Politecnico di Bari
CdL Ingegneria Informatica e Automazione
AA 2013-2014

Analisi Matematica – II modulo
Tracce di esame (con svolgimenti)

Docente: Dott. E. Caponio

A.A. 2013/2014 Esonero 28 Aprile 2014 Traccia A

Cognome______________________ Nome______________________ N^o Matricola______________________

1) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k + \cos(k\pi)}{k^\alpha}.$$

2) Determinare la migliore approssimazione lineare della funzione

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 \log(x_1 + x_3),$$

in un intorno del punto $(1, -1, 0)$, specificando dettagliatamente perché essa esiste.

A.A. 2013/2014 Esonero 28 Aprile 2014 Traccia B

Cognome____________________ Nome____________________ N° Matricola____________________

1) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1+\cos(k\pi)}{k^{\alpha+1}}.$$

2) Determinare la migliore approssimazione lineare della funzione

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{x_1^2 x_3}}{x_2 - x_1},$$

in un intorno del punto $(0, 1, -1)$, specificando dettagliatamente perché essa esiste.

A.A. 2013/2014 Esonero + Appello 23 giugno 2014 Traccia A

Cognome____________________ Nome____________________ N^{o} Matricola____________________

Gli studenti che sostengono la seconda prova parziale devono svolgere solo gli esercizi 3) e 4)

1) Stabilire se il seguente integrale converge

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x^4 + x\sin(x^2)}{2+x^5}\mathrm{d}x.$$

2) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = yxe^{-(x^2+y^2)}$$

e determinarne la natura.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y = \cos(\sqrt{3}x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

4) Stabilire se la seguente forma differenziale è esatta (sul suo dominio)

$$\omega = 2xy\mathrm{d}x + (x^2 + 3y^2)\mathrm{d}y.$$

Calcolare poi

$$\int_\gamma \omega, \text{ dove } \gamma \text{ è la curva definita da } \gamma(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2)),\ t \in [0, \sqrt{\pi}].$$

A.A. 2013/2014 Esonero + Appello 23 giugno 2014 Traccia B

Cognome____________________ Nome____________________ N° Matricola____________________

Gli studenti che sostengono la seconda prova parziale devono svolgere solo gli esercizi 3) e 4)

1) Stabilire se il seguente integrale converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + xe^{-x}}{(1+x)^4} \mathrm{d}x.$$

2) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = xe^{-(x^2y^2)}$$

e determinarne la natura.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y = \sin(\sqrt{2}x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

4) Stabilire se la seguente forma differenziale è esatta (sul suo dominio)

$$\omega = (y + 2xy^2)\mathrm{d}x + (x + 2yx^2)\mathrm{d}y.$$

Calcolare poi

$$\int_\gamma \omega, \text{ dove } \gamma \text{ è la curva definita da } \gamma(t) = (e^{t^2}, e^{-t^2}),\ t \in [0,1].$$

Prova del 23/06/14

INDICAZIONI SU COME SVOLGERE IL COMPITO

1 - A)

$$f(x) \doteq \frac{x^4 + x\sin(x^2)}{2+x^5} > 0 \quad \text{per } x \to +\infty$$

inoltre f è continua su ogni intervallo del tipo $[-1, b]$, $b > -1$ e quindi ivi integrabile.

$$\frac{x^4 + x\sin(x^2)}{2+x^5} = \frac{x^4\left(1 + \frac{\sin(x^2)}{x^4}\right)}{x^5\left(\frac{2}{x^5}+1\right)} \sim \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty$$

quindi l'integrale non converge

B) Analogamente si vede che $\dfrac{x^2 + xe^{-x}}{(1+x^4)} \sim \dfrac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$

quindi l'integrale converge

2-A) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$f_x(x,y) = y\,e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2y\,e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_y(x,y) = x\,e^{-(x^2+y^2)} - 2xy^2\,e^{-x^2+y^2}$$

I punti critici di f sono quindi dati dalle soluzioni di

$$\begin{cases} y(1-2x^2) = 0 \\ x(1-2y^2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$(0,0)$ è un punto di sella in quanto $f(x,y)>0$ se $xy>0$ e $f(x,y)<0$ se $xy<0$

Osserviamo anche che f è invariante rispetto alla simmetria rispetto all'origine e inoltre $f(x,-y) = -f(x,y)$ e $f(-x,y) = -f(x,y)$

Per cui dopo aver stabilito la natura di $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ abbiamo immediatamente quella degli altri 3 punti critici

$$f_{xx}(x,y) = -6xy\,e^{-(x^2+y^2)} + 4x^3y\,e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{yy}(x,y) = -6xy\,e^{-(x^2+y^2)} + 4y^3x\,e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} - 2y^2e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

$$Hess_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} \underbrace{-3e^{-1}+e^{-1}}_{=-\frac{2}{e}} & \overbrace{e^{-1}-e^{-1}-e^{-1}+e^{-1}}^{=0} \\ 0 & -3e^{-1}+e^{-1} \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è diagonale. I suoi autovalori sono negativi quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è un massimo locale forte. Quindi anche $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ lo è, invece

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono minimi locali forti

B) $f_x(x,y) = e^{-(x^2y^2)}(1-2x^2y^2)$

$f_y(x,y) = -2yx^3\,e^{-(x^2y^2)}$

$$\begin{cases} -2yx^3 e^{-(x^2y^2)} = 0 \\ e^{-(x^2y^2)}\left(1-2x^2y^2\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \ \vee \ x=0 \\ 1 = 0 \ !! \end{cases}$$

Quindi f non ha punti critici

3 - A) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è λ^2+3 che ha zeri $\lambda = \pm\sqrt{3}\, i$

quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{3}\,x) + c_2 \sin(\sqrt{3}\,x)$$

Il termine noto è $f(x) = \cos(\sqrt{3}x)$ e rientra tra le funzioni per cui è possibile usare il metodo di similarità.

