1) - a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$z = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^6}$$

$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1+i)^4 = 4\, e^{i\pi} = -4$$

$$1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1-i)^6 = 8\, e^{-i\frac{3}{2}\pi} = 8i$$

Quindi $z = \dfrac{-4}{8i} = \dfrac{-4i}{-8} = \dfrac{i}{2}$

1) - b) Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2^{x-2}} - x$$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$f = g \circ h - id_{\mathbb{R}}$ con $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $h(x) = x-2$

Quindi f è strett. decrescente poiché somma di $f_1 = g \circ h$, con g strett. decrescente, h strett. crescente, quindi f_1 è strett. decrescente, e della funzione $-id_{\mathbb{R}}$ che è strett. decrescente

$f \in C^0(\mathbb{R})$ quindi $\text{Im} f = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$

2) Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = x \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Se ne studi poi il segno e la convessità.
Abbozzarne il grafico

$\text{dom} f$: $\begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \iff \frac{x^2-1}{x^2} > 0 \iff x<-1 \vee x>1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

quindi $\text{dom} f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f \in C^0(\text{dom} f)$ quindi gli unici punti in cui cercare eventuali asintoti verticali sono $x = 1$ (da dx) e $x = -1$ (da sx)

$\lim_{x \to 1^+} x \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1\,(-\infty) = -\infty$ $\quad x=1$ è as. vert. a dx

$\lim_{x \to -1^-} x \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -1\,(-\infty) = +\infty$ $\quad x=-1$ " " " " sx.

Vediamo se f ha asintoti orizzontali

$x \to -1^-$ $\quad f(\quad x^2)$

Vediamo se f ha asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \boxed{\frac{\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x}\right) = 1 \cdot 0 = 0$$

Posto $-\frac{1}{x^2} = w$ abbiamo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{w \to 0} \frac{\log(1+w)}{w} = 1$$

Quindi f ha la retta $y = 0$ come asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

$$f'(x) = \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3}$$

$$= \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} + \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2}{x(x^2-1)} - \frac{4x}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2-1) - 4x^2}{x(x^2-1)^2}$$

$$= -\frac{2x^2 + 1}{x(x^2+1)}$$

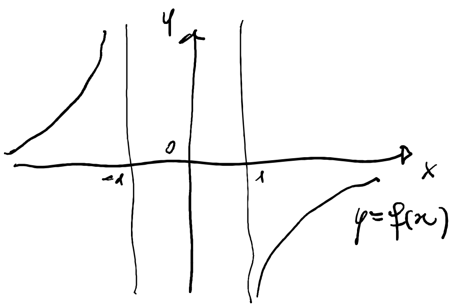
Quindi $f''(x) > 0 \iff x < 0$

Pertanto f è strett. convessa su $(-\infty, -1)$

è " concava su $(1, +\infty)$

Segno di f: $\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) > 0 \iff 1 - \frac{1}{x^2} > 1 \iff -\frac{1}{x^2} > 0$

che non è mai soddisfatto quindi il segno di f dipende solo dal fattore x: $f(x) > 0$ se $x < -1$ e $f(x) < 0$ se $x > 1$



3) Calcolare $\int^{3} \frac{1}{2x \quad x} dx$

3) Calcolare $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{e^{2x}-2e^x+1}\,dx$

Posto $e^x = t$, quindi $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}\,dt$, otteniamo

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{t^2-2t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{(t-1)^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$\frac{1}{(t-1)^2 t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2} = \frac{A(t-1)^2 + Bt(t-1) + Ct}{t(t-1)^2}$$

da cui

$$\frac{1}{t(t-1)^2} = \frac{(A+B)t^2 + (-2A-B+C)t + A}{t(t-1)^2}$$ e quindi

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A-B+C = 0 \\ A+B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{t(t-1)^2}\,dt = \int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{t}\,dt - \int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{t-1}\,dt + \int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{(t-1)^2}\,dt$$

$$= \log t\Big|_{e^2}^{e^3} - \log(t-1)\Big|_{e^2}^{e^3} - \frac{1}{t-1}\Big|_{e^2}^{e^3} =$$

$$= 3 - 2 + \log\frac{e^2-1}{e^3-1} - \frac{1}{e^3-1} + \frac{1}{e^2-1}$$

4) Dare la definizione topologica di limite.

Dimostrare che se il limite esiste, è unico

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos^2 x)}{2x^2}$

Per la definizione e il teorema di unicità si vedano, resp., pag 82 e 84 del manuale consigliato.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos^2 x)}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin^2 x)}{2x^2} =$$

$$\lim \frac{1}{2}\,\frac{\log(1-\sin^2 x)}{\;}\;\frac{\sin^2 x}{\;} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \frac{\log(1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} \quad \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$