TRACCIA A

1) - a)

Scrivere in forma cartesiana il numero complesso

$$\left(e^{1+i\frac{\pi}{6}}\right)^6$$

Qual è il modulo delle radici dodicesime del numero precedente?

$$\left(e^{1+i\pi/6}\right)^6 = \left(e\, e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = e^6 e^{i\pi} = -e^6$$

$\sqrt[12]{-e^6}$ hanno tutte modulo uguale a $\sqrt[12]{e^6} = \sqrt{e}$

b)

Determinare dominio ed eventuale monotonia della funzione

$$f(x) = 1 + \arccos(x-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-1}$$

Determinare poi l'immagine di f

dom f : $-1 \le x-1 \le 1$ cioè $0 \le x \le 2$

f è somma delle funzioni $g(x) = 1 + \arccos(x-1)$ e $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-1}$

g è somma di una costante e della funzione composta

$x \in [0,2] \longmapsto x-1 \longmapsto \arccos(x-1)$.

strett. crescente strett. decrescente $\longrightarrow$ strett. decrescente

quindi g è strettamente decrescente

h è composta da

$x \in [0,2] \longmapsto x^3-1 \longmapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-1}$

strett. crescente strett. decrescente $\longrightarrow$ strett. decrescente

Poiché g e h sono strett. decrescenti, f è strett. decrescente

$f \in C^0([0,2])$, quindi $f([0,2]) = [f(2), f(0)]$

$f(2) = 1 + 0 + \frac{1}{2^7}$, $f(0) = 1 + \pi + 2 = 3 + \pi$

2) Calcolare almeno due dei seguenti limiti

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sin(2x^2)-\cos(x)}{x^2+x^3}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^x$

c) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^4\log^2 x-(1+2x)^2+1}{x}$

a) $\dfrac{1-\sin(2x^2)-\cos(x)}{x^2+x^3} = \left(\dfrac{1-\cos x}{x^2} - \dfrac{\sin(2x^2)}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x^2)}{x^2} = 2$

quindi $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sin(2x^2)-\cos(x)}{x^2+x^3} = 1\left(\dfrac{1}{2}-2\right) = -\dfrac{3}{2}$

b) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^x = \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x = \left(\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{-x^2}\right)^{-\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to +\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{-x^2} \overset{-x^2=y}{=\!=} \lim_{y\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y = e$

$\lim_{x\to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ quindi $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1$

c) $\dfrac{x^4\log^2 x-(1+2x)^2+1}{x} = x^3\log^2 x - \dfrac{(1+2x)^2-1}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} x^3\log^2 x = 0$;

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(1+2x)^2-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{(1+2x)^2-1}{2x}\cdot 2 \overset{2x=y}{=} \lim_{y\to 0}\dfrac{(1+y)^2-1}{y}\cdot 2 = 2\cdot 2 = 4$

Quindi $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^4\log^2 x-(1+2x)^2+1}{x} = 0-4 = -4$

3) Dimostrare che la seguente funzione ha un punto di flesso in $x = \log\frac{1}{2}$

$f(x) = (e^x-1)^2$

Qual è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di flesso?

f è derivabile due volte su $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2(e^x - 1)e^x$

$f''(x) = 2e^x \cdot e^x + 2(e^x - 1)e^x = 2e^x(e^x + e^x - 1) = 2e^x(2e^x - 1)$

$f''(x) > 0 \iff 2e^x - 1 > 0 \iff x > \log\frac{1}{2}$

Quindi f è strett. convessa in $[\log\frac{1}{2}, +\infty)$, strett. concava in $(-\infty, \log\frac{1}{2}]$
e dunque $x = \log\frac{1}{2}$ è un punto di flesso

La retta tangente al grafico di f in tale punto ha equazione

$y = f(\log\frac{1}{2}) + f'(\log\frac{1}{2})(x - \log\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x - \log\frac{1}{2})$

4) Dare la definizione di funzione continua in un punto.

Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale per le funzioni continue

Si vedano pagg. 240-241 del manuale consigliato

TRACCIA B

1) - a)

Scrivere in forma trigonometrica le radici quarte del numero complesso

$e^{2+\pi i}$

Qual è il modulo delle potenze ottave delle radici precedenti?

