

Definizione

- Si dice che le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente su $B \subset A$

se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente su B e in tal caso

la funzione $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ si chiama somma delle serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ e si scrive $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

- Si dice che le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su $B \subset A$

se $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su B .

- Si dice che le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ diverge positivamente su $B \subset A$

se $\forall x \in B$ $\lim_m s_m(x) = +\infty$ (ossia se $\forall x \in B$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (f_n(x))$ diverge positivamente)

Analogamente $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ diverge negativamente (risp. è indeterminata) su $B \subset A$

se $\forall n \in \mathbb{B}$, $\lim_m s_m(n) = -\infty$ ($\forall n \in \mathbb{B}$, non esiste $\lim_m s_m(n)$)

(ossia se $\forall n \in \mathbb{B}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (f_n(x)) = -\infty$ ($\forall n \in \mathbb{B}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (f_n(x))$ è indeterminato))

DEF. Convergenza assoluta:

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$; $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$; si dice che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ conv. assolutamente su $B \subseteq A$

se $\forall x \in B$: $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$, cioè se la serie numerica

$\sum_{n=0}^{+\infty} (f_n(x))$ converge assolutamente $\forall x \in B$

DEF. convergenza totale

Si è $f_n: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, successione di funzioni

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente su $B \subseteq A$ se

$\exists \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.c.

a) $|f_n(x)| \leq c_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ (quindi $c_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$)

b) $\sum_n c_n$ è convergente (quindi $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$)

Oss La migliore possibile fra le successioni $\{c_n\}$ che potrebbero verificare la b)

è quella che \sup di $|f_n|$: $c_n = \sup_{x \in B} |f_n(x)|$

Le seguenti relazioni tra le diverse nozioni di convergenza succintamente:

$$\begin{array}{c} \text{GNV. TOTALE} \Rightarrow \text{GNV. UNIF.} \Rightarrow \\ \Downarrow \\ \text{GNV. ASSOLUTA} \Rightarrow \text{GNV. PONTOALE} \end{array}$$

Fra queste l'unica implicazione non immediata è $\text{GNV. TOTALE} \Rightarrow \text{GNV. UNIFORME}$

Al fine di dimostrarlo ricordiamo il

Teorema di Cauchy per la convergenza uniforme

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ obbl

f_n converge uniformemente su $B \subseteq A$ ad una funzione $f: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ tale che } \forall M > N \quad |f_M(n) - f_M(m)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \in B$$

Dunque per dimostrare che le convergenze totali su B implica quelle uniforme su B , fornire equivalentemente dimostrare che le successioni delle somme parziali delle serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soddisfa il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme.

Sia quindi $\epsilon > 0$ e voler dimostrare $|s_m(x) - s_n(x)|$, $n, m \in \mathbb{N}$; fornire essere che $m > n$, allora $s_m(x) = \sum_{k=0}^m f_k(x)$ e $s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ quindi

$$\begin{aligned} |s_m(x) - s_n(x)| &= |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots + f_m(x)| \\ &\leq |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \dots + |f_m(x)| \quad (*) \end{aligned}$$

Ma per ogni $m \in \mathbb{N}$ $|f_m(x)| \leq c_m \quad \forall x \in B$ quindi

$$(*) \leq c_{m+1} + c_{m+2} + \dots + c_m$$

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge, le sue successioni delle somme parziali $\{s_m^c\}$ è di Cauchy e quindi per $\epsilon > 0$ finito, esiste $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall M > N \quad |s_m^c - s_M^c| < \epsilon$. Ma $|s_m^c - s_M^c| = |c_{m+1} + c_{m+2} + \dots + c_M| \quad (\square)$

$n > m$ e, tenendo presente che $c_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(□) è uguale a $c_{m+1} + c_{m+2} + \dots + c_n$.

Quindi $|s_m(x) - s_n(x)| \leq c_{m+1} + c_{m+2} + \dots + c_n < \varepsilon$, $\forall x \in B$

e $\forall \delta > 0$ ■

Teorema sulle continuità delle somme

Si consideri $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f_n continua su A , $\forall n \in \mathbb{N}$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge unif. su $B \subseteq A$ allora $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ è continua su B

dim:

Le successioni delle somme parziali $s_m = \sum_{k=0}^m f_k$, $m \in \mathbb{N}$

è una successione di funzioni continue su A ; $s_m \rightarrow f$ uniformemente su B

e quindi per il teorema sulle continuità del limite di una seq. di funzioni

continue, f è una funzione continua su B .

Teorema di integrazione termine a termine

Sia $f_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ successione di funzioni continue su $[a, b]$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_m$ converge uniformemente su $[a, b]$ a f allora

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (*)$$

(Poiché $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_m$, la $(*)$ può essere scritta così)

$$\boxed{\int_a^b \sum_{m=0}^{+\infty} f_m(x) dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \int_a^b f_m(x) dx}$$

dimo

Poiché $s_m = \sum_{k=0}^m f_k$ è continua e $s_m \rightarrow f$ mis. su $[a, b]$ per ipotesi, dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale abbiamo:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_m \int_a^b s_m(x) dx = \lim_m \left(\sum_{k=0}^m \int_a^b f_k(x) dx \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \int_a^b f_m(x) dx$$

Teorie di convergenza termine a termine

Si consideri $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$; $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \in C^1((a, b))$

Se

- 1) $\exists x_0 \in B$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x_0))$ converge in x_0
- 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ converge uniformemente su (a, b) o $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge unif. su (a, b) e oltre f' la somma
se f' ha derivaibile su (a, b) e

$$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in B$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

dim Fare come esercizio (usando il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata)

Esempi ed esercizi

serie geometrica: sia $n \in \mathbb{N}$ e

consideriamo la funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$.

Al variare di n in \mathbb{N} otteriamo così una successione di funzioni definite su \mathbb{R}

de cui associate a tale successione, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, si chiama

serie geometrica e sappiamo che converge puntualmente $\forall x \in (-1, 1)$,

la sua somma è la funzione $x \in (-1, 1) \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Sappiamo anche che essa

diverge positivamente per $x \geq 1$ ed è indeterminata per $x \leq -1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge anche assolutamente su $(-1, 1)$.

In realtà $\sum_{n=0}^{+\infty} |x^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n$

che converge, come sappiamo, se e solo se $|x| < 1$

Essa non converge totalmente su $(-1, 1)$ dato che $\sup_{n \in \mathbb{N}} |n^n| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

e le stime inferiori delle successive costante di confronto $1^{\# \in (-1, 1)}$ diverge positivamente.

La convergenza è però totale su ogni intervallo del tipo $[-q, q]$, Page 9 of 184
 dato che $\sup_{x \in [-q, q]} |x^m| = q^m$ e $\sum_{m=0}^{+\infty} q^m$ converge poiché è such' una
 serie geometrica di ragione $0 \leq q < 1$.

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2|x|} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ quindi converge $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

su quali intervalli la convergenza è totale?

Se $x > 0$ e $|x| \geq \alpha$ allora $\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{n^2|x|} \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^2}$. Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^2} < +\infty$

la convergenza è totale su gli intervalli del tipo

$$(-\infty, -q] \cup [q, +\infty),$$

Non c'è convergenza totale in \mathbb{R} foh, infatti $\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left| \frac{1}{n^2|x|} \right| = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

dato che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2|x|} = +\infty$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^n}$ (*). Fissiamo $x \neq 0$ e applichiamo il criterio delle radice

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 |x|^n}} = \frac{1}{|x|} \cdot 1 = \frac{1}{|x|}$$

Quindi se $\frac{1}{|x|} < 1$ cioè se $|x| > 1$ la (*) converge assolutamente.

Se $|x| < 1$, (*) non converge assolutamente e dunque se $0 < x < 1$ non si converge; se $-1 < x < 0$, perimmo ancora.

$$(*) = \sum_n \frac{1}{n^2 (-(-x))^n} = \sum_n (-1)^n \frac{1}{n^2 (-x)^n}$$

Perché le successioni estratte da $(-1)^n \frac{1}{n^2 (-x)^n}$ avendo indici pari e quelli degli indici dispari convergono rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$, il termine generale della (*) cioè $(-1)^n \frac{1}{n^2 (-x)^n}$ non tende a 0 e dunque (*) non converge per $x \in (-1, 0)$.

Se $x=1$, (*) diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge
mentre $x = -1$, (*) diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ che converge.

In definitiva l'insieme di convergenza perbole è dato da

$$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) . \quad \text{Perché se } |x| > 1$$

$$\left| \frac{1}{n^2 x^n} \right| = \frac{1}{n^2 |x|^n} \leq \frac{1}{n^L}, \quad \text{la convergenza è totale sullo stesso}\newline \text{insieme.}$$

- Studiare la convergenza puntuale e totale delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{x^n} \right)$$

Calcolarne, inoltre, le somme.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{x^n} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^n$$

Sono serie geometriche

Iniziamo chi definizione delle $f_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dovendo quindi avere soddisfatte le seguenti condizioni per la convergenza puntuale

$$\begin{cases} -1 < \frac{x}{2} < 1 \\ -1 < \frac{1}{x} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 0 : \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \\ x < 0 : \begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \end{cases}$$

Quindi l'intervallo di convergenza puntuale è $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

Poiché una serie geometrica converge totalmente su ogni intervallo del tipo

$[-a, a] \subset (-1, 1)$, $0 < a < 1$, poniamo offrire che estremo
le mie (le cui somme ci dà le mie di parte) convergono totalmente su
inizio che $\mapsto [a, b] \cup [c, d]$ con $[a, b] \subset (-2, -1)$ e $[c, d] \subset (1, 2)$

Infine $\forall n \in (-2, 1) \cup (1, 2)$ la somma delle prime mie è

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \quad \text{mentre quelle delle seconde è} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \quad -1$$

↳ mi frega pusante che n parte da 1 quindi
 della somma delle mie geometriche di razione
 $\frac{x}{2}$ bisogna togliere il primo termine delle
 serie, cioè $\left(\frac{x}{2}\right)^0 = 1$. Analogamente per le seconde mie

Quindi la somma delle mie eseguite è $s(n) = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - 1 - \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right)$

$$= \frac{2}{2-x} - \frac{n}{x-1}, \quad n \in (-2, -1) \cup (1, 2)$$

- Studiare la convergenza totale su \mathbb{R} delle mie

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(1+x^2)m^2}$$

Poiché $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{(-1)^m}{(1+x^2)m^2} \right| \leq \frac{1}{(1+x^2)m^2} \leq \frac{1}{m^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \text{ converge}$$

la convergenza è totale su \mathbb{R}

- Studiare la convergenza totale su $(0, +\infty)$ della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{m^2 e^{x^2-1}}{\sqrt{x}}\right) \frac{(n-1) \log(m^2-1)}{m^{5/2}}$$

Poiché $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e $\forall x \in (0, +\infty)$

$$\left| \operatorname{arctg}\left(\frac{m^2 e^{x^2-1}}{\sqrt{x}}\right) \frac{(n-1) \log(m^2-1)}{m^{5/2}} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{(n-1) \log(m^2-1)}{m^{5/2}}, \quad \text{basta dimostrarlo}$$

che $\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(n-1) \log(m^2-1)}{m^{5/2}}$ è convergente. A tal fine mi può applicare il criterio

dagli infinitesimi. Sia $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ e studiamo $m^\alpha \frac{(n-1) \log(m^2-1)}{m^{5/2}} \sim \frac{m^{\alpha+1}}{m^{5/2}} =$
 $= \frac{1}{m^{5/2-\alpha-1}} \xrightarrow[m \rightarrow 0]{} 0$ poiché $\frac{5}{2} - \alpha - 1 > 0$. □

- Usando il termine di derivazione termina a termine calcolare le somme delle

serie $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m+1}}{2m+1}$

e $\sum_{m=2}^{+\infty} m(n-1)(-t)^{m-2}$

(Vedere le tracce di essere dell'AA 10-11 per lo sviluppo di questi due esercizi)

Ricordiamo che $\forall z \in \mathbb{C}$ il modulo di z è $|z| := \sqrt{\operatorname{Re} z^2 + \operatorname{Im} z^2}$

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Si chiama disco aperto di centro z_0 e raggio r l'insieme $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

Si chiama disco chiuso di centro z_0 e raggio r l'insieme $\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Il bordo di $D(z_0, r)$ (e anche di $\overline{D(z_0, r)}$) è la circonferenza di centro z_0 e raggio r .

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$. Un insieme $V \subset \mathbb{C}$ si dice intorno di z_0 se $\exists r > 0$ t.e.

$D(z_0, r) \subset V$. L'insieme degli intorni di un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ sarà indicato con $\mathcal{I}(z_0)$.

Sia $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una successione in \mathbb{C}

diciamo che z_n converge a $z \in \mathbb{C}$ e

scriviamo $\lim_n z_n = z$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\forall m > n : |z_m - z| < \varepsilon$

Possiamo anche considerare le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ da indicare come la somma

delle sue numeriche in \mathbb{R} le coppie di successioni in \mathbb{C} $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dove $\forall n \in \mathbb{N} s_n = \sum_{k=0}^n z_k$. (Si osservi che poiché \mathbb{C} non è un campo ordinato le nozioni di $+\infty$ e $-\infty$ non hanno senso e dunque tutte quelle di successione e serie divergenti)

FUNZIONI COMPLESSE DI VARIABILE COMPLESSA

Analsi reale studia:

$$f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n .$$

Analsi complesse studia:

$$f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Sia $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Si ricordi che \mathbb{C} è bigettivo a \mathbb{R}^2 per cui

f può anche essere vista (almeno per alcuni aspetti) come funzione da $A \subset \mathbb{R}^2$ in \mathbb{R}^2 .

Si chiamano parte reale e parte immaginaria di $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ le componenti di f , come funzione da A in \mathbb{R}^2 , ossia le funzioni

$$\operatorname{Re} f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re}(f(z)) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im}(f(z))$$

Possiamo quindi scrivere $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ poiché $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$

Esempio: $f(z) = z_0 \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (funzione costante oli costante valore z_0);

$f(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (identità); se $k \in \mathbb{N}$, $f(z) = z^k$ (potenza di ordine k);

sia $a_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_0 z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (funzione lineare);

$f(z) = a_0 z^k$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$;

$f(z) = \bar{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (coniugio; i è la simmetria del piano rispetto all'asse dei reali)

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Ora l'ultima funzione è quella $z \mapsto \frac{1}{z\bar{z}} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$

Vediamo quali sono le sue parti reale e immaginaria

$$\text{Se } z = x + iy \text{ allora} \quad \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

e dunque le sue parti reali è le funzioni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2}$,
le sue parti immaginarie è $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \frac{-y}{x^2 + y^2}$

Poiché la topologia su \mathbb{C} definita dagli intorni introdotti sopra coincide con la topologia euclidea in \mathbb{R}^2 (una volta che abbiamo identificato \mathbb{C} con \mathbb{R}^2) , fornire tranquillamente estendere le nozioni di limite e di continuità per una funzione complessa di variabile complesse.

Sia $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se x_0 punto di accumulazione per A diciamo
che $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = b \in \mathbb{C}$ se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$\forall z \in \underbrace{D'(z_0, \delta)}_{\text{Disco buotto di centro}} \cap A : |f(z) - l| < \varepsilon$$

Disco buotto di centro

z_0 è raggiro δ

$$D'(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

Osserviamo che come per una successione non ha senso scrivere che $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = +\infty$ ($-\infty$)

ma ha senso calcolare limiti per $z \rightarrow +\infty$ o per $z \rightarrow -\infty$

Pertanto possiamo definire il limite per $|z| \rightarrow \infty$. Si consideri

$f: \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$, dove A è un insieme limitato di \mathbb{C} o $A = \emptyset$

diamo la definizione di $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = l \in \mathbb{C}$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$ tale che

$$\forall z \in (\mathbb{C} \setminus D(0, R)) \cap (\mathbb{C} \setminus A) : |f(z) - l| < \varepsilon$$

Così come ha senso dire che $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$ purché $|f|$ è una funzione REALE di variabile complesse.

Diciamo che $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è continua in $z_0 \in A$ se z_0 è un punto isolato di A oppure (caso nel caso in cui z_0 è un'accumulazione per A) se $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definizione di funzione derivabile o olomorfa in un punto

$f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, A aperto, $z_0 \in A$, f è derivabile in z_0 o, si dice anche, f è olomorfa in z_0 se

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \quad \text{Il valore di questo limite si indica con} \\ f'(z_0) \quad \text{o} \quad Df(z_0) \quad \text{o} \quad Df|_{z=z_0} \quad \text{o} \quad \frac{df}{dz}(z_0)$$

Se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in A (cioè è derivabile $\forall z \in A$) si dice che

f è DIFERENZIABILE su A

Si dimostra facilmente (come nel caso delle funzioni reali di variabile reale)

che se $f(z) = z_0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ allora $Df(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$Dz \Big|_{z=z_0} = 1, \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}.$$

Inoltre se $A \subset \mathbb{C}$ è aperto e

$f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in A$ e n \uacute{e} f, g sono derivabili in z_0
 anche $f+g$, fg , $\frac{f}{g}$ sono derivabili in z_0 e si ha
 $(g(z_0) \neq 0)$

$$D(f+g)(z_0) = Df(z_0) + Dg(z_0)$$

$$D(fg)(z_0) = Df(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) Dg(z_0)$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(z_0) = \frac{Df(z_0)g(z_0) - f(z_0)Dg(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Se A e B sono aperti di \mathbb{C} e

$f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $g : B \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(A) \subset B$. Consideriamo la

funzione composta $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $g \circ f(z) = g(f(z))$

Se $z_0 \in A$, f derivabile in z_0 , g derivabile in $f(z_0)$ allora anche

$$g \circ f \text{ è derivabile in } z_0 \text{ e si ha: } D(g \circ f)(z_0) = Dg(f(z_0)) \cdot Df(z_0)$$

Possiamo quindi descherre del principio di induzione e delle regole
 derivazione di un prodotto che $f \in \mathbb{H}$: $Dz^m|_{z=z_0} = M z_0^{m-1}$, $V_{z_0} \in \mathbb{C}$
 E quindi delle regole di derivazione di un qualsiasi,
 $\forall z_0 \in \mathbb{C}, \exists \{, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

Come nel caso di funzioni reali di variabile reale abbiamo

Prop f è olomorfa in $z_0 \Rightarrow f$ continua in z_0 .

dim $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \iff f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$, per $z \rightarrow z_0$
 dove $o(z - z_0)$ è una qualsiasi funzione di una variable reale tale che $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{o(z - z_0)}{z - z_0} = 0$

Dimostrazione

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \right) = f(z_0).$$

\downarrow \downarrow

0 0

Ter (Condizioni di Cauchy-Riemann)

$$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \Omega \quad f(z) = u(z) + i v(z)$$

\$z_0 = x_0 + iy_0 \equiv (x_0, y_0), z = x+iy \equiv (x, y)\$

\$\hookrightarrow\$ aperto in \$\mathbb{C}\$

f è derivabile in z_0 \Leftrightarrow u, v sono differenziali in z_0 e

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0) \end{cases}$$

inoltre $f'(z_0) = f'_x(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0) = u_x(z_0) - i u_y(z_0)$

Ora \Rightarrow

Dobbiamo dimostrare che le parti reali u e la parte immaginaria v di f , come funzioni delle due variabili reali sono differenziali in $z_0 \equiv (x_0, y_0)$.

Dire che u è differenziale in z_0 equivale a dire che u ha derivate parziali $u_x(x_0, y_0)$ e $u_y(x_0, y_0)$ e le seguenti uguaglianze sono vere

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$$

solve $\circ \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) = \circ (|z-z_0|)$ induce une quelque fonction ^{Page 23 of 184. ne} dans $z_0 = (x_0, y_0)$ di ordine supérieur rispetto a $|z-z_0|$ cioè

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\circ (|z-z_0|)}{|z-z_0|} = 0$$

Denotiamo $f'(z_0)$ con $a+ib$, quindi

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a+ib \iff f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \circ(z-z_0)$$

Osserviamo che $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\circ(z-z_0)}{z - z_0} = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|\circ(z-z_0)|}{|z - z_0|} = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\circ(z-z_0)}{|z - z_0|} = 0$

Quindi $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \circ(|z-z_0|)$

e cioè

$$u(z) + i v(z) = u(z_0) + i v(z_0) + (a+ib)((x-x_0) + i(y-y_0)) + \circ(|z-z_0|)$$

$$= u(z_0) + i v(z_0) + \alpha(x - x_0) - b(y - y_0) + i(b(x - x_0) + \alpha(y - y_0)) + \operatorname{Re} \phi(z - z_0) + i \operatorname{Im} \phi(z - z_0)$$

Per cui negli ultimi punti reali e parti immaginarie, si ottiene

$$u(z) = u(z_0) + \alpha(x - x_0) - b(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

$$v(z) = v(z_0) + b(x - x_0) + \alpha(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

$\operatorname{Re} \phi(z - z_0)$ e $\operatorname{Im} \phi(z - z_0)$
sono entrambe funzioni infinitamente
divezzibili superiori rispetto a
 $|z - z_0|$, cioè sono $o(|z - z_0|)$

da cui si deduisce che u e v sono differenziabili in z_0 e insomma

$$\nabla u(x_0, y_0) = (\alpha, -b) \quad \text{cioè} \quad u_x(x_0, y_0) = \alpha \\ u_y(x_0, y_0) = -b$$

$$\nabla v(x_0, y_0) = (b, \alpha) \quad \text{cioè} \quad v_x(x_0, y_0) = b \\ v_y(x_0, y_0) = \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned}}$$

Relazioni di Cauchy-Riemann

dim <=

Pur ipoteti soffriremo

$$u(t) = u(z_0) + u_x(z_0)(x-x_0) + u_y(z_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|)$$

$$\Im \sigma(z) = i \left(\sigma(z_0) + \sigma_x(t_0)(x-x_0) + \sigma_y(t_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|) \right)$$



$$f(z) = f(z_0) + [u_x(z_0) + i \sigma_x(z_0)](x-x_0) + [u_y(z_0) + i \sigma_y(z_0)](y-y_0) + o(|z-z_0|)$$

$$= f(z_0) + [u_x(z_0) + i \sigma_x(z_0)](x-x_0) + [-\sigma_x(t_0) + i u_x(z_0)](y-y_0) + o(|z-z_0|)$$

$$= f(z_0) + \underbrace{(u_x(z_0) + i \sigma_x(z_0))((x-x_0) + i(y-y_0))}_{\text{green box}} + o(z-z_0)$$

$$= f(z_0) + (u_x(z_0) + i \sigma_x(z_0))(z-z_0) + o(z-z_0)$$

$f'(z_0)$ è quindi uguale a $u_x(z_0) + i \sigma_x(z_0)$ e $u_x(z_0) - i u_y(z_0)$

Alcuni esempi di funzioni che non sono olomorfe

- $f(z) = \bar{z}$

$$f(x,y) = x - iy \quad \text{cioè} \quad u(x,y) = x \quad \text{e} \quad v(x,y) = -y$$

$$\cdot \quad u_x(x,y) = 1 \quad v_y(x,y) = -1 \quad v_y(x_0) \neq u_x(x_0)$$

cioè $f(z) = \bar{z}$ non è olomorfa in alcun punto di \mathbb{C}

- $f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ma $f(\mathbb{C}) = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2; \quad v(z) = \operatorname{Im} f(z) = 0$$

$$u_x(x,y) = 2x \neq v_y(x,y) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$u_y(x,y) = 2y \neq -v_x(x,y) = 0 \quad \forall y \neq 0$$

u e v sono differenziali su \mathbb{C} ma l'unico punto dove le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte è $(0,0)$ (che è quindi l'unico punto dove $f(z) = |z|^2$ è olomorfa).

• $f(z) = \operatorname{Re} z$ con $f(x,y) = x$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$

$$u(x,y) = x \quad u_x(x,y) = 1 \neq v_y(x,y) = 0$$

$$\Im(x,y) = 0$$

$f(z) = \operatorname{Im} z$ cioè $f(x,y) = y$ $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$

$$u(x,y) = 0 \quad u_x(x,y) = 0 \neq v_y(x,y) = 1$$

Quindi $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \mapsto \operatorname{Im} z$ non sono domande in alcun punto

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Con il simbolo $H(\Omega)$ denoteremo l'insieme di tutte le funzioni domande su Ω .

Oss Sia Ω aperto connesso, $f \in H(\Omega)$ e $f'(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$
allora f è costante.

D'altra parte poiché $f'(z) = u_x(z) + i v_x(z)$,

$f'(z) = 0 \iff u_x(z) = 0 = v_x(z)$. Dalle condizioni di Cauchy-Riemann, allora, anche $u_y(z)$ e $v_y(z)$ sono nulle e quindi u e v sono funzioni definite sull'aperto convesso $\Omega \subset \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ tali che

$$\nabla u(z) = 0 = \nabla v(z), \quad \forall z \in \Omega \quad \text{e quindi } \exists \frac{c_1}{c_2} \in \mathbb{R} \text{ tali che } u(z) = c_1 \text{ e } v(z) = c_2$$

cioè $f(z) = c_1 + i c_2, \quad \forall z \in \Omega$

Funzioni derivate non nulli sono funzioni conformi

Def

$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{C}$ si dice conforme se conserva l'ampiezza di angoli nel senso che se

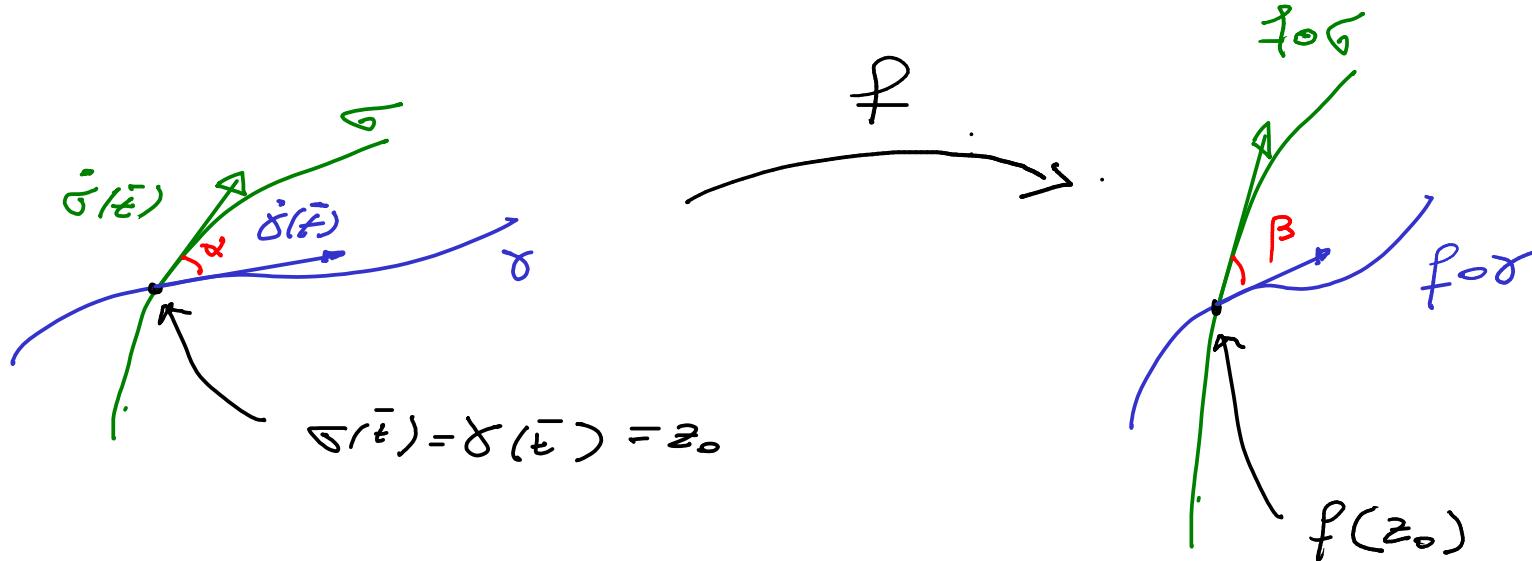
$\overline{\sigma}: (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$ sono due curve regolari $\sigma = \sigma_1 + i \sigma_2$ e $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + i \bar{\sigma}_2$

che si intersecano in un punto $\bar{t} \in (\alpha, \beta)$, cioè $\sigma(\bar{t}) = \bar{\sigma}(\bar{t}) = z_0 \in \Omega$, detto α l'ampiezza dell'angolo da esse individuato

(si tratta dell'angolo formato dai vettori tangenti $\dot{\sigma}(t)$ e $\dot{\bar{\sigma}}(t)$)

e β quella dell'angolo individuato dalle curve $f \circ \sigma$ e $f \circ \bar{\sigma}$

allora $\alpha = \beta$



Nel caso in cui $f \in H(\Omega)$ e $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$ abbiamo

$$(f \circ \gamma)'(\tilde{t}) = f'(\gamma(\tilde{t})) \cdot \dot{\gamma}(\tilde{t}) = f'(z_0) \cdot \dot{\gamma}(\tilde{t})$$

$$(f \circ \sigma)'(\tilde{t}) = f'(\sigma(\tilde{t})) \cdot \dot{\sigma}(\tilde{t}) = f'(z_0) \cdot \dot{\sigma}(\tilde{t})$$

Quindi i vettori tangenti alle curve $f \circ \gamma$ e $f \circ \sigma$ nel punto $f(z_0) = f(\gamma(\tilde{t})) = f(\sigma(\tilde{t}))$ sono dati dal prodotto dello stesso numero complesso non nullo $f'(z_0)$ per i vettori tangenti alle curve γ e σ nel punto $z_0 = \gamma(\tilde{t}) = \sigma(\tilde{t})$.

