



Politecnico di Bari

AA 2017-2018

Corsi Unificati
Analisi Matematica
Classe C

Tracce di esame con svolgimenti

Docente: Prof. E. Caponio

- 1)** (a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$\left| \frac{i}{i-1} \right| e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

- (b) Determinare il dominio della seguente funzione; stabilire se è monotona crescente e specificare il tipo di monotonia; motivare la risposta:

$$f(x) = \sqrt{\pi - \arccos x}.$$

8 pts.

- 2)** Calcolare i limiti in 0, da destra, e in $+\infty$ per la funzione

$$f(x) = \frac{(\sin x)^2 - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}}.$$

Cosa si può dire riguardo ai suoi zeri nell'intervallo $(0, +\infty)$? Motivare la risposta.

8 pts.

- 3)** Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} dx.$$

6 pts.

- 4)** Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$: $D(\sin x) = \cos x$.

8 pts.

- 1)** (a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$\left| \frac{2-i}{i} \right| e^{-\pi i}.$$

- (b) Determinare il dominio della seguente funzione; stabilire se è monotona crescente e specificare il tipo di monotonia; motivare la risposta:

$$f(x) = \log \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right).$$

8 pts.

- 2)** Calcolare i limiti in 0, da destra, e in $+\infty$ per la funzione

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x}) + \sqrt[3]{x} - x^2}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + x^2}.$$

Cosa si può dire riguardo ai suoi zeri nell'intervallo $(0, +\infty)$? Motivare la risposta.

8 pts.

- 3)** Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

6 pts.

- 4)** Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $x > 0$: $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$.

8 pts.

- 1)** (a) Determinare in forma cartesiana

$$\sqrt[3]{-8i}.$$

- (b) Stabilire che l'insieme X seguente è limitato, ha massimo e calcolare, inoltre, l'estremo inferiore:

$$X = \left\{ \arctan \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

8 pts.

- 2)** Determinare l'immagine della seguente funzione, determinando i suoi punti di minimo e massimo locale, la sua monotonia e i suoi asintoti:

$$f(x) = x^3 e^{-x^2} - 1.$$

8 pts.

- 3)** Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

6 pts.

- 4)** Dimostrare, senza usare il Teorema di de L'Hopital, né la formula di Taylor, che per ogni $a > 0$, $a \neq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}.$$

8 pts.

- 1)** (a) Determinare in forma cartesiana

$$\sqrt[4]{-81}.$$

- (b) Stabilire che l'insieme X seguente è illimitato superiormente, limitato inferiormente ed ha minimo:

$$X = \{2^{1+n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

8 pts.

- 2)** Determinare l'immagine della seguente funzione, determinando i suoi punti di minimo e massimo locale, la sua monotonia e i suoi asintoti:

$$f(x) = x^2 e^{-|x|} + 1.$$

8 pts.

- 3)** Calcolare il seguente integrale:

$$\int x\sqrt{1+x} dx.$$

6 pts.

- 4)** Dimostrare, senza usare il Teorema di de L'Hopital, né la formula di Taylor, che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

8 pts.

N° punto tracce

1) a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

A) $\left| \frac{i}{t-i} \right| e^{i\frac{\pi}{2}}$

B) $\left| \frac{2-i}{i} \right| e^{-\pi i}$

a) Determinare in forma cartesiana

C) $\sqrt[3]{-8i}$

D) $\sqrt[4]{-81}$

Svolgiamo la traccia B); la traccia A) è analogia

$|i|=1 \quad |2-i| = \sqrt{5} \text{ quindi}$

$\left| \frac{2-i}{i} \right| = \frac{|2-i|}{|i|} = \sqrt{5}$

$e^{-\pi i} = -1 \text{ quindi}$

$\left| \frac{-i}{1+i} \right| e^{-\pi i} = -\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{|-8i|} e^{\left(\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{2\pi k\right)i} \quad k=0,1,2$
 $= \sqrt[3]{8} e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}\right)i} \quad k=0,1,2$

Quindi otteniamo le 3 radici $2e^{i\frac{\pi}{2}}, 2e^{i\frac{7}{6}\pi}, 2e^{i\frac{11}{6}\pi}$ cioèrispettivamente, $2i, 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right), 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

D) $\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{|-81|} e^{\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{2\pi k}{4}\right)i}, \quad k=0,1,2,3$
 $= 3 e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)i}, \quad k=0,1,2,3$

Ottieniamo quindi $3e^{i\frac{\pi}{4}}, 3e^{i\frac{3}{4}\pi}, 3e^{i\frac{5}{4}\pi}, 3e^{i\frac{7}{4}\pi}$ cioèrispettivamente $3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) Determinare il dominio delle seguenti funzioni.
Stabilire se sono monotone e specificare il tipo di
monotonia. Motivare la risposta

$$A) f(x) = \sqrt{\pi - \arccos x}$$

$$B) f(x) = \log\left(\frac{\pi}{2} - \arctg x\right)$$

Stabilire che l'insieme X seguente:

c) è limitato, ha massimo, calcolare l'inf.

$$X = \left\{ \arctg \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

D) è illimitato superiormente, limitato inferiormente,
ha minimo

$$X = \left\{ 2^{\sqrt{n+1}} ; n \in \mathbb{N} \right\}$$

A) Deve essere $x \in [-1, 1]$ e $\pi - \arccos x \geq 0$. Poiché

$0 \leq \arccos x \leq \pi$, quest'ultima diseguaglianza è
soddisfatta $\forall x \in [-1, 1]$. Quindi $\text{dom } f = [-1, 1]$

Poiché $y = \arccos x$ è strettamente decrescente $y = -\arccos x$ è
strettamente crescente e quindi f è strettamente crescente in
quanto composta da due funzioni strettamente crescenti

B) è analogo salvo che f è strettamente decrescente in quanto

composta da una funzione strettamente crescente $y = \log x$

e una strettamente decrescente $\frac{\pi}{2} - \arctg x$. Il suo dominio è \mathbb{R} .

c) X coincide con l'immagine della successione

$$\left(\arctg \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$

poiché $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $0 < \arctg \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$

X è limitato. (\Rightarrow successione $\left(\arctg \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$)

è strettamente decrescente in quanto composta da una successione
strettamente decrescente $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ e una funzione strett.

decrescente $y = \arctg x$. Quindi $\max\left(\arctg \frac{1}{n}\right) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$

e $\inf\left(\arctg \frac{1}{n}\right) = \lim \arctg \frac{1}{n} = 0$

D) Analogamente: $2^{\sqrt{m+1}} > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ quindi

$(2^{\sqrt{m+1}})_{m \in \mathbb{N}}$ è limitata in finiture. Quella

$(2^{\sqrt{m+1}})_{m \in \mathbb{N}}$ è strettamente crescente in quanto composta

dalla successione $(\sqrt{m+1})_{m \in \mathbb{N}}$ e dalla funzione $y = 2^x$

entrambe strettamente crescenti. Quindi $\min(2^{\sqrt{m+1}}) = 2^{\sqrt{1}} = 2$

e $\sup(2^{\sqrt{m+1}}) = \lim 2^{\sqrt{m+1}} = +\infty$

e) Calcolare i limiti in 0 destra e in $+\infty$ per la funzione

$$A) f(x) = \frac{(\sin x)^2 - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}}$$

$$B) f(x) = \frac{\arctg(\sqrt{x}) + \sqrt[3]{x} - x^2}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + x^2}$$

Cosa si può dire riguardo ai suoi zeri nell'intervallo $(0, +\infty)$?

Notare la risposta

$$A) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^2 - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \left(\frac{(\sin x)^2}{\sqrt{x}} - 1 + 2\sqrt{x} \right)}{\sqrt{2}\sqrt{x} \left(\frac{(\sin(2\sqrt{x}))^2}{\sqrt{2x}} + 1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{0 - 1 + 0}{0 + 0 + 1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sin x)^2 - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{(\sin x)^2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right)}{x \left(\frac{(\sin(2\sqrt{x}))^2}{x} + 1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$= 1 \cdot \frac{(0 - 0 + 2)}{0 + 1 + 0} = 2$$

Poiché per $x \geq 0$

$(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x} = 0$ se e solo se tutti e tre gli addendi

siano nulli, f è continua su $(0, +\infty)$. Dato che

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\sqrt{2} < 0$, esiste almeno uno zero in $(0, +\infty)$.

B) È analoga ad A: nel limite per $x \rightarrow 0^+$, è sufficiente raccogliere in evidenza $\sqrt[3]{x}$ sia al numeratore che al denominatore; in quello per $x \rightarrow +\infty$, x^2 .

C)-D) Determinare l'immagine delle seguenti funzioni
e determinarne i suoi punti di minimo e massimo locale,
la sua monotonia, i suoi asintoti

C) $f(x) = x^3 e^{-x^2} - 1$

D) $f(x) = x^2 e^{-|x|} + 1$

C) $\text{dom } f = \mathbb{R}; f \in C^0(\mathbb{R})$

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}(-2x) = x^2 e^{-x^2}(3 - 2x^2)$$

$$f'(x) > 0 \iff 3 - 2x^2 > 0 \wedge x \neq 0 \iff -\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x < \sqrt{\frac{3}{2}} \wedge x \neq 0$$

Quindi per il criterio di stretta monotonia (la derivata prima di f è non-negativa

e l'insieme dei punti su cui si annulla non contiene alcun intervallo)

f è strettamente crescente su $[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}]$ e strettamente
decrescente su $[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$ e su $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}]$

Quindi $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ è un massimo locale stretto e $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ è
un minimo. Dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)^{\frac{3}{2}}}{e^{x^2}} \underset{y=x^2}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{e^y} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1. \text{ Analogamente } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

Quindi f ha asintoti orizzontali la retta $y = -1$ sia per

$x \rightarrow +\infty$, sia per $x \rightarrow -\infty$. Poiché $f(x_1) > -1$

(dato che $x_1^3 e^{-x_1^2} > 0$) e $f(x_2) < -1$

(dato che $x_2^3 e^{-x_2^2} = -x_2 e^{-x_2^2} < 0$)

i punti $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ e $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

sono quindi di massimo e minimo (assoluto) per f

quindi $f(\mathbb{R}) = [f(-\sqrt{\frac{3}{2}}), f(\sqrt{\frac{3}{2}})]$ dato che f è continua

D) dom $f = \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Poiché f è pari possiamo

studiarla sull'intervallo $[0, +\infty)$. Su tale intervallo

$$f(x) = x^2 e^{-x} + 1, f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x e^{-x}(2-x);$$

$$\text{quindi } f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0, x < 2$$

Quindi, per il criterio di stretta monotonia (la derivata prima di f è non-negativa)

e l'insieme dei punti su cui si annulla non contiene alcun intervallo
 f è strettamente crescente su $[0, 2]$ e strettamente decrescente
su $[2, +\infty)$. Pertanto 2 è un punto di massimo assoluto per f .

Essendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} + 1 = 1$, la retta $y=1$ è asintoto
orizzontale per $x \rightarrow +\infty$. Poiché $f(x) \geq 1 \forall x \in [0, +\infty)$ e $f(0) = 1$
 0 è un punto di minimo (assoluto) per f .

Poiché f è continua e pari, abbiamo

$$f(\mathbb{R}) = f([0, +\infty)) = [1, f(2)] = [1, \frac{4}{e^2} + 1]$$

3) Calcolare il seguente integrale

A) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} dx$

B) $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3x + 2} dx$

C) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$

D) $\int x \sqrt{1+x} dx$

A) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$

quindi $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} dx = \int 1 dx - 2 \int \frac{1}{x+1} dx =$

$$= x - 2 \log|x+1| + C$$

B) $\frac{x^2+2}{x^2+3x+2} = \frac{x^2+3x+2 - 3x}{x^2+3x+2} = 1 - \frac{3x}{x^2+3x+2} =$
 $= 1 - \frac{3x}{(x+1)(x+2)}$

$$\frac{3x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A+B}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=0 \end{cases} \begin{cases} B=-2A \\ -A=3 \end{cases} \begin{cases} A=-3 \\ B=6 \end{cases}$$

Quindi $\int \frac{x^2+2}{x^2+3x+2} dx = \int 1 dx + \int \frac{3}{x+1} dx - \int \frac{6}{x+2} dx$
 $= x + 3 \log|x+1| - 6 \log|x+2|$

c) Integrando per parti:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx = -x \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} (1-x)^{-\frac{1}{2}+1} + 2 \int (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= -2x (1-x)^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} + C$$

D) Integrando per parti:

$$\int x \sqrt{1+x} dx = x \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int (1+x)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} x (1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{3}{2}+1} (1+x)^{\frac{5}{2}} + C$$

4) A) Dimostrare che $\forall x \in \mathbb{R} : D \sin x = \cos x$

B) Dimostrare che $\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x > 0 : D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$

C-D) Dimostrare senza usare il teorema di l'Hopital, né la formula di Taylor che

C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$

D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- 1)** (a) Calcolare modulo e argomento principale del numero complesso $z = (1 - \sqrt{3}i)^5$
 (b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \log_{1/2}(\sqrt{x+1} - 2).$$

8 pts.

