

1) Calcolare

$$\int_A x^3 dx dy,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{x^2}{y} \leq 2, 1 \leq xy \leq 2\}$.

7 pts.

2) Si consideri la funzione a valori vettoriali $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(u, v) = \left(\frac{1}{uv}, \log(u^2 - v^2), u^2 - v^2 \right).$$

Determinare il dominio naturale di F e rappresentarlo sul piano; dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi. Stabilire se F è differenziabile nel punto di coordinate $(1, 1/2)$ e determinare, in tal caso, la miglior approssimazione lineare di F in tale punto.

9 pts.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = t^2 e^{y-t} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

8 pts.

4) Dare la definizione di sottoinsieme compatto e di sottoinsieme sequenzialmente compatto di \mathbb{R}^n .

Dimostrare che una funzione continua $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ trasforma insiemi compatti in insiemi compatti.

6 pts.