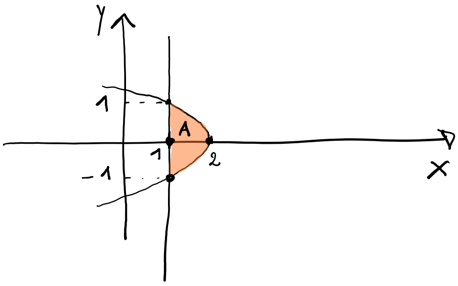
1) Calcolare

$$\int_A x^2 y \, dx\, dy$$

dove $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \leq x \leq 2 - y^2 \}$



A è l'insieme rappresentato in figura in arancione. Può essere visto come un insieme normale rispetto all'asse delle y

$A = \{ (x,y) : \; -1 \leq y \leq 1 \quad 1 \leq x \leq 2 - y^2 \}$

$$\int_A x^2 y \, dx\, dy = \int_{-1}^{1} y \left(\int_1^{2-y^2} x^2 \, dx \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} y \; \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^{2-y^2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} y \left(\frac{1}{3} (2-y^2)^3 - \frac{1}{3} \right) dy$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{-1}^{1} y \, dy + \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} y (2-y^2)^3 dy \qquad \| \text{ponendo } 2-y^2 = t$$

$$= 0 - \frac{1}{6} \int_1^1 t^3 \, dt = 0$$

Del resto che l'integrale assegnato sia 0 può anche dedursi dal fatto che, detto $f(x,y) = x^2 y$ si ha $f(x,-y) = -f(x,y)$ e A è simmetrico rispetto alla simmetria $(x,y) \mapsto (x,-y)$

2) Determinare il dominio della funzione

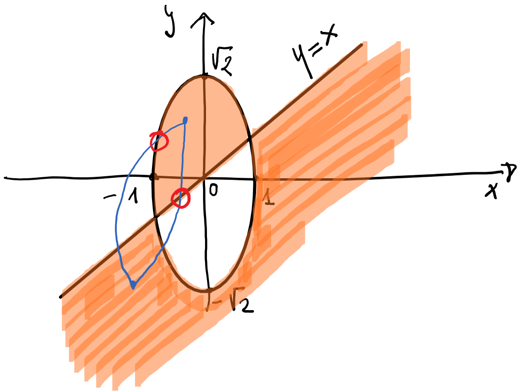
$$f(x,y) = \log \left(\frac{x^2 + \frac{1}{2} y^2 - 1}{x - y} \right)$$

e rappresentarlo sul piano. Dire se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.

Stabilire poi che f è differenziabile sul suo dominio e determinarne il suo gradiente nei punti del dominio e $\frac{\partial f}{\partial v}(2,0)$ con $v=\left(\frac{1}{\sqrt{7}}, -\sqrt{\frac{6}{7}}\right)$

$$\text{dom} f: \quad \frac{x^2+\frac{1}{2}y^2-1}{x-y} > 0 \iff \begin{cases} x^2+\frac{1}{2}y^2-1>0 \\ x-y>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+\frac{1}{2}y^2-1<0 \\ x-y<0 \end{cases}$$

$x^2+\frac{1}{2}y^2-1=0$ è l'equazione di un ellisse con centro in $(0,0)$ e assi coincidenti con gli assi cartesiani



Il dominio di f è dunque dato dalla regione in arancione

Si tratta di un insieme aperto dato che tutti i suoi punti sono interni, non limitato, non connesso per archi dato che un punto all'interno dell'ellisse non può essere collegato con un punto all'esterno con una curva continua contenuta nel dominio (una qualunque curva di tale tipo deve intersecare l'ellisse o la retta $y=x$ ma i punti di questi non sono punti del dominio).

f è una funzione di classe C^∞ sul suo dominio in quanto composta della funzione logaritmo e della funzione razionale $\frac{x^2+\frac{1}{2}y^2-1}{x-y}$ entrambe di classe C^∞ nei loro domini. Quindi f è differenziabile in tutti i punti del suo dominio per il teorema del differenziale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x-y}{x^2+\frac{1}{2}y^2-1} \cdot \frac{2x(x-y)-x^2-\frac{1}{2}y^2+1}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x-y}{x^2+\frac{1}{2}y^2-1} \quad \frac{y(x-y)+x^2+\frac{1}{2}y^2-1}{(x-y)^2}$$

Quindi $\nabla f(x,y) = \left(\frac{x^2-\frac{1}{2}y^2-2xy+1}{(x-y)(x^2+\frac{1}{2}y^2-1)}, \frac{x^2-\frac{1}{2}y^2+xy-1}{(x-y)(x^2+\frac{1}{2}y^2-1)} \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,0) = \left\langle \nabla f(2,0), \left(\frac{1}{\sqrt7}, -\sqrt{\frac{6}{7}}\right)\right\rangle = \left\langle \left(\frac{5}{6}, \frac{3}{6}\right), \left(\frac{1}{\sqrt7}, -\sqrt{\frac{6}{7}}\right)\right\rangle$$
$$= \frac{5}{6\sqrt7} - \frac{3}{\sqrt6 \cdot \sqrt7} = \frac{1}{\sqrt7}\left(\frac{5-3\sqrt6}{6}\right)$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = x(1-e^x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda = 0$ che ha soluzioni 1 e 0 quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa: possiamo applicare il metodo di similarità vedendo $f(x) = x(1-e^x)$ come $f(x) = x - xe^x$ e applicandolo separatamente alle equazioni

$$y'' - y' = x$$

Poiché 0 è soluzione dell'eq. caratteristica, cerchiamo $\tilde{y}_1(x) = x(ax+b)$

$$\tilde{y}_1' = 2ax + b$$
$$\tilde{y}_1'' = 2a$$

quindi

$2a - 2ax - b = x$ da cui

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

e quindi $y_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$

$$y'' - y' = -xe^x \quad (*)$$

Poiché 1 è soluzione dell'eq. caratteristica cerchiamo $\tilde{y}_2(x) = x(cx+d)e^x$

$$\tilde{y}_2'(x) = (cx+d)e^x + cxe^x + x(cx+d)e^x$$
$$= e^x(cx^2 + (2c+d)x + d)$$
$$\tilde{y}_2''(x) = e^x(cx^2 + (2c+d)x + d) + e^x(2cx + 2c + d)$$

quindi sostituendo in $(*)$ otteniamo

$e^x(2cx + 2c + d) = -xe^x$ da cui

$$\begin{cases} 2c = -1 \\ 2c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -\frac{1}{2} \\ d = 1 \end{cases}$$

e quindi $y_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$

$$\begin{cases} \\ 2c+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ d=1 \end{cases}$$

e dunque $\tilde{y}_2(x) = x\left(-\frac{1}{2}x+1\right)e^x$

L'integrale generale dell'equazione assegnata è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + x\left(-\frac{1}{2}x+1\right)e^x - \frac{1}{2}x^2 - x \qquad (\square)$$

Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$y(0)=0 \iff c_1 + c_2 = 0$ da cui $c_2 = -c_1$

Sostituendo in $(\square)$ e derivando otteniamo quindi

$$y'(x) = -c_1 e^x + \left(1 - \frac{1}{2}x\right)e^x - \frac{1}{2}xe^x + x\left(-\frac{1}{2}x+1\right)e^x - x - 1$$

$y'(0) = 1 \iff -c_1 + 1 - 1 = 1 \iff c_1 = -1$

La soluzione è quindi $y(x) = -1 + e^x + x\left(-\frac{1}{2}x+1\right)e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Confronto per serie a termini non negativi.

Si veda la lezione 31