TRACCIA A

1) - a) Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso

$$z = \left(-2\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right) e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2$$

$$z = 4\left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 4\left(2e^{i0}\right)^2 = 4\cdot 4 = 16$$

quindi $\operatorname{Re} z = 16$ e $\operatorname{Im} z = 0$

1) - b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

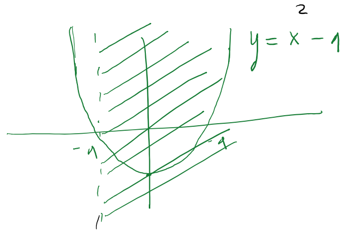
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-1}} + \operatorname{arctg}\left(\log_{\frac{1}{2}}(-1-x)\right)$$

dom f: $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ -1-x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \ \vee\ x \leq -1 \\ x < -1 \end{cases}$ $x < -1$

dom f $= (-\infty, -1)$

f è somma delle funzioni $f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$ e $f_2(x) = \operatorname{arctg}\left(\log_{\frac{1}{2}}(-1-x)\right)$

f_1 è composta delle funzioni $f_3(x) = x^2-1$ str. decrescente su $(-\infty,-1)$



$f_4(x) = \sqrt{x}$ strett. crescente e $f_5(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ strett. decrescente.

Quindi f_1 è strett. crescente.

f_2 è composta delle funzioni $f_6(x) = -x-1$ strett. decrescente

$f_7(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ strett. decrescente e $f_8(x) = \operatorname{arctg} x$ strett. crescente

$f_7(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ strett. decrescente e $f_8(x) = \arctg$ ...

quindi anche f_2 è strett. crescente.

Pertanto f è strett. crescente in quanto somma di due funzioni strett. crescenti.

f_1 e f_2 sono continue su $(-\infty, -1]$ poiché composte da funzioni continue e quindi anche $f \in C^0(-\infty, -1)$

Pertanto $\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) \, , \, \lim_{x \to -1^-} f(x) \right)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1 + \frac{\pi}{2} \quad . \quad \text{quindi } \operatorname{Im} f = \left(-\frac{\pi}{2} \, , \, 1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

2) Sia $f(x) = x^3 \left(8 - \log(x^2) \right)$

si determini dominio ed eventuali asintoti di f.

Dallo studio degli asintoti verticali si deduca che f è prolungabile per continuità in 0 e si determini il suo prolungamento continuo $\tilde{f}$ in tale punto.

Si dimostri che $\tilde{f}$ è anche derivabile in 0 e che 0 è un punto stazionario per $\tilde{f}$.

Dimostrare che 0 non è un punto di estremo locale per $\tilde{f}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Poiché $\log(x^2) = \log(|x|^2) = 2\log(|x|)$ otteniamo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(8x^3 - 2x^3 \log x \right) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(8x^3 - 2x^3 \log(-x) \right) = 0 - 0 = 0$$

Dunque f non ha asintoti verticali in 0 ma è prolungabile per continuità in tale punto. Il suo prolungamento continuo in 0

per continuità in tale punto. Il suo prolungamento continuo in 0

è la funzione $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Vediamo se f ha asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \pm\infty(8 - \infty) = \pm\infty(-\infty) = \mp\infty$$

f non ha asintoti orizzontali. Analogamente

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x^2(8 - \log(x^2)) = +\infty(8 - \infty) = +\infty(-\infty) = -\infty$$

Quindi f non ha neanche asintoti obliqui

Verifichiamo che $\tilde{f}$ è derivabile in 0. Osserviamo che $\tilde{f}$ è derivabile sia su $(-\infty, 0)$ che su $(0, +\infty)$. Poiché $\tilde{f}$ è continua in 0, possiamo studiare

$\lim_{x \to 0^\pm} \tilde{f}'(x)$; se tali limiti esistono e sono uguali $\tilde{f}$ è derivabile in 0 con derivata uguale al valore di tali limiti

Per $x \neq 0$: $$\tilde{f}'(x) = f'(x) = 3x^2(8 - \log(x^2)) - x^3 \frac{1}{x^2} 2x$$
$$= 3x^2(8 - \log(x^2)) - 2x^2$$

Come sopra, $\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = 0 - 0 = 0$ quindi

$\tilde{f}$ è derivabile in 0 con derivata nulla, cioè 0 è un punto stazionario per $\tilde{f}$

Poiché $\lim_{x \to 0} 8 - \log(x^2) = +\infty$,

$8 - \log(x^2)$ è def. positiva per $x \to 0$. Quindi il segno di

$f(x) = x^3(8 - \log(x^2))$ dipende solo da x^3 in un intorno

di 0. Dato che $x^3 > 0$ per $x > 0$

$\tilde{f}(x) > 0 = \tilde{f}(0)$ in tale intorno intersecato con $[0,+\infty)$; ma sullo stesso intorno intersecato con $(-\infty, 0)$, $x^3 < 0$ e quindi $\tilde{f}(x) < 0 = \tilde{f}(0)$. Dunque 0 non è né un minimo locale, né un massimo locale per $\tilde{f}$.

3) Calcolare la media integrale di $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$ sull'intervallo $[-1,0]$

La media integrale di f su $[-1,0]$ è in questo caso uguale a $\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+x-2}\,dx$ dato che l'intervallo di integrazione ha ampiezza 1

Integriamo $\frac{x}{x^2+x-2}$ decomponendola in fratti semplici

$\Delta = 1+8 = 9$ quindi le radici del trinomio al denominatore sono $\frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$$\frac{x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$ da cui

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} B=2A \\ 3A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1/3 \\ B=2/3 \end{cases}$$

Dunque
$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} \frac{1}{x+2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\log|x-1|\Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{3}\log|x+2|\Big|_{-1}^{0}$$
$$= \frac{1}{3}(0-\log 2) + \frac{2}{3}(\log 2 - 0) = \frac{1}{3}\log 2$$

4) Dare la definizione topologica di limite per una funzione; Enunciare e dimostrare il teorema del doppio confronto.