- 2)** Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = x(\log^2 x - 2 \log x).$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = e$. Scrivere infine la formula di Taylor per f di ordine 2, centro $x_0 = e$, col resto di Peano.

8 pts.

- 3)** Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x(\log^2 x - 2 \log x + 1)}.$$

Calcolare poi la media integrale di f nell'intervallo $[4, 6]$.

6 pts.

- 4)** Enunciare e dimostrare il criterio di stretta monotonia (per un solo tipo di monotonia) su un intervallo. Fornire poi un esempio di una funzione strettamente monotona su un intervallo ma che abbia almeno un punto in cui la derivata è nulla.

8 pts.

1) - a)

Calcolare modulo e argomento principale del numero complesso $z = (1 - \sqrt{3}i)^5$

Scriviamo $1 - \sqrt{3}i$ in forma trigonometrica

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2 \quad \begin{cases} 1 = 2 \cos \theta \\ -\sqrt{3} = 2 \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

quindi usando la formula di De - Rive

$$\left(2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)^5 = 2^5 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \right)$$

per cui il modulo di z è 2^5 e un suo argomento è $-\frac{5\pi}{3}$

Per determinare l'argomento principale sommiamo $-\frac{5\pi}{3}$ un multiplo di 2π

in modo che $-\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \in [-\pi, \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché

$$-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi], \text{ l'argomento principale è } \frac{\pi}{3}$$

1)-b) Determinare l'insieme di definizione, massima e immagine delle funzioni

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1} - 2)$$

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \text{ e } \sqrt{x+1} - 2 > 0\}$$

$$\text{quindi } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 > 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3 \end{cases}$$

f è composta dalle funzioni $x \in (3, +\infty) \mapsto \sqrt{x+1} - 2 \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1} - 2)$

La funzione $\sqrt{x+1} - 2$ è strettamente crescente mentre $\log_{\frac{1}{2}} x$ è strettamente decrescente quindi f è strettamente decrescente e dunque

$$\text{im}(f) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

2) Determinare dominio ed eventuali simmetri delle funzioni

$$f(x) = x(\log^2 x - 2 \log x)$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = e$. Scrivere le formule di Taylor per f di ordine 2, centro $x_0 = e$ col resto di Peano.

f è definita in $(0, +\infty)$ ed è continua in tale intervallo. Gli eventuali singolarità sono quindi da cercare in 0 e in $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log^2 x - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0 - 0 = 0. \text{ Non c'è singolarità verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log^2 x \left(1 - \frac{2}{\log x} \right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log^2 x \left(1 - \frac{2}{\log x} \right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Non ci sono quindi singolarità orizzontali né obliqui per $x \rightarrow +\infty$

L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = e$ è

$$y = f(e) + f'(e)(x - e)$$

$$f(e) = e(1 - 2) = -e$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log^2 x - 2 \log x + x \left(2 \log x \cdot \frac{1}{x} - 2 \frac{1}{x} \right) = \\ &= \log^2 x - 2 \log x + 2 \log x - 2 = \log^2 x - 2 \end{aligned}$$

$f'(e) = -1$; quindi la retta tangente richiesta ha equazione

$$y = -e - (x - e) = -x$$

La formula di Taylor di centro e ordine 2 col resto di Peano è

$$f(x) = f(e) + f'(e)(x - e) + \frac{f''(e)}{2}(x - e)^2 + o((x - e)^2) \text{ per } x \rightarrow e$$

$$f''(x) = 2 \log x \cdot \frac{1}{x}; \quad f''(e) = \frac{2}{e} \quad \text{quindi otteniamo:}$$

$$f(x) = -e - (x - e) + \frac{1}{e}(x - e)^2 + o((x - e)^2), \text{ per } x \rightarrow e$$

3) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \frac{\log x}{\log^2 x - 2 \log x + 1}$$

Calcolare poi la media integrale di f sull'intervallo $[4, 6]$

Porto $t = \log x$ l'integrale indefinito di f si ottiene da

$$\int \frac{t}{t^2 - 2t + 1} dt = \int \frac{t}{(t-1)^2} dt = \int \frac{t-1+1}{(t-1)^2} dt = \int \frac{1}{t-1} dt + \int \frac{1}{(t-1)^2} dt \\ = \log |t-1| - \frac{1}{t-1} + C$$

$$\text{quindi } \int \frac{1}{x} \frac{\log x}{\log^2 x - 2 \log x + 1} dx = \log |\log x - 1| - \frac{1}{\log x - 1} + C$$

La media integrale richiesta è

$$\frac{1}{2} \int_4^6 \frac{1}{x} \frac{\log x}{\log^2 x - 2 \log x + 1} dx = \frac{1}{2} \left(\log |\log x - 1| \Big|_4^6 - \frac{1}{\log x - 1} \Big|_4^6 \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\log (\log 6 - 1) - \log (\log 4 - 1) - \frac{1}{\log 6 - 1} + \frac{1}{\log 4 - 1} \right)$$

4) Enunciare e dimostrare il criterio di stratta monotonia su un intervallo

Si veda, ad esempio, pagg. 147-148 del Marcellini-Shordone "Elementi di Analisi Matematica uno" Liguori Editore, 2002.

Esempi possibili sono:

- $f(x) = x^3$ (strettamente crescente, $f'(x) = 0$ per $x=0$)
- $f(x) = -x^3$ ("decrecente, ")
- $f(x) = e^{x^3}$ ("crescente, ")
- $f(x) = e^{-x^3}$ ("decrecente, ")
- ...

- 1)** (a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\pi^2}{4\pi^n};$$

- (b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + (-1)^n \log(n^2 + 1)}{2n^{5/2} - 1}.$$

8 pts.

- 2)** Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 - y} \log(x - y^2 + 2)$$

e rappresentarlo sul piano. Dire se è un insieme limitato, aperto, connesso. Stabilire inoltre che non esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$. Stabilire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto

$(1, 0, f(1, 0))$ e determinarne l'equazione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0)$ dove v è il versore associato al vettore $w = (-1, -1)$.

8 pts.

- 3)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

8 pts.

- 4)** Dare la definizione di sottoinsieme del piano misurabile e di aerea per un sottoinsieme misurabile. Dimostrare poi che il rettangoloide sotteso da una funzione continua positiva su $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è misurabile e che la sua aerea è uguale a $\int_a^b f(x) dx$.

6 pts.

1) - a)

Calcolare le somme delle serie

$$\sum_{m=3}^{+\infty} \frac{\pi^2}{4\pi^m}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{\pi^2}{4\pi^m} &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{\pi^m} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{m-3}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^k} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\pi-1} = \frac{1}{4(\pi-1)} \end{aligned}$$

1) - b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{m + (-1)^m \log(m^2+1)}{2m^{5/2} - 1}$$

$$\frac{m + (-1)^m \log(m^2+1)}{2m^{5/2} - 1} = \frac{m \left(1 + (-1)^m \frac{\log(m^2+1)}{m} \right)}{m^{5/2} \left(2 - \frac{1}{m^{5/2}} \right)} \sim 2m^{3/2}$$

Poiché $\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{2m^{3/2}} \in \mathbb{R}$ anche la serie assegnata converge

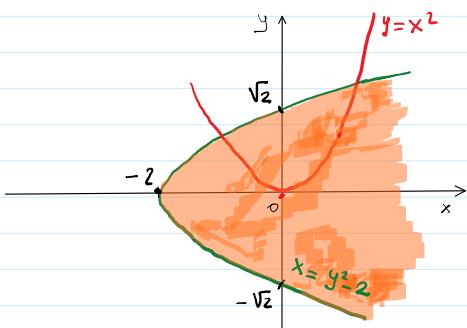
2) Determinare il dominio delle funzione

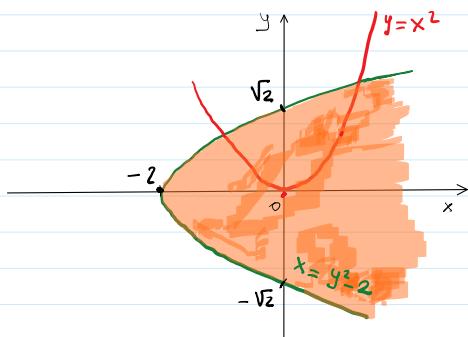
$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2-y} \log(x-y^2+2)$$

e rappresentarlo sul piano. Dire se è un insieme limitato, aperto, connesso.

Stabilire, inoltre, che non esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ Stabilire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0, f(1,0))$ e determinarne l'equazione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ dove \vec{v} è il vettore associato al vettore $w = (-1, -1)$

$$\text{dom } f : \begin{cases} x-y^2+2 > 0 \\ x^2-y \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > y^2-2 \\ y \neq x^2 \end{cases}$$





Il dominio di f è dunque dato dall'insieme colorato in figura

I punti delle parabole $y=x^2$ e $x=y^2-2$ non appartengono al suo.

È un insieme illimitato, aperto, non è connesso

$(0,0) \in D(\text{dom } f)$. Valutiamo f lungo le rette del fascio

proprio di centro $(0,0)$: $y=mx$

$$f(x, mx) = \frac{x^2 + mx}{x^2 - mx} \log(x - m^2 x^2 + 2)$$

$$= \frac{x + m}{x - m} \log(x - m^2 x + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + m}{x - m} \log(x - m^2 x + 2) = -\log 2, \quad \forall m \neq 0$$

Se $m=0$, cioè $y=0$ ottieniamo $f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} \log(x+2) = \log(x+2)$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x+2) = \log(2) \neq -\log 2$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ non esiste.

Altra possibilità è quella di valutare

f lungo la parabola di equazione $y = -x^2$

(che è una curva passante per $(0,0)$ e contenuta nel dominio per x in un intorno di 0)

$$f(x, -x^2) = \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} \log(x - x^4 + 2) = 0$$

$$\text{e quindi } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x^2) = 0$$

Poiché il limite lungo la parabola di equazione $y = -x^2$ è

diverso dal limite lungo la retta del fascio $y=mx$ il limite

di f in $(0,0)$ non esiste

f è una funzione derivabile con derivate continue su $\text{dom } f$

quindi è differenziabile in ogni punto del suo dominio

In particolare è differenziabile in $(1,0)$ e quindi esiste il

piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0, f(1,0))$

da me l'equazione è

$$z = f(1,0) + \nabla f(1,0) \cdot (x-1, y) =$$

$$f(1,0) = \log 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2-y)-(x^2+y)2x}{(x^2-y)^2} \log(x-y^2+2) + \frac{x^2+y}{x^2-y} \frac{1}{x-y^2+2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{2-2}{1} \log 3 + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y+(x^2+y)}{(x^2-y)^2} \log(x-y^2+2) + \frac{x^2+y}{x^2-y} \frac{1}{x-y^2+2} (-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{1+1}{1} \log 3 + 0 = 2 \log 3$$

Dunque l'equazione del piano tangente richiesta è

$$z = \log 3 + \left(\frac{1}{3}, 2 \log 3\right) \cdot (x-1, y) = \log 3 + \frac{1}{3}(x-1) + 2 \log 3 y$$

Il vettore associato a w è $\frac{w}{|w|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e dunque (dato che f è differenziabile in $(1,0)$)

$$\frac{\partial f}{\partial w}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{3}, 2 \log 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{2}} - \sqrt{2} \log 3$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

La soluzione è

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int_1^x \frac{1}{s} ds} \left(1 + \int_1^x -\frac{1}{s^2} e^{-\int_1^s \frac{1}{t} dt} ds \right) \\ &= e^{\log x} \left(1 + \int_1^x -\frac{1}{s^2} e^{-\log s} ds \right) \\ &= x \left(1 + \int_1^x -\frac{1}{s^3} ds \right) = x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} \Big|_1^x \right) = \\ &= x \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{x}{2} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) = \frac{x^2+1}{2x} \end{aligned}$$

4)

Dare la definizione sottoinsieme del piano misurabile e dire per un sottoinsieme misurabile. Dimostrare poi che il rettangolo de notteva che una funzione continua su $[a,b] \subset \mathbb{R}$ è misurabile e che la sua area è uguale a $\int_a^b f(x) dx$

A è misurabile se χ_A è integrabile. In tal caso

$$|\Delta| := (\text{1}_{\Delta}) \text{ (con } |\Delta| \text{ indica l'area di } A)$$

A è misurabile se $\mathbb{1}_A$ è integrabile. In tal caso

$$|A| := \int_A \mathbb{1}_A \quad (\text{con } |A| \text{ indiciamo l'area di } A)$$

Dato che f è continua, il suo grafico è un insieme misurabile del piano di misura nulla, quindi il rettangoloide R sotto il grafico di f è misurabile in quanto ∂R è misurabile (∂R è unione dei grafici di f e di tre segmenti) e $|\partial R| = 0$.

