AA 09-10 - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

DI SEGUITO, A PURO TITOLO ESEMPLIFICATIVO, SONO RIPORTATI POSSIBILI SVOLGIMENTI DI PARTE DEGLI ESERCIZI ASSEGNATI AGLI ESAMI (DEFINIZIONI E DIMOSTRAZIONI DI TEOREMI, PROPOSIZIONI NON SONO RIPORTATI)

Possibile svolgimento prova di esonero del 7/5/10

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n(0) = 0$ quindi $\lim_n f_n(0) = 0$

se $\bar{x} \in (0,1]$ $\quad \lim_n f_n(\bar{x}) = \lim_n \dfrac{2n\bar{x}}{3+\bar{x}^2 n} = \dfrac{2}{\bar{x}}$

Quindi la successione f_n converge puntualmente nell'intervallo $[0,1]$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{2}{x} & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$$

Osservo che la convergenza non è uniforme su $[0,1]$ poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n è continua in $[0,1]$ mentre f non lo è (non è continua in 0)

Provo che la convergenza è uniforme su $[a,1]$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq 1$

Calcolo il $\sup_{x \in [a,1]} \left| f_n(x) - f(x) \right|$

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{2nx}{3+nx^2} - \frac{2}{x} \right| = \left| \frac{2nx^2 - 6 - 2nx^2}{x(3+nx^2)} \right| = \frac{6}{x(3+nx^2)}$$

Sia $g_n(x) = \dfrac{6}{x(3+nx^2)}$

$$g_n'(x) = \frac{-6\,(3+nx^2 + 2nx^2)}{x^2(3+nx^2)^2} = \frac{-6\,(3+3nx^2)}{x^2(3+nx^2)^2}$$

$g_n'(x) < 0$ $\quad \forall x \in [a,1]$ quindi $\sup_{x\in[a,1]} g_n(x) = \max_{x \in [a,1]} g_n(x) = g_n(a) = \dfrac{6}{a(3+na^2)}$

Poiché $\lim_n \dfrac{6}{a(3+na^2)} = 0$ la convergenza è uniforme in $[a,1]$

2) $$\lim_n \left(\frac{2n-1}{n^2 3^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \lim_n \left(\frac{2n-1}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \lim_n e^{\frac{1}{n} \log \frac{2n-1}{n^2}}$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \frac{2n-1}{n^2} = \lim_n \frac{\log(2n-1)}{n} - \lim_n 2\frac{\log n}{n} = 0$$

quindi

$$\frac{1}{3} \lim_n e^{\frac{1}{n}\log\frac{2n-1}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$ Quindi $\rho = 3$

Studiamo il carattere per $z=3$ e $z=-3$ della serie assegnata

$z=3$: $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$ $\quad (*)$

Poiché $\dfrac{2n-1}{n^2} \sim \dfrac{2}{n}$, $(*)$ diverge

$z=-3$: $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n^2}$ $\quad (**)$

- $\lim_n \dfrac{2n-1}{n^2} = 0$

- Vediamo che $a_{n+1} < a_n$: $\quad \dfrac{2(n+1)-1}{(n+1)^2} < \dfrac{2n-1}{n^2} \iff$

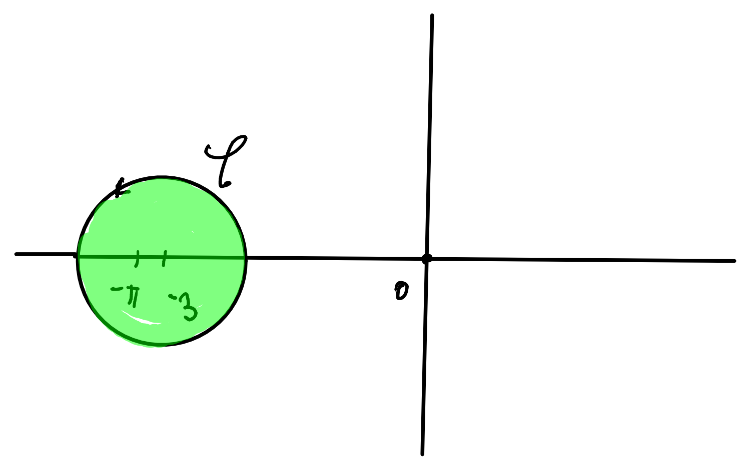
$\iff n^2(2n+1) < 2n(n+1)^2 - (n+1)^2 \iff n^2 < 4n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1$

$\iff 1 < 2n^2$ vero $\forall n \geq 1$!

Quindi per il criterio di Leibniz $(**)$ converge.

Dunque l'intervallo di convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ è $[-3,3)$

3)



Sia $f(z) = \cos^2 z / z$. f è olomorfa nella regione racchiusa da γ (in verde).

