1) Determinare l'insieme su cui le seguenti funzioni sono olomorfe

A) $f(z) = i\, z \cdot \bar{z}$ $\quad g(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^2+2}$, $h(z) = \bar{z}$, $l(z) = g(z) + h(z)$

B) $f(z) = i\,|z|$ $\quad g(z) = \dfrac{e^{2z}}{z^2+3}$ $\quad h(z) = \bar{z}$, $l(z) = g(z) - h(z)$

A) Poichè $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ f assume valori solo in $i\mathbb{R}$ cioè f ha solo parte immaginaria $v(z) = z\bar{z}$ mentre la sua parte reale u è nulla. Poichè u e v sono differenziabili è sufficiente determinare i punti su cui sono soddisfatte le relazioni di Cauchy-Riemann: Posto $z = x+iy$, $u(x,y) = 0 \wedge v(x,y) = x^2+y^2$

$u_x(z) = 0$, $u_y(z) = 0$, $v_x(z) = 2x$, $v_y(z) = 2y$.

Deve quindi essere

$\begin{cases} 0 = 2y \\ 0 = -2x \end{cases}$ da cui $x = 0 \wedge y = 0$. Dunque f è derivabile solo in 0

g è il rapporto delle funzioni e^{z^2} e z^2+2 che sono entrambe olomorfe su $\mathbb{C}$: la prima in quanto composta dalle funzioni z^2 e e^z che sono olomorfe su $\mathbb{C}$, la seconda in quanto è un polinomio. Quindi g è olomorfa nel suo insieme di definizione cioè $\mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$

h non è derivabile in alcun punto dato che le relazioni di Cauchy-Riemann non sono soddisfatte in alcun punto

Anche l non è derivabile in alcun punto del suo dominio (che coincide con quello di g). Infatti se esistesse $\bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$ su cui l è derivabile allora $h(z) = l(z) - g(z)$ sarebbe anch'essa derivabile in $\bar{z}$ in quanto somma di funzioni derivabili. Sappiamo però che h non è derivabile in alcun punto.

B) È analoga ad A)

2) Sia $f(t)$ il seguente

A) $t_+^3\, e^{2t}$

B) $\sin_+(2t)\, e^{2t}$

Scrivere la trasformata di $f(t-1)$, $e^{it} f(t)$, $f\left(\frac{t}{2}\right)$ specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definito

1) Possiamo usare le formule per la trasformata di un segnale ritardato, "attenuato", ecc.

Poiché $\mathcal{L}(t_+^3 e^{2t})(s) = \dfrac{6}{(s-2)^4}$ $\forall s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} 2 = 2$

abbiamo che

$$\mathcal{L}(f(t-1))(s) = e^{-s}\mathcal{L}(f(t))(s) = e^{-s}\frac{6}{(s-2)^4} \qquad ''$$

$$\mathcal{L}(e^{it} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-i) = \frac{6}{(s-i-2)^4} \qquad ''$$

$$\mathcal{L}\left(f\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)(s) = 2\,\mathcal{L}(f(t))(2s) = \frac{12}{(2s-2)^4} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{(s-1)^4},$$

$\forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

B) è analoga:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{2}{(s-2)^2+4}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 2$$

$$\mathcal{L}(f(t-1))(s) = \frac{2e^{-s}}{(s-2)^2+4} \qquad ''$$

$$\mathcal{L}(f(t)e^{it})(s) = \frac{2}{(s-i-2)^2+4} \qquad ''$$

$$\mathcal{L}\left(f\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)(s) = 2\cdot\frac{2}{(2s-2)^2+4} = \frac{1}{(s-1)^2+1}, \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

A)
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ \cos(2t) & \text{se } 0 \le t \le \pi \\ \sin(3t) & \text{se } t > \pi \end{cases}$$

B)
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ \sin 3t & \text{se } 0 \le t \le 2\pi \\ \cos(2t) & \text{se } t > 2\pi \end{cases}$$

A)
$$f(t) = \cos_+(2t) - \cos_+(2(t-\pi)) - \sin_+(3(t-\pi))$$

quindi
$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+4} - \frac{e^{-\pi s}\,3}{s^2+9}, \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 0$$

quindi $\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+4} - \frac{e^{-\pi s}\,3}{s^2+9}$, $\forall s\in\mathbb{C}$, $\Re s>0$

B) $f(t) = \sin_+(3t) - \sin_+(3(t-2\pi)) + \cos_+(2(t-2\pi))$

quindi $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{3}{s^2+9} - e^{-2\pi s}\frac{3}{s^2+9} + e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+4}$, "

4) Calcolare la convoluzione dei segnali

A) $f(t) = e^{2t}t_+$ e $g(t) = H(t-1)$.