Usando le formule di riduzione otteniamo

$$|R| = \int_R \mathbb{1}_R = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} 1 dy \right) dx = \int_a^b (f(x) - 0) dx = \int_a^b f(x) dx$$

- 1)** (a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso $z = (2i - 2)^4$;
 (b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1} + 1}.$$

8 pts.

- 2)** Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2\pi$. Stabilire infine che x_0 è un punto di massimo locale stretto per f .

8 pts.

- 3)** Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2 \cos x + 1}.$$

Calcolare poi la media integrale di f nell'intervallo $[0, \pi/4]$.

6 pts.

- 4)** Enunciare e dimostrare il teorema dei carabinieri per il limite di una funzione.

8 pts.

1-a) Determinare le forme cartesiane del numero complesso

$$z = (2i - 2)^4$$

$$z = 2^4 (i - 1)^4 = 2^4 \left(\sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}} \right)^4 = 2^6 e^{3\pi i} = 2^6 (-1) = -2^6$$

1)-b) Determinare l'insieme di definizione, massima e immagine delle funzioni

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1}$$

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0\} = [1, +\infty)$$

$$f \text{ è composta da } x \in [1, +\infty) \mapsto \sqrt{x-1} + 1 \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x-1}+1}$$

$$\text{quindi è strettamente decrescente, } \text{im}(f) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)\right] = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

2) Determinare dominio ed eventuali asintoti delle funzioni

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 2\pi$. Stabilire se $x_0 = 2\pi$ è un punto di massimo per f .

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad f \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad \text{quindi gli eventuali asintoti sono}$$

che accade in 0 e in $+\infty$ e $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{\text{th. Hopital}}{\leq} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2} : \text{Non ci sono asintoti verticali in } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \left| \frac{\cos x - 1}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2} \rightarrow 0 \quad \text{quindi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$$

$$\text{analogamente } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0. \quad \text{Dunque la retta } y=0 \text{ è asintoto orizzontale}$$

rid per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{Retta tangente: } y = f(2\pi) + f'(2\pi)(x - 2\pi)$$

$$f'(2\pi) = \frac{1-1}{(2\pi)^2} = 0$$

.

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)x^2 - (\cos x - 1)2x}{x^4} = -\frac{\sin x \cdot x + 2(1 - \cos x)}{x^3}$$

$f'(2\pi) = 0$; quindi la retta tangente ha equazione $y=0$

2π è un punto di massimo (assoluto) per f in quanto $f(x) \leq 0 \forall x \neq 0$.
Allo stesso risultato si può arrivare calcolando la derivata seconda
e osservando che $f''(2\pi) < 0$:

$$f''(x) = -\frac{(\cos x \cdot x + \sin x + 2\sin x)x^3 - (\sin x \cdot x + 2(1 - \cos x))3x^2}{x^6}$$

$$f''(2\pi) = -\frac{2\pi \cdot (2\pi)^3}{(2\pi)^6} = -\frac{1}{4\pi^2} \text{ che è negativo}$$

3) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x \cdot \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1}$$

Calcolare poi lo stesso integrale di f sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{4}]$

Porto $t = \cos x$, otteniamo:

$$\begin{aligned} -\int \frac{t}{t^2 + 2t + 1} dt &= -\int \frac{t}{(t+1)^2} dt = -\int \frac{t+1-1}{(t+1)^2} dt = -\int \frac{1}{t+1} dt + \int \frac{1}{(t+1)^2} dt \\ &= -\log|t+1| - \frac{1}{t+1} + C; \text{ quindi} \end{aligned}$$

$$\int \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1} dx = -\log|\cos x + 1| - \frac{1}{\cos x + 1} + C$$

$$\begin{aligned} \text{Illoso integrale: } &\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1} dx = -\frac{4}{\pi} \left(\log|\cos x + 1| + \frac{1}{\cos x + 1} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{4}{\pi} \left(\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} - \log 2 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

4) Enunciare e dimostrare le tremaie dei carabinieri per il limite di una funzione

Siano $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{X} \cap D(f)$. Supponiamo che $\exists U \in \mathcal{D}(x_0)$

che $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ e che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
con $l \in \mathbb{R}$ allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

Dobbiamo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \exists U_1 \in \mathcal{D}(x_0)$ t.c. $\forall x \in U_1 \cap X \setminus \{x_0\}$: $l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

Sia quindi $\varepsilon > 0$. Poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, esistono
 $U_2 \in \mathcal{I}(x_0)$ e $U_3 \in \mathcal{J}(x_0)$ tali che $\forall x \in U_2 \cap X \setminus \{x_0\}$: $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
e $\forall x \in U_3 \cap X \setminus \{x_0\}$: $l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$.

Sia quindi $U_1 = U \cap U_2 \cap U_3$. Essendo intersezione di tre intorni
di x_0 , U_1 è un intorno di x_0 ; inoltre $\forall x \in U_1 \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha
 $l - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \varepsilon$, come volevamo dimostrare.

- 1)** (a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{e^3}{8e^n};$$

- (b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + (-1)^n \log n}{n^{3/2} - 1}.$$

8 pts.

- 2)** Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 - y + 1} \arcsin(y - x^2 - 1)$$

e rappresentarlo sul piano. Dire se è un insieme limitato, aperto, convesso. Stabilire inoltre che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Stabilire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto

$(0, 1/2, f(0, 1/2))$ e determinarne l'equazione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 1/2)$ dove v è il versore associato al vettore $w = (-1, -1)$.

8 pts.

- 3)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x^3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

- 4)** Dimostrare che se $f \in R(Q)$, Q rettangolo contenuto in \mathbb{R}^2 , e $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in Q$, allora $\int_Q f \geq 0$. Dimostrare inoltre che se $g \in R(Q)$ e $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in Q$, allora $\int_Q f \leq \int_Q g$.

6 pts.

1)-a) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{e^n}{8e^n}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{e^n}{8e^n} &= \left(\frac{e}{2}\right)^3 \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{e^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^3 \frac{1}{e^4} \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{e^{n-4}} = \frac{1}{8e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e^k} \\ &= \frac{1}{8e} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{e-1}\end{aligned}$$

1)-b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + (-1)^n \log n}{3n^{3/2} - 1}$$

$$\frac{n + (-1)^n \log n}{3n^{3/2} - 1} = \frac{n \left(1 + \frac{(-1)^n \log n}{n}\right)}{n^{3/2} \left(3 - \frac{1}{n^{1/2}}\right)} \sim \frac{1}{3n^{1/2}}$$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3n^{1/2}} = +\infty$ anche le serie assegnate divergono positivamente

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2-y+1} \arcsin(y-x^2-1)$$

e rappresentarlo sul piano. Dire se è un insieme

limitato, aperto, convesso.

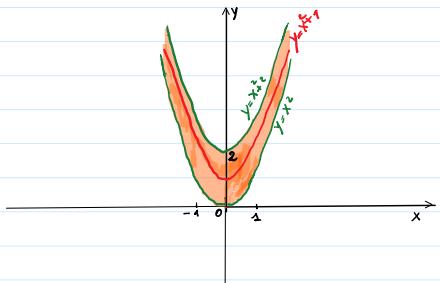
Stabilire, inoltre, che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

Stabilire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(0, \frac{1}{2}, f(0, \frac{1}{2}))$

e determinarne l'equazione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \frac{1}{2})$

dove v è il vettore associato al vettore $w = (-1, -1)$

$$\text{dom } f : \quad \begin{cases} -1 \leq y - x^2 - 1 \leq 1 \\ y - x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - x^2 \leq 2 \\ y - x^2 \geq 0 \\ y \neq x^2 + 1 \end{cases}$$



Il dominio della funzione è l'insieme

colorato in figura; i punti delle parabole

$y = x^2$ e $y = x^2 + 1$ appartengono al dominio

mentre i punti delle parabole $y = x^2 - 1$ non appartengono ad esso.

È quindi un insieme illimitato, non è aperto (in quanto i punti delle parabole $y = x^2$ e $y = x^2 + 1$ non sono interni), non è chiuso (poiché i punti delle parabole $y = x^2 - 1$ sono di frontiera ma non appartengono al dominio);

non è convesso (in quanto, ad esempio, il segmento che unisce due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) aventi stesso ordinato $y_1 > 2$ non è contenuto nel dominio).

Osserviamo che f è continua in $(0,0)$ quindi $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

f è derivabile con derivate parziali continue in $\overset{\circ}{\text{dom } f}$ quindi è differentiabile in ogni punto di $\text{dom } f$. In particolare è differenziabile in $(0, \frac{1}{2})$ e dunque esiste il piano tangente al grafico di f in $(0, \frac{1}{2}, f(0, \frac{1}{2}))$. L'equazione di tale piano è

$$z = f(0, \frac{1}{2}) + \nabla f(0, \frac{1}{2}) \cdot (x, y - \frac{1}{2})$$

$$f(0, \frac{1}{2}) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2-y+1)-(y+x^2)2x}{(x^2-y+1)^2} \arcsin(y-x^2-1) + \frac{y+x^2}{x^2-y+1} \frac{1}{\sqrt{1-(y-x^2-1)^2}} (-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y+1+(y+x^2)}{(x^2-y+1)^2} \arcsin(y-x^2-1) + \frac{y+x^2}{x^2-y+1} \frac{1}{\sqrt{1-(y-x^2-1)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \frac{1}{2}) = 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{4}} \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = 4\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Quindi l'equazione del piano è

$$z = -\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Il vettore associato a w è $\frac{w}{|w|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e dunque (dato che f è differentiabile in $(0, \frac{1}{2})$)

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0, \frac{1}{2}) = \nabla f(0, \frac{1}{2}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0, -\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x^3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{La riduzione è } y(x) = e^{\int_1^x \frac{1}{s^2} ds} \left(0 + \int_1^x -\frac{1}{s^3} e^{-\int_1^s \frac{1}{t^2} dt} ds \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \left(\int_1^x -\frac{1}{s^3} e^{\frac{1}{t^2}} \Big|_1^s ds \right)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{1}{s} \int_1^x} \left(\int_1^x -\frac{1}{s^3} e^{\frac{1}{s}} \Big|_1^s ds \right)^2 \\
&= e^{-\frac{1}{s} + 1} \left(\int_1^x -\frac{1}{s^3} e^{\frac{1}{s}-1} ds \right) \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{s} x}}{e^{\frac{1}{s} x}} \int_1^x -\frac{1}{s^3} e^{\frac{1}{s}} ds \\
&\quad \text{B) } \frac{1}{s} = t ; dt = -\frac{1}{s^2} ds \\
&= \frac{1}{e^{\frac{1}{s} x}} \int_1^x t e^t dt = \frac{1}{e^{\frac{1}{s} x}} \left(t e^t \Big|_1^x - \int_1^x e^t \right) = \\
&= \frac{1}{e^{\frac{1}{s} x}} \left(\frac{e^{\frac{1}{s} x}}{x} - e - e^{\frac{1}{s} x} + e \right) = \frac{1}{x} - 1
\end{aligned}$$

4) Dimostrare che se $f \in R(\mathbb{Q})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ rettangolo e $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$
allora $\int_{\Omega} f \geq 0$. Dimostrare inoltre che se $g \in R(\mathbb{Q})$ e
 $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$, allora $\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g$
Poiché $f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in \Omega$: $\inf_{\Omega} f \geq 0$
e quindi $\int_{\Omega} f \geq \inf_{\Omega} f \cdot |\Omega| \geq 0$
Sicché $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$, $(g-f)(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$
e quindi $0 \leq \int_{\Omega} g - f = \int_{\Omega} g - \int_{\Omega} f$

- 1) (a) Calcolare, in forma cartesiana, le radici terze di $27i$.
(b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \log_{1/3}(x^3 + 1) + e^{-x+1}.$$

8 pts.

