1)-a) Calcolare la forma esponenziale del numero e calcolarne le radici undicesime

$$z = 2\frac{(i-1)^3}{i}$$

$$z = \frac{2\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^3}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 4\sqrt{2}\, e^{\frac{9}{4}\pi i - i\frac{\pi}{2}} = 4\sqrt{2}\, e^{\frac{7}{4}\pi i}$$

$$\sqrt[11]{z} = 2^{\frac{5}{22}}\, e^{i\left(\frac{7}{44}\pi + \frac{2\pi}{11}k\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, 10$$

1-b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \arccos\sqrt{x}$$

dom f : $\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$ quindi dom f $= [0,1]$

Osserviamo che se $x \in [0,1]$: $0 \leq \frac{\pi}{2}x \leq \frac{\pi}{2}$ e la funzione

$y = \cos t$ è strett. decrescente se $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e non-negativa

(si annulla solo per $t = \frac{\pi}{2}$ in tale intervallo)

La funzione $y = \arccos\sqrt{x}$ è strett. decrescente su $[0,1]$ essendo

composta da una funzione strett. crescente e una strett. decrescente,

inoltre è positiva su $[0, 1)$

quindi f essendo il prodotto di due funzioni positive

su $[0,1)$ e strett. decrescenti, è strett. decrescente; poiché

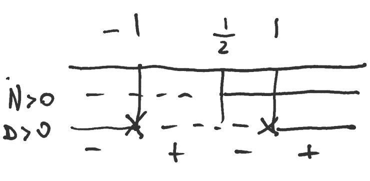
$f(1) = 0$ e $f(x) > 0$ $\forall x \in [0, 1)$ è strett decrescente su $[0,1]$.

$f \in C^0([0,1])$ e quindi $\operatorname{Im} f = [f(1), f(0)] = [0, \frac{\pi}{2}]$

2) Determinare il dominio, gli asintoti e la monotonia della funzione. Tracciarne quindi approssimativamente il grafico.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)^{\sqrt{2}}$$

dom f : $\begin{cases} \frac{2x-1}{x^2-1} \geq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$



Quindi dom f $= (-1, \frac{1}{2}] \cup (1, +\infty)$

$f \in C^0(\text{dom} f)$ quindi gli eventuali asintoti verticali sono

da cercarsi in $x = -1$ (da dx) e in $x = 1$ (da dx)

$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$, quindi $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ e la retta $x = -1$ è asintoto vert. a dx

$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, quindi $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ e la retta $x = 1$ " " " "

Asintoto orizzontale:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^{\sqrt{2}} = 0$ quindi la retta $y=0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

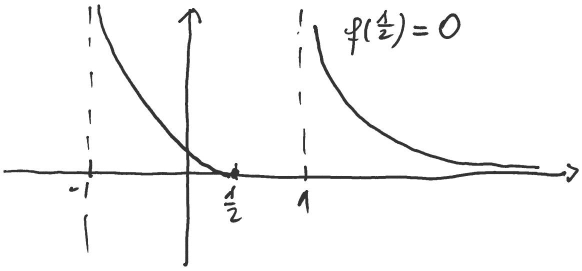
$$f'(x) = \sqrt{2}\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)^{\sqrt{2}-1} \frac{2(x^2-1)-(2x-1)2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) > 0 \iff 2x^2-2-4x^2+2x > 0$$

$$\iff x^2-x+1 < 0$$

Poiché $x^2-x+1 > 0 \ \forall x$, $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathrm{dom} f$

e dunque f è strett. decrescente sia su $(-1, \frac{1}{2}]$ che su $(1, +\infty)$



3) Calcolare la media integrale di $f(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ sull'intervallo $\left[\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{4}\right]$

La media integrale di f sull'intervallo assegnato è

$$\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{16}} \int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{16}{3\pi^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\,dt = \frac{32}{3\pi^2}\sin t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{3\pi^2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{16(2-\sqrt{2})}{3\pi^2}$$

4) Dare la definizione di funzione convessa su un intervallo

Nel caso di una funzione derivabile su I, dare una caratterizzazione (analitica o geometrica) della convessità di f

Stabilire infine che la funzione $f(x) = e^{x^2-x-1}$

è strett. convessa su $\mathbb{R}$

f è convessa su I se $\forall \lambda \in [0,1]$ e $\forall \substack{x\\y} \in I$:

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Se f è derivabile su I allora

f è convessa su $I \iff \forall y, x \in I : f'(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$

f è derivabile due volte su $\mathbb{R}$

$f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x-1}$

$f''(x) = 2e^{x^2-x-1} + (2x-1)^2 e^{x^2-x-1} = [2+(2x-1)^2]\, e^{x^2-x-1}$

Poiché $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, f è strett. convessa su $\mathbb{R}$.