Poiché $\sqrt{3}\, i$ è uno zero del polinomio caratteristico cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$\hat{y}(x) = x\left(k_1 \cos(\sqrt{3}x) + k_2 \sin(\sqrt{3}x)\right).$$

Imponendo che $\hat{y}(x)$ risolve l'equazione assegnata si ottengono k_1 e k_2. Infine la soluzione del problema di Cauchy si determina ricavando c_1 e c_2 in

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x) + \hat{y}(x)$$

in modo che le condizioni iniziali $y(0)=0$, $y'(0)=0$ siano soddisfatte

B) Analoga

4-A) w è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

w è chiusa quindi è esatta dato che $\mathbb{R}^2$ è stellato

Dato ci w è esatta

per calcolare l'integrale si può scegliere una qualunque curva che connette $\gamma(0) = (1,0)$ con $\gamma(\sqrt{\pi}) = (-1,0)$ (ad esempio il segmento che unisce tali due punti)

Oppure si può determinare una primitiva di w

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \iff f(x,y) = x^2 y + c(y)$$

Da cui $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + c'(y)$$

deve quindi essere $x^2 + c'(y) = x^2 + 3y^2$ cioè

$c'(y) = 3y^2$ da cui $c(y) = y^3 + c$

Quindi $f(x,y) = x^2 y + y^3$ è una primitiva

e $$\int_\gamma w = f(-1,0) - f(1,0) = 0$$

B) Analoga

A.A. 2013/2014 Esonero + Appello 10 luglio 2014 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola____________________

Gli studenti che sostengono la seconda prova parziale devono svolgere solo gli esercizi 3) e 4)

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)n.$$

2) Stabilire se la funzione

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_2x_3}{\sqrt{x_1x_2}}$$

è differenziabile nel punto $P=(-1,-1,0)$ e in caso affermativo determinare la migliore approssimazione lineare in un intorno di P.

3) Determinare una primitiva della forma differenziale

$$\omega=\frac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x+\frac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y.$$

Calcolare poi

$$\int_\gamma\omega,\ \text{dove } \gamma \text{ è la curva definita da } \gamma(t)=\big(t^2-1,\sin(\frac{\pi}{2}t)\big),\ t\in[0,1].$$

4) Calcolare

$$\int_A x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è il settore di corona circolare definito dalle circonferenze di centro O e raggi 1 e 2, dal semiasse positivo delle x e dalla retta $y=x$.

A.A. 2013/2014 Esonero + Appello 10 luglio 2014 Traccia B

Cognome______________________ Nome______________________ N° Matricola______________________

Gli studenti che sostengono la seconda prova parziale devono svolgere solo gli esercizi 3) e 4)

1) Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) n.$$

2) Stabilire se la funzione

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 \log(x_2 x_3)}{x_3}$$

è differenziabile nel punto $P = (0, -1, -1)$ e in caso affermativo determinare la migliore approssimazione lineare in un intorno di P.

3) Determinare una primitiva della forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{(1 + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}x + \frac{y}{(1 + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}y.$$

Calcolare poi

$$\int_\gamma \omega, \text{ dove } \gamma \text{ è la curva definita da } \gamma(t) = (1 - t, t^2),\ t \in [0, 1].$$

4) Calcolare

$$\int_A y\sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è il settore di corona circolare definito dalle circonferenze di centro O e raggi 1 e 2, dal semiasse positivo delle y e dalla retta $y = x$.

PROVA DEL 10/07/14

INDICAZIONI SU COME SVOLGERE IL COMPITO

1A) Dalla formula di Mac Laurin

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \text{per } n \to +\infty$$

quindi $n\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{6}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{6}\frac{1}{n^2}$ per $n \to \infty$

quindi la serie assegnata converge

1B) Come sopra, è sufficiente usare la formula di Mac Laurin

$$n\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n} \quad \text{per } n \to \infty$$

quindi la serie diverge negativamente

2A) f è definita su $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 x_3 > 0\}$

A è aperto, $P \in A$. Inoltre f è di classe C^∞ su A

quindi per il teorema del differenziale totale è diff.le in P.

$$f(P+h) = \underbrace{f(P) + df(P)[h]}_{\text{miglior approssimazione lineare}} + o(\|h\|) \quad \text{per } h \to 0$$

$(df(P)[h] = \langle \nabla f(P), h\rangle)$

$f(P) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{-x_2^2 x_3}{x_1 x_2\, 2\sqrt{x_1 x_2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{-x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2\, 2\sqrt{x_1 x_2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1 x_2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(P) = -1$$

quindi la miglior approssimazione lineare è l'applicazione

$$(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto -h_3 \in \mathbb{R}$$

2B) è analoga

$f \in C^\infty(A)$ dove A è l'aperto $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 x_3 > 0\}$

$P \in A$, $f(P) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\log(x_2 x_3)}{x_3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{x_1}{x_3}\,\frac{1}{x_2 x_3}\,x_3 = \frac{x_1}{x_2 x_3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = x_1\left(\frac{x_2/x_2x_3 - \log(x_2x_3)}{x_3^2}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(P) = 0$$

Quindi la miglior approssimazione lineare è l'applicazione nulla

$$h \in \mathbb{R}^3 \mapsto 0 \in \mathbb{R}$$

3B) ω è del tipo $F'(\rho)\frac{x}{\rho}\,dx + F'(\rho)\frac{y}{\rho}\,dy$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$$F(\rho) = \log(1+\rho)$$

Quindi una primitiva è la funzione $G(x,y) = \log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$\int_\gamma \omega = G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) = G(0,1) - G(1,0) = \log 2 - \log 2 = 0$$

3A) Analoga. Questa volta $F(\rho) = \operatorname{arctg} \rho$.

4A) In coordinate polari l'integrale è uguale a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2 \rho\cos\theta\,\rho\cdot\rho\,d\theta\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,d\theta\int_1^2\rho^3\,d\rho =$$

$$= \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{8}$$

4B) Analoga.

A.A. 2013/2014 Appello 1 settembre 2014 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N$^{\text{o}}$ Matricola____________________

1) Studiare, al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$, il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-2}{(k^\alpha - 1)^{1/2} + k}.$$

2) Considerare la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^{1/3} - y^{1/3}}{x^{1/5} y^{5/3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Stabilire se f è continua in $(0,0)$. Cosa si può concludere sulla differenziabilità di f nello stesso punto? Stabilire, infine, se f è differenziabile nel punto $P = (1,1)$.

3) Determinare i punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x,y) = (x - 1 + y)^2 xy.$$

4) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + x^2 e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

A.A. 2013/2014 Appello 1 settembre 2014 Traccia B

Cognome______________________ Nome______________________ N° Matricola______________________

1) Studiare, al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$, il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+k}{(2+k^\alpha)^{1/3}+k}.$$

2) Considerare la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^{1/5}-y^{1/5}}{x^{3/5}y^{1/3}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

Stabilire se f è continua in $(0,0)$. Cosa si può concludere sulla differenziabilità di f nello stesso punto? Stabilire, infine, se f è differenziabile nel punto $P=(-1,1)$.

