1) - a)

Si determinino le soluzioni in forma cartesiana dell'equazione in $\mathbb{C}$

$z^7 + 2z = 0$. Le si rappresenti nel piano complesso.

$$0 = z^7 + 2z = z\left(z^6 + 2\right)$$

quindi una soluzione è $z = 0$ le altre $z = \sqrt[6]{-2}$

$$\sqrt[6]{-2} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right)i}, \quad k = 0, 1, \dots 5$$

Per $k=0$ otteniamo $z = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{6}} = 2^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

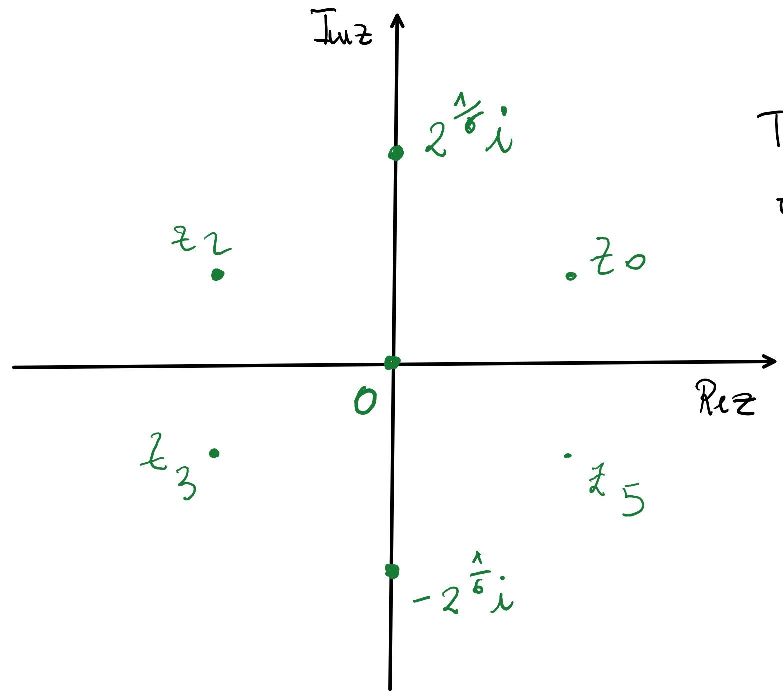
" $k=1$ " $z = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{\pi}{2}i} = 2^{\frac{1}{6}} i$

" $k=2$ " $z = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{5}{6}\pi i} = 2^{\frac{1}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

" $k=3$ " $z = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{7}{6}\pi i} = 2^{\frac{1}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

" $k=4$ " $z = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{3}{2}\pi i} = -2^{\frac{1}{6}} i$

" $k=5$ " $z = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{11}{6}\pi i} = 2^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$



Tali soluzioni sono rappresentate dai punti in verde

1) - b)

Sia $f(x) = 3^{\frac{1}{x-1}} + 2^{\frac{1}{x^2+1}}$

Se ne determini il dominio, si studi la monotonia per $x > 1$ e si determini $f((1,+\infty))$.

dom f : $x \neq 1$

Sull'intervallo $(1,+\infty)$ abbiamo:

$f = f_1 + f_2$

$f_1 = 3^{\frac{1}{x-1}}$ composta da una strett. decrescente $\left(y = \frac{1}{x-1} \right)$ e una strett. crescente $(y = 3^x)$ quindi è strett. decrescente

$f_2 = 2^{\frac{1}{x^2+1}}$ $y = \frac{1}{x^2+1}$ è il reciproco di $y = x^2+1$ strett. crescente in $(1,+\infty)$ e positivo quindi $y = \frac{1}{x^2+1}$ è strett. decrescente

$y = 2^x$ è strett. crescente, quindi f_2 è anche strett. decrescente in $(1,+\infty)$

Pertanto f è strett. decrescente in $(1,+\infty)$ in quanto somma di funzioni strett. decrescenti. Poiché $f \in C^0((1,+\infty))$

$$f((1,+\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x) \right) = (2,+\infty)$$

2) Determinare gli asintoti della funzione

$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Stabilire che f è prolungabile per continuità in 0 e scrivere il suo prolungamento continuo $\tilde{f}$.

Stabilire che $\tilde{f}$ non è derivabile in 0

Stabilire che $\tilde{f}$ non è derivabile in 0

e un punto di flesso in $x =$

dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Osserviamo che $|f(x)| \leq |x|$ quindi

$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0$ e dunque $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Pertanto f è prolungabile per continuità in $x = 0$ e il suo prolungamento continuo è la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Vediamo che $\tilde{f}$ non è derivabile in $x = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(h) - \tilde{f}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \sin\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

Poiché sappiamo che $\nexists \lim_{h \to 0} \sin\left(\frac{1}{h^2}\right)$ concludiamo che $\tilde{f}$ non è derivabile in 0

Restano da determinare eventuali asintoti orizzontali o obliqui

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

3) Calcolare

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-1)\left(\log(x-1)\right)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

Posto $x-1=t$ otteniamo

$$\int_2^3 \frac{1}{t(\log t)^{\frac{1}{3}}}\,dt \underset{dz=\frac{1}{t}dt}{\overset{\log t = z}{=\!=}} \int_{\log 2}^{\log 3} z^{-\frac{1}{3}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}\, z^{\frac{2}{3}}\Big|_{\log 2}^{\log 3} = \frac{3}{2}\left[(\log 3)^{\frac{2}{3}} - (\log 2)^{\frac{2}{3}}\right]$$

4) Enunciare la formula di Taylor di ordine 2 per una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ di centro $x_0 \in \mathring{I}$. Si supponga poi che f sia derivabile due volte in x_0, con $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0$. Dimostrare che x_0 è un punto di minimo locale forte per f.

Si veda, ad esempio, la lezione 24.