Possibile svolgimento della prova del 03 febbraio 2026 – modulo A

1) **(a)** L'equazione proposta è $z^8 + 16z^4 = 0$. Raccogliendo a fattor comune z^4, si ottiene:

$$z^4(z^4 + 16) = 0.$$

Una prima soluzione (con molteplicità 4) è $z = 0$. Le altre soluzioni si ottengono risolvendo $z^4 = -16$. Scriviamo -16 in forma esponenziale: $-16 = 16e^{\mathrm{i}\pi}$. Le radici quarte sono date dalla formula:

$$z_k = \sqrt[4]{16}e^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}} = 2e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Esplicitando i valori in forma cartesiana:

- Per $k = 0$: $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$.
- Per $k = 1$: $z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$.
- Per $k = 2$: $z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.
- Per $k = 3$: $z_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

(b) Si considera l'insieme $A = \{(-1)^n\frac{2n}{n+1} \;:\; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Analizziamo separatamente le sottosuccessioni per n pari e dispari.

- Se n è pari, poniamo $n = 2k$ con $k \geq 1$. I termini sono $a_{2k} = \frac{4k}{2k+1}$. Verifichiamo che la successione è strettamente crescente studiando la disuguaglianza $a_{2(k+1)} > a_{2k}$:

  $$\frac{4(k+1)}{2(k+1)+1} > \frac{4k}{2k+1} \iff \frac{4k+4}{2k+3} > \frac{4k}{2k+1}.$$

  Poiché $k \geq 1$, i denominatori sono positivi otteniamo:

  $$(4k+4)(2k+1) > 4k(2k+3) \iff 8k^2 + 4k + 8k + 4 > 8k^2 + 12k.$$

  Semplificando i termini simili si ottiene $4 > 0$, che è sempre vera. Pertanto, la successione dei termini pari è strettamente crescente e dunque:

  $$\inf\{a_{2k}\} = \min\{a_{2k}\} = a_2 = \frac{4}{3}; \quad \sup\{a_{2k}\} = \lim_{k\to+\infty}\frac{4k}{2k+1} = 2.$$

- Se n è dispari, poniamo $n = 2k-1$ con $k \geq 1$. I termini sono $a_{2k-1} = -\frac{2(2k-1)}{2k}$. Poiché il modulo $\frac{2n}{n+1}$ è crescente (si dimostra come sopra) la successione opposta è strettamente decrescente e quindi:

  $$\sup\{a_{2k-1}\} = \max\{a_{2k-1}\} = a_1 = -1; \quad \inf\{a_{2k-1}\} = \lim_{k\to+\infty} -\frac{4k-2}{2k} = -2.$$

Confrontando i risultati parziali:

$$\sup A = 2, \quad \inf A = -2.$$

Poiché le sottosuccessioni di indici pari e dispari tendono asintoticamente a 2 e -2 senza mai raggiungerli (essendo strettamente monotone), l'insieme A non ammette né massimo né minimo.

2) La funzione è $f(x) = \log(x^2 - 3x + 2)$.

- **Dominio:** Si impone l'argomento del logaritmo strettamente positivo:

  $$x^2 - 3x + 2 > 0 \iff (x-1)(x-2) > 0.$$

  Il dominio naturale è $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

- **Asintoti:**

$$\lim_{x\to 1^-} \log(x^2-3x+2) = -\infty \implies x=1 \text{ asintoto verticale sinistro.}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \log(x^2-3x+2) = -\infty \implies x=2 \text{ asintoto verticale destro.}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log(x^2-3x+2) = +\infty.$$

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui controllando il limite di $f(x)/x$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log(x^2-3x+2)}{x} = 0.$$

Non ci sono asintoti obliqui né orizzontali.

- **Monotonia:**

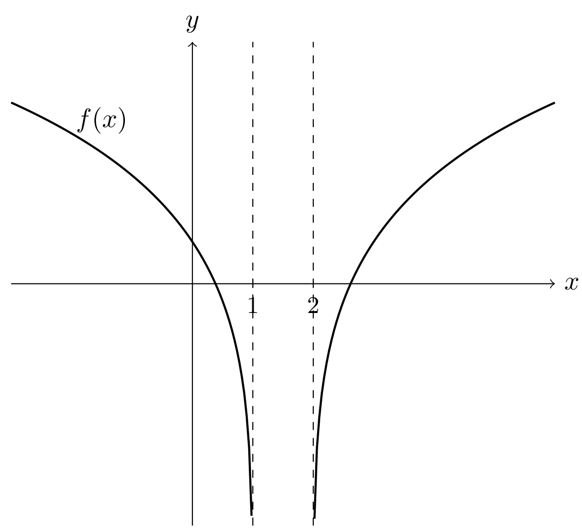
$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}.$$

Il denominatore è positivo sul dominio. Il segno della derivata dipende dal numeratore $2x-3$:

  - $f'(x) > 0 \iff x > 3/2$. Nel dominio, questo significa per ogni $x \in (2,+\infty)$. La funzione è strettamente crescente in $(2,+\infty)$.
  - $f'(x) < 0 \iff x < 3/2$. Nel dominio, questo significa per ogni $x \in (-\infty,1)$. La funzione è strettamente decrescente in $(-\infty,1)$.

Ne deduciamo che f non ha punti di estremo locale e poichè è una funzione continua e la sua restrizione all'intervallo $(2,+\infty)$ è strettamente crescente e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, l'immagine di f è $\mathbb{R}$.

- **Grafico qualitativo:**



3) Si deve calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^e \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Procediamo per parti. Siano $f(x) = \log x$ e $g'(x) = x^{-2}$. Allora $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = -\frac{1}{x}$.

$$\int \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\log x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\log x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Calcoliamo l'integrale definito:

$$\left[-\frac{\log x + 1}{x}\right]_1^e = \left(-\frac{\log e + 1}{e}\right) - \left(-\frac{\log 1 + 1}{1}\right) = -\frac{2}{e} - (-1) = 1 - \frac{2}{e}.$$

4) **(a)** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $h : I \to \mathbb{R}$ si dice *strettamente convessa* su I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \neq x_2$ e per ogni $t \in (0,1)$ vale:

$$h(tx_1 + (1-t)x_2) < th(x_1) + (1-t)h(x_2).$$

(b)

- **Caratterizzazione al primo ordine:** Se h è derivabile su I, h è strettamente convessa se e solo se per ogni $x, x_0 \in I$ con $x \neq x_0$:

$$h(x) > h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0).$$

- **Condizione sufficiente al secondo ordine:** Se h è derivabile due volte su I, condizione sufficiente affinché h sia strettamente convessa è che $h''(x) > 0$ per ogni $x \in I$.

(c) Applichiamo la condizione sufficiente alla funzione $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Calcoliamo la derivata prima:

$$h'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$h''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x) \cdot 2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.$$

Studiamo il segno di $h''(x)$. Il denominatore è sempre positivo. Il segno dipende da $6x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1}{3}$.

- Per $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ o $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, si ha $h''(x) > 0$, quindi h è strettamente convessa.
- Per $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, si ha $h''(x) < 0$, quindi h è strettamente concava.

I punti $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ sono punti di flesso.