- 2) Calcolare il dominio e gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \left(\frac{2+x^2}{x^2 - 4} \right)^x.$$

Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 4$. Cosa si può dire sulla monotonia di f in un intorno di x_0 ?

8 pts.

- 3) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = x \arctan(x^2).$$

6 pts.

- 4) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per le funzioni reali di variabile reale.

8 pts.

1) b) Calcolare $\sqrt[3]{27i}$ in forme cartesiane

$$|27i| = 27 \quad \operatorname{Arg}(27i) = \frac{\pi}{2} \text{ quindi}$$

$$\sqrt[3]{27i} = 3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right), k=0,1,2$$

$$= \begin{cases} 3 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i & (\text{per } k=0) \\ -3 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i & (\text{per } k=1) \\ -3i & (\text{per } k=2) \end{cases}$$

b) dom f : $x^3 + 1 > 0 \iff x > -1$

f è somma delle funzioni

$$g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^3 + 1) \text{ che è strettamente decrescente in}$$

quanto composto da $g_1(x) = x^3 + 1$
strettamente crescente e $g_2(x) = \log_{\frac{1}{3}}x$
strettamente decrescente

$$e \quad h(x) = e^{-x+1} = e \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^x \text{ che è strettamente decrescente}$$

Quindi anche f è strettamente decrescente

$$\operatorname{Im} f := f((-1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

2) dom f: $\frac{2+x^2}{x^2-4} > 0 \iff x^2-4 > 0 \iff x > 2 \vee x < -2$

$f \in C^\circ ((-\infty, -2) \cup (2, +\infty))$ quindi gli unici

assintoti verticali sono alle ascisse in 2 olo dx e in -2 olo sx

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2+2}{x^2-4} \right)^x = (+\infty)^2 = +\infty \text{ dunque l'assintoto}$$

$x=2$ è assintoto verticale a dx

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{x^2+2}{x^2-4} \right)^x = (+\infty)^{-2} = 0 \quad x = -2 \text{ non è assintoto}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} -\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)^x = (+\infty)^{-2} = 0 \quad x = -2 \text{ non è assunto}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \left(\frac{x^2+2}{x^2-4} \right)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{x^2+2}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\log \left(1 + \frac{6}{x^2-4} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2-4} \frac{\log \left(1 + \frac{6}{x^2-4} \right)}{\frac{6}{x^2-4}} = 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Dunque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1$ e dunque la retta $y=1$ è

asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$. In modo analogo si vede che la stessa retta è asintoto orizzontale anche per $x \rightarrow -\infty$.

f è derivabile sul suo dominio, quindi in $x_0=4$ il grafico di f permette retta tangente

$$f'(x) = e^{x \log \left(\frac{x^2+2}{x^2-4} \right)} \left(\log \frac{x^2+2}{x^2-4} + x \frac{x^2-4}{x^2+2} \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+2)}{(x^2-4)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{x^2+2}{x^2-4} \right)^x \left(\log \frac{x^2+2}{x^2-4} - \frac{12x^2}{(x^2+2)(x^2-4)} \right)$$

$$f'(4) = \left(\frac{3}{2} \right)^4 \left(\log \frac{3}{2} - \frac{12 \cdot 16}{18 \cdot 12} \right) = \left(\frac{3}{2} \right)^4 \left(\log \frac{3}{2} - \frac{8}{9} \right) < 0$$

L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0=4$ è

$$y = f(4) + f'(4)(x-4) = \left(\frac{3}{2} \right)^4 + \left(\frac{3}{2} \right)^4 \left(\log \frac{3}{2} - \frac{8}{9} \right) (x-4)$$

Perché $f'(4) < 0$ e f' è continua dal teorema delle permanenze del segno delle funzioni continue si ha che $f'(x) < 0$ in un intorno di $x_0=4$ e quindi f è strettamente decrescente in tale intorno.

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \int x \operatorname{arctg} x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} t \, dt = \frac{1}{2} t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \int \frac{t}{1+t^2} \, dt \\
 & = \frac{1}{2} t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{4} \log(1+t^2) + C = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4} \log(1+x^4) + C
 \end{aligned}$$

4) Si veda ad esempio, p. 106 e pagg. 112 - 113 del manuale
 Marcello, Sbarolone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori Ed.

- 1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

dove A è il sottoinsieme del I quadrante del piano compreso tra la retta di equazione $y = 1/2$, l'asse delle y e la circonferenza di centro 0 e raggio 2.

8 pts.

- 2) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = (x + y)(x^2 - y + 1)^2$$

e studiarne la natura

8 pts.

- 3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = e^{-2x} + x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

8 pts.

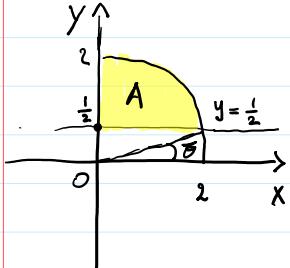
- 4) Dare la definizione di serie numerica. Dare poi la definizione di serie numerica regolare. Dimostrare che una serie numerica a termini non negativi è regolare.

6 pts.

1) Calcolare $\int_A \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} dx dy$

dove A è il sottoinsieme del I quadrante compreso tra la retta di equazione $y = \frac{1}{2}$, l'asse delle y e la circonferenza di centro O e raggio 2

A è l'insieme rappresentato in figura



In coordinate polari (ρ, θ) esso è definito da
 $\bar{\theta} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ dove $\bar{\theta} \in (0, \frac{\pi}{2})$ è l'angolo tale
che $2 \sin \bar{\theta} = \frac{1}{2}$ quindi $\bar{\theta} = \arcsin \frac{1}{4}$

$\rho \leq 2$ e inoltre, poiché la retta $y = \frac{1}{2}$ ha
equazione in coordinate polari $\rho \sin \theta = \frac{1}{2}$,

$$\rho \geq \frac{1}{2 \sin \theta}$$

Quindi in coordinate polari, l'insieme di
integrazione è un insieme normale rispetto all'asse delle θ
Usando quindi le formule di riduzione
otteniamo

$$\begin{aligned} \int_A \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} dx dy &= \int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2 \sin \theta}}^2 \frac{\rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^4} \rho d\rho \right) d\theta = \\ &= \int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \int_{\frac{1}{2 \sin \theta}}^2 d\rho = \int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \left(2 - \frac{1}{2 \sin \theta} \right) d\theta \\ &= 2 \int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali qui sopra

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta =$$

$$= -2 \cos \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \cos^3 \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= +2 \cos(\arcsin \frac{1}{4}) - \frac{2}{3} \cos^3(\arcsin \frac{1}{4})$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{8} \cos(\arcsin \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d\theta$$

Per cui: $-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{1}{8} \cos(\arcsin \frac{1}{4})$

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4}$$

$$\text{e } -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{1}{16} \cos(\arcsin \frac{1}{4}) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{4}$$

2) Determinare i punti stazionari delle funzione

$$f(x,y) = (x+y)(x^2-y+1)^2 \text{ e studiarne le nature}$$

f è un polinomio quindi chi classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2-y+1)^2 + 2(x+y)(x^2-y+1)2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2-y+1)^2 - 2(x+y)(x^2-y+1)$$

$$\left\{ (x^2-y+1)^2 + 2(x+y)(x^2-y+1)2x = 0 \right.$$

$$\left. (x^2-y+1)^2 - 2(x+y)(x^2-y+1) = 0 \right.$$

Sottraendo membro a membro ottengono il sistema equivalente

$$\left\{ 2(x+y)(x^2-y+1)(2x+1) = 0 \right.$$

$$\left. (x^2-y+1)(x^2-y+1 - 2x - 2y) = 0 \right.$$

Le soluzioni di questo sistema sono l'unione delle soluzioni dei seguenti 3 sistemi:

1. $\begin{cases} x^2-y+1 = 0 \\ 2x+1 = 0 \end{cases}$ quindi le parabole \odot di equazione $y = x^2+1$ è una curva di punti critici

1. $\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ quindi la parabola y di equazione $y = x^2 + 1$ è una curva di punti critici

$$2. \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - y + 1 - 2(x+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzioni date da la seconda equazione
non ha soluzioni reali

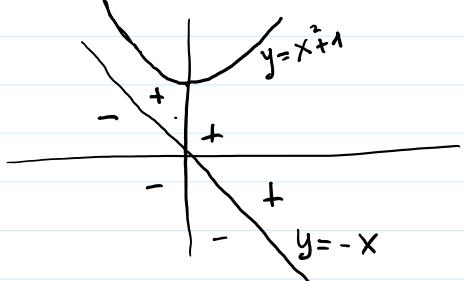
$$3. \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - y + 1 + 1 - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ 3y = \frac{9}{4} \end{cases} \quad P_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$$

Studiamo la natura dei punti critici $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{P}$

$$f(x,y) - f(\bar{x}, \bar{y}) = f(x,y)$$

Poiché il segno di f è uguale al segno della funzione $g(x,y) = x+y$ abbiamo che tutti i punti $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{P}$ sono di minimo locale non forte dato che $x+y > 0$ in un intorno di (\bar{x}, \bar{y})

Come ben si vede dalla figura qui sotto



Studiamo ora la natura di P_1

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2(x^2 - y + 1)2x + 2(x^2 - y + 1)2x + \\ &\quad + f(x+y)x^2 + 4f(x+y)(x^2 - y + 1) \end{aligned}$$

$$f_{yy}(x,y) = -2(x^2 - y + 1) - 2(x^2 - y + 1) + 2(x+y)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4x(x^2 - y + 1) - 2(x^2 - y + 1) - 4x(x+y)$$

$$\begin{aligned} f_{xx}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) &= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1\right)(-1) + 2 \cdot \frac{1}{2}(-1) + \\ &\quad + 8\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \\ &= -1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

$$f_{yy} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) = -2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$f_{xy} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) = f_{yx} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) = -2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\left| H_f \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \right| = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} \right)^2 < 0 \quad \text{quindi } P_1 \text{ è di sella}$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = e^{-2x} + x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \quad (\star)$$

d'equazione caratteristica oddomogenea associata è

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ che ha soluzioni 1 e -2

quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Una soluzione particolare di (*) si ottiene sommando alle di-

$$y'' + y' - 2y = e^{-2x} \quad \text{und die} \quad | \quad y'' + y' - 2y = x$$

Usando il metodo di minorità per entrambi ottieniamo

$$\bar{y}_1(x) = x^k e^{-2x}$$

$$\bar{y}_1(x) = k e^{-2x} - 2kx e^{-2x}$$

$$\bar{y}''(x) = -4k e^{-2x} + 4kx e^{-2x} \text{ quindi}$$

$$-3k e^{-2x} = e^{-2x} \text{ obs au } k = -\frac{1}{3}$$

$$\bar{y}_2(x) = \alpha x + b$$

$$\bar{y}_2'(x) = a$$

$$\bar{Y}_2^{(1)}(x) = 0 \quad \text{quindi}$$

$$0 + a - 2x - 2b = x$$

the cui

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ quindi}$$

$$\bar{y}_2(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Tuttavia l'integrale generale di (*) è

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} x e^{-2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{4}$$

$$y'(x) = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{2}{3} x e^{-2x} - \frac{1}{2}$$

$$y'(0) = C_1 - 2C_2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

Dove ovunque essere

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{4} = 1 \\ C_1 - 2C_2 - \frac{5}{6} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{5}{4} \\ C_1 - 2C_2 = -\frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} 3C_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \\ C_1 + C_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{7}{9} \\ C_2 = \frac{5}{4} - \frac{7}{9} = \frac{17}{45} \end{cases}$$

- 4) Per le definizioni si veda, ad esempio, pag. 259 del manuale
Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori Ed.
Per il teorema si veda pag 264 dello stesso.

- 1) (a) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 e^{-2-i\frac{\pi}{4}}$.
 (b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \arccos(x-1) - x^3.$$

8 pts.

- 2) Determinare dominio e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{(-x)^{\sqrt{2}} + \sin x}{\sqrt{|x|} - 1}.$$

Stabilire poi che f è strettamente decrescente in un intorno di $-\infty$

8 pts.

- 3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

6 pts.

- 4) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass per le funzioni continue.

8 pts.

