1)

A) Dimostrare che $\exists \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$

si veda, ad esempio, la lez. 3

B) Enunciare e dimostrare il teorema di confronto per la convergenza di un integrale improprio su un intervallo $[a, b)$
Si veda ad esempio la lez. 1

C) Sia $f \in C^0([a, +\infty))$. Dimostrare che se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell > 0$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

Si veda, ad esempio, la lez. 2

D) Dare la definizione di funzione che è un infinito di ordine α per $x \to b^-$, $b \in \mathbb{R}$
Dimostrare che se una funzione $f \in C^0([a, b))$, $b \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$, è un infinito di ordine $\alpha > 1$ allora $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$

Si veda, ad esempio, la lez. 2

2)
A) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{y-1}}{x^2 - 1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione $y' = e^{y-1} \frac{1}{x^2-1}$ è a variabili separabili. Poiché la funzione $h(y) = e^{y-1}$ non si annulla in alcun punto $y \in \mathbb{R}$, possiamo dividere e ottenere

$\frac{y'}{e^{y-1}} = \frac{1}{x^2-1}$; integrando ambo i membri otteniamo

$$-e^{1-y} = -\frac{1}{2}\left(\log(x+1) - \log(1-x)\right) + c$$

(si tenga presente che essendo il punto iniziale $x_0 = 0$ in un intorno di 0, $1-x > 0$)

Dovendo essere $y(0) = 1$, ricaviamo c:

$-1 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + c$ cioè $c = -1$

quindi $1-y = \log\left(\log\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)$ da cui

$y(x) = 1 - \log\left(\log\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)$

B) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$y'' + 2y = \sin\sqrt{2}x$

Il polinomio caratteristico associato all'equazione è λ^2+2

Esso ha radici $\pm\sqrt{2}\,i$. L'equazione omogenea associata ha

quindi integrale generale $y(x) = c_1 \sin(\sqrt{2}x) + c_2\cos(\sqrt{2}x)$

Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}$ con il metodo di similarità

Poiché $\sqrt{2}$ è soluzione del polinomio caratteristico $\bar{y}$ è da determinare

tra le funzioni di tipo $\bar{y}(x) = x\left(k_1\cos(\sqrt{2}x) + k_2\sin(\sqrt{2}x)\right)$

$\bar{y}'(x) = k_1\cos(\sqrt{2}x) + k_2\sin(\sqrt{2}x) + x\left(-k_1\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) + k_2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\right)$

$= \left(k_1 + \sqrt{2}k_2x\right)\cos(\sqrt{2}x) + \left(k_2 - k_1\sqrt{2}x\right)\sin(\sqrt{2}x)$

$\bar{y}''(x) = \sqrt{2}k_2\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}(k_1+\sqrt{2}k_2x)\sin(\sqrt{2}x) - k_1\sqrt{2}x\sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}(k_2 - k_1\sqrt{2}x)\cos(\sqrt{2}x)$

$= \left(2\sqrt{2}k_2 - 2k_1x\right)\cos(\sqrt{2}x) - \left(2\sqrt{2}k_1 + 2k_2x\right)\sin(\sqrt{2}x)$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$2\sqrt{2}k_2\cos(\sqrt{2}x) - 2\sqrt{2}k_1\sin(\sqrt{2}x) = \sin(\sqrt{2}x)$ da cui

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}k_2 = 0 \\ -2\sqrt{2}k_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 = 0 \\ k_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Quindi $\bar{y}(x) = -\frac{x}{2\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x)$

L'integrale generale dell'equazione assegnata è dunque

$y(x) = c_1\sin(\sqrt{2}x) + c_2\cos(\sqrt{2}x) - \frac{x}{2\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x)$

C) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$y'' - 3y' = x - e^x$

Il polinomio caratteristico associato all'equazione è $\lambda^2 - 3\lambda$. Esso ha radici 0 e 3.

