Politecnico di Bari
CUC Ingegneria dell'Informazione
CdL Ingegneria Informatica e Automazione
AA 2009-2010

# Corso di Complementi di Analisi Matematica - Tracce di esame

Docente: Dott. E. Caponio

A.A 2009/2010 Esonero 7 Maggio 2010 Traccia A

**1)** Studiare la convergenza puntuale in $[0,1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2nx}{3 + x^2 n}.$$

Stabilire poi che la convergenza non è uniforme in $[0,1]$ e che lo è in ogni intervallo $[a,1]$, con $a > 0$.

**2)** Determinare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze in $\mathbb{C}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2 3^n} z^n.$$

Stabilire poi il carattere negli estremi dell'intervallo di convergenza della stessa serie in $\mathbb{R}$.

**3)** Richiamando i risultati teorici necessari e spiegando perché si possono usare, calcolare l'integrale

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos^2 z}{z(z+\pi)^2} \mathrm{d}z,$$

dove $\mathcal{C}$ è la circonferenza di centro il punto $-3$ e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

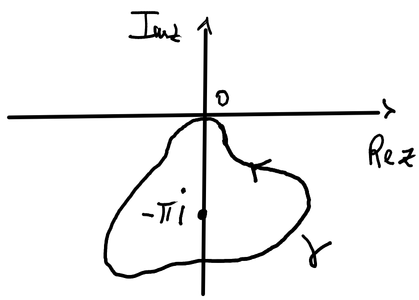
A.A 2009/2010 Appello e II Esonero 17 Luglio 2010 Traccia A

**1)** Dare la definizione di raggio di convergenza per una serie di potenze. Data poi la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ in $\mathbb{C}$, si supponga che $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in (0,+\infty)$; dimostrare che il suo raggio di convergenza è uguale a $1/l$.

**2)** Richiamando i risultati teorici necessari e spiegando perché si possono usare, calcolare

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^2+\pi^2}\mathrm{d}z,$$

dove $\gamma$ è la curva orientata rappresentata in figura.




**3)** Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, dare la definizione di determinazione $\alpha$ del logaritmo. Calcolare poi $\mathrm{Log}_{2\pi} i - \mathrm{Log}_{\pi} i$.

**4)** Dare la definizione di residuo in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Determinare poi i residui nelle singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{(z+1)(z-2i)^2}.$$

**5)** Calcolare, usando il metodo dei residui,

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x.$$

**6)** Scrivere la serie di Fourier della funzione $f(t) = t$, $t \in [0,1)$ estesa per periodicità su $\mathbb{R}$ con periodo $T = 1$. Studiare poi la convergenza puntuale e uniforme di tale serie.

A.A 2009/2010 Appello 1 Settembre 2010 Traccia A

**1)** Ricordare la definizione di *distanza*. Considerato poi l'insieme $C([a,b])$ delle funzioni continue sull'intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e la funzione $d\colon C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$, $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$, dimostrare che $d$ definisce una distanza su $C([a,b])$.

**2)** Calcolare per serie l'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x^2) \mathrm{d}x$, richiamando i risultati teorici che consentono tale calcolo.

**3)** Dire, motivando la risposta, se può esistere una funzione intera $f$, non identicamente nulla, tale che $f(1/n) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

**4)** Calcolare, usando il I e il II teorema dei residui,

$$\int_{\partial^+ T} \frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z-1}} \mathrm{d}z,$$

dove $T$ è il quadrato avente per vertici i punti $2+2i,\ -2+2i,\ -2-2i,\ 2-2i$.

**5)** Enunciare e dimostrare la regola del parallelogramma.

**6)** Scrivere la serie di Fourier della funzione $f(t) = t^2$, $t \in [-\pi, \pi]$, estesa per periodicità su $\mathbb{R}$ con periodo $T = 2\pi$. Studiare poi la convergenza puntuale e uniforme di tale serie, ricavare la serie numerica a cui essa si riduce nel punto $t = 2\pi$ e il valore della sua somma nello stesso punto.

A.A 2009/2010 Appello 17 Settembre 2010 Traccia A

**1)** Sia $A \subset \mathbb{R}$ e si consideri l'insieme $C_b^0(A)$ delle funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ continue e limitate su $A$. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_b^0(A)$ tale che $f_n \to f$ uniformemente su $A$. Dimostrare che $f \in C_b^0(A)$.

**2)** Calcolare per serie l'integrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} e^{-x^2}\mathrm{d}x$, richiamando i risultati teorici che consentono tale calcolo.

**3)** Ricordare la definizione di funzione olomorfa in un punto. Dimostrare poi che la funzione $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$ è olomorfa solo in 0.

**4)** Sviluppare in serie di Laurent centrata in 0 la funzione $f(z) = z^2 \sin(1/z^2)$. Che tipo di singolarità ha $f$ in 0? Motivare la risposta.

**5)** Calcolare il residuo all'infinito della funzione $f(z) = 1 - \frac{1}{z}\cos\frac{1}{z}$.

**6)** Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$. È noto che in $L^2([-\pi,\pi])$, $f$ è la somma della sua serie di Fourier:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

con $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$. Tale serie si può anche scrivere così:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

Dedurre le relazioni che legano i coefficienti $c_n$ con $a_n$ e $b_n$.