1)-a) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 \cdot e^{-2-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-1-2i}{2} = -i$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1; e^{-2-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{e^2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{e^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{Quindi } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 e^{-2-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{e^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{1}{e^2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1)-b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \arcsin(x-1) - x^3$$

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x-1 \leq 1\} = [0, 2]$$

La funzione $g(x) = \arcsin(x-1)$ è strettamente decrescente in quanto composta da una funzione strettamente decrescente ($y = \arcsin x$) e una strett. crescente ($y = x-1$); la funzione $h(x) = -x^3$ è anche essa strett. decrescente. Dunque f è strett. decrescente in quanto somma di due funzioni strett. decrescenti. Essendo poi f anche continua $\text{im } f = [f(2), f(0)] = [-8, \pi]$

2) Determinare dominio e sintesi della funzione

$$f(x) = \frac{(-x)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sin x}{\sqrt{|x|} - 1};$$

Sbbilize poi che f è strettamente decrescente in un intorno di $-\infty$

f è definita per $-x \geq 0$ e se $\sqrt{|x|} - 1 \neq 0$ quindi per $x \leq 0$ e $|x| = 1$ cioè $x \neq \pm 1$. Dunque

$$\text{dom } f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0]$$

f è continuo sul suo dominio, dunque l'unico punto in cui sono alle carese eventuali sintesi verticali è $x_0 = -1$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ mi parso nella forma $\frac{b}{0}$. Poiché il denominatore

$$b = 1 - \sin 1$$

Tende a 0 assumendo valori negativi e $b > 0$ il risultato è $-\infty$
 quindi $x = -1$ è punto verticale a dx per f .

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ mi prende nella forma $\frac{b}{0}$, con denominatore questo

volte che assume valori positivi quindi il risultato del limite è $+\infty$
 e $x = -1$ è anche punto verticale a sx per f .

Cerchiamo l'eventuale asintoto per $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^{\sqrt{2}} + \sin x}{\sqrt{|x|} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^{\sqrt{2}}}{\sqrt{|x|}} \cdot \frac{1 + \frac{\sin x}{(-x)^{\sqrt{2}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{|x|}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^{\sqrt{2}}}{(-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{(-x)^{\sqrt{2}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{|x|}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} \cdot 1 = +\infty \quad \text{Non c'è asintoto orizz. per } x \rightarrow -\infty$$

$$\text{Analogamente } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -(-x)^{\sqrt{2} - \frac{3}{2}} \cdot 1 = 0$$

dato che $\sqrt{2} - \frac{3}{2} < 0$

Poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ non c'è neanche asintoto

obliqua per $x \rightarrow -\infty$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{2}(-x)^{\sqrt{2}-1} \cdot (-1) + \cos x)(\sqrt{|x|} - 1) - ((-x)^{\sqrt{2}} + \sin x) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}}}{(\sqrt{|x|} - 1)^2}$$

$= -1$ per $x < 0$

Poiché il denominatore è non-negativo il segno di f dipende
 solo dal segno del numeratore che per $x \rightarrow -\infty$ è
 asintotico a

$$-\sqrt{2}(-x)^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-x)^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} = \left(-\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)(-x)^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} \rightarrow -\infty, \text{ per } x \rightarrow -\infty$$

Quindi il numeratore è definitivamente negativo per $x \rightarrow -\infty$
 e dunque $f'(x) < 0$ definitivamente e dunque f è strettamente
 decrescente definitivamente per $x \rightarrow -\infty$

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{1+x}} dx$$

Integrali per parti

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{1+x}} dx = (2-x) 2 \sqrt{1+x} + 2 \int \sqrt{1+x} dx \\ = (2-x) 2 \sqrt{1+x} + \frac{4}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} + C$$

4) Enunciare e dimostrare le teoreme di Weierstrass

Si vedano pagg. 114-115 del manuale Marcellini-Sbordone "Elementi di analisi matematica uno", Liguori Editore 2002

- 1)** Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \log(xy + 1) dx dy$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 1, \frac{1}{2}x \leq y \leq x\}$.

8 pts.

- 2)** Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = (xy)^4(x - y + 1)$$

e studiarne la natura

8 pts.

- 3)** Determinare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y \log y) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

8 pts.

- 4)** Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat per una funzione di due variabili reali.

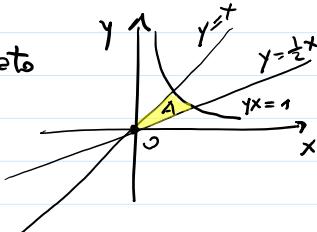
6 pts.

1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \log(xy+1) dx dy$$

$$\text{dove } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 1 \wedge \frac{1}{2}x \leq y \leq x\}$$

A è l'insieme rappresentato
in figura in giallo



Facciamo un cambio di variabile ponendo

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \quad \text{quindi } 0 \leq u \leq 1 \quad e \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 1$$

cioè nel piano (u,v) l'insieme A è mappato dalla trasformazione
qui sopra nell'insieme $B = [0,1] \times [\frac{1}{2}, 1]$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2 \frac{y}{x} = 2v. \quad \text{Quindi}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right|^{-1} = \frac{1}{2v}$$

$$\text{Pertanto } \int_A \log(xy+1) dx dy = \int_B \log(u+1) \frac{1}{2v} du dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \log(u+1) du \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{v} dv =$$

$$= \frac{1}{2} \log v \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \cdot \left(u \log(u+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{u+1} du \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - 1 + \log(u+1) \Big|_0^1 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \cdot (\log 2 - 1 + \log 2) =$$

$$= +\frac{1}{2} \log 2 \cdot (2 \log 2 - 1)$$

2) Determinare i punti critici delle funzione

$$f(x,y) = (xy)^4(x-y+1) \quad \text{e studiare la natura}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(xy)^3y(x-y+1) + (xy)^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(xy)^3x(x-y+1) - (xy)^4$$

$$\begin{cases} 4(xy)^3y(x-y+1) + (xy)^4 = 0 \\ 4(xy)^3x(x-y+1) - (xy)^4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(xy)^3(x-y+1)(x+y) = 0 \\ 4(xy)^3y(x-y+1) + (xy)^4 = 0 \end{cases}$$

sommando numero a numero
e riscrivendo la 1^a equazione otteniamo:

equivalente a

$$\begin{cases} xy = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} (x-y+1) = 0 \\ (xy)^4 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x+y = 0 \\ 4x^7(2x+1) + x^8 = 0 \end{cases}$$

tutti i punti dell'asse
delle x e quelli dell'asse
delle y sono critici

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases} \quad \quad \begin{cases} x^7(8x+4+x) = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$P_1 = (0,1) \quad \text{e} \quad P_2 = (-1,0)$$

sono punti critici

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{9} \\ y = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$(0,0) \quad \text{e} \quad P_3 = \left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

Iniziamo ad analizzare la natura dei punti trovati.

Cominciamo con i punti sugli assi cartesiani. Poiché su ogni di essi f si annulla, la loro natura dipende dal segno di f in un intorno del punto fisso. Poiché il segno di f dipende

dallo segno di $g(xy) = x-y+1$

abbiamo per i punti sull'asse
delle x , $(x,0)$, e per quelli nell'asse delle
 y , $(0,y)$:

se $\bar{x} > -1 \rightarrow$ minimo locale non forte

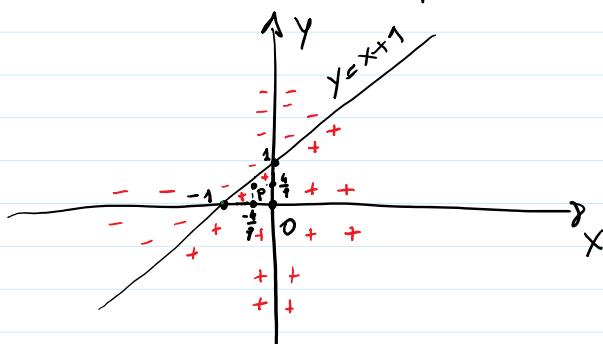
" $\bar{x} < -1 \rightarrow$ massimo " "

$(-1,0)$ è di sella

" $\bar{y} > 1 \rightarrow$ minimo " "

" $\bar{y} < 1 \rightarrow$ massimo " "

$(0,1)$ è di sella



Infine studiamo la natura del punto $P = \left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$

$$f_{xx}(x,y) = 12(xy)^2y^2(x-y+1) + 4(xy)^3y + 4(xy)^3y =$$

$$= 12(xy)^2y^2(x-y+1) + 8(xy)^3y$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 12(xy)^3(x-y+1) + 4(xy)^3(x-y+1) - 4(xy)^3y + 4(xy)^3x \\ = 16(xy)^3(x-y+1) + 4(xy)^3(x-y)$$

$$f_{yy}(x,y) = 12(xy)^2x^2(x-y+1) - 4(xy)^3x - 4(xy)^3x = \\ = 12(xy)^2x^2(x-y+1) - 8(xy)^3x$$

$$f_{xx}(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}) = 12\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{4}{9}\right)^7 = \left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{4}{3} - \frac{32}{9}\right) = -\frac{20}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^6 = -5\left(\frac{4}{9}\right)^7$$

$$f_{xy}(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}) = -16\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(-\frac{1}{9}\right) + 4\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{8}{9}\right) = \\ = \left(\frac{4}{9}\right)^6\left(-\frac{16}{9} + \frac{32}{9}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)^6\frac{16}{9} = 4\left(\frac{4}{9}\right)^7$$

$$f_{yy}(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}) = 12\left(\frac{4}{9}\right)^6\left(\frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{4}{9}\right)^7 = -5\left(\frac{4}{9}\right)^7$$

$$H_f(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}) = \begin{pmatrix} -5\left(\frac{4}{9}\right)^7 & 4\left(\frac{4}{9}\right)^7 \\ 4\left(\frac{4}{9}\right)^7 & -5\left(\frac{4}{9}\right)^7 \end{pmatrix}$$

$$\left| H_f(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}) \right| = 25\left(\frac{4}{9}\right)^{14} - 16\left(\frac{4}{9}\right)^{14} > 0 \quad \text{quindi } P(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}) \text{ è di massimo locale forte}$$

Allo stesso risultato si può giungere osservando che f è nulla sul bordo del triangolo di vertici $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ ed è positiva al suo interno. P è interno a tale triangolo e quindi per il teorema di Weierstrass P deve necessariamente essere il punto di minimo della restrizione di f a tale triangolo.

3) Determinare in forme esplicite la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y \log y) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$y' = (y \log y) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ è un'equazione a variabili separabili

Essa ammette un'unica soluzione singolare data da $y(x) = 1$, $\forall x \in (-1,1)$. Dato che in 0 , la soluzione è uguale a 2 , possiamo escludere che $y(x) = 1$ ha la soluzione cercata a forniremo di dividere subito i membri dell'equazione per $y \log y$ (osserviamo anche che la soluzione sarà > 1) ottenendo

$$\frac{y'}{y \log y} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{quindi} \quad \int \frac{dy}{y \log y} = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{cioè} \quad \log(\log y) = \int x dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$y \approx 1$ $x \approx -x$

$$\text{cioè } \log(\log y) = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Poiché $y(0) = 2$ otteniamo $\log(\log 2) = -1 + C$ da cui

$$C = 1 + \log(\log 2)$$

$$\text{Quindi } \log y = e^{-\sqrt{1-x^2} + 1} \cdot \log(\log 2) = e^{-\sqrt{1-x^2} + 1} \cdot \log 2$$

$$\text{cioè } y(x) = e^{\log 2 \cdot e^{-\sqrt{1-x^2}}} = (e^{\log 2})^{e^{-\sqrt{1-x^2}}} = 2^{e^{-\sqrt{1-x^2}}}$$

- 4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat per una funzione di due variabili reali

Si veola, ad esempio, pag. 73-74 del manuale Fusco, Marcellini, Sbordone
"Elementi di Analisi Matematica due", Liguori Editore

- 1) (a) Determinare la rappresentazione cartesiana del numero complesso $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})\right)^4$.
 (b) Stabilire che il seguente insieme A è illimitato superiormente e limitato inferiormente:

$$A = \{(n-1)^{\frac{1}{3}} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\arctan k : k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}.$$

8 pts.

- 2) Determinare dominio e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x \log(1-x^2)}{2x-1}.$$

Dire, motivando la risposta, se f è derivabile in $x = 0$ e in caso affermativo determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$

8 pts.

- 3) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

6 pts.

- 4) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue.

8 pts.