3) Determinare i punti di minimo e massimo locale della funzione

$$f(x,y) = (x-2+y)^2 xy.$$

4) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy - x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

PROVA DEL 01/09/14

INDICAZIONI SU COME SVOLGERE IL COMPITO

1) - TRACCIA B

Per $0 \leq \alpha \leq 3$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1+k}{(2+k^{\alpha})^{\frac{1}{3}}+k} = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha\in[0,3) \\ \frac{1}{2} & \text{per } \alpha=3 \end{cases}$$

Poiché la serie è a termini positivi, essa diverge positivamente

Per $\alpha > 3$

$$\frac{1+k}{(2+k^{\alpha})^{\frac{1}{3}}+k} \sim \frac{k}{k^{\alpha/3}} = \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{3}-1}}$$

e dunque per il criterio del confronto asintotico essa

div. positiv. per $0 \leq \frac{\alpha}{3}-1 \leq 1$ cioè per $3 \leq \alpha \leq 6$

converge per $\frac{\alpha}{3}-1 > 1$ cioè per $\alpha > 6$

- TRACCIA A è analoga

2) TRACCIA A:

Lungo le rette passanti per l'origine $y=\lambda x$, $x \neq 0$

la f è uguale a $f(x,\lambda x)) = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}(1+\lambda^{\frac{1}{3}})}{x^{\frac{1}{5}}\lambda^{5/3}x^{5/3}} = \dfrac{1+\lambda^{\frac{1}{3}}}{x^{28/15}\lambda^{5/3}}$

Quindi, fissato $\lambda>0$,

$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = +\infty$. Pertanto f non è continua

in $(0,0)$ (se fosse continua $\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x)$ dovrebbe essere

uguale $\frac{1}{2}$ cioè al valore che f assume in $(0,0)$)

Poiché f non è continua in $(0,0)$, essa non è neanche differenziabile. Nel punto $P=(1,1)$, così come in tutti i punti che fanno non appartenenti agli assi cartesiani, f è differenziabile per il teorema del differenziale totale dato che le sue derivate parziali esistono in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0 \vee y=0\}$ e sono ivi continue

- TRACCIA B è analoga $\left(f(x,\lambda x) = \dfrac{1-\lambda^{1/5}}{\lambda^{1/3} x^{11/15}} \right.$; per $0<\lambda<1$ $\left. \lim\limits_{x\to 0^+} f(x,\lambda x) = +\infty \right)$

3) TRACCIA A:

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-1+y)xy + (x-1+y)^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x-1+y)xy + (x-1+y)^2 x$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$$ (sottraendo membro a membro la 2ª eq. dalla 1ª)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1+y)^2(y-x)=0 \\ 2(x-1+y)xy + (x-1+y)^2 y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1+y=0 \\ 0=0 \end{cases}$$ tutti i punti della retta $r: x-1+y=0$ sono stazionari

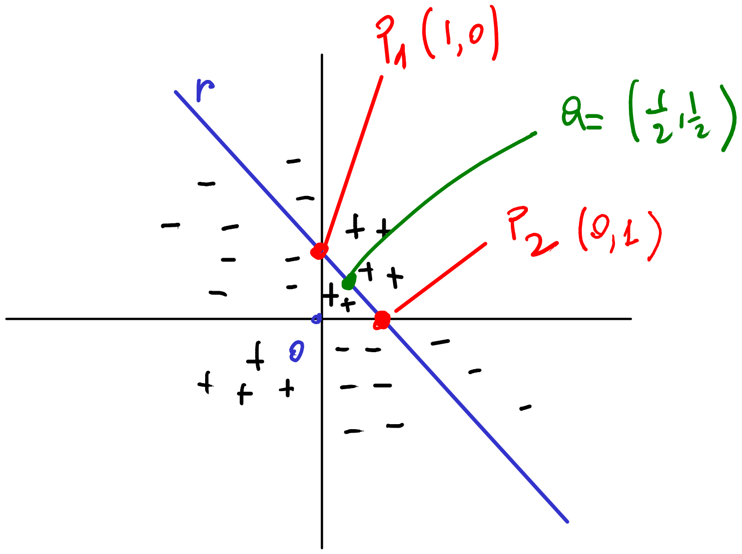
$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y=x \\ 2(2x-1)x^2 + (2x-1)^2 x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=x \\ (2x-1)x(2x+2x-1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Per stabilire se i punti di r e $(0,0)$ sono di estremo (si osservi che anche $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\in r$) possiamo studiare il segno di $f(x,y)-f(P)$ dove $P\in r \cup \{(0,0)\}$

Poiché $\forall P \in r \cup \{(0,0)\}$, $f(P) = 0$ è sufficiente studiare il segno di f. Questo dipende solo dal fattore xy per cui abbiamo:



Quindi i punti delle semirette contenute in r, uscenti da P_1 e P_2 e contenute rispettivamente nel I e IV quadrante sono di massimo locale non forte. I punti del segmento P_1P_2 sono di minimo locale non forte (Q incluso).
$(0,0)$, P_1 e P_2 sono di sella.

Resta da stabilire se il punto $P_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ è di estremo locale.

Calcolando la matrice Hessiana di f e valutandola in P_3 otteniamo

$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

quindi P_3 è di massimo locale forte.

Un altro modo per stabilire che P_3 è di massimo locale forte consiste nel considerare l'insieme compatto T il cui bordo è il triangolo di vertici $0, P_1, P_2$.

Poiché f è continua, sui punti di tale triangolo vale 0 e $f(P_3) > 0$ necessariamente per il teorema di Weierstrass P_3 deve essere punto di massimo per $f|_T$.

- TRACCIA B è analoga

4) TRACCIA B:

L'omogenea associata ha integrale generale $y(x) = c\,e^{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$

Una soluzione particolare si ottiene imponendo che $\tilde{y}(x) = a(x)\,e^{x^2}$ risolva l'equazione. Fuori questo sia vero, deve essere

$a'(x) = x e^{-x^2}$ da cui integrando, $a(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2}$.

Quindi l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = c e^{x^2} + \frac{1}{2} e^{-x^2} e^{x^2} = c e^{x^2} + \frac{1}{2}$$

$y(1) = 0 \iff c e = -\frac{1}{2}$ cioè $c = -\frac{1}{2e}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y(x) = -\frac{e^{x^2}}{2e} + \frac{1}{2}$

TRACCIA A è analoga. Per la sola traccia B, si noti che la soluzione può anche essere determinata trattando l'equazione come equazione a variabili separabili (fare come esercizio! ma attenzione: poiché la condizione iniziale è $y(1) = 0$, in un intorno di $x_0 = 1$, $2y(x) - 1$ è negativo).