Per la II formula di rappresentazione di Cauchy

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-(-\pi))^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(-\pi) = 2\pi i \, f'(-\pi)$$

$$f'(z) = \frac{-2\cos z \sin z \cdot z - \cos^2 z}{z^2} \quad ; \quad f'(-\pi) = -\frac{1}{\pi^2}$$

Possibile svolgimento della prova del 17/07/10

2) La funzione $f(z) = \dfrac{\cosh z}{\pi^2 + z^2}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{i\pi, -i\pi\}$

La curva γ è orientata nel verso antiorario ed è il bordo di un dominio T contenente il punto $-\pi i$. Pertanto si può vedere f come prodotto della funzione $g(z) = \dfrac{\cosh z}{z - i\pi}$ che è olomorfa in T per la funzione $\dfrac{1}{z + i\pi}$

Per la I formula di rappresentazione di Cauchy si ha quindi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z+i\pi}\,dz = 2\pi i\, g(-i\pi) = 2\pi i \frac{\cosh(-i\pi)}{-2i\pi} =$$

$$= -\frac{e^{-i\pi} + e^{i\pi}}{2} = -\left(\frac{-1-1}{2}\right) = 1$$

3) $\mathrm{Log}_{2\pi}\, i = \log|i| + i\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ (poiché l'argomento di i appartenente a $[\pi, 3\pi)$ è uguale a $2\pi + \frac{\pi}{2}$)

$\mathrm{Log}_{\pi}\, i = \log|i| + i\frac{\pi}{2}$

quindi $\mathrm{Log}_{2\pi}\, i - \mathrm{Log}_{\pi}\, i = 2\pi i$

4) le singolarità al finito di f sono i punti -1 e $2i$.

-1 è un polo semplice per f dato che $\lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \to -1} \dfrac{\sin^2 z}{z - 2i} = -\dfrac{\sin^2 1}{1 + 2i}$

Quindi $\mathrm{Res}(f, -1) = -\dfrac{\sin^2 1}{1+2i}$.

$2i$ è un polo di ordine 2 per f dato che $\lim_{z \to 2i} (z - 2i)^2 f(z) =$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{\sin^2 z}{z+1} = \frac{\sin^2 2i}{1+2i} = \frac{\left(e^{i\,2i} - e^{-i\,2i}\right)^2}{1+2i} = \frac{\left(e^{-2} - e^{2}\right)^2}{1+2i} \neq 0$$

Quindi $\mathrm{Res}(f, 2i) = \lim_{z \to 2i} D\left((z-2i)^2 f(z)\right) = \lim_{z \to 2i} D \dfrac{\sin^2 z}{z+1} =$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{2 \sin z \cos z\,(z+1) - \sin^2 z}{(z+1)^2} = \frac{2 \sin 2i \cos 2i - \sin^2 2i}{(1+2i)^2}$$

5) osserviamo che $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^4}$ è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$ dato che $0 \le \dfrac{2x^2}{1+x^4} \le \dfrac{2x^2}{x^4} = \dfrac{2}{x^2}$ e la funzione $2/x^2$ è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty)$. Inoltre poiché f è pari si ha $\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Consideriamo l'estensione della nostra funzione integranda in $\mathbb{C}$ che è data da

$f(z) = \dfrac{2z^2}{1+z^4}$. Poiché $\lim_{|z| \to \infty} z f(z) = 0$ possiamo applicare

il metodo dei residui (vedere LAVAGNA 9) ottenendo

$$\int_0^{\infty} \frac{2x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{1+x^4}\,dx = \pi i \left(\mathrm{Res}\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \mathrm{Res}\left(f, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Si osservi che $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ sono le radici quarte di -1 contenute nel semipiano $\mathrm{Im}\, z \geq 0$

Entrambi i punti singolari $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ sono poli semplici dato che

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) \frac{2z^2}{1+z^4} \in \mathbb{C}$$

dove $z_k = \sqrt[4]{-1}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Osserviamo infatti che posto $g(z) = 1 + z^4$ essendo $g(z_k) = 0$ abbiamo

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) \frac{2z^2}{1+z^4} = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) \frac{2z^2}{g(z)} = \lim_{z \to z_k} \frac{2z^2}{\frac{g(z) - g(z_k)}{z - z_k}}$$

$= 0$

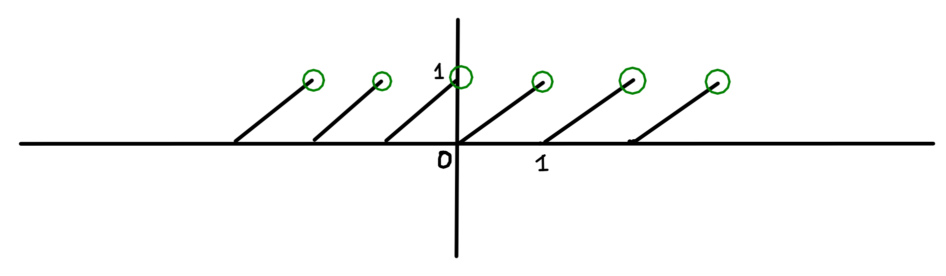
$$= \frac{2z_k^2}{g'(z_k)} = \frac{2z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{2z_k}$$