Poiché il prodotto di un numero complesso $a + bi$ opera su ogni altro numero complesso $c + di$ moltiplicandolo o comprendendolo $|b|$ di me fattore uguale a $|a|$ e ruotandolo b in senso antiorario.

di un angolo di ampiezza $\text{Arg}(\alpha)$, deduciamo che
l'angolo α tra $\gamma(\bar{t})$ e $\sigma(\bar{t})$ è uguale all'angolo
 β fra $(f \circ \gamma)'(\bar{t})$ e $(f \circ \sigma)'(\bar{t})$ dato che questi vettori
si ottengono dai precedenti moltiplicando per $f'(z_0)$.

FUNZIONI ARMONICHE

Supponiamo che $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, sia olomorfa e di classe C^2 su Ω .
 (cioè la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono funzioni di classe C^2 su Ω)
 (notiamo a breve che se f è olomorfa su Ω , non solo è C^2 ma è anche
 analitica su Ω e quindi è di classe C^∞)

Dalle relazioni di Cauchy-Riemann otteniamo che $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ e
 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ cioè le parti reali e le parti immaginarie sono funzioni
armoniche (una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, si dice armonica su Ω se $\Delta f = 0$
 in Ω , dove nel caso in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$)

Infatti poiché $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ derivando a sinistra i membri delle prime
 equazioni rispetto a x e a destra quelle relative alle seconde rispetto a y ottengono
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ ma per il teorema di Schwartz $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

Def Una funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa su \mathbb{C} si dice interna.

Ad esempio $f(z) = az^m$, $a \in \mathbb{C}$.

Sia $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ e consideriamo le serie di funzioni

(*) $\sum_m q_m z^m$, le funzioni che definiscono tali serie sono $z \in \mathbb{C} \mapsto q_m z^m \in \mathbb{C}$

(*) si chiama serie di potenze di coefficienti $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ (e centro 0)

(Possiamo anche considerare $\sum_m q_m (z-z_0)^m$, $z_0 \in \mathbb{C}$: in questo caso il centro delle serie non è 0 ma z_0 ; è chiaro che ponendo $W = z - z_0$ tale serie si riduce ad una di centro 0).

Le nozioni di convergenza puntuale, in modulo, uniforme, totale su un $A \subseteq \mathbb{C}$ per una serie come (*) sono completamente analoghe

a quelle viste per le serie di funzioni reali di variabile reale

Per cui dire che (*) converge in $\bar{z} \in \mathbb{C}$ significa

che la serie numerica in $\sum_{m=0}^{+\infty} q_m \bar{z}^m$ converge cioè la somma delle somme parziali $s_m(\bar{z}) = \sum_{k=0}^m q_k \bar{z}^k$ converge ad un numero $s(\bar{z}) \in \mathbb{C}$

E (*) converge per ogni $\bar{z} \in A \subseteq \mathbb{C}$ si dice che (*) converge puntualmente su A e la funzione $s: A \rightarrow \mathbb{C}$, $s(\bar{z}) = \lim_n s_n(\bar{z})$ si chiama somma

Si dice che (*) converge in modulo su A se $\forall \bar{z} \in A$

le cui numerose in $\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m \bar{z}^m| \left(= \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| |\bar{z}|^m \right)$ converge

si dice che (*) converge uniformemente su A ad $s: A \rightarrow \mathbb{C}$ se le successione (di funzioni complesse di variabili complesse)

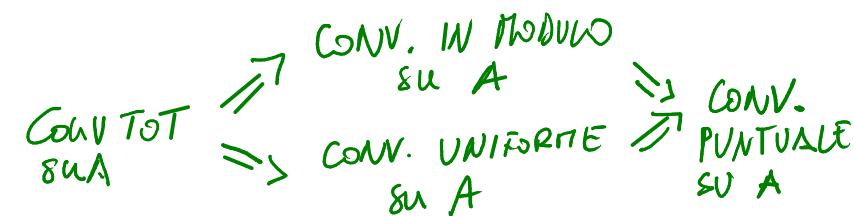
delle somme parziali $\{s_n\}$ converge uniformemente e cioè se:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists r \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > r : |s_n(z) - s(z)| < \varepsilon, \forall z \in A$

Infine (*) converge totalmente su A se $\exists \{c_n\} \subset [0, +\infty)$

tale che 1) $|a_n \bar{z}^n| \leq c_n \quad \forall z \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge

Ovviamente anche per le serie di potenze in \mathbb{C} si ha



d'insieme di convergenza principale di una serie di potenze non è vuoto, in quanto contiene il centro (quunque sia z_1)

Teo 1

Se $z_1 \in \mathbb{C}$ è un punto in cui (*) converge (cioè $\sum a_n z_1^n \in \mathbb{C}$) allora (*) converge in modulo in ogni numero complesso z t.c. $|z| < |z_1|$

Dtt.

Sia $z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z| < |z_1|$. Proviamo che la serie di moduli della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, e cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z|^n$, converge

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n$ converge, il suo termine generale tende a 0

perché $a_n z_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Quindi definitivamente $|a_n z_1^n| < 1$.

$$\text{Per cui } \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z_1|^n \frac{|z|^n}{|z_1|^n} <$$

$< \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{z}{z_1} \right|^n$ che converge in quanto serie geometrica di

$$\text{ragione } \left| \frac{z}{z_1} \right| < 1$$



immette su cui (*) converge
se converge in z_1

Def

$$\text{Sia } \rho = \sup \{ |z| : z \in \mathbb{C}, (\ast) \text{ converge} \}$$

ρ indica raggio di convergenza di (\ast) mentre $D(0, \rho)$ si chiama disc di convergenza.

(Nel caso in cui il centro della serie è $z_0 \neq 0$,
 $\rho = \sup \{ |z - z_0| : z \in \mathbb{C}, \sum_n q_n (z - z_0)^n \text{ converge} \}$,

mentre il disco di convergenza è il disco $D(z_0, \rho)$ di centro z_0 e raggio ρ)

Oss 1 $D(0, \rho) \subset B :=$ insieme di convergenza puntuale di (\ast)

infatti per definizione, $z \in D(0, \rho) \Leftrightarrow |z| < \rho$. Supponiamo che $z \notin B$ allora (\ast) non converge in z

Ogni numero complesso \bar{z} avrà uno stesso soddisfacente

$|z| < |\bar{z}| < \rho$ (altrimenti per il teorema precedente (\ast) convergerebbe in \bar{z})
e dunque per come è definito deve essere

$$\rho \leq |z| < \rho !!$$

Oss 2 $B \subset \overline{D(0, \rho)} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho \}$

infatti se $z \in B$ allora $|z| \leq \rho$ per definizione di raggio di convergenza

Oss 3

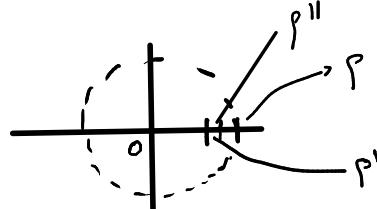
Notendo insieme il teorema sopra e l'osservazione 1 si ha che $\sum_m a_m z^m$ converge in modulo su $D(0, \rho)$.

Convergenza totale (e uniforme sulle srie di potenze)

(*) $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$; se ρ è il raggio di conv. , allora le srie (*) converge totalmente (e quindi uniformemente) in $\overline{D(0, \rho')}$, $\forall \rho' < \rho$

dimo

Può ρ'' tolere $\rho' < \rho'' < \rho$



$\bar{z} = \rho''$ è interno al disco di convergenza
 $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m (\rho'')^m$ converge in modulo

$$|z|^m \leq (\rho')^m < (\rho'')^m, \quad \forall z \in \overline{D(0, \rho')}$$

e quindi $|a_m z^m| \leq \underbrace{|a_m| (\rho'')^m}_{C_m} \quad \forall z \in \overline{D(0, \rho')}$

$$\text{e } \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| (\rho'')^m$$

converge in quanto $\rho'' \in D(0, \rho)$
 (ri ricordi l'osservazione 3) ■

Tesimi per il calcolo del raggio di convergenza

Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ (*)

Teorema

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in [0, +\infty]$

Allora $\rho = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{se } l \in (0, +\infty) \\ +\infty & \text{se } l = 0 \quad (\text{cioè il raggio di convergenza è uguale a } \infty) \\ 0 & \text{se } l = +\infty \quad (\text{ma (*) converge solo nel centro}) \end{cases}$

Teorema 2

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ allora $\rho = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{se } l \in (0, +\infty) \\ +\infty & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$

DIM Teorema 1 Senza失ere le generalità delle dimostrazioni possiamo supporre che $z_0 = 0$

Sia $\bar{z} \in \mathbb{C}$ e si consideri la serie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \bar{z}^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |\bar{z}|^n. \quad \text{Applichiamo il criterio del confronto}$$

per studiarne il carattere : $\frac{|a_{n+1}| |\bar{z}|^{n+1}}{|a_n| |\bar{z}|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |\bar{z}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l |\bar{z}|$

CONVERGE SE

< 1

cioè se $\ell = 0$: $\forall \bar{z} \in \mathbb{C}$ otto che $0 < |\bar{z}| = 0 < 1$

Se $\ell \in (0, +\infty)$ per: $|\bar{z}| < \frac{1}{\ell}$. Per cui (*) converge nel

disco di centro 0 e raggio $\frac{1}{\ell}$. Dunque $\frac{1}{\ell} \leq \rho$.

Supponiamo che sia $\rho > \frac{1}{\ell}$; esiste quindi $\bar{z}_1 \in \mathbb{C}$ con $\frac{1}{\ell} < |\bar{z}_1| < \rho$

Poiché $\bar{z}_1 \in D(0, \rho)$ $\sum_m q_m \bar{z}_1^m$ converge in modulus; allo stesso tempo abbiamo: $\lim_m \frac{|q_{m+1} \bar{z}_1^{m+1}|}{|q_m \bar{z}_1^m|} = \lim_m \frac{|q_{m+1}|}{|q_m|} |\bar{z}_1| = \ell \cdot |\bar{z}_1| > 1$ quindi

$\sum_n |q_n \bar{z}_1^n|$ non converge!. Dunque non può essere $\rho > \frac{1}{\ell}$ e quindi $\rho = \frac{1}{\ell}$.

Infine se $\ell = +\infty$, $\ell |\bar{z}| = +\infty$ (nel senso dei limiti) qualunque $\bar{z} \in \mathbb{C}$ è ovunque in questo caso la (*) converge solo nel centro cioè $\rho = 0$.

(le stime del termine 2 è sul tutto analogo e basata sul criterio della radice)

OSS

Sui punti del bordo del disco di convergenza la serie può convergere o meno e se converge può non convergere in modulus.

Teatore di Abel

Si consideri la serie di potenze

$$(*) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ e sia } \rho > 0 \text{ raggio di convergenza}$$

Sia $\bar{z} \in \partial D(0, \rho)$.

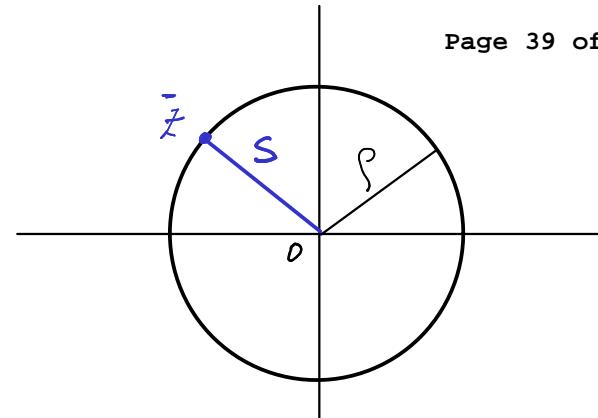
Se $(*)$ converge in \bar{z} allora $(*)$ converge uniformemente nel segmento
di estremi 0 e \bar{z}

Nel caso di una serie di potenze in \mathbb{R} il teorema di Abel diventa:

$$(**) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R}, \text{ se } \rho > 0 \text{ il raggio di convergenza, } (-\rho, \rho) \text{ intervallo di convergenza}$$

Se $(**)$ converge in $-\rho$ (risp. ρ) , $(**)$ converge uif. su
ogni intervallo del tipo $[-s, b]$ con $b < \rho$ (risp. $[a, s]$ con $a > -\rho$)

Se $(**)$ converge in $-\rho$ e in ρ , $(**)$ converge uif. in $[-\rho, \rho]$.



Esempi di serie di potenze

- Serie esponenziale : $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}$ (*)

$$\rho = +\infty \text{ dato che } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n! \cdot (n+1)} = 0$$

Quindi (*) converge puntualmente e in modo lento su \mathbb{C} e converge totalmente su ogni sottinsieme compatto di \mathbb{C} .

- $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ (è detta serie binomiale)

se $m \in \mathbb{N}$:

$$\binom{m}{k} = \frac{\cancel{m!}}{k! (m-k)!} = \frac{(m-k)! (m-(k-1)) \cdot (m-(k-2)) \cdots (m-1) \cdot m}{k! (m-k)!} = \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{k!}$$

Analogamente se α non è un numero naturale positivo definisce

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(k-1))}{k!} \quad = k!(\alpha+1)$$

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \left| \frac{\cancel{\alpha} \cdot \cancel{(\alpha-1)} \cdots \cancel{(\alpha-(k-1))} \cdot (\alpha-(k+1-1))}{\cancel{\alpha} \cdot \cancel{(\alpha-1)} \cdots \cancel{(\alpha-(k-1))} \cdot \cancel{k!}} \right| = \left| \frac{\alpha-k}{k+1} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

quindi $\rho = 1$.

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ (*) Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$

converge su $(-1, 1)$ e converge uniformemente su $[-\alpha, \alpha]$, con $0 < \alpha < 1$

I punti sul bordo dell'intervallo di convergenza

in questo caso sono -1 e 1

per $x = -1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

per $x = 1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$; quindi (*) converge puntualmente in $[-1, 1]$

Per il teorema di Abel la convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[-1, a]$ con $0 < a < 1$.

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\gamma = 1$, intervallo di convergenza $(-1, 1)$

Per $x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \in \mathbb{R}$;

per $x = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$. L'insieme di convergenza è l'intervallo $[-1, 1]$.

In realtà poiché $\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$

la convergenza è totale e uniforme su $[-1, 1]$

Supponiamo che $\forall t \in (-1, 1)$ $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$.

Inoltre la convergenza di quest'ultima serie è totale e quindi uniforme su ogni intervallo del tipo $[-\alpha, \alpha]$ con $0 < \alpha < 1$. Possiamo quindi applicare il teorema di integrazione termine a termine ottenendo $\forall x \in (-1, 1)$

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (\square)$$

Poiché nel punto $x=1$ la serie (\square) converge, per il teorema di Abel la convergenza di (\square) è uniforme in ogni intervallo del tipo $[-1+\varepsilon, 1]$ con $\varepsilon > 0$. Detto che la somma deve essere continua su $[-1+\varepsilon, 1]$ (in questo c'è convergenza uniforme e la serie è una serie di funzioni continue)

e quindi anche in 1, ottieniamo che, chiamate f la somma

$\lim_{X \rightarrow 1} f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{X \rightarrow 1} \log(1+X) = \log(2)$

Tenere presente che $f|_{[-1+\varepsilon, 1]}(x) = \log(1+x)$

\parallel

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Possiamo riscrivere così

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{K-1}}{K}$$

Cioè $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

- Determinare raggio di convergenza e stabilità il carattere degli estremi dell'intervallo di convergenza delle serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(3 + \frac{1}{n})^n}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(3 + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$$

Quindi l'intervallo di convergenza è $(-3, 3)$.

Per $x = 3$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(3 + \frac{1}{n})^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\frac{3}{1 + \frac{1}{n}})^n}.$$

Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{3}{1 + \frac{1}{n}})^{3n}/3} = \frac{1}{e^{1/3}}$

quindi converge condizionata

Ricordiamo che:
 $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$; $(1 + \frac{1}{n})^{n/a_n} \rightarrow e$ se $a_n \rightarrow +\infty$

Per $x = -3$ la serie sottostante diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(3 + \frac{1}{n})^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}})^n}$

La successione $(-1)^n \frac{1}{(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}})^n}$ per n pari converge a $(\frac{1}{e})^3$ quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(3 + \frac{1}{n})^n}$$

non converge.

Dunque l'insieme di convergenza proprio è $(-3, 3)$, la convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[-3 + \varepsilon, 3 - \varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$.

$$-\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^m \left(x - \frac{1}{2}\right)^m}{\sqrt{m+3}}, x \in \mathbb{R} ; \quad a_m = \frac{2^m}{\sqrt{m+3}} > 0 ; \quad \text{il centro delle serie è } \frac{\frac{1}{2}}{2}$$

$$\frac{2^{m+1}}{\sqrt{m+4}} / \frac{2^m}{\sqrt{m+3}} = \frac{\sqrt{m+3}}{\sqrt{m+4}} \cdot \frac{2^{m+2}}{2^m} = \sqrt{\frac{m+3}{m+4}} \cdot 2 \xrightarrow{m} 2$$

Ora quindi $p = \frac{1}{2}$ e l'intervallo di convergenza è $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (0, 1)$

Per $x = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+3}} = +\infty$ in quanto $\frac{1}{\sqrt{n+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

per $x = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} ; \quad \frac{1}{\sqrt{n+3}} \rightarrow 0 \quad \frac{1}{\sqrt{n+1+3}} < \frac{1}{\sqrt{n+3}}$

e dunque converge per il criterio di Leibniz.

L'insieme di conv. assoluta è $[0, 1]$. Si ha convergenza totale e uniforme
in ogni intervallo chiuso contenuto in $(0, 1)$. La convergenza è poi anche
uniforme (per il teorema di Abel) in ogni intervallo chiuso del tipo $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$

- Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$ converge totalmente su \mathbb{R} :

Poiché $\frac{x}{1+x^2} = y$, poniamo studiare $\sum_{n=0}^{+\infty} y^n$ (*)

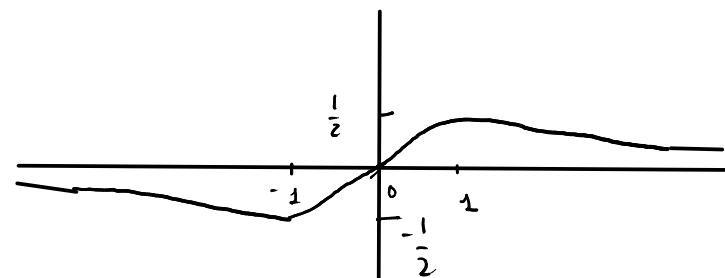
$y = \frac{x}{1+x^2}$; quindi (*) converge uniformemente $(-1, 1)$. Se da (*)
converge totalmente su ogni intervallo $[-\alpha, \alpha]$ con $0 < \alpha < 1$.

Se $\exists \alpha \in [0, 1)$ t.c. $-\alpha \leq f(x) \leq \alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}$ allora la serie originale
converge totalmente su \mathbb{R} .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} f(x) = 0$, f è dispari

$$f'(x) = \frac{1+x^2 - 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \text{ quindi } \forall x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$



SERIE DELLE DERIVATE DI UNA SERIE DI POTENZE

Consideriamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ supponendo che il suo raggio di convergenza sia $R \neq 0$. Poiché essa converge totalmente quindi uniformemente su ogni disco chiuso $D(z_0, \rho)$ con $0 < \rho < R$ e poiché le funzioni delle successioni che le definisce ($\text{cioè } \{z \in \mathbb{C} \mapsto a_n(z-z_0)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$) sono continue dal teorema sulle continue delle somme di una serie di funzioni continue.

Ottieniamo che $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ è continua su $D(z_0, \rho)$, $0 < \rho < R$

Ora $\forall z \in D(z_0, \rho)$ $\exists 0 < \rho' < \rho$ tale che $0 \leq |z-z_0| < \rho' < \rho$ e quindi f è continua su $D(z_0, \rho)$.

Le serie delle derivate di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ e cioè $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ è anch'essa una serie di potenze di centro z_0 .

Occidiamo di stabilire quale sia il raggio di convergenza della serie delle derivate.

Teor

Una qualsiasi serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza come la serie delle derivate

DIM (nel caso in cui $\exists \lim_n \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \ell \in [0, +\infty]$):

$$\text{Infatti } \lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt[M]{|\alpha_M|} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt[M]{|\alpha_M| M} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt[M]{|\alpha_M|} \underbrace{\lim_M \sqrt[M]{M}}_1 = \lim_M \sqrt[n]{|\alpha_n|}$$

Derivabilità della somma di una serie di potenze nel disco di convergenza

Consideriamo la serie di potenze in \mathbb{C} $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$ (*)
Sia f la sua somma, dunque:

$f : D(z_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, dove $D(z_0, \delta)$ è il disco di convergenza. Dal teorema

della convergenza termine a termine per le serie di funzioni segue che f è
derivabile e f' è la somma della serie delle derivate

In quanto somma di una serie di potenze f' è continua su $D(z_0, \delta)$

Iterando questo ragionamento ottieniamo che $f \in C^\infty(D(z_0, \delta))$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2}$$

$$f'''(z) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) a_n (z - z_0)^{n-3}, \quad \dots, \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(k-1)) a_n (z - z_0)^{n-k}$$

Velutando la serie qui sopre in $z = z_0$ otteniamo

$$f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(z_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2, \dots,$$

$$f^{(k)}(z_0) = \underbrace{k(k-1)(k-2)\cdots 1}_{\text{fattori}} \cdot a_k = k! a_k$$

Riepiloghiamo quanto ottenuto: $k!$

Se f è la somma di una serie di potenze avente centro di convergenza $D(z_0, r)$

necessariamente $f \in C^\infty(D(z_0, r))$

$$\text{e } a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \text{quindi} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

Def funzione analitica

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Si dice $z_0 \in \Omega$. Si dice che f è analitica in z_0 se $\exists r > 0$ tale che $\forall z \in D(z_0, r)$, $f(z)$ è la somma di una serie di potenze di centro z_0 . Poiché i coefficienti $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ di una serie di potenze sono individuati dai coefficienti che le fanno e le moltiplicano successive sommando nel centro delle relazioni $z_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$, abbiamo quindi

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m, \quad \forall z \in D(z_0, r).$$

questa serie viene detta serie di Taylor di f di centro z_0 (quando $z_0 = 0$ si chiama serie di MacLaurin)

Si dice che f è analitica in $A \subseteq \Omega$, A aperto se f è analitica in ogni punto di A .

Definizioni analoghe si danno anche nel caso di funzioni reali di variabili reali $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Ricordiamo la formula di Taylor con il resto di Lagrange per una funzione

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in (a, b)$ e supponiamo che f sia derivabile

n volte in x_0 allora \exists una funzione $R_n(x)$ tale che $\forall x \in (a, b)$:

$$f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m + R_n(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^m} = 0$$

Se f è sufficientemente regolare (basta ad esempio che

f sia di classe C^{m+1} su (a, b)) allora

$\forall x \in (a, b) \quad \exists c \in (x_0, x) \quad (c \in (x, x_0), \text{ se } x < x_0)$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}}$$

← Resto di Lagrange

È naturale chiedersi se per una funzione di classe C^∞ su (a, b) si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \text{ in un intorno di } x_0; \text{ cioè è naturale}$$

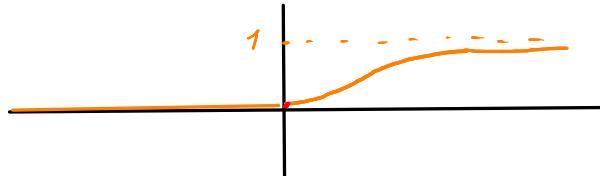
chiedersi se $f \in C^\infty(a, b)$ è analitica in (a, b) ovvero, equivalentemente, se f è la somma della propria serie di Taylor di centro x_0 , $\forall x \in (a, b)$

In generale la risposta è NO:

Cioè non tutte le funzioni di classe C^∞ sono la somma delle proprie serie di Taylor.

