Possibile svolgimento della prova del 16 giugno 2025 – Modulo A

1) (a) Calcoliamo $z = \frac{e^{i\pi/3}(1-i)^4}{2+2i}$ in forma esponenziale.

Prima calcoliamo $(1-i)^4$:

$|1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(1-i) = -\pi/4$. Quindi $(1-i) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ e

$(1-i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{-i\pi} = 4e^{-i\pi} = -4$.

Per $2+2i$:

$|2+2i| = 2\sqrt{2}$, $\arg(2+2i) = \pi/4$.

Quindi:

$$z = \frac{e^{i\pi/3}\cdot(-4)}{2\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{-4e^{i\pi/3}}{2\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = -\sqrt{2}e^{i(\pi/3-\pi/4)} = -\sqrt{2}e^{i\pi/12}.$$

Poiché $-1 = e^{i\pi}$, abbiamo:

$$z = \sqrt{2}e^{i(\pi+\pi/12)} = \sqrt{2}e^{i\frac{13}{12}\pi}$$

che è la forma esponenziale di z.

Le radici seste sono:

$$z_k = \sqrt[6]{\sqrt{2}}e^{i(\frac{13}{12}\pi+2k\pi)/6} = 2^{1/12}e^{i(\frac{13}{72}\pi+k\frac{\pi}{3})},$$

per $k = 0,1,2,3,4,5$.

(b) Per la successione $a_n = \frac{n}{2^n}$ studiamo la monotonia confrontando a_n con a_{n+1}.

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \le \frac{n}{2^n} \Leftrightarrow n+1 \le \frac{n2^{n+1}}{2^n} = 2n \Leftrightarrow 2n-n-1 \ge 0 \Leftrightarrow n \ge 1,$$

quindi la successione è decrescente.

Il limite della successione è:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0.$$

Quindi possiamo concludere che

- $\sup A = \max A = a_1 = \frac{1}{2}$ (notiamo che è anche $\frac{1}{2} = a_2$);
- $\inf A = 0$ (non è minimo dato che la successione che definisce A è decrescente e non definitivamente costante).

2) $f(x) = (x^2-4x+3)e^{-x}$:

Dominio: $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Notiamo che $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$, quindi $f(x) = (x-1)(x-3)e^{-x}$. Gli zeri di f sono $x=1$ e $x=3$.

Asintoti:

- non ci sono asintoti verticali (la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$);
- per $x\to-\infty$: $f(x) = (x^2-4x+3)e^{-x} \to +\infty$;
- per $x\to+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+3)e^{-x} = 0$ (per la gerarchia degli infiniti: l'esponenziale domina sul polinomio)

Quindi $y=0$ è asintoto orizzontale per $x\to+\infty$.

Punti di estremo locale:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-4)e^{-x} + (x^2-4x+3)(-e^{-x}) \\ &= e^{-x}[(2x-4)-(x^2-4x+3)] \\ &= e^{-x}[2x-4-x^2+4x-3] \\ &= e^{-x}[-x^2+6x-7] \\ &= -e^{-x}(x^2-6x+7) \end{aligned}$$

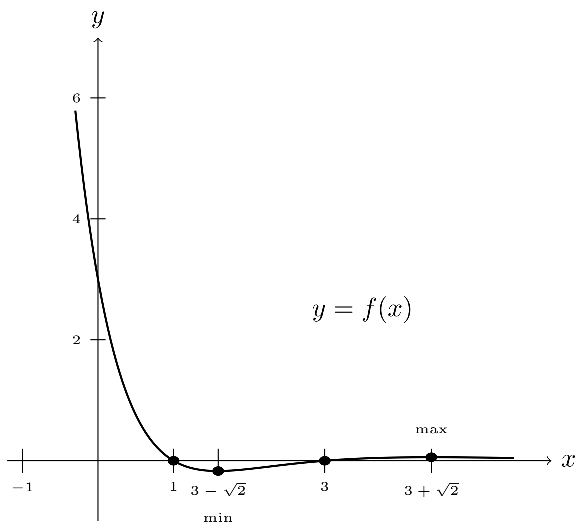
Poiché $e^{-x} > 0$ sempre, studiamo il segno di $x^2 - 6x + 7$. Le radici di questo trinomio sono $x = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$ (sono anche i punti critici di f). Possiamo quindi dire che

- per $x < 3 - \sqrt{2}$ o $x > 3 + \sqrt{2}$: $x^2 - 6x + 7 > 0$, quindi $f'(x) < 0$ e f è strett. decrescente su questi due intervalli

- per $3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}$: $x^2 - 6x + 7 < 0$, quindi $f'(x) > 0$ e f è strett. crescente su questo intervallo.

Quindi $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ è punto di minimo locale e $x_2 = 3 + \sqrt{2}$ è punto di massimo locale.

Grafico qualitativo:



3) Poniamo $u = \log x$, quindi $du = \frac{1}{x} dx$. Per $x = 1$: $u = \log 1 = 0$; per $x = e$: $u = \log e = 1$. L'integrale diventa:

$$\int_0^1 u^2 \mathrm{d}u = \left. \frac{u^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

4) Definizione: una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (con I intervallo) si dice strettamente convessa se:

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2, \forall \lambda \in (0,1):$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Condizione sufficiente: se f è derivabile due volte su I e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente convessa su I.

Per $f(x) = e^{x^2} - 2x^2$:

$f'(x) = 2xe^{x^2} - 4x = 2x(e^{x^2} - 2)$

$f''(x) = 2(e^{x^2} - 2) + 4x^2 e^{x^2}$.

Poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} f''(x) = +\infty,$$

concludiamo che $f''(x) > 0$, definitivamente per $x \to \pm\infty$ e quindi f è definitivamente strettamente convessa per $x \to \pm\infty$.