1) Stabilire se il seguente integrale converge

A) $$\int_2^{+\infty}\left(\frac{2x+1}{(x\log x)^2}-\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right)dx$$

Se stabiliamo che entrambi gli integrali

1) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{2x+1}{(x\log x)^2}\,dx$, 2) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$

convergono allora anche l'integrale assegnato converge

1) $$\frac{2x+1}{(x\log x)^2}=\frac{2x+1}{x^2\log^2 x}\sim\frac{2}{x\log^2 x}$$

Poiché $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{2}{x\log^2 x}\in\mathbb{R}$ anche $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{2x+1}{(x\log x)^2}\,dx\in\mathbb{R}$

2) $$\left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right|\le\frac{1}{x^{3/2}}\quad\forall x\in[2,+\infty)$$

Poiché $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\,dx\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ converge assolutamente

e dunque converge

B) $$\int_3^{+\infty}\left(\frac{x^2-1}{(x\log x)^3}-\frac{\cos x}{x^{5/3}}\right)dx$$

È analogo ad A)

$$\frac{x^2-1}{(x\log x)^3}\sim\frac{1}{x\log^3 x}.$$ Poiché $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\log^3 x}\in\mathbb{R}$ anche $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x\log x)^3}\,dx\in\mathbb{R}$

$$\left|\frac{\cos x}{x^{5/3}}\right|\le\frac{1}{x^{5/3}}\quad\forall x\in[3,+\infty)$$ e quindi $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{5/3}}\,dx$ converge

in quanto converge assolutamente

2) Determinare i punti critici della funzione

A) $f(x,y)=(x-y+1)^2e^{-x^2+y^2}$

B) $f(x,y)=(x+y-1)^2e^{-y^2+x^2}$

e stabilirne la natura

A) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$f_x(x,y) = 2(x-y+1)e^{-x^2+y^2} - 2x(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = -2(x-y+1)e^{-x^2+y^2} + 2y(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} 2(x-y+1)e^{-x^2+y^2}(1-x(x-y+1)) = 0 \\ 2(x-y+1)e^{-x^2+y^2}(-1+y(x-y+1)) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Osserviamo che tutti i punti della retta $x-y+1=0$ sono critici

$(*)$ si riduce poi a $\begin{cases} 1-x(x-y+1)=0 \\ -1+y(x-y+1)=0 \end{cases}$. Sommando membro a membro otteniamo

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)(x-y+1)=0 \\ 1-x(x-y+1)=0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 1=0 \end{cases}$ impossibile

$\begin{cases} y=x \\ 1-x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Dunque l'unico punto critico che non appartenga alla retta $x-y+1=0$ è $P=(1,1)$

Studiamo la natura dei punti sulla retta $r: x-y+1=0$

Se $Q=(\bar{x},\bar{y})\in r$, allora $f(\bar{x},\bar{y})=0$ e quindi

$f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y) = (x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$. Dato che $(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2} \geq 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, ogni punto $Q\in r$ è di minimo (assoluto)

Studiamo la natura di $P(1,1)$, calcolando la matrice Hessiana di f in P

$$f_{xx}(x,y) = 2e^{-x^2+y^2} - 4x(x-y+1)e^{-x^2+y^2} - 2(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$
$$- 4x(x-y+1)e^{-x^2+y^2} + 4x^2(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2e^{-x^2+y^2} + 4y(x-y+1)e^{-x^2+y^2} + 4x(x-y+1)e^{-x^2+y^2}$$
$$-4xy(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = 2e^{-x^2+y^2} - 4y(x-y+1)e^{-x^2+y^2} + 2(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$
$$- 4y(x-y+1)e^{-x^2+y^2} + 4y^2(x-y+1)^2 e^{-x^2+y^2}$$

Quindi

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2-4-2-4+4 & -2+4+4-4 \\ 2 & 2-4+2-4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2-4-2-4+4 & -2+4+4-4 \\ 2 & 2-4+2-4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$|H_f(1,1)| = -4$ e dunque $P=(1,1)$ è un punto di sella

B) è analoga: i punti della retta $r: x+y-1=0$ sono critici e inoltre il punto $P=(1,-1)$ è critico.
Tutti i punti di r sono di minimo assoluto
P è di sella

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

A) $$\begin{cases} y''+y'-2y = e^{-2x}-x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è
$\lambda^2+\lambda-2$ che ha radici $\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$
Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è
$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
Cerchiamo una soluzione particolare di $y''+y'-2y = e^{-2x}-x$
Possiamo applicare il metodo di similarità separatamente alle equazioni:

1) $y''+y'-2y = e^{-2x}$ 2) $y''+y'-2y = -x$

1) Dato che -2 è radice del polinomio caratteristico cerchiamo $\bar{y}_1$ soluzione di 1) del tipo $\bar{y}_1(x) = k\,x\,e^{-2x}$

$\bar{y}_1'(x) = ke^{-2x} - 2kxe^{-2x} = ke^{-2x}(1-2x)$

$\bar{y}_1''(x) = -2ke^{-2x}(1-2x) - 2ke^{-2x} = -4ke^{-2x}(1-x)$

$-4ke^{-2x}(1-x) + ke^{-2x}(1-2x) - 2kxe^{-2x} = e^{-2x}$

da cui $-4k(1-x) + k(1-2x) - 2kx = 1$, ovvero

$-4k + 4kx + k - 2kx - 2kx = 1 \iff$

$\iff -3k = 1 \iff k = -\frac{1}{3}$

Dunque $\bar{y}_1(x) = -\frac{1}{3}xe^{-2x}$

$\iff -3k = 1 \iff k = -\frac{1}{3}$

Dunque $\bar{y}_1(x) = -\frac{1}{3} x e^{-2x}$

2) Applichiamo il metodo di similarità anche per la 2): cerchiamo $\bar{y}_2$ soluzione particolare che sia un polinomio di grado 1

