Politecnico di Bari
CdL Ingegneria Informatica e Automazione
AA 2011-2012

Complementi di Analisi Matematica
Tracce di esame (con svolgimenti)

Docente: Dott. E. Caponio

A.A. 2011/2012 Appello 4 Luglio 2012 Traccia A

1) Dimostrare che lo spazio vettoriale delle funzioni da $(a,b) \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ha dimensione infinita

2) Dare la definizione di funzione armonica su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Sia $f \in H(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{C}$. Dimostrare che $\mathrm{Re} f$ e $\mathrm{Im} f$ sono funzioni armoniche.

3) Dare la definizione di raggio di convergenza per una serie di potenze.

Dimostrare che la serie delle derivate di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ con raggio di convergenza ρ è ancora una serie di potenze con raggio di convergenza ρ.

(Si assuma che esista $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.)

4) Determinare i numeri complessi z per cui $e^z = e^{2-z}$.

5) Determinare la somma dei residui nelle singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{(1-z^2)e^{\frac{1}{z^2}-1}}{1+z^2}.$$

6) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{(z^2-1)\sin(iz\frac{\pi}{2})}{z^2+1} \mathrm{d}z,$$

dove γ è la curva chiusa semplice il cui supporto è il bordo del triangolo di vertici $2i$, $-2i+2$, $-2-2i$, orientata nel verso aniorario.

Per gli anni accademici precedenti al 2011/2012, si sostituiscano gli esercizi 1) e 2) con i seguenti:

7) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale dell'algebra.

8) Dare la definizione di residuo. Dimostrare che per un polo z_0 di ordine 1:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) \neq 0.$$

Possibile svolgimento della prova del 04/07/2012

1) Si veda la lezione del 20/04/2012

2) Si veda, ad esempio, la lezione del 22/05/12

3) " " " " " " " "

4) $e^{z} = e^{2-z} \iff (e^{z})^2 = e^2 \iff e^{2z} = e^2$

$$\iff 2z = \operatorname{Log}(e^2) = 2 + i\,2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff z = 1 + ik\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

5) Poiché $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\})$ per il II teorema dei residui la somma dei residui nelle singolarità al finito è uguale all'opposto del residuo all'infinito

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) e^{z^2-1}}{1 + \frac{1}{z^2}} = -\frac{1}{z^2} \frac{\frac{z^2-1}{z^2} e^{z^2-1}}{\frac{z^2+1}{z^2}}$$

$$= \frac{(1-z^2)\, e^{z^2-1}}{(z^2+1) z^2}$$

$$\lim_{z \to 0} z^2 \frac{(1-z^2)\, e^{z^2-1}}{(z^2+1) z^2} = \frac{1}{e} \neq 0$$

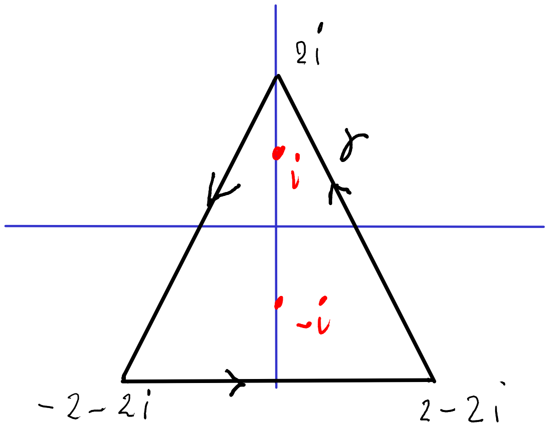
Quindi 0 è un polo di ordine 2 per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

Pertanto $\operatorname{Res}(f, \infty) = \lim_{z \to 0} D\left(\frac{1-z^2}{z^2+1} e^{z^2-1}\right)$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\left(-2z\, e^{z^2-1} + (1-z^2)\, e^{z^2-1}\, 2z\right)(z^2+1) - (1-z^2)\, e^{z^2-1}\, 2z}{(z^2+1)^2} = 0$$

6) Poiché le singolarità della funzione integranda f e cioè i punti $-i$ e i appartengono all'interno del triangolo di vertici $2i$, $-2i+2$, $-2-2i$

Possiamo applicare il I teorema dei residui ottenendo



$$\int_\gamma \frac{(z^2-1)\sin\left(iz\frac{\pi}{2}\right)}{z^2+1}\,dz =$$

$$= 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,-i) + \operatorname{Res}(f,i)\right)$$

Sia i che $-i$ sono poli semplici dato che

$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{(z^2-1)\sin\left(iz\frac{\pi}{2}\right)}{(z+i)} = \frac{-2\sin\left(-\pi/2\right)}{2i}$$

$$= \frac{1}{i} = -i \quad \left(= \operatorname{Res}(f,i)\right)$$

e

$$\lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{(z^2-1)\sin\left(iz\frac{\pi}{2}\right)}{(z-i)} = \frac{-2\sin\left(+\pi/2\right)}{-2i}$$

$$= \frac{1}{i} = -i \quad \left(= \operatorname{Res}(f,-i)\right)$$

Quindi $$\int_\gamma \frac{(z^2-1)\sin\left(iz\frac{\pi}{2}\right)}{z^2+1}\,dz = 2\pi i(-2i) = 4\pi$$

A.A. 2011/2012 Appello 18 Luglio 2012 Traccia A

1) Dare la definizione di convergenza totale per una serie di funzioni reali di variabile reale.
Dimostrare, poi, che se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente su $A \subset \mathbb{R}$ allora converge uniformemente su A.

