Appello Complementi di Analisi Matematica

mercoledì 10 febbraio 2016 11:00

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale g periodico di periodo π associato alla

AA 2014-16 funzione $f: [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(2t)$

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{1-e^{-s\pi}} \int_0^{\pi} e^{-st} \cos(2t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-s\pi}} \mathcal{L}\left(\cos_+(2t) - \cos_+\left(2(t-\pi)\right)\right)(s)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(\frac{s}{4+s^2} - e^{-\pi s} \frac{s}{4+s^2} \right) = \frac{s}{4+s^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} s > 0$$

Oppure semplicemente si osservi che il segnale periodico g coincide con $\cos_+(2t)$ e quindi $\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(\cos_+(2t))$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$ (Attenzione! se si osserva che $g(t) = \cos_+(2t)$, allora per ricavare $\mathcal{L}(g)(s)$ non usiamo la formula sulla trasformata di un segnale periodico e quindi non il fattore $\frac{1}{1-e^{-\pi s}}$ non compare!

Cioè $\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \mathcal{L}(\cos_+(2t)) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{s}{4+s^2}$ è sbagliato!)

1)

AA precedenti Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $f_n(t) = \dfrac{t\, e^{-nt}}{1+n^2t^2}$

Osserviamo che $\lim_n f_n(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$. Cerchiamo dunque di stabilire se f_n converge uniformemente a 0 su $[0,1]$

Poiché $\left| \dfrac{t\, e^{-nt}}{1+n^2t^2} \right| \le \underbrace{t\, e^{-nt}}_{g_n(t)} \quad \forall t \in [0,1]$,

possiamo cercare di stabilire che posto $M_n := \max_{t\in[0,1]} t\, e^{-nt}$

$M_n \to 0$, $n \to \infty$.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, $g_n'(t) = e^{-nt} - nt\, e^{-nt} = e^{-nt}(1-nt)$

Per cui g_n è crescente tra $[0, \frac{1}{n}]$ e decrescente tra $[\frac{1}{n}, 1]$

M_n è quindi uguale a $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} e^{-1} \xrightarrow{n} 0$

Dunque $C_n = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t)| \le M_n = \frac{1}{en}$ e quindi anche $C_n \xrightarrow{n} 0$

cioè f_n converge uniformemente su $[0,1]$ a 0

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\frac{1}{n^2}\, x^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\sin\frac{1}{(n+1)^2}}{n \sin\frac{1}{n^2}} = \frac{(n+1)^2 \sin\frac{1}{(n+1)^2}}{n^2 \sin\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n} 1 .$$

Il raggio di convergenza della serie è quindi 1 e l'intervallo di convergenza $(-1,1)$. Per $x=1$ otteniamo

$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\frac{1}{n^2}$; poiché $n \sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ essa non converge

Per $x=-1$ otteniamo

$\sum (-1)^n n \sin\frac{1}{n^2}$. Cerchiamo di stabilire se le ipotesi del criterio di Leibniz sono soddisfatte:

Ovviamente $n \sin\frac{1}{n^2} \to 0$. Consideriamo ora la funzione

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x^2} \quad ; \quad f'(x) = \sin\frac{1}{x^2} + x \cos\frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$
$$= \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$$

Osserviamo che per $x>1$ $\cos\frac{1}{x^2} > 0$ e quindi su $(1,+\infty)$

$$f'(x) < 0 \iff \operatorname{tg}\frac{1}{x^2} < \frac{2}{x^2}$$

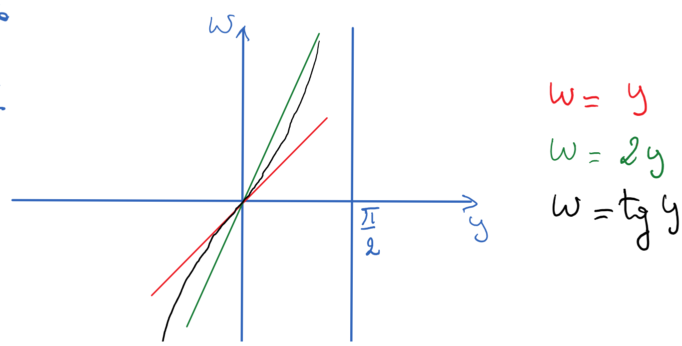
Se poniamo $\frac{1}{x^2} = y$ questa equivale a $\operatorname{tg} y < 2y$

