Politecnico di Bari
CUC Ingegneria dell'Informazione
L3 Ingegneria Informatica
L3 Ingegneria dell'Automazione
AA 2005-2006

Corso di Analisi Matematica II - Tracce di esame

Docent:i: Prof.ssa G. Cerami, Dott. E. Caponio

A.A 2005/2006 Appello 28 Marzo 2006 Traccia A

1) Enunciare il teorema di integrazione per serie e utilizzarlo opportunamente, insieme alla relazione

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n,$$

per rappresentare la funzione $f(x) = \log(5-x)$ come serie di potenze.

2) Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^3x+1}$$

converge totalmente in $[0, +\infty)$.

3) Determinare e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della seguente funzione:

$$\frac{\log_2(y+1)}{\sqrt{(x-y^2-1)(x+y^2+1)}}.$$

Dire, poi, se tale insieme è aperto, chiuso, connesso, convesso.

4) Stabilire se il seguente limite esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{y\sin(x-y)}.$$

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e in un insieme. Enunciare il Teorema del differenziale totale e utilizzarlo per provare che la funzione

$$f(x,y) = y^2|y| - x + 3$$

è differenziabile sul suo insieme di definizione.

6) Determinare gli eventuali punti di estremo locale per la funzione:

$$f(x,y) = (x-1)^2y^2(1-x-y).$$

7) Stabilire se il seguente problema di Cauchy ha una soluzione, se è unica e se, in questo caso, è definita su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = \arctan(yx) - y - 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

8) Calcolare l'integrale

$$\int\int_D \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da $D = \{(x,y) | 2 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \le y \le -x\}$.

A.A 2005/2006 Appello 28 Marzo 2006 Traccia B

1) Enunciare il teorema di integrazione per serie e utilizzarlo opportunamente, insieme alla relazione

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n},$$

per rappresentare la funzione $f(x) = \arctan \frac{x}{3}$ come serie di potenze.

2) Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+x)}{(n+x)^3}$$

converge totalmente in $[0, +\infty)$.

3) Determinare e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della seguente funzione:

$$\frac{\arcsin(x-y)}{\sqrt{x-y^2+1}}.$$

Dire, poi, se tale insieme è aperto, chiuso, connesso, convesso.

4) Stabilire se il seguente limite esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y-x}{\log y \log(3y-x)}.$$

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e in un insieme. Enunciare il Teorema del differenziale totale e utilizzarlo per provare che la funzione

$$f(x,y) = x^2 - 2y|y|$$

è differenziabile sul suo insieme di definizione.

6) Determinare gli eventuali punti di estremo locale per la funzione:

$$f(x,y) = x^2y^2(2+x-y).$$

7) Stabilire se il seguente problema di Cauchy ha una soluzione, se è unica e se, in questo caso,è definita su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = \cos^2(y-x) - y \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

8) Calcolare l'integrale

$$\int\int_D \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da $D = \{(x,y)|2 \leq x^2+y^2 \leq 8,\ y \geq x,\ y \geq -x\}$.

A.A 2005/2006 Appello 28 Marzo 2006 Traccia C

1) Enunciare il teorema di integrazione per serie e utilizzarlo opportunamente, insieme alla relazione

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n,$$

per rappresentare la funzione $f(x) = \log(x-3)$ come serie di potenze.

2) Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log(n^2x^2+1)}{n^4x^2+2}$$

converge totalmente in $[0, +\infty)$.

3) Determinare e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della seguente funzione:

$$\frac{\sqrt{(y-x^2-1)(y+x^2-2)}}{\log_3(y-10x)}.$$

Dire, poi, se tale insieme è aperto, chiuso, connesso, convesso.

4) Stabilire se il seguente limite esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\log(x+y)\log y}.$$

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e in un insieme. Enunciare il Teorema del differenziale totale e utilizzarlo per provare che la funzione

$$f(x,y) = xy|y| - 1$$

è differenziabile sul suo insieme di definizione.