A.A. 2013/2014 Appello 19 settembre 2014 Traccia A

Cognome________________ Nome________________ N^o Matricola________________

1) Stabilire se il seguente integrale improprio converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^{5/3}}{x^2}\mathrm{d}x.$$

2) Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\log(1+x^2+2y^4)}{x^2+4y^4}.$$

3) Sia $a \in \mathbb{R}$. Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + a^2 y = x + e^{-x}.$$

4) Calcolare

$$\int_A xy\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2, \frac{x}{2} < y < \frac{3}{2}x\}$.

A.A. 2013/2014 Appello 19 settembre 2014 Traccia B

Cognome________________ Nome________________ N° Matricola________________

1) Stabilire se il seguente integrale improprio converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^{7/3}}{x^3} \mathrm{d}x.$$

2) Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\log(1+2xy)}{y}.$$

3) Sia $a \in \mathbb{R}$. Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + a^2 y = 1 - e^x.$$

4) Calcolare

$$\int_A xy\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < xy < 1, x < y < 2x\}$.

PROVA DEL 19/09/14

INDICAZIONI SU COME SVOLGERE IL COMPITO

1) TRACCIA B

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^{7/3}}{x^3}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{(\sin x)^{7/3}}{x^3}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{(\sin x)^{7/3}}{x^3}\,dx}_{2}$$

Entrambi gli integrali convergono, quindi anche l'integrale assegnato converge. Infatti:

1

$$\frac{(\sin x)^{7/3}}{x^3} = \underbrace{\frac{\sin x^{7/3}}{x^{7/3}}}_{\text{per } x\to 0 \;\to\; 1} \cdot \frac{1}{x^{2/3}}$$

quindi $\frac{(\sin x)^{7/3}}{x^3}$ è un infinito di ordine $2/3$ per $x \to 0$ e dunque 1 converge.

2

$$\left|\frac{(\sin x)^{7/3}}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3} \quad \forall x \in [1, +\infty).$$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \in \mathbb{R}$, $\frac{(\sin x)^{7/3}}{x^3}$ è assolutamente integrabile in $[1, +\infty)$ e quindi integrabile.

TRACCIA A è analoga

2) TRACCIA A:

$$0 \leq \left|\frac{y \log(1+x^2+2y^4)}{x^2+4y^4}\right| \leq |y| \frac{\log(1+x^2+2y^4)}{x^2+2y^4}$$

Studiamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+2y^4)}{x^2+2y^4}$. Posto $t = x^2+2y^4$,

poiché per $(x,y) \to (0,0)$ si ha che $t \to 0$, tale limite è uguale a $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$

Ovviamente $|y| \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$. Quindi il limite assegnato è uguale a 0.

TRACCIA B :

$$y \frac{\log(1+2xy)}{y} = \log(1+2xy) \longrightarrow 0$$

per $(x,y) \to (0,0)$

3) TRACCIA B

Sia $a \neq 0$.

L'integrale generale dell'omogenea associata è

$y(x) = c_1 \cos(|a|x) + c_2 \sin(|a|x)$

$1 - e^x$ non è una funzione per cui si possa applicare il metodo di similarità ma è possibile applicarlo separatamente alle funzioni $f_1(x) = 1$ e $f_2(x) = -e^x$

Ovviamente una soluzione particolare di

$y'' + a^2 y = 1$ è $\tilde{y}(x) = \frac{1}{a^2}$

Per l'equazione $y'' + a^2 y = -e^x$ possiamo cercare una soluzione del tipo $\tilde{y}(x) = K e^x$

Deve essere $K e^x + a^2 K e^x = -e^x$ cioè

$K + a^2 = -1$ ossia $K = -1 - a^2$

Dunque l'integrale generale è dato da

$y(x) = c_1 \cos(|a|x) + c_2 \sin(|a|x) + \frac{1}{a^2} - (1 + a^2) e^x$

qualunque sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se $a = 0$, l'equazione diviene

$y'' = 1 - e^x$ da cui $y' = \int (1 - e^x)\, dx =$

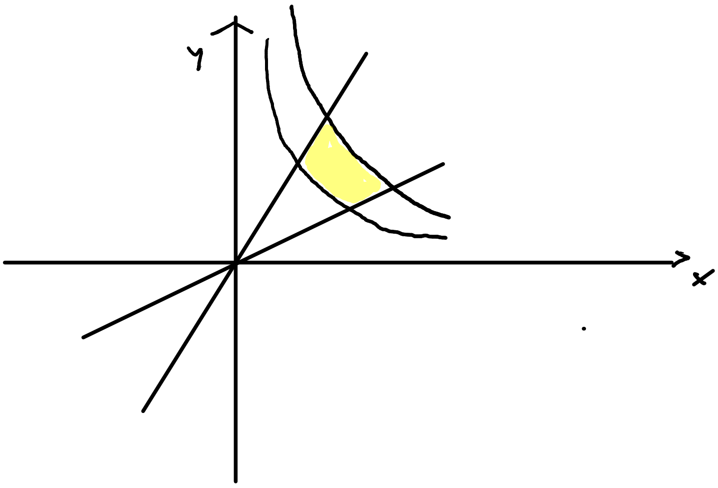
$= x - e^x + c_1$

e quindi $y(x) = \int (x - e^x + c_1)\, dx = \frac{1}{2} x^2 - e^x + c_1 x + c_2$

è il suo integrale generale

TRACCIA A è analoga

4) TRACCIA A



A è l'insieme colorato in giallo

Possiamo cambiare variabili considerando la trasformazione

$$\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y}{x} = v \end{cases} \qquad \text{quindi: } 1 < u < 2 \quad e \quad \frac{1}{2} < v < \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

Lo Jacobiano di questa trasformazione è quindi $\frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x}$

Dunque la trasformazione inversa ha Jacobiano uguale a $\frac{1}{2\frac{y}{x}} = \frac{1}{2v}$

Pertanto l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_{[1,2]\times[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]} u\cos u \cdot \frac{1}{2v}\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_1^2 u\cos u\, du \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{v}\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(u\sin u\Big|_1^2 - \int_1^2 \sin u \right) \cdot \log v\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sin 2 - \sin 1 + \cos 2 - \cos 1\right)\left(\log\frac{3}{2} - \log\frac{1}{2}\right)$$

TRACCIA B è analoga

A.A. 2013/2014 Appello 12 novembre 2014 Traccia A

Cognome________________Nome________________N^o Matricola________________

1) Stabilire se il seguente integrale improprio converge

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)+(x-2)^{1/4}}.$$

2) Stabilire se la funzione

$$f(x) = \log(x_1^2 x_2 x_3), \qquad x = (x_1, x_2, x_3),$$

è differenziabile nel suo dominio. Calcolare, poi, la miglior approssimazione lineare di f nel punto $(-1, 1, 1)$.

