1) a) Stabilire se il seguente integrale improprio converge o meno

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+x^3}\,dx$$

Consideriamo gli integrali impropri $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2+x^3}\,dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+x^3}$

(1) (2)

(1) : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2\cdot(1+x)} = 1$

Quindi $y(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2+x^3}$ è limitata in un intorno dx di 0 ed essendo continua su $(0,1]$ è integrabile su $[0,1]$

(2) : $0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2+x^3} \le \frac{1}{x^2+x^3} \sim \frac{1}{x^3}$ per $x\to+\infty$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \in \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2+x^3}$ è integrabile su $[1,+\infty)$

In definitiva l'integrale assegnato converge dato che sia (1) che (2) convergono

b) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+\log n}{n^2-1}$$

$$\frac{n+\log n}{n^2-1} = \frac{n\left(1+\log n/n\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\,\frac{1+\log n/n}{1-\frac{1}{n^2}}$$

Quindi $\frac{n+\log n}{n^2-1} \sim \frac{1}{n}$. Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$ anche ..

la serie assegnata diverge

2) Si consideri la funzione

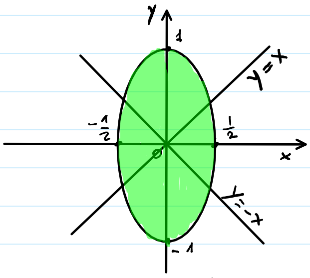
$$f(x,y) = \frac{\log(1-4x^2-y^2)}{x^2-y^2}$$

Determinare e rappresentare nel piano il suo dominio. Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.

Stabilire che f è differenziabile nel suo dominio e calcolare poi $\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{8}},0\right)$, $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
Stabilire infine se esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$\text{dom } f: \begin{cases} 1-4x^2-y^2>0 \\ x^2-y^2\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+y^2<1 \\ (x-y)(x+y)\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+y^2<1 \\ x\neq y \wedge y\neq -x \end{cases}$$

L'equazione $4x^2+y^2=1$ rappresenta un ellisse con centro in $(0,0)$, quindi il dominio di f è dato dall'insieme in verde qui sotto rette $y=x$ e $y=-x$ ed ellisse esclusi.



Tale insieme è aperto, non è chiuso è limitato, non è connesso per archi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{1}{1-4x^2-y^2}\cdot(-8x)(x^2-y^2) - \left(\log(1-4x^2-y^2)\right)(2x)}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{1}{1-4x^2-y^2}\cdot(-2y)(x^2-y^2) + \left(\log(1-4x^2-y^2)\right)(2y)}{(x^2-y^2)^2}$$

Tali funzioni sono definite e continue sul dominio di f, quindi f è differenziabile sul suo dominio e $\frac{\partial f}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{1}{8}},0\right) = \left\langle \nabla f\left(\sqrt{\frac{1}{8}},0\right), v\right\rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\tfrac{1}{8}},0\right) = \frac{2\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{8}} - \left(\log\frac{1}{2}\right)\cdot 2\sqrt{\frac{1}{8}}}{\frac{1}{64}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\tfrac{1}{8}},0\right) = 0$$

Dunque $\frac{\partial f}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{1}{8}},0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-64\cdot\frac{2}{\sqrt{8}}\left(1 - \log 2\right)\right) = 32(1-\log 2)$

Consideriamo la restrizione di f alle rette $x=0$ e $y=0$

$$f(0,y) = \frac{\log(1-y^2)}{-y^2}\ ; \quad \lim_{y\to 0}\frac{\log(1-y^2)}{-y^2} = 1$$

$$f(x,0) = \frac{\log(1-4x^2)}{x^2}\ ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-4x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-4x^2)}{-4x^2}\cdot(-4) = 1\cdot(-4) = -4$$

Poiché abbiamo ottenuto due risultati diversi il limite di f nel punto $(0,0)$ non esiste

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -xy + x^3 \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

L'equazione $y' = -xy + x^3$ è lineare del I ordine

L'equazione $y' = -xy + x^3$ è lineare del I ordine

La soluzione di (*) è quindi

$$y(x) = e^{\int_1^x -s\,ds}\left(0 + \int_1^x e^{\int_1^s \tau\,d\tau} s^3\,ds\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(x^2-1)}\left(\int_1^x e^{\frac{1}{2}(s^2-1)} s^3\,ds\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(x^2-1)}\int_1^x e^{\frac{1}{2}s^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}} s^3\,ds$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\int_1^x e^{\frac{1}{2}s^2} s^3\,ds$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot\int_1^x e^{\frac{1}{2}s^2}\, 2\left(\frac{s^2}{2}\right)\cdot s\,ds$$

$$\underset{dt = s\,ds}{\overset{\frac{s^2}{2}=t}{=}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{1/2}^{x^2/2} e^t\, 2t\,dt$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2}\, 2\left(te^t\Big|_{1/2}^{x^2/2} - \int_{1/2}^{x^2/2} e^t\,dt\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot 2\left(\frac{x^2}{2}e^{x^2/2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - e^t\Big|_{1/2}^{x^2/2}\right)$$

$$= x^2 - e^{\frac{1-x^2}{2}} - 2 + 2e^{\frac{1-x^2}{2}} = x^2 + e^{\frac{1-x^2}{2}} - 2$$

4) Dare la definizione di insieme normale rispetto ad uno degli assi.
Enunciare e dimostrare la formula di riduzione per l'integrale doppio di una funzione continua su un insieme normale rispetto all'asse prescelto precedentemente.

Si veda Def. 14.16 e Teor. 14.17 del manuale consigliato