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme su $(0, +\infty)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = nx \sin(1/nx) - \cos(\pi x/2n), \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

3) Enunciare il Principio di identità per le funzioni olomorfe.
Usarlo per dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

4) Enunciare e dimostrare il II Teorema dei residui.

5) Calcolare, usando il metodo dei residui,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} \mathrm{d}x.$$

6) Determinare la serie di soli seni della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1)$.
Stabilire quindi che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{\pi(2h+1)} - \frac{8}{\pi^3(2h+1)^3} \right) (-1)^h = 1/4.$$

Per l'anno accademico 2009/2010, si sostituisca l'esercizio 6) con il seguente:

7) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$. Discuterne convergenza puntuale e uniforme.

Possibile svolgimento prova del 18/07/2012

1) Si veda, ad esempio, la lezione del 16/05/12

2) Fissato $\bar{x} \in (0,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{x} \sin\left(\frac{1}{n\bar{x}}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{\bar{x}}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n\bar{x}}\right)}{\frac{1}{n\bar{x}}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{\bar{x}}{n}\right) = 1 - 1 = 0$$

Quindi $f_n \to 0$ puntualmente su $(0,+\infty)$

La converge non è uniforme su $(0,+\infty)$ in quanto posto $x_n = n$ risulta $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x)| \geq |f_n(n)| = \left| n^2 \sin\frac{1}{n^2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$= n^2 \sin\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n} 1 .$$

3) Si veda, per esempio, la lezione del 08/06/12 e quella del 11/06/12

4) Si veda, per esempio, la lezione del 22/06/12

5) La funzione $y = \frac{x^2}{x^4+1}$ è integrabile su $(0,+\infty)$ poiché

$$\frac{x^2}{x^4+1} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty. \quad \text{Inoltre dato che è pari:}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$$

Si consideri $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$; $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{\sqrt[4]{-1}\})$, inoltre

$$f_{/\mathbb{R}} = \frac{x^2}{x^4+1} .$$

Poiché $\lim_{|z|\to+\infty} z f(z) = 0$, usando il metodo dei residui otteniamo:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \pi i\left(Res\left(f, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + Res\left(f, e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)\right)$$

$e^{i\pi/4}$ e $e^{i\frac{3}{4}\pi}$ sono poli semplici per f, dato che

$$\lim_{z\to e^{i\pi/4}} \left(z-e^{i\pi/4}\right) f(z) = \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{4\left(e^{i\pi/4}\right)^3} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{i}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

e

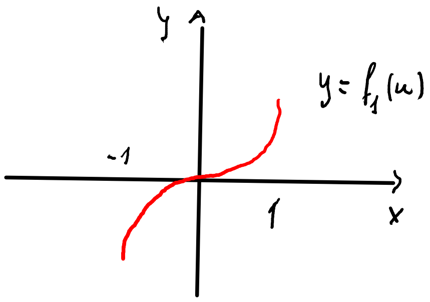
$$\lim_{z\to e^{i\frac{3}{4}\pi}} \left(z-e^{i3\pi/4}\right) f(z) = \frac{\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2}{4\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3} = \frac{e^{i\frac{3}{2}\pi}}{4e^{i\, 9/4\,\pi}} = -\frac{i}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

dunque

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi i^2}{4}\left(e^{-i\frac{3}{4}\pi} - e^{-i\pi/4}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\pi}{4}\sqrt{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

6) Consideriamo l'estensione dispari di f all'intervallo $(-1,1)$: $f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x\in[0,1) \\ -x^2 & \text{se } x\in(-1,0) \end{cases}$



La serie di Fourier di f_1 è per definizione la serie di soli seni di f. Poiché f_1 è dispari, $a_k = 0 \quad \forall k\in\mathbb{N}$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f_1(x)\sin\left(\frac{2\pi}{2}kx\right)dx =$$

$$= 2\int_0^1 x^2 \sin(\pi k x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}x^2\cos(\pi k x)\Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 2x\cos(\pi k x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos(\pi k) + \frac{4}{(k\pi)^2}\,x\sin(\pi k x)\Big|_0^1 -$$

$$- \frac{4}{(k\pi)^2}\int_0^1 \sin(\pi k x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}(-1)^k + 0 + \frac{4}{(k\pi)^3}\cos(\pi k x)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}(-1)^k + \frac{4}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right)$$

Dunque la serie di soli seni di f è data da

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[-\frac{2}{k\pi}(-1)^k + \frac{4}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right)\right]\sin(k\pi x) \qquad (*)$$

Poiché f è derivabile in $x = \frac{1}{2}$ sappiamo che, per $x = \frac{1}{2}$, $(*)$ converge a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Poiché $\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1,\ h \in \mathbb{N}\end{cases}$

$(*)$ diviene per $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{h=0}^{+\infty}\left(+\frac{2}{\pi(2h+1)} - \frac{8}{(\pi(2h+1))^3}\right)(-1)^h$$

che ha quindi per somma $\frac{1}{4}$

A.A. 2011/2012 Appello 06 Settembre 2012 Traccia A

1) Si consideri lo spazio $C([a,b]))$ delle funzioni continue sull intervallo $[a,b]$. Si dia la definizione di norma del sup su tale spazio e si verifichi che la definizione data soddisfi le proprietà che definiscono una norma.

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{x-1}{3}\right)^n+\frac{1}{(x+2)^n}\right].$$

3) Calcolare per serie l'integrale

$$\int_0^1 \cos(t^3)\mathrm{d}t.$$

4) Dare la definizione di singolarità eliminabile.