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma non è la somma delle proprie serie di Taylor

$$\text{dove } f(x) = 0 = f(0), \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{e}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e quindi di nuovo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x)$ quindi f
 è derivabile 2 volte in 0 e

$f''(0) = 0$. In modo analogo ci convinziamo che

$\forall n \in \mathbb{N}$, f è derivabile n volte in 0 e $f^{(n)}(0) = 0$

Dunque $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{M=0}^{+\infty} \frac{f^{(M)}(0)}{M!} x^M = \sum_{M=0}^{+\infty} 0 \cdot x^M \equiv 0 \quad \text{ma per } x > 0 \quad f \text{ non è}$$

costante oh costanti valore 0 quindi non è la somma della propria serie di MacLaurin
 (condizione sufficiente perché $f \in C^\infty(a,b)$ sia analitica in (a,b))

Teor Sia $f \in C^\infty(a,b)$. Se esiste $M > 0$ t.c $\sup_{x \in (a,b)} |f^{(M)}(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora f è analitica in (a,b) . Precisamente qualsiasi $x_0 \in (a,b)$
 e $\forall x \in (a,b)$, $f(x)$ è la somma della propria serie di Taylor di centro x_0

dimo

Dalle formula di Taylor, poiché $f \in C^\infty(a,b)$, sappiamo che

$$\forall m \in \mathbb{N} : f(x) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_m(x)$$

E sufficiente quindi dimostrare che $\forall x \in (a,b) : \lim_{m \rightarrow \infty} R_m(x) = 0$
dato che in tal caso

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_m \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \lim_m R_m(x) \\ &= \lim_m (S_m(x)) + \lim_m R_m(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + 0 \end{aligned}$$

Poiché poniamo usare le forme di Lagrange per il resto cioè sappiamo
che $\exists c \in (x_0, x)$ tale che $R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} (x-x_0)^{m+1}$
 $(c \in (x, x_0) se x < x_0)$

abbiamo: $|R_m(x)| = |f^{(m+1)}(c)| \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \leq \pi \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow[m]{} 0$

dato che $\lim_m \frac{a^m}{m!} = 0 \quad \forall a \in [0, +\infty)$

• $f(x) = e^x \quad D^k e^x = e^x$. Prendo l'intervallo $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}, \alpha > 0$

$0 < D^{(n)} e^x < e^\alpha := M$ su $[-\alpha, \alpha]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dunque per quanto visto nelle lezioni precedenti $f(x) = e^x$ è analitica su $[-\alpha, \alpha]$ e quindi, dato che α è stato scelto arbitrariamente, su \mathbb{R} . In particolare e^x è analitico in 0 e dunque otteniamo:

$$(*) \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in [-\alpha, \alpha] \quad \rightarrow \text{nuovamente dato che } \alpha \text{ è stato scelto arbitrariamente la (*) vale su } \mathbb{R}.$$

• $e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet \sin x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^k}{k!} - (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Analogamente

$$\bullet \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Sostituendo nella (*) x con $-x^2$, otteniamo:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} . \quad \text{Poiché le serie converge totalmente e}$$

quindi uniformemente su ogni intervallo chiuso e limitato (dato che le stesse cose è vero per le serie esponenziale), applicando il teorema di integrazione termine a termine ottieniamo

$$\begin{aligned} \text{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt \end{aligned}$$

funzione degli errori

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^x \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \end{aligned}$$

- $f(x) = \sin x$

$$D^{(k)} \sin x = \begin{cases} \pm \cos x & \text{se } k \text{ dispari} \\ \pm \sin x & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$|D^{(k)} \sin x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- $f(x) = \cos x$

$$D^{(k)} \cos x = \begin{cases} \pm \sin x, & k \text{ dispari} \\ \pm \cos x, & k \text{ pari} \end{cases} \quad \text{quindi anche per le derivate di } f(x) = \cos x$$

si ha $|D^{(k)} \cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Suggerite estremare le funzioni sono
la somma delle potenze serie di MacLaurin per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tali serie sono:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots \right)$$

$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k$, $x \in (-1, 1)$. Poiché questa serie converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-1, 1)$, usando il teorema di integrazione termine a termine ottieniamo:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

" "

$$\left[\log(1+t) \right]_0^x = \log(1+x)$$

Da cui

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad \forall x \in (-1, 1) \quad (*)$$

(e sappiamo anche che $\log(2) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h}$, cioè la (*) vale anche per $x=1$)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Sia $x \in (-1, 1)$, integrando termine a termine otteniamo

$$\int_0^n \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^n \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^n (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (*)$$

$\arctg x$

Oss per $x=1$, $(*)$ diviene

per $x=-1$, $(*)$ diviene

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ che converge per il c.d. Leibniz

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{-1}{2k+1} \quad //$$

Quindi per il teorema di Abel la serie $(*)$ converge uniformemente su $[-1, 1]$

unque, per continuità, $\arctg x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $\forall x \in [-1, 1]$ o. an.

$$\frac{\pi}{4} = \arctg 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Per $\alpha = -\frac{1}{2}$ e sostituendo x con $-x^2$ (così possibile dato che $x \in (-1, 1)$ anche $-x^2 \in (-1, 1)$)

otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 + (-x^2))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k}, \quad x \in (-1, 1)$$

e quindi integrando e applicando il teorema di integrazione termine a termine

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

Esercizi:

- Riconoscere, senza calcolo approssimato le derivate successive, le derivate parziali in 0

della funzione $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$

Poiché $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \quad \forall x \in (-1, 1)$, sostituendo x con $-x^3$ ottieniamo

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{3k}, \quad \forall x \in (-1, 1), \quad \text{quindi moltiplicando entro i numeri}$$

per x ottieniamo $\frac{x}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{3k+1}$ Quindi $\boxed{1} = D^{(7)}\left(\frac{x}{1+x^3}\right)|_{x=0} / 7!$
 da cui $D^{(7)}\left(\frac{x}{1+x^3}\right)|_{x=0} = 7!$

- Calcolare per serie l'integrale

$$\int_0^1 \sin(t^2) dt$$

$$\sin(t^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(t^2) dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 t^{4k+2} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[\frac{1}{4k+3} t^{4k+3} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{4k+3} \end{aligned}$$

CURVE, CURVE REGOLARI A TRATTI, LUNGHEZZA DI UNA CURVA, LUNGHEZZA DI UNA CURVA REGOLARE A TRATTI, ASCISSA CURVILINEA, RIPARAMETRIZZAZIONI, INVARIANZA DELLA LUNGHEZZA DI UNA CURVA REGOLARE A TRATTI RISPETTO A RIPARAMETRIZZAZIONI, INTEGRALI CURVILINEI DI I SPECIE, FORME DIFFERENZIALI E CAMPI VETTORIALI, INTEGRALE DI UNA FORMA DIFFERENZIALE, FORME DIFF. ESATTE, FORME DIFF. CHIUSE: VEDERE CAP. 4 FUSCO-MARCELLINI-SBORÒNÈ, CAP. 10 BERTSCH-DAL PASSO

Def

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Si dice supporto di γ l'immagine di γ
cioè $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$.

Si dice che γ è una curva regolare a tratti (di classe C^1), $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\exists \{t_i\}_{i \in \{0, 1, \dots, m\}}$, numeri tali da

$t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$ ($\{t_i\}_{i \in \{0, \dots, m\}}$ si dice suddivisione
dell'intervallo $[a, b]$) e $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è di classe C^k , $\forall i \in \{1, \dots, m\}$

e $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_{i-1}, t_i)$.

Derivata delle curve γ in t , anche detta
vettore velocità di γ in t . È per definizione
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\gamma(t+h) - \gamma(t))}{h}$
ed è uguale a $\dot{\gamma}_1(t) + i \dot{\gamma}_2(t)$
se $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i \gamma_2(t)$

Poiché stiamo includendo gli estremi
 t_{i-1}, t_i si intende che esistono
le derivate dx e sx, rispettivamente,
int t_{i-1} e t_i e le curve derivate

che $\dot{\gamma}^-(t_i) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\gamma(t_i + h) - \gamma(t_i)}{h} \neq \dot{\gamma}^+(t_{i-1})$ oppure che $\dot{\gamma}(t_i) = 0$.

Integrale di una curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. Supponiamo che γ sia continua, cioè γ_1 e γ_2 sono continue.

Def

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \int_a^b \gamma_1(t) dt + i \int_a^b \gamma_2(t) dt$$

Prop

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt, \quad \forall \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua}$$

Dim:

Ricordiamo le forme trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso:

$z = a+ib$; se $z \neq 0$ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, dove $r=|z|$ e θ è l'angolo principale di z
poiché $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, possiamo anche scrivere $z = r e^{i\theta}$ ← FORMA ESPONENZIALE DI z

Sarà visto $\int_a^b \gamma(t) dt$ in forma esponenziale: $\int_a^b \gamma(t) dt = \left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| e^{i\theta}$.

Quindi:

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| = e^{-i\theta} \int_a^b \gamma(t) dt = \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \int_a^b \gamma(t) dt \right)$$

dato che $\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \in \mathbb{R}$. Ora $\operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \int_a^b \gamma(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \gamma(t) \right) dt$

o dato che $\forall z \in \mathbb{C} \operatorname{Re} z \leq |Re z| \leq |z|$, si ha $\int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \gamma(t) \right) dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta} \gamma(t)| dt$

$$= \int_a^b |e^{-i\theta}| \int_a^b |\gamma(t)| dt \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$$

Integrale di una funzione complessa lungo una curva

Sia $f: \mathcal{S} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, f continua e $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$, γ regolare a tratti di classe C^1

Def

si definisce integrale di f su γ (o "lungo γ ") e si indica con

l'integrale delle curve in \mathbb{C} date da $t \in [a, b] \mapsto f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$, cioè

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

posto $g(t) = f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ e

$$f(z) = u(z) + i v(z), \text{ risulta}$$

Poiché γ è regolare a tratti esiste una suddivisione $\{t_k\}_{k \in \{1, \dots, m\}}$ tale che le curve $t \in [t_{k-1}, t_k] \mapsto f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$

sono continue, $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ e quindi possiamo definire

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

$$g(t) = (u(\gamma(t)) + i v(\gamma(t))) \cdot (\dot{\gamma}_1(t) + i \dot{\gamma}_2(t)) =$$

$$= u(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) - v(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t) + i (v(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) + u(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t)) \quad \text{e quindi}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b (u(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) - v(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t)) dt + i \int_a^b (v(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) + u(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t)) dt$$

Se consideriamo le seguenti due forme differenziali su Ω

$$w_1(x,y) = u(x,y) dx - v(x,y) dy \quad e \quad w_2(x,y) = v(x,y) dx + u(x,y) dy$$

Allora quindi $\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma w_1 + i \int_\gamma w_2$

Prop

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua e regolare a tratti

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq M \cdot L(\gamma)$$

Se $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ è regolare e tratti oltre
la lunghezza di γ è uguale a

$$M := \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))|$$

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

dim

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt = \\ &= \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt \leq M \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &= M \cdot \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = M \cdot L(\gamma) \end{aligned}$$

Sia $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ diciamo che Ω è un dominio se è un aperto connesso limitato. Diciamo che Ω è regolare se il suo bordo $\partial\Omega$ è l'unione di un insieme finito di supporti di curve regolari.

A verso positivo di $\partial\Omega$, da intendersi con $\partial^+\Omega$ è quello così definito: qualunque sia $p \in \partial\Omega$ punto in cui $\partial\Omega$ è regolare, si consideri

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ curva regolare tale che

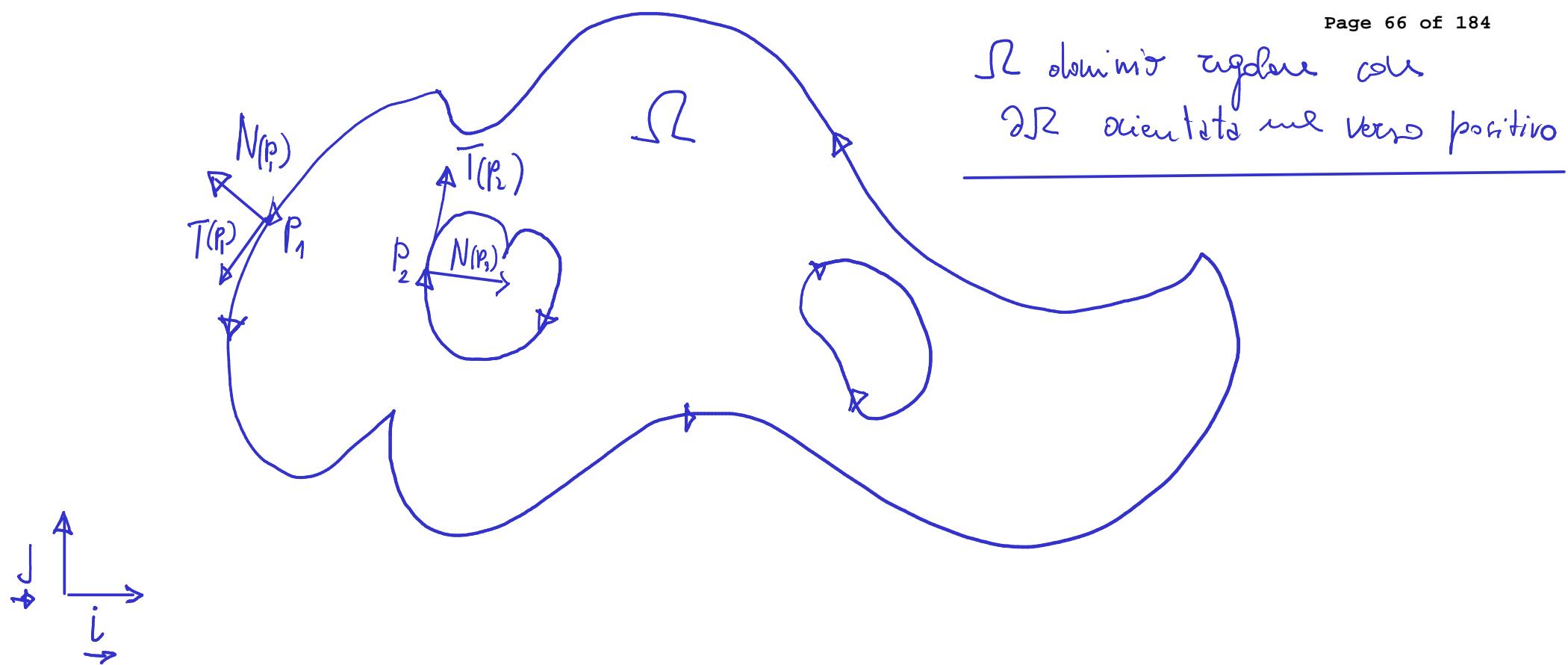
$$\gamma([a, b]) \subset \partial\Omega \text{ e } p \in \gamma((a, b)) \quad (\text{quindi esiste } \bar{t} \in (a, b) \text{ tale che } p = \gamma(\bar{t}));$$

si è $N(p)$ il versore normale a $\partial\Omega$ in p che punta verso il complementare di Ω ;

a verso positivo di $\partial\Omega$ è quello per cui γ è orientata in modo che

$$\text{punto } T(p) = \frac{\dot{\gamma}(\bar{t})}{|\dot{\gamma}(\bar{t})|} \quad \sim (\text{il versore tangente in } p \text{ a } \gamma)$$

le coppie $(N(p), T(p))$ sia CONGRUENTI a (\vec{i}, \vec{j}) , dove $\vec{i} \circ \vec{j}$ sono i versori che definiscono rispettivamente l'one dei moli e quello degli inneguigni



Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Dico in avanti

con il simbolo $H(\Omega)$ intendere l'insieme delle funzioni olomorfe su Ω

$$H(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa} \right\}$$

Teorema (CAUCHY - COURSAT)

Sia Ω un aperto di \mathbb{C} e sia

$f \in H(\Omega)$; si consideri $T \subset \Omega$ | con $\bar{T} \subset \Omega$ dominio regolare, allora

$$\int_{\partial T^+} f(z) dz = 0$$

(ovviamente poiché $\int_{\partial T^-} f(z) dz = - \int_{\partial T^+} f(z) dz$, anche $\int_{\partial T^-} f(z) dz = 0$)

Oss^t

Poniamo di convincersi del fatto che $\int_{\partial T^+} f(z) dz$ debba essere 0, facendo delle ipotesi in più rispetto a quelle contenute nel teorema: Supponiamo, infatti, che f sia di classe C^1 su Ω e che Ω sia semplicemente connesso. Allora

$$\int_{\partial T^-} f(z) dz = \int_{\partial T^+} w_1 + i \int_{\partial T^+} w_2, \text{ dove } w_1 = u dx - v dy \text{ e } w_2 = v dx + u dy$$

Se f è olomorfa, obblighi relazioni di Cauchy-Riemann, si ha:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \text{ e } u_y(x,y) = -v_x(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega \text{ e quindi}$$

w_1 è chiusa (infatti $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$) e w_2 è chiusa (infatti $v_y(x,y) = u_x(x,y)$)

Se Ω è sufficientemente comune, ω_1 e ω_2 sono esatte oltre che hanno componenti di classe C^1 e sono due forme di differentioli chiuse

e quindi $\int_{\partial T} \omega_1 = 0$ e $\int_{\partial T} \omega_2 = 0$ (oltre che ∂T è il supporto di una curva chiusa)

Oss 2 Il teorema di Cauchy - Goursat può anche essere enunciato considerando invece che T dominio regolare contenuto in Ω , ma qualsiasi curva γ chiusa in Ω orientata regolare \Rightarrow tratti che sia il bordo di un dominio con chiusura contenuto in Ω cioè se $f \in H(\Omega)$ e γ è una curva come quella qui sopra allora $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

Vogliamo ora dimostrare che

$$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow f \text{ è analitica in } \Omega$$

Ovviamente l'implicazione \Leftarrow è già nota dato che se f è analitica in Ω allora $\forall z_0 \in \Omega \exists D(z_0, \delta)$ tale che $\forall z \in D(z_0, \delta) f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$ poiché quindi f in $D(z_0, \delta)$ è la somma di una serie di potenze, è di classe C^∞ in $D(z_0, \delta)$ (e $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$). In particolare f è olomorfa, cioè olomorfa, in $D(z_0, \delta)$ e quindi anche nel punto z_0 . Poiché z_0 è stato scelto arbitrariamente, f è olomorfa su Ω

Teorema (Formule di rappresentazione di Cauchy)

$f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ omomorfica e nello stesso senso di γ una curva chiusa regolare a fronte orientata nel verso antiorario che sia il bordo di un dominio regolare $T \subset \Omega$ allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in T$$

semplice

con $\bar{T} \subset \Omega$

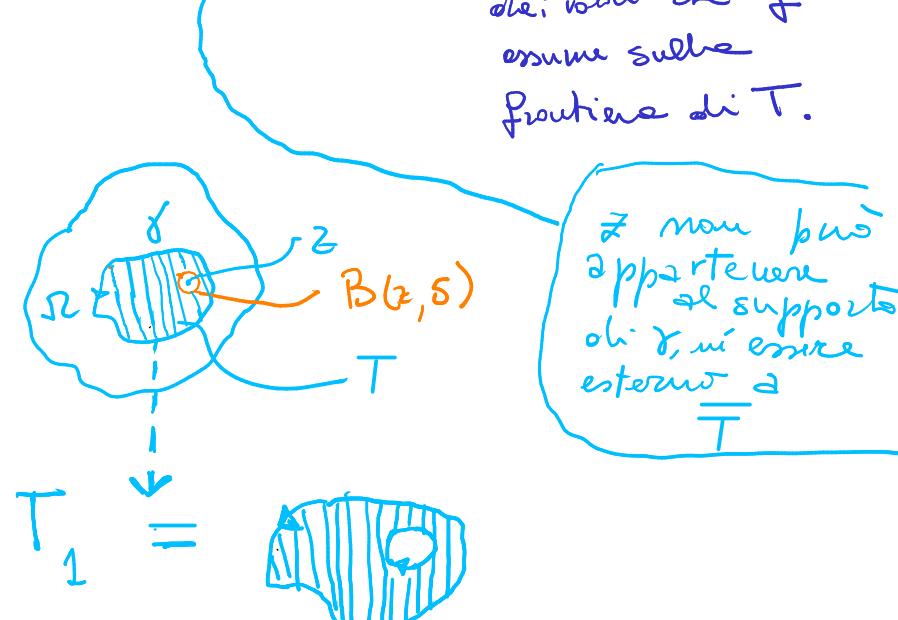
allora

i valori che una funzione omomorfa assume in T sono determinati dai valori che f assume sulla frontiera di T .

dim Consideriamo un disco di centro z e raggio δ sufficientemente piccolo in modo che $D(z, \delta) \subset T$

Sia $T_1 = T \setminus D(z, \delta)$, osserviamo che $\bar{T}_1 \subset \Omega \setminus D(z, \delta/2)$

da su $\Omega \setminus D(z, \delta/2)$, la funzione $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ è omomorfica



z non può appartenere al supporto di γ né essere esterno a \bar{T}

Dimostrazione per il teorema di Cauchy-Goursat

$$0 = \int_{\partial T_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\rho(z, \delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \Rightarrow$$

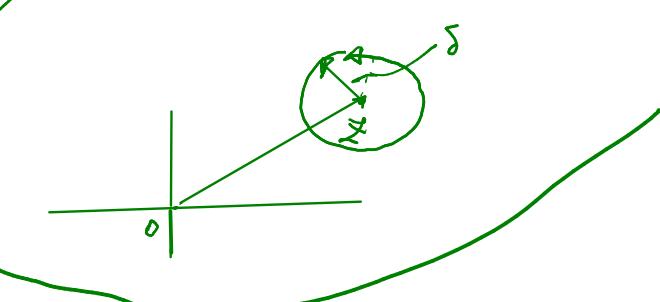
? > orientato in senso orario

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z} dz =$$

non dipende da δ !

$$\int_{C(z, \delta)}^+ \frac{f(z)}{z-z} dz =$$

by oriente verso antiorario



l'equazione di tale circonferenza orientata nel verso antiorario è

$$C(t) = z + \delta e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$" z + \delta (\cos t + i \sin t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \delta e^{it})}{z + \delta e^{it} - z} \delta ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) dt$$

quindi è anche uguale al limite del I membro per $\delta \rightarrow 0$. Valutiamo questo limite:

$$\begin{aligned} C'(t) &= D(z + \delta(\cos t + i \sin t)) = \\ &= i(\cos t + i \sin t) \\ &= \delta(i \cos t - \sin t) = \delta ie^{it} \end{aligned}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) dt = i 2\pi f(z)$$

Infatti: f è olomorfa in z e quindi è continua cioè $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(z + \delta e^{it}) = f(z)$

Dato che $w = z + \delta e^{it}$, $|w-z| = |\delta e^{it}| = \delta$ e quindi

$$w = z + \delta e^{it} \rightarrow z, \text{ per } \delta \rightarrow 0.$$

Allora per definizione di funzione continua in un punto

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta' > 0$ t.c. $\forall 0 < \delta < \delta'$: $|f(z + \delta e^{it}) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$. Dunque

$$\left| \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) dt - \int_0^{2\pi} f(z) dt \right| = \left| \int_0^{2\pi} (f(z + \delta e^{it}) - f(z)) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |f(z + \delta e^{it}) - f(z)| dt < \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi} dt = \frac{\varepsilon \cdot 2\pi}{2\pi} = \varepsilon, \forall 0 < \delta < \delta' \quad \blacksquare$$

Possiamo ora dimostrare che $f \in H(\Omega) \Rightarrow f$ analitica in Ω

Ter

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olomorfa allora f è analitica

in Ω inoltre $\forall z_0 \in \Omega$ e A curva chiusa $\frac{\text{simplice}}{\text{regolare o frattili}}$ & orientata in verso
esterno t.c. ne le faccette di un segmento T contenenti z_0 e $\text{contenuto in } \Omega$
 avente chiusura

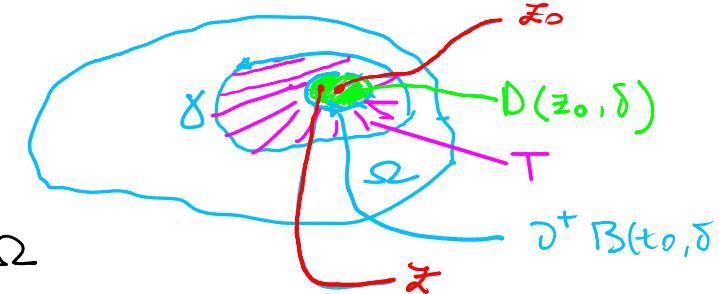
$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_T \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

per $k=0$ si riottiene

le I formule di rappresentazione
di Cauchy

ed $\exists \lambda_k \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ (ohne Abhängigkeit von z_0 !) solche

$$\forall z \in D(z_0, \delta) : f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k.$$



Poiché Ω è aperto e $z_0 \in \Omega$ $\exists \delta > 0$ tale che $D(z_0, \delta) \subset \Omega$

Si consideri una qualsiasi curva γ chiusa regolare tratta da π_1 il bordo di una domenica T che sia contenuta in S^1 e contiene $D(z_0, \delta)$

Dalle I formule chi rappresentazione abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta , \quad \forall z \in D(z_0, \delta)$$

Ore

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0 + z_0 - z_0} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{z-z_0}}$$

$$\forall z \in D(z_0, \delta) : \left\{ \begin{array}{l} \frac{z - z_0}{\bar{z} - \bar{z}_0} < 1 \\ \end{array} \right. , \text{ deo de } |z - z_0| < \delta, \text{ porq } z \in D(z_0, \delta)$$

mentre $\{z - z_0 \mid z \in S\}$ abbia le $z \in \partial T$ e $D(z_0, s) \subset T$

$$\text{Ora si ha} \quad \frac{f(z)}{z-z_0} = \underbrace{\frac{f(z)}{z-z_0}}_{\text{f'(z)}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{z-z_0}} = \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{z-z_0} \right)^k$$

Quindi:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k d\zeta$$

Possiamo integrare termine a termine poiché le serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k$ converge
globalemente e quindi uniformemente $\forall \zeta \in \partial D$ dato che $\exists 0 < a < 1$ tale che $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq a, \forall \zeta \in \partial D$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} (z - z_0)^k \left(\int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right). \quad \text{Dunque}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right)}_{\text{a.k.}} - (z - z_0)^k.$$

In fine poiché in una serie di potenze i coefficienti devono soddisfare le relazioni:
 $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ ottieniamo:

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

■

Conseguenza: se funzione f oltranzie in Ω è di classe C^∞ su Ω !

Oss1 La dimostrazione viste ci dà anche un'informazione importante sul raggio di convergenza delle serie di Taylor di f di centro $z_0 \in \Omega$. O meglio: ci dà anche, fissato $z_0 \in \Omega$, quanto può essere al massimo il raggio δ per cui $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$ (*) , $\forall z \in D(z_0, \delta)$.

Inoltre nella dimostrazione è sufficiente che il disco $D(z_0, \delta)$ sia contenuto in Ω e quindi le (*) è valido $\forall z \in \Omega$ con $|z-z_0| < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Per cui le (*) vale $\forall \delta < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ ravvisando questo obiettivo divenne che z_0 !
la distanza di un punto z_0 da un insieme X è per definizione $\text{dist}(z_0, X) := \inf_{x \in X} |z_0 - x|$.

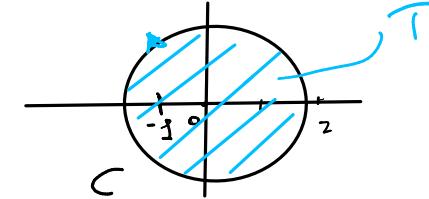
Ad esempio se sappiamo che $f \in H(C)$ allora $\forall z_0 \in C$ le (*) è vera $\forall z \in C$.

