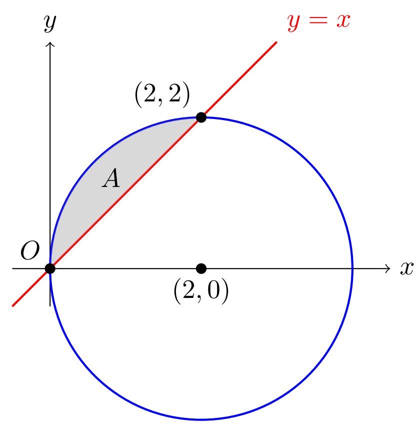
Possibile svolgimento della prova dell'11 luglio 2025 – Modulo B

1) Il dominio di integrazione A è l'intersezione di due regioni:

- $x^2 + y^2 < 4x$ equivale a $(x-2)^2 + y^2 < 4$, cioè l'interno del cerchio di centro $(2, 0)$ e raggio 2;
- $y > x$, cioè il semipiano sopra la bisettrice del I e III quadrante.



Per calcolare l'integrale, conviene usare le coordinate polari con polo in O. La condizione $x^2 + y^2 < 4x$ in coordinate polari diventa:

$$r^2 < 4r\cos\theta \Leftrightarrow r < 4\cos\theta.$$

La condizione $y > x$ diventa $r\sin\theta > r\cos\theta$, ovvero $\tan\theta > 1$, che significa $\theta \in (\pi/4, \pi/2)$.

Il dominio in coordinate polari è:

$$A = \{(r, \theta) : 0 < r < 4\cos\theta, \pi/4 < \theta < \pi/2\}.$$

L'integranda in coordinate polari:

$$xy = r\cos\theta \cdot r\sin\theta = r^2\cos\theta\sin\theta.$$

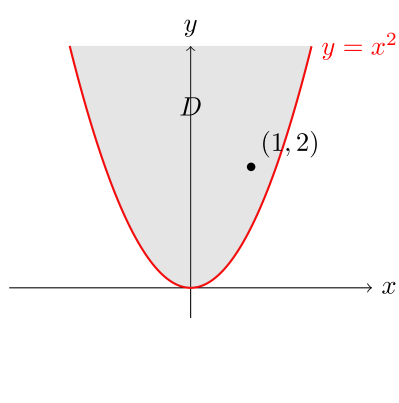
L'integrale diventa:

$$\int_A xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta} r^2\cos\theta\sin\theta \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{4\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\cdot 4^3\cos^4\theta\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

$$= -64\left[\frac{\cos^6\theta}{6}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{32}{3}\frac{1}{(\sqrt{2})^6} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}. \tag{3}$$

2) Il dominio di F è determinato dalla sola condizione $y - x^2 > 0$, ovvero $y > x^2$. Esso è quindi la regione del piano sopra la parabola $y = x^2$:



Il dominio è un insieme aperto (è la controimmagine mediante il polinomio $p(x,y) = y - x^2$ dell'intervallo aperto $(0, +\infty)$), non limitato, connesso per archi.

La funzione F è differenziabile in $(1,2)$, perché le sue componenti sono funzioni di classe C^1 (in realtà C^∞) nel dominio.

Calcoliamo la matrice Jacobiana di F. Le derivate parziali sono:

Prima componente $F_1(x,y) = \frac{x}{\sqrt{y-x^2}}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2} - x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{y-x^2}}}{y-x^2} = \frac{y}{(y-x^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{2(y-x^2)^{3/2}}.$$

Seconda componente $F_2(x,y) = \arctan(xy)$:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+(xy)^2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+(xy)^2}.$$

Terza componente $F_3(x,y) = e^{x^2-y}$:

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2-y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y) = -e^{x^2-y}.$$

Valutando in $(1,2)$:

$$J_F(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 2/5 & 1/5 \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Per calcolare $(F \circ \gamma)'(0)$, usiamo la regola della catena:

$$(F \circ \gamma)'(0) = J_F(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = J_F(1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3/2 \\ 2/5 + 3/5 \\ 2e^{-1} - 3e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

3) Le soluzioni singolari sono le funzioni costanti che annullano $g(y) = y^2 - y = y(y-1)$, ovvero $y = 0$ e $y = 1$.

Per l'integrale generale, separiamo le variabili:

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \cos x \, dx.$$

Decomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}.$$

Integrando:

$$\log|y-1| - \log|y| = \sin x + C, \text{ ovvero } \log\left|\frac{y-1}{y}\right| = \sin x + C.$$

L'integrale generale in forma implicita è:

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = e^{\sin x + C} = Ke^{\sin x}, \quad K > 0.$$

Rimuovendo il valore assoluto:

$$\frac{y-1}{y} = \pm Ke^{\sin x} = \tilde{K}e^{\sin x}, \quad \tilde{K} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Da cui possiamo ricavare $y = y(x)$:

$$y = \frac{1}{1 - \tilde{K} e^{\sin x}}$$

Per la condizione iniziale $y(\pi/2) = 2$:

$$2 = \frac{1}{1 - \tilde{K} e^{1}} \Leftrightarrow 1 - \tilde{K} e = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tilde{K} = \frac{1}{2e}.$$

La soluzione richiesta è quindi

$$y = \frac{1}{1 - \frac{1}{2e} e^{\sin x}} = \frac{2e}{2e - e^{\sin x}}.$$

4) **Criterio del confronto asintotico per integrali impropri:** Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni definitivamente positive e integrabili su ogni intervallo $[a, b]$ con $b > a$. Se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, +\infty),$$

allora gli integrali impropri $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione: Poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_0 > a$ tale che per ogni $x > x_0$:

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$$

e inoltre, a patto di scegliere un x_0 più grande, possiamo assumere che f e g sia non negative sull'intervallo $(x_0, +\infty)$. Scegliamo $\varepsilon = L/2$. Allora per $x > x_0$:

$$\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2}$$

Quindi per $x > x_0$:

$$\frac{L}{2} g(x) < f(x) < \frac{3L}{2} g(x)$$

Se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge, allora $\int_{x_0}^{+\infty} g(x)\, dx$ converge, quindi anche $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{3L}{2} g(x)\, dx = \frac{3L}{2} \int_{x_0}^{+\infty} g(x)\, dx$ converge. Per il criterio del confronto, $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, e quindi $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

Se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge, allora $\int_{x_0}^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge, quindi anche $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{L}{2} g(x)\, dx = \frac{L}{2} \int_{x_0}^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge. Per il criterio del confronto, $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge, e quindi $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge.

In entrambi i casi, i due integrali hanno lo stesso carattere. $\square$

Applicazione: Studiamo il carattere di $\int_2^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x \log x}\, dx$.

Ricordiamo che per $t \to 0$: $\sin t \sim t$. Quindi per $x \to +\infty$:

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}.$$

Pertanto

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x \log x} \sim \frac{1}{x^2 \log x}$$

e per il criterio del confronto asintotico l'integrale dato ha lo stesso carattere di:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x}\, dx.$$

Quest'ultimo è un integrale improprio che converge. Infatti, per $x > e$ abbiamo $\log x > 1$, quindi:

$$\frac{1}{x^2 \log x} < \frac{1}{x^2}$$

e $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge. Quindi l'integrale $\int_2^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x \log x}\, dx$ converge.