Si consideri poi il disco bucato $D'(z_0,r)$ di centro $z_0\in\mathbb{C}$ e raggio $r>0$ e una funzione $f\in H\big(D'(z_0,r)\big)$. Dimostrare che se esiste $L\geq 0$ tale che $|f(z)|\leq L$, per ogni $z\in D'(z_0,r)$, allora z_0 è una singolarità eliminabile per f.

5) Calcolare la somma dei residui nelle singolarità date da $\sqrt[3]{-1}$ per la funzione complessa

$$f(z)=\frac{1}{(z^3+1)z^2}.$$

6) Sia $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Dare la definizione di serie di Fourier di f. Ricavare l'espressione di tale serie come serie di polinomi trigonometrici, specificando le relazioni che legano i coefficienti della prima con quelli della seconda serie.

Per l'anno accademico 2010/2011, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

7) Si consideri lo spazio $C([a,b]))$ delle funzioni continue sull intervallo $[a,b]$. Si dia la definizione di distanza del sup su tale spazio e si verifichi che la definizione data soddisfi le proprietà che definiscono una metrica.

Possibile svolgimento prova del 06/09/12

1) Vedere, ad esempio, la lezione del 20/04/12

2) La serie assegnata può essere vista come somma di due serie geometriche di ragione $\frac{x-1}{3}$ e $\frac{1}{x+2}$

Pertanto essa converge se

$$\begin{cases} -1 < \frac{x-1}{3} < 1 \\ -1 < \frac{1}{x+2} < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 < x-1 < 3 \\ x+2 > 1 \ \vee \ x+2 < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x < 4 \\ x < -3 \ \vee \ x > -1 \end{cases} \quad -1 < x < 4$$

3) Poiché $\forall t \in \mathbb{R}: \cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, si ha che

$$\cos(t^3) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t^3)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{6n}}{(2n)!}$$; inoltre la

convergenza è totale e uniforme su ogni intervallo limitato in $\mathbb{R}$.
Possiamo quindi integrare termine a termine ottenendo:

$$\int_0^1 \cos(t^3)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 t^{6n}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{6n+1} t^{6n+1}\Big|_0^1 =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{6n+1}$$

4) Vedere ad esempio la lezione del 15/06/12

5) Ovviamente è possibile risolvere l'esercizio direttamente calcolando i residui nelle tre singolarità $\sqrt[3]{-1}$ (che sono poli semplici)
In alternativa possiamo usare il II teorema dei residui e calcolare solo i residui in 0 e ∞:

$$\sum_{z \in \sqrt[3]{-1}} \operatorname{Res}(f,z) + \operatorname{Res}(f,0) = -\operatorname{Res}(f,\infty)$$

0 è un polo di ordine 2 dato che $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^3+1} = 1 \neq 0$

Quindi $\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} D(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0} D\left(\frac{1}{z^3+1}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{-3z^2}{(z^3+1)^2} = 0$

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{z^3}+1\right)\frac{1}{z^2}} = -\frac{z^3}{z^3+1}$$

Poiché esiste il $\lim_{z\to 0} -\frac{z^3}{z^3+1} = 0$, 0 è una singolarità eliminabile per la funzione $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ e quindi $\mathrm{Res}(f,\infty) = 0$

Dunque $\sum_{z\in\sqrt[3]{-1}} \mathrm{Res}(f,z) = 0$

6) Si veda, ad esempio, la lezione del 27/06/12

A.A. 2011/2012 Appello 27 Settembre 2012 Traccia A

1) Studiare la convergenza puntuale su $[0, +\infty)$ della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{\log n} - 1}{n}.$$

2) Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie di potenze in $\mathbb{C}$. Dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in [0, +\infty]$ allora il raggio di convergenza ρ della serie è dato da

$$\rho = \begin{cases} 1/l & \text{se } l \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } l = +\infty \\ +\infty & \text{se } l = 0 \end{cases}$$

3) Dare la definizione di funzione analitica di variabile complessa in un punto e in un aperto di $\mathbb{C}$. Si consideri poi la funzione

$$f(x) = \frac{4z^7 - z^6 + ez - 1}{\sin z}.$$

Dire, motivando le risposte, se f è analitica in $\pi/2 + i$ e, in caso affermativo, stabilire quale sia il raggio massimo dei dischi di centro $\pi/2 + i$ su cui f è analitica.

4) Calcolare l'integrale

$$\int_{\triangle} \frac{i - z^2}{4z - i - 1} \mathrm{d}z,$$

dove $\triangle$ è il triangolo di vertici $1, i$ e 0, percorso in senso orario.

5) Sia $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dare la definizione di polo di ordine m. Dimostrare, poi, che se z_0 è un polo di ordine m allora esiste $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z)$ e che tale limite è diverso da 0.

6) Determinare la serie di soli seni della funzione $f(x) = x - 1$, $x \in [0, \pi)$. Studiarne la convergenza puntuale e uniforme.

Per l'anno accademico 2009/2010, si sostituisca l'esercizio 6) con il seguente:

7) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = |x|+1$, $x \in [-\pi, \pi]$. Studiarne la convergenza puntuale e uniforme.

