TRACCIA A

1) - a) Determinare in forma cartesiana le soluzioni dell'equazione

$$i z^2 + z^5 = 0$$

L'equazione assegnata è equivalente a

$z^2 (i + z^3) = 0$ quindi le soluzioni sono $z = 0$ e

$$z = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k\right)} \qquad k = 0, 1, 2$$

Per $k = 0$: $e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

" $k = 1$: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

" $k = 2$: $e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

1) - b)

Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

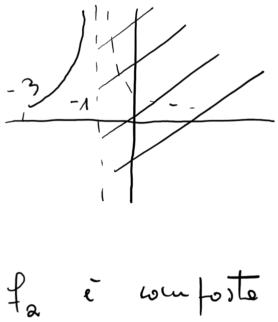
$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \arcsin(x+2)$$

dom f : $\begin{cases} x \neq -1 \\ -1 \leq x + 2 \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \leq -1 \\ x \geq -3 \end{cases}$ quindi dom $f = [-3, -1)$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ con $f_1(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ e $f_2(x) = \arcsin(x+2)$

Il grafico di f_1 si ottiene da $y = \frac{2}{x^2}$ mediante una traslazione di 1 nella direzione negativa dell'asse delle x;

pertanto sull'intervallo $[-3, -1)$ f_1 è strett. crescente



f_2 è composta da $x \in [-3, 1) \mapsto x+2 \mapsto \arcsin(x+2)$:

la funzione interna è strett. crescente quella esterna è anche strett. crescente

quindi f_2 è strett. crescente. Dunque f è strett. crescente

in quanto somma di due funzioni strett. crescenti

$f \in C^0([-3,-1))$ e quindi $\operatorname{Im} f = [f(-3), \lim_{x\to -1^-} f(x))$

$$f(-3) = \frac{1}{2} + \arcsin(-1) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{1-\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{2}{0^+} + \arcsin 1 = +\infty + \frac{\pi}{2} = +\infty$$

quindi $\operatorname{Im} f = \left[\frac{1-\pi}{2}, +\infty\right)$

2) Stabilire che $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} - x\log\frac{1}{1-x}$ ha uno zero nell'intervallo $(0,1)$. Stabilire inoltre che $x_0 = 0$ è un punto di massimo locale forte per f.

$\operatorname{dom} f = (-\infty,-1)\cup(-1,1)$; $f \in C^0([0,1))$

$f(0) = 1/e > 0$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 - 1(+\infty) = -\infty$

dato che $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ e quindi $\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$

e $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ e quindi $\lim_{x\to 1^-} x\log\frac{1}{1-x} = 1(+\infty) = +\infty$

Per il Teorema degli zeri f ha quindi uno zero in $(0,1)$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}\frac{-2x}{(x^2-1)^2} - \log\left(\frac{1}{1-x}\right) - x(1-x)\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= -\frac{2x\, e^{1/x^2-1}}{(x^2-1)^2} - \log\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{x}{1-x}$$

$0 \in \overset{\circ}{\widehat{\operatorname{dom} f}}$ e $f'(0) = 0$

$$f''(x) = e^{1/x^2-1}\frac{4x^2}{(x^2-1)^4} + e^{\frac{1}{x^2-1}}\frac{-2(x^2-1)^2 + 4x(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}$$
$$- (1-x)\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1-x+x}{(1-x)^2}$$

$f''(0) = -2e^{-1} - 1 - 1 < 0$ e quindi $x_0 = 0$ è un massimo locale forte per f. Poiché $f''(0) < 0$ e f'' è continua su $\operatorname{dom} f$ per il Teorema della permanenza del segno $\exists\, U \in \mathcal{I}(0)$ t.c. $\forall x \in U \cap \operatorname{dom} f$: $f''(x) < 0$ e quindi f è strettamente concava in $U \cap \operatorname{dom} f$.