1) a) Determinare le forme cartesiane del numero complesso

$$\bar{z} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \right)^4$$

$$\bar{z} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)^4$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^4 = e^{i\pi} = -1$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)^4 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

quindi $\bar{z} = -i$

1) b) Stabilire che il seguente insieme A è illimitato superiormente e limitato inferiormente

$$A = \left\{ (n-1)^{\frac{1}{3}} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \operatorname{arctg} k : k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \right\}$$

Osserviamo che l'insieme $B = \left\{ (n-1)^{\frac{1}{3}} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme dei valori assunti dalla successione $\left\{ (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Poiché $\lim_n (n-1)^{\frac{1}{3}} = +\infty$ B è illimitato superiormente

Inoltre tale successione è strettamente crescente e quindi B ha minimo

uguale al valore assunto per $n=0$ della successione cioè -1

Analogamente $C = \left\{ \operatorname{arctg} k : k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \right\}$ coincide con l'insieme dei valori assunti dalla successione $\left\{ \operatorname{arctg}(-n) \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$

Poiché $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(-n) \leq \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

concludiamo che C è un insieme limitato

Dunque $A = B \cup C$ è illimitato superiormente (in quanto B lo è)

e limitato inferiore dato da $\forall a \in A \quad a > -\frac{\pi}{2}$ visto che

$a \geq -1 > -\frac{\pi}{2}$ se $a \in B$ e $a > -\frac{\pi}{2}$ se $a \in C$

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \frac{x \log(1-x^2)}{2x-1}$

Determinare inoltre i suoi eventuali asintoti

$$f(x) = \frac{1-x^2}{2x-1}$$

Determinare insieme i suoi eventuali asymptote.

Dire, motivando la risposta se f è derivabile in 0 e in cosa positivo ottenere l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto $(0, f(0))$.

$$\text{dom } f : \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{quindi dom } f = (-1, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$$

Osserviamo che f è continua sul suo dominio in quanto rapporto di funzioni continue. Gli eventuali asymptote sono quindi da cercare nei punti $x = -1, 1, \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1 \cdot (-\infty)}{-3} = -\infty ; \quad x = -1 \text{ è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1 \cdot (-\infty)}{1} = -\infty ; \quad x = 1 \quad " \quad "$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) : si \text{ presenta nella forma } \frac{\frac{1}{2} \log(\frac{3}{4})}{0}$$

per $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$ il denominatore tende a 0 assumendo valori negativi,
poiché $\frac{1}{2} \log(\frac{3}{4}) < 0$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ $x = \frac{1}{2}$ è asintoto verticale a dx

$$\text{Analogamente } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty \quad " \quad " \quad " \quad " \quad dx$$

f è derivabile in 0 in quanto quoziente di funzioni derivabili su dom f

$$f'(x) = \frac{(\log(1-x^2) + \frac{x}{1-x^2}(-2x))(2x-1) - x \log(1-x^2) \cdot 2}{(2x-1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(0+0)(-1)}{1} = 0$$

d'equazione della retta tangente al grafico di f in $(0, f(0)) = (0, 0)$
è dunque $y = 0$

$$3) \text{ Calcolare } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ora quindi $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx & \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \cos t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt \\ & = \frac{\sqrt{3}}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos^2 t) dt = \\ & = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$$

Ora quindi l'integrale cercato è uguale a $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

4) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue

Si vede, ad esempio, pag. 108 del manuale Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", luglio 2002

- 1) Stabilire che il seguente integrale converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx.$$

6 pts.

- 2) Sia

$$f(x, y) = \frac{xe^{-x^2+y^2}}{\sqrt{y-x^2-1}}.$$

Determinare e rappresentare graficamente sul piano il dominio di f . Dire se esso è un insieme aperto, chiuso, compatto, limitato. Stabilire se esiste il piano tangente al grafico di f in tutti i suoi punti. In caso affermativo calcolare l'equazione del piano tangente nel punto $(0, 2, f(0, 2))$. Determinare anche $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 2)$, $\text{conv} = (\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3})$

10 pts.

- 3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = xe^{-x} + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

- 4) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per la convergenza di una serie numerica.

6 pts.

1) Studiare la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$$

Osserviamo che la funzione integranda $f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2}$ è continua su $(0, +\infty)$

Sia quindi $c \in (0, +\infty)$ e vogliamo stabilire che entrambi gli integrali

$$\text{improper } \int_0^c \frac{\sin^3 x}{x^2} dx \text{ e } \int_c^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx \text{ convergono}$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0 \cdot 1 = 0$, f ha in 0 una

discontinuità eliminabile e quindi $\int_0^c \frac{\sin^3 x}{x^2} dx \in \mathbb{R}$

Poiché $\left| \frac{\sin^3 x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ e la funzione $\frac{1}{x^2}$ è integreibile su

$[c, +\infty)$, f è assolutamente integrabile e quindi integrabile anche su $[c, +\infty)$.

2) Sia $f(x,y) = \frac{x e^{-x^2+y^2}}{\sqrt{y-x^2-1}}$

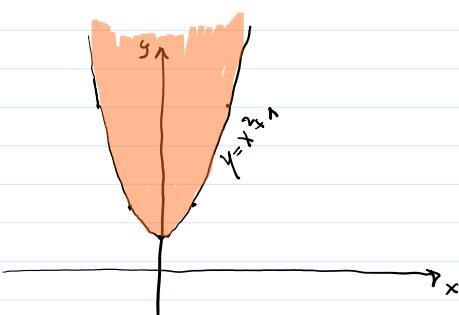
Determinare e rappresentare sul piano il dominio di f .

Dire se esso è un insieme aperto, chiuso, compatto, limitato

Stabilire se esiste il piano tangente al grafico di f in tutti i punti del suo dominio. In caso affermativo calcolare l'equazione del piano tangente nel punto $(0, 2, f(0, 2))$

Determinare anche $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 2)$ dove σ è il versore di coordinate $(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3})$

dom f : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 - 1 > 0\}$



Il dominio di f è quindi la regione di piano in cui sono i punti della parabola di equazione $y = x^2 + 1$ non appartenenti al dominio.

Esso è un insieme aperto, illimitato (ma non è nemmeno chiuso, né compatto)

Poiché f è il quoziente delle funzioni $x e^{-x^2+y^2}$ e $\sqrt{y-x^2-1}$

(la prima è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, la seconda $C^\infty(\text{dom } f)$)

Che sono entrambe derivabili con derivate parziali continue in ogni

Che sono entrambe derivabili con derivate parziali continue in ogni punto del dominio di f , per il teorema del differenziabile, f è differenziabile nel suo dominio. Esiste quindi il piano tangente al grafico di f in tutti i punti del dominio.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(e^{-x^2+y^2} - 2x^2 e^{-x^2+y^2}) \sqrt{y-x^2-1} + x e^{-x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y-x^2-1}} \cdot x}{y-x^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy e^{-x^2+y^2} \sqrt{y-x^2-1} - x e^{-x^2+y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-x^2-1}}}{y-x^2-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,2) &= e^4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) &= 0 \end{aligned} ; \quad f(0,2) = 0$$

Il piano tangente nel punto $(0,2,0)$ ha quindi equazione

$$z = 0 + e^4 x + 0(y-2) = e^4 x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = \nabla f(0,2) \cdot \vec{v} = \frac{1}{3} e^4.$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = xe^{-x} + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

d'equazione omogenea associata a $y'' - y' = 0$ ha insieme

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Uso il metodo di similitudine per determinare

una soluzione particolare. Poiché il termine noto della equazione cioè $f(x) = xe^{-x} + 1$ è somma della funzione xe^{-x} e della funzione costante di valore 1, applichiamo separatamente alle equazioni:

$$y'' + y' = xe^{-x}$$

-1 è soluzione dell'omogenea associata quindi cerchiamo \tilde{y}_1 del tipo

$$\tilde{y}_1(x) = x(k_1 + k_2 x)e^{-x}$$

$$\tilde{y}_1'(x) = (k_1 + k_2 x)e^{-x} + xk_2 e^{-x} - (k_1 + k_2 x)e^{-x}$$

$$y'' + y' = 1 \cdot (\textcolor{brown}{e}^x)$$

0 è soluzione dell'omogenea associata, cerchiamo \tilde{y}_2 del tipo $\tilde{y}_2(x) = kx$:

$$k = 1, \quad \text{quindi } \tilde{y}_2(x) = x$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1'(x) &= (k_1 + k_2 x) e^{-x} + x k_2 e^{-x} - x(k_1 + k_2 x) e^{-x} \\ \tilde{y}_2''(x) &= k_2 e^{-x} - (k_1 + k_2 x) e^{-x} + k_2 e^{-x} - x k_2 e^{-x} \\ &\quad - (k_1 + k_2 x) e^{-x} - x k_2 e^{-x} + x(k_1 + k_2 x) e^{-x}\end{aligned}$$

Quindi $\tilde{y}_2''(x) + \tilde{y}_1'(x) =$

$$\begin{aligned}&\cancel{k_2 e^{-x}} - \cancel{(k_1 + k_2 x) e^{-x}} + \cancel{k_2 e^{-x}} - \cancel{x k_2 e^{-x}} - \cancel{(k_1 + k_2 x) e^{-x}} - \cancel{x k_2 e^{-x}} + \cancel{x(k_1 + k_2 x) e^{-x}} \\ &+ \cancel{(k_1 + k_2 x) e^{-x}} + \cancel{x k_2 e^{-x}} - \cancel{x(k_1 + k_2 x) e^{-x}} \\ &= (2k_2 - k_1) e^{-x} - 2x k_2 e^{-x}\end{aligned}$$

Dove quindi essere $(2k_2 - k_1 - 2x k_2) e^{-x} = x e^{-x}$

cioè $\begin{cases} 2k_2 - k_1 = 0 \\ -2k_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 = -\frac{1}{2} \\ k_1 = -1 \end{cases}$

Una soluzione particolare per l'equazione omogenea è dunque

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = x \left(-1 - \frac{1}{2}x \right) e^{-x} + x =$$

L'integrale generale è

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + x \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2}x \right) e^{-x} \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = C_1 + C_2$$

$$y'(x) = -C_2 e^{-x} + 1 - \left(1 + \frac{1}{2}x \right) e^{-x} + x \left(-\frac{1}{2}e^{-x} + \left(1 + \frac{1}{2}x \right) e^{-x} \right)$$

$$y'(0) = -C_2 + 1 - 1 = -C_2$$

$$\begin{cases} -C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi $y(x) = x \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2}x \right) e^{-x} \right)$

4) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per la convergenza di una serie numerica

Si veda uno dei manuali consigliati.

- 1)** (a) Stabilire che il modulo del numero complesso $z = (1 - i)^8 e^{i\theta}$ è costante al variare di $\theta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo.
 (b) Stabilire che la successione

$$\left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n^2} + \log_{1/3}(n+1) \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

è limitata superiormente e illimitata inferiormente. Determinarne il valore di massimo.

8 pts.

- 2)** Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \cos \left(\frac{\pi \sqrt{x^2 - 1}}{x - 2} \right).$$

Determinare inoltre i suoi asintoti. Stabilire infine che $x = \frac{5}{4}$ è un punto stazionario per f e che è un punto di massimo.

8 pts.

- 3)** Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx.$$

6 pts.

- 4)** Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

8 pts.

1) - a) Stabilire che il modulo del numero complesso

$$z = (1-i)^8 e^{i\theta}$$

è costante al variare di $\theta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo.

$$\text{Poiché } \forall \theta \in \mathbb{R} : |e^{i\theta}| = 1, |z| = |(1-i)^8| |e^{i\theta}| = |(1-i)^8| = |1-i|^8$$

$$\sqrt[8]{2^8} = 16$$

1)-b) Stabilire che la successione

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\star)$$

è limitata superiormente e illimitata inferiormente. Determinare il massimo.

La massima oragnato è somma delle successioni

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ e } \left(\log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Entrambe sono strettamente decrescenti in quanto composte da una successione strettamente crescente e una funzione strettamente decrescente:

$$n \in \mathbb{N} \mapsto n^2 \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N} \mapsto n+1 \mapsto \log_{\frac{1}{3}}(n+1)$$

Quindi la successione (\star) è anch'essa strettamente decrescente e dunque

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right) &= \max_{n \in \mathbb{N}} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \log_{\frac{1}{3}}(0+1) = 1 \end{aligned}$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} + \log_{\frac{1}{3}}(n+1) = 0 - \infty = -\infty$$

2) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \cos\left(\frac{\pi \sqrt{x^2-1}}{x-2}\right)$.

