1) Stabilire il carattere delle seguente serie

A) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n\log^2(n^2)} - \frac{\log n}{n+1}\right)$

Studiamo separatamente le serie

(1) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log^2(n^2)}$ e (2) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log n}{n+1}$

(1): Consideriamo la funzione $f(x)=\frac{1}{x\log^2(x^2)}$

$f(n)=\frac{1}{n\log^2(n^2)}$, $f(x)$ è decrescente e $f(x)=\frac{1}{2x\log^2 x}$ se $x>0$

Poiché $\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\log^2 x}\,dx \in \mathbb{R}$, per il criterio dell'integrale

(1) converge

(2): Poiché $n\frac{\log n}{n+1} \sim \log n \to +\infty$ per il

criterio degli infinitesimi (2) diverge positivamente

La serie assegnata quindi diverge negativamente

2) Determinare il dominio della seguente funzione e rappresentarlo sul piano:

$$f(x,y)=\frac{\log(x-y^2)+1}{\sqrt{(x-1)^3}}$$

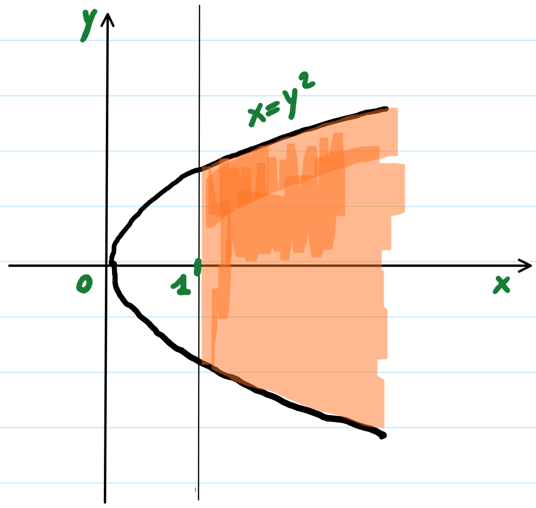
Stabilire poi che f è differenziabile sul suo dominio e determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(2,0,f(2,0))$

Il dominio di f è dato dai punti $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ per cui

Il dominio di f è dato dai punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ per cui

$$\begin{cases} x - y^2 > 0 \\ (x-1)^3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > y^2 \\ x > 1 \end{cases}$$

Esso è dato dall'insieme colorato in figura



Tale insieme è aperto. Le derivate parziali di f sono ben definite in tale insieme. Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x-y^2} \cdot (x-1)^{-\frac{3}{2}} + \left(\log(x-y^2)+1\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(x-1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{x-y^2}\,(x-1)^{-\frac{3}{2}}$$

Poiché sono continue nel dominio di f, f è ivi differenziabile. Esiste dunque il piano tangente al grafico di f in $(2,0,f(2,0))$

La sua equazione è $\quad z = f(2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\,y$

$$f(2,0) = \log 2 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(\log 2 + 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 0$$

Quindi $z = \log 2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\log 2 - 1\right)(x-2)$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+2y}{2+x^2} & (*) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$(*)$ è a variabili $\dfrac{y'}{y^2+2y} = \dfrac{1}{2+x^2}$

Integrando entrambi i membri otteniamo

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \int \frac{dx}{2+x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dy}{y+2} - \int \frac{dy}{y}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \log|y+2| - \log|y|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{y}{y+2}\right|\right)$$

$$\int \frac{dx}{2+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Quindi $\log\left(\left|\dfrac{y}{y+2}\right|^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + c$

Poiché $y(0) = 1$ otteniamo $\log\dfrac{1}{\sqrt{3}} = c$

Quindi $\left|\dfrac{y}{y+2}\right|^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}}$

$$\frac{|y|}{|y+2|} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

In un intorno di 0, y è positiva dato che $y(0) = 1$
quindi la soluzione rimane tra le due soluzioni

singolari $y \equiv 0 \wedge y \equiv 2$. Dunque $y = y(x) > 0 \ \forall x$ e

$$\frac{y}{y+2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}}$$ da cui

$$y\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}}$$

da cui $$y = \frac{2 e^{\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{3} - e^{\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}}}$$

4) Sia f una funzione continua su D insieme normale del tipo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \wedge \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ con $\alpha, \beta \in C^0([a,b])$.

Dimostrare che $\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in D$ t.c. $f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\text{Area} D} \int_D f(x,y)\, dx\, dy$

Si vedano, ad esempio, gli appunti della lezione 22