Dunque $\mathrm{Res}\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{i}{2\sqrt{2}}$ e

$\mathrm{Res}\left(f, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{-1+i} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{i}{2\sqrt{2}}$

Pertanto $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2x^2}{1+x^4}\,dx = \pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \pi i \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

6)



L'estensione periodica di f a $\mathbb{R}$ con periodo 1 è rappresentata in figura qui sopra

$$a_0 = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

Sia ora $k \geq 1$

$$a_k = 2 \int_0^1 t \cos(2k\pi t)\,dt = 2\left[t\, \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(2k\pi t)}{k\pi}$$

$$= 0 - \left[\frac{\cos(2k\pi t)}{2k^2\pi^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2k^2\pi^2}(1 - 1) = 0$$

$$b_k = 2\int_0^1 t \sin(2k\pi t)\,dt = \left[-\frac{\cos(2k\pi t)\; t}{k\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2k\pi t)}{k\pi}\,dt$$

$$= -\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2k^2\pi^2}\left[\sin(2k\pi t)\right]_0^1 = -\frac{1}{k\pi}$$

Quindi la serie di Fourier di f è data da

$\dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \sin(2k\pi t)$. Tale serie converge a $f(t)$, $\forall\, t \in (m, m+1)$

$m \in \mathbb{Z}$, dato che f è derivabile in $(m, m+1)$

mentre converge a $\dfrac{f(m^-) + f(m^+)}{2} = \dfrac{1}{2}$ $\forall\, m \in \mathbb{Z}$

La convergenza a f è uniforme in ogni intervallo chiuso contenuto in $(m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$, dato che f è di classe C^1 nell'intervallo chiuso preso in considerazione.

Possibile svolgimento della prova del 1 settembre

2) Poiché $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sin(x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{x^{4k+2}}{(2k+1)!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

la serie al secondo membro è una serie di potenze avente raggio di convergenza $+\infty$, dunque converge uniformemente su $\mathbb{R}$. Possiamo usare il teorema di integrazione termine a termine ottenendo:

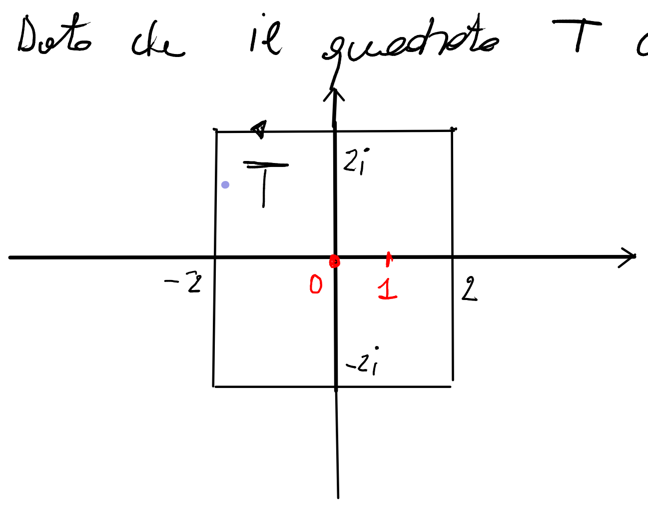
$$\int_0^{\pi} \sin(x^2)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^{\pi} x^{4k+2}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{4k+3} \pi^{4k+3}.$$

3) NO. Infatti se una tale funzione esistesse allora dovrebbe essere nulla in 0 dato che, essendo intera, è continua e quindi $f(0) = \lim_n f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Quindi 0 è uno zero di f ed è anche un punto di accumulazione di zeri di f $\left(f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ e } \lim_n \frac{1}{n} = 0 \right)$. Da questo segue che $f(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$!! dato che f e la funzione costante di valore 0 (entrambe sono olomorfe su $\mathbb{C}$) coincidono su un insieme avente 0 come punto di accumulazione.

4) La funzione integranda $f(z) = \dfrac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z-1}}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$

Dato che il quadrato T contiene 0 e 1,



per il I teorema dei residui $\displaystyle\int_{\partial^+ T} \frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z-1}}\,dz = \left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1)\right) 2\pi i$