Possibile svolgimento prova del 27/09/12

1) • Se $x=0$ la serie diviene $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ che diverge negativamente

• Se $x\in(0,1)$, $x^{\log n}\to 0$ quindi

$$\frac{x^{\log n}-1}{n}\sim -\frac{1}{n}$$ e dunque la serie diverge negativamente

• Se $x=1$, $x^{\log n}=1$ $\forall n\geq 1$ e dunque i termini della serie sono tutti nulli per cui essa converge a 0

• se $x>1$, $x^{\log n}\xrightarrow{n}+\infty$ (dato che $\log n\xrightarrow{n}+\infty$);

poiché $n\,\dfrac{x^{\log n}-1}{n}=x^{\log n}-1\longrightarrow+\infty$

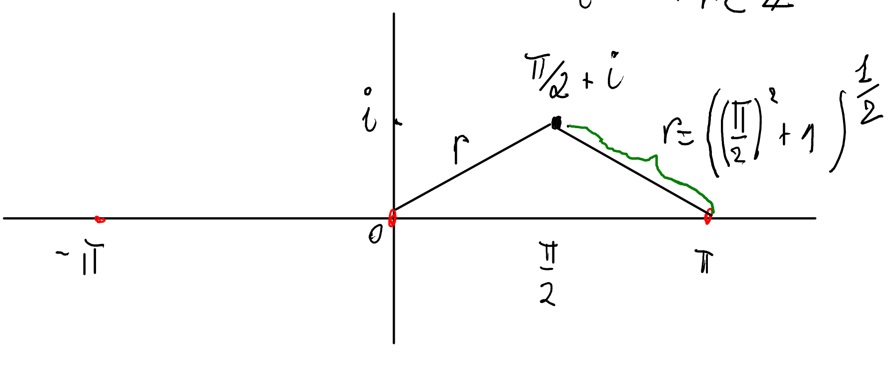
per il criterio degli infinitesimi la serie diverge positivamente

2) Si veda, ad esempio la lezione del 23/05/12

3) Per la definizione si veda ad esempio la lezione del 25/05/12.

f è analitica in $\frac{\pi}{2}+i$ in quanto rapporto di funzioni olomorfe: la funzione $z\in\mathbb{C}\mapsto\sin z$ si annulla per $z=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; dunque f è olomorfa in $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e poiché $\frac{\pi}{2}+i\in\Omega$ f è analitica in tale punto.

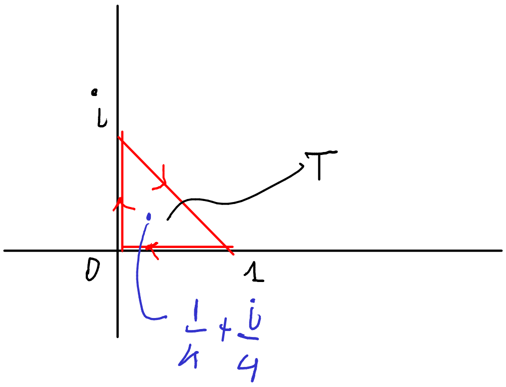
Il raggio massimo è uguale a $\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+1}$; infatti se $r>\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+1}$ allora il disco aperto di centro $\frac{\pi}{2}+i$ e raggio r interseca l'insieme $\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$



4) È sufficiente usare la formula di rappresentazione di Cauchy. Infatti sia $f(z) = \frac{i - z^2}{4}$;

f è intera quindi è olomorfa nel dominio aperto T il cui bordo è $-\Delta$ (cioè il triangolo Δ percorso in senso antiorario).

$$\frac{i - z^2}{4z - i - 1} = \frac{f(z)}{z - \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right)} \quad ; \quad \text{poiché } \frac{1}{4} + \frac{i}{4} \in T$$



possiamo applicare la formula di rappresentazione di Cauchy ottenendo

$$\int_{-\Delta} \frac{f(z)}{z - \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right)} dz = 2\pi i \, f\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) =$$

$$= 2\pi i \, \frac{1}{4}\left(i - \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} i \left(i - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{2i}{16} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} i \, \frac{7}{8} i = -\frac{7}{16}\pi$$

L'integrale assegnato è quindi uguale all'opposto di quello calcolato qui sopra.

5) Si veda, ad esempio, la lezione del 20/06/12

6) La serie dei seni della funzione assegnata è (per definizione di serie di seni) la serie di Fourier dell'estensione dispari su $(-\pi,\pi)$ di f. Quindi detta $\tilde f$ tale estensione abbiamo

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\tilde f(x)\,\sin(kx)}_{\text{è pari}}\,dx$$

$$\| $$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x-1)\,\sin(kx)\,dx =$$

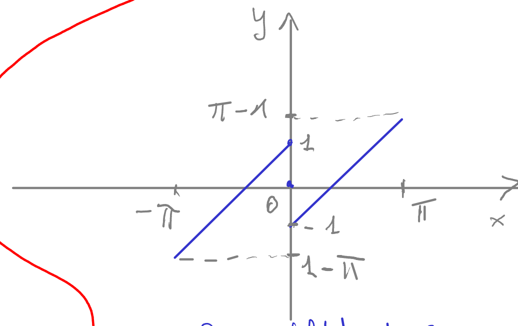


grafico dell'estensione dispari di f a $(-\pi,\pi)$

$$\tilde f(x) = \begin{cases} x-1, & x\in(0,\pi) \\ 0 & \text{se } x=0 \\ x+1, & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(x-1)\frac{(-\cos(kx))}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-1)\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left((\pi-1)\frac{(-\cos(k\pi))}{k} - (-1)\frac{(-1)}{k}\right) + 0$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(1-\pi)}{k}(-1)^k - \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\right) = -\frac{2}{k} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{k} - \frac{2}{k}\right) = \frac{2}{k}\left(1-\frac{2}{\pi}\right) & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque la serie dei seni di f è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k(1-\pi) - 1\right]\sin(kx)$$

Poiché f è di classe C^1 su $(0,\pi)$ tale serie converge uniformemente alla estensione periodica $\tilde{\tilde f}$ di periodo 2π di $\tilde f$ a $\mathbb{R}$ su ogni intervallo chiuso contenuto in $(m\pi, (m+1)\pi)$, $m\in\mathbb{Z}$.