L'equazione omogenea associata ha integrale generale

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Il termine noto dell'equazione $g(x) = x - e^x$ non è del tipo per cui si possa usare direttamente il metodo di similarità. Possiamo, però, considerare $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = -e^x$ e determinare una soluzione $y_1 = y_1(x)$ di $y'' - 3y' = x$ (1)

e una $y_2 = y_2(x)$ di $y'' - 3y' = -e^x$, (2)

usando il metodo di similarità; la funzione somma $y_1 + y_2$ è una soluzione di $y'' - 3y' = x - e^x$.

(1): dato che 0 è una radice del polinomio caratteristico cerchiamo $y_1(x)$ del tipo $y_1(x) = x(ax+b)$

$y_1'(x) = ax + b + ax = 2ax + b$

$y_1''(x) = 2a$. Quindi deve essere

$2a - 6ax - 3b = x$ cioè $\begin{cases} -6a = 1 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases}$

da cui $a = -\frac{1}{6}$ e $b = -\frac{1}{9}$

quindi $y_1(x) = -x\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{9}\right)$

(2): cerchiamo $y_2(x)$ del tipo $y_2(x) = ke^x$

Deve essere $ke^x - 3ke^x = -e^x$ cioè $-2ke^x = -e^x$ da cui $k = \frac{1}{2}$

Quindi $y(x) = -x\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2}e^x$ è una soluzione dell'equazione assegnata.

L'integrale generale è dunque

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{3x} - x\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2}e^x$$

D) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + (x-1)^2 \\ y(1) = e \end{cases}$$

Sappiamo che la soluzione del problema è data da

$$y(x) = e^{\int_1^x 1\,ds} \cdot \left(e + \int_1^x (s-1)^2 e^{-\int_1^s 1\,d\tau} \right)$$

$$= e^{x-1} \left(e + \int_1^x (s-1)^2 e^{-(s-1)}\, ds \right)$$

Calcoliamo $\int_1^x (s-1)^2 e^{-(s-1)} ds$ ponendo $(s-1) = t$

$$\int_0^{x-1} t^2 e^{-t}\, dt = -t^2 e^{-t} \Big|_0^{x-1} + 2\int_0^{x-1} t e^{-t}\, dt =$$

$$= -(x-1)^2 e^{-(x-1)} - 2te^{-t}\Big|_0^{x-1} + 2\int_0^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$$= -(x-1)^2 e^{-(x-1)} - 2(x-1)e^{-(x-1)} - 2e^{-(x-1)} + 2$$

La soluzione è quindi

$$y(x) = e^x - (x-1)^2 - 2(x-1) - 2 + 2e^{x-1}$$

3) Stabilire se la funzione

A) $f(x,y) = \sin\left(\frac{x-y}{x+y} \pi \right)$

B) $f(x,y) = \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \pi \right)$

C) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-y}{2x+y} \right)$

D) $f(x,y) = \left(\frac{x+2y}{x-2y} \right)^{2/5}$

ammette limite nel punto $(0,0)$.

Stabilire poi se è differenziabile in $(x_0,y_0) =$

A) $(1,0)$

B) $(0,1)$

C) $(1,0)$

D) $(0,1)$

e in caso positivo determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$

In tutte le tracce f non ha limite in $(0,0)$ in quanto la funzione f è del tipo

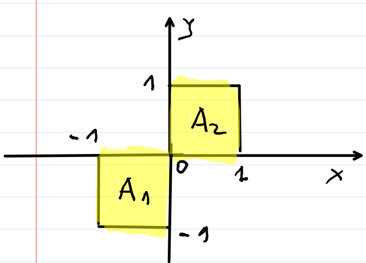
$g \circ h$ con h funzione omogenea di grado 0
e g funzione continua su $\mathbb{R}$ (non costante)
Quindi sulle rette del fascio proprio di centro $(0,0)$, $y = mx$
h assume valore costante C_m dipendente da m
e quindi $\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} g(C_m) = g(C_m)$