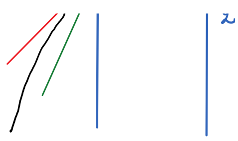
che per $y<\delta$ con $\delta>0$ piccolo, cioè per $x > \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

è soddisfatta dato

che $D \operatorname{tg} y \big|_{y=0} = 1$

$D\, 2y \big|_{y=0} = 2$





Pertanto la successione $n \sin \frac{1}{n^2}$ è definitivamente decrescente e quindi per il criterio di Leibniz la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n \sin \frac{1}{n^2}$ converge.

In definitiva, l'insieme di convergenza puntuale è $[-1, 1)$ e si ha convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo $[-1, a]$, con $-1 \leq a < 1$

3) Dare la definizione di funzione armonica e di armonica coniugata di una funzione armonica. Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza di una armonica coniugata

Si veda, ad esempio, p. 96-97 appunti

4) Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,2)} \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-i)^2 z} \, dz$$

dove $\mathcal{C}^+(0,2)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata nel verso antiorario

$f(z) = \dfrac{\sin \frac{1}{z}}{(z-i)^2 z}$ ha due singolarità 0 e i. i è un polo di ordine 2, 0 una singolarità essenziale. Entrambe le singolarità appartengono a $D(0,2)$

Possiamo quindi usare il I e il II teorema dei residui per calcolare $\int_{\mathcal{C}^+(0,2)} f(z)\, dz$

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,2)} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,-i) + \operatorname{Res}(f,0) \right) = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty)$$

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right)$$

$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\,\frac{\sin z}{\left(\frac{1}{z}-i\right)^2 \frac{1}{z^2}} = -\frac{1}{z^2}\,\frac{\sin z}{\frac{(1-iz)^2}{z^4}} = -\frac{z^2 \sin z}{(1-iz)^2}$$

Come si vede 0 non è una singolarità per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

per cui $\operatorname{Res}(f,\infty) = 0$ e l'integrale assegnato è anch'esso nullo

5) Dimostrare se z_0 è un polo di ordine m per f

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(m-1)!} D^{(m-1)} \left((z-z_0)^m f(z) \right) \right)$$

Si veda, ad esempio, p. 124 degli appunti

6) Sia $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [-1,0] \\ e^x & x \in (0,2] \end{cases}$

e siano $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ i coefficienti di Fourier di f.

Calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$

Dalla identità di Parseval: $\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f^2(x)\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2\right)$

per cui $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = 2\left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f^2(x)\,dx - a_0^2\right)$

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f^2(x)\,dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{2} f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0}(x-1)^2\,dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{2} e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}(x-1)^3\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{6}e^{2x}\Big|_{0}^{2} = -\frac{1}{9} + \frac{8}{9} + \frac{1}{6}(e^4 - 1)$$

$$= \frac{7}{9} - \frac{1}{6} + \frac{e^4}{6} = \frac{11}{18} + \frac{e^4}{6}$$

$$a_0^2 = \left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f(x)\,dx\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}(x-1)\,dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{2} e^x\,dx\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{6}(x-1)^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{3}e^x\Big|_{0}^{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{6} + \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^2\right) = \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{3}e^2\right)^2$$

$$= \left(-\frac{\cdot}{2} - \frac{\cdot}{3} + \frac{\cdot}{3} \right) - \left(-\frac{\cdot}{6} \quad 3 \right)$$

$$= \frac{25}{36} - \frac{10}{18}e^2 + \frac{1}{9}e^4$$

Donque $\sum_{k=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 = 2\left(\frac{11}{18} + \frac{e^4}{6} - \frac{25}{36} - \frac{1}{9}e^4 + \frac{5}{9}e^2\right)$

$$= 2\left(-\frac{1}{12} + \frac{e^4}{18} + \frac{5}{9}e^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{e^4}{9} + \frac{10}{9}e^2$$