3) Determinare il dominio della forma differenziale

$$\omega = \frac{2\mathrm{d}x}{\log(x-y^2-1)} - \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Stabilire, poi, se esiste un sottoinsieme aperto del dominio su cui ω è esatta.

4) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - (2x-1)y = e^{x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

A.A. 2013/2014 Appello 12 novembre 2014 Traccia B

Cognome______________ Nome______________ N^o Matricola______________

1) Stabilire se il seguente integrale improprio converge

$$\int_3^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^{1/3}+(x-3)^2}.$$

2) Stabilire se la funzione

$$f(x)=\log(x_1x_2^2x_3), \qquad x=(x_1,x_2,x_3),$$

è differenziabile nel suo dominio. Calcolare, poi, la miglior approssimazione lineare di f nel punto $(1,-1,1)$.

3) Determinare il dominio della forma differenziale

$$\omega=\frac{\mathrm{d}x}{x-2}+\frac{2x\mathrm{d}y}{\sqrt{x-y^2-1}}.$$

Stabilire, poi, se esiste un sottoinsieme aperto del dominio su cui ω è esatta.

4) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'-y=\sin x \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Analisi Matematica

mercoledì 12 novembre 2014 16:30

1) Stabilire se il seguente integrale improprio converge

A) $$\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)+(x-2)^{\frac{1}{4}}}$$

La funzione integranda è continua in $(2,3]$

$$\frac{1}{(x-2)+(x-2)^{1/4}} = \frac{1}{(x-2)^{1/4}\left(1+(x-2)^{3/4}\right)}$$

$$\sim \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{4}}} \quad \text{per } x \to 2^+$$

quindi l'integrale converge perché l'integranda è un infinito di ordine uguale a $\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{4}}}$ per $x \to 2^+$

B) $$\int_3^5 \frac{dx}{(x-3)^{1/3}+(x-3)^2}$$

La traccia B si svolge analogamente

2) Stabilire se la funzione

A) $f(x_1,x_2,x_3) = \log(x_1^2 x_2 x_3)$

B) $f(x_1,x_2,x_3) = \log(x_1 x_2^2 x_3)$

è differenziabile nel suo dominio.

Calcolare poi la migliore approssimazione lineare di f nel punto

A) $(-1,1,1)$

B) $(1,-1,1)$

4) f è una funzione di classe C^∞ nel suo dominio

cioè $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1\neq 0 \wedge x_2x_3>0\}$

(si osservi che tale insieme è aperto)

in quanto composta da funzioni di classe C^∞

$$\left((x_1,x_2x_3)\mapsto x_1^2x_2x_3 \longmapsto \log(x_1^2x_2x_3) \right)$$

Pertanto nel punto $(-1,1,1)$ esiste la miglior approssimazione lineare di f

Questa è la funzione affine

$$(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3 \mapsto f(-1,1,1)+\langle\nabla f(-1,1,1),(h_1+1,h_2-1,h_3-1)$$

$$f(-1,1,1)=0$$

$$\nabla f(-1,1,1) = \left(\frac{2x_1x_2x_3}{x_1^2x_2x_3}, \frac{x_1^2x_3}{x_1^2x_2x_3}, \frac{x_1^2x_2}{x_1^2x_2x_3}\right)\Bigg|_{(-1,1,1)}$$

$$= (-2,1,1)$$

quindi otteniamo

$$(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3\mapsto -2h_1+h_2+h_3-4$$

B) La traccia B si svolge analogamente

3) Determinare il dominio della forma differenziale e rappresentarlo graficamente

A) $\omega = \dfrac{2}{\log(x-y^2-1)}dx - \dfrac{1}{y}dy$

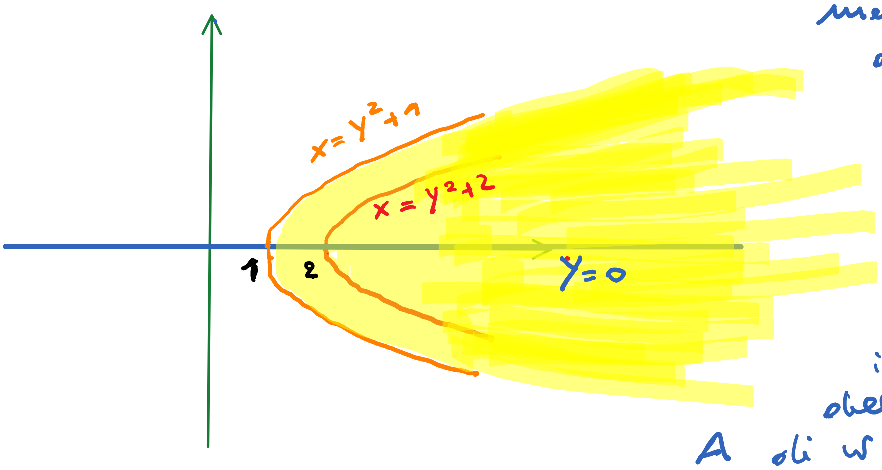
B) $\omega = \dfrac{1}{x-2}dx + \dfrac{2x}{\sqrt{x-y^2-1}}dy$

Stabilire poi se esiste un sottoinsieme aperto del suo dominio su cui essa sia esatta

A) Il primo coefficiente di ω è definito su

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y^2-1>0 , x^2-y^2-1\neq 1, y\neq 0\}$$

Le curve $x - y^2 - 1 = 0$ e $x^2 - y^2 - 2 = 0$ sono parabole con assi paralleli all'asse delle x. Quindi il dominio del primo coefficiente è il sottoinsieme del piano colorato in giallo



meno i punti della parabola $x = y^2+2$ (colorato in rosso). Poiché il secondo coefficiente è definito su $\mathbb{R}^2$ meno i punti dell'asse delle x, il dominio A di ω è dato dal dominio del I coefficiente meno i punti dell'asse delle x.