Determinare inoltre i suoi eventuali assintoti. Stabilire infine che $x = \frac{5}{4}$ è un punto stazionario per f e che è un punto di minimo

$$\text{dom } f : \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \quad (-\infty, -1] \cup [1, 2) \cup (2, +\infty)$$

Cerchiamo gli assintoti orizzontali:

$$\text{Osserviamo che } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x-2} = 1$$

$$\text{e} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} / x-2 = -1$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \cos(\pi \cdot 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \cos(\pi \cdot (-1)) = -1$$

Dunque f ha asintoti orizzontali sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$

Stabilisiamo ora se f ha asintoti verticali in $x=2$

Priché $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{\pi \sqrt{x^2-1}}{x-2} = \pm \infty$ e sappiamo che

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \cos x$ non esiste, f non ha asintoti verticali

Calcoliamo ora la derivata di f e verifichiamo che

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\pi \sin\left(\pi \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) \frac{\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}(x-2) - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2} \\ &= -\pi \sin\left(\pi \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) \frac{x(x-2) - x^2 + 1}{(x-2)\sqrt{x^2-1}} = \\ &= -\pi \sin\left(\pi \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) \frac{x^2 - 2x - x^2 + 1}{(x-2)\sqrt{x^2-1}} = -\pi \sin\left(\pi \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) \frac{1-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-1}} \\ f'\left(\frac{5}{4}\right) &= -\pi \sin\left(\pi \frac{\sqrt{\frac{9}{16}}}{\frac{5}{4}-2}\right) \frac{1-\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\sqrt{\frac{9}{16}}} \\ &= -\pi \sin\frac{\pi \frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} \frac{1-\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\frac{3}{4}} = -\pi \sin(-\pi) = 0 \end{aligned}$$

Quindi $\frac{5}{4}$ è interno al dominio di f ed è un punto stazionario per f

$$f''(x) = -\pi^2 \cos\left(\pi \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) \left(\frac{1-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-1}}\right)^2 - \pi \sin\left(\pi \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}\right) D\left(\frac{1-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$f''\left(\frac{5}{4}\right) = -\pi^2 \cos(-\pi) \left(\frac{1-\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\frac{3}{4}}\right)^2 - 0 = \pi^2 (-)^2 > 0$$

Quindi $\frac{5}{4}$ è un punto di minimo locale forte per f .

Quindi $\frac{\pi}{4}$ è un punto di minimo locale forte per f .

Si potranno anche osservare che $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(-\pi) = -1$

e poiché la funzione coseno non assume valori minori di -1

$x = \frac{\pi}{4}$ è un punto di minimo per f (assoluto) interno all'intervallo

$[1, 2]$ su cui f è olivabile; per il teorema di Fermat allora

dove esser $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

3) Determinare $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}. \quad \text{Quindi}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = \int 1 dx + \int \frac{2}{x^2-1} dx = x + \int \frac{2}{(x-1)(x+1)} dx$$

$$= x - \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= x - \log|x+1| + \log|x-1| + C$$

4)

4) Enumerare e dimostrare il teorema di Rolle

Si vede, ad esempio, pag. 144 del manuale Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori 2002

- 1)** a) Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \sin n)^n}{n^{1+n}}.$$

- b) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{2}{2^n}.$$

8 pts.

- 2)** Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = xe^{-x^2+y^2}$$

e studiarne la natura.

8 pts.

- 3)** Determinare le eventuali soluzioni singolari e l'integrale generale, in forma implicita, dell'equazione

$$y' = xy^2 e^{x-\frac{1}{y}}.$$

Determinare inoltre la funzione $y = y(x)$ soluzione che in $x = 1$ vale 1.

8 pts.

- 4)** Dare la definizione di dominio del piano, normale rispetto all'asse delle x . Dimostrare che un tale dominio è misurabile.

6 pts.

1)-a) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+\sin n)^n}{n^{n+1}}$$

Possiamo usare il criterio della radice (osserviamo che le sue i termini non negativi)

$$\sqrt[n]{\frac{(1+\sin n)^n}{n^{n+1}}} = \frac{1+\sin n}{\sqrt[n]{n} \cdot n}; \text{ poiché } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \text{ abbiamo}$$

$$\lim_n \frac{1+\sin n}{\sqrt[n]{n} \cdot n} = \lim_n \frac{1+\sin n}{n} = 0 \text{ e pertanto la serie assegnata converge}$$

1)-b) Calcolare la somma della serie

$$\begin{aligned} \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{2}{2^n} &= 2 \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^5} \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-5}} = \frac{1}{2^4} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{2^h} = \\ &= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2) Sia $f(x,y) = x e^{-x^2+y^2}$

Determinare i punti critici di f e studiare la natura

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2+y^2} - 2x^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{-x^2+y^2} 2y$$

$$\begin{cases} e^{-x^2+y^2} (1-2x^2) = 0 \\ 2x e^{-x^2+y^2} xy = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 1-2x^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ e^{-x^2+y^2}=0 \end{cases} \quad \emptyset$$

Abbiamo quindi due punti critici $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Perché $f(x,y) = -f(-x,y)$, possiamo limitarci a studiare la natura di P_1

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x e^{-x^2+y^2} (1-2x^2) - 4x e^{-x^2+y^2} (1-2x^2) 2y e^{-x^2+y^2} & (1-2x^2) 2y e^{-x^2+y^2} \\ (1-2x^2) 2y e^{-x^2+y^2} & 2 e^{-x^2+y^2} x + 4y^2 x e^{-x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$\det(H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)) = -\frac{4}{\sqrt{2}} < 0$ quindi P_1 è di sella (dunque anche P_2 è di sella).

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale (in forma implicita) dell'equazione

$$y' = x y^2 e^{x-\frac{1}{y}}$$

Determinare poi la funzione $y = y(x)$ soluzione che in $x=1$ vale 1.

Si tratta di una equazione a variabili separabili data da

$$y' = x e^x y^2 e^{-\frac{1}{y}}.$$

L'unica soluzione singolare è quindi $y \equiv 0$. Supponendo quindi che $y = y(x)$ non sia nulla in alcun punto, possiamo dividere subito i membri dell'equazione per $y^2 e^{-\frac{1}{y}}$ ottenendo

$$\frac{y'}{y^2 e^{-\frac{1}{y}}} = x e^x \quad \text{da cui} \quad \int \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2} dy = \int x e^x dx$$

$$\text{cioè} \quad -e^{\frac{1}{y}} = x e^x - e^x + C$$

$$\text{ossia} \quad e^{\frac{1}{y}} = e^x (1-x) + C. \quad (\star)$$

Questo è dunque l'integrale generale in forma implicita.

Determinare la soluzione $y = y(x)$ che in $x=1$ vale 1. Deve essere:

$$y(1) = 1 \quad \text{cioè} \quad e = e \cdot 0 + C \quad \text{ossia} \quad C = e$$

Da (\star) , poiché il primo membro è positivo deduciamo che anche $e^x (1-x) + e$ deve essere positivo.

Quindi la soluzione che in 1 è uguale a 1 è

$$y(x) = \frac{1}{\log |e^x (1-x) + e|}$$

$$y(x) = \frac{1}{\log(e^x(1-x)+e)}.$$

4) Dare la definizione di dominio del piano normale rispetto all'asse delle x
 Dimostrare poi che un tale dominio è misurabile

Per la definizione si veda ad esempio pag. 201 del manuale "Elementi di Analisi Matematica due" di N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori 2001.

Per la dimostrazione della misurabilità di un insieme normale si ricordi che un insieme limitato del piano è misurabile se e solo se la sua frontiera è misurabile ed ha misura nulla. Poiché la frontiera di un dominio normale è unione di due segmenti e dei grafici di due funzioni continue e sappiamo che ognuno di questi è misurabile con misura nulla, le tesi è dimostrate.

- 1) (a) Determinare in forma cartesiana le radici quadrate del numero complesso $z = 16e^{-i\pi/3}$.
 (b) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \arctan(\arccos x).$$

Stabilire inoltre che f è monotona, specificando il tipo di monotonia. Determinarne poi l'immagine.

8 pts.

- 2) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2 + \sin x}{e^{x-\pi} - 1};$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x^2 + x)}{x^2 + x};$$

si consideri poi la funzione $f(x) = \frac{\arctan(x^2 + x)}{x^2 + x}$ e si mostri che è definitivamente strettamente decrescente per $x \rightarrow +\infty$.

8 pts.

- 3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x + 1} dx.$$

6 pts.

- 4) Dare la definizione di punto di minimo relativo per una funzione reale di variabile reale. Enunciare poi il teorema di Fermat e dimostrarlo nel caso di un punto di minimo relativo.

8 pts.

1) a) Determinare in forma cartesiana, le radici quadrate del numero complesso

$$16 e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Il numero assegnato è in forma esponenziale.

Postiamo ricavare le sue due radici quadrate in forme esponenziali e poi determinarne le forme cartesiane.

$$z_1 = \sqrt{16} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 4 e^{-i\frac{\pi}{6}} = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_2 = \sqrt{16} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{2}\right)} = 4 e^{i\frac{5\pi}{6}} = 4 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

b) Determinare il dominio della funzione.

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arcos}x)$$

Stabilire inoltre che f è monotona specificando il tipo di monotonia. Determinarne poi l'immagine.

f è composta delle funzioni $g(x) = \operatorname{arctg}x$ e $h(x) = \operatorname{arcos}x$

$f = g \circ h$. Poiché il dominio di h è l'intervallo $[-1, 1]$

(e g è definita su \mathbb{R}) anche il dominio di f è $[-1, 1]$

Poiché h è strettamente decrescente e g è strettamente crescente

f è strettamente crescente. Essendo h e g continue,

anche f è continua e la sua immagine è

qui noli l'intervallo $[f(1), f(-1)]$ cioè $[0, \operatorname{arctg}\pi]$

2) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x-\pi)^2 + \operatorname{min}(x)}{e^{x-\pi} - 1} ; \text{ b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2+x}$$

Si consideri poi la funzione $f(x) = \underline{\operatorname{arctg}(x^2+x)}$ e

si mostri che è olifinitivamente strettamente decrescente per $x \rightarrow +\infty$

a) posto $x - \pi = y$ il limite assegnato è uguale

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 + \sin(y+\pi)}{e^y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - \sin y}{e^y - 1} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \sin y \left(\frac{y^2}{\sin y} - 1 \right) / e^y - 1 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \left(\frac{y^2}{\sin y} - 1 \right) / \frac{e^y - 1}{y} \\ &= 1 \cdot (1 \cdot 0 - 1) / 1 = -1 \end{aligned}$$

b) $\left| \frac{\arctg(x^2+x)}{x^2+x} \right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2+x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg(x^2+x)}{x^2+x} = 0$

Al fine di rispondere all'ultimo quesito, calcoliamo

la derivata di f

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+(x^2+x)^2} (2x+1)(x^2+x) - \arctg(x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

Poiché il denominatore di f' è positivo per $x > 0$

il segno di f' (per $x > 0$) è uguale al segno

del suo denominatore cioè al segno di

$$(2x+1) \left(\frac{x^2+x}{1+(x^2+x)^2} - \arctg(x^2+x) \right)$$

$$\text{Dato che } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) \left(\frac{x^2+x}{1+(x^2+x)^2} - \arctg(x^2+x) \right)$$

$$= +\infty \left(0 - \frac{\pi}{2} \right) = -\infty, \text{ per il teorema delle}$$

permanenze del segno, f' è negativa in

un intorno di $+\infty$, e di conseguenza f è strettamente

deversate nello stesso intorno, che era quello che mi voleva mostrare.

3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x + 1} dx$$

Posto $\sin x = t$, per sostituzione l'integrale

$$\text{diviene } \int \frac{1}{t^2 + t + 1} dt = \int \frac{1}{t^2 + t + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} dt \\ = \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

Allora l'integrale soughto è uguale a

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

4) Dare la definizione di punto di minimo relativo
per una funzione reale di variabile reale.

Eseguire poi il Teorema di Fermat e dimostrare
che cosa è un punto di minimo relativo.

Si vede, ad esempio, il manuale consigliato "Elementi di Analisi
Matematica 1" di P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori 2002,

pagg. 141, 142

- 1)** Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{x^2}{y} dx dy,$$

dove A è l'insieme del piano definito da $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2; \frac{1}{2}y^2 < x < y^2\}$.

7 pts.

