1) Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti o divergenti

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}(x^{10}-x^7)\,dx$; b) $\int_0^{+\infty} \log(2+\cos^2 x)\left(e^{-\frac{1}{x^2+1}}-1\right)dx$

a) la funzione integranda è continua su $[0,+\infty)$ quindi è integrabile su $[0,\omega]$, $\forall \omega>0$

Osserviamo che $e^{-x^2}(x^{10}-x^7)\geq 0$ $\forall x>1$, quindi f è definitivamente a valori positivi per $x\to+\infty$

Dato che $x^2 e^{-x^2}(x^{10}-x^7)\longrightarrow 0$ per $x\to+\infty$

abbiamo che $e^{-x^2}(x^{10}-x^7) < \frac{1}{x^2}$ def per $x\to+\infty$

Poiché $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\in\mathbb{R}$, $\forall a>1$ anche l'integrale assegnato converge per il criterio del confronto

b) Osserviamo che l'integranda è continua su $[0,+\infty)$ è negativa dato che $2+\cos^2 x\geq 2$ $\forall x$ e quindi

$\log(2+\cos^2 x)\geq \log 2>0$ $\forall x$ e inoltre

$e^{-\frac{1}{x^2+1}} < 1$, $\forall x$ e quindi $e^{-\frac{1}{x^2+1}}-1<0$, $\forall x$

Possiamo quindi studiare $-\log(2+\cos^2 x)\left(e^{-\frac{1}{x^2+1}}-1\right)=\log(2+\cos^2 x)\left(1-e^{-\frac{1}{x^2+1}}\right)>0$, $\forall x$.

$\log(2+\cos^2 x)\leq\log 3$ quindi

$\log(2+\cos^2 x)\left(1-e^{-\frac{1}{x^2+1}}\right)\leq\log 3\left(1-e^{-\frac{1}{x^2+1}}\right)\sim\log 3\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

Dato che $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\in\mathbb{R}$ anche l'integrale assegnato converge

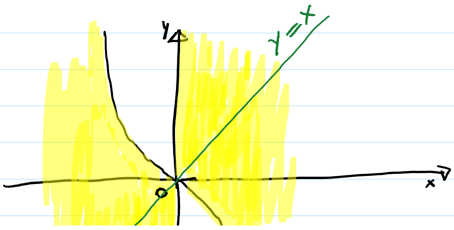
2) Determinare il dominio della funzione

$f(x,y)=\frac{y^2}{x^3}\log\left(1+\frac{y}{x^3}\right)$

e rappresentarlo nel piano. Dire se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi

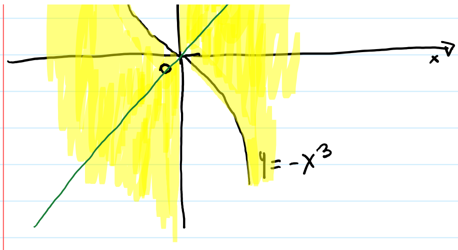
Stabilire se esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Determinare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1)$ con $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

dom f : $\begin{cases} x\neq 0\\ 1+\frac{y}{x^3}>0\end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0\\ \frac{x^3+y}{x^3}>0\end{cases}$ $\begin{cases} y>-x^3\\ x>0\end{cases}$ $\vee$ $\begin{cases} y<-x^3\\ x<0\end{cases}$



Il dominio è la parte di piano in giallo

È quindi un insieme aperto, illimitato non connesso per archi



non connesso per archi

Sulla retta $y=0$ f è costante di costante valore 0 e quindi $\lim_{x\to 0} f(x,0)=0$

Consideriamo la retta $y=x$, $f(x,x)=\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \begin{cases} \frac{+\infty}{0^+}=+\infty & \text{per } x\to 0^+ \\ \frac{+\infty}{0^-}=-\infty & \text{per } x\to 0^- \end{cases}$$

Quindi il limite di f in $(0,0)$ non esiste.

f è una funzione di classe C^∞ sul suo dominio, quindi è differenziabile in $(1,1)$ e dunque

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \left\langle \nabla f(1,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y^2}{x^6}3x^2\log\left(1+\frac{y}{x^3}\right) + \frac{y^2}{x^3}\frac{1}{1+\frac{y}{x^3}}\cdot\left(-\frac{y\,3x^2}{x^6}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^3}\log\left(1+\frac{y}{x^3}\right) + \frac{y^2}{x^3}\frac{1}{1+\frac{y}{x^3}}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -3\log 2 - \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2\log 2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = -\left(3\log 2+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(2\log 2+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{t-1}\,y + (t-1)^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

L'equazione $y'=\sqrt{t-1}\,y+(t-1)^2$ è del I ordine lineare quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è data da

$$y(t) = e^{\int_1^t\sqrt{s-1}\,ds}\left(1+\int_1^t (s-1)^2 e^{-\int_1^s\sqrt{z-1}\,dz}\,ds\right)$$

$$= e^{\frac{2}{3}(s-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^t}\left(1+\int_1^t (s-1)^2 e^{-\frac{2}{3}(z-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^s}\,ds\right)$$

$$= e^{\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\int_1^t (s-1)^2 e^{-\frac{2}{3}(s-1)^{\frac{3}{2}}}\,ds\right)$$

$$= e^{\frac{2}{3}(t-1)^{3/2}} \left(1 + \int_1^t (s-1)^2 e^{-\frac{2}{3}(s-1)^{3/2}} \, ds \right)$$

Calcoliamo

$$\int_1^t (s-1)^2 e^{-\frac{2}{3}(s-1)^{3/2}} \, ds \ ; \quad \text{posto } (s-1)^{\frac{3}{2}} = z, \ dz = \frac{3}{2}(s-1)^{\frac{1}{2}} ds$$

otteniamo
$$\frac{2}{3}\int_0^{(t-1)^{3/2}} z\, e^{-\frac{2}{3}z} \, dz = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2} z e^{-\frac{2}{3}z}\Big|_0^{(t-1)^{3/2}} + \frac{3}{2}\int_0^{(t-1)^{3/2}} e^{-\frac{2}{3}z} \, dz \right)$$
$$= -(t-1)^{3/2} e^{-\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}$$

Quindi la soluzione è

$$y(t) = \frac{5}{2} e^{\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}} - (t-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}$$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Weierstrass per una funzione scalare di più variabili reali

Per l'enunciato si veda p. 316 del manuale di riferimento. Una dimostrazione è stata fornita a lezione.