3) Sia $f(x) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

Calcolare $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} g(f(x))$

con $g(w) = \dfrac{\sin(w^2-1) + \log\sqrt{w}}{\sqrt{w}-1}$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x \to -\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}}$$

posto $y = x^2$; $\lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{y \to +\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

quindi $\lim_{x \to -\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

Dunque posto $w = f(x)$, abbiamo $\lim_{x \to -\infty} g(f(x)) = \lim_{w \to 1} g(w)$

$$g(w) = \frac{\sin(w^2-1) + \log\sqrt{w}}{\sqrt{w}-1}$$

$$\frac{\sin(w^2-1)}{\sqrt{w}-1} = \frac{\sin(w^2-1)}{w^2-1}\,\frac{w^2-1}{\sqrt{w}-1}$$

posto $w^2-1 = z$ $\quad \lim_{w \to 1}\frac{\sin(w^2-1)}{w^2-1} = \lim_{z \to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$

$$\lim_{w \to 1}\frac{w^2-1}{\sqrt{w}-1} = \lim_{w \to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{w}-1)}(\sqrt{w}+1)(w+1)}{\cancel{\sqrt{w}-1}} = 4$$

quindi $\dfrac{\sin(w^2-1)}{\sqrt{w}-1} \xrightarrow{w \to 1} 4$

$$\frac{\log\sqrt{w}}{\sqrt{w}-1} = \frac{\log(1+\sqrt{w}-1)}{\sqrt{w}-1}$$

Posto $\sqrt{w}-1 = h$ $\quad \lim_{w \to 1}\frac{\log(1+\sqrt{w}-1)}{\sqrt{w}-1} = \lim_{h \to 0}\frac{\log(1+h)}{h} = 1$

quindi $\lim_{x \to -\infty} g(f(x)) = \lim_{w \to 1} g(w) = 4+1 = 5$

4) Dare la definizione di sup e inf di un insieme e di una funzione

4) Dare la definizione di sup e inf di un insieme e di una funzione. Enunciare poi il teorema dei valori intermedi e dimostrarlo usando il teorema degli zeri per le funzioni continue.

Per la definizione di sup e inf si guardi la lezione 2.

Per una funzione, si guardi la lezione 11

Per enunciato e dimostrazione del teorema dei valori intermedi, la lezione 19.

TRACCIA B

1) -a)

Si determini la forma esponenziale del numero complesso

$$z = -\frac{i-1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Si calcoli poi $z^{10} - zi$ in forma cartesiana

$$z = e^{i\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}}{\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\pi}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

che è la forma esponenziale di z

$$z^{10} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{2}\pi}\right)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} e^{i\,15\pi} = 32(-1) = -32$$

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{2}\pi} = -\sqrt{2}\, i$$

e quindi $z^{10} - iz = -32 - i\left(-\sqrt{2}\, i\right) = -32 + \sqrt{2}\, i^2 = -32 - \sqrt{2}$

1) - b) Determinare dominio, tipo di monotonia e immagine della funzione:

$$f(x) = \left(\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{x-1}$$

dom f: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-1 > 0 \\ x^2-1 < 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x > 1 \ \vee\ x < -1 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$ $1 < x < \sqrt{2}$

dom $f = (1, \sqrt{2})$

$h(x) = \sqrt{x-1}$ è strett. crescente in $(1, \sqrt{2})$ essendo composta da funzioni strett. crescenti

$g(x) = \left(\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ è composta dalle funzioni:

$g(x) = \left(\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ è composta dalle funzioni:

$$x \in (1, \sqrt{2}) \mapsto x^2-1 \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) \mapsto \left(\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

la funzione più interna $y(x) = x^2-1$ è str. crescente su $(1, \sqrt{2})$;
la seconda è strett. decrescente, la terza anche quindi g è strett. crescente
Poiché f è prodotto di due funzioni positive e strett. crescenti è strett. crescente

Sia g che h sono continue su $(1, \sqrt{2})$ in quanto composte da funzioni continue e dunque anche f lo è dato che è prodotto di g e h. Quindi

$$\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x \to 1^+} f(x) \, , \lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) \right)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = (+\infty)^{-1/\sqrt{3}} \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = (0^+)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{\sqrt{2}-1} = +\infty \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} = +\infty$$

quindi $\operatorname{Im} f = (0, +\infty)$

2) Stabilire che $f(x) = x \log \frac{x-2}{x+2} + 3^{-x}$ ha uno zero nell'intervallo $(-\infty, -2)$

Stabilire, poi, se esiste la migliore approssimazione lineare di f nel punto $x_0 = -4$ e, in caso affermativo, determinarla.
Stabilire infine che f è strett. decrescente su un intorno di $x_0 = -4$.