6) Determinare gli eventuali punti di estremo locale per la funzione:

$$f(x,y) = (2-x)^2y^2(1-2x-y).$$

7) Stabilire se il seguente problema di Cauchy ha una soluzione, se è unica se, in questo caso, è definita su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = \sin^2(yx) - 3y \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

8) Calcolare l'integrale

$$\int\int_D \frac{x}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da $D = \{(x,y) | 3 \leq x^2+y^2 \leq 8, \ -x \leq y \leq x\}$.

A.A 2005/2006 Appello 28 Marzo 2006 Traccia D

1) Enunciare il teorema di integrazione per serie e utilizzarlo opportunamente, insieme alla relazione

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n},$$

per rappresentare la funzione $f(x) = \arctan(-2x)$ come serie di potenze.

2) Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+n^2x^2)}{n^4x^2+n^2}$$

converge totalmente in $[0, +\infty)$.

3) Determinare e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della seguente funzione:

$$\sqrt{y}\log_{1/2}[(x-y^2-1)(x+y^2+2)].$$

Dire, poi, se tale insieme è aperto, chiuso, connesso, convesso.

4) Stabilire se il seguente limite esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x-y)}{x^2-y^2}.$$

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e in un insieme. Enunciare il Teorema del differenziale totale e utilizzarlo per provare che la funzione

$$f(x,y) = y|y| - 2x + 1$$

è differenziabile sul suo insieme di definizione.

6) Determinare gli eventuali punti di estremo locale per la funzione:

$$f(x,y) = x^2(1-y)^2(1-2x-y).$$

7) Stabilire se il seguente problema di Cauchy ha una soluzione, se è unica e se, in questo caso, è definita su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = y\sin(x-y) - 2y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8) Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{xe^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il sottoinsieme del piano definito da $D = \{(x,y) | 3 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge y,\ y \le -x\}$.

A.A 2005/2006 Esercizi delle tracce dell'appello del 7 Aprile 2005

1) Sia $\{a_n\}_{n\in N}$ una successione numerica. Dire, **motivando le risposte**, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

a) $a_n \to 0 \Longrightarrow \sum_n a_n \in \mathbb{R}$;

b) $n^2|a_n| \to 10^{100} \Longrightarrow \sum_n a_n \in \mathbb{R}$;

c) $\sum_n |a_n| = +\infty \Longrightarrow \sum_n a_n = \pm\infty$.

a) $\{a_n\}$ è strettamente decrescente e infinitesima $\Longrightarrow \sum_n a_n \in \mathbb{R}$;

b) $n^3|a_n| \to 10^{100} \Longrightarrow \sum_n a_n \in \mathbb{R}$;

c) $\sum_n a_n \in \mathbb{R} \Longrightarrow \sum_n |a_n| \in [0, +\infty)$.

a) $\{a_n\}$ è strettamente decrescente e $a_n \geq 0,\ \forall n,\ \Longrightarrow \sum_n (-1)^n a_n \in \mathbb{R}$;

b) $n^4|a_n| \to 10^{100} \Longrightarrow \sum_n a_n \in \mathbb{R}$;

c) $\sum_n |a_n| \in \mathbb{R} \Longrightarrow \sum_n a_n \in \mathbb{R}$.

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2\sqrt{|x|})^n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{|x|}-1)^n}{3^n \log n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\sqrt{|x|})^n}{\sqrt{n}\log n}$$

3) Dare la definizione di insieme aperto e di insieme connesso in $\mathbb{R}^n$. Dare poi un esempio di una funzione di due variabili il cui campo di esistenza è un aperto connesso (diverso da $\mathbb{R}^n$) e un esempio in cui il campo di esistenza è un aperto non connesso.

Dare la definizione di insieme chiuso e di insieme connesso in $\mathbb{R}^n$. Dare poi un esempio di una funzione di due variabili il cui campo di esistenza è un chiuso connesso (diverso da $\mathbb{R}^n$) e un esempio in cui il campo di esistenza è un chiuso non connesso.

