1) a) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$z^6-16z^2=0$

$z^6+z^2=0 \iff z^2(z^4-16)=0$ da cui $z=0 \vee z^4=16$

e quindi $z=0$ o $z=\sqrt[4]{16}=2e^{i\frac{2\pi}{4}k}$, $k=0,1,2,3$

cioè $z=0 \vee z=2,-2,2i,-2i$

b) Determinare il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x^3}}}$ ristretta all'intervallo $(-\infty,0)$

La funzione f è composta:

$$x \longmapsto \frac{1}{x^3} \longmapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^3}}$$

sull'intervallo $(-\infty,0)$, $x^3<0$ e strett. crescente

quindi $x\in(-\infty,0)\mapsto \frac{1}{x^3}$ è strett. decrescente

la funzione $x\in\mathbb{R}\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^x$ è strett. decrescente quindi

f è strett. crescente.

$f\in C^0((-\infty,0))$ e quindi $\operatorname{Im} f=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 0^-} f(x)\right)=(1,+\infty)$

2) Determinare dominio e asintoti della funzione

$f(x)=\log_2(1-x^2)-\log(x^2)$

Studiare la monotonia di f. Determinare infine la formula di Taylor di ordine 2 e centro $\frac{1}{2}$ per f

dom f: $\begin{cases}1-x^2>0\\ x\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}-1<x<1\\ x\neq 0\end{cases}$; dom $f=(-1,1)\setminus\{0\}$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty - 0 = -\infty$ $\quad x=-1$ è asintoto verticale

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0+\infty = +\infty$ $\quad x=0$ è asintoto verticale a sx

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0+\infty=+\infty$ $\quad x=0$ è asintoto verticale a dx

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \infty = +\infty$$ $x = 0$ è asintoto verticale dx

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty - 0 = -\infty$$ $x = 1$ è " "

$$f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2}\frac{1}{\log 2} - \frac{2}{x}$$. Osserviamo che $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0,1)$

poiché è somma di due funzioni negative su $(0,1)$

e dunque f è strettamente decrescente su $(0,1)$. Analogamente

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,0)$ perché somma di due funzioni

positive su $(-1,0)$ e quindi f è strett. crescente su $(-1,0)$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\frac{3}{4}}\frac{1}{\log 2} - 4 = -4\left(\frac{2}{3\log 2} + 1\right)$$

$$f''(x) = \frac{-2(1-x^2) + 2x(-2x)}{(1-x^2)^2}\frac{1}{\log 2} + \frac{2}{x^2}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2\left(\frac{3}{4}\right) - 1}{\frac{9}{16}}\frac{1}{\log 2} + 8 = -\frac{40}{9}\frac{1}{\log 2} + 8 = 8\left(1 - \frac{5}{9\log 2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{3}{4} + \log 4 =$$

Quindi

$$f(x) = \log_2 \frac{3}{4} + \log 4 - 4\left(\frac{2}{3\log 2} + 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4\left(1 - \frac{5}{9\log 2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

3) Calcolare la media integrale della funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)x^2}$$ sull'intervallo $[2,4]$

La media integrale di f su $[2,4]$ è data da

$$\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{x+1}{(x-1)x^2}\,dx$$

$$\frac{x+1}{(x-1)x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

$$= \frac{Ax^2 + Bx(x-1) + C(x-1)}{(x-1)x^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x - C}{(x-1)x^2}$$

Deve quindi essere $\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=1 \\ -C=1 \end{cases}$ $\begin{cases} C=-1 \\ B=-2 \\ A=2 \end{cases}$

e quindi

$$\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{x+1}{(x-1)x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_2^4 \frac{2}{x-1}\,dx - \int_2^4 \frac{2}{x}\,dx - \int_2^4 \frac{1}{x^2}\,dx\right)$$

$$= \log(x-1)\Big|_2^4 - \log x\Big|_2^4 + \frac{1}{2}\frac{1}{x}\Big|_2^4$$

$$= \log 3 - \log 4 + \log 2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} =$$

$$= \log\frac{3}{2} - \frac{1}{8}$$

4) Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni continue.
Usarlo poi per dimostrare che se $f \in C^0((a,b))$ e
$\left(\lim_{x\to a^+} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to b^-} f(x)\right) < 0$ f ha uno zero in (a,b)

Per enunciato e dimostrazione richiesta si veda la Lezione 17.