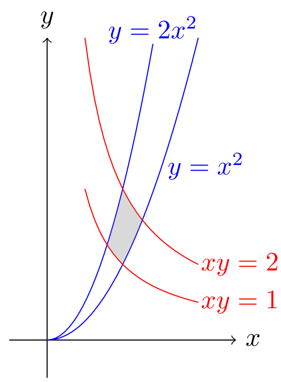
Possibile svolgimento della prova del 21 febbraio 2025 – Modulo B

1) Il dominio di integrazione è limitato dalle parabole $y = x^2$ e $y = 2x^2$ e dalle iperboli $xy = 1$ e $xy = 2$ e corrisponde alla regione di piano ombreggiata in figura qui sotto:



Effettuiamo il cambio di variabili:

$$u = \frac{y}{x^2}, \quad v = xy,$$

quindi nelle coordinate (u, v) il dominio di integrazione è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

Lo jacobiano della trasformazione $(x, y) \mapsto (u, v)$ è:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = -3\frac{y}{x^2} = -3u$$

e quindi

$$\left|\det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)\right| = \frac{1}{3u}.$$

L'integranda nelle variabili u, v diventa:

$$\frac{1}{x^3} = \frac{u}{v}$$

L'integrale si trasforma quindi in:

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{u}{v}\frac{1}{3u}\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{v}\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\log 2$$

2) Il dominio di F è l'intersezione dei domini delle tre componenti:

Per la prima componente, $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, deve essere $x^2 + y^2 > 0$, cioè $(x, y) \neq (0, 0)$.

Per la seconda componente, $\log\left(\frac{x-y}{2x+y}\right)$, deve essere:

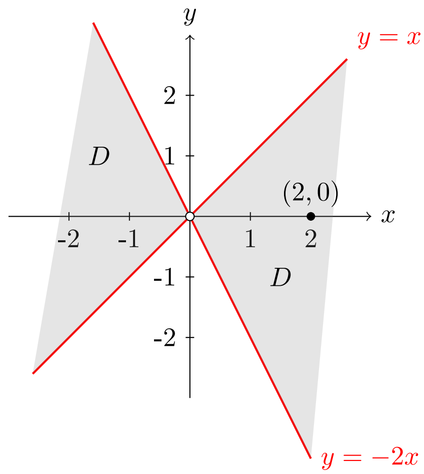
$$\frac{x - y}{2x + y} > 0$$

che equivale a:

$$x - y > 0 \text{ e } 2x + y > 0 \quad \text{oppure} \quad x - y < 0 \text{ e } 2x + y < 0$$

La terza componente non dà restrizioni.

Poiché $(0, 0)$ appartiene alla retta $y = x$ che è da escudere, il dominio di F è il cono individuato dalle rette $y = x$ e $y = -2x$ contenente l'asse delle x (origine degli assi escluso).



Si tratta di un insieme aperto (è intersezione di aperti), non limitato, non connesso per archi.
La funzione è differenziabile in $(2,0)$ perché le sue componenti sono funzioni di classe C^∞ nel dominio.
Calcoliamo la matrice Jacobiana in $(2,0)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{y(x^2+y^2)-xy\cdot x}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{x(x^2+y^2)-xy\cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\left(\frac{x-y}{2x+y}\right)=\frac{2x+y-(x-y)\cdot 2}{(2x+y)(x-y)}=\frac{3y}{(2x+y)(x-y)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\log\left(\frac{x-y}{2x+y}\right)=\frac{-(2x+y)-(x-y)}{(2x+y)(x-y)}=-\frac{3x}{(2x+y)(x-y)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{x+y}=e^{x+y},\quad \frac{\partial}{\partial y}e^{x+y}=e^{x+y}$$

Valutando in $(2,0)$:

$$J_F(2,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{3}{4}\\ e^2 & e^2\end{pmatrix}$$

La migliore approssimazione lineare in $(2,0)$ è:

$$L(x,y)=F(2,0)+J_F(2,0)\begin{pmatrix}x-2\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ \log(1/2)\\ e^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{3}{4}\\ e^2 & e^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ -\log 2\\ e^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\ -\frac{3}{4}y\\ e^2(x-2)+e^2y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}y\\ -\frac{3}{4}y-\log 2\\ e^2(x+y-1)\end{pmatrix}$$

3) Le soluzioni singolari sono le funzioni costanti $y = \pm 2$ (sono i valori di y che annullano la funzione $g(y) = y^2 - 4$).

Per trovare l'integrale generale, separiamo le variabili:

$$\frac{y'}{y^2 - 4} = 1 + x^2$$

Integrando ambo i membri:

$$\frac{1}{4} \log \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = x + \frac{x^3}{3} + c$$

Da cui l'integrale generale in forma implicita:

$$\left| \frac{y-2}{y+2} \right| = e^{4x + \frac{4x^3}{3} + C},$$

ovvero

$$\frac{y-2}{y+2} = ke^{4x + \frac{4x^3}{3}}, \ k \in \mathbb{R}$$

da cui l'integrale generale in forma esplicita

$$y = \frac{2\left(1 + ke^{4x+\frac{4x^3}{3}}\right)}{1 - ke^{4x+\frac{4x^3}{3}}}, \ k \in \mathbb{R}.$$

La condizione $y(0) = 2$ dice che la soluzione è quella singolare $y = 2$.

4) Il teorema di Schwarz afferma che se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione definita sull'aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ e le derivate miste $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ esistono in un intorno di un punto $(x_0, y_0) \in A$ e sono continue in (x_0, y_0), allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Il teorema si generalizza a derivate miste di ordine superiore: se f è di classe C^k in un aperto A, allora tutte le derivate miste di ordine k coincidono indipendentemente dall'ordine con cui si effettuano le derivazioni. Ad esempio, per $k = 3$:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

Una conseguenza importante del teorema è che la matrice hessiana di una funzione di classe C^2 è simmetrica, cioè:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

soddisfa $H_f(x,y) = H_f(x,y)^T$ per ogni $(x,y) \in A$.