ω non è esatta in nessun sottoinsieme aperto del suo dominio dato che

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{y}\right) = 0 \quad e \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{\log(x-y^2-1)}\right) \neq 0$$

$\forall (x,y) \in A$, cioè ω non è chiusa su nessun sottoinsieme del dominio.

4) Risolvere il problema di Cauchy

A) $$\begin{cases} y' - (2x-1)y = e^{x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

B) $$\begin{cases} y' - y = \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A) L'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(x) = e^{x^2-x}\left(c + \int e^{-x^2+x}\, e^{x^2}\, dx\right)$$
$$= e^{x^2-x}\left(c + \int e^{+x}\, dx\right)$$
$$= e^{x^2-x}\left(c + e^{x}\right)$$

$$= e^{x^2-x}\left(C + e^x\right)$$

Dalla condizione iniziale $y(0)=1$ ricaviamo

$0 = 1\,(C+1)$ da cui $C=-1$

Quindi la soluzione è data da $y(x) = e^{x^2-x}\left(e^x - 1\right)$

B) $y(x) = e^x \left(C + \int e^{-x} \sin x \, dx \right)$

e integrando per parti 2 volte si ottiene l'espressione dell'integrale generale dell'equazione.

A.A. 2013/2014 Appello 26 gennaio 2015 Traccia A

Cognome________________ Nome________________ N° Matricola________________

1) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3(k-1)^2 + k}{(k+1)^3} \sin \frac{1}{k}.$$

2) Sia

$$f(x,y) = \big| |\log(x^2+y^2) - 1| + x \big|;$$

stabilire se f è differenziabile nel punto $P = (1,0)$ e in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(P, f(P))$.

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y = x - \cos x.$$

4) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x^2}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 2x,\ 1 \le xy \le 2\}$.

Analisi Matematica

lunedì 26 gennaio 2015 11:27

1) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3(k-1)^2+k}{(k+1)^3} \sin\frac{1}{k}$$

Osserviamo che $\frac{3(k-1)^2+k}{(k+1)^3} \sin\frac{1}{k} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

inoltre $\sin\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k}$ quindi $\frac{3(k-1)^2+k}{(k+1)^3} \sin\frac{1}{k} \sim \frac{3}{k^2}$

Poiché $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{k^2} \in \mathbb{R}$, anche la serie assegnata è convergente

2) Sia $f(x,y) = \left| \left| \log(x^2+y^2) - 1 \right| + x \right|$

stabilire se è differenziabile nel punto

$P=(1,0)$ e in caso affermativo scrivere

l'equazione del piano tangente al grafico

di f in $(P, f(P))$.

Sia $g(x,y) = \log(x^2+y^2) - 1$;

osserviamo che g è, per il teorema del differenziale totale, differenziabile sul suo dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Poiché $g(1,0) = -1 \neq 0$

la funzione $|g(x,y)|$ è differenziabile in P per il teorema sulla differenziabilità delle funzioni composte. Per lo stesso motivo è differenziabile in P la funzione f dato che $|g(1,0)| + 1 = 2 \neq 0$.

L'equazione del piano tangente richiesta è

$$z = f(P) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\, y \ ; \quad f(P) = 2$$

Poiché $g(1,0) = -1$, in un intorno di P g assume valori negativi e quindi in tale intorno $|g(x,y)| = -g(x,y)$

Analogamente, $|g(x,y)| + x$ in P vale $2 > 0$

e quindi $||g(x,y)| + x| = |g(x,y)| + x = -g(x,y) + x$

in un intorno di P

Pertanto $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2x}{x^2+y^2} + 1$ in un intorno di P

e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2y}{x^2+y^2}$ "

Quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = -2 + 1 = -1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$

++++++++++

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y = x - \cos x \qquad (\square)$$

L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 4 = 0$ che ha soluzioni $\lambda = \pm 2i$

pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a $(\square)$ è

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Determiniamo una soluzione particolare di $y'' + 4y = x$ e una di $y'' + 4y = -\cos x$ usando il metodo di similarità; poiché $(\square)$ è lineare la somma di queste soluzioni è soluzione di $(\square)$

$\tilde{y}_1(x) = ax + b$, quindi $4ax + 4b = x$ da cui

$b = 0$ e $4a = 1$ cioè $a = \frac{1}{4}$;

quindi $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{4}x$

$\tilde{y}_2(x) = c\cos x + d\sin x$, quindi

$-c\cos x - d\sin x + 4c\cos x + 4d\sin x = -\cos x$

cioè $\qquad 3c\cos x + 3d\sin x = -\cos x$

da cui $3c = -1$ e $d = 0$ cioè $c = -\frac{1}{3}$; quindi

$\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{3}\cos x$.

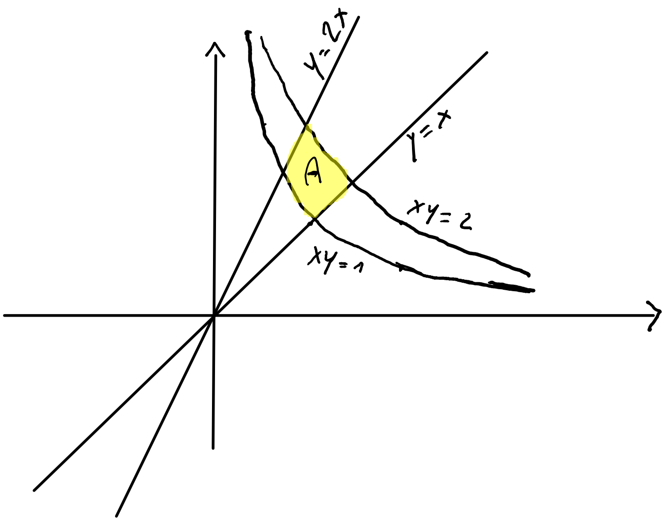
Pertanto l'integrale generale di (□) è

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}\cos x$$

4) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x^2}{y}\, dx\, dy$$

dove $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 2x,\ 1 \le xy \le 2\}$



L'insieme A è rappresentato in giallo nella figura qui accanto. Si osservi che se $(x,y) \in A$ allora $x>0$ e $y>0$.