Nei punti $m\pi$ converge a $0 = \frac{1}{2}\left\{\lim_{x\to m\pi^+}\tilde{\tilde f}(x) + \lim_{x\to m\pi^-}\tilde{\tilde f}(x)\right\}$

A.A. 2011/2012 Appello 28 Novembre 2012 Traccia A

1) Studiare la convergenza puntuale su $[0, +\infty)$ della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx-1}{\left((nx)^3+1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

2) Enunciare il teorema di Abel. Applicarlo poi per dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2$.

3) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω. Dimostrare che f è analitica in Ω.

4) Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

5) Determinare l'insieme dei numeri complessi z per cui $i\,\mathrm{Im} z = \mathrm{Log}_0(2e^z)$.

6) Usando il metodo dei residui, calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} (1+\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta$.

Possibile svolgimento della prova del 28/11/12

1) Per $x = 0$, la successione che definisce la serie è costante di costante valore 1 e quindi la serie diverge negativamente

Per $x > 0$
$$\frac{nx - 1}{(n^3x^3+1)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{nx}{n^{3/2}x^{3/2}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Poiché fissato $x > 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = +\infty$,

onde la serie assegnata diverge positivamente.

Dunque la serie assegnata diverge negativamente in $x=0$ e positivamente su $(0, +\infty)$

2) Si vede, ad esempio, la lezione del 25/05/12

3) Si vede, ad esempio, la lezione del 06/06/12

4) Si vede, ad esempio, la lezione del 11/06/12

5) Sia $z = x + iy$. z deve soddisfare l'uguaglianza
$$iy = \log_0 (2e^{x+iy}) = \log(2e^x) + i\tilde{y}$$
dove $\tilde{y}$ è l'unico numero in $[-\pi, \pi)$ per cui esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $y = \tilde{y} + 2k\pi$ (si osservi che $y = \tilde{y}$ se e solo se $k = 0$, cioè se e solo se $y \in [-\pi, \pi)$)

Dunque deve essere $i(y - \tilde{y}) = \log 2 + x$

Poiché $\log 2 + x$ è reale questa uguaglianza può essere soddisfatta se e solo se entrambi i membri sono zero.

Quindi $x = -\log 2$ e $y \in [-\pi, \pi)$.

6) L'integrale assegnato può essere calcolato facilmente con metodi elementari. Usiamo però, come richiesto, il metodo dei residui.

Poiché $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, abbiamo che

$$\int_0^{2\pi} (\cos^3\theta + 1)\, d\theta = \int_{\partial^+ D(0,1)} \left(\left(\tfrac{1}{2}\left(z + \tfrac{1}{z}\right)\right)^3 + 1 \right) \frac{1}{zi}\, dz$$

$$= \int_{\partial^+ D(0,1)} \left(\frac{1}{8} \frac{(z^2+1)^3}{z^3} + 1 \right) \cdot \frac{1}{zi}\, dz =$$

$$= \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{(z^2+1)^3 + 8z^3}{8z^4 i}\, dz = \frac{1}{8i} \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{(z^2+1)^3 + 8z^3}{z^4}$$

$= \dfrac{1}{8i}\, 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$, dove f è la funzione

$f(z) = \dfrac{(z^2+1)^3 + 8z^3}{z^4}$. Chiaramente 0 è un polo di

ordine 4 per f. Dunque

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{6} D^3 (z^4 f(z)) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{6} D^3 \left((z^2+1)^3 + 8z^3\right)$$

Sia $g(z) = (z^2+1)^3 + 8z^3$;

$g'(z) = 6(z^2+1)^2 2z + 24z^2$

$g''(z) = 12(z^2+1)4z^2 + 6(z^2+1)^2 2 + 48z$

$D^3 g(z) = 48 \cdot 2z^3 + 48(z^2+1)2z + 24(z^2+1)2z + 48$

$\lim_{z\to 0} D^3 g(z) = 48$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\frac{1}{8i}\, 2\pi i\, \frac{48}{6} = 2\pi$$

A.A. 2011/2012 Appello 05 Febbraio 2013 Traccia A

1) Enunciare il teorema di derivazione termine a termine per una serie di funzioni. Determinare poi l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

e usare il suddetto teorema per calcolare la sua somma.

2) Determinare i punti del piano complesso in cui la funzione $f(z) = (z^2 - 1)\bar{z}$ è olomorfa.

3) Calcolare l'integrale

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{z^3 - 1}{i(z-i)^4} \mathrm{d}z,$$

dove $C^+(0,2)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

4) Enunciare e dimostrare il Principio di identità per le funzioni olomorfe.

5) Calcolare i residui nelle singolarità al finito e all'infinito della funzione $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$.

6) Ricavare a partire dall'espressione dei coefficienti di Fourier di una funzione definita sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ quelli di una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ qualunque.

Possibile svolgimento della prova del 05/02/1

1) Si veda, ad esempio, la lezione del 16/05/12 per l'enunciato

La serie assegnata è una serie di potenze di centro $x_0 = 1$
Il suo raggio di convergenza si può ottenere calcolando

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$$

L'intervallo di convergenza è quindi $(1-1, 1+1) = (0,2)$
In 0, la serie converge in quanto diviene $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{h}$,
cioè la serie armonica a segni alterni moltiplicata per -1.
In 2, la serie diverge in quanto il suo termine generale è asintotico a $\frac{1}{n}$
La serie delle derivate è data da

$\sum_{n=0}^{+\infty} (x-1)^n$. Questa è una serie geometrica (di ragione $x-1$).