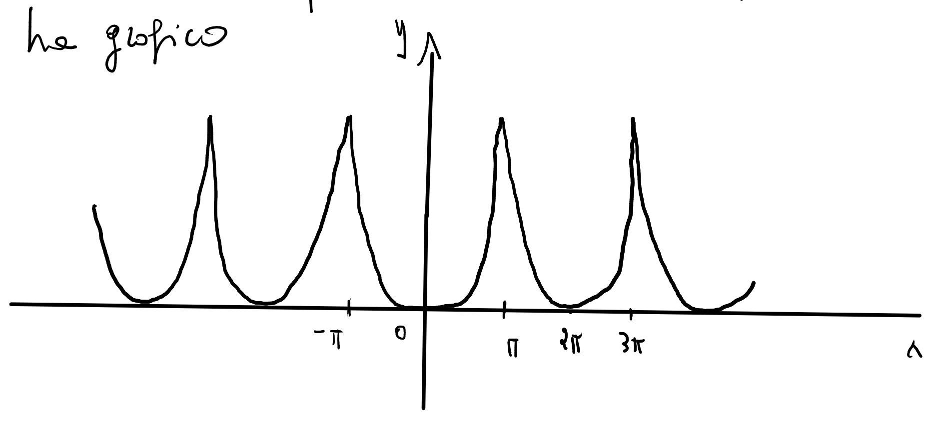
Per il II teorema dei residui $\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1) = -\mathrm{Res}(f,\infty) = -\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

Calcoliamo dunque il residuo in 0 della funzione $-\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{1}{z^2} \dfrac{1}{\frac{1}{z^2}} e^{\frac{1}{\frac{1}{z^2}-1}} =$

$= -e^{\frac{z^2}{1-z^2}}$. Tale funzione è olomorfa anche in 0 dunque $\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$

e $\displaystyle\int_{\partial^+ T} \frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z-1}}\,dz = 0.$

6) (L'estensione periodica a $\mathbb{R}$ con periodo 2π della funzione assegnata, che chiamiamo $\tilde{f}$) ha grafico



Poiché è una funzione pari i coefficienti $b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(kt)\,dt$ sono nulli.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{6\pi} 2\pi^3 = \frac{1}{3}\pi^2$$

Per $k \geq 1$, $a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(kt)\,dt = \dfrac{1}{\pi} \left[\dfrac{t^2 \sin(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \dfrac{1}{k\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 2t \sin(kt) =$

$$= 0 + \frac{2}{k\pi} \left[\frac{t\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{k^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{2}{k^2\pi} 2\pi \cos(k\pi) = (-1)^k \frac{4}{k^2}$$

Quindi la serie di Fourier di $\tilde{f}$ è data da

$$\frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos(kt)$$

Poiché $\tilde{f}$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e nei punti $\{\pi + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ha derivata dx e sx, tale serie converge a $\tilde{f}$ uniformemente su $\mathbb{R}$.

Per $t = 2\pi$ la serie diviene $\dfrac{1}{3}\pi^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{4}{k^2}$

ed ha per somma $\tilde{f}(2\pi) = 0$.

Possibile svolgimento della prova del 17 settembre 2010

2) Poiché $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La serie al secondo membro è una serie di potenze avente raggio di convergenza $+\infty$, dunque converge uniformemente su $\mathbb{R}$. Possiamo usare il teorema di integrazione termine a termine ottenendo:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)$$

4) $\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Quindi $\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z^{-2})^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k}} \cdot \frac{1}{z^2}$

e $z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k}}$ $\to$ serie di Laurent di $z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$ centrata in 0

Poiché tale serie ha infiniti termini del tipo z^{-m}, 0 è una singolarità essenziale.

5) Poiché $\operatorname{Res}(f;\infty) = \operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right);0\right)$, ricaviamo la legge della funzione $f\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)$. Abbiamo $f\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{z}} \cos \frac{1}{\frac{1}{z}}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right) =$

$= \frac{z\cos z - 1}{z^2}$. Tale funzione ha in 0 un polo di ordine 2 dato che

$\lim_{z\to 0} z^2 \frac{z\cos z - 1}{z^2} = -1 \neq 0$. Dunque, in base alla formula per il calcolo del residuo in un polo di ordine m, otteniamo

$$\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right),0\right) = \lim_{z\to 0} D\left(z^2 \frac{z\cos z - 1}{z^2}\right) = \lim_{z\to 0} D\left(z\cos z - 1\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0} (\cos z - z\sin z) = 1$$

Possibile svolgimento della prova del 29 novembre 2010

3) Per la II formula di rappresentazione di Cauchy

$$\int_{\partial^+ B(i,2)} \frac{z \sin(\pi z^2)}{(z-i)^2 (z+2i)^2}\, dz = 2\pi i\, f'(i)$$

con $f(z) = \dfrac{z \sin(\pi z^2)}{(z+2i)^2}$ (osserviamo che f è olomorfa su $B(i,2)$)

$$f'(z) = \frac{\left(\sin(\pi z^2) + 2z^2\pi \cos(\pi z^2)\right)(z+2i)^2 - z \sin(\pi z^2)\, 2\,(z+2i)}{(z+2i)^4}$$

$$f'(i) = \frac{2\pi\,(3i)^2}{(3i)^4} = \frac{2\pi}{(3i)^2} = -\frac{2\pi}{9}.$$ Quindi l'integrale qui sopra

è uguale a $2\pi i \left(-\frac{2}{9}\pi\right) = -\frac{4}{9}\pi^2 i$ ed è l'opposto dell'integrale assegnato

