1) Da AA 2014-15

Usando la trasformata di Laplace determinare il segnale che risolve:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t^2, & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Prendendo la trasformata di entrambi i membri dell'equazione, otteniamo:

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1 + (2+s)}{s^2+2s+1} + \frac{\mathcal{L}(t_+^2)(s)}{s^2+2s+1}$$

$$= \frac{2 + (s+1)}{s^2+2s+1} + \mathcal{L}(t_+^2)(s) \cdot \mathcal{L}(y_0(t)),$$

dove $y_0 = y_0(t)$ è la soluzione fondamentale dell'equazione.

Poiché $\frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$, $y_0(t) = (te^{-t})_+$

Quindi $\mathcal{L}(t_+^2)(s) \cdot \mathcal{L}((te^{-t})_+) = \mathcal{L}(t_+^2 * (te^{-t})_+)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2+(s+1)}{(s+1)^2}\right)(t) = 2te^{-t} + e^{-t}$$

quindi $y(t) = 2te^{-t} + e^{-t} + (t_+^2) * (te^{-t})\ (t)$

$$= 2te^{-t} + e^{-t} + \int_0^t (t-u)e^{u-t} u^2\, du$$

$$\int_0^t (t-u)e^{u-t}u^2\,du = \int_0^t (-u^3)e^{u-t}\,du + t\int_0^t u^2 e^{u-t}\,du$$

$$= -u^3 e^{u-t}\Big|_0^t + 3\int_0^t u^2 e^{u-t}\,du + t\int_0^t u^2 e^{u-t}\,du$$

$$= -t^3 + (3+t)\int_0^t u^2 e^{u-t}\,du$$

$$\int_0^t u^2 e^{u-t}\,du = u^2 e^{u-t}\Big|_0^t - 2\int_0^t u e^{u-t}\,du =$$

$$= t^2 - 2ue^{u-t}\Big|_0^t + 2\int_0^t e^{u-t}\,du$$

$$= t^2 - 2t + 2e^{u-t}\Big|_0^t = t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t}$$

Quindi

$$y(t) = \left(2te^{-t} + e^{-t} - t^3 + (3+t)(t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t})\right)H(t)$$

$$= ($$

$$= \left(-5e^{-t} + t^2 - 4t + 6\right)H(t)$$

1) Pre AA 2014-2015

Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} e^{-n} (x-2)^n$$

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{e}$$

Quindi il raggio di convergenza della serie è $\rho = e$

Per $x = 2+e$ si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} e^{-n} e^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$ che converge (per il criterio di Leibniz)

Per $x = 2 - e$ si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} e^{-n} (-e)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} e^{-n} (-1)^n e^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$ che diverge positivamente

Quindi l'insieme di convergenza puntuale è $(2-e, 2+e]$

Per il Teorema di Abel

la serie converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $[2-e+\varepsilon, 2+e]$

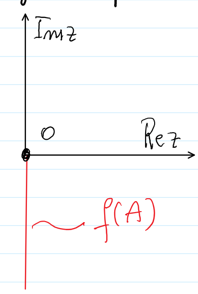
con $0<\varepsilon<2e$.

2) Determinare l'immagine mediante la funzione $f$, dell'insieme $A=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2}\}$, dove $f(z) = e^{\bar{z}}$. Rappresentare sul piano $f(A)$.

Osserviamo che $z\in A \iff z = x + i\frac{\pi}{2}$, $x\in\mathbb{R}$

quindi $f(z) = e^{x-i\frac{\pi}{2}} = e^{x}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = -ie^{x}$

Poiché $e^{x}>0$, $f(A)$ è la semiretta uscente dall'origine coincidente con il semiasse dei numeri immaginari puri con parte immaginaria negativo



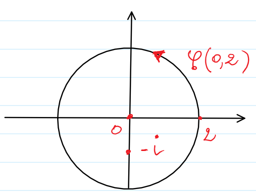

3) Enunciare la "I formula di rappresentazione di Cauchy"

