1) - a) Sia $z = 1 - 2i$. Calcolare $\frac{z - \bar{z}}{|z|^2}$ e determinarne le radici quarte in forma esponenziale

$$\frac{z-\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-4i}{5} = -\frac{4}{5}i = \frac{4}{5}(-i) = \frac{4}{5}e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

$$\sqrt[4]{\frac{z-\bar{z}}{|z|^2}} = \sqrt[4]{\frac{4}{5}e^{\frac{3}{2}\pi i}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\, e^{i\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{2\pi}{4}k\right)}, \quad k = 0,1,2,3$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\, e^{i\frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}k}, \quad k = 0,1,2,3$$

1) - b) Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = \arccos(2x+1)\, e^{-\sqrt[3]{x}}$$

dom f: $-1 \le 2x+1 \le 1 \iff -1 \le x \le 0$ quindi dom $f = [-1, 0]$

f è il prodotto delle funzioni $g(x) = \arccos(2x+1)$ e $h(x) = e^{-\sqrt[3]{x}}$.

Entrambe sono positive; inoltre entrambe sono strett. decrescenti:

g in quanto composto da $g_1(x) = 2x+1$ strett. crescente e

$g_2(x) = \arccos x$ " decrescente

e h in quanto uguale a $\left(\frac{1}{e}\right)^{\sqrt[3]{x}}$ e quindi composto dalla funzione esponenziale di base $\frac{1}{e}$ quindi strett. decrescente e dalla funzione radice cubica che è strettamente crescente.

$f \in C^0([-1,0])$ dato che sia g che h sono continue; quindi

Im $f = [f(0), f(-1)]$

$$f(0) = \arccos(1)\frac{1}{e^0} = 0 \;;\quad f(-1) = \arccos(-1)\frac{1}{e^{-1}} = \pi e \quad \text{quindi}$$

Im $f = [0, \pi e]$

2) Determinare il dominio e gli asintoti della funzione

$$f(x) = x\log\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)$$

Si studi la convessità di f. Ha f un massimo locale nell'intervallo $(2, +\infty)$? Perché?

dom f: $\frac{x-2}{2x+1} > 0 \iff x < -\frac{1}{2} \vee x > 2$ quindi dom $f = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$

$f \in C^0(\text{dom} f)$ quindi gli unici punti in cui cercare eventuali asintoti verticali sono $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$, che sono di accumulazione per dom f ma non appartengono a dom f.

Poiché $\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{x-2}{2x+1} = \frac{-5/2}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = -\frac{1}{2}(+\infty) = -\infty$ quindi $x = -\frac{1}{2}$ è as. verticale per f

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2(-\infty) = -\infty$ " $x = 2$ " " " " .

Vediamo se f ha asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \log\frac{1}{2} = \mp\infty$$, quindi f non ha asintoti orizzontali

Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \log\frac{1}{2} = -\log 2$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) + \log 2\, x = \lim_{x \to \pm\infty} x\left(\log\frac{x-2}{2x+1} + \log 2\right) = \lim_{x \to \pm\infty} x \log\frac{2(x-2)}{2x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} x \log\frac{2x-4}{2x+1}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x \log\frac{\cancel{2x}\left(1-\frac{4}{2x}\right)}{\cancel{2x}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - \frac{\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty}\left(-2\,\frac{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}\,\frac{\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{2x}}\right) = -2-\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

quindi la retta $y = -\log 2\, x - \frac{5}{2}$ è asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

Studiamo la convessità di f.

$$f'(x) = \log\frac{x-2}{2x+1} + x\,\frac{1}{\frac{x-2}{2x+1}}\,\frac{2x+1-2(x-2)}{(2x+1)^2} = \log\left(\frac{x-2}{2x+1}\right) + \frac{5x}{(x-2)(2x+1)}$$

$$f''(x) = \frac{5}{(x-2)(2x+1)} + \frac{5(x-2)(2x+1) - 5x[(2x+1)+2(x-2)]}{(x-2)^2(2x+1)^2}$$

$$= \frac{5(x-2)(2x+1) + 5(x-2)(2x+1) - 10x^2 - 5x - 10x^2 + 20x}{(x-2)^2(2x+1)^2}$$

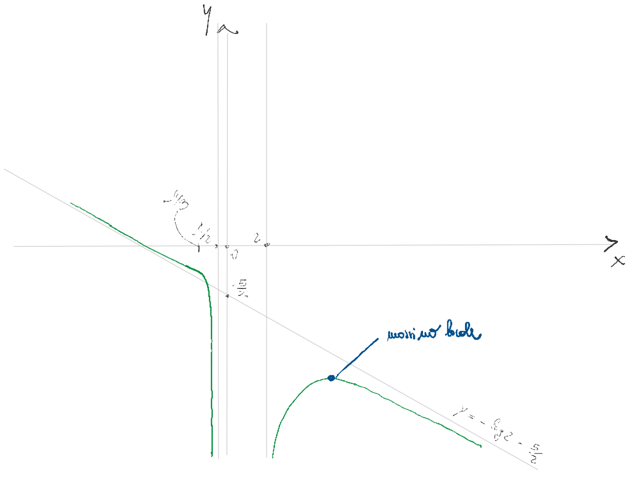
$$= \frac{10(x-2)(2x+1) - 20x^2 + 15x}{(x-2)^2(2x+1)^2} = \frac{10(2x^2+x-4x-2) - 20x^2 + 15x}{(x-2)^2(2x+1)^2}$$

$$= \frac{20x^2 - 30x - 20 - 20x^2 + 15x}{(x-2)^2(2x+1)^2} = \frac{-15x-20}{(x-2)^2(2x+1)^2}$$

$$f''(x) > 0 \iff -15x-20 > 0 \iff x < -\frac{4}{3}$$

Quindi f è strett. convessa su $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ e strett. concava su $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ e su $(2, +\infty)$

Dalle informazioni che abbiamo possiamo tracciare approssimativamente il grafico di f (in verde nel disegno qui a fianco)



Poiché f è continua su $(2,+\infty)$ e dato che $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ è chiaro che f deve avere un punto di massimo locale sull'intervallo $(2,+\infty)$

3) Calcolare $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \cos x\right) dx$

$$\int_{-1/2}^{1/2} x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \cos x\right) dx = \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx}_{1} - \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} x\cos x\, dx}_{2}$$

Poiché la funzione $y = x^2 \sin x$ è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a 0, $2 = 0$.

$$1 = -x \; 2\sqrt{1-x}\,\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\, 2\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\sqrt{3} = \frac{-3-3\sqrt{3}-2+6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}-5}{3\sqrt{2}}$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale

Si veda, ad esempio, pp. 242-243 del manuale consigliato.