In tutte le tracce f è differenziabile in (x_0, y_0) in quanto (x_0, y_0) è interno al dominio di f (che è aperto) ed f è C^∞ sul suo dominio. Quindi per il teorema del differenziale f è differenziabile in (x_0, y_0).
L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ è

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (*)$$

è quindi sufficiente valutare f in (x_0,y_0)
calcolare poi le sue derivate partiali (con le regole di derivazione), valutarle in (x_0,y_0) e sostituire in $(*)$

4) Calcolare il seguente integrale
A) $\int_A (x+y)\sin x \, dx\, dy$ dove A è l'insieme rappresentato in figura



$A = A_1 \cup A_2$

Poiché l'immagine del dominio A_1 mediante la simmetria rispetto all'origine è il dominio A_2 ed f è invariante rispetto a tale simmetria (infatti

$$f(-x,-y) = (-x-y)\sin(-x) = (x+y)\sin x = f(x,y))$$

l'integrale assegnato è uguale a

$$2\int (x+y)\sin x \, dx\, dy = 2\int^1 \left(\int^1 (x+y)\sin x \, dy \right) dx$$

l'integrale assegnato è uguale a

$$2\int_{A_2}(x+y)\sin x\,dx\,dy = 2\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y)\sin x\,dy\right)dx$$

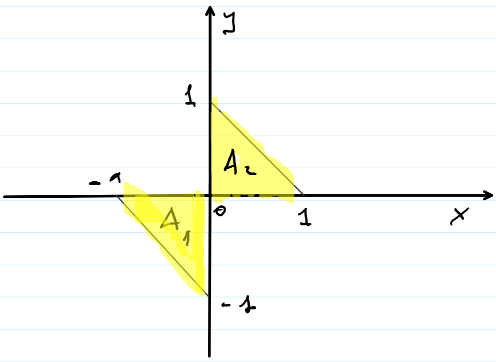
$$= 2\int_0^1 x\sin x\,dx + 2\int_0^1 \sin x\left(\int_0^1 y\,dy\right)dx$$

$$= -2\,x\cos x\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \cos x\,dx + \int_0^1 \sin x\,dx$$

$$= -2\cos 1 + 2\sin 1 - \cos 1 + 1$$

$$= 2\sin 1 - 3\cos 1 + 1$$

B) $\int_A |x|y^2\,dx\,dy$ dove A è l'insieme rappresentato in figura



$A = A_1 \cup A_2$

Poichè l'immagine del dominio A_1 mediante la simmetria rispetto all'origine è il dominio A_2 ed f è invariante rispetto a tale simmetria (infatti

$$f(-x,-y) = |-x|(-y)^2 = |x|\,y^2 = f(x,y)\;)$$

l'integrale assegnato è uguale a

$$2\int_{A_2}|x|y^2\,dx\,dy = 2\int_{A_2} x y^2\,dx\,dy = 2\int_0^1 x\left(\int_0^{1-x} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= 2\int_0^1 x \;\frac{1}{3}y^3\Big|_0^{1-x} dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x\,(1-x)^3\,dx$$

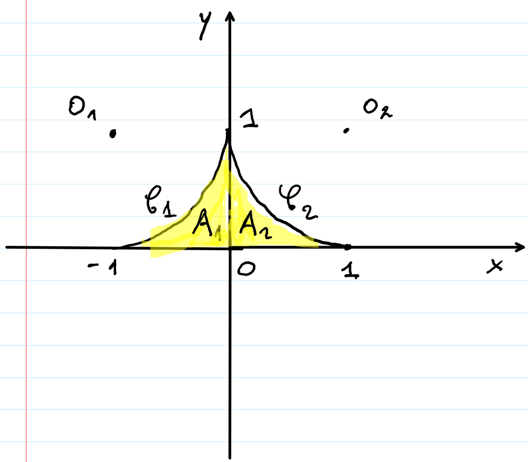
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x\,(1-3x+3x^2-x^3)\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}\;\frac{-10+15-4}{20} = \frac{1}{30}$$

C) ...