4) $$\int_{+\Gamma_R} f(z)\, dz = \int_0^{\pi} f(\Gamma_R(t))\, \dot{\Gamma}_R(t)\, dt = \int_0^{\pi} f(Re^{it})\, iRe^{it}\, dt$$

Dobbiamo dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\pi} f(Re^{it})\, iRe^{it} dt - 2\pi i \xrightarrow{R\to\infty} 0$

Equivalentemente $\displaystyle\left| \int_0^{\pi} \left[f(Re^{it})\, iRe^{it} - 2i \right] dt \right| \xrightarrow{R\to\infty} 0$

Ma $\displaystyle\left| \int_0^{\pi} i \left[f(Re^{it})\, Re^{it} - 2 \right] dt \right| \le \int_0^{\pi} \left| f(Re^{it})\, Re^{it} - 2 \right| dt$

Poiché per $R \to +\infty$ $|Re^{it}| = R \to +\infty$
e poiché $\lim_{|z|\to\infty} z f(z) = 2$, abbiamo che $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c.

$\forall\, R > \delta$ $\left| f(Re^{it}) Re^{it} - 2 \right| < \dfrac{\varepsilon}{\pi}$ quindi $\forall R > \delta$:

$$\int_0^{\pi} \left| f(Re^{it}) Re^{it} - 2 \right| dt < \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon}{\pi}\, dt = \varepsilon \quad \text{c.v.d.}$$

5) $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Vediamo che 0 è polo di ordine 3 per f dato che

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^3 e^{z-1}}{z^3} = \frac{1}{e} \neq 0$$

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} D^2\left(z^3 f(z)\right) = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} D^2\left(e^{z-1}\right) = \frac{1}{2e}$$

Vediamo ora che tipo di singolarità è ∞ calcoliamo

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{\frac{1}{z}-1}}{\frac{1}{z^3}} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{z}{e}\, e^{\frac{1}{z}}$$

quindi dato che $e^{\frac{1}{z}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \cdot \frac{1}{k!}$; $-\dfrac{z}{e} e^{\frac{1}{z}}$ ha sviluppo di

Laurent in 0 dato da $\displaystyle -\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{k!}$ (□). Quindi 0 è una

singolarità essenziale per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$, cioè ∞ è una singolarità essenziale

per f. Nella (□), il coefficiente del termine di grado -1 è $-\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{2!}$

pertanto $$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{2!} = -\frac{1}{2e}.$$

6) Il cambio di variabile da considerare per ricondursi all'intervallo $[-\pi,\pi]$ è dato da $t = \dfrac{2}{2\pi}\tau = \dfrac{\tau}{\pi}$

Pertanto possiamo considerare la funzione $g(\tau) = f\left(\tau/\pi\right)$ definita in $(-\pi,\pi)$. Estendiamo g su $\mathbb{R} \setminus \{\pi(1+2k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ per periodicità con periodo 2π. Si tratta di una funzione dispari e quindi nella sua serie di Fourier i coefficienti $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\cos(k\tau)\, d\tau$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\, d\tau$ sono nulli. Calcoliamo i coefficienti

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \sin(k\tau)\, d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\tau/\pi\right) \sin(k\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-1}^{1} f(t) \sin(k\pi t)\, dt = \int_{-1}^{1} t^3 \sin(k\pi t)\, dt =$$

$$\left[-t^3 \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi} \right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 3t^2 \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\, dt = -\frac{2\cos(k\pi)}{k\pi} +$$

$$+ \left[3t^2 \frac{\sin(k\pi t)}{k^2\pi^2} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 6t \frac{\sin(k\pi t)}{k^2\pi^2}\, dt =$$

$$-2\frac{(-1)^k}{k\pi} + 0 + \left[6t \frac{\cos(k\pi t)}{k^3\pi^3} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 6 \frac{\cos(k\pi t)}{k^3\pi^3}\, dt =$$

$$= \frac{-2(-1)^k}{k\pi} + 12\frac{\cos(k\pi)}{k^3\pi^3} - \left[6 \frac{\sin(k\pi t)}{k^4\pi^4} \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{k\pi} \left[\frac{12}{k^2\pi^2} - 2 \right]$$

Per cui la serie di Fourier di f è data da

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} \left[\frac{12}{k^2\pi^2} - 2 \right] \sin(k\pi t)$$

Per $t = \frac{1}{2}$ diviene $$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2h+1)\pi} \left[\frac{12}{(2h+1)^2\pi^2} - 2 \right] (-1)^h \quad (*)$$

dato che per k pari $\sin\left(k\pi \frac{1}{2}\right) = 0$ mentre per k dispari, cioè

per $k = 2h+1$, $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 2h+1 \text{ con } h \text{ pari} \\ -1 & \text{se } k = 2h+1 \text{ con } h \text{ dispari} \end{cases}$

La (*) è la serie assegnata la cui somma è quindi uguale a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

dato che la serie di Fourier di f converge puntualmente a f $\forall\, t \in (-1,1)$.

