Possibile svolgimento della prova del 7 novembre 2025 – Modulo B

1) **(a)** Per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$, usiamo la linearità dell'operatore di serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Entrambe sono serie geometriche con $|q|<1$. Usando la formula $\sum_{n=k}^{\infty} q^n=\frac{q^k}{1-q}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{(1/3)^2}{1-1/3}=\frac{1/9}{2/3}=\frac{1}{6},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(-1/2)^2}{1-(-1/2)}=\frac{1/4}{3/2}=\frac{1}{6}.$$

Quindi la somma della serie assegnata è $\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}=0$.

(b) Per studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2+3n}$, analizziamo il comportamento asintotico del termine generale:

$$\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2+3n}\sim\frac{\sqrt{n^3}}{n^2}=\frac{n^{3/2}}{n^2}=\frac{1}{n^{1/2}}.$$

Poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ è una serie armonica generalizzata con esponente $1/2<1$, essa diverge. Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie data diverge.

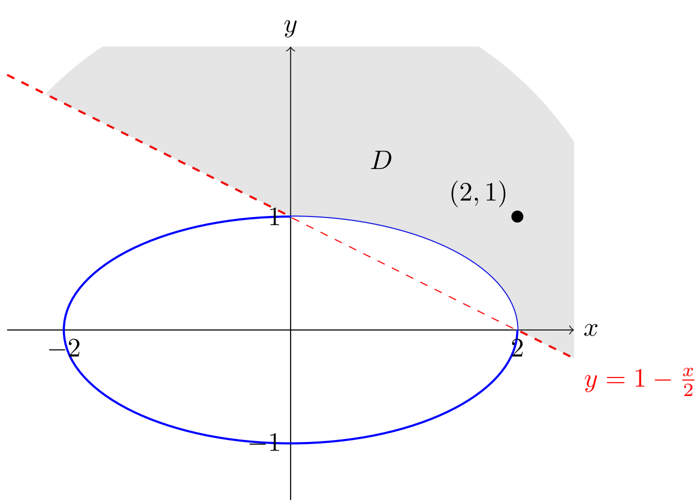
2) Il dominio di $f(x,y)=\sqrt{x^2+4y^2-4}+\log\left(\frac{x}{2}+y-1\right)$ è dato dall'intersezione dei domini dei due addendi.

Per $\sqrt{x^2+4y^2-4}$: deve essere $x^2+4y^2-4\geq 0$, ovvero $x^2+4y^2\geq 4$, che si può scrivere come $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}\geq 1$. Questa è la regione esterna (bordo incluso) di un'ellisse con semiasse $a=2$ sull'asse x e semiasse $b=1$ sull'asse y.

Per $\log\left(\frac{x}{2}+y-1\right)$: deve essere $\frac{x}{2}+y-1>0$, cioè $y>1-\frac{x}{2}$ (semipiano aperto sopra la retta $y=1-\frac{x}{2}$).

Il dominio è quindi:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2\geq 4,\ y>1-\frac{x}{2}\right\}.$$



Il dominio non è aperto (contiene i punti del suo bordo appartenenti all'ellisse $x^2+4y^2=4$), non è chiuso (non contiene i punti della retta $y=1-\frac{x}{2}$ che appartengono anche al suo bordo), non è limitato, è connesso per archi.

Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4y^2-4}}+\frac{1/2}{\frac{x}{2}+y-1}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2-4}}+\frac{1}{x+2y-2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{8y}{2\sqrt{x^2+4y^2-4}}+\frac{1}{\frac{x}{2}+y-1}=\frac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2-4}}+\frac{2}{x+2y-2}.$$

Queste funzioni sono continue nei punti interni al dominio (dove $x^2+4y^2>4$ e $y>1-\frac{x}{2}$), quindi per il Teorema del differenziale totale f è differenziabile in tali punti.

Nel punto $(2,1)$:

$$f(2,1)=\sqrt{4+4-4}+\log(1+1-1)=\sqrt{4}+\log(1)=2,$$

$$f_x(2,1)=\frac{2}{\sqrt{4}}+\frac{1}{2+2-2}=\frac{3}{2},$$

$$f_y(2,1)=\frac{4}{\sqrt{4}}+\frac{2}{2+2-2}=3.$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1,2)$ è:

$$z=2+\frac{3}{2}(x-2)+3(y-1)=2+\frac{3}{2}x-3+3y-3=\frac{3}{2}x+3y-4.$$

La derivata direzionale secondo $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,1)=\nabla f(2,1)\cdot v=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{2\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

3) L'equazione è:

$$y''+6y'+8y=te^{-2t}$$

Risolviamo l'equazione omogenea associata:

$$y''+6y'+8y=0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2+6\lambda+8=0\Rightarrow\lambda=-3\pm\sqrt{9-8}=-3\pm1$$

Quindi $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=-4$.