$\bar{y}_2(x) = k_1 + k_2 x$, $\bar{y}_2'(x) = k_2$, $\bar{y}_2''(x) = 0$. Quindi

$k_2 - 2k_1 - 2k_2 x = -x$ e dunque

$$\begin{cases} -2k_2 = -1 \\ k_2 - 2k_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 = \frac{1}{2} \\ k_1 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \text{ossia} \quad \bar{y}_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$$

Una soluzione particolare di $y'' + y' - 2y = e^{-2x} - x$ è dunque data da $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) = -\frac{1}{3} x e^{-2x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$. Il suo integrale generale è quindi

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} x e^{-2x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene imponendo che

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 1 \\ c_1 - 2c_2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{3}{4} \\ c_1 - 2c_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} - c_2 \\ \frac{3}{4} - c_2 - 2c_2 = -\frac{1}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} - c_2 \\ 3c_2 = \frac{11}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = \frac{11}{36} \\ c_1 = \frac{3}{4} - \frac{11}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Quindi la soluzione è $y(x) = \frac{4}{9} e^{x} + \frac{11}{36} e^{-2x} - \frac{1}{3} x e^{-2x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$

B) $$\begin{cases} y'' + 4y = \cos(2x) + x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lo svolgimento è analogo a quello dell'esercizio A): l'integrale generale dell'omogenea associata è $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

1) $y'' + 4y = \cos(2x)$, 2) $y'' + 4y = x$

1) Poiché $2i$ è radice del polinomio caratteristico cerchiamo $\bar{y}_1$ del tipo:

$\bar{y}_1(x) = x \cdot (k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x))$

$\bar{y}_1'(x) = k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x) + x\,(-2k_1 \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x))$

$\bar{y}_1''(x) = -2k_1 \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x) - 2k_1 \sin(2x) + 2k_2 \cos(2x)$
$\quad + x(-4k_1 \cos(2x) - 4k_2 \sin(2x))$.

Quindi

Quindi

$$-4k_1\sin(2x)+4k_2\cos(2x)-\cancel{4k_1x\cos(2x)}-\cancel{4k_2x\sin(2x)}$$
$$+\cancel{4k_1x\cos(2x)}+\cancel{4k_2x\sin(2x)}=\cos 2x$$

$-4k_1\sin(2x)+4k_2\cos(2x)=\cos 2x$ da cui

$k_1=0$ e $4k_2=1$. Dunque $\bar{y}_1(x)=\frac{x}{4}\sin(2x)$

2) $\bar{y}_2(x)=k_3+k_4x$, $\bar{y}_2'(x)=k_4$, $\bar{y}_2''(x)=0$. Dunque

$4k_3+4k_4x=x$ da cui $k_3=0$ e $k_4=\frac{1}{4}$ e quindi

$\bar{y}_2(x)=\frac{1}{4}x$

L'integrale generale di $y''+4y=\cos(2x)+x$ è

$y(x)=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+\frac{x}{4}\sin(2x)+\frac{1}{4}x$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene imponendo

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} c_1=0 \\ 2c_2+\frac{1}{4}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1=0 \\ c_2=-\frac{1}{8} \end{cases}$$

Quindi essa è $y(x)=-\frac{1}{8}\sin(2x)+\frac{x}{4}\sin(2x)+\frac{1}{4}x$

4) Calcolare il seguente integrale

A) $\int_A xy\,dxdy$ dove A è l'insieme
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1, 0\le x\le(\arctg y)^{\frac{1}{2}}\}$

$$\int_A xy\,dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{(\arctg y)^{\frac{1}{2}}}xy\,dx\right)dy=\int_0^1 y\left(\int_0^{(\arctg y)^{\frac{1}{2}}}x\,dx\right)dy$$

$$=\int_0^1 y\left.\frac{1}{2}x^2\right|_0^{(\arctg y)^{\frac{1}{2}}}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y\arctg y\,dy=$$

$$=\left.\frac{1}{4}y^2\arctg y\right|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{y^2}{1+y^2}dy$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\int_0^1 dy+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}+\left.\frac{1}{4}\arctg y\right|_0^1=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

B) dove A è l'insieme

16 4 4 0

B) $\displaystyle\int_A \frac{x}{y}\,dx\,dy$ dove A è l'insieme

$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : e\le y\le e^2,\ 0\le x\le \frac{1}{\sqrt{\log y}}\right\}$

$$\int_A \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_e^{e^2}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\log y}}} \frac{x}{y}\,dx\right)dy = \int_e^{e^2}\frac{1}{y}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\log y}}} x\,dx\right)dy =$$

$$= \int_e^{e^2} \frac{1}{y}\ \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{\log y}}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\log y}\,dy = \frac{1}{2}\ \log(\log y)\Big|_e^{e^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\log(\log e^2) - \log(\log e)\Big) = \frac{1}{2}\left(\log 2 - \log 1\right)$$

$$= \frac{\log 2}{2}$$