1)-a) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2-1}\right) \qquad (*)$$

Dato che

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2-1}\right)}{\frac{1}{n^2}} \sim \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$$

$(*)$ non converge; poiché è a termini positivi, diverge positivamente

1)-b) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n \qquad (\square)$$

converge e determinarne la somma in funzione di x.

Posto $\frac{x-1}{x+1} = q$, la serie assegnata diviene

$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ che converge se e solo se $q \in (-1,1)$

e ha somma uguale a $\frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} < 1 \\ \frac{x-1}{x+1} > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-2}{x+1} < 0 \\ \frac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x < -1 \ \vee \ x > 0 \end{cases} \quad \Big\} \ x > 0$$

Per $x > 0$, $(\square)$ quindi converge e ha somma

$$\frac{\frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{2}{x+1}} = \frac{1}{2}(x-1)$$

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \log x - \frac{x}{x-y}$$

e rappresentarlo sul piano. Dire se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi

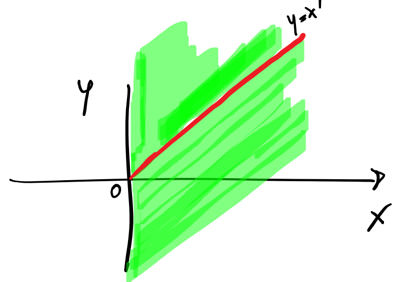
Stabilire che f è differenziabile sul suo dominio

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ con $v = \left(\frac{1}{12} , - \sqrt{\frac{11}{12}} \right)$

Verificare che f non ha punti stazionari

$$\operatorname{dom} f : \begin{cases} x > 0 \\ x \neq y \end{cases}$$

È dunque il semipiano dei punti con ascissa positiva privato della semiretta $y = x$



È un insieme aperto, non limitato, non connesso per archi

f è differenziabile sul suo dominio dato che le sue derivate parziali esistono e sono continue su tale insieme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{x-y-x}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2 + xy}{x\,(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = - \frac{x \cdot 1}{(x-y)^2} = - \frac{x}{(x-y)^2}$$

(sono continue in quanto funzioni razionali)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \left\langle \nabla f(1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{12}}, -\sqrt{\frac{11}{12}}\right)\right\rangle =$$
$$= \left\langle (1,-1), \left(\frac{1}{\sqrt{12}}, -\sqrt{\frac{11}{12}}\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} + \sqrt{\frac{11}{12}}$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-y)^2 + xy}{x(x-y)} = 0 \\ -\dfrac{x}{(x-y)^2} = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è soddisfatta solo se $x=0$ ma la retta $x=0$ non ha punti nel dominio di f e quindi f non ha punti stazionari

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x^2-1)y + x^2 - 1 \quad (0) \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

(0) è un'equazione lineare del 1° ordine il cui integrale generale è dato da

$$y(x) = e^{\int (x^2-1)\,dx} \left(c + \int e^{-\int (t^2-1)\,dt} (x^2-1)\,dx \right)$$

Possiamo però riscrivere (0) così:

$y' = (x^2-1)(y+1)$ che è a variabili separabili

Osserviamo che la soluzione singolare $y=-1$ non soddisfa la condizione iniziale quindi possiamo assumere che $y(x) \neq -1$, $\forall x$ e dividere per $y+1$ e integrare

$$\int \frac{y'}{y+1}\,dy = \int (x^2-1)\,dx$$

$$\int \frac{y'}{y+1}\, dy = \int (x^2-1)\, dx$$

$$\log|y+1| = \frac{1}{3}x^3 - x + c$$

Poiché $y(-1) = 2$, ricaviamo $\log 3 = \frac{2}{3} + c$ da cui $c = -\frac{2}{3} + \log 3$ e quindi

$$|y+1| = e^{\frac{1}{3}x^3 - x}\, e^{-\frac{2}{3}}\, e^{+\log 3} = 3\, e^{-2/3}\, e^{x^3/3 - x}$$

Poiché $y(-1) = 2$, $y(x)+1 > 0$ in un intorno di $x=1$ e quindi la soluzione in tale intorno soddisfa

(oo) $y+1 = 3\, e^{-\frac{2}{3}}\, e^{\frac{x^3}{3} - x}$; non potendo assumere il valore -1 (altrimenti coinciderebbe con la soluzione singolare $y(x) \equiv -1$, per il Teorema di esistenza e unicità) è chiaro che $y(x)$ resta strettamente maggiore di -1 $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi la soluzione è data da (oo) $\forall x \in \mathbb{R}$, cioè

$$y(x) = 3\, e^{-\frac{2}{3}}\, e^{\frac{x^3}{3} - x} - 1$$

4) Dare la definizione di matrice Jacobiana per una funzione $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, Ω aperto. Calcolare quindi la matrice Jacobiana di

$$F(x,y) = \left(x^2 - y^2,\ \cos(xy),\ x \right)$$

Per la definizione si veda, ad esempio, la lezione 38

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -\sin(xy)\cdot y & -\sin(xy)\cdot x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$