Oss2 Perché la cosa δ è arbitraria abbiamo che se γ_1 e γ_2 sono curve regolari tanto che risulta il braccio di distanza che contengono z_0 allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) \frac{dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z_0) = \int_{\gamma_2} f(z) \frac{dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$

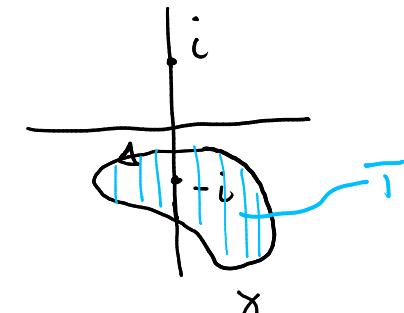
Esercizi Page 75 of 184
 - calcolare $\int_C \frac{(z^3-1)^8}{z+1} dz$, dove C è la circonferenza di centro 0 e raggio 2
 orientata nel verso antiorario

Perché $f(z) = (z^3-1)^8$ è singolare su C e -1 è
 un punto interno al disco $D(0,2)$ di cui C è il bordo



abbidiamo per le formule di Cauchy: $\int_C \frac{(z^3-1)^8}{z+1} dz = \int_C \frac{(z^3-1)^8}{z - (-1)} dz = f(-1) 2\pi i = (-2)^8 \cdot 2\pi i = 256\pi i$

- calcolare $\int_{\gamma} \frac{(z-i)^4}{(z+i)^6} dz$ (II) dove γ è la curva qui
 disegnata



$$(\square) = \int_{\gamma} \frac{(z-i)^4}{(z - (-i))^6} dz$$

$f(z) = (z-i)^4$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, è intre . Per le II formule di rappresentazione
 di Cauchy si ha

$$0 = f^{(5)}(-i) \cdot \frac{2\pi i}{5!} = \int_C \frac{(z-i)^4}{(z+i)^6} dz$$

$$\int_{\gamma} \frac{(z-i)^4}{(z+i)^5} = f^{(4)}(-i) \frac{2\pi i}{4!} = \frac{4!}{4!} 2\pi i = 2\pi i,$$

γ come nell'esercizio precedente

$$\int_C \frac{1}{(z+1)^2(z-i)^2} dz, \text{ dove } C \text{ è la circonferenza di centro } -2i \text{ e raggio } 2 \text{ orientata in verso antiorario.}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$$

$f: (\mathbb{C} \setminus \{i\}) \rightarrow \mathbb{C}$, è olomorfa

$$\int_C \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} dz = f'(-i) \frac{2\pi i}{1!} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f'(z) = \frac{-2(z-i)}{(z-i)^4} = -\frac{2}{(z-i)^3}$$

$$f'(-i) = -\frac{2}{(-2i)^3} = \frac{-2}{-8(i)} = -\frac{1}{4i}$$

Def $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ si dice zero per f se $f(z_0) = 0$

Def Sia $f \in H(\Omega)$, Ω aperto di \mathbb{C} ; $z_0 \in \Omega$ si dice zero oh ordine m per f se esiste $\exists \delta > 0$ e $g \in H(D(z_0, \delta))$ t.c. $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $\forall z \in D(z_0, \delta)$ e $g(z_0) \neq 0$

Teo Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $f \in H(\Omega)$

$z_0 \in \Omega$ zero oh ordine m per f $\Leftrightarrow f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \text{if } k \in \{0, \dots, m-1\},$
 $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

dim \Rightarrow : Sia $g \in H(D(z_0, \delta))$ tale che

$$\forall z \in D(z_0, \delta); f(z) = (z - z_0)^m g(z); \quad g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}$$

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k+m}$$

$$= \sum_{h=m}^{+\infty} a_{h-m} (z - z_0)^h \Rightarrow f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k = 0, \dots, m-1$$

$$\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = a_0 = g(z_0) \neq 0$$

$\dim \mathcal{L} =$: Poiché $f \in H(\Omega)$, f è analitica in Ω e quindi anche in z_0 .

$\exists \delta > 0$ tale che $\forall z \in D(z_0, \delta)$ si ha:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k = (z-z_0)^m \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^{k-m} \stackrel{k-m=h}{=}$$

$$= (z-z_0)^m \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{f^{(m+h)}(z_0)}{(m+h)!} (z-z_0)^h$$

sia f la somma di queste serie di potenze

f è misurabilmente definito in $D(z_0, \delta)$ perché le serie che lo definiscono deve convergere su $D(z_0, \delta)$. In quanto somma di una serie di potenze f è olomorfa

e risulta $f(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$ → è il primo coefficiente della serie

Def

$\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ è uno zero isolato per f se
 $f(z_0) = 0$ e $\exists \delta > 0$ tale che $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D'(z_0, \delta)$

Tes 2

$$\Omega \subset \mathbb{C} \text{ aperto}, \quad f \in H(\Omega)$$

$z_0 \in \Omega$ è uno zero isolato per $f \Leftrightarrow z_0$ è uno zero di ordine finito

Dimo \Rightarrow : per assurdo suppongo che sia uno zero di ordine infinito cioè

$f^{(k)}(z_0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Ma f è olomorfa in z_0 , quindi è analitica intorno a z_0

$\exists \delta > 0$ tale che $\forall z \in D(z_0, \delta)$ si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = 0 !$$

cioè f è nulla su $D(z_0, \delta)$ in contraddizione con il fatto che z_0 è uno zero isolato

\Leftarrow : se z_0 non è isolato allora $\exists \{z_n\} \subset \Omega$ t.c. $z_n \rightarrow z_0$ e $f(z_n) = 0, z_n \neq z_0 \forall n \in \mathbb{N}$

Per ipotesi sappiamo che $\exists m \in \mathbb{N}, \exists \delta > 0$ ed $\exists g \in H(D(z_0, \delta))$ tali che

$$g(z_0) \neq 0 \quad \& \quad f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad \forall z \in D(z_0, \delta)$$

g è continua in z_0 , quindi poiché $z_n \rightarrow z_0$, $g(z_n) \rightarrow g(z_0)$

Ma $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^m g(z_n)$. Poiché $z_n \neq z_0$, allora $g(z_n) = 0$
dunque $g(z_0) = \lim_n g(z_n) = 0 !$ \blacksquare

Teo (Principio di identità per le funzioni olomorfe)

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$, aperto CONNESSO ed $f, g \in H(\Omega)$

Se l'insieme dei punti su cui $f = g$ sono uguali ha almeno un punto di accumulazione

$$\text{in } \Omega \text{ allora } f(z) = g(z), \forall z \in \Omega$$

Oss1 dice che l'insieme dei punti su cui $f = g$ coincide ha almeno un punto di accumulazione in Ω equivale a dire che

$\exists \{z_n\} \subset \Omega$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}: f(z_n) = g(z_n)$ ed $\exists z_0 \in \Omega$ tale che $\begin{matrix} z_n \rightarrow z_0 \\ z_n \neq z_0, \forall n \end{matrix}$
 z_0 è un punto di accumulazione per l'insieme $A = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$

Oss2 il teorema è equivalente a :

(□) se $h \in H(\Omega)$ e l'insieme degli zeri Z_h di h ha almeno un punto di accumulazione allora $h(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$

Infatti l'enunciato (□) è congruente del teorema come subito si vede prendendo $h = f$ e $g = 0$. Viceversa se vale (□) allora il teorema è anche vero come si vede subito prendendo $h = f - g$.

Dimostriamo quindi il teorema, dimostrandolo (□) :

dim: sia z_0 punto di accumulazione di Z_h e

sia $Z_h^* := \{ z \in Z_h : z \text{ ha molteplicità infinita} \} \subset Z_h \subset \mathbb{S}$

Osserviamo che $Z_h^* \neq \emptyset$ in quanto $z_0 \in Z_h$

Infatti poiché z_0 è p.p. di accumulazione per Z_h , $\exists \{t_m\} \subset Z_h$ tale che $t_m \rightarrow z_0$, $t_m \neq z_0$; poiché f è continua $0 = f(t_m) \xrightarrow{m} f(z_0)$ e dunque z_0 è uno zero non isolato per f (quindi z_0 ha molteplicità infinita)

Se dimostriamo che $Z_h^* = \mathbb{S}$, il teorema è dimostrato.

Supponiamo allora per assurdo che $Z_h^* \neq \mathbb{S}$. avremo $\exists z_1 \in \mathbb{S} - Z_h^*$

Poiché \mathbb{S} è connesso, esiste una curva continua $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{S}$, tale che $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(1) = z_1$. sia $A = \{ t \in [0,1] : \gamma(t) \in Z_h^* \} \subset [0,1]$

dovunque $A \neq \emptyset$ dato che $0 \in A$ (dato che $\gamma(0) = z_0 \in Z_h^*$)

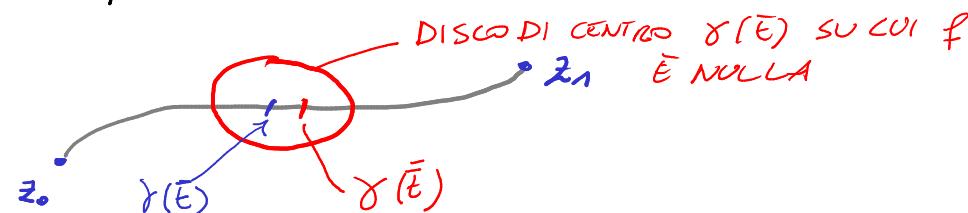
Sia $\bar{t} = \sup A$ e supponiamo che $\bar{t} < 1$.

Per definizione di estremo superiore di un insieme $\exists \{t_m\} \subset A$ t.c. $t_m \rightarrow \bar{t}$

Poiché γ è continuo, $f \circ \gamma$ è continua e quindi $0 = f(\gamma(t_m)) \xrightarrow{m} f(\gamma(\bar{t}))$

Dunque $\gamma(\bar{t})$ è uno zero non isolato per f , cioè $\gamma(\bar{t}) \in Z_h^*$.

Ma allora poiché f è studiata esiste un disco di centro $\gamma(\bar{t})$ in cui f è nulla e quindi $\exists \bar{t} > \bar{t}$ tale che $f(\gamma(\bar{t})) = 0$ e $\gamma(\bar{t})$ non è isolato



Questo è assurdo poiché $\bar{t} = \sup A$. Dunque $\bar{t} = 1$ e quindi anche

$\gamma(1) = z_1$ è uno zero non isolato di f (dato che $\exists \{t_m\} \subset A$, $t_m \rightarrow 1$

$0 = f(\gamma(t_m)) \rightarrow f(\gamma(1)) = z_1$), cioè $z_1 \in Z_h^* !!$

Funzione esponenziale in \mathbb{C}

Consideriamo la serie di potenze in \mathbb{C}

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} ; \quad \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{k!}} = 0 \Rightarrow R = +\infty$$

chiamato e^z , considero la funzione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = e^z$

In quanto somma di una serie di potenze tale funzione è analitica quindi olomorfa su \mathbb{C}

Si può dimostrare che $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

se $\operatorname{Im} z = 0$, cioè per $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \rightarrow \text{exp in campo reale!}$$

Quindi $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tale funzione è l'unica estensione

OLOMORFA SU \mathbb{C} della funzione esponenziale in campo reale. Infatti se

Supponiamo che esiste $g \neq f$ t.c. $g \in H(\mathbb{C})$ e $g|_{\mathbb{R}} = f|_{\mathbb{R}} = \exp$

Poiché g e f coincidono su $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ed \mathbb{R} ha punti di accumulazione, per il principio di identità delle funzioni olomorfe $f(z) = g(z), \forall z \in \mathbb{C}$.

Analogamente definiamo le funzioni $z \in \mathbb{C} \mapsto \sin z$, $z \in \mathbb{C} \mapsto \cos z$ estensione olomorfe delle analoghe funzioni in campo reale:

$$\sin z := \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{se } z = x \in \mathbb{R} \text{ abbiamo} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{se } z = x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

Se $\theta \in \mathbb{R}$ e consideriamo $z = i\theta$, abbiamo:

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} i^k \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta$$

dato che $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1,$
 $i^7 = -i, i^8 = 1, \dots$ e così via

Abbiamo quindi dimostrato che

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

E quindi se $z = x+iy$, $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Sia $z \in \mathbb{C}$. Consideriamo il e^{-iz}

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} i^k \frac{z^k}{k!} ;$$

$$e^{-iz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k i^k \frac{z^k}{k!}$$

Da cui segue che

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

e

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Dimostriamo ora che $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\forall z \in \mathbb{R} : \text{Sappiamo che } \sin^2 z + \cos^2 z = 1 ,$$

le funzioni $g = z \in \mathbb{C} \mapsto \sin^2 z + \cos^2 z$ e $f = z \in \mathbb{C} \mapsto 1$ sono olomorfe su \mathbb{C}

Poiché $g|_{\mathbb{R}} = f|_{\mathbb{R}}$ e \mathbb{R} ha punti di accumulazione, $f = g$ su \mathbb{C}

Dimostriamo che:

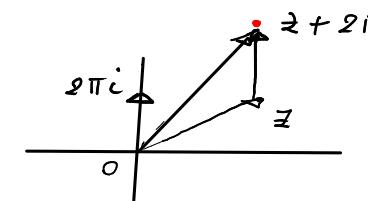
1) $\forall z \in \mathbb{C} : e^z \neq 0$. Infatti se $z = x+iy$, $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ quindi

$$|e^z| = |e^x (\cos y + i \sin y)| = |e^x| |\cos y + i \sin y| = e^x \cdot 1 \neq 0$$

(abbiamo così anche visto che $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$; quindi $z \mapsto e^z$ non è una funzione limitata dato che per $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$ si ha che $|e^z| \rightarrow +\infty$)

2) $f(z) = e^z$ è periodica di periodo $2\pi i$; infatti $e^z = e^{z+2\pi i}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ dato che

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z (1 + 0i) = e^z \cdot 1$$



3) $D e^z = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$; infatti poiché

la serie delle derivate della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{z^h}{h!} = e^z, \text{ applicando il teorema di}$$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ si dice che

operazione termine a termine ottengono quindi $D e^z = e^z$.

$$\begin{aligned} 4) D \cos z &= D \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{1}{2} (i e^{iz} - i e^{-iz}) = \frac{i}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) = \\ &= - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = - \sin z, \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$5) \text{ Analogamente, } D \sin z = \cos z, \forall z \in \mathbb{C}$$

6) le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ non sono limitate in \mathbb{C} infatti
per $z = it$, $t \in \mathbb{R}$

$$\cos(it) = \frac{e^{i(it)} + e^{-i(it)}}{2} = \frac{e^{-t} + e^t}{2} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{(e^{-t} + e^t)}{2} = +\infty$$

$$\sin(it) = \frac{e^{i(it)} - e^{-i(it)}}{2i} = \frac{e^{-t} - e^t}{2i} = \frac{e^t - e^{-t}}{2i}$$

$$e \left| \frac{e^t - e^{-t}}{2i} \right| = \left| \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right| \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow \pm\infty$$

Funzioni iperboliche in \mathbb{C}

Def

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Sono definite in \mathbb{C} . Sono ovunque e

sono definite come estensioni analitiche in \mathbb{C}
delle analoghe funzioni complesse

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Sono le uniche estensioni analitiche possibili!

$$\Delta \sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

$$\Delta \cosh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$$

$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1 \quad \text{perché se } z=x \in \mathbb{R}: (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

LOGARITMI DI UN NUMERO COMPLESSO

Pensiamo $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Quali sono i numeri $z \in \mathbb{C}$ t.c. $e^z = w$? Scriviamo w in forma esponenziale $w = |w| e^{i\arg w}$; Argomento principale di w : è l'argomento che appartiene all'intervolo $[-\pi, \pi]$

Si dà $z = x + iy$, dove deve essere:

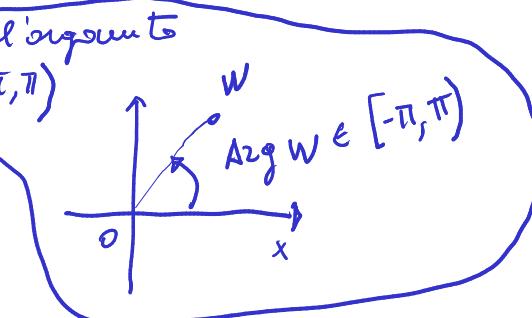
$$e^z = e^x e^{iy} = |w| e^{i\arg w} \quad \text{quindi}$$

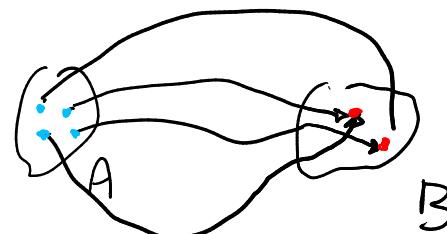
dove ovvero $e^x = |w|$, cioè $x = \log |w|$ e $y = \arg w + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Quindi $z = \log |w| + i(\arg w + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

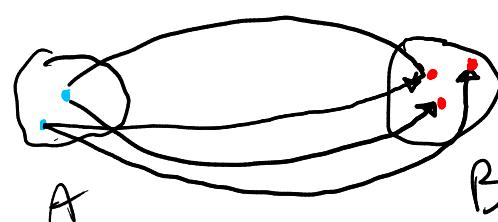
L'insieme di numeri complessi $\left\{ \log |w| + i(\arg w + 2k\pi) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ prende il nome di "logaritmo di w " e si indica col simbolo $\log w$.

Ogni elemento di tale insieme è soluzione dell'equazione nell'inconosciuto z , $e^z = w$.



$A \xrightarrow{f} B$


funzione (univoca)

 $A \xrightarrow{f} B$


funzione plurivoca

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \sqrt[n]{z}$

è plurivoca :

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \left(\frac{\operatorname{Arg} z}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k=0, \dots, n-1$

ad ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vengono associati n numeri complessi

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \operatorname{Log} z = \log |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{è plurivoca}$

ad ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ viene associato un insieme numerabile di numeri complessi

Selezione o determinazione del logaritmo

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $[\alpha - \pi, \alpha + \pi)$

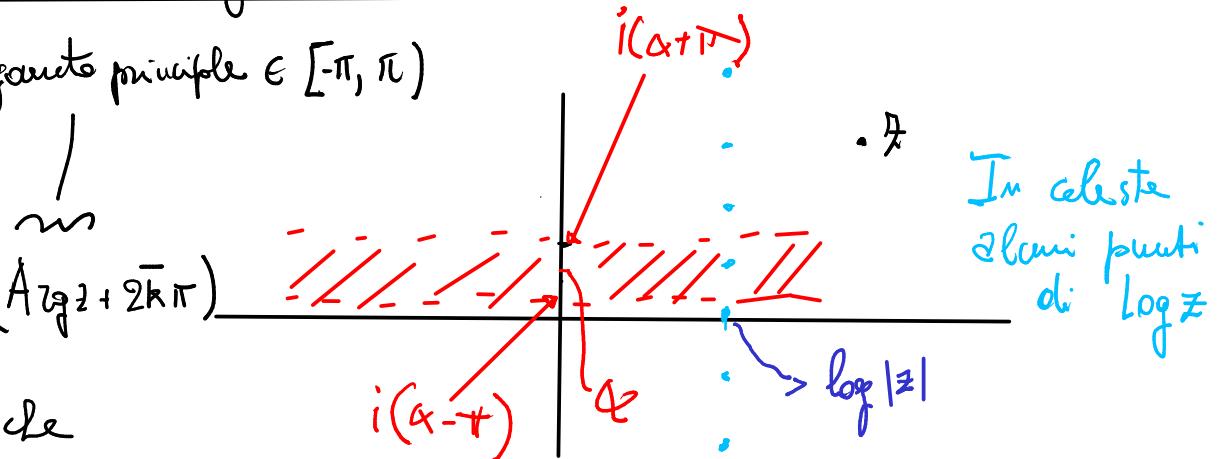
Argomento principale $\in [-\pi, \pi)$

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \text{Log}_\alpha(z) := \log|z| + i(\text{Arg} z + 2k\pi)$$

con $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\text{che } \text{Arg} z + 2k\pi \in [\alpha - \pi, \alpha + \pi)$$

Osservo che k dipende da α e $\text{Arg} z$ ma è univocamente determinato



In celeste
alcuni punti
di $\text{Log} z$

Def Si chiama determinazione principale del logaritmo quella da cui ottiene per $\alpha = 0$: $z \mapsto \text{Log}_0 z = \log|z| + i\text{Arg} z$

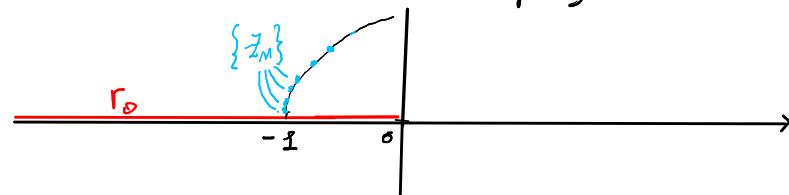
Quindi $\text{Log}_0 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ (in realtà dato che $\text{Arg} z \in [-\pi, \pi]$) ha
sue immagini in \mathbb{C} stesa in \mathbb{C}
 $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z \in [-\pi, \pi]\}$)

Log₀ è continua in $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\} := \Omega$

Infatti è evitato di non contenere nell'aperto Ω

Vediamo che non è continua sui punti della semiretta $R_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$

Prendiamo ad esempio il punto -1 (per tutti gli altri punti di tale semiretta si può ragionare in modo analogo).



$$\operatorname{Log}_0(-1) = -i\pi$$

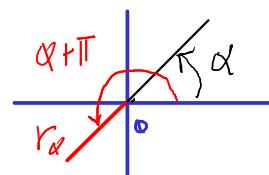
Si consideri la successione $\{z_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = e^{i(\pi - \frac{1}{n})}; \quad \text{poiché } i(\pi - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} i\pi, \quad z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

$$\operatorname{Log}_0(z_n) = \log|z| + i \operatorname{Arg} z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + i\left(\pi - \frac{1}{n}\right) = i\pi \neq -i\pi = \operatorname{Log}_0(-1)$$

Se TAGLIO del $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la semiretta $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$
allora Ω è un Ω logo è una funzione continua e olomorfa.

Analogamente se considero la selezione α del logaritmo, esse è continua e olomorfa sul primo taglio $\mathbb{C} \setminus r_\alpha$ dove r_α è la semiretta uscente da 0 individuata dall'angolo $\alpha - \pi$ (oppure $\alpha + \pi$)



Vediamo che Log_0 è olomorfa su $\Omega = \mathbb{C} \setminus r_0$
e che $D\text{Log}_0(z) = \frac{1}{z}$

$$r_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z < 0\}$$

Intanto verifichiamo che essa è l'inversa della funzione esponenziale

ristretta alla striscia $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : -\pi \leq \operatorname{Im} z < \pi\}$.

Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ allora $z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$ e $e^{\text{Log}_0(z)} = e^{\log|z| + i \operatorname{Arg} z} = e^{\log|z|} e^{i \operatorname{Arg} z} = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = z$

Sia ora $z \in S_0$, $z = x + iy$, quindi $-\pi \leq y < \pi$

$$\text{Log}_0(e^z) = \text{Log}_0(e^x e^{iy}) = \log(e^x) + iy = x + iy, \text{ dato che } |e^x e^{iy}| = e^x$$

Ora sia $z_0 \in \Omega$

$$\begin{aligned} &\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\text{Log}_0(z) - \text{Log}_0(z_0)}{z - z_0} \stackrel{W = \text{Log}_0 z}{=} \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{W - w_0}{e^W - e^{w_0}} = \\ &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{\frac{1}{e^W - e^{w_0}}}{\frac{w - w_0}{e^W - e^{w_0}}} = \frac{1}{\frac{1}{e^{w_0}}} = \frac{1}{z_0} \end{aligned}$$

Quindi per $z \rightarrow z_0$ dato che Log_0 è continua su Ω si ha che $\text{Log}_0 z \rightarrow \text{Log}_0 z_0 = w_0$

Def Siamo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w \in \mathbb{C}$. Possiamo definire la potenza di z con esponente complesso w

$$\text{Come } z^w := e^{w \text{Log}_0 z} = e^{w(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)}$$

$$\text{In particolare se } w \in (0, +\infty), z^w = e^{w \log|z|} e^{wi \operatorname{Arg} z} = |z|^w e^{i w \operatorname{Arg} z}$$

Alcune conseguenze del fatto che una funzione olomorfa è analitica
sulle I e II formule di rappresentazione di Cauchy.

Teorema di HERMITE - LIOUVILLE

Sia $f \in H(\mathbb{C})$ tale che esistono $L, R \in (0, +\infty)$ e $\nu \in [0, +\infty)$ tali che

$$|f(z)| \leq L |z|^\nu \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| > R \text{ allora}$$

f è un polinomio di grado al più $\lfloor \nu \rfloor$

parti intere dei numeri \rightarrow

Corollario (immediato)

$f \in H(\mathbb{C})$ e $\exists L > 0$ t.c. $|f(z)| \leq L$, allora f è costante

cioè se f è olomorfa e limitata su \mathbb{C} allora è costante

Dimo Dato che f è olomorfa su \mathbb{C}

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-0)^{k+1}} dz$$

dove $\gamma(t) = r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ è la frontiera, orientata in senso antiorario, del disco di centro 0 e raggio r. Devo dimostrare che

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ con } k \geq \lfloor \nu \rfloor + 1.$$

Punto $r > R$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
 |\alpha_k| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{k+1}} rie^{it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{it})|}{|r^{k+1} e^{i(k+1)t}|} r dt \\
 &\leq \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f e^{it}|^{\nu}}{r^k} dt = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^{\nu}}{r^k} dt = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{r^{k-\nu}} \int_0^{2\pi} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} 2\pi L \cdot \frac{1}{r^{k-\nu}} = \frac{L}{r^{k-\nu}}
 \end{aligned}$$

$$|\alpha_k| \leq L / r^{k-\nu} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \text{se } k > \nu.$$

Dunque $\forall k \geq [\nu] + 1 : \alpha_k = 0$ e $f(z) = a_0 + \alpha_{[\nu]} z + \dots + \alpha_{[\nu]} z^{[\nu]}$

Teoreme fondamentale dell'algебре

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ ha almeno uno zero in \mathbb{C}

Conseguenze

Sia $z_1 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_1) = 0$. Poiché $p = p(z)$ è analitica in \mathbb{C} , $p(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_1)^k$.
Ma p è un polinomio di grado n , quindi $a_k = 0 \quad \forall k \geq n+1$ e dunque

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{k=0}^n a_k (z - z_1)^k = a_0 + a_1 (z - z_1) + \dots + a_n (z - z_1)^n = a_1 (z - z_1) + a_2 (z - z_1)^2 + \dots + a_n (z - z_1)^n = \\ &= (z - z_1) q(z) = (z - z_1) (z - z_2) h(z) = \dots = (z - z_1) \dots (z - z_n) \cdot a_n \\ &\quad \hookrightarrow z_2 \text{ zero del polinomio, di grado } n-1, \quad q = q(z). \end{aligned}$$

Cioè ogni polinomio p di grado n ha n zeri in \mathbb{C} (NON NECESSARIAMENTE DISTINTI!)

ed è uguale al prodotto di n polinomi (si dice che "si fattorizza")

di grado 1 del tipo $z - z_k$, dove z_k è uno degli n zeri del p , per il coefficiente di z^n

Dim

Per esempio supponiamo che $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Consideriamo

$$h(z) = \frac{1}{p(z)} \quad \text{Quindi } h \in H(\mathbb{C})$$

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |p(z)| = +\infty \Rightarrow \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |h(z)| = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0$$

Quindi dalle definizioni di limite per $|z| \rightarrow +\infty$, per $\varepsilon = 1$

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| > \delta : |h(z)| < 1$$

$$\text{Se } L = \max \left\{ 1, \max_{z \in \overline{D(0, \delta)}} |h(z)| \right\}.$$

Quindi $|h(z)| \leq L, \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow h \text{ è costante } \neq 0$ (dato che $h(z) = \frac{1}{p(z)}$)

quindi $p(z) = \frac{1}{h(z)}$ è anche costante, in contraddizione con l'ipotesi che

p è un polinomio di grado ≥ 1 .

Abbiamo visto che se $f = u + i v \in H(\Omega)$, Ω aperto, allora u e v sono funzioni armoniche. Ci chiediamo ora se esiste una funzione armonica $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 in Ω e armonica ($\Delta u = 0$ in Ω), esista una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa di cui u sia la parte reale.