- 2)** Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2(y - x + 1)^2 + 1)^{1/2}}$$

e stabilire che essa è differenziabile sullo stesso. Calcolare quindi l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(1, 1, f(1, 1))$. Determinare infine i suoi punti stazionari stabilendone anche la natura

9 pts.

- 3)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2y + e^{x^3/2} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

- 4)** Dare la definizione di serie numerica. Specificare, poi, cosa si intende per serie regolare. Dimostrare infine che le serie a termini non negativi sono regolari.

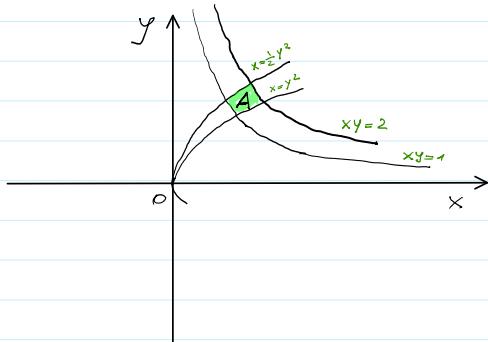
6 pts.

1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \frac{x^2}{y} dx dy,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2, \frac{1}{2}y^2 < x < y^2\}$.

Rappresentiamo l'insieme A nel piano (in verde)



Conviene considerare le seguenti coordinate:

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{x}{y^2} = v \end{cases} \quad (*) \quad ; \quad \text{l'insieme } A \text{ nel piano}$$

$\{u,v\}$ è dato da $1 < u < 2$ e $\frac{1}{2} < v < 1$

cioè è il rettangolo $[1,2] \times [\frac{1}{2}, 1]$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \left| -\frac{2x}{y^2} - \frac{x}{y^2} \right| = \left| -\frac{3x}{y^2} \right| = \frac{3x}{y^2}$$

$$\text{Quindi } \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \left| -\frac{1}{3v} \right| = \frac{1}{3v}$$

le funzioni integrate composte con le inverse delle trasforme (*) è dato da

$$\frac{x^2}{y} = \frac{x^2 y}{y^2} = \frac{x}{y^2} \cdot xy = vu$$

l'integrale svolto nelle coordinate (u,v) è quindi dato da

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^2 vu \cdot \frac{1}{3v} du dv = \frac{1}{3} \int_1^2 u du \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 dv$$

$$\int_{[1,2] \times [\frac{1}{2}, 1]} \nu u \cdot \frac{1}{3\sigma} du d\sigma = \frac{1}{3} \int_1^2 u du \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 dv$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} u^2 \Big|_1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} (4-1) = \frac{1}{4}$$

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2(y-x+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

e stabilire che essa è differenziabile sullo stesso.

Calcolare quindi l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(1,1, f(1,1))$

Determinare infine i suoi punti stazionari stabilendo la natura

Osserviamo che $\text{dom } f = \mathbb{R}^2$, poiché l'argomento della funzione reale quadrata è obbligatoriamente positivo, e cioè il polinomio $p(x,y) = x^2(y-x+1)^2 + 1$ assume valori positivi.

Poiché f è composta dunque dalle funzioni

$$g \text{ e } h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ che sono di classe}$$

C^∞ rispettivamente su \mathbb{R}^2 e su $(0,+\infty)$, f è di classe C^∞ su \mathbb{R}^2 e dunque è differenziabile su \mathbb{R}^2 per il teorema del differenziabile.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2(y-x+1)^2+1)^{\frac{3}{2}}} (-2x(y-x+1)^2 + 2x^2(y-x+1))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2(y-x+1)^2+1)^{\frac{3}{2}}} (-2x^2(y-x+1))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} (-2 + 2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} (-2) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

L'equazione del piano tangente nel punto $(1,1, f(1,1))$ è dunque

$$z = f(1,1) + 0 \cdot (x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1)$$

$$Z = f(1,1) + 0 \cdot (x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1)$$

Archiammo ora i punti stazionari di f .

Osserviamo che il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \text{ equivale a } \begin{cases} -2x(y-x+1)^2 + 2x^2(y-x+1) = 0 \\ -2x^2(y-x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(y-x+1)(-y+x-1+x) = 0 \\ x^2(y-x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Quindi le rette $x=0$ e $y=x-1$ sono rette di punti critici

$$\begin{cases} y-x+1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Poiché lungo entrambe tali rette f assume il valore 1, archiammo di studiare il segno di $f(x,y) - 1$ cioè

$$1 - \sqrt{x^2(y-x+1)^2 + 1}$$

$$\sqrt{x^2(y-x+1)^2 + 1}$$

Ovviamente il segno di tale funzione è uguale al segno del suo numeratore. Poiché $x^2(y-x+1)^2 + 1 \geq 1$ è non negativa

$$\sqrt{x^2(y-x+1)^2 + 1} \geq \sqrt{1} = 1 \text{ cioè } 1 - \sqrt{x^2(y-x+1)^2 + 1} \leq 0$$

e quindi sia i punti delle rette $x=0$ che quelli di $y-x+1=0$ sono punti di massimo locale non forte

3) Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y + e^{x^3/2} \\ y(-1) = 0 \end{cases} \quad (\square)$$

Sappiamo che la soluzione di (□) è data da

$$y(x) = e^{\int_{-1}^x t^2 dt} \left(0 + \int_{-1}^x e^{-\int_{-1}^t s^2 ds} \cdot e^{\frac{t^3}{6}} dt \right)$$

$$= e^{\frac{1}{3}(x^3+1)} \cdot \int_{-1}^x e^{-\frac{1}{3}(t^3+1)} e^{\frac{t^3}{6}} dt$$

$$= e^{\frac{1}{3}(x^3+1)} \cdot \int_{-1}^x e^{-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3} + \frac{t^3}{2}} dt = e^{\frac{1}{3}(x^3+1)} e^{-\frac{1}{3}} \int_{-1}^x e^{\frac{t^3}{6}} dt$$
$$= e^{\frac{x^3}{3}} \int_{-1}^x e^{\frac{t^3}{6}} dt.$$

- 4) Date le definizioni di serie numeriche. Specificare poi cosa si intende per serie numeriche regolari. Dimostrare infine che le serie a termini non negativi sono regolari

Si veda, ad esempio, il manuale consigliato "Elementi di Analisi Matematica 1" di P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori 2002,

pagg. 259, 263, 264

- 1)** a) Stabilire se la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} \log(n+1)}{n^2 + 1}.$$

- b) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^n}{\pi^{n+1}}.$$

7 pts.

- 2)** Stabilire che la funzione

$$f(x, y) = (x - y + 1)(y - x^2)^2$$

è differenziabile su \mathbb{R}^2 . Calcolare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(1, 1, f(1, 1))$. Determinare infine i suoi punti stazionari stabilendone anche la natura

9 pts.

- 3)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' + y = x + e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

- 4)** Dare la definizione di insieme normale rispetto all'asse delle x . Dare poi la formula di riduzione per l'integrale di una funzione $f(x, y) = g(x)h(y)$ continua su un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$.

6 pts.

1) a) Stabilire se la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} \log(n+1)}{n^2 + 1}$$

b) Calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^n}{\pi^{n+1}}$$

a) Possiamo usare il criterio degli infinitesimi: poiché $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$

è sufficiente moltiplicare la successione $\frac{\sqrt{n} \log(n+1)}{n^2+1}$ per n^{α} con

$\alpha \in (1, \frac{3}{2})$. Infatti, per tali α , $\frac{n^{\alpha} \sqrt{n} \log(n+1)}{n^2+1} \sim \frac{\log(n+1)}{n^{\frac{5}{2}-\alpha}} \rightarrow 0$

dato che $\frac{3}{2}-\alpha > 0$, quindi la serie converge.

$$b) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^n}{\pi^{n+1}} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n = \frac{1}{\pi} \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{e}{\pi}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k$$

Poiché $\frac{e}{\pi} \in (-1, 1)$, la somma della serie è $\frac{e^3}{\pi} \cdot \frac{1}{1-\frac{e}{\pi}} = \frac{e^3}{\pi^3(\pi-e)}$

2) Stabilire che la funzione

$$f(x,y) = (x-y+1)(y-x^2)^2$$

è differenziabile su \mathbb{R}^2 . Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1, f(1,1))$.

Determinare infine i punti stazionari di f e studiarne la natura.

f è differenziabile in \mathbb{R}^2 in quanto è un polinomio (le sue derivate possibili sono definite in \mathbb{R}^2 e sono polinomi, quindi sono continue)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y-x^2)^2 + (x-y+1) 2(y-x^2)(-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = - (y-x^2)^2 + (x-y+1) 2(y-x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0+0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0+0=0$$

L'equazione del piano tangente cercato è quindi $\pi = f(1,1)=0$

Scriviamo tutti i punti nello di f . Deve essere

$$\begin{cases} (y-x^2)^2 + (x-y+1) 2(y-x^2)(-2x) = 0 \\ -(y-x^2)^2 + (x-y+1) 2(y-x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y+1)(y-x^2)(1-2x) = 0 \\ -(y-x^2)^2 + (x-y+1) 2(y-x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ -(y-\frac{1}{4})^2 + 2\left(\frac{3}{2}-y\right)\left(y-\frac{1}{4}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \left(y-\frac{1}{4}\right)\left(3-2y-y+\frac{1}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad P_1$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{13}{12} \end{cases} \quad P_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-x^2=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Tutti i punti della parabola P di equazione $y=x^2$ sono critici

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ -(y-x^2)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x^2 \\ x-x^2+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y=\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono comunque punti appartenenti alla parabola di equazione $y=x^2$.

Osserviamo che anche $P_2 \in P$. Un punto critico che non appartiene a P è dunque P_2 .

Per studiare la natura di un qualsiasi punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in P$, basta osservare che $f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) = f(x, y)$ e il segno di f dipende solo dal segno del polinomio $x-y+1$. Pertanto per $\bar{x} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\bar{x} < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, (\bar{x}, \bar{y}) è di massimo per $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \bar{x} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, (\bar{x}, \bar{y}) è di minimo.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}\right) \text{ e } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}\right) \text{ sono gli estremi}$$

Poiché P_2 è interno all'insieme composto avere borolo di P e f è nulla su tale borolo, risulta che P_2 è di massimo locale dato che

$$f(P_2) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{12} + 1\right) \left(\frac{13}{12} - \frac{1}{4}\right)^2 > 0$$

3) Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' + y = x + e^x \quad (\square) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

d'equazione caratteristica dell'omogenea associata $y'' - y' + y = 0$ è $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

che ha soluzioni $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$; quindi l'integrale generale di $y'' - y' + y = 0$

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$$

cerchiamo una soluzione particolare di (\square) con il metodo di minimi locali applicato separatamente alle equazioni

$$y'' - y' + y = x$$

$$y'' - y' + y = e^x$$

$$\tilde{y}_1(x) = ax + b$$

$$-a + ax + b = x \quad \text{ole mi}$$

$$\begin{cases} b-a=0 \\ a=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases} \quad \text{quindi}$$

$$\tilde{y}_2(x) = ce^x$$

$$ce^x - ce^x + ce^x = e^x \quad \text{ole mi } c=1$$

$$\text{cioè } \tilde{y}_2(x) = e^x$$

$$\tilde{y}_1(x) = x + 1$$

$$\text{Pertanto l'integrale generale di } (\square) \text{ è } y(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) + x + 1 + e^x$$

$$0 = y(0) = c_1 + 2 \quad \text{ole mi } c_1 = -2$$

$$y'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \left(-2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) + e^{\frac{x}{2}} \left(-2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) + 1 + e^x$$

$$0 = y'(0) = \frac{1}{2} (-2) + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \quad \text{ole mi } c_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

la soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(-2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) + x + 1 + e^x$$

4) Dare la definizione di insieme normale rispetto all'asse delle x .

Dare poi la formula di riduzione per l'integrale di una funzione

$$f(x,y) = g(x)h(y) \quad \text{continua su un rettangolo } [a,b] \times [c,d]$$

$A \subset \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse delle x se $\exists \frac{\alpha}{\beta}: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue

$$\text{tali che } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ e } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

Dalle formule di riduzione su un insieme normale rispetto all'asse delle x

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^{\beta(x)} g(x) h(y) dy \right) dx = \int_a^b g(x) \left(\int_c^{\beta(x)} h(y) dy \right) dx = \left(\int_c^{\beta(x)} h(y) dy \right) \cdot \left(\int_a^b g(x) dx \right)$$