$e^{2+\pi i} = e^2 e^{\pi i}$ quindi $|e^2 e^{\pi i}| = |e^2|\,|e^{\pi i}| = e^2$

e dunque $\sqrt[4]{e^{2+\pi i}} = \sqrt{e}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$

Tutte hanno modulo $\sqrt{e}$ quindi le loro potenze ottave

hanno modulo e^4.

b)

Determinare dominio ed eventuale monotonia della funzione

$f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - 1 + \log_3(x^2 - 1)$

Determinare poi l'immagine di f

Determinare poi l'immagine di f

$$\text{dom} f: \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x<-1 \vee x>1 \end{cases} \quad \Big\} x>1$$

f è somma delle funzione $g(x) = \text{arctg}(\sqrt{x})-1$ e $h(x) = \log_3(x^2-1)$

g è somma di una costante e della funzione composta

$$x \in (1,+\infty) \longmapsto \sqrt{x} \longmapsto \text{arctg}(\sqrt{x})$$

strett. crescente   strett. crescente $\longrightarrow$ strett. crescente

quindi g è strettamente crescente

h è composta da

$$x \in (1,+\infty) \longmapsto x^2-1 \longmapsto \log_3(x^2-1)$$

strett. crescente   strett. crescente $\longrightarrow$ strett. crescente

(in $(1,+\infty)$!)

Poiché g e h sono strett. crescenti, f è strett. crescente

$f \in C^0((1,+\infty))$, quindi $f((1,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \left\{\frac{\pi}{4}-1-\infty\right\} = -\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \left\{\frac{\pi}{2}-1+\infty\right\} = +\infty$$

2) Calcolare almeno due dei seguenti limiti

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3}-1-\text{tg}(3x^3)}{x^3+x^5}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+\log x}{\log x}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 2^x + \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^3-1\right]x^2}{x}$

a) $$\frac{e^{x^3}-1-\text{tg}(3x^3)}{x^3+x^5} = \left(\frac{e^{x^3}-1}{x^3} - \frac{\text{tg}(3x^3)}{x^3}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(3x^3)}{x^3} = 3$$

quindi $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1-\text{tg}(3x^3)}{x^3+x^5} = 1(1-3) = -2$$

b) $\left(\dfrac{1+\log x}{\log x}\right)^x = \left(1+\dfrac{1}{\log x}\right)^x = \left(\left(1+\dfrac{1}{\log x}\right)^{\log x}\right)^{x/\log x}$

b) $\left(\frac{1+\log x}{\log x}\right)^{x} = \left(1+\frac{1}{\log x}\right)^{x} = \left(\left(1+\frac{1}{\log x}\right)^{\log x}\right)^{x/\log x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\log x}\right)^{\log x} \overset{\log x = y}{=\!=} \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x} = +\infty \quad \text{quindi} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\log x}{\log x}\right)^{x} = \{e^{+\infty}\} = +\infty$$

c) $$\frac{x^3 2^x + \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 - 1\right]x^2}{x} = x^2 2^x + \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 - 1\right]x$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 2^x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 - 1\right]x \overset{\frac{1}{x}=y}{=\!=} \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^3 - 1}{y} = 3$$

quindi $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3 2^x + \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 - 1\right]x^2}{x} = 3$

3) Dimostrare che la seguente funzione è strettamente decrescente su $(0,e)$ e strettamente concava su $(e^2,+\infty)$

$$f(x) = (\log x - 1)^2$$

f è derivabile due volte su $(0,+\infty)$

$$f'(x) = 2(\log x - 1)\cdot\frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 2\,\frac{1}{x^2} - 2(\log x - 1)\frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2}(1 - \log x + 1) = \frac{2}{x^2}(2-\log x)$$

$f'(x) < 0$ se e solo se $\log x - 1 < 0$ cioè se $x \in (0,e)$

quindi f è strett. decrescente su $(0,e)$

$f''(x) < 0$ se e solo se $2 - \log x < 0 \iff x > e^2$

quindi f è strettamente concava su $(e^2,+\infty)$

4) Dare la definizione di funzione crescente su un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

Dimostrare che ogni funzione crescente su un intervallo chiuso e limitato è integrabile secondo Riemann

Si veda pag. 238 del manuale consigliato