Possibile svolgimento della prova del 15 gennaio 2024 – Modulo A

1) (a) Calcoliamo prima le potenze separatamente:
$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$
$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$
Quindi:
$$z = \frac{-4}{-2i} = -2i$$
Per trovare le radici quarte, scriviamo z in forma esponenziale:
$$z = 2i = 2e^{-i\pi/2}$$
Le radici quarte sono date da:
$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2}e^{i(-\pi/8+k\pi/2)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$
(b) Studiamo la successione $\left\{\frac{n-1}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ la cui immagine è l'insieme A.
La derivata della funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ è:
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}$$
Per $x > 0$, è positiva su $(0, 2)$ e negativa su $(2, +\infty)$. Quindi f è strettamente crescente su $(0, 2)$ e strettamente decrescente su $(2, +\infty)$.
Il massimo si ha per $n = 2$ ed è uguale a $1/4$. Per $n = 1$: $\frac{1-1}{1^2} = 0$ Per $n \to \infty$: $\frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \to 0$
Quindi:
$$\sup A = \max A = \frac{1}{4}, \quad \inf A = \min A = 0$$

2) Per il primo limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^2}$$
Usando i limiti notevoli:
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$
Otteniamo:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^3} = 1 \cdot 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$
Per il secondo limite:
$$\lim_{x\to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to +\infty} x \cdot \frac{\sin(x)}{x^2}(1 + o(1))$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

3) Per la derivabilità in $x = 2$, devono essere soddisfatte: 1) Continuità in $x = 2$ 2) Esistenza e uguaglianza delle derivate destre e sinistre in $x = 2$
Per la continuità:
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\log(x+1)}{x-1} = \log(3) = \lim_{x\to 2^+} (ax^3 + bx^2) = 8a + 4b$$
Per la derivabilità:
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{\log(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{3} - \log 3 = \lim_{x\to 2^+} (3ax^2 + 2bx) = 12a + 4b$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 8a + 4b = \log(3) \\ 12a + 4b = 1/3 - \log 3 \end{cases}$$

otteniamo:

$$a = 1/12(1 - 6\log(3)), \qquad b = (5\log(3))/4 - 1/6$$

Asintoti verticali: dato che con i valori di a e b sopra determinati f è continua sul suo dominio, gli unici punti in cui cercare asintoti verticali sono $x = -1$ e $x = 1$.

- Per $x \to -1^+$: $\lim_{x \to -1^+} \frac{\log(x+1)}{x-1} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty$
- Per $x \to 1^\pm$: $\lim_{x \to 1^\pm} \frac{\log(x+1)}{x-1} = \frac{\log 2}{0^\pm} = \pm\infty$

Non ci sono asintoti orizzontali né obliqui per $x \to \infty$ essendo f un polinomio di grado 3 per $x > 2$.

4) Una forma del teorema di de L'Hôpital afferma che se $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ sono derivabili, $g(x), g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di a, se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ oppure entrambi sono $\pm\infty$, e se esiste $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Per $f(x) = x\cos(x^2)$:

Partendo da $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^8)$

Sostituendo x^2 e moltiplicando per x:

$$f(x) = x\cos(x^2) = x - \frac{x^5}{2!} + \frac{x^9}{4!} - \frac{x^{13}}{6!} + o(x^{13})$$

$$= x - \frac{x^5}{2} + \frac{x^9}{24} + o(x^9)$$

Da qui, deduciamo che la formula di MacLaurin di ordine 8 è

$$f(x) = x - \frac{x^5}{2} + o(x^8),$$

e inoltre $f^{(9)}(0)/9! = 1/24$ e quindi $f^{(9)}(0) = 9!/24$.

Per calcolare l'integrale:

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{0} x\cos(x^2)\,dx,$$

facciamo la sostituzione $u = x^2$. Quindi $du = 2x\,dx$. Per $x = 0$, abbiamo $u = 0$ e per $x = \sqrt{\pi}$, abbiamo $u = \pi$. L'integrale diventa:

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0} \cos(u)\,du = \frac{1}{2}[\sin(u)]_{\pi}^{0} = 0.$$