

Possibile svolgimento della prova del 7 novembre 2025 – Modulo A

- 1) (a) Calcoliamo la parte reale e immaginaria di $z = \left(\frac{i^3 e^{-2+i3\pi/4}}{1-i} \right)^4$.

Partiamo dal numeratore:

- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $e^{-2+i3\pi/4} = e^{-2} \cdot e^{i3\pi/4}$
- Quindi: $i^3 e^{-2+i3\pi/4} = -i \cdot e^{-2} e^{i3\pi/4} = e^{-2} (-i) e^{i3\pi/4}$

Scriviamo $-i$ in forma esponenziale: $-i = e^{-i\pi/2}$

Quindi:

$$i^3 e^{-2+i3\pi/4} = e^{-2} e^{-i\pi/2} e^{i3\pi/4} = e^{-2} e^{i(3\pi/4 - \pi/2)} = e^{-2} e^{i\pi/4}$$

Per il denominatore:

$$1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

Quindi:

$$\frac{i^3 e^{-2+i3\pi/4}}{1-i} = \frac{e^{-2} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/4 + \pi/4)} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2}$$

Elevando alla quarta:

$$z = \left(\frac{e^{-2}}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2} \right)^4 = \frac{e^{-8}}{4} e^{i2\pi} = \frac{e^{-8}}{4},$$

dato che $e^{i2\pi} = 1$. Quindi:

$$z = \frac{e^{-8}}{4} = \frac{1}{4e^8}$$

e dunque

- **Parte reale:** $\Re(z) = \frac{1}{4e^8}$
- **Parte immaginaria:** $\Im(z) = 0$

- (b) Studiamo l'insieme $A = \left\{ \frac{n^2-1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Riscriviamo:

$$a_n = \frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n}$$

Monotonia: Confrontiamo a_{n+1} con a_n :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(n+1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(n - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{n+1-n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Quindi la successione è **strettamente crescente**.

Poiché la successione (a_n) è strettamente crescente e A è la sua immagine, possiamo dedurre che $\inf A = \min A = a_1 = 0$ mentre $\sup A = \lim a_n = \lim (n - \frac{1}{n}) = +\infty$ e dunque A è illimitato superiormente.

- 2) Per la funzione $f(x) = \log \left(\frac{x^2-1}{x^2-4} \right) + \frac{1}{x-3}$:

- (a) **Dominio naturale:**

Dobbiamo richiedere:

1. $\frac{x^2-1}{x^2-4} > 0$ (argomento del logaritmo positivo)

2. $x \neq 3$ (denominatore della frazione non nullo)

Studiamo il segno di $\frac{x^2-1}{x^2-4}$:

- $x^2 - 1 > 0$ per $x < -1$ e $x > 1$;
- $x^2 - 4 > 0$ per $x < -2$ e $x > 2$.

Quindi $\frac{x^2-1}{x^2-4} > 0$ per $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

Escludendo $x = 3$:

$$\text{dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$$

(b) **Asintoti:**

Asintoti verticali:

I candidati sono $x = -2, -1, 1, 2, 3$.

- Per $x \rightarrow -2^-$: $\frac{x^2-1}{x^2-4} \rightarrow \frac{3}{0^+} = +\infty$, quindi $\log(\dots) \rightarrow +\infty$ e $\frac{1}{x-3} \rightarrow \frac{1}{-5}$. Quindi $f(x) \rightarrow +\infty$. La retta $x = -2$ è asintoto verticale a sx.
- Per $x \rightarrow -1^+$: $\frac{x^2-1}{x^2-4} \rightarrow \frac{0^-}{-3} = 0^+$, quindi $\log(\dots) \rightarrow -\infty$. Dunque $f(x) \rightarrow -\infty$. La retta $x = -1$ è asintoto verticale a dx.
- Per $x \rightarrow 1^-$: analogo a $x \rightarrow -1^+$, quindi $x = 1$ è asintoto verticale a sx.
- Per $x \rightarrow 2^+$: $\frac{x^2-1}{x^2-4} \rightarrow \frac{3}{0^+} = +\infty$, quindi $f(x) \rightarrow +\infty$. La retta $x = 2$ è asintoto verticale a dx
- Per $x \rightarrow 3$: $\frac{x^2-1}{x^2-4} \rightarrow \frac{8}{5}$, quindi $\log(\dots) \rightarrow \log(8/5)$ (finito), ma $\frac{1}{x-3} \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow 3^\pm$. Quindi $f(x) \rightarrow \pm\infty$ e $x = 3$ è asintoto verticale sia a sx che a dx.

Asintoti orizzontali/obliqui:

Per $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\frac{x^2-1}{x^2-4} \rightarrow 1$$

quindi $\log\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right) \rightarrow 0$ e $\frac{1}{x-3} \rightarrow 0$.

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$.

(c) **Teorema degli zeri in $(2, 3)$:**

La funzione f è continua su $(2, 3)$.

Calcoliamo i limiti agli estremi:

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ (come visto sopra)
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ (come visto sopra)

Per l'estensione del teorema degli zeri a intervalli aperti), dato che f è continua su $(2, 3)$ con $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty > 0$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty < 0$, esiste almeno un punto $c \in (2, 3)$ tale che $f(c) = 0$.

3) Calcoliamo $\int \frac{2}{2x^2+x+1} dx$.

Completiamo il quadrato al denominatore:

$$\begin{aligned} 2x^2 + x + 1 &= 2 \left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \right] \\ &= 2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{2}{2x^2 + x + 1} dx = \int \frac{2}{2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \right]} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{16}} dx$$

Poniamo $t = x + \frac{1}{4}$, quindi $dt = dx$:

$$\int \frac{1}{t^2 + \frac{7}{16}} dt = \int \frac{1}{\frac{7}{16} \left(\frac{16t^2}{7} + 1 \right)} dt = \frac{16}{7} \int \frac{1}{\frac{16t^2}{7} + 1} dt$$

Poniamo $u = \frac{4t}{\sqrt{7}}$, quindi $du = \frac{4}{\sqrt{7}} dt$ e $dt = \frac{\sqrt{7}}{4} du$:

$$\frac{16}{7} \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} du = \frac{4}{\sqrt{7}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{4\sqrt{7}}{7} \arctan(u) + C$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{2x^2 + x + 1} dx &= \frac{4\sqrt{7}}{7} \arctan \left(\frac{4(x + 1/4)}{\sqrt{7}} \right) + C \\ &= \frac{4}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{4x + 1}{\sqrt{7}} \right) + C \end{aligned}$$

- 4) **Enunciato e dimostrazione del teorema di de l'Hôpital (caso 0/0):** Si possono vedere le note della lezione 22.

Applicazione: Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{x - \sin x}$.

Verifichiamo che siamo nella forma $\frac{0}{0}$:

- $\lim_{x \rightarrow 0} (3 \sin x - \sin(3x)) = 0 - 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0 - 0 = 0$

Applichiamo de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{x - \sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x - 3 \cos(3x)}{1 - \cos x}$$

Ancora forma $\frac{0}{0}$ (perché $3 \cos 0 - 3 \cos 0 = 0$ e $1 - \cos 0 = 0$). Applichiamo di nuovo de l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x - 3 \cos(3x)}{1 - \cos x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin x + 9 \sin(3x)}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-3 + \frac{9 \sin(3x)}{\sin x} \right) \end{aligned}$$

Calcoliamo il limite del secondo addendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \sin(3x)}{\sin x} = 9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x} = 9 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 27$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{x - \sin x} = -3 + 27 = 24$$