Quindi da

$$\frac{1}{2} \le \frac{x}{y} \le 1$$

Posto $u = \frac{x}{y}$ e $v = xy$

abbiamo che $\frac{1}{2} \le u \le 1$

e $1 \le v \le 2$

Inoltre $\frac{x^2}{y} = \frac{x}{y}\, x = u \cdot x$ e $u \cdot v = \frac{x}{y}\, xy = x^2$

quindi $x = \sqrt{x^2} = \sqrt{uv}$ per cui dalla formula del cambio di variabili

$$\iint_A \frac{x^2}{y}\, dx\, dy = \iint_{[\frac{1}{2},1]\times[1,2]} u\sqrt{uv} \cdot \left| \det J(u,v) \right| du\, dv \qquad (*)$$

La matrice Jacobiana, $J(u,v)$, della trasformazione

$\{ x = x(u,v)$ è l'inversa di quella della trasformazione

La matrice Jacobiana, $J(u,v)$, ...

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$ è l'inversa di quella della trasformazione

$$\begin{cases} u = \frac{x}{y} \\ v = xy \end{cases}$$. La matrice Jacobiana $J(x,y)$ di questa trasformazione

è $$\begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ y & x \end{pmatrix}$$ e il suo determinante $|J(x,y)|$

$$\frac{x}{y} + \frac{x}{y} = 2\frac{x}{y} = 2u \quad \text{(quindi è positivo)}$$

Pertanto $\left| |J(u,v)| \right| = \left| \frac{1}{|J(u,v)|} \right| = \frac{1}{2u}$. Dunque

$$(*) = \frac{1}{2} \iint_{[\frac{1}{2},1]\times[1,2]} \sqrt{uv}\, du\, dv = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{u}\, du \int_{1}^{2} \sqrt{v}\, dv =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 u^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \cdot v^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{2} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 9}\left(2\sqrt{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{9}\left(9 - 4\sqrt{2}\right)$$

A.A. 2013/2014 Appello 16 febbraio 2015 Traccia A

Cognome________________ Nome________________ N^{o} Matricola________________

1) Stabilire se il seguente integrale converge

$$\int_2^3 \frac{3-x}{\log(x-2)}\mathrm{d}x.$$

2) La seguente funzione:

$$f(x,y) = (x-1)ye^{-x^2-y^2-1},$$

ha 5 punti critici. Determinarli. Determinare, inoltre, l'unico di essi che è un punto di sella.

3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x^2} + \dfrac{e^{1/x}}{x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

4) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ x^2+y^2 < 4\}$.

Analisi Matematica

lunedì 16 febbraio 2015 14:30

1) Stabilire se il seguente integrale converge

$$\int_2^3 \frac{3-x}{\log(x-2)}\,dx$$

$f(x) = \dfrac{3-x}{\log(x-2)}$ è definita e continua in $\mathbb{R}-\{2,3\}$.

Poiché

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3-x}{\log(x-2)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{\dfrac{\log(1-(3-x))}{3-x}} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3-x}{\log(x-2)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

essa è prolungabile per continuità in 2 e 3 e quindi l'integrale assegnato converge

2) La seguente funzione:

$$f(x,y) = (x-1)y\, e^{-x^2-y^2-1}$$

ha 5 punti stazionari. Determinarli. Determinare, inoltre, l'unico di essi che è un punto di sella.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\, e^{-x^2-y^2-1} + (x-1)y\, e^{-x^2-y^2-1}(-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-1)\, e^{-x^2-y^2-1} + (x-1)y\, e^{-x^2-y^2-1}(-2y)$$

I punti stazionari sono quindi dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y\, e^{-x^2-y^2-1} \left(1 + (x-1)(-2x) \right) = 0 \\ (x-1)\, e^{-x^2-y^2-1} \left(1 - 2y^2 \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-x^2-y^2-1} (1 - 2x^2 + 2x) = 0 \end{cases}$$

Quest'ultimo sistema equivale a

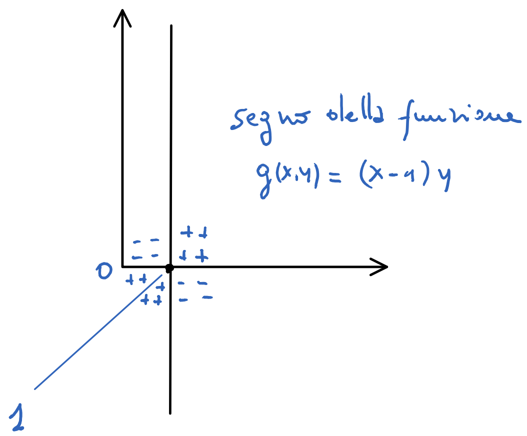
$$\begin{cases} y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari sono

$$(1,0), \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Osserviamo che $f(1,0) = 0$ e che il segno di $f(x,y) - f(1,0) = f(x,y)$ in un intorno di $(1,0)$ dipende solo dal fattore $(x-1)y$ che ovviamente non ha un segno definito. Quindi $(1,0)$ è un punto di sella



3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{x^2} y + \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Una primitiva della funzione $\frac{2}{x^2}$ è $-\frac{2}{x}$

quindi l'integrale generale è dato da

$$y(x) = e^{-\frac{2}{x}} \left(c + \int e^{\frac{2}{x}} e^{\frac{1}{x}} / x^2 \, dx \right)$$

$$= e^{-\frac{2}{x}} \left(c + \int e^{3/x} \cdot \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= e^{-\frac{2}{x}} \left(c - \frac{1}{3} e^{3/x} \right)$$

$$y(1) = 0 \iff e^{-2} \left(c - \frac{1}{3} e^{3} \right) = 0$$

$$\iff c = \frac{1}{3} e^{3}$$

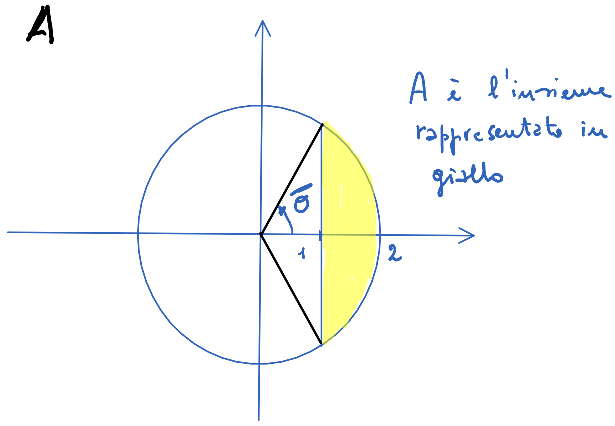
Quindi la soluzione del problema è

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{-2/x} \left(e^{3} - e^{3/x} \right)$$