B) $f(t) = e^t \sin_+ t$ e $g(t) = H(t-2)$

Determinare poi la sua trasformata di Laplace specificando per quali s è ben definita

A) $f*g\,(t) = \int_0^t H(\tau-1)\, e^{2(t-\tau)}(t-\tau)\,d\tau$ per $t\geq 0$

(per $t<0$ $f*g(t)=0$)

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t\in[0,1] \\ \int_1^t e^{2(t-\tau)}(t-\tau)\,d\tau & \text{se } t>1 \end{cases}$$

$$\int_1^t e^{2(t-\tau)}(t-\tau)\,d\tau \overset{t-\tau=x}{=\!=} -\int_{t-1}^0 e^{2x}x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{2x}x\Big|_{t-1}^0 + \frac{1}{2}\int_{t-1}^0 e^{2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2(t-1)}(t-1) + \frac{1}{4}\left(1-e^{2(t-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2(t-1)}\left[t-1-\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2(t-1)}\left(t-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

quindi $f*g\,(t) = \left(\frac{1}{2}e^{2(t-1)}\left(t-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}\right)H(t-1)$

$$\mathcal{L}\left[(f*g)(t)\right](s) = \mathcal{L}(f(t))(s)\cdot\mathcal{L}(H(t-1))(s) =$$

$$= \frac{1}{(s-2)^2}\,\frac{1}{s}e^{-s},\ \forall s\in\mathbb{C}\ \Re s>2$$

dato che $\sigma(f)=2$ e $\sigma(H(t-1))=0$

B) Analogamente alla traccia A)

$\quad\quad\quad\quad \{\ 0$ se $t<2$

B) Analogamente alla traccia A)

$$f * g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ \int_2^t e^{t-\tau} \sin(t-\tau)\, d\tau & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_2^t e^{t-\tau} \sin(t-\tau)\, d\tau \overset{t-\tau = x}{=} -\int_{t-2}^0 e^x \sin x \, dx =$$

$$= e^x \cos x \Big|_{t-2}^0 - \int_{t-2}^0 e^x \cos x \, dx =$$

$$= 1 - e^{t-2}\cos(t-2) - e^x \sin x \Big|_{t-2}^0 + \int_{t-2}^0 e^x \sin x \, dx$$

quindi $-2\int_{t-2}^0 e^x \sin x \, dx = 1 - e^{t-2}\cos(t-2) + e^{t-2}\sin(t-2)$

da cui $f * g(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{e^{t-2}}{2}\left(\sin(t-2) - \cos(t-2)\right)\right] H(t-2)$

$$\mathcal{L}((f*g)(t))(s) = \mathcal{L}(e^t \sin t)(s)\, \mathcal{L}(H(t-2))(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1} \frac{e^{-2s}}{s}$$

$\forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1$

5) Stabilire se la serie di potenze in $\mathbb{C}$

A) $\sum_{n=3}^{+\infty} (-i)^n \log(n^2) z^n$

B) $\sum_{n=2}^{+\infty} (i)^n \log(n-1) z^n$

converge in $z = 2e^{i\frac{\pi}{13}}$

A) Calcoliamo il raggio di convergenza

$$\sqrt[n]{|(-i)^n| \log(n^2)} = |-i| \sqrt[n]{2\log n} = \sqrt[n]{2\log n}$$

$$\lim_n (2\log n)^{\frac{1}{n}} = \lim_n e^{\frac{1}{n}\log(2\log n)} =$$

$$= \lim_n e^{\frac{\log 2}{n} + \frac{\log(\log n)}{n}} \quad (*)$$

Poiché $\frac{\log 2}{n} \to 0$ e $\frac{\log(\log n)}{n} = \frac{\log(\log n)}{\log n} \frac{\log n}{n} \to 0$

$(*) = e^0 = 1$ quindi $\rho = 1$

Dato che $\left|2e^{i\frac{\pi}{13}}\right| = 2 > 1$, la serie non converge in $\bar{z}$

B) È analoga.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|i^{n+1}|}{|i^n|}\frac{|\log n|}{|\log(n-1)|} = \frac{|i|^{n+1}}{|i|^n}\frac{\log n}{\log(n-1)} = \frac{\log n}{\log(n-1)}$$

$$\lim_n \frac{\log n}{\log(n-1)} = \lim_n \frac{1}{n} \Big/ \frac{1}{n-1} = 1$$

La conclusione è la stessa di A)