- 3 (2   4   5)   3   20   30

c) $\int\limits_A (y-1)\,dx\,dy$ dove A è l'insieme rappresentato in figura



$A = A_1 \cup A_2$

$\mathcal{C}_1$ arco di circonferenza di centro $O_1(-1,1)$ e raggio 1

$\mathcal{C}_2$ arco di circonferenza di centro $O_2(1,1)$ e raggio 1

Poichè l'immagine del dominio A_1 mediante la simmetria rispetto all'asse delle y è il dominio A_2 ed f è invariante rispetto a tale simmetria (infatti

$f(-x, y) = y-1 = f(x,y)$)

l'integrale assegnato è uguale a $2\int\limits_{A_2} (y-1)\,dx\,dy$

A_2 è un dominio normale rispetto all'asse delle ~~x~~

infatti è definito da $0 \le y \le 1$ e $0 \le x \le 1 - \sqrt{1-(y-1)^2}$

(si tenga presente che l'equazione della circonferenza di cui $\mathcal{C}_2$ è un arco

è $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ da cui $|x-1| = \sqrt{1-(y-1)^2}$

ed essendo $x < 1$ lungo $\mathcal{C}_2$ si ha $1 - x = \sqrt{1-(y-1)^2}$).

Quindi

$$2\int\limits_{A_2} (y-1)\,dx\,dy = 2\int_0^1 (y-1)\left(\int_0^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} dx\right) dy$$

$$= 2\int_0^1 (y-1)\left(1 - \sqrt{1-(y-1)^2}\right) dy$$

$$= 2\int_0^1 (y-1)\,dy - 2\int_0^1 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$$

1

$$= 2\int_0 (y-1)\,dy - 2\int_0 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$$

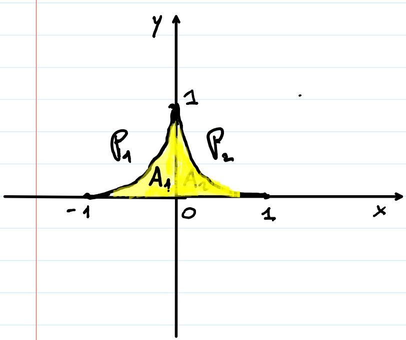
$$= (y-1)^2\Big|_0^1 - 2\int_0^1 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$$

Calcoliamo $-2\int_0^1 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$ per sostituzione ponendo $1-(y-1)^2 = t$ (quindi $dt = -2(y-1)\,dy$);

ottemiamo $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $-1+\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

D) $\displaystyle\int_A y^2\,dxdy$ dove A è l'insieme rappresentato in figura



$A = A_1 \cup A_2$

P_1 arco di parabola di vertice $V_1(-1,0)$ e asse parallelo all'asse delle y

P_2 arco di parabola di vertice $V_2(1,0)$ e asse parallelo all'asse delle y

entrambi passanti per il punto $(0,1)$

Poichè l'immagine del dominio A_1 mediante la simmetria rispetto all'asse delle y è il dominio A_2 ed f è invariante rispetto a tale simmetria (infatti

$f(-x, y) = y^2 = f(x,y)$)

l'integrale assegnato è uguale a $2\displaystyle\int_{A_2} y^2\,dxdy$

A_2 è un dominio normale rispetto all'asse delle x definito da $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le (x-1)^2$

(infatti la parabola di cui P_2 è un arco ha equazione $y = (x-1)^2$)

Quindi $\displaystyle 2\int_{A_2} y^2\,dxdy = 2\int_0^1 \left(\int_0^{(x-1)^2} y^2\,dy\right) dx = 2\int_0^1 \frac{1}{3}\, y^3\Big|_0^{(x-1)^2} dx$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (x-1)^6\,dx = \frac{2}{21}(x-1)^7\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{21}\left(0 - (-1)^7\right) = \frac{2}{21}$$