1) Calcolare $\displaystyle\int_A \frac{x}{y^2}\,dx\,dy$ con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2+y^2 < 9 \text{ e } y > x > 0\}$

Passando alle coordinate polari otteniamo:

$$\int_2^3 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2 \sin^2\theta} \cdot \rho \, d\theta \right) d\rho = \int_2^3 d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 1 \cdot \left. -\frac{1}{\sin\theta} \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \sqrt{2}$$

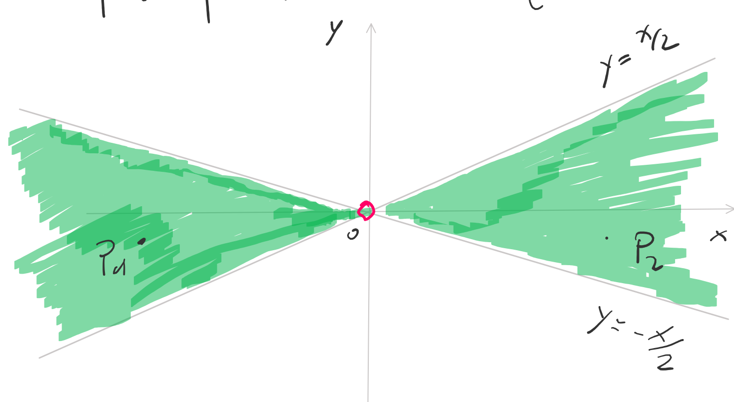
2) Determinare e rappresentare sul piano il dominio di

$$f(x,y) = \log(x^2 - 4y^2)$$

Dire se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi. Stabilire che f è differenziabile sul suo dominio. Determinare l'equazione del piano tg al grafico di f in $(1, 0, f(1,0))$. Dimostrare inoltre che f è illimitata.

dom f: $x^2 - 4y^2 > 0 \iff (x-2y)(x+2y) > 0$

quindi esso è rappresentato nel piano da un cono aperto privato del vertice (colorato in verde qui sotto)



È un insieme aperto in quanto tutti i suoi punti sono interni, illimitato, non connesso per archi dato che, ad esempio, i punti P_1 e P_2 in figura non possono essere collegati da alcuna curva continua la cui immagine sia contenuta nell'insieme

f è una funzione di classe C^1 sul suo dominio dato che è continua e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2-4y^2}\cdot 2x$$

sono entrambe continue su dom f.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2-4y^2}(-8y)$$

Piano tg. in $(1, 0, f(1,0))$:

$$z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\, y$$

$$= 0 + 2(x-1) + 0\cdot y = 2x-2$$

f è illimitata dato che la sua restrizione all'asse delle x è illimitata: $f(x,0) = \log(x^2)$

e $\log(x^2) = 2\log|x|$ ha come immagine $\mathbb{R}$.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2ty = t\cos(2t^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione $y' + 2ty = t\cos(2t^2)$ è del primo ordine e lineare; quindi la soluzione è data da:

$$y(t) = e^{-\int_0^t 2s\,ds}\left(0 + \int_0^t e^{\int 2s\,ds}\, s\cos(2s^2)\, ds\right)$$

$$= e^{-t^2}\int_0^t e^{s^2}\, s\,\cos(2s^2)\, ds$$

$$\underset{s^2=w}{=} e^{-t^2}\,\frac{1}{2}\int_0^{t^2} e^{w}\cos(2w)\, dw$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_0^{t^2} e^{w}\cos(2w)\, dw \qquad (*)$

$$(*) = e^{w}\cos(2w)\Big|_0^{t^2} + 2\int_0^{t^2} e^{w}\sin(2w)\,dw$$

$$= e^{t^2}\cos(2t^2) - 1 + 2e^{w}\sin(2w)\Big|_0^{t^2} - 4\int_0^{t^2} e^{w}\cos(2w)\,dw$$

quindi $5(*) = e^{t^2}\left(\cos(2t^2) + 2\sin(2t^2)\right) - 1$

ovvero $(*) = \frac{e^{t^2}}{5}\left(\cos(2t^2) + 2\sin(2t^2) - 1\right)$

e quindi $y(t) = \frac{1}{10}\left(\cos(2t^2) + 2\sin(2t^2)\right) - \frac{e^{-t^2}}{10}$

4) Si veda p. 121 e p. 131 del manuale consigliato