In altri termini ci chiediamo se esiste un'altra funzione

$v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^2 in Ω , tale che v soddisfia le condizioni di Cauchy - Riemann (e quindi anche v è armonica e possiamo prendere $f = u + i v$).

Se assumiamo che Ω sia sottile semplicemente connesso, poniamo rispondere facilmente e affermativamente alle domande.

Infatti poniamo di considerare le forme differenziali di classe C^1 in Ω

$$w = -\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{dy} dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{dx} dy.$$

Poiché u è armonica $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ in Ω e quindi w è chiusa

Dato che Ω è semplicemente connesso, w è esatta. Sia
oltre $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva per w . Dov'è essere quindi

$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, cioè u, V soddisfano le
condizioni di Cauchy-Riemann.

Assegnate $u \in C^2(\Omega)$, u armonica, una funzione $v \in C^2(\Omega)$
armonica e tale che $f = u + iv$ sia olomorfa, si dice
armonica coniugata di u . Abbiamo quindi dimostrato che ogni funzione
armonica su un aperto semplicemente connesso ammette armonica coniugata

Vogliamo ora dimostrare che se $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica

$\forall z_0 \in \Omega : u(z_0) = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} u(z) ds$, dove γ è una qualsiasi

circonferenza di centro z_0 e $L(\gamma)$ è la sua lunghezza (la relazione dice
che una funzione armonica sul centro di un disco vale quanto le
sue medie integrali sul bordo dello stesso disco)

Inoltre siamo prudere $f \in H(\Omega)$ tale che $f = u + iv$ con le componenti congiunte di u . Per le formule di rappresentazione di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz , \quad \text{con } \gamma(t) = z_0 + r e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

quindi $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} \cdot ie^{it} dt =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) r dt$$

Quindi $u(z_0) + iV(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) r dt + \frac{i}{2\pi r} \int_0^{2\pi} V(z_0 + re^{it}) r dt$

da cui egualando parti reali e parti immaginarie di I e II membro otteniamo $u(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) r dt = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} u ds$.

Serie numeriche bilatero

Consideriamo una funzione $k \in \mathbb{Z} \mapsto a_k \in \mathbb{C}$ (che indicheremo con $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$)

con il simbolo $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ che indicherà srie numerica bilatero indichiamo

la funzione $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e le sue incisioni numeriche ad esse associate

$\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ e $\{s_m^-\}_{m \in \mathbb{N}}$ così definite

$s_m := \sum_{k=0}^m a_k$ e $s_m^- = \sum_{k=-m}^{-1} a_k$. $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è ovviamente la successione delle somme parziali della srie numerica in \mathbb{C}

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ mentre $\{s_m^-\}_{m \in \mathbb{N}}$ è quella delle srie numeriche in \mathbb{C}

Def $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ converge se entrambe le srie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k$ convergono. In tal

caso si ha $a =$ la somma di $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $b =$ quella di $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k$

La somma a di $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ è per definizione la somma di $a+b$ cioè

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k$$

SERIE DI LAURENT

Si dice serie di Laurent ogni serie bilatera di potenze, quindi ogni serie del tipo $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$, con $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$.
 z_0 si dice centro della serie di Laurent.

Intervale di convergenza di una serie di Laurent.

Si consideri la serie di Laurent $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$ e le serie

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (z - z_0)^k}_\text{SERIE DI POTENZE}$$

SIA R_1 IL SUO RAGGIO
DI CONVERGENZA

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_k (z - z_0)^k}_\text{SERIE DI POTENZE}$$

$$\frac{1}{z - z_0} = w$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_k w^{-k} = \sum_{h=1}^{+\infty} \alpha_{-h} w^h$$

Sia R_2 il suo raggio
di convergenza

Ora si dimostra che $\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_k (z - z_0)^k$ converge

$$\forall z \text{ t.c. } \frac{1}{|z - z_0|} < R_2 \quad \text{cioè se } |z - z_0| > \frac{1}{R_2}$$

Se fino a $\bar{z} \in \mathbb{C}$ le sue bilanze $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (\bar{z} - z_0)^k$ convergono, per definizione,

se $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (\bar{z} - z_0)^k$ converge e se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\bar{z} - z_0)^k$ conv., quindi se $\frac{1}{R_2} < |\bar{z} - z_0| < R_1$

Una qualsiasi serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ può quindi avere insieme di convergenza dato da

I) \emptyset , se $\frac{1}{R_2} > R_1$

II) se $\frac{1}{R_2} = R_1$ l'insieme di convergenza è vuoto o contiene punti sulla circonferenza di centro z_0 e raggio R_1

III) una porzione circolare se $\frac{1}{R_2} < R_1 : \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{R_2} < |z - z_0| < R_1\}$

(con l'aggiunta di eventuali punti sul bordo di tale porzione)

IV) un disco buco se $R_2 = +\infty$ e $R_1 \in (0, +\infty)$: $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R_1\}$

(con l'aggiunta di eventuali punti sulla circonferenza di centro z_0 e raggio R_1)

V) il complementare di un disco se $R_2 \in (0, +\infty)$ e $R_1 = +\infty$: $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{R_2} < |z - z_0|\}$
 (con l'aggiunta di eventuali punti sulla circonferenza di centro z_0 e raggio $\frac{1}{R_2}$)

VI) il piano buco se $R_2 = +\infty$ e $R_1 = +\infty$: $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

Consideriamo una serie di Laurent e supponiamo che converga su \mathcal{C}_{r_1, r_2} , $0 < r_1 < r_2$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \mathcal{C}_{r_1, r_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

Rispetto alle notazioni usate
le pagine precedenti $r_1 = \frac{1}{R_2}$
 $r_2 = R_1$

Si $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$, $\forall z \in \mathcal{C}_{r_1, r_2}$, la sua somma

Dimostriamo che la somma f è olomorfa in \mathcal{C}_{r_1, r_2} . Infatti

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k}_{f_1(z)} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k}_{f_2(z)}$$

f_1 è olomorfa su \mathcal{C}_{r_1, r_2} in quanto $\mathcal{C}_{r_1, r_2} \subset D(z_0, r_2)$ che è il disco di convergenza della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$ che è la somma di f_1 . Anche f_2 è olomorfa su \mathcal{C}_{r_1, r_2} . Infatti $f_2(z) = g\left(\frac{1}{w}\right)$, dove g è la somma della serie di potenze $\sum_{h=1}^{+\infty} a_{-h} w^h$ e $w = \frac{1}{z - z_0}$, cioè f_2 è composta dalla funzione g che è olomorfa su $D(0, \frac{1}{r_1})$ e dalla funzione razionale $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ che è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$; quindi f_2 è olomorfa sull'insieme dei $z \in \mathbb{C}$ tali che $\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{r_1}$ cioè $|z - z_0| > r_1$ e dunque, in particolare, è olomorfa su \mathcal{C}_{r_1, r_2} .

Oss

D'ora sappiamo nelle serie di potenze olomorfe che ogni serie di Laurent di centro z_0 è convergente sulle "bole" $\mathcal{B}_{r_1 r_2}(z_0)$

oltre in avanti $\mathcal{B}_{r_1 r_2}(z_0)$ potrà indicare:

- una cerchia circolare $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ se $0 < r_1 < r_2 < +\infty$
- l'interno delle chiusure del disco $D(z_0, r_1)$ se $0 < r_1 < r_2 = +\infty$
- il disco buco $D(z_0, r_2)$ se $0 = r_1 < r_2 < +\infty$
- il piano buco $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ se $0 = r_1 = r_2 = +\infty$

Converge tollerante (e quindi uniformemente) se ogni insieme compatto contenuto in $\mathcal{C}_{r_1 r_2}(z_0)$

Riflessione fra i coefficienti di una serie di Laurent e le somme delle stesse sui

Consideriamo una serie di Laurent $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$ e supponiamo che converge in $\mathcal{C}_{r_1 r_2}(z_0)$.

$$\text{Sia } f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \forall z \in \mathcal{B}_{r_1 r_2}(z_0)$$

Sia $m \in \mathbb{Z}$ e consideriamo

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-m}$$

Page 104 of 184

Se $r > 0$, su $r_1 < r < r_2$ e calcoliamo l'integrale di $\frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ sulle circonference $C(z_0, r)$

di centro z_0 e raggio r dirette nel verso antiorario

$$\int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} dz = \int_{C^+(z_0, r)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-m} dz ; \quad \text{poiché } C(z_0, r) \text{ è}$$

un insieme compatto contenuto in C_{r_1, r_2} , la serie di Laurent

converge uniformemente ad f sulle stesse circonference. Possiamo quindi usare il Teorema di integrazione termine a termine e ottenere:

$$\int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{C^+(z_0, r)} a_k (z-z_0)^{k-m} dz . \quad \text{Valutiamo questi integrali}$$

di questi integrali. L'equazione parametrica di $C^+(z_0, r)$ è $t \in [0, 2\pi] \rightarrow z_0 + re^{it}$, quindi

$$\begin{aligned}
 \int_{C^+(z_0, r)} a_k (z - z_0)^{k-m} dz &= \int_0^{2\pi} a_k r^{k-m} e^{it(k-m)} \cdot i r e^{it} dt \\
 &= a_k i r^{k-m+1} \int_0^{2\pi} e^{it(k-m+1)} dt = \begin{cases} a_k i r^{k-m+1} \frac{e^{it(k-m+1)}}{i(k-m+1)} \Big|_0^{2\pi}, & \text{se } k-m+1 \neq 0 \\ a_k i \int_0^{2\pi} dt, & \text{se } k-m+1 = 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{a_k i r^{k-m+1}}{i(k-m+1)} \left(e^{2\pi i (k-m+1)} - 1 \right), & \text{se } k \neq m-1 \\ 2\pi i a_{m-1}, & \text{se } k = m-1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq m-1 \\ 2\pi i a_{m-1} & \text{se } k = m-1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dunque

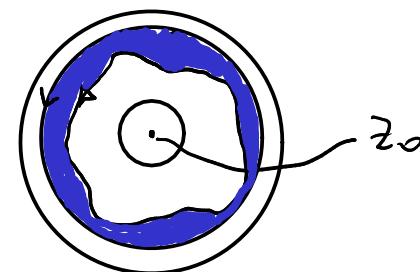
$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

Oss1

Osserviamo che se la serie di Laurent $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z)$ in
 risulta ad una serie di potenze (cioè $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$) la (*) è corretta
 con quello che già sappiamo cioè $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = (\star), \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Osserviamo anche che gli integrali sono indipendenti dal raggio r che abbiamo preso, $\text{re}(r_1, r_2)$.

NON SOLO: fissato m , $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz = a_m$, qualunque sia la curva chiusa, regolare e chiusa, avente supporto in C_{r_1, r_2} che racchiude z_0 , orientata nel verso antiorario; questo perché poniamo sempre purore sulle circonferenze $C(z_0, r)$ che racchiudono le



curve γ e considerare il dominio T individuato da tali due curve (nella figura qui sopra è il dominio colorato in blu). Perché la funzione $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}$ è olomorfa su T solo tecniche di Cauchy-Goursat ricorriamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial T} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} dt = \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} + \left\{ \int_{-\gamma} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} dt \right\} = \\ &= \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} - \left\{ \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} dt \right\} \quad \text{de cui} \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} \frac{dt}{t-z_0} = \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}} dt \end{aligned}$$

Svilupabilità in serie di Laurent di una funzione olomorfa su una
corona circolare (o su un disco buco e sul piano buco)

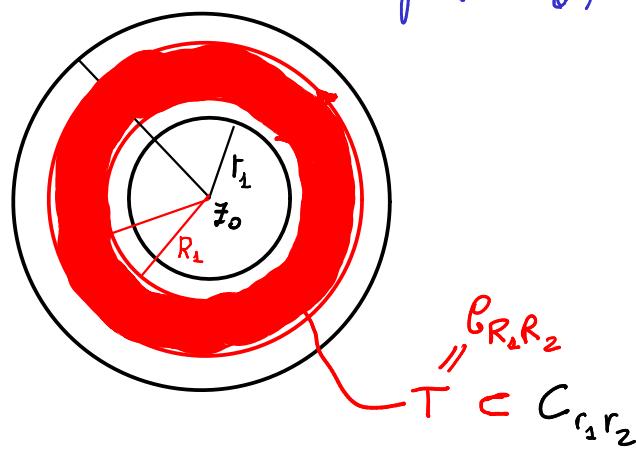
Tesi

Sia $f \in \mathcal{H}(G_{r_1 r_2}(z_0))$, $0 < r_1 < r_2 \leq +\infty$

allora $\exists \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ t.c. $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \forall z \in G_{r_1 r_2}(z_0)$

Dimo L'unicità dello sviluppo l'abbiamo già dimostrato.

infatti se f è sviluppatibile in serie di Laurent di centro z_0 , cioè se f è la somma
di due serie di Laurent, allora necessariamente i coefficienti a_k sono
dati da $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ e per ogni curva T chiusa, semplice
e regolare a tratti, orientata nel verso antiorario
che circondi z_0 e avere supporto in $G_{r_1 r_2}(z_0)$



Sia $z \in G_{r_1 r_2}$: $r_1 < |z-z_0| < r_2$. Consideriamo
 $R_1, R_2 \in (0, +\infty)$ tali che
 $r_1 < R_1 < R_2 < r_2$ e in modo che
 $R_1 < |z-z_0| < R_2$

$$\text{Per } \zeta \in \mathcal{C}(z_0, R_2) : |\zeta - z_0| > |z - z_0| \Rightarrow \frac{|\zeta - z_0|}{|\zeta - z_0|} < 1$$

$$\text{Per } \zeta \in \mathcal{C}(z_0, R_1) : |\zeta - z_0| < |z - z_0| \Rightarrow \frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} < 1$$

Per le I formule di rappresentazione di Cauchy dato che f è olomorfa in T e $\zeta \in T$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\mathcal{C}_+^{+}(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\mathcal{C}_-(z_0, R_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Su $\mathcal{C}(z_0, R_1)$ abbiamo quindi

$$\frac{1}{z - z} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{z}{1 - \frac{z - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(z - z_0)^k}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_+^{+}(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_+^{+}(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(z - z_0)^k} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathcal{C}_+^{+}(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^{k+1}} \frac{(z - z_0)^k}{(z - z_0)^k} d\zeta = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_+^{+}(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^{k+1}} d\zeta \right)}_{a_k, k \geq 0} \cdot (z - z_0)^k$$

Si tenga presente la convenzione per l'orientamento positivo delle frontiere di un dominio T come quello in rosso nelle figure !!

Su $\mathcal{C}(z_0, R_1)$ abbiamo invece

$$\frac{1}{z-z} = \frac{1}{z-z_0 + z_0 - z} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{z-z_0} \right)^h$$

Quindi

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{z-z} dz &= +\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^h}{(z-z_0)^h} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{z-z_0} \frac{(z-z_0)^h}{(z-z_0)^h} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{h+1}} \cdot \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} f(z) (z-z_0)^h dz \\ &\quad \overbrace{\qquad \qquad \qquad}^{a_k, k < 0} \\ &\quad -(h+1)=k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right) (z-z_0)^k \end{aligned}$$

Dato che come visto all'inizio delle lezione, gli integrali

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_2)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \quad e \quad \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

sono indipendenti dalle curve su cui si introduce (\Rightarrow perche' che queste circonferenze sono chiuse e regolari e tratti, che circonferenza z_0 e con supporto in $C_{R_1, R_2}(z_0)$, e ottenere

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(z_0, R_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right) (z-z_0)^k, \quad \forall z \in C_{R_1, R_2}(z_0)$$

Def Singolarità isolate per una funzione olomorfa

Page 110 of 184

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\delta > 0$ e $f: D'(z_0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}$. Si dice che z_0 è una singolarità isolata per f se $f \in H(D'(z_0, \delta))$.

Classificazione delle singolarità isolate

Se $f \in H(D'(z_0, \delta))$ (anche z_0 è una singolarità isolata per f).

Consideriamo lo sviluppo in serie di potere per f in $D'(z_0, \delta)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Def Si dice che z_0 è una singolarità eliminabile se

$$a_m = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$$

Dimostrare se z_0 è una singolarità eliminabile allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D'(z_0, \delta)$$

Sia $f \in H(D'(z_0, \delta))$

z_0 è eliminabile $\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \exists r > 0, r < \delta \in \exists L > 0 :$

$$\left| f(z) \right| \leq L \quad \forall z \in D'(z_0, r)$$
Dimo

(1)

 \Rightarrow

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D'(z_0, \delta),$$

Sia $g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0, \delta)$. Chiaro che

$f(z) = g(z), \quad \forall z \in D'(z_0, \delta)$. Inoltre g è olorofa in $D(z_0, \delta)$ (quindi è continua)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = a_0 \in \mathbb{C}$$

(2) \Rightarrow Sia $\exists l = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ olorofa per $\epsilon = 1 \quad \exists r > 0, r < \delta$, tale che

$\forall z \in D(z_0, r) : |f(z) - l| < 1$ quindi

$$|f(z) - l| \leq (|f(z)| - |l|) \leq |f(z) - l| < 1 \quad \text{ovvero} \quad |f(z)| \leq \underbrace{|l| + 1}_{= L}, \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

Per le dimostrare che se $\exists 0 < \delta < L > 0$ tali che $|f(z)| \leq L, \forall z$

Allora z_0 è una singolarità eliminabile

$$\forall n \in \mathbb{Z} : a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{(z_0, r')}}^+ \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz , \text{ dove } 0 < r' < r$$

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_{(z_0, r')}}^+ \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \max_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{f(z_0 + r'e^{it})}{(r'e^{it})^n} \right| 2\pi r'$$

$$\leq 2\pi \frac{L}{(r')^n}$$

$$\text{Se } n < 0, \lim_{r' \rightarrow 0} \frac{L}{(r')^n} = 0 \text{ e}$$

quindi otte che $|a_n|$ non dipende da r , dove avere

$$|a_n| = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

Se $f \in H(\Omega - \{z_0\})$, Ω aperto, $z_0 \in \Omega$ e z_0 è una singolarità eliminabile allora f può essere definito (si dice "estesa") anche in z_0 in modo da essere olomorfa anche in z_0 .

Tale estensione è unica ed è data da

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega - \{z_0\} \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

Ovviamente $g(z)$ è uguale a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, $\forall z$ in un opportuno disco di centro z_0 , e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ è lo sviluppo in serie di Laurent di f nello stesso disco buco.

Esempio:

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$; f è definita in $\mathbb{C} - \{0\}$ ed è ivi olomorfa. Oltre che le rapporti fra due funzioni olomorfe se $\mathbb{C} - \{0\}$. Dunque 0 è una singolarità isolata di f . Lo sviluppo di

Laurent di centro 0 per f si ottiene subito oltre che

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ e quindi}$$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

qui nella sviluppo di Laurent non compare mai termine con esponente negativo: 0 è una singolarità eliminabile

Def di polo di ordine m

Sia $f \in H(D'(z_0, \delta))$ e si consideri il suo rilieppo in serie di Laurent di centro z_0

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad \forall z \in D'(z_0, \delta) \quad (*) . \quad \text{La singolarità (isolata) } z_0$$

si dice polo di ordine m, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ se sullo rilieppo di Laurent di f

$$(\text{cioè se in } (*)) \quad a_k = 0 \quad \forall k < -m \quad \text{e} \quad a_{-m} \neq 0$$

Teorema

Se $f \in H(D'(z_0, \delta))$ allora

$$z_0 \text{ è un polo} \stackrel{(1)}{\iff} \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ t.c. } \exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) \neq 0 \stackrel{(2)}{\iff} \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$$

Dim $\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$:

z_0 è un polo. Supponiamo che il suo ordine sia m, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; quindi

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in D'(z_0, \delta), \quad \text{con} \quad a_{-m} \neq 0$$

$$f(z) (z-z_0)^m = (z-z_0)^m \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{m+n}$$

$$\stackrel{n=m+h}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h-m} (z-z_0)^h. \quad \text{Quindi} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\sum_{h=0}^{+\infty} a_{h-m} (z-z_0)^h \right) = a_{-m} \neq 0$$

(2) \Rightarrow : Per ipotesi sappiamo che $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideriamo

l'estensione olomorfa di $(z - z_0)^m f(z)$ in z_0 : $g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^m f(z) & \text{se } z \in D'(z_0, \delta) \\ l & \text{se } z = z_0 \end{cases}$

Dunque, $\forall z \in D'(z_0, \delta)$ abbiamo:

$$(3) \quad f(z) = g(z)/(z - z_0)^m, \text{ da cui } \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} \left(= \frac{|l|}{0^+}\right) = +\infty$$

\Rightarrow : Resta da dimostrare che $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty \Rightarrow z_0$ è un polo:

$$\text{Se } g(z) = \frac{l}{f(z)}. \text{ Quindi } \lim_{z \rightarrow z_0} |g(z)| = 0 \text{ da cui } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$$

Inoltre possiamo scegliere $\exists r > 0, r < \delta$ per cui $g \in H(D(z_0, r))$, $D'(z_0, r) \subset \mathbb{C}$, dato che $f(z) \neq 0$ in un intorno di z_0 (si ricordi che $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$). Dunque z_0 è una singolarità eliminabile per g . Consideriamo

l'estensione olomorfa di g in z_0 : $h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{se } z \in D'(z_0, r) \\ 0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}$. Chiaramente

z_0 è una zero isolata per h e quindi esiste $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $h_1 \in H(D(z_0, r))$ tale che

$$h(z) = (z - z_0)^n h_1(z), \quad \forall z \in D(z_0, r) \text{ e } h_1(z_0) \neq 0$$

poniamo quindi anche ormai che $h_1(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(z_0, r)$ (dato che se $\exists \bar{z} \in D(z_0, r)$

eh che $h_1(\bar{z}) = 0$, allora anche $h(\bar{z}) = 0$ e quindi $g(\bar{z}) = 0$ cioè $|f(\bar{z})| \rightarrow +\infty$ per $\bar{z} \rightarrow \bar{z}$ ma questo è assurdo dato che f ha come unica singolarità in $D(z_0, \delta)$ il punto z_0)

Dunque per ogni

$z \in D'(z_0, r)$ si ha $\frac{1}{f(z)} = g(z) = h(z) = (z-z_0)^m h_1(z)$, ove cui

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \left(\frac{1}{h_1(z)} \right) \in H(D(z_0, r))$$

dove è la funzione reciproca di h_1 che non si annulla in alcun punto di $D(z_0, r)$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m} (z-z_0)^{n-m}$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} g_{h+m} (z-z_0)^h, \quad \forall z \in D(z_0, r). \quad \text{Inoltre l'sviluppo in serie}$$

di Laurent deve valere $\forall z \in D'(z_0, r)$ in quanto $f \in H(D'(z_0, r))$. Dunque z_0 è un polo o si ottiene m per f visto che il primo coefficiente non nullo in tale serie si ottiene per $h = -m$: $a_{-m+m} = a_0 = \frac{1}{h_1(z_0)} \neq 0$

Def (SINGOLARITÀ ESSENZIALE)

Sia $f \in H(D'(z_0, r))$, z_0 si dice singolarità essenziale se non è né un polo né un singolare eliminabile, né un polo e quindi se nello sviluppo in serie di Laurent di f intorno a z_0 ci sono infiniti coefficienti con indice negativo che sono non nulli e sucesivamente, se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ non esiste e residue finita (o infinita) $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$

Esempi

• $f(z) = \frac{1-z^2}{(z+i)^2 z^3}$ ha polo di ordine 2 in $-i$ e di ordine 3 in 0

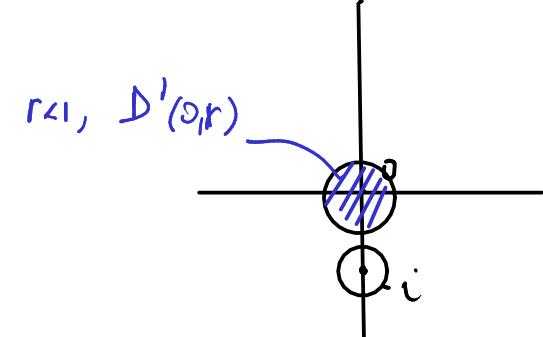
$$f: \mathbb{C} \setminus \{-i, 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-i, 0\})$$

0 è un polo di ordine 3 sotto che

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-z^2}{(z+i)^2} = \frac{1}{i^2} = -1$$

Analogamente:

$$(z+i)^2 f(z) \xrightarrow{z \rightarrow -i} 2/-i \neq 0, \text{ quindi } -i \text{ è un polo di ordine 2}$$



In generale se $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ con p è un polinomio e $p(z_0) \neq 0$ e z_0 è uno

zero di ordine m per q allora z_0 è un polo di ordine m per f

↪ $\exists r_0 < r \in \mathbb{R}$ $\forall h \in H(D(z_0, r))$ t.c. $q(z) = (z-z_0)^m h(z)$, $h(z_0) \neq 0$

$$f(z) = \frac{p(z)}{h(z)} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^m} \text{ quindi } \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{h(z)} = \frac{p(z_0)}{h(z_0)} \neq 0$$

In modo analogo se $f(z) = \frac{g(z)}{\ell(z)}$ con g e ℓ funzioni qualsiasi olomorfe

e $z_0 \in \mathbb{C}$ è uno zero di ordine m per g e $g(z_0) \neq 0$ si ha che
 z_0 è un polo di ordine m per f .

$f(z) = \frac{z}{1-e^z}$ ha una sing. eliminabile in 0 e poli di ordine 1 ai punti $\{2k\pi i\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$

$$f \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi i\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Si osservi che $\{2k\pi i\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è un insieme discreto di punti cioè $\forall k \in \mathbb{Z}$, $2k\pi i$ è una singolarità isolata

Infatti $e^z = 1 \iff z = \log 1 = \log|z| + i(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
 $= 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{1-e^z} = ?$; $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \Rightarrow 1-e^z = -z + o(z) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{-z+o(z)} =$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z \left(-1 + \frac{o(z)}{z} \right)} = -1 \Rightarrow 0 \text{ è una sing. eliminabile}$$

Si oss.

$l(z) = 1-e^z$, $l \in H(0)$. $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: $2k\pi i$ è uno zero semplice per l visto che $l'(z) = -e^z$ e $l'(2k\pi i) = -e^{2k\pi i} \neq 0$

Quindi $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $2k\pi i$ è un polo semplice (cioè di ordine 1) per f .

$f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ha polo di ordine 1 nei punti $\{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\lim_{z \rightarrow k\pi} f(z) = 0 : \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1$$

$$2iz = \log 1 = \log(1|) + i(0 + 2k\pi) = i2k\pi \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre i punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono tutti zeri semplici per la funzione $\sin z$.

$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in 0 :

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto -\frac{1}{z} \mapsto e^{-\frac{1}{z}}$ quindi $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, in quanto composte delle funzioni olomorfe in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{dunque} \quad \forall z \neq 0 : e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} = \\ \stackrel{k=-h}{=} \sum_{h=-\infty}^0 \frac{(-1)^h}{(-h)!} z^h$$

Dunque sullo sviluppo di Laurent di $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ di centro 0, i coefficienti con indice $h \leq 0$ sono non nulli e pertanto, per definizione, 0 è una singolarità essenziale.