Dare la definizione di insieme chiuso e di insieme aperto in $\mathbb{R}^n$. Dare poi un esempio di una funzione di due variabili il cui campo di esistenza è un aperto (diverso da $\mathbb{R}^n$) e un esempio in cui il campo di esistenza non è aperto nè chiuso.

4) Dare la definizione di $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$ e di $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty$. Calcolare, poi, il seguente limite (scrivendo i passaggi necessari per giungere al risultato!)

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y - 2xy + y}{(x-1)^2 + y^4}.$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{x^2y^4 - 2x^2y^2 + x^2}{(y^2-1)^2 + 2x^4}.$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)\log xy}{(yx-1)(2x+\cos xy)}.$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)x^2\log xy}{(yx-1)(x+e^{xy})}.$$

5) Dimostrare che una funzione differenziabile in un punto è ivi continua. Studiare, in $\mathbb{R}^2$, la differenziabilità della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \arcsin\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 5,$$
$$f(x,y) = 8x^4 + y^4 - (y-x)^2 - 4,$$
$$f(x,y) = x^4 + 27y^4 - (x-y)^2 + 2,$$

e studiarne la natura.

7) Stabilire se, per il seguente problema di Cauchy, esiste una soluzione (locale? globale?) e se è unica:

$$\begin{cases} y' = 2y^2\log(t+y) + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y' = \dfrac{t - e^y y}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y' = e^{\sqrt{y}} - t \\ y(1) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y' = \sqrt{ty}\cos y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Dire, inoltre, motivando la risposta, di che classe è l'eventuale soluzione e disegnarne un grafico approssimativo in un intorno del punto $t = 1$.

8) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_D \frac{y-1}{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ dove } D \text{ è l'insieme } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -2 \le xy \le -1, x^2 \le y \le 4x^2\}.$$

$$\int\int_D \frac{x-1}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ dove } D \text{ è l'insieme } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le xy \le 2, -4y^2 \le x \le -y^2\}.$$

$$\int\int_D \frac{y+2}{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ dove } D \text{ è l'insieme } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -2 \le xy \le -1, -4x^2 \le y \le -x^2\}.$$

$$\int\int_D \frac{x-1}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ dove } D \text{ è l'insieme } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le xy \le 2, y^2 \le x \le 4y^2\}.$$

A.A 2005/2006 Esercizi delle tracce dell'appello del 25 Maggio 2005

1) Siano $\{a_n\}_{n\in N}$ e $\{b_n\}_{n\in N}$ successioni numeriche. Si risponda, **motivando le proprie affermazioni**, alle seguenti domande:

a) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, quanto vale $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}\mathrm{d}t$?

b) Detta $f(t)$ la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$, f è derivabile? su quale insieme? Quanto vale $f'(t_0)$?

c) Se $\lim_n \sqrt[n]{|b_n|} = 1$, la serie $\sum_n \dfrac{b_n}{n}(t-t_0)^n$ converge puntualmente in (t_0-1, t_0+1)? e totalmente?

2) Dare la definizione di punto interno, esterno, di accumulazione e di frontiera per un insieme. Rappresentare sul piano l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}\,\log(x-1),$$
$$f(x,y) = \sqrt{y-1}\,\log\left(\frac{x-y}{x+y}\right),$$
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{y-x}}\,\log(y+1),$$
$$f(x,y) = \sqrt{x+1}\,\log(y^2-x^2),$$

e dire quali siano i punti di frontiera e i punti interni all'insieme.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+|y|)e^y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

stabilire se essa è continua e differenziabile in $0=(0,0)$ e $P=(1,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y+|x|)e^x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

stabilire se essa è continua e differenziabile in $0=(0,0)$ e $P=(0,2)$

4) Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^2$, ed $f\in C^1(\Omega)$. Dire, motivando le risposte, quali delle seguente affermazioni sono vere e quali false:

a) se $(x_0, y_0) \in \Omega$ è un punto di massimo locale per f allora per ogni versore v si ha $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$;

b) se $(x_0, y_0) \in \Omega$ è un punto in cui il piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0) è parallelo al piano xy allora (x_0, y_0) è un punto stazionario per f;

c) se esiste un versore v per cui $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$ allora (x_0, y_0) è un punto stazionario per f;

d) se esistono due versori v_1 e v_2 linearmente indipendenti per cui $\frac{\partial f}{\partial v_1}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial v_2}(x_0, y_0) = 0$ allora (x_0, y_0) è un punto stazionario per f;

