# Possibile svolgimento della prova del 11 luglio 2025 – Modulo A

**1)** (a) Calcoliamo $z = \frac{(1-i)^5}{2e^{i\pi/6}}$ in forma esponenziale:
per $1-i$: $|1-i| = \sqrt{2}$; $\arg(1-i) = -\pi/4$. Quindi $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ e pertanto
$(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5 e^{-5i\pi/4} = 4\sqrt{2}e^{-5i\pi/<4}$.
Quindi

$$z = \frac{4\sqrt{2}e^{-5i\pi/4}}{2e^{i\pi/6}} = 2\sqrt{2}e^{-5i\pi/4 - i\pi/6} = 2\sqrt{2}e^{-17i\pi/12}.$$

Le radici settime sono:

$$z_k = \sqrt[7]{2\sqrt{2}}e^{i(-17\pi/12+2k\pi)/7} = 2^{3/14}e^{i(-17\pi/84+2k\pi/7)},$$

per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
(b) Per la successione $a_n = \frac{n+3}{2n+1}$ con $n \geq 1$, studiamo la monotonia:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+4}{2n+3} - \frac{n+3}{2n+1} = \frac{(n+4)(2n+1) - (n+3)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Sviluppando il numeratore: $(n+4)(2n+1) - (n+3)(2n+3) = 2n^2 + 9n + 4 - (2n^2 + 9n + 9) = -5$.
Quindi $a_{n+1} - a_n = \frac{-5}{(2n+3)(2n+1)} < 0$ per ogni $n \geq 1$.
La successione è strettamente decrescente.
Inoltre:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3/n}{2+1/n} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto
- $\sup A = a_1 = \frac{4}{3}$ (è massimo)
- $\inf A = \frac{1}{2}$ (non è minimo perché il limite non viene raggiunto).

**2)** Studiamo $f(x) = \begin{cases} x^2 \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Notiamo che $f$ è una funzione pari: $f(-x) = (-x)^2 \log|-x| = x^2 \log|x| = f(x)$.
Continuità in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0.$$

Per simmetria, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Quindi $f$ è continua in $x = 0$.
Derivabilità in $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 \log h}{h} = \lim_{h\to 0^+} h \log h = 0.$$

Per simmetria, il limite sinistro è anch'esso 0. Quindi $f'(0) = 0$.
Asintoti: Non ci sono asintoti verticali (la funzione è continua). Per $x \to \pm\infty$: $f(x) = x^2 \log|x| \to +\infty$, e $\frac{f(x)}{x} = x \log|x| \to +\infty$, quindi non ci sono asintoti orizzontali né obliqui.
Monotonia: per $x > 0$:

$$f'(x) = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \log x + x = x(2 \log x + 1);$$

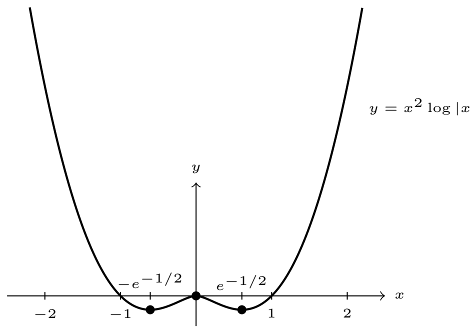
$f'(x) > 0$ se e solo $2 \log x + 1 > 0$, cioè $x > e^{-1/2}$.

Quindi, per $x > e^{-1/2}$: $f'(x) > 0$ ed $f$ è strettamente crescente; per $0 < x < e^{-1/2}$: $f'(x) < 0$ e $f$ è strettamente decrescente. Dunque $x = e^{-1/2}$ è un punto di minimo locale forte.

Per simmetria, $x = -e^{-1/2}$ è anch'esso punto di minimo locale forte.

Poiché $f$ è strettamente decrescente in un intorno dx di 0 e, per simmetria, strettamente crescente in un intorno sx, abbiamo che 0 è un punto di massimo locale forte. Notiamo che $x = \pm e^{-1/2}$ sono anche punti di minimo globale.

Grafico qualitativo:




**3)** Per calcolare $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} \mathrm{d}x$, poniamo $u = \sin(x)$, quindi $du = \cos(x)dx$. Per $x = 0$, $u = \sin(0) = 0$; per $x = \pi/2$, $u = \sin(\pi/2) = 1$. L'integrale diventa:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = [\arctan(u)]_0^1 = \pi/4.$$

**4)** Formula di Taylor di ordine $n$ con resto di Peano: se $f$ è derivabile $n$ volte in $x_0$, allora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Per $f(x) = x\cos(x)$, partiamo dalla formula di MacLaurin per $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + +o(x^6)$$

Moltiplicando per $x$:

$$x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + o(x^7)$$

Per il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - x + \frac{x^3}{2}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + o(x^7) - x + \frac{x^3}{2}}{x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + o(x^7)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{24} - \frac{x^2}{6!} + o(x^2)\right) = \frac{1}{24}$$