Oss

L'immagine mediante la funzione $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ di un qualsiasi intorno buco di 0 è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Infatti, sia $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, facciamo vedere che

$\exists z \in (\text{disco buco di centro } 0 \text{ e raggio } r > 0, \text{ piccolo e fisso})$ tale che $e^{-\frac{1}{z}} = w$

Dove essere:

$$-\frac{1}{z} = \log w = \log |w| + i(\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{quindi}$$

$$z_k = \frac{-1}{\log |w| + i(\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi)} \xrightarrow[\substack{k \rightarrow -\infty \\ k \rightarrow +\infty}]{} 0 \rightarrow \left(\left| \log |w| + i(\operatorname{Arg}(z) + 2n\pi) \right| \right) \xrightarrow[\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \rightarrow -\infty}]{} +\infty$$

Questo è un fatto generale per le singolarità essenziali. Neppure si può dimostrare il seguente teorema:

Sia Ω aperto, $z_0 \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Se z_0 è una singolarità essenziale allora $\forall r > 0$ tale che $D'(z_0, r) \subset \Omega$ si ha $f(D'(z_0, r)) = \mathbb{C}$ oppure $f(D'(z_0, r)) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$.

cioè l'immagine mediante f di un qualsiasi intorno buco di z_0 , o è il piano o è il piano buco.

Def (RESIDUO)

Sia $f \in \mathcal{H}(D'(z_0, \delta))$. Si definisce RESIDUO DI f IN z_0 e si indica con $\text{Res}(f, z_0)$, il coefficiente del termine $\frac{1}{z-z_0}$ nello sviluppo di Laurent di f di centro z_0 . Per intenderlo

$$\boxed{\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz},$$

dove Γ è una qualsiasi curva chiusa regolare a tratti orientata nel verso antiorario che ha il bordo di un dominio aperto T tale che $z_0 \in T$ e z_0 sia l'unica singolarità di f in T . semplice

Oss In particolare, se z_0 è una singolarità eliminabile (o se f è olomorfa anche in z_0) $\text{Res}(f, z_0) = 0$

Sia $f \in H(\Omega - \{z_1, \dots, z_e\})$, $z_1, \dots, z_e \in \Omega$, γ aperto.

e sia γ una curva chiusa ^{semplice} regolare \Rightarrow tutti orientata nel verso antiorario e avente supporto in Ω e che circondi tutte le singolarità z_j , $j \in \{1, \dots, e\}$. Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^e \operatorname{Res}(f, z_j)$$

Dim Sia T il dominio avente come bordo γ e

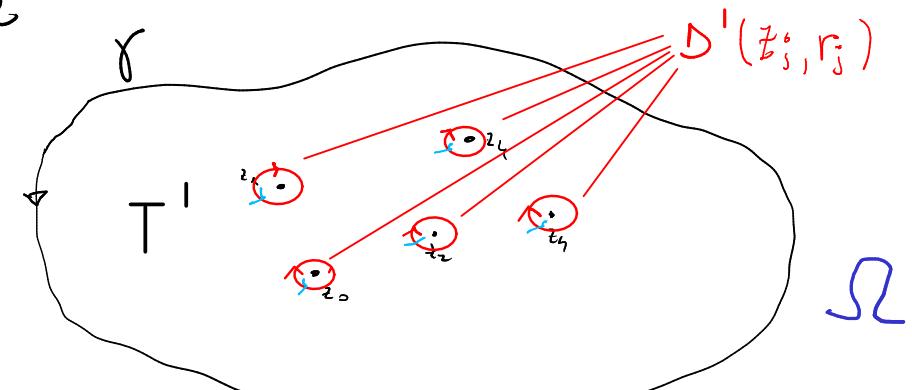
sia $T' = T \cup \bigcup_{j=1}^e D(z_j, r_j)$, dove i

dischi $D(z_j, r_j)$ sono stati scelti con
raggi sufficientemente piccoli da essere

contenuti in T . Poiché f è analitica in T'

$$0 = \int_{\partial T'} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{j=1}^e \int_{\partial D(z_j, r_j)} f(z) dz , \text{ quindi}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \sum_{j=1}^e \left(\int_{\partial D(z_j, r_j)} f(z) dz \right) = \sum_{j=1}^e \int_{\partial^+ D(z_j, r_j)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^e \operatorname{Res}(f, z_j) \quad \blacksquare$$



Il Teorema dei residui mette in luce l'importanza di conoscere il residuo in una singolarità. Vediamo come sia possibile calcolarlo nel caso in cui le singolarità siano un polo semplice (cioè di ordine 1) e più in generale un polo di ordine $m > 1$.

- Nel caso di un polo semplice (cioè un polo di ordine 1) z_0 , poiché

$$f(z) = \sum_{m=-1}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m, \quad \forall z \text{ in un altro buco di centro } z_0, \text{ abbiamo}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{m=-1}^{+\infty} a_m (z-z_0)^{m+1} = a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

- Nel caso di un polo di ordine $m > 1$

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m, \quad \forall z \text{ in un altro buco di centro } z_0, D'(z_0, S)$$

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{m+n} = \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h-m} (z-z_0)^h \rightarrow \text{è una serie di potenze di cui somme}$$

è uguale a $(z-z_0)^m f(z), \forall z \in D'(z_0, \delta)$

Il coefficiente del monomio $z-z_0$ con esponente uguale a -1

si ottiene per $h-m = -1$ cioè $h = m-1$, quindi per le relazioni che legano i coefficienti di una serie di potenze alle derivate nel centro delle somme otteniamo:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} D^{(m-1)} ((z-z_0)^m f(z))$$

Singolarità all'infinito e residuo all'infinito

Sia $K \subset \mathbb{C}$ compatto (cioè K è chiuso e limitato),

$$\Omega = \mathbb{C} - K \quad \text{e} \quad f \in H(\Omega)$$

Def

Si definisce residuo all'infinito di f e si indica con $\text{Res}(f, \infty)$ il numero complesso

$$\text{Res}(f, \infty) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz$$

semplifica

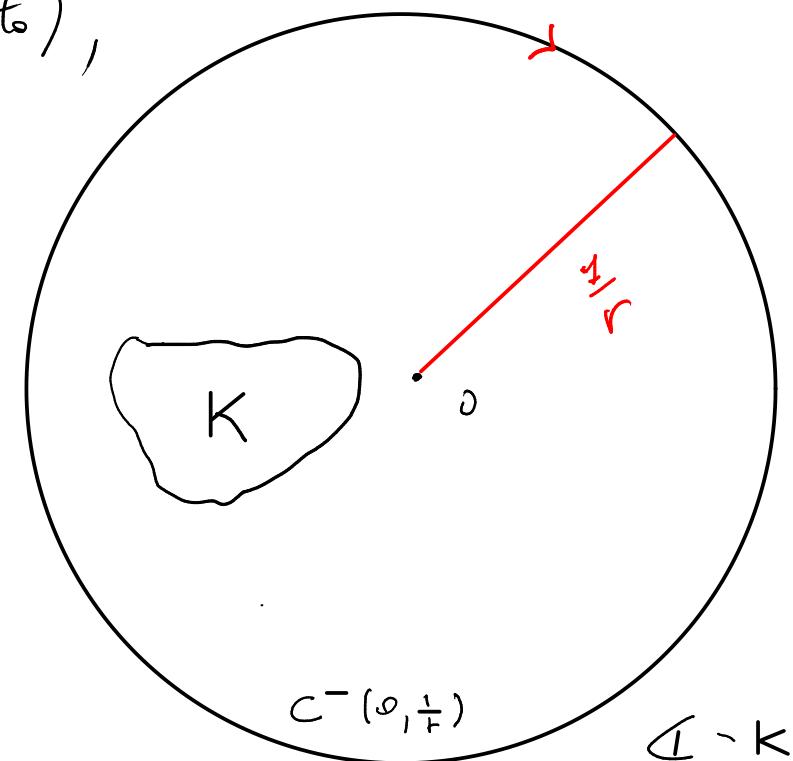
dove γ^- è una qualsiasi curva chiusa regolare a tratti orientata nel verso ORARIO che circondi il compatto K (In particolare si può prendere una curva γ^- una circonferenza di centro 0 e raggio sufficientemente grande, orientata nel verso orario)

Prop

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

dim

$$\text{Per definizione } \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho^+(0, r)} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$$



Occorre però che la funzione $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ sia olomorfa sul disco ^{Page 126 of 184} $D'(0, r)$.

Poiché f è olomorfa fuori del complesso K , se r è sufficientemente piccolo, $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \in H(D'(0, r))$ (dato che $\frac{1}{|z|} < r \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{r}$)

Ora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho^+(0, r)} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{-1}{f^2(e^{it})^2} f\left(\frac{1}{re^{it}}\right) r e^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r^2} e^{-2it} f\left(\frac{1}{r} e^{-it}\right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}(0, \frac{1}{r})} f(z) dz = \\ &= \text{Res}(f, \infty) \end{aligned}$$

II teorema dei residui

Sia $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{z_1, \dots, z_n\})$ (quindi f è olomorfa su un insieme del tipo

$\mathbb{C} \setminus K$, con $K \subset \mathbb{C}$ compatto $= \{z_1, \dots, z_n\}$). Allora $\sum_{k=0}^n \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0$

Dim

"singolarità al finito" + "singolarità all'infinito"

Sia $r > 0$ tale che $z_i \in D(0, r)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Per il I teorema dei residui

$$\int_{\gamma^+ D(0,r)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, z_i) ; \text{ ma } \int_{\partial^+ D(0,r)} f(z) dz = - \int_{\partial^- D(0,r)} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$$

Quindi $2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, z_i) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$. \blacksquare

Calcolare i residui della funzione $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ in tutti i punti di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-1, 2i, -2i\})$$

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)}$$

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z+2i)} = \frac{-4 - 4i}{(2i+1)^2(4i)} \neq 0$$

Quindi $2i$ è un polo semplice e $\text{Res}(f, 2i) = \frac{-4 - 4i}{(2i+1)^2(4i)}$

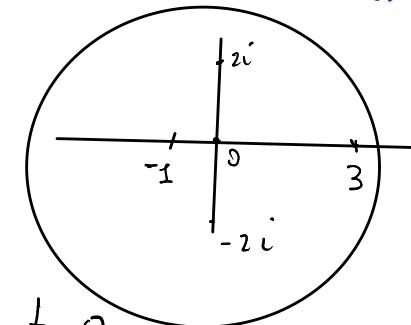
Analogamente $\text{Res}(f, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(z+2i) f(z)}{(z-2i)^2(-4i)} \neq 0$

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 4} = \frac{3}{5} \neq 0, \text{ quindi } -1 \text{ è un polo di ordine 2}$$

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} D((z+1)^2 f(z))$$

$$D\left(\frac{z^2 - 2z}{z^2 + 4}\right) = \frac{(2z-2)(z^2+4) - (z^2-2z)2z}{(z^2+4)^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{(2z-2)(z^2+4) - (z^2-2z)2z}{(z^2+4)^2} = \frac{-4 \cdot 5 + 6}{25} = -\frac{16}{25} = \text{Res}(f, -1)$$



f è olomorfa, salvo escluso, all'esterno del disco $D(0, 1)$, per cui ha singolarità anche al infinito dell'infinito

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right), 0\right)$$

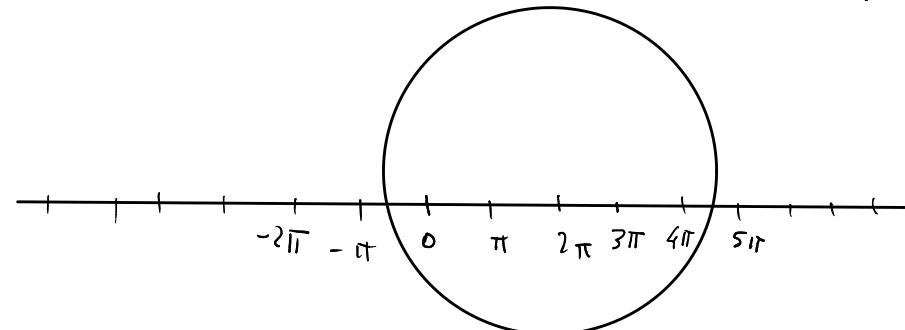
$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= -\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z^2} - \frac{z}{z}}{\left(\frac{1}{z} + z\right)^2 \left(\frac{1}{z^2} + 4\right)} = \frac{\frac{1-2z}{z^2}}{\cancel{\left(\frac{1+z}{z}\right)^2} \frac{1+4z^2}{z^2}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) = \\ &= -\frac{1-2z}{(1+z^2)(1+4z^2)}. \quad \text{Poiché } \exists \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{1-2z}{(1+z^2)(1+4z^2)} = -1, \text{ o è una} \end{aligned}$$

singularità eliminabile per la funzione $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ e dunque $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$

- Calcolare i residui di $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$ nei punti singolari (ha senso calcolare il residuo in ∞ ?)

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}})$$

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} |K\pi| = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{K \rightarrow -\infty} |K\pi| = +\infty$$



e dunque ∞ non è una singolarità isolata (cioè l'insieme su cui f è olomorfa non è solo tipo $\mathbb{C} \setminus k$, con k compatto) e quindi non ha senso calcolare $\operatorname{Res}(f, \infty)$.

Abbiamo già visto in precedenza che ogni dei punti $k\pi$ è una zero semplice per tutti quanti essi sono folti semplici e

$$\text{Res}(f, k\pi) = \lim_{z \rightarrow k\pi} (z - k\pi) f(z) = \frac{e^{k\pi}}{D \sin z / z - k\pi} = \frac{e^{k\pi}}{(-1)^k}$$

- Determinare le singolarità di $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ e dire se ha senso calcolare il residuo in 0.

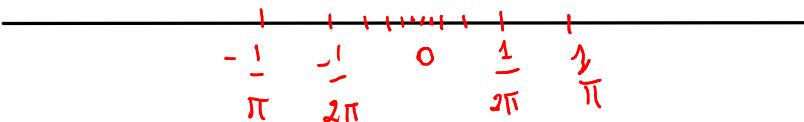
$$\sin w = 0 \iff w = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \frac{1}{z} = 0 \iff \frac{1}{z} = k\pi \iff z = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k\pi} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \right))$$

Non ha senso calcolare il residuo in 0 poiché 0 non è una singolarità isolata

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{k\pi} = 0$$



Ha senso invece calcolare il residuo di f all'infinito dato che le singolarità di f costituiscono un insieme compatto

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = ? \quad \text{CALCOLARE PER ESERCIZIO!}$$

- Calcolare il residuo in 0 di $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$

$\forall z \neq 0 \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ quindi

Il residuo è il coefficiente del termine $\frac{1}{z}$

che si ottiene per $2n-4=-1$ cioè per $n = \frac{3}{2}$

Quindi il coefficiente di $\frac{1}{z}$ è nullo e

$$\frac{\sin z}{z^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!}$$

è la serie di Laurent di centro 0 della funzione $\sin z / z^5$

n deve essere intero!

$$\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z^5}, 0\right) = 0$$

- Calcolare il residuo in 0 della funzione $f(z) = z^6 \sin \frac{1}{z}$

$\forall z \neq 0 \quad \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}} \cdot \frac{1}{(2n+1)!}$, quindi 0 è una sing. essenziale per la funzione $\sin \frac{1}{z}$

$$z^6 \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n-5}} \cdot \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$2n-5=1 \rightarrow n=3$$

$$\text{Res}\left(z^6 \sin \frac{1}{z}, 0\right) = (-1)^3 \cdot \frac{1}{7!} = -\frac{1}{7!}$$

- Determinare i residui in tutti i punti singolari per la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 1}$

$$z^2 - 3z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \quad / \quad \begin{cases} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ovvero

$$f \in H\left(\mathbb{C} \setminus \left\{0, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}\right)$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ z \rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}}} \frac{1}{(z - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(z - \frac{3-\sqrt{5}}{2})} e^{\frac{1}{z-2}} = \frac{\frac{1}{e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}}{\sqrt{5}} = \text{Res}(f, \frac{3+\sqrt{5}}{6})$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ z \rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2}}} \frac{1}{(z - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(z - \frac{3+\sqrt{5}}{2})} e^{\frac{1}{z-2}} = -\frac{\frac{1}{e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}}{\sqrt{5}} = \text{Res}(f, \frac{3-\sqrt{5}}{6})$$

Chiamiamo ora di stabilità olo che tipo di singolarità è 0 per f . Dovendone non può essere una singolarità eliminabile dato che $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ (se esistesse dovrebbe essere il $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$ ma così non è poiché 0 è sing. essenziale per $e^{\frac{1}{z}}$)

Supponiamo per ora che sia un polo

allora dovrebbe esistere $k > 0$ tale che $\lim_{z \rightarrow 0} z^k f(z) = l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

quindi $\left| \frac{z^k}{z^2 - 3z + 1} e^{\frac{1}{z}} \right| \xrightarrow[z \rightarrow 0]{} |l|$ e quindi $|e^{\frac{1}{z}}| \xrightarrow[z \rightarrow 0]{} +\infty$, dato

che $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z^2 - 3z + 1|}{|z|^k} = +\infty$, ma anche questo contraddice il fatto che 0 è una singolarità semplice per la funzione $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$.

Come possiamo calcolare $\text{Res}(f, 0)$? (Non è facile ottenere in questo caso lo sviluppo di Laurent in 0 per f)

Possiamo però far ricorso al II teorema dei residui:

$\text{Res}(f, \infty) + \text{Res}\left(f, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + \text{Res}\left(f, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \text{Res}(f, 0) = 0$, quindi il residuo in 0 delle singolarità-

chiamiamo di calcolare $\text{Res}(f, 0)$ (sperando che sia più facile di calcolare $\text{Res}(f, 0)$)

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z} + 1} \cdot e^{\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-3z+z^2}{z^2}} \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

Dato che la funzione $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-3z+z^2}$ ha una singolarità eliminabile in 0

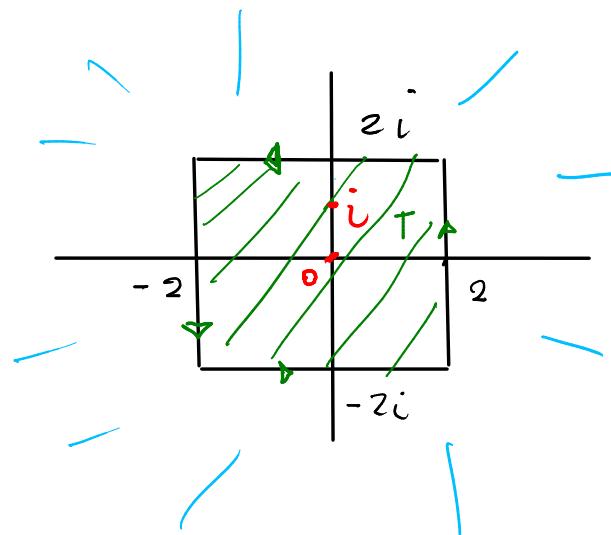
$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0, \text{ allo cui } \operatorname{Res}(f, 0) = -\operatorname{Res}(g, \frac{3+\sqrt{5}}{2}) - \operatorname{Res}(g, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0$$

- Calcolare

$$\int_{\gamma^+ T} e^{\frac{1}{z^2 - iz}} dz, \text{ dove } T \text{ è il quadrato } T = \{z \in \mathbb{C} \mid |Re z| \leq 2, |Im z| \leq 2\}$$

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0, i\})$ otta che

$$z^2 - iz = 0 \Leftrightarrow z=0 \vee z=i$$



$$\int_{\gamma_T} e^{\frac{1}{z^2-i^2}} dz = 2\pi i \left(\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, i) \right) = -2\pi i \text{Res}(f, 0)$$

↑ I teorema deli anelli
 ↑ II teorema deli anelli

$$f\left(\frac{z}{z}\right) \left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{\frac{z^2}{z^2}-\frac{i}{z}}} = -\frac{1}{z^2} e^{\frac{z^2}{1-iz}}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \left(-\frac{1}{z^2}\right) e^{\frac{z^2}{1-iz}} = \lim_{z \rightarrow 0} -e^{\frac{z^2}{1-iz}} = -e^0 = -1 \neq$$

quindi 0 è un polo di ordine 2 per $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

$$\text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1!} D\left(z^2 \left(-\frac{1}{z^2}\right) f\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$D\left(-f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -Df\left(\frac{1}{z}\right) = -D e^{\frac{z^2}{1-iz}} = -e^{\frac{z^2}{1-iz}} \frac{2z(1-iz)-z^2(-i)}{(1-iz)^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(-e^{\frac{z^2}{1-iz}} \frac{2z(1-iz)+iz^2}{(1-iz)^2}\right) = -e^0 \frac{0+0}{1} = 0$$

quindi $\text{Res}(f, 0) = 0$ e anche l'integrale che avevamo da calcolare è uguale a 0.

Integrale improprio su \mathbb{R} di una funzione continua

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continua su \mathbb{R} . Vogliamo valutare $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

1^a caso da fare: stabilire se f è integrabile in senso improprio su \mathbb{R}

Ricordiamo che se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continua su \mathbb{R} , f è integrabile assolutamente in senso improprio su $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ (rispettivamente su $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$) se

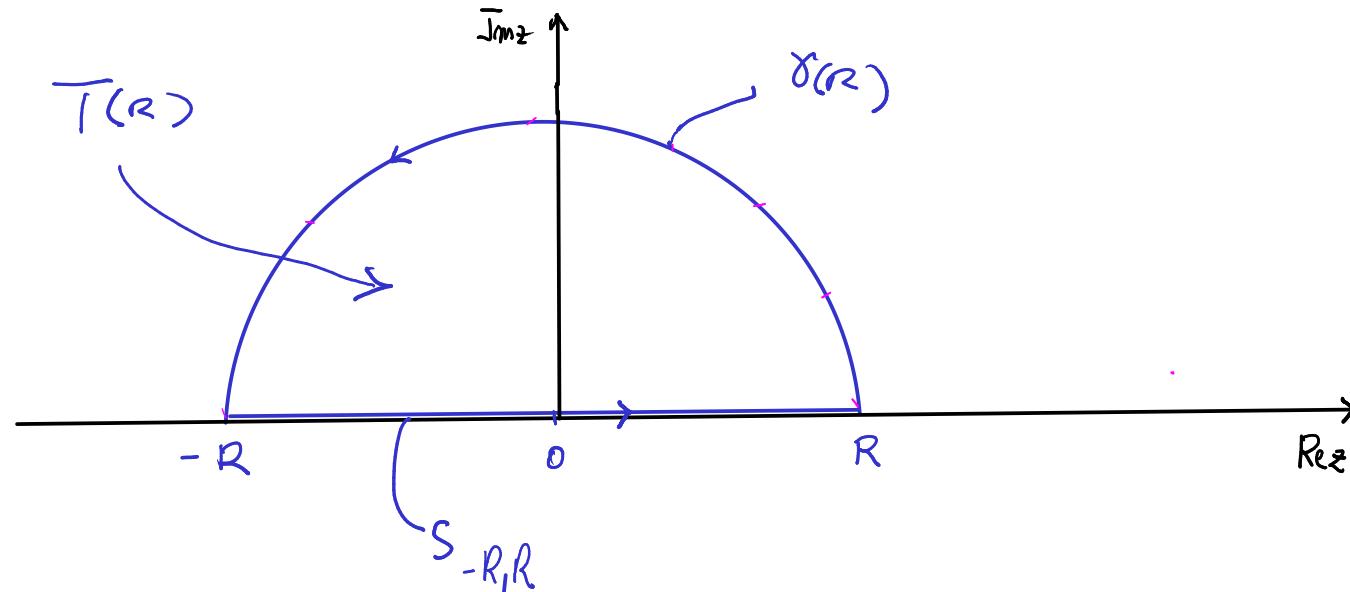
$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}, \text{ con } \alpha > 1, \text{ definitivamente per } x \rightarrow +\infty \quad (\text{risp. per } x \rightarrow -\infty)$$

Ricordiamo anche che se f è assolutamente integrabile su $(-\infty, b]$ o su $[a, +\infty)$ è anche integrabile in senso improprio nello stesso intervallo

Passo alla base del metodo dei residui

Supponiamo che f abbia un'estensione analitica (che indicheremo con \tilde{f}) tranne che in un numero finito di punti su \mathbb{C} .

Consideriamo la curva $\Gamma(R)$ in blu in figura (diciendo O e ω i raggi R) data dal seguente $S_{R,R}$ e dalla semicirconferenza $\delta(R)$ e sia $T(R)$ il dominio che ha come frontiera Γ .



Oltre abbiamo:

$$\int_{\Gamma(R)} \widetilde{f}(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \overline{T(R)}} \text{Res}(\widetilde{f}, z_k)$$

\sim
z_k singolare per \widetilde{f} , $z_k \in \overline{T(R)}$

||

$$\int_{S_{-R,R}} \widetilde{f}(z) dz + \int_{\gamma(R)} \widetilde{f}(z) dz \quad (\square) . \quad \text{I due segmenti } S_{-R,R} \text{ ha equazione}$$

$$S_{-R,R} (t) = (t, 0), \quad t \in [-R, R]; \quad \text{quindi } (S'_{-R,R})'(t) = (1, 0) \quad \text{e dunque } (\square) \text{ è uguale a}$$

$$(\square) = \int_{-R}^R \tilde{f}(t, 0) \cdot (1, 0) dt + \int_{\Delta(R)} \tilde{f}(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt + \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z) dz$$

Passaggio al limite per $R \rightarrow +\infty$ e supposemo che $\exists \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^{\infty} f(t) dt = \Lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\text{Res} \sum_{\substack{\text{poles } z_k \\ \text{in } \Lambda_1}} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(t) dt + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z) dz$$

Λ_1

$\text{Im } z_k > 0$

Λ_2

$$\text{cioè} \quad (\text{vr}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = I_1 - I_2$$

VALORE PRINCIPALE: -

se f é integrável alors

$$:= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_c^a f(t) dt + \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = (\text{VP}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

È quindi fondamentale sapere calcolare $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} \widetilde{f}(t) dt$.

Un teorema per il calcolo di $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} \widetilde{f}(z) dz$

Se

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \widetilde{f}(z) = 0 \quad \text{allora}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} \widetilde{f}(z) dz = 0$$

Esempio

$$\bullet \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx ; \quad f(x) = \frac{x}{1+x^6}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ed } \bar{e} \text{ continua}$$

$0 < f(x) \leq \frac{1}{x^6} \quad \forall x > 0$ e quindi f è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$

Consideriamo l'estensione di f a \mathbb{C} :

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{1+z^6} \quad f \in H(\mathbb{C} \setminus \{\sqrt[6]{-1}\})$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \tilde{f}(z) = 0 \quad \text{per} \quad \frac{z}{1+z^6} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z^5} \right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{z^6+1}{z^6}} \right) = 0$$

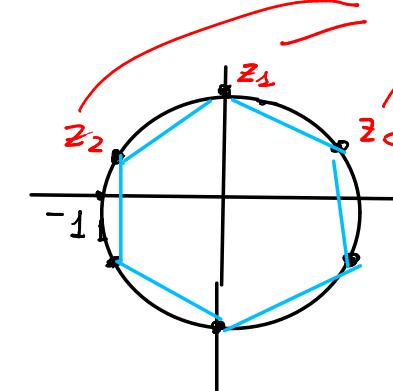
Usando il metodo dei residui dato che $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \tilde{f}(z) = 0$

otteniamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} = \pi i \sum_{k=0,1,2} \operatorname{Res} (\tilde{f}, z_k)$$

$z_k = \sqrt[6]{-1}$

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right)}, \quad k=0,1,2,3,4,5$$



Sono le sole singolarità da considerare poiché sono quelle nel semipiano $\operatorname{Im} z \geq 0$

$$\frac{1}{1+z^6} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_5)}, \text{ quindi le singolarità } z_n \text{ sono}$$

tutte poli semplici e $\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{1}{1+z^6} = \frac{1}{(z_k - z_0)\dots(z_k - z_5)}$

Un modo "più furbo" per calcolare questo

limite è il seguente:

poiché $p(z) = 1 + z^6$ è nullo in z_k (cioè $p(z_k) = 0$)

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{1 + z^6} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{\frac{p(z)}{z - z_k}} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{\frac{p(z) - p(z_k)}{z - z_k}}$$

$$= \frac{1}{p'(z_k)} = \frac{1}{6z_k^5}$$

in questo prodotto
ci sono tutti i fattori
del tipo $z_k - z_i$
dove z_i sono le sole
resto soli -1 tranne,
ovviamente, quello che
si ottiene per $i = k$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx =$$

$$= \pi i \sum_{k=0,1,2} \operatorname{Res}(\tilde{f}, t_k) = \pi i \left(\frac{1}{6z_0^5} + \frac{1}{6z_1^5} + \frac{1}{6z_2^5} \right)$$

OSS

Lo stesso tipo di ragionamento può essere ripetuto per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$, dove

p e q sono polinomi, q privo di zeri reali,

con $(\deg p) + 2 \leq (\deg q)$.