5) Determinare i punti stazionari della funzione seguente e studiarne la natura:

$$f(x,y) = (2y-1)(2y^2 - y + 2x).$$
$$f(x,y) = (2x+1)(x^2 + 2x - y).$$

Stabilire, inoltre, se f è illimitata inferiormente e se è illimitata superiormente.

6) Determinare, al variare del parametro reale a, l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' + a^2 y = x \cos x.$$
$$y'' + a^2 y = x \sin x.$$
$$y'' - a^2 y = x e^x.$$
$$y'' - a^2 y = x e^{-x}.$$

7) Calcolare il seguente integrale

$$\int\!\!\int_D (x^2 y + 1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ dove } D \text{ è l'insieme } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x\}.$$
$$\int\!\!\int_D (xy^2 + 1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ dove } D \text{ è l'insieme } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2y \leq x^2 + y^2 \leq 4y\}.$$
$$\int\!\!\int_D (3xy + 2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ dove } D \text{ è l'insieme } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x\}.$$
$$\int\!\!\int_D (3xy - 2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ dove } D \text{ è l'insieme } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2y \leq x^2 + y^2 \leq 4y\}.$$

A.A 2005/2006 Appello del 17 Luglio 2006 Traccia A

1) Dare la definizione di raggio di convergenza per una serie di potenze. Determinare poi il raggio di convergenza della serie seguente e stabilire se la stessa converge anche agli estremi dell'intervallo di convergenza

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+1}-n\right)(x-1)^n.$$

2) Determinare e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y)=3^{(x^2+2y^2-1)^{1/2}}-3.$$

Rappresentare sul piano anche le sue curve di livello $c=0$ e $c=6$.

3) Determinare l'insieme su cui la funzione

$$f(x,y)=\frac{\arctan(x+\sqrt{y})}{x+y-2}$$

è differenziabile. Stabilire se nel punto $P=(0,1)$ esiste il piano tangente al grafico di f e in tal caso scriverne l'equazione.

4) Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $f\in C^2(\Omega)$. Enunciare condizioni necessarie e condizioni sufficienti per cui cui $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\in\Omega$ sia un punto di massimo locale. Provare che se $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ è un punto di massimo locale per f allora risulta $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^0)\le 0$, per $i=1,2,3$.

5) Deteminare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y)=(x+2y+1)^2(1-xy)^2,$$

e studiarne la natura.

6) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'=2(x-1)y-(x-1)y^2.$$

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_T |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove T è l'insieme $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\le 1,\ x\le y\le\sqrt{3}x\}$.

A.A 2005/2006 Appello del 17 Luglio 2006 Traccia B

1) Dare la definizione di raggio di convergenza per una serie di potenze. Determinare poi il raggio di convergenza della serie seguente e stabilire se la stessa converge anche agli estremi dell'intervallo di convergenza

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-1}\right)(x+1)^n.$$

2) Determinare e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y)=2^{(x^2+2y^2-1)^{1/2}}-2.$$

Rappresentare sul piano anche le sue curve di livello $c=0$ e $c=-1$.

3) Determinare l'insieme su cui la funzione

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}-y^2}}{2y-x+1}$$

è differenziabile. Stabilire se nel punto $P=(2,0)$ esiste il piano tangente al grafico di f e in tal caso scriverne l'equazione.

4) Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $f\in C^2(\Omega)$. Enunciare condizioni necessarie e condizioni sufficienti per cui cui $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\in\Omega$ sia un punto di minimo locale. Provare che se $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ è un punto di massimo locale per f allora risulta $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^0)\le 0$, per $i=1,2,3$.

5) Deteminare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y)=(2x+y+1)^2(xy-1)^2$$

e studiarne la natura.

6) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'=(x+1)y-(x+1)y^3.$$

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_T |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove T è l'insieme $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le 1,\ \frac{\sqrt{3}}{3}x\le y\le x\}$.

A.A 2005/2006 Appello del 18 Settembre 2006 Traccia A

1) Dare la definizione di serie numerica convergente, divergente, indeterminata, convergente assolutamente. Fornire un esempio di una serie numerica convergente ma non assolutamente convergente.

Determinare, poi, l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}}{n^{3/2}} (x-1)^n.$$

2) Dare la definizione di insieme aperto e di insieme chiuso in $\mathbb{R}^n$. Determinare poi e rappresentare sul piano, l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y) = \log\left(\frac{2x - y + 1}{y - x + 2}\right) - \sqrt{2 - xy}.$$

Dire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, connesso.

3) Dare le definizioni, per una funzione f di due variabili reali x e y, di derivata parziale rispetto a x e di derivata parziale seconda rispetto a x e poi rispetto a y. Enunciare infine una condizione sufficiente affinchè in un punto (x_0, y_0) risulti $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

4) Determinare l'insieme su cui la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 y - 1}}{y - 1}$$

è differenziabile. Stabilire se nel punto $P = (1, 10)$, f ha derivate direzionali secondo una qualsiasi direzione e in caso affermativo calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$, con $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2 - xy^2 + y - 1},$$

e studiarne la natura. Stabilire inoltre se f è inferiormente limitata e se è superiormente limitata

6) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y' = 2y + x^2 y^3.$$

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_T \cos(xy) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove T è l'insieme $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \pi < xy < \frac{3}{2}\pi,\ 2x < y < x,\ x < 0\}$.

A.A 2005/2006 Appello del 18 Settembre 2006 Traccia B

1) Dare la definizione di serie numerica convergente, divergente, indeterminata, convergente assolutamente. Fornire un esempio di una serie indeterminata che sia anche assolutamente divergente.

Determinare, poi, l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3}}{n^{4/3}}(x-2)^n.$$

2) Dare la definizione di insieme aperto e di insieme chiuso in $\mathbb{R}^n$. Determinare, poi, e rappresentare sul piano l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y) = \frac{1}{\log(1-xy)} + \sqrt{\frac{x-y+2}{y-3x+1}}.$$

Dire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, connesso.

3) Dare le definizioni, per una funzione f di due variabili reali x e y, di derivata parziale rispetto a y e di derivata parziale seconda rispetto a y e poi rispetto a x. Enunciare infine una condizione sufficiente affinchè in un punto (x_0, y_0) risulti $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

4) Determinare l'insieme su cui la funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(y-2)}{\sqrt{y-|x|^3}}$$

è differenziabile. Stabilire se nel punto $P = (0,3)$, f ha derivate direzionali secondo una qualsiasi direzione e in caso affermativo calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(P)$, con $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = e^{2y^2x - xy + 2},$$

e studiarne la natura. Stabilire inoltre se f è inferiormente limitata e se è superiormente limitata

6) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y' = -y + \frac{x^2}{y^3}.$$

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_T \sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove T è l'insieme $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \pi < xy < 2\pi, \frac{x}{2} < y < x,\ x > 0\}$.

A.A 2005/2006   Appello del 30 Novembre 2006   Traccia A

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2-1}((2^{x-1}-1)^n.$$

2) Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, connesso, convesso in $\mathbb{R}^n$. Determinare poi e rappresentare sul piano, l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y) = \arcsin(x^2-y) - \arctan\sqrt{xy}.$$

Dire inoltre, motivando la risposta, se tale insieme è aperto, chiuso, connesso, convesso.

