Possibile svolgimento della prova del 16 giugno 2025 – Modulo B

1) **(a)** Per studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-2n}{\sqrt{n^7+n^3}}$, analizziamo il comportamento asintotico del termine generale.

$$\frac{n^3-2n}{\sqrt{n^7+n^3}} \sim \frac{n^3}{\sqrt{n^7}} = \frac{n^3}{n^{7/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ è una serie armonica generalizzata con esponente $1/2 < 1$, essa diverge. Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie data diverge.

(b) Per calcolare la somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n-(-2)^n}{6^n}$, usiamo la linearità dell'operatore di serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n-(-2)^n}{6^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2}{6}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Entrambe sono serie geometriche con $|q| < 1$. Usando la formula $\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(1/2)^2}{1-1/2} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{(-1/3)^2}{1-(-1/3)} = \frac{1/9}{4/3} = \frac{1}{12}.$$

Quindi la somma della serie assegnata è $\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

2) Il dominio di $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} + \log(xy)$ è dato dall'intersezione dei domini dei due addendi.

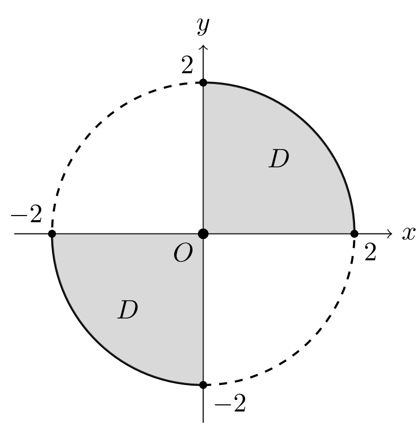
Per $\sqrt{4-x^2-y^2}$: deve essere $4-x^2-y^2 \geq 0$, ovvero $x^2+y^2 \leq 4$ (disco chiuso di raggio 2 centrato nell'origine).

Per $\log(xy)$: deve essere $xy > 0$, cioè x e y devono avere lo stesso segno.

Il dominio è quindi:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, xy > 0\}.$$

Si tratta dell'unione di due settori circolari del disco di centro O e raggio 2:



Il dominio non è aperto (contiene punti del bordo del disco), non è chiuso (non contiene gli assi), non è connesso per archi (un punto appartenente alla regione in grigio nel I quadrante e uno in quella nel III non possono essere connessi da una curva continua contenuta interamente in D), è limitato (essendo ovviamente contenuto in un disco).

Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \frac{1}{x},$$

$$f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \frac{1}{y}.$$

Queste funzioni sono continue nei punti interni al dominio e quindi per il teorema del differenziale f è differenziabile in tali punti.

Nel punto $(1,1)$:

$$f(1,1) = \sqrt{4-1-1} + \log(1) = \sqrt{2} + 0 = \sqrt{2},$$

$$f_x(1,1) = \frac{-1}{\sqrt{2}} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_y(1,1) = \frac{-1}{\sqrt{2}} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,f(1,1))$ è quindi:

$$z = \sqrt{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x-1) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(y-1)$$

La derivata direzionale secondo $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ è:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot v = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$$

3) L'equazione omogenea associata è:

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i.$$

Quindi l'integrale generale dell'omogenea è:

$$y_0(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per il metodo di similarità, osserviamo che il termine noto è $e^{-x}\sin x$. Poiché $-1+i$ è soluzione dell'equazione caratteristica dobbiamo cercare una soluzione particolare della forma:

$$y_p(x) = xe^{-x}(A\cos x + B\sin x).$$

Se il termine noto fosse $f(x) = 1$, cerchiamo una soluzione particolare costante $y_p = k$:

$$0 + 0 + 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

E' chiaro che $y_p(x) = \frac{1}{2}$ soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1/2$ e $y'(0) = 0$ e quindi essa è la soluzione richiesta.

Non ne esistono altre perché il problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine con coefficienti continui ammette un'unica soluzione.

4) Un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ è normale rispetto all'asse x se è del tipo:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

dove $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue con $\varphi(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.
Se D è normale e $f \in C^0(D)$ allora f è integrabile su D e cale la formula di riduzione:

$$\int\int_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Se D è normale anche rispetto all'asse delle y ossia D è anche dato da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\},$$

dove $\alpha, \beta : [c, d] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue con $\alpha(y) \leq \beta(y)$ per ogni $y \in [c, d]$, allora sempre dalla formula di riduzione otteniamo anche la formula d'inversione dell'ordine di integrazione:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Nel caso richiesto dall'esercizio, per invertire l'ordine d'integrazione, dobbiamo determinare il dominio

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 1/e \leq y \leq e^{-x}\}.$$

D è la regione compresa tra i grafici delle funzioni $y = 1/e$ e $y = e^{-x}$, con $-1 \leq x \leq 1$. Poiché $y = e^{-x} \Leftrightarrow x = -\ln y$ e gli estremi di y sono il minimo $y = e^{-1} = 1/e$ (quando $x = 1$) e il massimo $y = e^1 = e$ (quando $x = -1$), il dominio può essere descritto come normale rispetto all'asse y:

$$D = \{(x, y) : 1/e \leq y \leq e, -1 \leq x \leq -\ln y\}$$

Quindi:

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{1/e}^{e^{-x}} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{1/e}^e \left(\int_{-1}^{-\ln y} f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$