Politecnico di Bari
Complementi di Analisi Matematica
Laurea Ingegneria Informatica e Automazione
A.A. 2016/2017 Appello 14 febbraio 2017 Traccia A

Cognome________________ Nome________________ N^o Matricola________________

Programma: precedente AA 2014/2015 ☐ da AA 2014/2015 in poi ☐

1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di Laplace di un segnale periodico. Usarlo poi per calcolare la trasformata del segnale g periodico di periodo 2 ottenuto estendendo per periodicità la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ -1 & \text{se } t \in (1,2] \end{cases}$$

7 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Stabilire che la seguente serie di funzioni non converge totalmente su $(0,1]$ mentre converge totalmente su ogni intervallo $[a,1]$ con $a \in (0,1)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - \log(x^n)}{n^3+1}.$$

7 pts.

2) Enunciare e dimostrare almeno un teorema sul calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze in $\mathbb{C}$.

5 pts.

3) Dimostrare che

$$\int_{C^+(0,1)} \frac{\sin z + \cos z}{(z^2 - z(1-i))^2} \mathrm{d}z + \int_{E^-(i)} \frac{e^z}{(z^2 - z(1-i))^2} \mathrm{d}z = 0,$$

dove $C^+(0,1)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1 orientata positivamente e $E^-(i)$ è l'ellisse di centro i avente un asse, di lunghezza 2, parallelo all'asse dei reali e l'altro asse, di lunghezza 3, coincidente con l'asse degli immaginari puri.

6 pts.

4) Data $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, con $g,\ h \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, dimostrare che se h ha uno zero di molteplicità m in $z_0 \in \Omega$ e $g(z_0) \neq 0$ allora f ha un polo di ordine m in z_0. Dimostrare inoltre che, nel caso in cui $m = 1$, $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

5 pts.

5) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)t}{1+t^4} \mathrm{d}t.$$

6 pts.

6) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = e^{|x|}$, $x \in [-1,1]$. Dimostrare poi che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(e + (-1)^{k+1})}{k^2\pi^2 + 1} = 1.$$

7 pts.