La sua somma è $\frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x}$, $x \in (0,2)$.

Poiché la serie delle derivate converge uniformemente in ogni intervallo $[a,b] \subset (0,2)$, possiamo applicare il teorema di derivazione termine a termine; quindi la somma f della serie assegnata è derivabile su $(0,2)$ e la sua derivata è uguale a $\frac{1}{2-x}$. Quindi $f(x) - f(1) = \int_1^x \frac{1}{2-t}\,dt$, $\forall x \in (0,2)$

Chiaramente $f(1) = 0$ (il primo termine della serie) e quindi

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{2-t}\,dt = -\log(2-x) + \log(1) = -\log(2-x),\ x \in (0,2)$$

(Osserviamo anche che per il teorema di Abel, deve essere anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = f(0) = \lim_{x \to 0} \left(-\log(2-x)\right) = -\log 2\,)$$

2) Posto $z = x+iy$, $f(z) = \left((x+iy)^2 - 1\right)(x-iy) =$

$$= \underbrace{x^3 + y^2x - x}_{u(x,y)} + i \underbrace{\left(x^2y + y^3 + y\right)}_{v(x,y)}$$

f ha parte reale u e parte immaginaria v differenziabili su $\mathbb{R}^2$ (sono entrambe funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$!) quindi i punti su cui f è olomorfa sono quelli in cui sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}$$ cioè

$$\begin{cases} 3x^2+y^2-1 = x^3+3y^2+1 \\ 2xy = -2xy \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=0 \\ x^2-y^2-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y^2+1=0 \end{cases}$$ nessuna soluzione

$$\cup$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

Quindi gli unici punti in cui f è olomorfa sono $z=1$, e $z=-1$

3) Dalla II formula di rappresentazione di Cauchy

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,2)} \frac{z^3-1}{i(z-i)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(III)}(i),$$ dove f è la funzione $f(z)=\frac{z^3-1}{i}$

Poiché $f^{(III)}(z) = \frac{6}{i}$, l'integrale assegnato è uguale a $\frac{2\pi i}{6}\frac{6}{i} = 2\pi$

4) Si veda, ad esempio, la lezione del 08/06/12

5) $f\in H(\mathbb{C}\setminus\{0\})$; l'unica singolarità al finito è 0

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right),0\right) = \mathrm{Res}\left(-e^{-\frac{1}{z}},0\right).$$

Poiché $-e^{-\frac{1}{z}} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,z^k}$, 0 è una singolarità essenziale per $-e^{\frac{1}{z}}$

e $\mathrm{Res}\left(-e^{\frac{1}{z}},0\right) \left(= a_{-1}\right) = -\frac{1}{1!} = -1$

Dal II teorema dei residui $\mathrm{Res}(f,0) = -\mathrm{Res}(f,\infty) = 1$

6) Si veda, ad esempio, la lezione del 27/06/12

A.A. 2011/2012 Appello 18 Febbraio 2013 Traccia A

1) Studiare la convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ e uniforme su un qualunque intervallo $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx) - 3nx}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

2) Dimostrare che se una serie di potenze converge in $z_1 \in \mathbb{C}$ allora converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |z_1$. Cosa consegue da questa proprietà relativamente all'insieme di convergenza di una serie di potenze?

3) Sia f una funzione olomorfa su una corona circolare $\mathcal{C}(z_0, a, b)$ di centro z_0 e raggi $a < b$. Siano $C(\bar{z}, r_1)$ e $C(\bar{z}, r_2)$ due circonferenze concentriche, con $r_1 < r_2$, contenute in $\mathcal{C}(z_0, a, b)$. Dimostrare che

$$\int_{C^+(\bar{z}, r_1)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \mathrm{d}z = \int_{C^+(\bar{z}, r_2)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \mathrm{d}z,$$

qualunque sia $m \in \mathbb{Z}$.

4) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $\cos(z) = i$.

5) Dare la definizione di polo di ordine m. Si consideri, poi, una funzione f olomorfa su un disco bucato di centro z_0. Dimostrare che se z_0 è un polo di ordine m per f allora

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

esiste (in $\mathbb{C}$) ed è diverso da 0.

6) Calcolare i coefficienti della serie di Fourier di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 \leq x < 1/2 \\ x & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e scrivere esplicitamente la somma parziale di indice 3. Cosa si può dire della convergenza di tale serie?

Possibile svolgimento della prova del 18/02/13

1) Fissiamo $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n\bar{x}) - 3n\bar{x}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{3\bar{x}}{n} = 0$$

Fissiamo ora $\bar{n} \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\left| f_{\bar{n}}(x) \right| \leq \frac{1}{\bar{n}^2} + \frac{3|\bar{x}|}{\bar{n}} \leq \underbrace{\frac{1}{\bar{n}^2} + 3\,\frac{\max\{|a|,|b|\}}{\bar{n}}}_{M_{\bar{n}}}, \quad \forall x \in [a,b]$$

Poiché $M_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, la convergenza è uniforme su $[a,b]$

2) Si veda, ad esempio, la lezione del 22/05/12

3) È sufficiente osservare che la funzione $g(z) = f(z)/(z-z_0)^m$ è olomorfa sulla corona circolare $T = \mathcal{C}(\bar{z}, r_1, r_2)$, qualunque sia $m \in \mathbb{Z}$, in quanto questa corona è contenuta in $\mathcal{C}(z_0, a, b)$ dove è olomorfa f.