A.A 2009/2010 Appello 29 Novembre 2010 Traccia A

**1)** Si consideri una successione di funzioni $f_n \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ limitate e si consideri la loro serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
Dopo aver ricordato la definizione di convergenza totale, dimostrare che se tale serie converge totalmente su $(a,b)$ allora essa converge uniformente su $(a,b)$.

**2)** Fornire un esempio di una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ che non sia la somma della sua serie di MacLaurin. Motivare la risposta.

**3)** Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\partial^- B(i,2)} \frac{z\sin(\pi z^2)}{[(z-i)(z+2i)]^2}\mathrm{d}z,$$

dove $\partial^- B(i,2)$ è la frontiera della palla di centro $i$ e raggio 2 percorsa in senso orario.

**4)** Dimostrare che se $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 2$ allora

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{+\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i,$$

dove ${}^+\Gamma_R$ è la semicirconferenza $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = R,\ 0 \le \mathrm{Arg} z \le \pi\}$ orientata nel verso antiorario.

**5)** Stabilire la natura delle singolarità in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ della funzione $f(z) = \dfrac{e^{z-1}}{z^3}$ e calcolare i relativi residui.

**6)** Si consideri la funzione $f(x) = x^3$, $x \in (-1,1)$. Calcolare la serie di Fourier di $f$, estesa per periodicità su $\mathbb{R}$ con periodo 2. Usare quanto ottenuto per calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^{h+1}\frac{2}{(2h+1)\pi}\left(\frac{6}{[(2h+1)\pi]^2}-1\right).$$

A.A 2009/2010 Appello 16 Febbraio 2011 Traccia A

**1)** Dare la definizione di norma, di spazio normato, di spazio di Banach. Si consideri poi $A \subset \mathbb{R}$ e lo spazio $\mathcal{C}_b(A) = \{f\colon A \to \mathbb{R} \mid f \text{ limitata}\}$. Per ogni $f \in \mathcal{C}_b(A)$, sia $\|f\| = \sup_{x\in A} |f(x)|$. Dimostrare che $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathcal{C}_b(A)$ e che lo stesso spazio, munito di tale norma, è di Banach.

**2)** Ricordare la nozione di convergenza totale per una serie di funzioni continue $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dimostrare poi che la convergenza totale implica quella uniforme.

**3)** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_C \left(\frac{2z+i}{z-i}\right)^4 \mathrm{d}z,$$

dove $C$ è la circonferenza di centro $2i$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

**4)** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $e^z = (i-1)^2$

**5)** Si calcoli la serie di Fourier dela funzione

$$f(x) = \begin{cases} t & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1-t & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

estesa per periodicità ad $\mathbb{R}$ con periodo 1. Dire, motivando la risposta se tale serie converge uniformemente a $f$ su $\mathbb{R}$.

A.A 2009/2010 Appello 3 Marzo 2011 Traccia A

**1)** Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f_n \colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni limitate. Dare la definizione di convergenza uniforme e dimostrare che se $f_n \to f$ uniformemente su $A$ allora $f$ è limitata.

**2)** Dimostrare che se una serie di potenze in $\mathbb{C}$ di centro $z_0$ ha raggio di convergenza $\rho > 0$ allora la sua somma è continua nel disco di centro $z_0$ e raggio $\rho$.

**3)** Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra.

**4)** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_C \left(\frac{z+2i}{z+i}\right)^4 \mathrm{d}z,$$

dove $C$ è la circonferenza di centro $1-i$ e raggio 3 percorsa in senso antiorario.

**5)** Scrivere in forma algebrica il numero complesso $\mathrm{Log}_{\frac{\pi}{2}}(-1-i)$.

**6)** Si calcoli la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} t & \text{se } x \in [0,1] \\ 2-t & \text{se } x \in (1,2] \end{cases},$$

estesa per periodicità ad $\mathbb{R}$ con periodo 2. Dire, motivando la risposta, se tale serie converge uniformemente a $f$ su $\mathbb{R}$.

A.A 2009/2010 Appello 2 Maggio 2011 Traccia A

**1)** Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{1+n^2}.$$

Determinarne poi l'insieme di convergenza puntuale ed uniforme.

**2)** Dare la definizione di zero di ordine $m \in \mathbb{N}$ per una funzione olomorfa. Dimostrare he $z_0$ è uno zero di ordine $m$ per $f$ olomorfa se e solo se $f^{(k)}(z_0) = 0$, per ogni $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

**3)** Calcolare

$$\int_C \frac{z^3}{z^4+1} \mathrm{d}z,$$

dove $C$ è la circonferenza di centro $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

**4)** Enunciare e dimostrare il teorema di Hermite-Liouville.

**5)** Usando il metodo dei residui, calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{2+x^4} \mathrm{d}x.$$

**6)** Sia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert separabile. Dare la definizione di base numerabile ortonormale di $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, di coefficienti e di serie di Fourier di $x \in H$.