi l'integrale è limitato in un intorno destro di 0; inoltre $\left| \frac{\cos x - 1}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2}$ e dunque dato che $\frac{2}{x^2}$ è integrabile in ogni intervallo del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$ anche $\frac{\cos x - 1}{x^2}$ è ivi assolutamente integrabile e dunque integrabile.

• $\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{2/3} + \sin(x-2)}$ converge; infatti

$$\frac{1}{(x-2)^{2/3} + \sin(x-2)} = \frac{1}{(x-2)^{2/3} + (x-2) + o(x-2)} \sim \frac{1}{(x-2)^{2/3}} \text{ per } x \rightarrow 2^+$$

B) • $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{x^2} dx$ converge; infatti $\frac{\arctan x^2}{x^2} \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$ e

quindi l'integrale è limitato in un intorno destro di 0; inoltre $0 < \frac{\arctan x^2}{x^2} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$ e possiamo concludere con l'esercizio dello scorso A.

• $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2} + (x-2)e^{x-2}}$ converge; infatti $\frac{1}{\sqrt{x-2} + (x-2)e^{x-2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-2} (1 + \sqrt{x-2} e^{x-2})} \sim \frac{1}{(x-2)^{1/2}} \text{ per } x \rightarrow 2^+$$

2) Calcolare le somme delle serie

A) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{4^n}$ B) $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{4}{3^n}$

Da entrambe le tracce si tratta di una serie geometrica moltiplicata per una costante. Nella traccia A la ragione

è $\frac{1}{4}$, nello B è $\frac{1}{3}$, quindi entrambe convergono.
 Le loro somme però non $\frac{1}{1-q}$ in quanto in entrambe
 l'indice iniziale NON È 0! ^{1-q}

Per la A) si parte da $n=3$ quindi occorre sottrarre alla
 somma delle serie, la somma dei primi 3 termini (cioè
 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$) ovvero $s_2 = \frac{1 - \frac{1}{9^3}}{1 - \frac{1}{9}}$;

$$A) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{4^n} = 3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 3 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1 - \frac{1}{4^3}}{1 - \frac{1}{4}} \right) =$$

$$= \frac{3}{4^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{4^2} \frac{1}{3} = \frac{1}{16}$$

$$B) \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{4}{3^n} = 4 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 4 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{1 - \frac{1}{3^4}}{1 - \frac{1}{3}} \right) =$$

$$= \frac{4}{3^4} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4}{3^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{27}$$

3) Stimare l'errore che si commette approssimando la
 somma delle serie

$$A) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 10}$$

$$B) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3 + 5}$$

con la sua somma parziale A) s_3 B) s_4

A) Sappiamo che nel caso di una serie a segni alterni $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \in \mathbb{R}$
 l'errore $|s - s_n| \leq a_{n+1}$, quindi nel nostro caso

$$\text{lole errore è minore di } \frac{1}{10^2 + 10} = \frac{1}{110}$$

$$B) |s - s_4| \leq a_5 = \frac{1}{1^3 + 5} = \frac{1}{130}$$

B) $|1 - 34| \leq 95 = \frac{1}{5^3 + 5} = \frac{1}{130}$

4) Stabilire il carattere della seguente serie

A) $\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{(k-1)^3}{3k^3+1} \right)^{k-1}$ B) $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{k^2-1}{2(k+1)^2} \right)^{k+1}$

A) La serie è a termini positivi. Possiamo usare il criterio delle radici. Dobbiamo calcolare:

$\lim_k \left(\frac{(k-1)^3}{3k^3+1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$; osserviamo che la base tende a $+\infty$ mentre l'esponente tende a 1 quindi il risultato del limite è $(+\infty)^1 = +\infty$ dunque la serie diverge

Potevamo anche osservare che la serie è a termini positivi e che la successione che la definisce $\left(\frac{(k-1)^3}{3k^3+1} \right)^{k-1}$ non tende a 0

dato che il suo limite si presenta nella forma $+\infty^{+\infty}$ e quindi è uguale a $+\infty$

B) Usiamo il criterio delle radici. Dobbiamo calcolare:

$\lim_k \left(\frac{k^2-1}{2(k+1)^2} \right)^{\frac{k+1}{k}}$; poiché la base tende a $\frac{1}{2}$ e l'esponente a 1

il risultato è $\left(\frac{1}{2} \right)^1 = \frac{1}{2} < 1$, dunque la serie converge

5) Stabilire se la funzione

A) $f(x,y) = e^{\sqrt{y^2-x}} \cdot x$ B) $f(x,y) = \log(xy) + x^2y^2$

ha piano tangente al suo grafico nel punto

A) $(-1, 0, f(-1, 0))$ B) $(-1, -1, f(-1, -1))$

e in caso affermativo scrivere l'equazione

A) $\text{dom } f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x \geq 0 \}$; il punto $(-1, 0)$

è interno a $\text{dom } f$. f ha derivati parziali continue all'interno

non abbiamo quindi per il teorema del differenziale

è differenziabile in $(-1, 0)$ e ammette piano tangente nel

punto $(-1, 0, f(-1, 0))$. l'equazione di tale piano è

$$z = f(-1,0) + \langle \nabla f(-1,0), (x+1, y) \rangle \quad \text{cioè}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\sqrt{y^2-x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{y^2-x}} x + e^{\sqrt{y^2-x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = \frac{e}{2} + e = \frac{3e}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{\sqrt{y^2-x}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{y^2-x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = 0$$

$$f(-1,0) = -e$$

Quindi l'equazione è

$$z = -e + \frac{3e}{2}(x+1) \quad \text{cioè} \quad z = \frac{3e}{2}x + \frac{e}{2}$$

B) dove $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$.

dove f è aperto ed $f \in C^1(\text{dove } f)$. Dunque per le

tesure del differenziale f è differenziabile in $(-1,-1)$

ed ha piano tangente al suo grafico in $(-1,-1, f(-1,-1))$

$$f(-1,-1) = \log 1 + 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{xy} + 2xy^2; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = -1 - 2 = -3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{xy} + 2yx^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = -3$$

Quindi l'equazione del piano tangente è

$$z = 1 + \langle (-3, -3), (x+1, y+1) \rangle =$$

$$= 1 - 3(x+1) - 3(y+1) \quad \text{cioè}$$

$$z = 1 - 3x - 3 - 3y - 3$$

$$z = -3x - 3y - 5$$