Calcolare poi

$$\int_{\gamma^{+}(0,2)} \frac{(z-i)(z-2i)(z-3i)}{(z+i)^4}\,dz$$

dove $\gamma^{+}(0,2)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata in senso antiorario

Per l'enunciato della I formula di rappresentazione di Cauchy si veda, ad esempio, p. 69 degli appunti




Poiché $-i$ è interno al disco $D(0,2)$ e la funzione $f(z) = (z-i)(z-2i)(z-3i)$ è olomorfa su $\mathbb{C}$ possiamo usare la II formula di rappresentazione di Cauchy

Gvu7t

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $\frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-i)$

Poiché $f$ è un polinomio di grado 3 il cui monomio di grado 3 è $z^3$ la sua derivata terza è costante ed uguale a 6. Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$\frac{2\pi i}{6}\, 6 = 2\pi i$

4) Dare la definizione di residuo.

Calcolare poi il residuo in 0 della funzione

$$f(z) = z\, e^{-\frac{i}{3z}}$$

Per la definizione si veda ad esempio p. 122 degli appunti

lo sviluppo in serie di Laurent di centro 0 per $f$

è dato da

$$z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{-i}{3z}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-i)^k}{3^k z^{k-1}} =$$

$$= z - \frac{i}{3} - \frac{1}{9 \cdot 2} \cdot \frac{1}{z} + \dots$$

Quindi $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{18}$

5) Enunciare e dimostrare il I teorema dei residui.

Si veda ad esempio p. 123 degli appunti

6) Usare l'identità di Parseval e la funzione

$f(x) = x - 1$, $x \in [1, 3)$ estesa per periodicità, con periodo 2, su $\mathbb{R}$

per dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{6}$

Determiniamo i coefficienti di Fourier di $f$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_1^3 x - 1 = \frac{1}{4}(x-1)^2 \Big|_1^3 = 1$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_1^3 (x-1)\cos\left(\frac{2\pi}{2} k x\right) dx = \int_1^3 (x-1)\cos(k\pi x)\, dx$$

$$= \frac{1}{k\pi}(x-1)\sin(k\pi x)\Big|_1^3 - \frac{1}{k\pi}\int_1^3 \sin(k\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\sin(3k\pi) + \frac{1}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x)\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\sin(2k\pi + k\pi) + \frac{1}{k^2\pi^2}\Big(\cos(3k\pi) - \cos(k\pi)\Big)$$

$$= \frac{2}{k\pi}\sin(2k\pi)\cos(k\pi) + \frac{2}{k\pi}\sin(k\pi)\cos(2k\pi) +$$

$$+ \frac{1}{k^2\pi^2}\cos(2k\pi + k\pi) - \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{k^2\pi^2}\Big(\cos(2k\pi)\cos(k\pi) - \sin(2k\pi)\sin(k\pi)\Big) - \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}$$

$1 \quad (-1)^k \quad (-1)^k$

$= 0 + 0 + \frac{1}{k^2\pi^2}\left(\cos(2k\pi)\cos(k\pi) - \sin(\ldots\right.$ [illegible] $- \frac{\ldots}{k^2\pi^2}$

$$= \frac{1}{k^2\pi^2}(-1)^k - \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2} = 0$$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_1^3 (x-1)\sin\left(\frac{2\pi}{2}kx\right)dx = \int_1^3 (x-1)\sin(k\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}(x-1)\cos(k\pi x)\Big|_1^3 + \frac{1}{k\pi}\int_1^3 \cos(k\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos(3k\pi) + \frac{1}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)\Big|_1^3 =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}(-1)^k + 0 = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}$$

L'identità di Parseval per f è quindi data da:

$$\frac{1}{2}\int_1^3 (x-1)^2 = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}\right)^2$$

$$\frac{1}{6}(x-1)^3\Big|_1^3 = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^2\pi^2}$$

$$\frac{1}{6}8 = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}$$

$$\frac{4}{3} - 1 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2} \quad \text{da cui} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{6}$$