1)-a) Calcolare il modulo e l'argomento principale del numero complesso

$$(1-i)^5\left(\sqrt[3]{2}\,i\right)^6$$

$$\left|(1-i)^5\left(\sqrt[3]{2}\,i\right)^6\right| = \left|(1-i)^5\right| \cdot \left|\sqrt[3]{2}\right|^6 \cdot \left|i^6\right| = \left(\sqrt{2}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 \cdot 1 =$$
$$= 2^{5/2} \cdot 4 = 2^{9/2}$$

Per determinare l'argomento principale eseguiamo le potenze e poi facciamo il prodotto

$1-i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$ quindi $(1-i)^5 = \sqrt{2}^5\, e^{-\frac{5}{4}\pi i}$

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ quindi $i^6 = e^{3\pi i} = e^{\pi i}$

Quindi $(1-i)^5\left(\sqrt[3]{2}\,i\right)^6 = 4\cdot\sqrt{2}^5\, e^{-\frac{5}{4}\pi i}\cdot e^{\pi i} = 4\cdot\sqrt{2}^5\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$ quindi l'argomento principale è $-\frac{\pi}{4}$

1)-b) Determinare il dominio, il tipo di monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^7-1} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}+\log\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\right)$$

dom f: $x^{\frac{1}{3}}-1 > 0 \iff x > 1$ quindi dom $f = (1,+\infty)$

la funzione $x\in(1,+\infty)\mapsto x^7-1$ è strettamente crescente e quindi

$x\in(1,+\infty)\mapsto \sqrt[3]{x^7-1}$ è strett. crescente in quanto composta da due funzioni strett. crescenti

la funzione $x\in(1,+\infty)\mapsto x^{\frac{1}{3}}-1$ è strett. crescente quindi anche

$x\in(1,2)\mapsto \log\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)+\frac{\pi}{2}$ è strett. crescente; poiché la funzione $y(x)=\operatorname{arctg}x$ è anch'essa strettamente crescente, abbiamo che $x\in(1,+\infty)\mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}+\log\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\right)$ è strettam. crescente. Dato che f è somma di due funzioni strett. crescenti, essa è strett. crescente.

Poiché f è continua $\operatorname{Im} f := f((1,+\infty)) = \left(\lim_{x\to1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = x\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2-1}\right)$$

Se ne determini il dominio, si dimostri che è una funzione dispari.
Se ne tracci quindi un grafico approssimativo dopo aver determinato asintoti, e monotonia solo sull'intervallo del dominio contenuto in $[0,+\infty)$

dom f: $x^2-1 \geq 0 \iff x\geq1 \vee x\leq-1$; quindi dom $f = (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$\forall x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$:

$f(-x) = -x\operatorname{arctg}\sqrt{(-x)^2-1} = -x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} = -f(x)$, quindi f è dispari

$\forall x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$:

$f(-x) = -x \operatorname{arctg}\sqrt{(-x)^2-1} = -x \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} = -f(x)$, quindi f è dispari

Poiché f è dispari possiamo limitare il suo studio all'intervallo $[1,+\infty)$

$f \in C^0([1,+\infty))$ quindi non ha asintoti verticali

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left[+\infty \cdot \frac{\pi}{2}\right] = +\infty$, non ha asintoti orizzontali

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) = \frac{\pi}{2}$

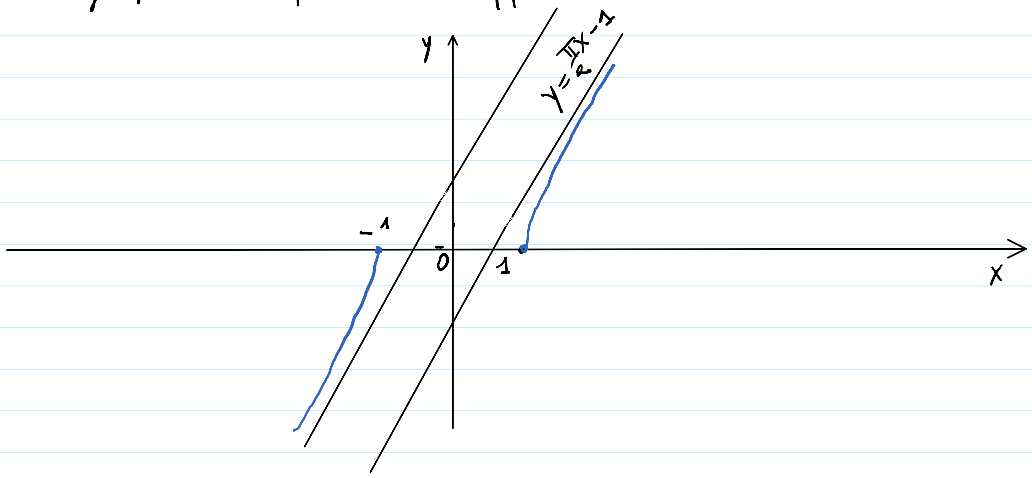
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{2}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{1+x^2-1}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}2x}{-\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -1$ quindi la retta $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$f'(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) + x \frac{1}{1+x^2-1}\,\frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [1,+\infty)$ dato che è somma di due funzioni positive. Osservando infine che $f(1)=0$ e $f(x)>0 \; \forall x \in (1,+\infty)$ il grafico di f è dato approssimativamente dalla curva in blu.



3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-2}^{2} x^3 e^{x^4-1}\, dx$$

$\int_{-2}^{2} x^3 e^{x^4-1} dx \quad \underset{}{x^4=t} \quad \frac{1}{4}\int^{16} e^{t-1}\, dt = 0$

$$\int_{-2}^{2} x^3 e^{x^4-1}\,dx \underset{dt=4x^3dx}{\overset{x^4=t}{=}} \frac{1}{4}\int_{16}^{16} e^{t-1}\,dt = 0$$

oppure si osservi che la funzione integranda è dispari e l'insieme di integrazione è simmetrico rispetto a 0 e quindi l'integrale è nullo.

4) Dare la definizione di funzione convessa su un intervallo aperto I e di punto di flesso.

Dimostrare che se f è derivabile due volte in un punto di flesso $x_0 \in I$ allora $f''(x_0) = 0$

Si vedano le definizioni 7.26, 7.31 e il Th. 7.32 del manuale consigliato