Possibile svolgimento della prova del 16 Febbraio 2011

3) Per la II formula di rappresentazione di Cauchy

$$\int_C \left(\frac{2z+i}{z-i}\right)^4 dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(i)$$

dove $f(z) = (2z+i)^4$ (osserviamo che f è olomorfa sul disco di centro $2i$ e raggio 2)

$$f'(z) = 8(2z+i)^3 ; \quad f''(z) = 48(2z+i)^2 ; \quad f^{(3)}(z) = 192(2z+i)$$

$f^{(3)}(i) = 192 \cdot 3i$. Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\frac{192 \cdot 3i}{6} 2\pi i = -192\pi$$

4) $e^z = (-1+i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

Pertanto le soluzioni dell'equazione assegnata sono $z = \log(-2i) =$
$= \log 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

5)

Il cambio di variabile da considerare per ricondursi all'intervallo $[-\pi,\pi]$ è dato da $t = \frac{1}{2\pi}\tau + \frac{1}{2}$

Pertanto possiamo considerare la funzione $g(\tau) = f\left(\frac{1}{2\pi}\tau + \frac{1}{2}\right)$ in $[-\pi,\pi]$. Estendiamo g su $\mathbb{R}$ per periodicità con periodo 2π.
Si tratta di una funzione pari e quindi nella sua serie di Fourier i coefficienti $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\sin(k\tau)\,d\tau$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ sono nulli.
Calcoliamo i coefficienti a_k

$$a_0 = \frac{1}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\cos(k\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{2\pi}\tau + \frac{1}{2}\right)\cos(k\tau)\,d\tau$$

$$= 2\int_0^1 f(t)\cos(k2\pi t - k\pi)\,dt = \left\{\begin{array}{l}\text{usando le formule di addizione} \\ \text{e tenendo presente che} \\ \cos(k\pi) = (-1)^k,\ \forall k \in \mathbb{Z}\end{array}\right\}$$

$$= 2(-1)^k \int_0^1 f(t)\cos(k2\pi t)\,dt$$

Calcoliamo $\int_0^1 f(t)\cos(2\pi k t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t\cos(2\pi k t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\cos(2\pi k t)\,dt$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} t\cos(2\pi k t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(2\pi k t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t\cos(2\pi k t)\,dt$$

$$= \left[t\,\frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k}\,dt + \left[\frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$- \left[t\,\frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k}\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k}\,dt$$

$$= 0 + \left[\frac{\cos(2\pi k t)}{(2\pi k)^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + 0 - 0 - \left[\frac{\cos(2\pi k t)}{(2\pi k)^2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \frac{\cos(\pi k)}{(2\pi k)^2} - \frac{1}{(2\pi k)^2} - \frac{1}{(2\pi k)^2} + \frac{\cos(\pi k)}{(2\pi k)^2}$$

$$= \frac{2(-1)^k}{(2\pi k)^2} - \frac{2}{(2\pi k)^2}$$

Per cui $a_k = (-1)^k 2\left(\frac{2(-1)^k}{(2\pi k)^2} - \frac{2}{(2\pi k)^2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{2}{\pi^2 k^2} & \text{se } k \text{ dispari}\end{cases}$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{1}{4} + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{((2h+1)\pi)^2}\cos\left((2h+1)2\pi t + (2h+1)\pi\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{((2h+1)\pi)^2}\cos\left((2h+1)2\pi t\right)$$

Dato che f è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile con derivata continua in $\mathbb{R}\setminus\left(\mathbb{Z}\cup\{\frac{1}{2}+n\}_{n\in\mathbb{Z}}\right)$ e in ogni punto di $\mathbb{Z}\cup\{\frac{1}{2}+n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

esistono la derivata destra e sinistra di f, la convergenza di tale serie a f è uniforme su $\mathbb{R}$.

Possibile svolgimento della prova del 3 Marzo 2011

4) Per la II formula di rappresentazione di Cauchy

$$\int_C \frac{(2i+z)^4}{(z+i)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-i)$$

dove $f(z) = (2i+z)^4$ (osserviamo che f è olomorfa sul disco di centro $1-i$ e raggio 3)

$$f'(z) = 4(2i+z)^3;\quad f''(z) = 12(2i+z)^2;\quad f^{(3)}(z) = 24(2i+z)$$

$f^{(3)}(-i) = 24i$. Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\frac{24i}{6}\,2\pi i = -8\pi$$

5) $|-1-i| = \sqrt{2}$; $\operatorname{Arg}(-1-i) = -\frac{3}{4}\pi$

Occorre scegliere l'argomento appartenente all'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}+\pi\right) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

Osserviamo che $-\frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{5}{4}\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

Quindi $\operatorname{Log}_{\frac{\pi}{2}}(-1-i) = \log(2) + \frac{5}{4}\pi i$

6) Il cambio di variabile da considerare per ricondursi all'intervallo $[-\pi,\pi]$ è dato da $t = \frac{\tau}{\pi} + 1$

Pertanto possiamo considerare la funzione $g(\tau) = f\left(\frac{\tau}{\pi}+1\right)$ in $[-\pi,\pi]$. Estendiamo g su $\mathbb{R}$ per periodicità con periodo 2π

Si tratta di una funzione pari e quindi nella sua serie di Fourier i coefficienti $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\sin(k\tau)\,d\tau$, $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ sono nulli.

