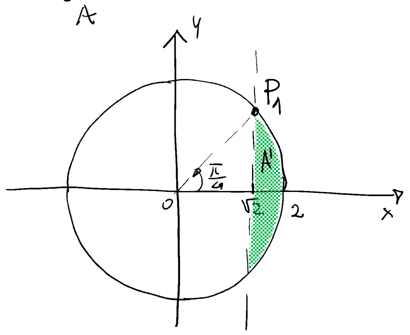
1) Calcolare

$$\int_A x^2 \, dx \, dy \quad (*) \qquad \text{dove } A = \{ (x,y) : \quad x^2 + y^2 \leq 4 , \quad x \geq \sqrt{2} \}$$



A è l'insieme in verde qui a fianco

Indichiamo con $f(x,y) = x^2 - y^2$ la funzione integranda

Osserviamo che $f(x,-y) = f(x,y)$

Quindi $\int_A f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{A'} f(x,y)\,dx\,dy$

con A' il sottoinsieme di A contenuto nel I quadrante

Osserviamo che la retta $x = \sqrt{2}$, interseca la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$, nei punti $P_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $P_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Passando quindi alle coordinate polari (θ, ρ), i punti di A' hanno θ compreso tra 0 e $\pi/4$, mentre $\rho \leq 2$.

La retta di equazione $x = \sqrt{2}$ nel piano (θ, ρ) ha equazione $\rho \cos\theta = \sqrt{2}$ quindi per i punti di A', $\rho \geq \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}$

Quindi nel piano (θ, ρ) otteniamo l'insieme $B' = \{ (\theta,\rho) : \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \text{ e } \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta} \leq \rho \leq 2 \}$

che è quindi normale rispetto a θ

$$2\int_{A'} x^2 \, dx\,dy = 2 \int_{B'} \rho^2 \cos^2\theta \cdot \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}}^{2} \rho^3 \, d\rho \right) d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \; \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_{\sqrt{2}/\cos\theta}^{2} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \left(16 \cos^2\theta - 4 \frac{1}{\cos^2\theta} \right) d\theta = 8 \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \, d\theta - 2 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2\theta} \, d\theta$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \, d\theta = \cos\theta \sin\theta \Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} - 0 + \int_0^{\pi/4} (1 - \cos^2\theta) \, d\theta$$

quindi $2\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} + \pi/4$ da cui $8 \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \, d\theta = 2 + \pi$

$$2 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2\theta} \, d\theta = 2 \operatorname{tg}\theta \Big|_0^{\pi/4} = 2 .$$

Quindi $(*) = 2 + \pi - 2 = \pi$

2) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2} + \frac{y^2}{e}$$

e studiarne la natura. Si determini poi l'equazione del piano tg al grafico di f nel punto $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; calcoliamo le sue derivate parziali e uguagliamole a 0 per determinare i suoi punti critici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2-y^2}(-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-x^2-y^2}(-2y) + \frac{2}{e}y$$

$$\begin{cases} e^{-x^2-y^2}(-2x) = 0 \\ e^{-x^2-y^2}(-2y) + \frac{2}{e}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y\left(\frac{1}{e} - e^{-y^2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ e^{-1} = e^{-y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ e^{-1} = e^{-y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad P_1(0,1) \text{ e } P_2(0,-1)$$

Quindi f ha tre punti critici $O(0,0)$ $P_1(0,1)$ e $P_2(0,-1)$)

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}4x^2 - 2e^{-x^2-y^2} & e^{-x^2-y^2}4xy \\ e^{-x^2-y^2}4xy & e^{-x^2-y^2}4y^2 - 2e^{-x^2-y^2} + \frac{2}{e} \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2+\frac{2}{e} \end{pmatrix}$$ quindi $(0,0)$ è un max locale forte

$$H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & 4/e - 2/e + 2/e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & 4/e \end{pmatrix}$$

quindi P_1, P_2 sono di sella.

L'equazione del piano tg nel punto $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ è

$$z = f\left(-2, \tfrac{1}{2}\right) + \left\langle \nabla f\left(-2, \tfrac{1}{2}\right), \left(x+2, y-\tfrac{1}{2}\right) \right\rangle =$$

$$= e^{-17/4} + \frac{1}{4e} + \left\langle \left(4e^{-17/4}, -e^{-17/4} + \frac{1}{e}\right), \left(x+2, y-\tfrac{1}{2}\right) \right\rangle$$

$$= e^{-17/4} + 1/4e + 4e^{-17/4}(x+2) + \left(\frac{1}{e} - e^{-17/4}\right)\left(y - \tfrac{1}{2}\right)$$

3) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$y' = \sin t \, y + \sin t$$

È un'equazione lineare del primo ordine ma è anche a variabili separabili

$y' = \sin t \,(1+y)$; quindi se y non è costante uguale a -1

$\frac{y'}{1+y} = \sin t$ da cui $\log|1+y| = -\cos t + c$ da cui

$|1+y| = e^{-\cos t} e^{c}$ e quindi $y+1 = k e^{-\cos t}$, $\forall k \in \mathbb{R}$

cioè $y(t) = k e^{-\cos t} - 1$, $\forall k \in \mathbb{R}$

4) Enunciare il teorema di confronto per l'integrale improprio su un intervallo $[a,+\infty)$

Usarlo poi per dimostrare che la funzione

$f(x) = x^{10} e^{-x^4}$ è integrabile su $(-\infty,+\infty)$

Enunciato: siano $f,g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, tali che $\begin{matrix} f \\ g \end{matrix} \in \mathcal{R}([a,w])$ $\forall w > a$

e $0 \le f(x) \le g(x)$ definitivamente per $x \to +\infty$. Allora

1) $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

2) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$

Dato che f è pari $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

Perché $x^2 f(x) = x^2 x^{10} e^{-x^4} = \frac{x^{10}}{e^{x^4}} \to 0$ per $x \to +\infty$

$x^2 f(x) < 1$ definitivamente per $x \to +\infty$; quindi

$f(x) < \frac{1}{x^2}$ " " e dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \in \mathbb{R}$ e

anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$. Perché

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e f è chiaramente integrabile

su $[0,1]$ (f è continua su $\mathbb{R}$), concludiamo che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

e quindi anche $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$