Dal teorema di Cauchy-Goursat quindi

$$0 = \int_{\partial^+ T} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}\,dz = \int_{\mathcal{C}^+(\bar{z}, r_2)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}\,dz - \int_{\mathcal{C}^+(\bar{z}, r_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}\,dz .$$

4) $$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos(z) = i \iff e^{2iz} + 1 - 2i e^{iz} = 0$$

Poniamo $e^{iz} = w$: $w^2 - 2iw + 1 = 0 \iff w = i \pm \sqrt{-2} = (1 \pm \sqrt{2})i$

Deve quindi essere $e^{iz} = (1+\sqrt{2})i$ cioè

$$iz = \mathrm{Log}\left((1+\sqrt{2})i\right) = \log(1+\sqrt{2}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

da cui $-z = i\log(1+\sqrt{2}) - \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

e quindi $z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\log(1+\sqrt{2})$

oppure $e^{iz} = (1-\sqrt{2})i$ cioè

$$iz = \mathrm{Log}\left((1-\sqrt{2})i\right) = \log(\sqrt{2}-1) + \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

da cui $-z = i\log(\sqrt{2}-1) - \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

e quindi $z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log(\sqrt{2}-1)$

5) Si veda ad esempio la lezione del 20/06/12

6) $b_k = \int_{-1}^{1} \tilde{f}(x) \sin(k\pi x)\,dx$, dove $\tilde{f}$ è l'estensione dispari di f sull'intervallo $[-1,1]$. Quindi

$$b_k = 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\sin(k\pi x)dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\sin(k\pi x)\,dx$$

$$= \frac{-\cos(k\pi/2)}{k\pi} + \frac{1}{k\pi} - 2x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{2}{k\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos(k\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{k\pi} - \frac{\cos(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} - \frac{2\cos(k\pi)}{k\pi} + \frac{\cos(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} + \frac{2}{k^2\pi^2}\left(\sin(k\pi) - \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{k\pi} - \frac{2(-1)^k}{k\pi} - \frac{2}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

La somma parziale di indice 3 è quindi

$$S_3(x) = \underbrace{\left(\frac{3}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\right)}_{k=1}\sin(\pi x) \underbrace{- \frac{1}{2\pi}}_{k=2}\sin(2\pi x) + \underbrace{\left(\frac{1}{3\pi} + \frac{2}{9\pi^2}\right)}_{k=3}\sin(3\pi x)$$

La serie di soli seni di f converge puntualmente all'estensione su $\mathbb{R}$, periodica di periodo 2, di $\tilde{f}$ in ogni intervallo del tipo $(h, h+1)$, $h\in\mathbb{Z}$ dato che $\tilde{f}$ è continua su tali intervalli (la convergenza è uniforme su ogni intervallo chiuso $[a_h, b_h] \subset (h, h+1)$ dato che $\tilde{f}$ è di classe C^∞ a tratti e nel punto $h+\frac{1}{2}$ (l'unico punto dove $\tilde{f}$ non è derivabile) ha derivata destra e derivata sinistra finite). Nei punti del tipo $2h+1$, $h\in\mathbb{Z}$ converge a $\dfrac{\tilde{f}(2h+1)^+ - \tilde{f}(2h+1)^-}{2} = 0$, così pure nei punti del tipo $2h$, $h\in\mathbb{Z}$.

A.A. 2011/2012 Appello 29 Aprile 2013 Traccia A

1) Studiare la convergenza totale su un qualunque intervallo $[a,b]$, con $0 < a < b < +\infty$, della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\arctan\left(\frac{x}{n} - 2\right) + (-1)^n x^2}{x(n+e)^{5/3}}.$$

2) Dare la definizione di funzione reale analitica su un intervallo $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Enunciare e dimostrare, poi, una condizione sufficiente perché una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sia analitica in (a,b).

3) Enunciare il teorema di Cauchy-Goursat. Fornirne poi una dimostrazione assumendo che la funzione nell'enunciato del teorema sia di classe C^1.

4) Determinare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-i}}}{z^2+1}$$

e stabilire di che tipo esse siano.

5) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{C^+(0,2e)} \frac{z}{z^2 + 2\sqrt{e}z + 2e}\mathrm{d}z,$$

doce $C^+(0,2e)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio $2e$ percorsa in senso antiorario.

6) Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = (x-1)^2, \quad x \in (0,1).$$

Usarla poi per dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Possibile svolgimento della prova del 29/04/13

1) Poiché $a>0$, se $x\in[a,b]$ anche $x>0$ e si ha

$$|f_n(x)| = \frac{\left|\sqrt{n}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{n}-2\right)+(-1)^n x^2\right|}{x(n+e)^{5/3}} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{n}\,\frac{\pi}{2}}{a(n+e)^{5/3}} + \frac{b^2}{a(n+e)^{5/3}}, \quad \forall x\in[a,b]$$

Poiché

$$\frac{\sqrt{n}\,\frac{\pi}{2}}{a(n+e)^{5/3}} \sim \frac{\pi}{2a}\,\frac{1}{n^{7/6}}$$

e

$$\frac{b^2}{a(n+e)^{5/3}} \sim \frac{b^2}{a\,n^{5/3}}$$

entrambe le serie numeriche $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}\,\frac{\pi}{2}}{a(n+e)^{5/3}}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^2}{a(n+e)^{5/3}}$ convergono e dunque la serie di funzioni assegnata converge totalmente su $[a,b]$

2) Si veda ad esempio la lezione del 25/05/12

3) Si veda ad esempio la lezione del 06/06/12

4) Le singolarità al finito di f sono i punti i e $-i$, in cui il denominatore è 0 e, ancora, il punto i che annulla il denominatore dell'argomento dell'esponenziale.