Calcoliamo i coefficienti a_k

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\cos(k\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\tau/\pi + 1\right)\cos(k\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^1 f(t)\cos(k\pi t - k\pi)\,dt = \left\{\begin{array}{l}\text{usando le formule di addizione} \\ \text{e tenendo presente che} \\ \cos(k\pi) = (-1)^k,\ \forall k\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}$$

$$= (-1)^k\int_0^1 f(t)\cos(k\pi t)\,dt$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(k\pi t)\,dt = \int_0^1 t\cos(k\pi t)\,dt + \int_1^2 (2-t)\cos(k\pi t)\,dt$

$$= \int_0^1 t\cos(k\pi t)\,dt + \int_1^2 2\cos(\pi k t)\,dt - \int_1^2 t\cos(\pi k t)\,dt$$

$$= \left[t\,\frac{\sin(k\pi t)}{\pi k}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi k t)}{\pi k}\,dt + 2\left[\frac{\sin(\pi k t)}{\pi k}\right]_1^2$$

$$- \left[t\,\frac{\sin(\pi k t)}{\pi k}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{\sin(\pi k t)}{\pi k}\,dt$$

$$= 0 + \left[\frac{\cos(\pi k t)}{(\pi k)^2}\right]_0^1 + 0 - 0 - \left[\frac{\cos(\pi k t)}{(\pi k)^2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{\cos(\pi k)}{(\pi k)^2} - \frac{1}{(\pi k)^2} - \frac{1}{(\pi k)^2} + \frac{\cos(\pi k)}{(\pi k)^2}$$

$$= \frac{2(-1)^k}{(\pi k)^2} - \frac{2}{(\pi k)^2}$$

Per cui $a_k = (-1)^k\cdot\left(\frac{2(-1)^k}{(\pi k)^2} - \frac{2}{(\pi k)^2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{4}{\pi^2 k^2} & \text{se } k \text{ dispari}\end{cases}$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{1}{2} + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{((2h+1)\pi)^2}\cos\big((2h+1)\pi t - (2h+1)\pi\big) =$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{[(2h+1)\pi]^2}\cos\big((2h+1)\pi t\big).$$

Dato che f è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile con derivata continua in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ e in ogni punto di $\mathbb{Z}$ esistono la derivata destra e sinistra di f, la convergenza di tale serie a f è uniforme su $\mathbb{R}$.

Possibile svolgimento della prova del 2 Maggio 2011

1) $\lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n}{1+n^2}} = 2 \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{1+n^2}} = 2$, quindi $\rho = \frac{1}{2}$

Per $x = -\frac{1}{2}$, la serie diventa $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ che converge per il criterio di Leibniz.

Per $x = \frac{1}{2}$, la serie diventa $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$

che converge in quanto la successione $\frac{1}{1+n^2}$ è asintotica a $\frac{1}{n^2}$

e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Pertanto per il teorema di Abel

la serie di potenze assegnata converge puntualmente e

uniformemente su $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

3) Notiamo che $f(z) = \frac{z^3}{z^4+1}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{\sqrt[4]{-1}\}$.

$$z^4+1 = (z^2+i)(z^2-i) = (z^2+i)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Possiamo quindi applicare la I formula di rappresentazione di Cauchy:

$$\int_C \frac{z^3}{z^4+1}\,dz = \int_C \underbrace{\frac{z^3}{(z^2+i)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}_{g(z)} \cdot \frac{1}{\left(z-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}\,dz =$$

$$= 2\pi i\, g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$\left\{ \text{Tenendo presente che } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i \right\}$

$$= 2\pi i \frac{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2i \cdot 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\pi}{2} i$$

5) Osserviamo che $\left|\frac{\cos(3x)}{2+x^4}\right| \le \frac{1}{x^4}$, quindi $f(x) = \frac{\cos 3x}{2+x^4}$ è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$. Osserviamo anche che f è una funzione pari e quindi $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{2+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{2+x^4}dx$.