4) Calcolare

$$\iint_A \frac{x^2}{x^2+y^2} \, dx \, dy \qquad A = \{ (x,y) : x > 1 , \ x^2+y^2 < 4 \}$$

A



In coordinate polari A è l'insieme dei punti per cui $-\bar\theta < \theta < \bar\theta$ e

$$\frac{1}{\cos\theta} < \rho < 2$$

Infatti, in coordinate polari, la condizione $x > 1$ equivale a $\rho\cos\theta > 1$ cioè $\rho > \frac{1}{\cos\theta}$. $\bar\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è l'angolo t.c. $2\cos\bar\theta = 1$ cioè $\bar\theta = \frac{\pi}{3}$

L'integrale assegnato è quindi uguale a

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2}\, \rho\, d\rho \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta \left. \frac{1}{2}\rho^2 \right|_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos^2\theta - \frac{1}{2} \right) d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta - \frac{\pi}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta = \cos\theta\sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta$$

quindi $2\int^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta = \frac{\sqrt{3}}{} + \frac{\pi}{}$

quindi $2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}$

Quindi l'integrale assegnato è uguale

a $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$

A.A. 2013/2014 Appello 13 aprile 2015 Traccia A

Cognome________________Nome________________N° Matricola________________

1) Stabilire il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{k}\right)\log\frac{k^2}{k-1}.$$

2) Stabilire se la seguente funzione

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{x_1^2x_2}+\log(x_1+x_2+x_3),$$

è differenziabile in $P=(-1,1,1)$ e in caso affermativo calcolare, al variare di θ, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(P)$ dove v è il versore di componenti $(0,\cos\theta,\sin\theta)$.

3) Si consideri la forma differenziale

$$\omega=(2xy^2-\frac{1}{2}x^{-3/2})\mathrm{d}x+2yx^2\mathrm{d}y.$$

Se ne determini il dominio, si stabilisca se è esatta e se ne determini, infine, una primitiva.

4) Calcolare l'integrale

$$\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove D è il disco di centro $(0,0)$ e raggio 1.

Analisi Matematica

lunedì 13 aprile 2015 17:00

1) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{k}\right) \log\frac{k^2}{k-1}$$

Poiché $\dfrac{1-\cos\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

$$\left(1-\cos\frac{1}{k}\right)\log\frac{k^2}{k-1} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}\log\frac{k^2}{k-1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}\log\frac{k^2}{k-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}\log k^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}\log(k-1)$$

$$= \frac{1}{k^2}\log k - \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}\log(k-1)$$

Poiché $k^{3/2}\left(\dfrac{1}{k^2}\log k - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k^2}\log(k-1)\right) \longrightarrow 0$

per il criterio degli infinitesimi

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k^2}\log k - \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}\log(k-1)\right]$ converge e

quindi converge anche la serie di partenza

2) Stabilire se la funzione

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2 x_2} + \log(x_1+x_2+x_3)$$

è differenziabile in $P=(-1,1,1)$

Calcolare poi $\dfrac{\partial f}{\partial v}(P)$ dove v è il versore

$v = (0, \cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Siano $f_1(x_1, x_2, x_3)$ e $f_2(x_1, x_2, x_3)$ le funzioni

$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2$ e $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$

Poiché $f_1(P) = 1 > 0$ e $f_2(P) = 1 > 0$

sia la funzione $\sqrt{f_1}$ che $\log(f_2)$ sono differenziabili in P in quanto composte da funzioni differenziabili in un intorno di P. Quindi anche f è differenziabile in P. Possiamo quindi applicare il teorema di rappresentazione della derivata direzionale mediante il gradiente ottenendo:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial x_3}(P) \sin\theta ;$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial x_3}(P) \sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 x_2}} + \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0 + \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{3}{2} \cos\theta + \sin\theta$$

3) Si consideri la forma differenziale ω

$$\omega = \left(2xy^2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)dx + 2yx^2\,dy$$

Se ne determini il dominio nel piano, si stabilisca se è esatta e, in caso positivo, se ne determini una primitiva

Il dominio di ω è dato dal semipiano $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$

Osserviamo che ω è chiusa in quanto, chiamate a e b le sue componenti,

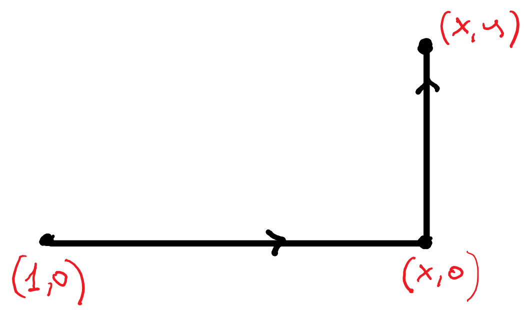
$$\frac{\partial a}{\partial y}(x,y) = 4xy = \frac{\partial b}{\partial x}(x,y)$$

Poiché il dominio di ω è un semipiano, quindi un insieme semplicemente connesso, ω è esatta

Possiamo determinarne una primitiva scegliendo un punto nel dominio, ad esempio $(1,0)$, e considerando la funzione

$$f(x,y) = \int_S \omega$$ dove S è la curva data

dai segmenti che uniscono $(1,0)$ con $(x,0)$ e $(x,0)$ con (x,y)



$$f(x,s) = \frac{-1}{2}\int_1^x s^{-\frac{3}{2}}\, ds \quad + \quad \int_0^y 2x^2 s\, ds$$

$$= s^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^x + x^2 s^2\Big|_0^y = x^{-\frac{1}{2}} - 1 + x^2y^2$$

4) Calcolare l'integrale

$$\int_D x^2y^2\, dx\,dy$$ dove D è il disco di centro O e raggio 1

Passando alle coordinate polari si ha che l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^5 \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\rho\, d\theta = \int_0^1 \rho^5\, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\rho^6\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta).$$ Calcoliamo il 1° integrale

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta)\, d\theta = -\frac{1}{2}\cos(2\theta)\sin(2\theta)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos^2(2\theta)\, d\theta$$

$$= 0 + \int_0^{2\pi}(1-\sin^2(2\theta))\, d\theta = 2\pi - \int_0^{2\pi}\sin^2(2\theta)\, d\theta$$

da cui $$\int_0^{2\pi}\sin^2(2\theta)\, d\theta = \pi$$ cioè

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{4}$$

e quindi l'integrale assegnato è uguale a $\pi/24$