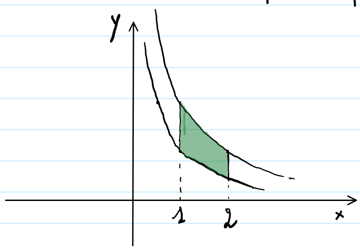
1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_A \log(xy)\,dx\,dy$$

dove $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x\in[1,2] \text{ e } 1<xy<2\}$

L'insieme A è qui rappresentato



Si tratta di un insieme normale rispetto all'asse delle x. Possiamo usare la formula di riduzione

$$\int_A \log(xy)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{1/x}^{2/x}\log(xy)\,dy\right)dx = \int_1^2 \left(y\log(xy)\Big|_{1/x}^{2/x} - \int_{1/x}^{2/x} y\,\frac{x}{xy}\,dy\right)dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{x}\log 2 - \frac{1}{x}\log 1 - \left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x}\right)\right)dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2\log 2}{x} - \frac{1}{x}\right)dx = (2\log 2 - 1)\cdot \log x\Big|_1^2 = (2\log 2 - 1)\log 2$$

2) Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{(xy)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}\log(xy)$

Se ne determini il dominio e dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.

Calcolare, poi, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Stabilire se esiste il piano tangente nel punto $(-1,-1)$ e in caso affermativo scriverne l'equazione.

dom f: $\begin{cases} xy\geq 0 \\ xy>0 \\ x^2+y^2\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases} xy>0 \end{cases}$

quindi il dominio di f è uguale alla unione del I e del III quadrante, privati degli assi cartesiani; esso è dunque un insieme aperto, non limitato, non connesso per archi.

$(0,0)\in D(\text{dom} f)$, ha quindi senso considerare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Osserviamo che

$$\left|\frac{(xy)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}\log(xy)\right| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}\cdot (xy)^{\frac{1}{2}}\left|\log(x,y)\right| \leq 1\cdot (xy)^{\frac{1}{2}}\left|\log(xy)\right|$$

Posto $xy=t$ per $(x,y)\to(0,0)$, $(x,y)\in \text{dom} f$, si ha che $t>0$ e $t\to 0$

quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (xy)^{\frac{1}{2}}\left|\log(xy)\right| = \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{2}}|\log t| = 0$

dunque anche $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

f è una funzione di classe C^∞ nel suo dominio; è dunque differenziabile in tutti i punti del dominio e pertanto nel punto $(-1,-1)$ esiste il piano tangente al grafico di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(\frac{3}{2}(xy)^{\frac{1}{2}}\, y \log(xy) + (xy)^{\frac{3}{2}}\frac{y}{xy}\right)(x^2+y^2) - (xy)^{\frac{3}{2}}\log(xy)\, 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(\frac{3}{2}(xy)^{\frac{1}{2}}\, x \log(xy) + (xy)^{\frac{3}{2}}\frac{x}{xy}\right)(x^2+y^2) - (xy)^{\frac{3}{2}}\log(xy)\, 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \frac{(0 \quad -1)2 - 0}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = \frac{(0-1)2 - 0}{4} = -\frac{1}{2}$$

$f(-1,-1) = 0$; quindi l'equazione del piano tangente nel punto $(-1,-1)$ è $z = -\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y+1)$

3) Determinare la soluzione in forma implicita del problema

$$\begin{cases} y' = \sqrt{\frac{y}{y+1}}\log x \quad (*) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

L'equazione $(*)$ è a variabili separabili; l'unica sua soluzione singolare è $y(x)=0$, $\forall x \in (0,+\infty)$

Osserviamo anche che il secondo membro dell'equazione è ben definito se e solo se $x>0$ e $\frac{y+1}{y} \geq 0$ cioè se $y>0 \vee y<-1$. Poiché la condizione iniziale è $y(1) = 1 > 0$ possiamo assumere che la soluzione del problema sia positiva sul suo dominio.

Dividiamo ambo i membri di $(*)$ per $\sqrt{\frac{y}{y+1}}$, ottenendo:

$\sqrt{\frac{y+1}{y}}\, y' = \log x$; integriamo entrambi i membri

$$\int \sqrt{\frac{y+1}{y}}\, y'\, dx = \int \log x\, dx \quad \text{ossia} \quad \int \sqrt{\frac{y+1}{y}}\, dy = \int \log x\, dx$$

Calcoliamo $\int \sqrt{\frac{y+1}{y}}\, dy$: posto $\sqrt{\frac{y+1}{y}} = t$,

$$\frac{y+1}{y} = t^2, \quad y+1 = t^2 y \quad y = \frac{1}{t^2-1} \quad \text{e quindi} \quad dy = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\, dt$$

quindi $$\int \sqrt{\frac{y+1}{y}}\, dy = -2\int t^2 \frac{1}{(t^2-1)^2}\, dt = t\,\frac{1}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1}\, dt$$

$$= \frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2}\left(\log(t-1) - \log(t+1)\right), \quad t = \sqrt{\frac{y+1}{y}},$$

Osserviamo che $t-1>0$ dato che $\sqrt{\frac{y+1}{y}} - 1 > 0 \iff \frac{y+1}{y} > 1 \iff \frac{y+1-y}{y} > 0 \iff \frac{1}{y} > 0 \iff y > 0$

$$= \frac{\sqrt{\frac{y+1}{y}}}{\frac{y+1}{y} - 1} - \frac{1}{2}\log \frac{\sqrt{\frac{y+1}{y}} - 1}{\sqrt{\frac{y+1}{y}} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{y+1}{y}}}{\frac{y+1-y}{y}} - \frac{1}{2}\log \frac{\frac{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}}{\frac{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{y}}{\frac{y+1-y}{y}} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{y}}{\frac{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}} =$$

$$= \sqrt{y+1}\sqrt{y} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}} =$$

$$= \sqrt{y+1}\sqrt{y} - \frac{1}{2}\log\frac{y+1-y}{(\sqrt{y+1}+\sqrt{y})^2}$$

$$= \sqrt{y+1}\sqrt{y} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{y+1}+\sqrt{y})^2$$

$$= \sqrt{y+1}\sqrt{y} + \log(\sqrt{y+1}+\sqrt{y})$$

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c$$

Quindi l'integrale generale di $(*)$ in forma implicita è

$$\sqrt{y+1}\sqrt{y} + \log(\sqrt{y+1}+\sqrt{y}) = x\log x - x + c$$

Per $y(1)=1$, otteniamo $\sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1) = -1 + c$ cioè

$$c = 1 + \sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1)$$

4) Dare la definizione di serie numerica e di serie numerica convergente. Dimostrare che se una serie numerica è convergente allora la successione che la definisce tende a 0. Fornire un esempio di una serie avente termine generale infinitesimo e divergente positivamente

Per le definizioni si veda p. 121 del manuale; per la dimostrazione p. 122, un esempio, fra i tanti, è la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} \quad \text{per } \alpha \in (0,1]$$