Poiché $\cos(3x) = \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}$

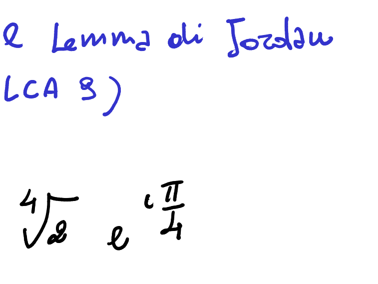
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{2+x^4}dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{2+x^4}dx + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i3x}}{2+x^4}dx$$

SONO UGUALI

$$\text{Ora } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i3x}}{2+x^4}dx \overset{-x=y}{=} -\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{i3y}}{2+y^4}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3y}}{2+y^4}dy$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{2+x^4}dx$

Considero la funzione di variabile complessa $h(z) = \frac{e^{i3z}}{2+z^4}$ e la semicirconferenza $S(R)$ con diametro sull'asse delle x, centro 0 e raggio R



$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S(R)} \frac{e^{i3z}}{2+z^4} = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \text{ singolarità} \\ \text{di } h \text{ in } \operatorname{Im} z>0}} \operatorname{Res}(h, z_k)$$

$$\| $$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i3x}}{2+x^4}dx + \underbrace{\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma(R)} \frac{e^{i3z}}{2+z^4}dz}_{=0}$$

$= 0$ Per il Lemma di Jordan (v. LCA 3)

$$\| $$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{2+x^4}dx$$

Dobbiamo quindi calcolare i residui in $\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}$ e $\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

che sono le singolarità di h contenute nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$

(sono due delle radici quarte di -2)

Poiché $2+z^4 = \prod_{k=0}^{3}(z-z_k)$, con z_k radice quarta di -2

entrambe tali singolarità sono semplici. Notiamo che per $\bar{k} \in \{0,1,2,3\}$

$$\operatorname{Res}(h, z_{\bar{k}}) = \lim_{z\to z_{\bar{k}}} (z-z_{\bar{k}})\,h(z) = e^{i3z_{\bar{k}}} / 4z_{\bar{k}}^3$$

Infatti $(z-z_{\bar{k}})\,h(z) = (z-z_{\bar{k}}) \frac{e^{i3z}}{(z-z_{\bar{k}})\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq\bar{k}}}^{3}(z-z_k)} = \frac{e^{i3z_{\bar{k}}}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq\bar{k}}}^{3}(z-z_k)}$

ma la derivata della funzione

$\prod_{k=0}^{3}(z-z_k)$ è data da

$$\prod_{k=1}^{3}(z-z_k) + \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq1}}^{3}(z-z_k) + \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq2}}^{3}(z-z_k) + \prod_{k=0}^{2}(z-z_k)$$

e quindi in $z = z_{\bar{k}}$ essa vale $\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq\bar{k}}}^{3}(z-z_k)$, dato che dei quattro addendi di sopra l'unico non nullo quando $z = z_{\bar{k}}$ è quello che non contiene il fattore $(z-z_{\bar{k}})$. Ovviamente dato che

$2+z^4 = \prod_{k=0}^{3}(z-z_k)$, tale derivata è anche uguale a $4z_{\bar{k}}^3$.

$$\text{Quindi } \operatorname{Res}\left(h, \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}\right) = e^{3i\sqrt[4]{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}} \Big/ 4\sqrt[4]{8}\,e^{i\frac{9}{4}\pi} =$$

$$= \frac{e^{3\sqrt[4]{2}\,i\,\frac{(-1+i)}{\sqrt{2}}}}{4\sqrt[4]{8}\,\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}} = \frac{e^{3\cdot2^{-\frac{1}{4}}(-1-i)}}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{8}(1+i)} = \frac{e^{-3\cdot2^{-\frac{1}{4}}}\,e^{-i3\cdot2^{-\frac{1}{4}}}}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{8}(1+i)}$$

$$= \frac{e^{-3\cdot2^{-\frac{1}{4}}}\,e^{-i3\cdot2^{-\frac{1}{4}}}(1-i)}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}$$

$$\text{e } \operatorname{Res}\left(h, \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{3i\sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}} \Big/ 4\sqrt[4]{8}\,e^{i\frac{3}{4}\pi} =$$

$$= \frac{e^{3\sqrt[4]{2}\,i\,\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}}}{4\sqrt[4]{8}\,\frac{(-1+i)}{\sqrt{2}}} = \frac{e^{-3\cdot2^{-\frac{1}{4}}}\,e^{i3\cdot2^{-\frac{1}{4}}}}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}(-1-i)$$

In definitiva

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{2+x^4}dx = 2\pi i \frac{e^{-3\cdot2^{-\frac{1}{4}}}}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}\left(e^{-i3\cdot2^{-\frac{1}{4}}} - i\,e^{-i3\cdot2^{-\frac{1}{4}}} - e^{i3\cdot2^{-\frac{1}{4}}} - i\,e^{i3\cdot2^{-\frac{1}{4}}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}\,e^{-3\cdot2^{-\frac{1}{4}}}\left(-2i\sin\left(3\cdot2^{-\frac{1}{4}}\right) - 2i\cos\left(3\cdot2^{-\frac{1}{4}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\,e^{-3\cdot2^{-\frac{1}{4}}}\left(\sin\left(3\cdot2^{-\frac{1}{4}}\right) + \cos\left(3\cdot2^{-\frac{1}{4}}\right)\right)$$