Appello Complementi di Analisi Matematica

venerdì 10 novembre 2017 14:30

1) Enunciare e dimostrare una versione del teorema sulla trasformata della derivata

Si vedano, ad esempio, gli appunti sulla mia pagina web

1) Dimostrare che se una serie di funzioni converge totalmente su un insieme A allora essa converge uniformemente

Si vedano, ad esempio, gli appunti relativi all'AA 12-13, p. 4

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale per la serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log n}{n^2+1} (x+1)^n$$

$$\lim \frac{(n+1)\log(n+1)}{(n+1)^2+1} \frac{n^2+1}{n \log n} = \lim \frac{\log(n+1)}{\log n} \cdot \frac{(n^2+1)(n+1)}{n((n+1)^2+1)} = 1$$

quindi $\rho = 1$ e l'intervallo di convergenza è $(-1-1, -1+1) = (-2, 0)$

Per $x = -2$ otteniamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \log n}{n^2+1}$ (■)

È una serie a segni alterni: $\frac{n \log n}{n^2+1} \longrightarrow 0$

vediamo se $\frac{n \log n}{n^2+1}$ è definitivamente decrescente studiando la funzione $f(x) = \frac{x \log x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(\log x + 1)(x^2+1) - (x \log x) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 \log x + x^2 + 1 + \log x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2(1 - \log x) + 1 + \log x}{(x^2+1)^2}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno del numeratore dato che il denominatore è positivo.

Poiché $x^2(1 - \log x) + 1 + \log x = x^2 \left(1 - \log x + \frac{1}{x^2} + \frac{\log x}{x^2}\right) \xrightarrow{x \to +\infty} -\infty$

il numeratore è negativo in un intorno di $+\infty$; quindi f è strettamente decrescente su tale intorno e dunque

$\left(\frac{n\log n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente strettamente decrescente

Per il criterio di Leibniz ($\blacksquare$) converge

Per $x=0$, otteniamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\log n}{n^2+1}$ (0)

Poiché $n \cdot \frac{n\log n}{n^2+1} \sim \log n \to +\infty$, per il criterio degli infinitesimi (0) diverge positivamente.

L'insieme di convergenza della serie di potenze assegnata è quindi $[-2,0)$

3) Calcolare $\int_{C^+(3,2)} \frac{\mathrm{Log}_0 z}{(z-3-i)^3}\, dz$

Poiché $f(z) = \mathrm{Log}_0 z$ è olomorfa su $D(3,2)$ e $3+i \in D(3,2)$, per la II formula di rappresentazione di Cauchy, l'integrale assegnato è uguale a $\frac{2\pi i}{2} D^{(2)} \mathrm{Log}_0 z \,\Big|_{z=3+i} =$

$$\pi i\left(-\frac{1}{z^2}\right)\Big|_{z=3+i} = -\pi i \frac{1}{(3+i)^2} =$$

$$= \frac{-\pi i}{8+6i} = \frac{-\pi i(8-6i)}{100} = -\pi\left(\frac{3}{50}+\frac{2}{25}i\right)$$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Hermite-Liouville

Si veda, ad esempio, p. 92-93 degli appunti

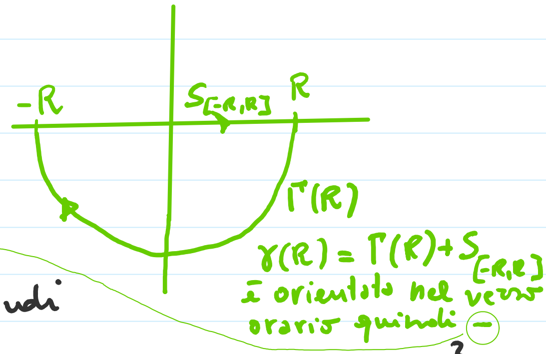
5) Calcolare usando il metodo dei residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{1+t^2}\, dt$$

$\left|\frac{e^{-it}}{1+t^2}\right| = \frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$ per $t \to \pm\infty$ quindi $f(t)$ è integrabile su $\mathbb{R}$

Consideriamo l'estensione a $\mathbb{C}$ di f: $\tilde{f}(z) = \frac{e^{-iz}}{1+z^2}$

Poiché $\tilde{f}(z) = \frac{1}{1+z^2} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$, possiamo applicare il lemma di Jordan per il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ e



quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{1+t^2}\,dt = -2\pi i \operatorname{Res}(\tilde{f}, -i)$

$-i$ è un polo semplice per $\tilde{f}$ e quindi

$$\operatorname{Res}(\tilde{f}, -i) = \lim_{z\to -i} (z+i)\frac{e^{-iz}}{1+z^2} = \lim_{z\to -i} (z+i)\frac{e^{-iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{i^2}}{-2i} = -\frac{e^{-1}}{2i}$$

da cui $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{1+t}\,dt = -2\pi i\left(-\frac{1}{2ie}\right) = \frac{\pi}{e}$

6) Determinare la serie di soli seni della funzione

$f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$;

Dimostrare poi che $\displaystyle\frac{1}{8} + 4\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)^3\pi^3} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi}$

Sia $\tilde{f}$ l'estensione dispari di f su $[-1,1]$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\sin\left(\frac{2k\pi x}{2}\right)dx = 2\int_0^1 x^2 \sin(k\pi x)\,dx$$

$$= -2\frac{x^2}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big|_0^1 + \frac{4}{k\pi}\int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{(k\pi)^2}\,x\sin(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{4}{(k\pi)^2}\int_0^1 \sin(k\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{2}{k\pi}(-1)^k + 0 + \frac{4}{(k\pi)^3}\cos(k\pi x)\Big|_0^1 = \frac{-2}{k\pi}(-1)^k + \frac{4}{(k\pi)^3}(-1)^k - \frac{4}{(k\pi)^3}$$

La serie di soli seni di f è dunque

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{4(-1)^k}{k^3\pi^3} - \frac{4}{k^3\pi^3} - \frac{2(-1)^k}{k\pi}\right)\sin(k\pi x)$$

Per $x = \frac{1}{2}$ essa converge a $\tilde{f}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Quindi

$$\frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{4(-1)^k}{k^3\pi^3} - \frac{4}{k^3\pi^3} - \frac{2(-1)^k}{k\pi} \right) \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

Poiché $\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1 \end{cases}$ otteniamo

$$\frac{1}{4} = \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{-8}{(2h+1)^3\pi^3} + \frac{2}{(2h+1)\pi} \right) (-1)^h$$

e quindi $\frac{1}{4} + 8\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)^3\pi^3} = 2\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi}$

da cui l'uguaglianza richiesta