$f \in C^0((-\infty, -2))$ dato che $\operatorname{dom} f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ e f è somma di funzioni continue su tale insieme.

$$\lim_{x \to -\infty} 3^{-x} = +\infty$$

Sia $g(x) = x \log \frac{x-2}{x+2}$; $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ $[\infty \cdot 0]$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x \log\left(1 - \frac{4}{x+2}\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x \frac{4}{x+2} \quad \log\left(1 - \frac{4}{x+2}\right) \Big/ \left(-\frac{4}{x+2}\right)$$

Posto $y = -\frac{4}{x+2}$ dato che $\lim_{x \to -\infty} -\frac{4}{x+2} = 0$ si ha che

$$\lim_{x \to -\infty} \log\left(1 - \frac{4}{x+2}\right) \Big/ \left(-\frac{4}{x+2}\right) = \lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(1-\frac{4}{x+2}\right) \Big/ \left(-\frac{4}{x+2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{x}{x+2} = -1 \quad ; \text{ quindi } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -1\cdot 1 = -1$$

e quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1+\infty = +\infty$

$\lim_{x\to-2^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \quad \text{quindi } \lim_{x\to-2^-} f(x) = -2(+\infty) + 3^2 = -\infty$$

Dunque f ha, per il teorema degli zeri delle funzioni continue, uno zero in $(-\infty,-2)$

La migliore approssimazione lineare di f in $x_0=-4$ esiste in quanto f è derivabile in tale punto ed essa è data da

$$x\in\mathbb{R} \mapsto f(-4) + f'(-4)(x+4)$$

$$f(-4) = -4\log 3 + 3^4$$

$$f'(x) = \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + x\,\frac{(x+2)}{x-2}\cdot\frac{x+2-x+2}{(x+2)^2} - 3^{-x}\log 3$$

$$= \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + \frac{4x}{(x-2)(x+2)} - 3^{-x}\log 3$$

$$f'(-4) = \log 3 - \frac{16}{12} - 3^4\log 3 = (1-3^4)\log 3 - \frac{3}{2} = -80\log 3 - \frac{3}{2}$$

Quindi la migliore approssimazione lineare è data da

$$x\in\mathbb{R} \mapsto -4\log 3 + 3^4 + \left[-80\log 3 - \frac{3}{2}\right](x+4)$$

Notiamo che $f'(-4) = -80\log 3 - \frac{3}{2} < 0$.

Essendo f' continua nel dominio di f, dal teorema della permanenza del segno otteniamo che $f'(x)<0$ in un intorno di -4 e quindi f è strett. decrescente su tale intorno.

3) Sia $f(x) = (x^2-1)^{1/(x^2-1)}$

Calcolare $\lim_{x\to1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to1^+} g(f(x))$

dove $g(x) = \sin(2x) + \log\frac{1}{\dots}$

dove $g(x) = \dfrac{\sin(2x) + \log\frac{1}{1-x}}{x}$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0^{\frac{1}{0^+}} = 0^{+\infty} = 0^+$$

Per calcolare $\lim_{x\to 1^+} g(f(x))$, usiamo il teorema sul limite delle funzioni composte: poiché $f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0$ posto $y = f(x)$ abbiamo

$$\lim_{x\to 1^+} g(f(x)) = \lim_{y \to 0^+} g(y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(2y)}{y} + \frac{\log\frac{1}{1-y}}{y}$$

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(2y)}{y} = 2 \; ; \; \lim_{y\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{1}{1-y}\right)}{y} \underset{=}{\text{L'Hop.}} \lim_{y\to 0^+} (1-y)\cdot\frac{1}{(1-y)^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{1-y} = 1$$

Quindi $\lim_{x\to 1^+} g(f(x)) = 3$

4) Dare la definizione di funzione derivabile a dx e a sx in un punto. Dare inoltre la definizione di punto angoloso. Fornire un esempio di una funzione che ha un punto di estremo locale posto in un punto angoloso. Dire, perché una tale funzione non inficia il Teorema di Fermat. Dimostrare infine il Teorema di Fermat.

Per le definizioni richieste si guardi la lezione 20. Un esempio è dato dalla funzione $y(x) = |x|$ che ha in 0 un punto di minimo che è anche angoloso. Per il teorema di Fermat si guardi la lezione 21.

TRACCIA C

$$\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} x^5 \cos(x^3)\, dx$$

Pongo $t = x^3$, $dt = 3x^2\, dx$ e quindi per sostituzione otteniamo:

$\int_0$

Posto $x^3 = t$, $dt = 3x^2\,dx$ e quindi per sostituzione otteniamo:

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t = \frac{1}{3}\, t\sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}$$