1) a) Stabilire se la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\log(n+1)}{n^2+1}$$

b) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^n}{\pi^{n+1}}$$

a) Possiamo usare il criterio degli infinitesimi: poiché $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$

è sufficiente moltiplicare la successione $\frac{\sqrt{n}\log(n+1)}{n^2+1}$ per n^α con

$\alpha \in (1, \frac{3}{2})$. Infatti, per tali α, $\frac{n^\alpha\sqrt{n}\log(n+1)}{n^2+1} \sim \frac{\log(n+1)}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}} \to 0$

dato che $\frac{3}{2}-\alpha > 0$, quindi la serie converge.

b) $$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^n}{\pi^{n+1}} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{e}{\pi}\right)^3\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^k$$

Poiché $\frac{e}{\pi} \in (-1,1)$, la somma della serie è $\frac{e^3}{\pi^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{e}{\pi}} = \frac{e^3}{\pi^3(\pi-e)}$

2) Stabilire che la funzione

$$f(x,y) = (x-y+1)(y-x^2)^2$$

è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,f(1,1))$.

Determinare infine i punti stazionari di f e studiarne la natura

f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ in quanto è un polinomio (le sue derivate parziali sono definite su $\mathbb{R}^2$ e sono polinomi, quindi sono continue)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y-x^2)^2 + (x-y+1)\,2(y-x^2)(-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -(y-x^2)^2 + (x-y+1)\,2(y-x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0+0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0+0=0$$

L'equazione del piano tangente cercato è quindi $z = f(1,1) = 0$

Cerchiamo tutti i punti critici di f. Deve essere

$$\begin{cases} (y-x^2)^2 + (x-y+1)\,2(y-x^2)(-2x) = 0 \\ -(y-x^2)^2 + (x-y+1)\,2(y-x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y+1)(y-x^2)(1-2x) = 0 \\ -(y-x^2)^2 + (x-y+1)\,2(y-x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ -\left(y-\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}-y\right)\left(y-\frac{1}{4}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \left(y-\frac{1}{4}\right)\left(3-2y-y+\frac{1}{4}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} P_1 \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{13}{12} \end{cases} P_2$$

$$\iff \begin{cases} y - x^2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ Tutti i punti della parabola $\wp$ di equazione $y = x^2$ sono critici

$$\begin{cases} x-y+1 = 0 \\ -(y-x^2)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x - x^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

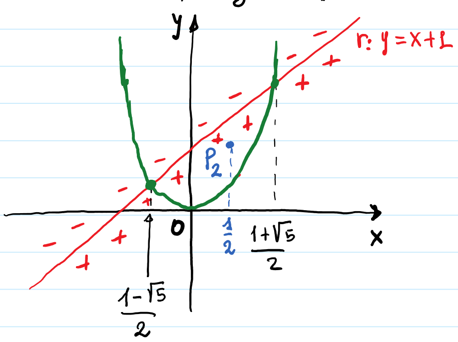
Le soluzioni di questo sistema sono comunque punti appartenenti alla parabola di equazione $y = x^2$.

Osserviamo che anche $P_1 \in \wp$. L'unico punto critico che non appartiene a $\wp$ è dunque P_2.

Per studiare la natura di un qualunque punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \wp$, basta osservare che $f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y)$ e il segno di f dipende solo dal segno del polinomio $x - y + 1$. Pertanto per $\bar{x} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\bar{x} < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $(\bar{x},\bar{y})$ è di massimo

per $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \bar{x} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $(\bar{x},\bar{y})$ è di minimo

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}\right)$ e $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}\right)$ sono di sella



Poiché P_2 è interno all'insieme compatto avente bordo da $\wp \cup r$ e f è nulla su tale bordo, risulta che P_2 è di massimo locale forte dato che

$$f(P_2) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{12} + 1\right)\left(\frac{13}{12} - \frac{1}{4}\right)^2 > 0$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' + y = x + e^x \quad (\square) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata $y'' - y' + y = 0$ è $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

che ha soluzioni $\lambda_{\frac{1}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$; quindi l'integrale generale di $y'' - y' + y = 0$

è $y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

Cerchiamo una soluzione particolare di $(\square)$ con il metodo di similarità applicato separatamente alle equazioni

$y'' - y' + y = x$ e $y'' - y' + y = e^x$

$\tilde{y}_1(x) = ax + b$

$-a + ax + b = x$ da cui

$\begin{cases} b - a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$ quindi

$\tilde{y}_1(x) = x + 1$

$\tilde{y}_2(x) = ce^x$

$ce^x - ce^x + ce^x = e^x$ da cui $c = 1$

cioè $\tilde{y}_2(x) = e^x$

Pertanto l'integrale generale di $(\square)$ è $y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + x + 1 + e^x$

$0 = y(0) = c_1 + 2$ da cui $c_1 = -2$

$y'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(-2\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + e^{\frac{x}{2}}\left(-2\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}x) + c_2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\sqrt{3}x)\right) + 1 + e^x$

$0 = y'(0) = \frac{1}{2}(-2) + c_2\frac{\sqrt{3}}{2} + 2$ da cui $c_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(-2\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + x + 1 + e^x$

4) Dare la definizione di insieme normale rispetto all'asse delle x.

Dare poi la formula di riduzione per l'integrale di una funzione

$f(x,y) = g(x)\,h(y)$ continua su un rettangolo $[a,b] \times [c,d]$

$A \subset \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse delle x se $\exists\ \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue

tali che $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a,b]$ e $\alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$

Dalla formula di riduzione su un insieme normale rispetto all'asse delle x

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)\,h(y)\,dy\right) dx = \int_a^b g(x)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right) dx$$

$$= \left(\int_c^d h(y)\,dy\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$