La soluzione generale dell'omogenea è:

$$y_0(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-4t}$$

Per trovare una soluzione particolare, osserviamo che il termine noto è te^{-2t}. Poiché -2 è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità 1, cerchiamo una soluzione particolare della forma:

$$y_p(t)=t(At+B)e^{-2t}=(At^2+Bt)e^{-2t}$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned}y_p'(t)&=(2At+B)e^{-2t}+(At^2+Bt)(-2)e^{-2t}\\&=(2At+B-2At^2-2Bt)e^{-2t}\\&=(-2At^2+(2A-2B)t+B)e^{-2t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(t) &= (-4At + 2A - 2B)e^{-2t} + (-2At^2 + (2A - 2B)t + B)(-2)e^{-2t} \\ &= (-4At + 2A - 2B + 4At^2 - (4A - 4B)t - 2B)e^{-2t} = (4At^2 - (8A - 4B)t + 2A - 4B)e^{-2t} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione:

$$(4At^2 - (8A - 4B)t + 2A - 4B)e^{-2t} + 6(-2At^2 + (2A - 2B)t + B)e^{-2t} + 8(At^2 + Bt)e^{-2t} = te^{-2t}$$

Dividendo per e^{-2t} e raccogliendo come fattori comuni t^2 e t otteniamo:

$$\begin{aligned} &4At^2 - (8A - 4B)t + 2A - 4B - 12At^2 + (12A - 12B)t + 6B + 8At^2 + 8Bt = t \\ &(4A - 12A + 8A)t^2 + (-(8A - 4B) + (12A - 12B) + 8B)t + (2A - 4B + 6B) = t \\ &0 \cdot t^2 + 4At + (2A + 2B) = t \end{aligned}$$

Confrontando i coefficienti:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases}$$

Quindi $A = 1/4$ e $B = -1/4$

La soluzione particolare è:

$$y_p(t) = \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t\right)e^{-2t} = \frac{t(t-1)}{4}e^{-2t}$$

La soluzione generale è:

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-4t} + \frac{t(t-1)}{4}e^{-2t}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

Calcoliamo $y'(t)$:

$$\begin{aligned} y'(t) &= -2c_1e^{-2t} - 4c_2e^{-4t} + \frac{2t-1}{4}e^{-2t} + \frac{t(t-1)}{4}(-2)e^{-2t} \\ &= -2c_1e^{-2t} - 4c_2e^{-4t} + \frac{2t - 1 - 2t^2 + 2t}{4}e^{-2t} \\ &= -2c_1e^{-2t} - 4c_2e^{-4t} + \frac{-2t^2 + 4t - 1}{4}e^{-2t} \end{aligned}$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -2c_1 - 4c_2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow -2c_1 - 4c_2 = \frac{1}{4}$$

Deve quindi essere:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 - 4c_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Dalla prima: $c_1 = 1 - c_2$. Sostituendo nella seconda:

$$-2(1 - c_2) - 4c_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow -2 + 2c_2 - 4c_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow -2c_2 = \frac{9}{4}$$

Quindi $c_2 = -\frac{9}{8}$ e $c_1 = 1 + \frac{9}{8} = \frac{17}{8}$.

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(t) = \frac{17}{8}e^{-2t} - \frac{9}{8}e^{-4t} + \frac{t(t-1)}{4}e^{-2t}$$

4) Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione definita sull'insieme A e sia $x_0 \in A$.

Si dice che x_0 è un **punto di minimo locale** per f se esiste un intorno U di x_0 tale che:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U \cap A.$$

Se la disuguaglianza è stretta per ogni $x \in U \cap A$ con $x \neq x_0$, si dice che x_0 è un punto di **minimo locale forte**.

Teorema (Condizione sufficiente per minimo locale): Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su un aperto A e sia $x_0 \in A$ un punto stazionario per f, cioè $\nabla f(x_0) = 0$. Se la matrice Hessiana $H_f(x_0)$ è definita positiva, allora x_0 è un punto di minimo locale forte per f.

Dimostrazione: Poiché f è di classe C^2 su A, possiamo applicare la formula di Taylor di ordine 2 con resto di Peano in x_0. Per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ sufficientemente piccolo tale che $x_0 + h \in A$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(x_0) h + o(\|h\|^2).$$

Poiché x_0 è un punto stazionario, $\nabla f(x_0) = 0$, quindi:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2} h^T H_f(x_0) h + o(\|h\|^2).$$

Sia $\lambda > 0$ il minimo autovalore di $H_f(x_0)$ (che esiste ed è positivo per ipotesi, essendo $H_f(x_0)$ definita positiva). Allora:

$$h^T H_f(x_0) h \geq \lambda \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} h^T H_f(x_0) h + o(\|h\|^2) \geq \frac{\lambda}{2} \|h\|^2 + o(\|h\|^2).$$

Poiché $o(\|h\|^2)/\|h\|^2 \to 0$ per $h \to 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per $0 < \|h\| < \delta$:

$$\left| \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right| < \frac{\lambda}{4}.$$

Quindi per $0 < \|h\| < \delta$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{\lambda}{2} \|h\|^2 - \frac{\lambda}{4} \|h\|^2 = \frac{\lambda}{4} \|h\|^2 > 0.$$

Questo dimostra che $f(x_0 + h) > f(x_0)$ per ogni h con $0 < \|h\| < \delta$, cioè x_0 è un punto di minimo locale forte. $\square$