In questo caso: $\frac{p(x)}{q(x)}$ è assolutamente integrabile in senso improprio sul \mathbb{R}

e inoltre $\frac{p(z)}{q(z)} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$.

Integrali di tipo Fourier

Sono integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iwt} dt, \quad w \in \mathbb{R} - \{0\}$

(si chiudono così perché entrano in gioco sulle definizioni di trasformata di Fourier di f)

Oss1

Poiché $\cos(wt) = \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}$ e $\sin(wt) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ si ha i seguenti integrali

del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(wt) dt$ o $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(wt) dt$ rientrano in queste classi

Oss2

Poiché l'integrandone è $f(t) e^{iwt}$, se f si può estendere ad una funzione \tilde{f} che sia in \mathcal{C} meno un numero finito di punti allora $\tilde{f}(z) e^{iwz}$ estende in modo analitico, sullo stesso insieme dove è analitica \tilde{f} , la funzione $t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) e^{iwt}$

Nell'applicazione del metodo dei residui occorre calcolare

lim $\int_{\gamma(R)} \tilde{f}(z) e^{iwt} dz$, $\gamma(R)$ semicirconferenza di centro 0 e raggio R orientata in senso antiorario e avente immagine nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$

Quando l'integrande è del tipo $z \mapsto f(z) e^{i\omega z}$, $\omega > 0$, forniamo
usare a tale scopo il lemma di Jordan.

Lemma di Jordan (per il semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$)

Se $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{f}(z) = 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$

allora

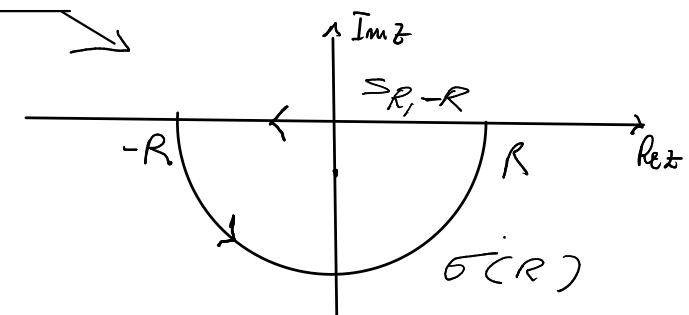
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\sigma(R)} e^{i\omega z} \tilde{f}(z) dz = 0$$

C'è anche una versione del lemma di Jordan per il semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$
cioè per R così in cui $\omega < 0$. Quando $\omega < 0$ si considera un cammino
 $\Gamma(R)$ fatto in questo modo

Lemma di Jordan (per il semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$)

Se $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{f}(z) = 0$ e $\omega < 0$

allora: $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\sigma(R)} e^{i\omega z} \tilde{f}(z) dz = 0$



- Si vogliamo calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2} dx$, con $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$

Osserviamo che $\left| \frac{\cos(kx)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ e quindi la funzione $\frac{\cos(kx)}{1+x^2}$ è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{2(1+x^2)} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{2(1+x^2)} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx \right). \end{aligned}$$

Iniziamo col calcolare l'integrale ① :

Consideriamo l'estensione complessa della funzione integranda $g(z) = \frac{e^{ikz}}{1+z^2}$

$g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{i, -i\})$. Osserviamo che $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{1+z^2} = 0$ quindi possiamo applicare le tecniche di Jordan (per il semipiano $\text{Im } z \geq 0$, dato che $k > 0$) e ottenere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

Sono da considerare solo le singolarità di f che appartengono al semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$!

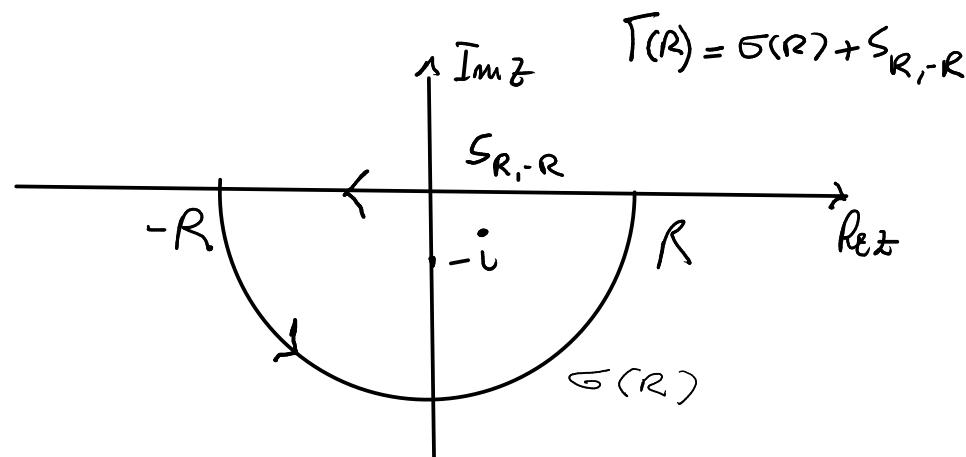
Il punto i è polo semplice per f . Infatti $\lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{ikz}}{(z+i)} = \frac{e^{ikz}}{2i}$.

Dunque il residuo di f in i è uguale a $\frac{e^{-k}}{2i}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{(1+x^2)} dx = 2\pi i \frac{e^{-k}}{2i} = \pi e^{-k}$

Calcoliamo ora l'altro integrale. Abbiamo altre possibilità: o usare il metodo dei residui e il Lemma di Jordan per il semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$ (si osservi che nel secondo integrale l'argomento della funzione esponenziale è $-ikx$ e $-k < 0$) o fare un cambio di variabile, ponendo $-x = y$, con il quale si ottiene che il secondo integrale è uguale al primo.

Per esercizio calcoliamolo usando sia nuovo il metodo dei residui.

Scegliere come cammino di integrazione che circolari le singolarità $-i$ delle estensioni olomorfe \mathcal{G} delle funzione integranda (cioè $g(z) = \frac{e^{-ikz}}{1+z^2}$) le curve $\Gamma(R)$ in figure



Si osservi che queste volte il seguente è percorso nel verso opposto al caso precedente e quindi

$$\int_{S_{R,-R}} g(z) dz = - \int_{\varsigma_{R,-R}} g(z) dz = - \int_{-R}^R g(x) dx$$

Applicando questi il Lemma dei residui e il Lemma di Jordan per $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq 0\}$,

Oteviamo:

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, -i) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx . \quad \text{Ora anche } -i \text{ è un polo semplice per } f \text{ e}$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{e^{-ikz}}{(z-i)(z+1)} = \cancel{e^{\frac{-ik(-1)}{-2i}}} = \cancel{e^{\frac{-k}{-2i}}}.$$

e quindi $2\pi i \frac{e^{-k}}{-2i} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx$ da cui $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-k}$

In definitiva l'integrale cercato è uguale a $\frac{1}{i} (\pi e^{-k} + \pi e^{-k}) = \frac{\pi}{2} e^{-k}$.

Vogliamo ora calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Oss 1

Si può dimostrare che la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ NON è assolutamente integrabile su $(0, +\infty)$ ma è solo integrale.

Dss 2

L'estensione a \mathbb{C} di $\frac{\sin x}{x}$, cioè la funzione $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ha in 0 una singolarità eliminabile; dato però che $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \cdot \frac{\sin z}{z} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sin z$ non esiste

non c'è speranza di usare il teorema visto nelle lezioni precedenti per calcolare

l'area $\int_{P_R} \frac{\sin z}{z} dz$. Possiamo invece usare il teorema di Jordan, come visto sopra e fatto di prendere un cammino de "tagli fuori" la singolarità in 0 di $\frac{1}{z}$.

Verifichiamo qui dettagli in che modo:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ è una funzione pari per cui} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

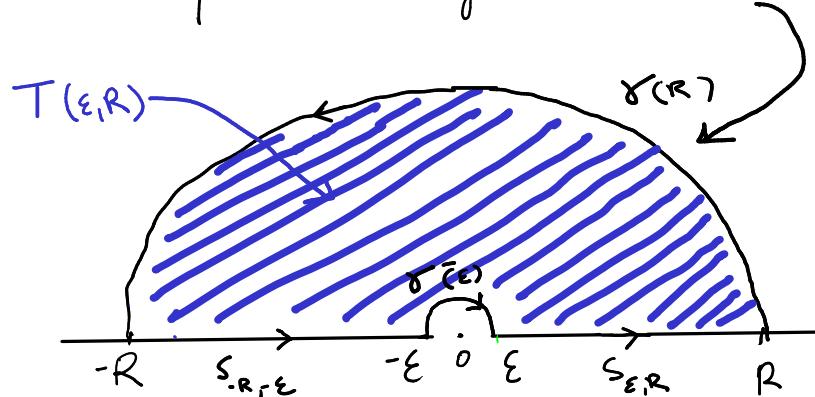
$$\text{Ora} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx}_{(1)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{-2ix} dx}_{(2)}$$

Calcoliamo l'integrale (1):

l'esternare a \mathbb{C} di $\frac{\ell'^x}{2ix}$ è la funzione $\frac{\ell^{iz}}{2iz}$ che si chiama in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Consideriamo quindi il seguente diagramma. Nel piano $T(\varepsilon, R)$, il cui bordo è la curva definita dalle semicirconferenze $\gamma(R)$, del segmento $S_{-R, -\varepsilon}$ delle semicirconferenze

$\bar{\gamma}(\varepsilon)$ e del segmento $S_{\varepsilon, R}$ non circondato per cui:



Th. di Cauchy-Goursat

$$0 \quad \downarrow = \int \frac{\ell'^z}{2iz} dz =$$

$$= \int_{\gamma(R)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ell'^x}{2ix} dx + \int_{\bar{\gamma}(\varepsilon)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{\ell'^x}{2ix} dx$$

Per $R \rightarrow +\infty$ e poi per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ell'^x}{2ix} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\gamma}(\varepsilon)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} \frac{\ell'^z}{2iz} dz$$

Per il termine che fornisce il secondo termine è 0. Per calcolare il primo termine Page 150 of 184
il seguente termine è essenziale:

Termino

Sia h olomorfa in $D'(z_0, \delta)$ e z_0 singolarità isolata per h se

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} (z - z_0) h(z) = \lambda \in \mathbb{C} \quad (\text{quindi } z_0 \text{ è un polo semplice se } \lambda \neq 0)$$

allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} h(z) dz = i \lambda \pi$$

- In particolare se $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) h(z) = 0$ allora $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} h(z) dz = 0$

Nell'applicazione al calcolo delle nostre integrazioni si ottiene che $z_0 = 0$ e

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{z^2}}{2iz} = \frac{1}{2i} \quad \text{e quindi}$$

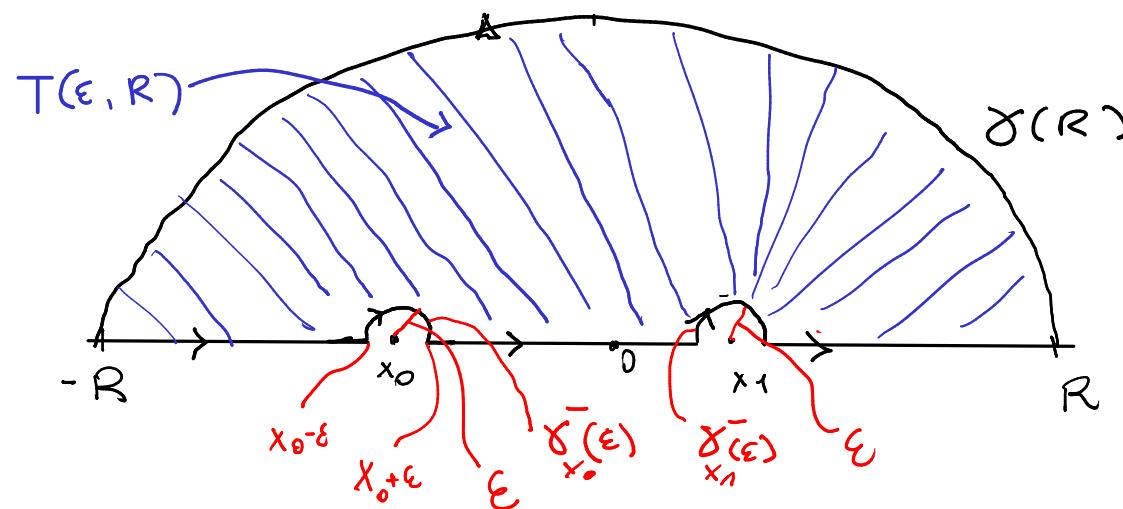
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta(\epsilon)}^{\frac{1}{2iz}} dz = i\pi \frac{1}{2i}, \text{ dunque} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx = \frac{\pi}{2}$$

Per calcolare l'integrale ② potremo usare il lemma di Jordan per il semipiano di numeri complessi \mathbb{C} , tali che $\operatorname{Im} z < 0$ e il lemma qui sopra con $\alpha = \pi$, $\beta = 2\pi$ oppure - possiamo osservare che

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{2ix} dx \stackrel{-x=y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy}}{-2iy} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy}}{2iy} dy = \frac{\pi}{2}$$

Quindi l'integrale s'è quindi uguale a $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$.

In generale, se f ha punti singolari sull'asse dei numeri reali, ad esempio nei punti $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, poniamo considerare il cammino seguente



Supponiamo che f non possa estendersi ad una funzione olomorfa nel piano complesso tranne che su un insieme finito di punti e consideriamo il dominio $T(\epsilon, R)$ (trattagliato in blu) il cui bordo è lo curve in nero nelle figure qui sopra. Dal I Teorema dei residui abbiamo

$$2\pi i \sum_{\substack{z \text{ in sing. per } f \\ z_k \in T(\epsilon, R)}} \operatorname{Res}(f, z_k) = \int_{\partial T(\epsilon, R)} f(z) dz = \int_{\gamma(R)} f(z) dz + \int_{S_{-R, x_0 - \epsilon}} f(z) dz - \int_{S_{x_0 + \epsilon, x_1 - \epsilon}} f(z) dz - \int_{\gamma_{x_1}(\epsilon)} f(z) dz + \int_{S_{x_1 + \epsilon, R}} f(z) dz$$

farando tendere $R \rightarrow +\infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$ otteniamo (VP) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du \rightarrow$ perciò che esistono

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} f(z) dz \quad e \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{x_1}(\epsilon)} f(z) dz \quad e \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{x_1 + \epsilon, R}} f(z) dz.$$

Serie di Fourier

Si $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une funzione assolutamente integrabile

DEF

Si definisce COEFFICIENTE (k-ESIMO) DI FOURIER ($k \in \mathbb{Z}$) DI f il numero

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (\in \mathbb{C})$$

DEF

Si definisce SERIE DI FOURIER DI f la serie hilbertiana di funzioni

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$$

Un polinomo trigonometrico in \mathbb{R} è una funzione del tipo

$$t \in \mathbb{R} \mapsto a_0 + \sum_{k=0}^m a_k \cos(kt) + \sum_{k=0}^m b_k \sin(kt), \text{ dove}$$

$$k \in \mathbb{N} \text{ e } a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

Vediamo che la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$ possa essere scritta come $a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kt)$

$$e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt); \text{ poiché } \cos(-kt) = \cos(kt) \text{ e } \sin(-kt) = -\sin(kt)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cos(kt) + i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \sin(kt) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cos(kt) + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \cos(kt) + i \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \sin(kt) + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \sin(kt) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \cos(-kt) + i \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \sin(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \sin(-kt) \right) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{c_0}_{a_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{(c_k + c_{-k})}_{a_k} \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} i(c_k - c_{-k}) \sin(kt)$$

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt = \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt}$$

$\forall k \in \mathbb{N}, k > 0$

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (e^{-ikt} + e^{ikt}) / 2 dt$$

$$= \boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2i \cdot i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (e^{-ikt} - e^{ikt}) / 2 dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (-\sin(kt)) dt = \boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt}$$

RICONDIZIONE DEL CASO DI UNA FUNZIONE DEFINITA SU $[a, b] \supset [-\pi, \pi]$

Se partiamo da $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f assolutamente integrabile in $[a, b]$, possiamo scrivere la serie di Fourier di f usando le definizioni viste per funzioni definite su $[-\pi, \pi]$. Infatti è sufficiente considerare il cambio di variabile, cioè la trasformazione,

$$\tau \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{b-a}{2\pi} \tau + \frac{a+b}{2} \in [a, b]$$

$$\text{e la funzione } g(\tau) = f\left(\frac{b-a}{2\pi} \tau + \frac{a+b}{2}\right)$$

I coefficienti di Fourier di g sono dati da

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) e^{-ik\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{b-a}{2\pi} \tau + \frac{a+b}{2}\right) e^{-ik\tau} d\tau;$$

usando le formule di integrazione per sostituzioni ponendo $x = \frac{b-a}{2\pi} \tau + \frac{a+b}{2}$
da cui $\tau = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \frac{2\pi}{b-a}$ e $d\tau = \frac{b-a}{2\pi} dx$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{b-a} \left(x - \frac{b+a}{2}\right)} dx = e^{+ik\pi \frac{b+a}{b-a}} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{b-a} x} dx$$

La serie di Fourier di f è data da

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(e^{+ik\pi \frac{b-a}{b-a}} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a} x} dx \right) e^{ik\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \frac{2\pi}{b-a}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a} x} dx \right) e^{ik\frac{2\pi}{b-a} x} \end{aligned}$$

per cui la serie di Fourier di $f = f(x)$, $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è data da

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a} x} dx \right) e^{ik\frac{2\pi}{b-a} x}$$

O, equivalentemente, da:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} kx\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{b-a} kx\right)$$

ove $a_0 = a_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

$$a_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} kx\right) dx, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$b_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| \sin\left(\frac{2\pi}{b-a} kx\right) dx, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

In particolare se $[a, b] = [0, T]$

$$f_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right), \text{ con}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx$$

OSS.

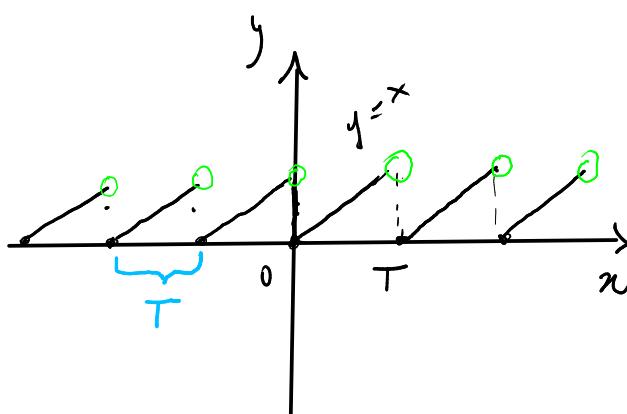
Osserviamo che se la serie di Fourier di f converge puntualmente in $[a, b]$

allora dato che le funzioni che costituiscono i termini delle serie sono periodiche di periodo $b-a$ la somma si può estendere per periodicità

su \mathbb{R} , con periodo $b-a$, tale estensione sarà ovviamente la soluzioe della serie $\forall t \in \mathbb{R}$.

Per questo motivo quando mi corrolo di stabilire se una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è puntualmente la somma delle sue serie di Fourier
 le si estende per periodicità su \mathbb{R} , con periodo $b-a$, ad una funzione
 $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (chiamata $\tilde{f}(x + (b-a)) = \tilde{f}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

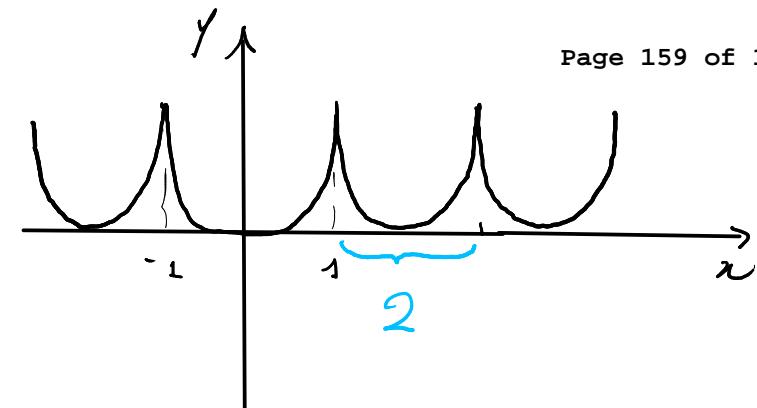
Chiamiamo meglio con degli esempi cose si intende per prolungamento periodico
 di periodo $b-a$ di una funzione definita in $[a, b]$.



In queste figure le funzioni

$$f(x) = x \quad \text{per } x \in [0, T]$$

è stata prolungata per periodicità su \mathbb{R} in modo da ottenere una funzione periodica. Nei punti kT , $k \in \mathbb{Z}$ si è posto $\tilde{f}(kT) = f(0)$.



In quest'altre figure la funzione

$$f(x) = x^2 \quad \text{se } x \in [-1, 1]$$

è stata prolungata per periodicità su \mathbb{R} con periodo 2. Poiché $f(-1) = f(1)$ il prolungamento periodico di f è continuo anche nei punti $2m+1$, $m \in \mathbb{Z}$.

- Una osservazione da fare è che il prolungamento periodico è univocamente definito se e solo se $f(a) = f(b)$.

Se $f(a) \neq f(b)$ in tutti i punti del tipo $b + k(b-a)$, $k \in \mathbb{Z}$ bisogna scegliere come definire \tilde{f} , non esiste una selta canonica ($\tilde{f}(b + k(b-a)) = \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$).

SERIE DI SOLI SENI E SERIE DI SOLI COSENI DI $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, assolutamente integrabile su $[0, T]$.

Possiamo estendere f ad una funzione definita su $[-T, T]$ che sia pari oppure dispari.

Ad esempio se $f(x) = x$, $x \in [0, T]$

l'estensione pari è data da $g(x) = |x|$, $x \in [-T, T]$, mentre l'estensione dispari è $h(x) = x$, $\forall x \in [-T, T]$.

In generale se $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, la sua estensione pari a $[-T, T]$ è

$$\text{definita da } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, T] \\ f(-x) & \text{se } x \in [-T, 0) \end{cases}$$

mentre la sua estensione dispari è definita da

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } x \in (0, T] \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-T, 0) \end{cases}$$

[2] dove gli Fourier di g su $[-T, T]$ è una serie di soli valori

(dato che $b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T g(x) \sin\left(\frac{\pi k}{T} x\right) dx = 0, \forall k$, poiché l'integrande è dispari)

che si chiama SERIE DEI COSENI (DI FOURIER) DI $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

I suoi coefficienti sono quindi

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T g(x) \cos\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx$$

mentre la serie gli Fourier di h su $[-T, T]$ è una serie di soli seni

(dato che $a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T h(x) \cos\left(\frac{\pi k}{T} x\right) dx = 0, \forall k$, poiché l'integrande è dispari)

che si chiama SERIE DEI SENI (DI FOURIER) DI $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

I suoi coefficienti sono quindi

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T h(x) \sin\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(k \frac{\pi}{T} x\right) dx$$

Enunciamo ora un altro risultato importante riguardante la convergenza della serie di Fourier di $f \in L^2$

Torneo

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e si supponga che il quadrato di f

$(f(t))^2$ sia assolutamente integrabile su $[a, b]$. Allora

le successioni delle somme parziali delle serie di Fourier di f

$$S_m = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikt} \text{ converge a } f \quad \underline{\text{in misura quadratica}}$$

cioè

$$\int_a^b |S_m(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Il seguente, altrettanto importante risultato, riguarda invece la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier:

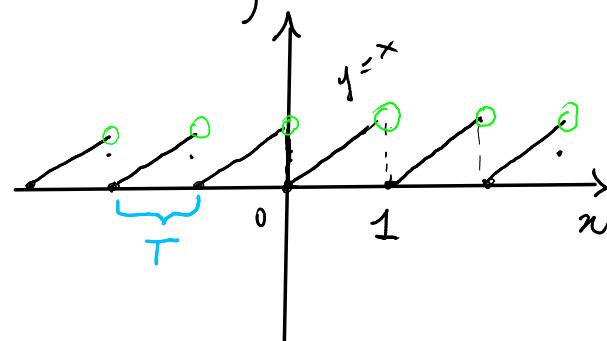
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ assolutamente integrabile e consideriamo prolungamento periodico \tilde{f} di f a \mathbb{R} di periodo $b-a$.

- 1) La serie di Fourier di f converge a $\tilde{f}(t)$ in ogni punto $t \in \mathbb{R}$ in cui \tilde{f} è continua ed esistono finite le derivate destre e sinistre; (quindi in particolare in ogni punto in cui \tilde{f} è derivabile).
- 2) Se $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$ allora la convergenza è uniforme su \mathbb{R} . Inoltre la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso in cui \tilde{f} è continua e derivabile con derivate continue finite che in un numero finito di punti dove esistono finite le derivate destre e sinistre.

- 3) In ogni punto $t \in \mathbb{R}$ in cui \tilde{f} ha discontinuità di I specie ed in cui esistono limiti $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(\bar{t}+h) - \tilde{f}(\bar{t}_+)}{h} \in \mathbb{R}$, $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{f}(\bar{t}+h) - \tilde{f}(\bar{t}_-)}{h} \in \mathbb{R}$

La serie di Fourier di \tilde{f} converge a $\frac{\tilde{f}(\bar{t}_+) + \tilde{f}(\bar{t}_-)}{2}$
 ovvero $\tilde{f}(\bar{t}_+) := \lim_{t \rightarrow \bar{t}^+} \tilde{f}(t)$ e $\tilde{f}(\bar{t}_-) := \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tilde{f}(t) dt$

Ad esempio, ricordiamoci la funzione f in figura ($f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$)



In tutti i punti $t = m$, $m \in \mathbb{Z}$ tale funzione ha discontinuità di

specie. $\tilde{f}(m_-) = \lim_{t \rightarrow m^-} \tilde{f}(t) = 1$ e $\tilde{f}(m_+) = \lim_{t \rightarrow m^+} \tilde{f}(t) = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m_+)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m+h - m}{h} = 1$$

dato che nell'intervallo $[m, m+1]$, $f(u) = u - m$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m_-)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{m+h - (m-1)}{h} = 1$$

dato che nell'intervallo $[m-1, m]$, $f(u) = u - (m-1)$

Quindi le condizioni nelle 3) del Teorema precedente sono soddisfatte e la serie di Fourier di f converge a $\frac{1}{2}$ in ogni punto $t = m$, $m \in \mathbb{Z}$.

