Politecnico di Bari
CUC Ingegneria dell'Informazione
L3 Ingegneria Informatica
AA 2004-2005

Corso di Analisi Matematica II - Tracce di esame

Docenti: Prof.ssa G. Cerami, Dott. E. Caponio

A.A 2004/2005 Appello 5 Aprile 2005 Traccia A

1) Verificare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ risulta $z\bar{z} = |z|^2$. Determinare, poi, rappresentandolo graficamente, l'insieme $A \subset \mathbb{C}$ definito da

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \colon \frac{1}{z-1} = \bar{z} - 1 \right\}.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \sqrt[3]{n}}.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(x-1)y}}{\log(2x-y-1)}.$$

Dire inoltre, giustificando la risposta, se tale insieme è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso, aperto, connesso, convesso.

4) Scrivere la definizione di funzione derivabile secondo una fissata direzione in un punto interno del suo insieme di definizione. Calcolare, poi, la derivata direzionale della funzione $f(x,y) = \cos x \sin y + (x-y)^2$, nel punto $(0, \frac{\pi}{2})$ nella direzione del versore $(\sqrt{\frac{9}{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$.

5) Determinare i punti di minimo e di massimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$, definita sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' + 2y' = x - e^x.$$

7) Sia A l'insieme definito da

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x}{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2004/2005 Appello 5 Aprile 2005 Traccia B

1) Verificare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ risulta $z\bar{z} = |z|^2$. Determinare, poi, rappresentandolo graficamente, l'insieme $A \subset \mathbb{C}$ definito da

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \colon \frac{1}{\bar{z}+2} = z + 2 \right\}.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n \sqrt{n}}.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(y-3)x}}{\log(x-y+1)}.$$

Dire inoltre, giustificando la risposta, se tale insieme è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso, aperto, connesso, convesso.

4) Scrivere la definizione di funzione derivabile secondo una fissata direzione in un punto interno del suo insieme di definizione. Calcolare, poi, la derivata direzionale della funzione $f(x,y) = \arctan(x-y) + xy$, nel punto $(1,0)$ nella direzione del versore $(-\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}})$.

5) Determinare i punti di minimo e di massimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$, definita sul triangolo di vertici $(0,0),\ (1,1),\ (1,0)$.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' - y' - 2y = x + e^{-2x}.$$

7) Sia A l'insieme definito da

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2004/2005 Appello 11 Aprile 2005 Traccia A

1) Rappresentare graficamente il sottoinsieme A di $\mathbb{C}$ definito da:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon |z + \frac{1}{2}| = |z - 2i|\}.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{(n-1)x}{n \arctan^2 x + 1}$$

e calcolarne il limite puntuale. Dire, giustificando la risposta, se sull'insieme di convergenza puntuale si ha anche convergenza uniforme.

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione e le curve di livello -1 e 0 della funzione

$$f(x, y) = 2^{(x^2 - y^2 - 1)^{1/4}} - 2.$$

4) Calcolare la derivata della funzione $g \circ \gamma$, dove $g = g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2$ e $\gamma = \gamma(t) = (1 + 4\cos t, 4\sin t)$. Interpretare il risultato ottenuto.

5) Determinare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = e^{(y - x^2 - 1)y}$ e studiarne la natura. Dire inoltre, giustificando la risposta, se f è limitata o meno.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y' + (\log x)y = e^{-x \log x}.$$

7) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq \frac{1}{2},\ x \geq 0\}$. Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{x}{y(x^2 + y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2004/2005 Appello 11 Aprile 2005 Traccia B

1) Rappresentare graficamente il sottoinsieme A di $\mathbb{C}$ definito da:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z-1| = |z+i|\}\,.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{2(n-1)\sqrt[n]{n}x^2+1}$$

e calcolarne il limite puntuale. Dire, giustificando la risposta, se sull'insieme di convergenza puntuale si ha anche convergenza uniforme.

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione e le curve di livello 0 e 2 della funzione

$$f(x,y) = 3^{(y^2-x^2-1)^{1/2}} - 1.$$

4) Calcolare la derivata della funzione $g \circ \gamma$, dove $g = g(x,y) = x^2+y^2-4y-5$ e $\gamma = \gamma(t) = (3\cos t, 2+3\sin t)$. Interpretare il risultato ottenuto.

5) Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{(1+y^2-x)x}$ e studiarne la natura. Dire inoltre, giustificando la risposta, se f è limitata o meno.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y' + (\cos^2 x)y = e^{-\frac{\cos x \sin x}{2}}.$$

7) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 3,\ y \geq 0,\ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$. Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{y}{x(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2004/2005 Appello 26 Maggio 2005 Traccia A

1) Risolvere nel campo dei numeri complessi l'equazione

$$x^4 + 4 = 0.$$

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n + 6^n}.$$

3) Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, connesso. Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \log\left(\frac{4x^2 - y^2 - 1}{x - 1}\right).$$

Dire, poi, se tale insieme sia aperto, chiuso, connesso.

4) Studiare l'esistenza del seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

5) Determinare i punti di minimo e di massimo relativo della funzione

$$f(x,y) = |y - x|(2x^2 + y^2 - 1)$$

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' - y' - 2y = e^{2x}(3x - 1) + 1.$$

7) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le y \le 2,\ y - x + 1 \ge 0,\ y - x \le 0\}$. Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_A \frac{x - y}{x + y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2004/2005 Appello 26 Maggio 2005 Traccia B

1) Risolvere nel campo dei numeri complessi l'equazione

$$x^3 + 8 = 0.$$

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{4^n + 3^n}.$$

3) Dare la definizione di insieme aperto, chiuso, connesso. Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \log\left(\frac{4y^2 - x^2 - 1}{y + 1}\right).$$

Dire, poi, se tale insieme sia aperto, chiuso, connesso.

4) Studiare l'esistenza del seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\frac{(x+y)^2}{y}.$$

5) Determinare i punti di minimo e di massimo relativo della funzione

$$f(x, y) = |y + x|(x^2 + 4y^2 - 1)$$

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' + y' - 2y = e^{-2x}(x - 3) - 1.$$

7) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x \le 2,\ y + x + 1 \ge 0,\ y + x \le 0\}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x+y}{x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2004/2005 Appello 05 Luglio 2005 Traccia A

1) Rappresentare graficamente nel piano complesso gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon 1 \le |z| \le 4, 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \right\}$$
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \colon w = \sqrt[4]{z},\ z \in A \right\}.$$

2) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n \sin^2(n-1) + n^2 - 1}{n^4 - 1}.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{2e^{-\frac{x^2}{y}}}{\log(x^3 - y)}.$$

Rappresentare inoltre il sottoinsieme del dominio in cui la funzione assume valori positivi.

4) Sia $f \colon A \setminus \{(x_0, y_0)\} \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) punto di accumulazione per A, una funzione continua. Quando si dice che f è prolungabile per continuità in (x_0, y_0)? Dire poi, giustificando la risposta, se la funzione

$$f(x,y) = \frac{2 \sin^2(x-y)}{3x - 3y}$$

è prolungabile per continuità in $(0,0)$.

5) Si consideri la funzione $f(x,y) = xe^{-y^2+x-1}$. Determinare l'insieme dei punti in cui f è differenziabile. Si determinino, poi, i punti stazionari di f e se ne studi la natura. Dire infine, giustificando la risposta, se f è una funzione limitata.

6) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x+1} y = \dfrac{x}{x-1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

7) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ -x \le y \le x\}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x^2 + y^2}{x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

A.A 2004/2005 Appello 05 Luglio 2005 Traccia B

1) Rappresentare graficamente nel piano complesso gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon 1 \leq |z| \leq 8, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \colon w = \sqrt[3]{z},\ z \in A \right\}.$$

2) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 \log(n-1) + n - 2}{n^4 - 2}.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+1}{x(x^4+y)^{1/2}}.$$

Rappresentare inoltre il sottoinsieme del dominio in cui la funzione assume valori positivi.

4) Sia $f \colon A \setminus \{(x_0,y_0)\} \to \mathbb{R}$, (x_0,y_0) punto di accumulazione per A, una funzione continua. Quando si dice che f è prolungabile per continuità in (x_0,y_0)? Dire poi, giustificando la risposta, se la funzione

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{\tan[2(x+y)]}$$

è prolungabile per continuità in $(0,0)$.

5) Si consideri la funzione $f(x,y) = ye^{-x^2+2y-1}$. Determinare l'insieme dei punti in cui f è differenziabile. Si determinino, poi, i punti stazionari di f e se ne studi la natura. Dire infine, giustificando la risposta, se f è una funzione limitata.

6) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{x-1}{x+1} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

7) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ y-x \geq 0,\ y+x \geq 0\}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x^2+y^2}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A.A 2004/2005 Appello 22 Settembre 2005 Traccia A

1) Rappresentare graficamente nel piano complesso gli insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon 1 \leq z\bar{z} \leq 256, \arg z = \pi\}\,; \qquad B = \left\{w \in \mathbb{C} \colon w = \sqrt[4]{z},\ z \in A\right\}.$$

2) Studiare la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) 2^{-n}$.

3) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione e le curve di livello della funzione $f(x, y) = \log(e^x - y^2)$.

4) Dare la definizione di derivata parziale, di gradiente e di derivata direzionale per una funzione di due variabili. Enunciare, poi, il teorema di rappresentazione della derivata direzionale per mezzo del gradiente

5) Si consideri la funzione $f(x, y) = e^{y - x^2 - xy^2 - 1}$. Determinare l'insieme dei punti in cui f è differenziabile. Si determinino, poi, i punti stazionari di f e se ne studi la natura.

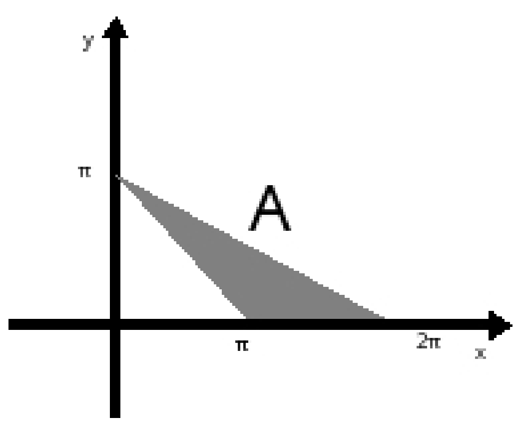
6) Determinare al variare di $k \geq 0$ l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + k^2 y = 1 + \cos x.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_A \sin(y - \pi) \cos x \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove A è il triangolo tratteggiato in figura.



A.A 2004/2005 Appello 4 Novembre 2005 Traccia A

1) Rappresentare graficamente nel piano complesso gli insiemi

$$A = \left\{z \in \mathbb{C}\colon z^2 = 1 + i\right\}; \qquad B = \left\{w \in \mathbb{C}\colon w = e^{i\theta} z, \theta \in \mathbb{R},\ z \in A\right\}.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n}(x-1)^n.$$

3) Rappresentare sul piano l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2-2}\right)^{1/4}.$$

4) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+y^2x^2)}{y^4+x^2}.$$

5) Siano A un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si supponga che per ogni curva $\gamma\colon [0,1] \to A$, tale che $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, la funzione $f \circ \gamma$ abbia un punto di massimo assoluto in 0. Si chiede di stabilire se (x_0, y_0) sia o no un punto di massimo assoluto per f. Giustificare la risposta.

6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x - 1.$$

7) Sia $A = [0,1] \times [1,2]$. Calcolare l'integrale

$$\iint_A x\sin(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

A.A 2004/2005 Appello 13 Dicembre 2005 Traccia A

1) Rappresentare graficamente nel piano complesso gli insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon 2i\bar{z} - \mathrm{Re}z = 1\}; \qquad B = \left\{w \in \mathbb{C} \colon w = e^{i\theta}z, \theta \in \mathbb{R},\ z \in A\right\}.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n2^{-n}}{n+1}(x-1)^n.$$

3) Rappresentare sul piano l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{\log(x-y)-1}}{\log(x^2-y^2-2)}.$$

4) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+y^2x^2}{y^4+x^2}.$$

5) Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $P = (x_0, y_0) \in A$ un punto di estremo locale per $f \colon A \to \mathbb{R}$ in cui f è differenziabile. Per quali versori v risulta $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$? Se P non è un estremo locale esistono versori per cui $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$? Motivare le risposte.

6) Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2ky' + y = e^x.$$

7) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x^2 < y^2\}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x-y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

A.A 2004/2005 Appello 22 Dicembre 2005 Traccia A

1) Rappresentare graficamente nel piano complesso gli insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon 2i(\bar{z} - z) = 0\}\,; \qquad B = \left\{w \in \mathbb{C} \colon w = e^{i\theta} z, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ z \in A\right\}.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n(n+1)} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n.$$

3) Rappresentare sul piano l'insieme di definizione e le curve di livello della funzione

$$f(x, y) = \log(x^2 - 4y^2) - \log(x + 2y).$$

4) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2 + y^4 x^2}{y^2 + x^2}.$$

5) Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $P = (x_0, y_0) \in A$. Dire, motivando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:
ogni funzione $f \in C^2(A)$ avente in P un estremo locale

a) ha tutte le derivate direzionali nulle in P;

b) ha Hessiano diverso da 0 in P;

c) ha almeno un altro punto di estremo locale in A.

6) Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = e^{kx} - \frac{x}{k}.$$

7) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x^2 < y^2\}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x^2 - y}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$