Per la definizione si veda, ad esempio, la lezione 13

Per la definizione si veda, ad esempio, la lezione 13
Per enunciato e dim, la lezione 14

TRACCIA B

1) -a) Scrivere in forma esponenziale il num complesso

$$z = -e^{-i\frac{\pi}{8}}\,\frac{i}{1-\sqrt{3}i}$$

Calcolare poi z^{24}

Osserviamo che $(1-\sqrt{3})i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$; quindi

$$z = e^{i\pi}\cdot e^{-i\frac{\pi}{8}}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}e^{+\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{24\pi-3\pi+12\pi+8\pi}{24}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{41}{24}\pi i}$$

Quindi $z^{24} = \dfrac{1}{2^{24}}e^{41\pi i} = -\dfrac{1}{2^{24}}$

1)-b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$\dfrac{1}{f}$ dove $f(x) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_3\left(1+x^{1/\sqrt{2}}\right)}$

dom $\dfrac{1}{f}$: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1+x^{1/\sqrt{2}} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$ quindi dom $\dfrac{1}{f} = [0,+\infty)$

Notiamo che f è l'opposto della funzione positiva

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\left(1+x^{1/\sqrt{2}}\right)}$

Notiamo che f è l'opposto della funz[illegible] pos[illegible]

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\left(1+x^{1/\sqrt{2}}\right)}$$, quindi f è negativa.

Poiché f_1 è composta da due funzioni strett. crescenti e una strett. decrescente, f_1 è strett. decrescente. Dunque la sua opposta è strettamente crescente. $\frac{1}{f}$ è quindi strett. decrescente in quanto reciproco di una funzione negativa strett. crescente negativa.

f è continua perché composta da funzioni continue e quindi anche $\frac{1}{f} \in C^0([0,+\infty))$ e quindi

$$\operatorname{Im} \frac{1}{f} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f}(x), \frac{1}{f(0)}\right]$$

Dato che $f(0) = -\left(\frac{1}{2}\right)^0 = -1$, $\frac{1}{f(0)} = -1$

e poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Quindi $\operatorname{Im} \frac{1}{f} = (-\infty, -1]$

2) Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{(x^2+1)\, e^{-x^2}}{x}$$

Stabilire poi che la funzione $x f(x)$ è strett. decrescente su $(0,+\infty)$ e strett. crescente su $(-\infty,0]$. Stabilire infine che $x f(x)$ ha un punto critico in $x=0$ e indicarne la natura.

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$$ quindi $x=0$ è asintoto verticale a

dx e a sx per f.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{0}{\pm\infty} = 0$ quindi la retta $y=0$ è asintoto

orizzontale per f sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

$$x f(x) = (1+x^2) e^{-x^2}$$

$$(x f(x))' = 2x e^{-x^2} + (1+x^2) e^{-x^2} (-2x)$$
$$= 2x e^{-x^2} (1 - 1 - x^2) = -2x^3 e^{-x^2}$$

Poiché $x^3 > 0 \iff x > 0$, $x f'(x) < 0$ per $x > 0$ e

$x f'(x) > 0$ per $x < 0$ e dunque $x f(x)$ è strett. crescente

in $(0, +\infty)$ e strett. decrescente in $(-\infty, 0)$

$(x f(x))'(0) = -2 \cdot 0 \cdot e^0 = 0$ e dunque 0 è un punto

stazionario. Essendo $x f(x)$ strett. decrescente a dx e strett.

crescente a sx di 0, 0 è un punto di massimo

assoluto per f.

3) Calcolare

$$\int_{1}^{-1} x^4 \left(\sin x + \cos\left(\frac{\pi (x^5+1)}{4}\right)\right) dx$$

$$\int_{1}^{-1} x^4 \left(\sin x + \cos\left(\frac{\pi (x^5+1)}{4}\right)\right) dx = -\int_{-1}^{1} x^4 \sin x \, dx - \int_{-1}^{1} x^4 \cos\left(\frac{\pi (x^5+1)}{4}\right) dx$$

Dato che la funzione $x^4 \sin x$ è dispari il primo integrale

è nullo. Calcoliamo il secondo

Visto che la funzione a sin[illegible]

è nullo. Calcoliamo il secondo

Posto $\frac{\pi(x^5+1)}{4} = t$ $\quad dt = \frac{5}{4}\pi x^4\,dx$ e quindi dato che per

per $x = -1$ $\quad t = 0$ e per $x = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$, otteniamo

$$-\int_{-1}^{1} x^4 \cos\left(\frac{\pi(x^5+1)}{4}\right) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{5}\pi \cos t\,dt = -\frac{4}{5}\pi \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{5}\pi$$

4) Dare la definizione di punto di massimo locale e di massimo locale forte per una funzione.
Enunciare e dimostrare poi il teorema di caratterizzazione della monotonia mediante il segno della derivata.
Dire come si applica tale teorema per ottenere una condizione sufficiente perché un punto sia di massimo locale forte

Per la definizione, enunciato e dimostrazione richiesti,
si veda, ad esempio la lezione 21. Per l'applicazione, la lezione 22.