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{5/2}y^3}{x^2+\sqrt{y}} \log\sqrt{xy}.$$

4) Dare la definizione, di funzione differenziabile in un punto e in un insieme. Calcolare poi le derivate parziali e direzionali, secondo una qualunque direzione, nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dall'espressione delle derivate direzionali si può dedurre che f non è differenziabile in $(0,0)$? Motivare la risposta.

5) Determinare i punti di minimo e massimo locali della funzione

$$f(x,y) = |x-y-2|(xy-x^2+1).$$

6) Stabilire se il seguente problema di Cauchy ha un'unica soluzione:

$$\begin{cases} y'(t) = y\arctan(2t-y^2-e)+e \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, se la soluzione è globalmente definita su $\mathbb{R}$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \left(\frac{x}{x^2+y^2} - 2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x<0,\ xy<0,\ x^2+y^2-1<0\}$.

A.A 2005/2006 Appello del 8 Febbraio 2007 Traccia A

1) Studiare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(x^3-1)^n}$$
converge puntualmente

2) Determinare e rappresentare sul piano, l'insieme di definizione della funzione:
$$f(x,y) = \left(\frac{(x^2+y-1)^{1/2}}{\log(2x-y^2)} \right)^{\sqrt{2}}.$$
Dire inoltre, motivando la risposta, se tale insieme è aperto, chiuso, connesso, convesso, limitato.

3) Dare la definizione di derivata direzionale in un punto per una funzione reale di due variabili reali.

Calcolare, poi, la derivata direzionale nel punto $P = (0, 1/2)$, secondo la direzione del versore $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ della funzione $f(x,y) = y^2 \arcsin(2x - y)$.

4) Enunciare il Teorema di Schwartz. Usarlo poi per stabilire se esiste una funzione avente derivate parziali seconde continue e tale che
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y \sin x.$$

5) Determinare i punti stazionari della funzione
$$f(x,y) = (x-y)^2(x+y-1)$$
e studiarne la natura.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' + y' - 2y = e^x - x.$$

7) Calcolare il seguente integrale
$$\iint_A \frac{x^2 - y}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
dove A è l'insieme
$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y,\ \frac{1}{2} \le x \le 1,\ x^2 + y^2 \le 1 \right\}.$$

A.A 2005/2006 Appello del 1 Marzo 2007 Traccia A

1) Dare la definizione di convergenza puntuale, uniforme e totale per una serie di potenze. Determinare, poi, l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2n}\right)(x-2)^n.$$

2) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y^2-y}{|x|}} + \log\left(\frac{y-x}{y-x+1}\right).$$

3) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e in un insieme. Determinare, poi, l'insieme su cui la seguente funzione è differenziabile:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = (2y^2 - x^2)e^{y^2-x}$$

e studiarne la natura.

5) Sia $f\colon (a,b)\times(c,d) \subset \mathbb{R}^2 \to R$ e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $(x_0, y_0) \in (a,b)\times(c,d)$. Enunciare almeno una condizione su f che assicuri l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del problema.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y' - 6y = e^{2x} - e^x.$$

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} - 2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x,\ y < x,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

A.A 2005/2006 Appello del 1 Marzo 2007 Traccia B

1) Dare la definizione di convergenza puntuale, uniforme e totale per una serie di potenze. Determinare, poi, l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)(x-2)^n.$$

2) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y)=\log(|y|(x^2-1))+\sqrt{\frac{y-x+1}{y+x+1}}.$$

3) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e in un insieme. Determinare, poi, l'insieme su cui la seguente funzione è differenziabile:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y)=(2x^2-y^2)e^{x^2-y}$$

e studiarne la natura.

5) Sia $f\colon(a,b)\times(c,d)\subset\mathbb{R}^2\to R$ e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

dove $(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$. Enunciare almeno una condizione su f che assicuri l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del problema.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''+5y'+6y=e^{-3x}-e^x.$$

7) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A\left(\frac{y^2x}{x^2+y^2}-3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è l'insieme

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0,\ x<y,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}.$$