Possibile svolgimento della prova del 7 Febbraio 2025 – Modulo A

1) (a) Per calcolare $\left(\frac{1+i}{3-3i}\right)^6$ in forma esponenziale, scriviamo $\frac{1+i}{3-3i}$ in forma esponenziale.

Il modulo è:

$$\left|\frac{1+i}{3-3i}\right| = \frac{|1+i|}{|3-3i|} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 1/3$$

Per l'argomento:

$$\arg(\frac{1+i}{3-3i}) = \arg(1+i) - \arg(3-3i) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

Quindi:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^6 = \frac{1}{3^6}e^{3\pi i}\left(= -\frac{1}{3^6}\right)$$

(b) Per la successione $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$, basta osservare che $\frac{n^2-1}{n^2+1} = 1 - \frac{2}{n^2+1}$. Quindi la successione è crescente e pertanto

$$\sup A = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1,$$

e A non ha massimo;

$$\inf A = a_0 = -1 = \min A.$$

2) Per il dominio di $f(x) = \log(x^2-4)\cdot e^{\sqrt{x-1}}$, devono essere soddisfatte le condizioni: 1) $x^2-4>0$ quindi $x \in (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ 2) $x-1\geq 0$ quindi $x \geq 1$

Intersecando le condizioni: $x \in (2,+\infty)$.

Studiamo gli asintoti:

Asintoto verticale in $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^+} \log(x^2-4)\cdot e^{\sqrt{x-1}} = -\infty$$

(poiché $\log(x^2-4) \to -\infty$ e $e^{\sqrt{x-1}}$ ha limite finito positivo), quindi $x = 2$ è un asintoto verticale.

Per $x \to +\infty$:

$$\log(x^2-4)\cdot e^{\sqrt{x-1}} \to (+\infty)(+\infty) = +\infty,$$

quindi non ci sono asintoti orizzontali.

La miglior approssimazione lineare di f in $x = \sqrt{5}$ è la funzione

$$f(\sqrt{5}) + f'(\sqrt{5})(x-\sqrt{5}).$$

Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-4}e^{\sqrt{x-1}} + \log(x^2-4)\cdot e^{\sqrt{x-1}}\frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Quindi

$$f(\sqrt{5}) + f'(\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) = 0 + 2\sqrt{5}e^{\sqrt{\sqrt{5}-1}}(x-\sqrt{5}).$$

Osserviamo che $g(x) = e^{-\sqrt{x-1}}f(x) = \log(x^2-4)$ ma poiché g è data come prodotto di f e della funzione $x \geq 1 \mapsto e^{-\sqrt{x-1}}$, il suo dominio resta quello della funzione f. La derivata è $g'(x) = \frac{2x}{x^2-4} > 0$ per $x > 2$, quindi g è strettamente crescente.

La derivata seconda è $g''(x) = \frac{2(x^2-4)-4x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$ che è negativa per $x > 2$, quindi g è strettamente concava su tutto il suo dominio.

3) Calcoliamo $\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx$ per parti:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx = \left[\frac{x\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin(\pi) - 0 + \left[\frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 + \frac{\cos(\pi)}{4} - \frac{\cos(0)}{4} = -\frac{1}{2}$$

4) Definizione di continuità: una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $X_0 \in A$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che:

$$\forall x \in A \text{ con } |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Per dimostrare $|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}$, usiamo il teorema di Lagrange: esiste $c \in (a, b)$ tale che:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Quindi:

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |b - a| \leq \frac{1}{2(b-a)} \cdot |b - a| = \frac{1}{2}$$