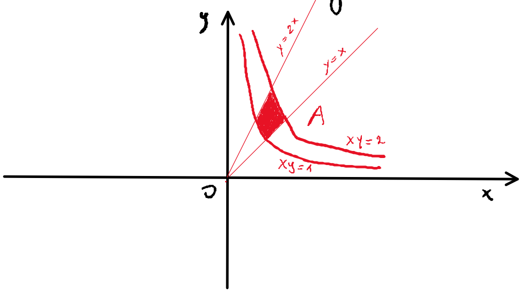
1) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_A \frac{x^2}{y}\,dx\,dy$$

dove $A = \{ (x,y)\in \mathbb{R}^2 : \quad x<y<2x \, , \quad 1<xy<2 \}$

l'insieme A è il seguente



Possiamo considerare la trasformazione

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases}$$

Nel piano (u,v) l'insieme A corrisponde a

$$A' = \{ (u,v)\in\mathbb{R}^2 : \ 1<u<2 \ \wedge \ 1<v<2 \}$$

quindi A' è un quadrato

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2\frac{y}{x} = 2v$$

Vediamo come possa scriversi la funzione integranda nelle variabili u,v:

$\frac{x^2}{y} = \frac{x}{y}\cdot x$; tenendo conto che $\frac{x}{y} = \frac{1}{v}$ e $x^2 = \frac{u}{v}$

otteniamo $\frac{x^2}{y} = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}}$

Quindi nelle coordinate (u,v) l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_{A'} \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \cdot \frac{1}{2v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{v^{5/2}}\,dv \cdot \int_1^2 \sqrt{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) v^{-\frac{3}{2}}\Big|_1^2 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2$$

$$= -\frac{2}{9}\left(2^{-\frac{3}{2}} - 1\right)\left(2^{3/2} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{9}\,\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)^2}{2^{3/2}} = \frac{2}{9}\left(\frac{9-2^{5/2}}{2^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2^{7/2 - 3/2}}{7} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{7}$$

2) Determinare i punti estremali della funzione

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)^2 e^{-x^2-y^2}$$

$$f_x(x,y) = 2(x^2-y^2)\,2x\, e^{-x^2-y^2} + (x^2-y^2)^2 e^{-x^2-y^2}(-2x)$$

$$f_y(x,y) = 2(x^2-y^2)(-2y)\, e^{-x^2-y^2} + (x^2-y^2)^2 e^{-x^2-y^2}(-2y)$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)\left[2 - x^2 + y^2\right] = 0 \\ -2y\, e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)\left[2 + x^2 - y^2\right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y^3 e^{-y^2}\left[2 - y^2\right] = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

i punti O e $P_1(0,\sqrt{2})$, $P_2(0,-\sqrt{2})$ sono critici

$$\vee$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

quindi le rette $x - y = 0$ e $x + y = 0$ sono rette di punti critici

$$\vee$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ -2y\, e^{-2y^2} \cdot 2 \cdot \left[2+2\right] = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

i punti $P_3(\sqrt{2},0)$ e $P_4(-\sqrt{2},0)$ sono critici

Studiamo la natura dei punti critici sulle rette $b_1: x = y$ e $b_2: y = -x$

$\forall (\bar{x},\bar{y}) \in b_i$, $i = 1,2$ $\quad f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ e poiché $f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

tutti tali punti sono di minimo assoluto; tra di essi c'è anche O.

Osserviamo che f è simmetrica rispetto alle trasformazioni

$$(x,y) \mapsto (-x,-y) \quad ; \quad (x,y) \mapsto (-x,y) \quad ; \quad (x,y) \mapsto (x,-y)$$

quindi la natura dei rimanenti punti critici P_j, $j = 1,2,3,4$ è la stessa.

Consideriamo dunque $P_1 = (0,\sqrt{2})$ e calcoliamo la matrice Hessiana di f in tale punto

$$f_{xy}(x,y) = 2e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)(2-x^2+y^2) + 2x e^{-x^2-y^2}(-2x)(x^2-y^2)(2-x^2+y^2)$$
$$+ 2x e^{-x^2-y^2}\, 2x\, (2 - x^2 + y^2) + 2x e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)(-2x)$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x\, e^{-x^2-y^2}(-2y)(x^2-y^2)(2-x^2+y^2) + 2x e^{-x^2-y^2}(-2y)(2-x^2+y^2)$$
$$+ 2x e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)\, 2y$$

$$f_{yy}(x,y) = -2e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)(2+x^2-y^2) + 4y^2 e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)(2+x^2-y^2)$$
$$+ 4y^2 e^{-x^2-y^2}(2-x^2+y^2) + 4y^2 e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)$$

$$H_f(0,\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2e^{-2}(-2)4 & 0 \\ 0 & 8e^{-2}(-2) \end{pmatrix}$$

quindi $P_1(0,\sqrt{2})$ è max locale forte dato che $\det H_f(0,\sqrt{2})>0$ e $f_{xx}(0,\sqrt{2})<0$
Anche gli altri punti P_2, P_3, P_4 sono quindi di max locale forte.

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale dell'equazione

$$y' = (y^2-1)x$$

Le soluzioni singolari sono $y(x) = \pm 1$

$$\frac{y'}{y^2-1} = x \quad \text{da cui} \quad \int \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \frac{1}{2}\left(\int -\frac{1}{y+1}\,dy + \int \frac{1}{y-1}\,dy\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\log|y+1| + \log|y-1|\right)$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \log\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|^{\frac{1}{2}}\right)$$

Quindi l'integrale generale in forma implicita è

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right|^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}x^2} K, \quad K>0$$

da cui $\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = K^2 e^{x^2}$,

da cui $y-1 = H e^{x^2}(y+1)$, $H \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Quindi $y(1-He^{x^2}) = 1+He^{x^2}$, da cui

$$y = \frac{1+He^{x^2}}{1-He^{x^2}}.$$

4) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in un punto $x_0 \in \mathring{A}$ secondo una direzione $v \in \mathbb{R}^n$. Enunciare il teorema di rappresentazione per le derivate direzionali e usarlo per calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) \quad \text{con} \quad f(x,y) = x^2 y + x \quad \text{e} \quad v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Definizione: f è derivabile secondo la direzione v in $x_0 \in \mathring{A}$ se $\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}^m$

Teorema di rappresentazione:

Se f è differenziabile in x_0 allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)[v]$$

$f(x,y) = x^2 y + x$ è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ essendo un polinomio

$$\nabla f(x,y) = (2xy + 1, x^2)$$

$$\nabla f(1,0) = (1,1) \quad \text{quindi} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = df(1,0)[v] = \langle \nabla f(1,0), v \rangle =$$

$$= \left\langle (1,1), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$