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-i}}}{(z-i)(z+i)}$$

Poiché $\displaystyle\lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{e^{\frac{1}{z-i}}}{z-i} = -\frac{e^{\frac{i}{2}}}{2i}\neq 0$

$-i$ è polo semplice.

$$\frac{e^{\frac{1}{z-i}}}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z+i}\,\frac{1}{z-i}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-i)^k}\,\frac{1}{k!} = \frac{1}{z+i}\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-i)^{k+1}}\cdot\frac{1}{k!}}_{g(z)}$$

Chiaramente i è una singolarità essenziale per la funzione g qui sopra, dato che g è, per definizione, somma di una serie di Laurent con infiniti termini aventi potenze negative, e pertanto lo è anche per f.

Infatti se, per assurdo, esistesse $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\lim_{z \to i} (z-i)^m \frac{1}{z+i} g(z) = \ell \in \mathbb{C} \quad (\text{con } \ell \neq 0, \text{ se } m > 0)$$

dovrebbe esistere anche $\lim\limits_{z \to i} g(z)$ dato che

$$\lim_{z \to i} g(z) = \lim_{z \to i} f(z)(z+i) = \ell \cdot 2i,$$ in contraddizione con il fatto che i è una singolarità essenziale per g.

5) Osserviamo che la funzione integranda ha due singolarità corrispondenti agli zeri del polinomio di II grado al denominatore e cioè $z_1 = -\sqrt{e}(1+i)$, $z_2 = -\sqrt{e}(1-i)$

Poiché questi hanno modulo uguale a $\sqrt{2e}$ appartengono al disco aperto di centro 0 e raggio $2e$.

Possiamo applicare il I teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_{C^+(0,2e)} \frac{z}{z^2 + 2\sqrt{e}\,z + 2e}\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) \right)$$

Poiché $$\lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{z}{z^2 + 2\sqrt{e}\,z + 2e} = \lim_{z \to z_1} \frac{z_1}{z_1 - z_2} = \frac{z_1}{2i \operatorname{Im} z_1}$$

e analogamente $$\lim_{z \to z_2} (z - z_2) \frac{z}{z^2 + 2\sqrt{e}\,z + 2e} = \frac{z_2}{z_2 - z_1} = \frac{z_2}{2i \operatorname{Im} z_2}$$

le due singolarità sono poli semplici e

$$\int_{C^+(0,2e)} \frac{z}{z^2 + 2\sqrt{e}\,z + 2e}\, dz = 2\pi i \left(\frac{-\sqrt{e}(1+i)}{-2\sqrt{e}\, i} + \frac{-\sqrt{e}(1-i)}{2\sqrt{e}\, i} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{2\sqrt{e}\, i}{2\sqrt{e}\, i} \right) = 2\pi i$$

6) $$a_0 = \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$a_k = 2\int_0^1 (x-1)^2 \cos(2\pi k x)\,dx =$$

$$= \left[2(x-1)^2 \frac{1}{2\pi k} \sin(2\pi k x)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi k}\int_0^1 2(x-1)\sin(2\pi k x)\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{2}{\pi k\, 2\pi k}(x-1)\cos(2\pi k x)\right]_0^1 - \frac{1}{(\pi k)^2}\int_0^1 \cos(2\pi k x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{(\pi k)^2}(-1) - \frac{1}{(\pi k)^3 2}\left[\sin(2\pi k x)\right]_0^1 = \frac{1}{(\pi k)^2}$$

$$b_k = 2\int_0^1 (x-1)^2 \sin(2\pi k x)\,dx$$

$$= -\left[2(x-1)^2 \frac{1}{2\pi k}\cos(2\pi k x)\right]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 2(x-1)\cos(2\pi k x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\left(-(-1)^2\right) + \frac{1}{(k\pi)^2}\left[-(x-1)\sin(2\pi k x)\right]_0^1 +$$

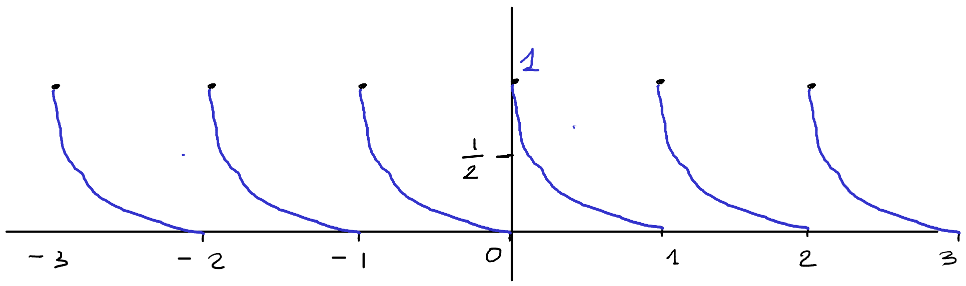
$$\frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 \sin(2\pi k x)\,dx = \frac{1}{\pi k} + 0 + \frac{1}{(k\pi)^3 2}\left[\cos(2\pi k x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{(k\pi)^3 2}\left(\cos(2\pi k) - 1\right) = \frac{1}{k\pi}$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k\pi)^2}\cos(2\pi k x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\pi}\sin(2\pi k x)$$

Per $x=0$ tale serie converge a $\frac{\tilde f(0^+) + \tilde f(0^-)}{2} = \frac{1}{2}$, dove $\tilde f$ è l'estensione periodica di periodo 1 di f a $\mathbb{R}$



PARTE DEL GRAFICO DI $\tilde f$

Pertanto deve essere $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k\pi)^2}$ cioè $\frac{1}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{k^2}$ ■