1) Stabilire il carattere delle seguenti serie

a) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$,

b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n - e^{-n}}{n^2-1}$.

La a) è una serie a segni alterni

Poiché $\frac{n}{n^2-1} \to 0$ e la successione $\left\{\frac{n}{n^2-1}\right\}$ è

strett. decrescente dato che per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2-1} < \frac{n}{n^2-1} \iff$$

$$(n+1)(n^2-1) < n\left((n+1)^2-1\right) \iff$$

$$(n+1)^2(n-1) < n(n+2)n \iff$$

$$(n^2+2n+1)(n-1) < n^3+2n^2 \iff$$

$$\cancel{n^3}+\cancel{2n^2}+n-n^2-2n-1 < \cancel{n^3}+\cancel{2n^2} \iff$$

$$-n^2-n-1 < 0 \text{ che è vera } \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi anche la disuguaglianza di partenza è vera.

Per il criterio di Leibniz la serie assegnata converge.

Si può stabilire la decrescenza di $\frac{n}{n^2-1}$ anche studiando

la monotonia della funzione $y(x) = \frac{x}{x^2-1}$

definitivamente per $x \to +\infty$

La b) può essere vista come $\underset{1}{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1}} - \underset{2}{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n^2-1}}$

Poiché $\frac{n}{n^2-1} \sim \frac{1}{n}$ la 1 diverge positivamente

Dato che $\sqrt[n]{\frac{e^{-n}}{n^2-1}} = \frac{1}{e}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2-1}} \to \frac{1}{e} < 1$

per il criterio della radice la serie 2 converge.

La (b) quindi diverge positivamente essendo differenza

di una serie divergente positivamente e una convergente

2) Determinare i punti stazionari e gli eventuali

punti di estremo della funzione

$f(x,y) = x^2(y^2-1) - y^2$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(y^2-1)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yx^2 - 2y$

$$\begin{cases} x(y^2-1) = 0 \\ y(x^2-1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Quindi f ha 5 punti stazionari:

$O(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(-1,1)$ e $P_4(-1,-1)$

Poiché f è invariante per le simmetrie rispetto agli assi

(cioè $f(x,-y) = f(x,y)$ e $f(-x,y) = f(x,y)$)

e per quella rispetto all'origine (cioè $f(-x,-y) = f(x,y)$)

è sufficiente stabilire la natura di $O(0,0)$ e

poi di P_1 (quella di P_2, P_3 e P_4 è la stessa di P_1)

$f_{xx}(x,y) = 2(y^2-1)$, $f_{xy}(x,y) = 4xy = f_{yx}(x,y)$,

$f_{yy}(x,y) = 2x^2 - 2$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ quindi $O(0,0)$ è un massimo locale forte

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det\left(H_f(1,1)\right) = -16 < 0$$

quindi P_1, P_2, P_3, P_4 sono di sella.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{t} y = \cos t \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

$$y(t) = e^{\int_\pi^t -\frac{2}{s}\,ds} \left(1 + \int_\pi^t \left(e^{\int_\pi^s \frac{2}{z}\,dz} \cos s \right) ds \right)$$

$$= e^{-2\log\left(\frac{t}{\pi}\right)} \left(1 + \int_\pi^t e^{2\log(s/\pi)} \cos s \, ds \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{t^2} \left(1 + \int_\pi^t \frac{s^2}{\pi^2} \cos s \, ds \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{t^2} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \left(s^2 \sin s \Big|_\pi^t - \int_\pi^t 2 s \sin s \right) \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{t^2} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \left(t^2 \sin t + 2 s \cos s \Big|_\pi^t - 2 \int_\pi^t \cos s \right) \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{t^2} \left(1 + \frac{t^2}{\pi^2} \sin t + \frac{2t}{\pi^2} \cos t + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \sin t \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{t^2} + \sin t + \frac{2}{t} \cos t + \frac{2\pi}{t^2} - \frac{2}{t^2} \sin t$$

4) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto. Dimostrare che se $f : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in \mathring{A}$ allora per ogni versore v, $\exists\ \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$

Si veda, ad esempio, la lezione 37