La convergenza a \tilde{f} è uniforme in ogni intervallo chiuso $[c, d] \subset (m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$ in quanto su tali intervalli \tilde{f} è di classe C^1 .

Enunciamo infine una relazione fra l'integrale di $f^2(t)$ e la serie dei coefficienti Fourier di questo.

Identità di Parseval

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che f^2 sia integabile su $[a,b]$. Allora le serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$ sono convergenti (a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di f su $[a,b]$) e mi ha

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$$

↳ identità di Parseval

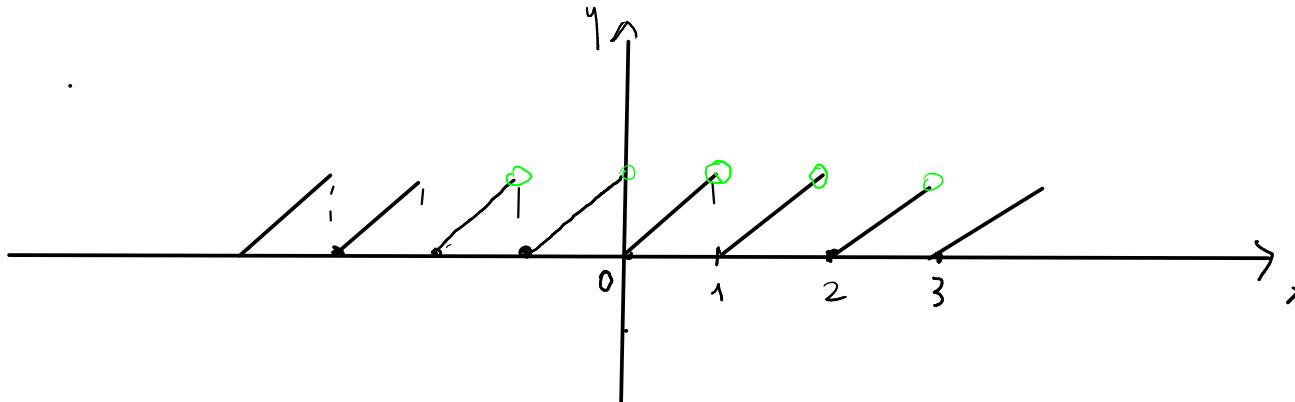
Si tenga presente che su alcuni testi l'identità di Parseval viene scritta così

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 .$$

La differenza con le formule evidenziate qui sopra sta nel primo termine della serie degli a_k che è dato da $\frac{a_0^2}{4}$.

Questa differenza è ovvia al fatto che in tali testi a_0 è definito come $\frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ e non come $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ (ovviamente con tale definizione il primo termine nella serie di Fourier diviene $\frac{a_0}{2}$).

- Suivere le sue di Fourier della funzione $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$
e studiare la convergenza puntuale e uniforme



Sue di Fourier di f in $[0,1]$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{1} \int_0^1 f(t) \cos\left(\frac{2\pi k t}{1}\right) dt = 2 \int_0^1 t \cos(2\pi k t) dt = \\ &= 2 \left[t \frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k} dt \end{aligned}$$

$$= 0 + \frac{1}{k\pi} \left[\frac{\cos(2\pi kt)}{2k\pi} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left[\frac{1}{2k\pi} - \frac{1}{2k\pi} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} b_k &= 2 \int_0^1 t \sin(2k\pi t) dt = 2 \left[-t \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} dt \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2k\pi} \right) + 2 \left[\frac{\sin(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{k\pi} \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \sin(2\pi kt) \quad \text{Tale serie converge puntualmente a } \tilde{f},$$

ove \tilde{f} è il prolungamento a \mathbb{R} periodico di periodo 1 di f ,

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ e converge a $\frac{1}{2}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$ dato da

$\forall t \in \mathbb{Z}$, $\sin(2\pi kt) = 0$, $\forall k$, e quindi la serie si riduce al solo termine $a_0 = \frac{1}{2}$

D'altra parte:

\tilde{f} ha discontinuità di I specie in ogni punto $t \in \mathbb{Z}$:

Oltre a $\tilde{f}(t) = t - m$, se $t \in [m, m+1]$, $m \in \mathbb{Z}$ e dunque

$$\lim_{\substack{\sim \\ t \rightarrow m^+}} \tilde{f}(t) = \lim_{\substack{\sim \\ t \rightarrow m^+}} (t - m) = 0$$

$$\text{e } \lim_{\substack{\sim \\ t \rightarrow m^-}} \tilde{f}(t) = \lim_{\substack{\sim \\ t \rightarrow m^-}} t - (m-1) = 1 = \tilde{f}(m^-);$$

e inoltre i seguenti limiti esistono e sono finiti

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m^+)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m+h - m - 0}{h} = 1$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{f}(m+h) - \tilde{f}(m^-)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{m+h - (m-1) - 1}{h} = 1$$

Infini la serie converge a \tilde{f} uniformemente in ogni intervallo chiuso $[c, d] \subset (m, m+1)$

oltre che \tilde{f} è di classe C^1 su tali intervalli.

Ricaviamo che la serie dei segni è quella dei valori di f .

L'estensione chisponi di f sull'intervallo $(-1, 1)$ è ovviamente data da $h(x) = x$. Estendiamo h per periodicità a \mathbb{R} con periodo 2 (convenzione di assegnare in -1 il valore -1). Denotiamo con \tilde{h} tale estensione.

$$\begin{aligned} \text{Poiché } \tilde{h} \text{ è dispari } a_k &= 0, \forall k; b_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x \sin\left(\frac{2\pi}{2} kx\right) dx = 2 \int_0^1 x \sin(k\pi x) dx \\ &= -\left[x \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} dx = -2\left(\frac{(-1)^k}{k\pi} - 0\right) + 2 \left[\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_0^1 \\ &= -2 \frac{(-1)^k}{k\pi} + 0 \end{aligned}$$

Quindi la serie dei segni di Fourier è data da $-2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi x)$

Tale serie dunque converge a \tilde{h} in $\mathbb{R} \setminus \{2m+1\}_{m \in \mathbb{Z}}$, uniformemente in ogni intervallo chiuso $[c, d] \subset (2m+1, 2m+3)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Nei punti $x = 2m+1$, $m \in \mathbb{Z}$ converge a 0

Per l'identità di Parseval deve essere $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-2 \frac{(-1)^k}{k\pi}\right)^2$, quindi abbiamo che

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{cioè} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Estendiamo ora f a $[-1, 1]$ come funzione pari. Tale estensione è funzione $\tilde{l}(x) = |x| \quad x \in [-1, 1]$. Ricaviamo la serie di Fourier di \tilde{l} .

Questa volta $b_k = 0$ perché \tilde{l} è pari

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}; \quad a_k = 2 \int_0^1 x \cos\left(\frac{2\pi k x}{2}\right) dx = \\ &= 2 \left[x \frac{\sin(\pi k x)}{\pi k} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(\pi k x)}{\pi k} dx = 2 + 2 \left. \frac{\cos(\pi k x)}{(\pi k)^2} \right|_0^1 = \\ &= 2 \left(\frac{(-1)^k}{(\pi k)^2} - \frac{1}{(\pi k)^2} \right) = \begin{cases} 0 & se k \in \text{pomi} \\ -\frac{2}{(\pi k)^2} & k \notin \text{pomi} \end{cases} \end{aligned}$$

Allora la serie dei coenili di f è data da

$$\frac{1}{2} - 2 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{[\pi(2h+1)]^2} \cos(\pi(2h+1)x) \quad \text{Data che } \tilde{l}, \text{ estensione periodica di } l \text{ a } \mathbb{R}$$

Così periodo 2 è continuo e oltrivoltile ovunque tranne che nei punti $x = m \in \mathbb{Z}$, dove comunque esistono finiti derivate destre e sinistre, la convergenza di tale serie di \tilde{l} , estensione periodica di l a \mathbb{R} con periodo 2, è uniforme su \mathbb{R} .

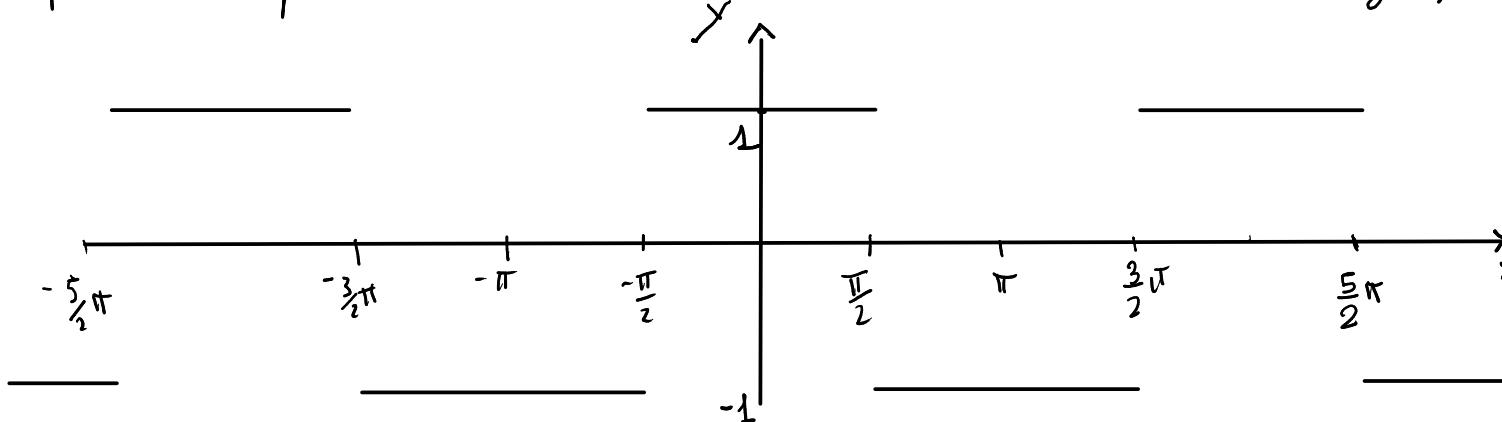
- Scrivere la serie di Fourier della funzione f pari, definita in $[0, \pi]$ da

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & \text{se } t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Discutere la convergenza puntuale e uniforme.

Dimostrare la formula $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.

(Si noti che f è obliqua solo su $[0, \pi]$, ma poiché abbiamo l'informazione che è pari e 2π periodica possiamo "ricostruirla" su \mathbb{R} . Il suo grafico è:



Dato che f è pari, $b_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(kt) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(kt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k} + \frac{2}{\pi} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k} = \frac{4}{k\pi} \sin(k\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

= $\begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1 \\ & h \in \mathbb{N} \end{cases}$ (caso K dispari)

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2h+1} \cdot (-1)^h, \text{ con } k = 2h+1, h \in \mathbb{N}$$

Analogli la serie di Fourier di f è data da $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \cos((2h+1)t)$

Essa converge a $f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$, converge a 0 $\forall t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$;

converge uniformemente a f in ogni intervallo chiuso non contenente alcun punto del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

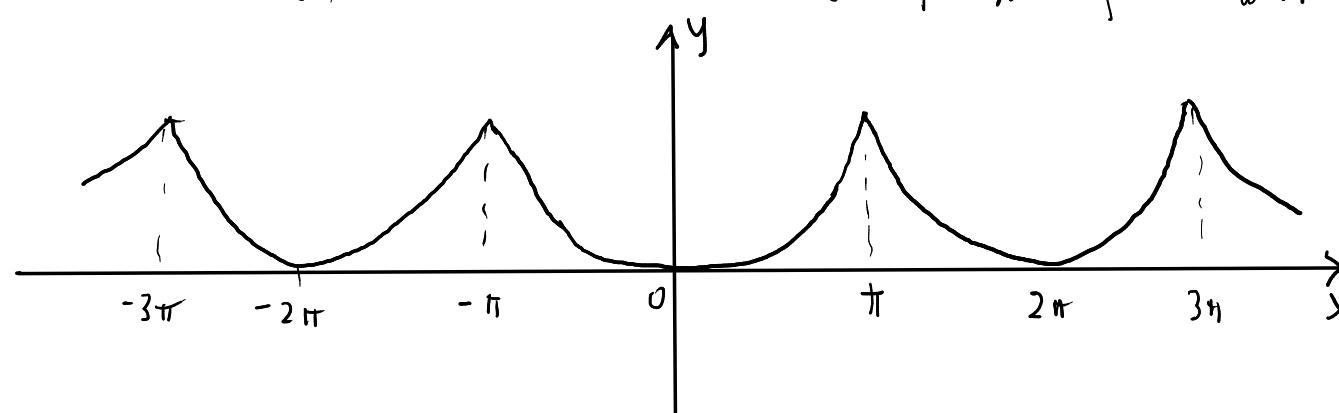
Per $t=0$ la serie olivente $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} = f(0) = 1$ de cui $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} = \frac{\pi}{4}$.

- Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = x^4$, $x \in [-\pi, \pi]$ estesa per periodicità a \mathbb{R} , con periodo 2π ,

Stabilire se la convergenza a \hat{f} (sua estensione periodica) è uniforme su \mathbb{R} .

Dimostrare, infine, che: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

L'estensione periodica di f , che denotiamo con \hat{f} ha questo andamento



Tale funzione è poi quindi i coefficienti b_k sono nulli $\forall k \geq 1, k \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{5} \pi^5 = \frac{\pi^4}{5}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 \cos(kt) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} \left[t^4 \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi - \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi 4t^3 \sin(kt) dt = \\
 &= \frac{2}{k\pi} \left[\frac{4t^3 \cos(kt)}{k} \right]_0^\pi - \frac{8}{k^2\pi} \int_0^\pi 3t^2 \cos(kt) dt = \\
 &= \frac{2}{k^2\pi} 4\pi^3 (-1)^k - \frac{8}{k^3\pi} \left[3t^2 \sin(kt) \right]_0^\pi + \frac{24}{k^3\pi} \int_0^\pi 2t \sin(kt) dt \\
 &= \frac{8\pi^2}{k^2} (-1)^k - \frac{48}{k^3\pi} \left[t \frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi + \frac{48}{k^4\pi} \int_0^\pi \cos(kt) dt \\
 &= \frac{8\pi^2}{k^2} (-1)^k - \frac{48}{k^4\pi} \pi (-1)^k + \frac{48}{k^4\pi} \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi = (-1)^k \left[\frac{8\pi^2}{k^2} - \frac{48}{k^4} \right]
 \end{aligned}$$

La serie di Fourier di f è quindi:

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{8\pi^2}{k^2} - \frac{48}{k^4} \right) \cos(kt) \quad (\square)$$

e converge uniformemente (e quindi puntualmente) su \mathbb{R} dato che la sua estensione periodica su \mathbb{R} di periodo 2π e

continua su \mathbb{R} ed è olorabile con derivate continue su $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2m\pi\}_{m \in \mathbb{Z}}$ e nei punti dove non è derivabile, cioè $\{\pi + 2m\pi\}_{m \in \mathbb{Z}}$, esistono finite le derivate destra e le derivate sinistra.

Vediamo (□) che $t = \pi$, poiché $\cos(kt) = (-1)^k$, otteniamo

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8\pi^2}{k^2} - \sum_{k=1}^{-\infty} \frac{48}{k^4} = f(\pi) = \pi^4$$

$$\text{da cui } 48 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{5} - \pi^4 + 8\pi^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \\ = -\frac{4}{5}\pi^4 + 8\pi^2 \frac{\pi^2}{6} = \frac{8}{15}\pi^4$$

$$\text{e quindi } \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{48} \cdot \frac{8}{15} \pi^4 = \frac{\pi^4}{90}$$

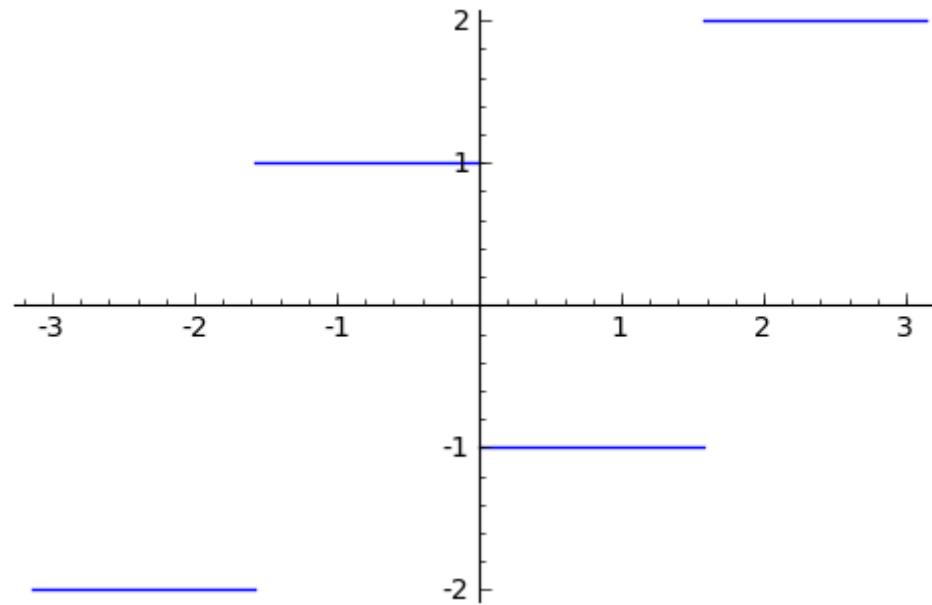
serie di Fourier

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \in (-\pi, -\pi/2) \\ 1 & \text{se } x \in (-\pi/2, 0) \\ -1 & \text{se } x \in (0, \pi/2) \\ 2 & \text{se } x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

estesa per periodicità su \mathbb{R}

```
f1(x) = -1
f2(x) = 2
f3(x) = 1
f4(x) = -2
f = Piecewise([[-pi,-pi/2],f4],[-pi/2,0],f3),[(0,pi/2],f1],[pi/2,pi],f2])
g = Piecewise([[-2*pi,-(3/2)*pi],f1],[-(3/2)*pi,-pi],f2),[(-pi,-pi/2],f4),[-pi/2,0],f3],
[(0,pi/2],f1),[(pi/2,pi],f2),[(pi,(3/2)*pi],f4),[((3/2)*pi,2*pi],f3]])
a = plot(f)
show(a, aspect_ratio = 1, figsize = 5)
```



Possiamo calcolare i coefficienti di Fourier di f . Ad esempio il coefficiente di indice 6 della serie dei coseni è 0 (così come tutti quanti gli altri, dato che f è dispari) mentre il coefficiente di indice 6 della serie dei seni è uguale a $\frac{2}{7\pi}$

```
f.fourier_series_cosine_coefficient(7, pi)
```

```
0
```

```
f.fourier_series_sine_coefficient(7, pi)
```

```
 $\frac{2}{7\pi}$ 
```

Nelle stringhe qui sopra, come nelle successive, il numero 'pi' tra parentesi indica che f è stata prolungata per periodicità su \mathbb{R} con periodo 2π e che se ne sta considerando lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Possiamo anche ottenere una qualunque somma parziale della serie di Fourier. Ad esempio la somma parziale di indice 7 è uguale a:

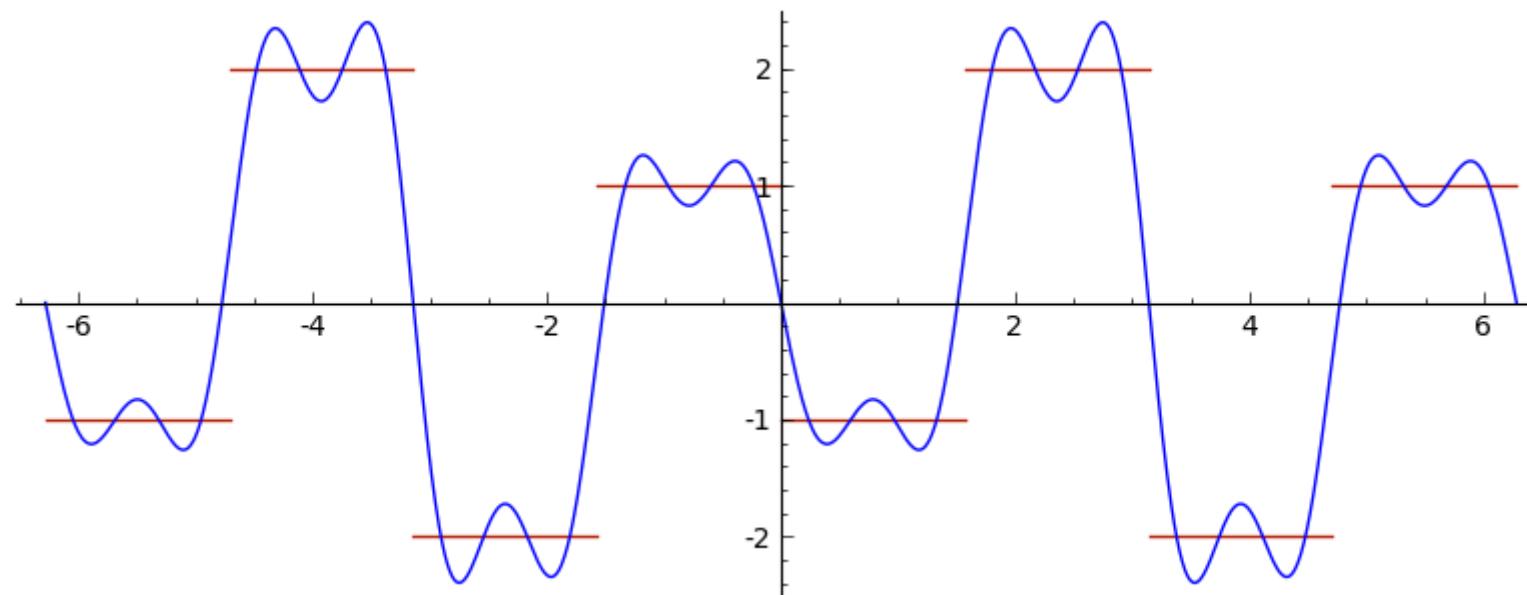
$$\begin{aligned} & f.\text{fourier_series_partial_sum}(8,\pi) \\ & -\frac{6 \sin(2x)}{\pi} + \frac{2 \sin(3x)}{3\pi} + \frac{2 \sin(5x)}{5\pi} - \frac{2 \sin(6x)}{\pi} + \frac{2 \sin(7x)}{7\pi} + \frac{2 \sin(x)}{\pi} \end{aligned}$$

Disegniamo infine la funzione f (in rosso) e la somma parziale di indice 7 e poi di indice 14 della sua serie di Fourier (in blù); ad esempio nell'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$ abbiamo

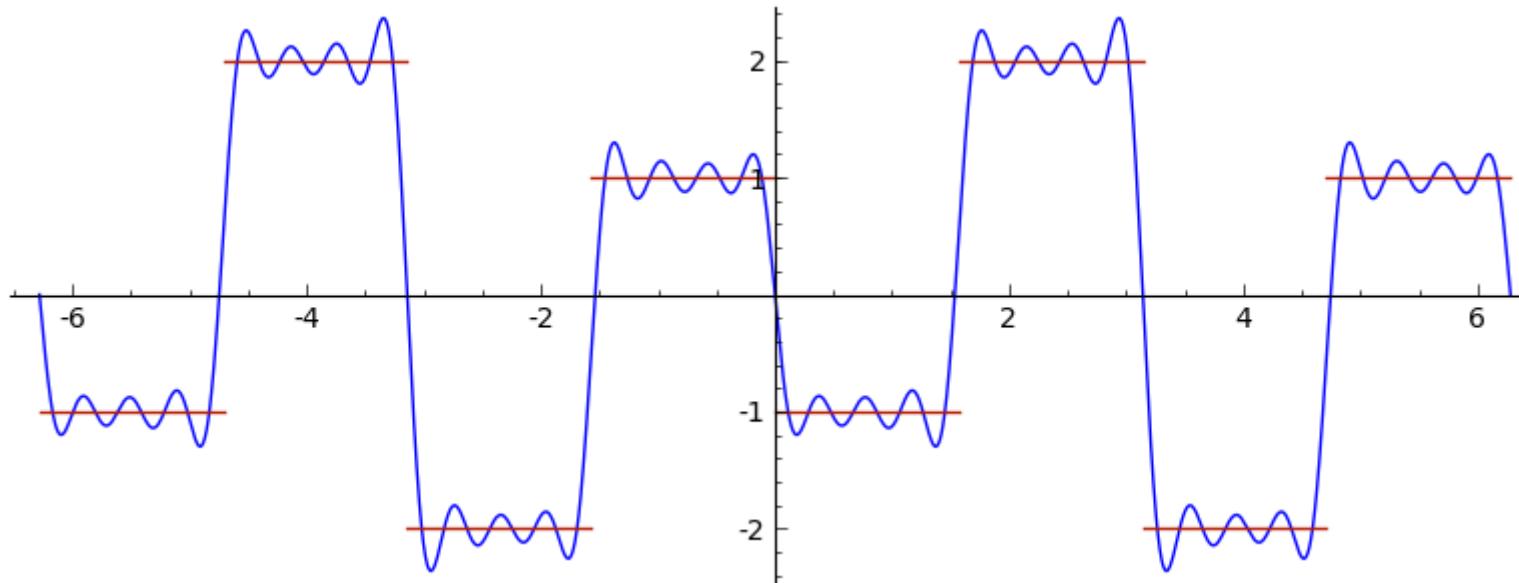
```
b = g.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0), plot_points=40)
```

```
c= f.plot_fourier_series_partial_sum(8,pi, -2*pi,2*pi)
```

```
show(b + c, aspect_ratio=1)
```



```
d = f.plot_fourier_series_partial_sum(15,pi,-2*pi,2*pi)
show(d + b, aspect_ratio=1)
```



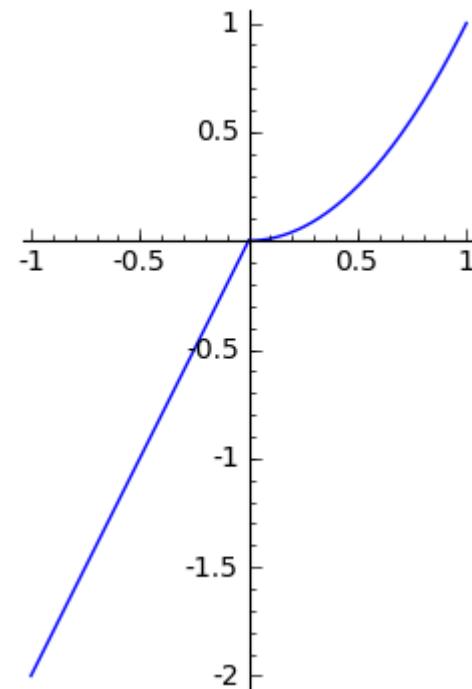
Vediamo un altro esempio. Consideriamo la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in (-1, 0) \\ x^2 & \text{se } x \in [0, 1) \end{cases}$$

estesa per periodicità su \mathbb{R} con periodo 2, scriviamo la somma parziale di indice 5 e infine confrontiamo i grafici di h (in rosso) e della somma parziale di indice 5 della sua serie di Fourier (in blu) nell'intervallo $[-1, 1]$.

```

h1(x)= x^2
h2(x)= 2*x
h = Piecewise([[( -1,0),h2],[(0,1),h1]])
a = plot(h)
show(a, aspect_ratio=1, figsize = 5)
    
```

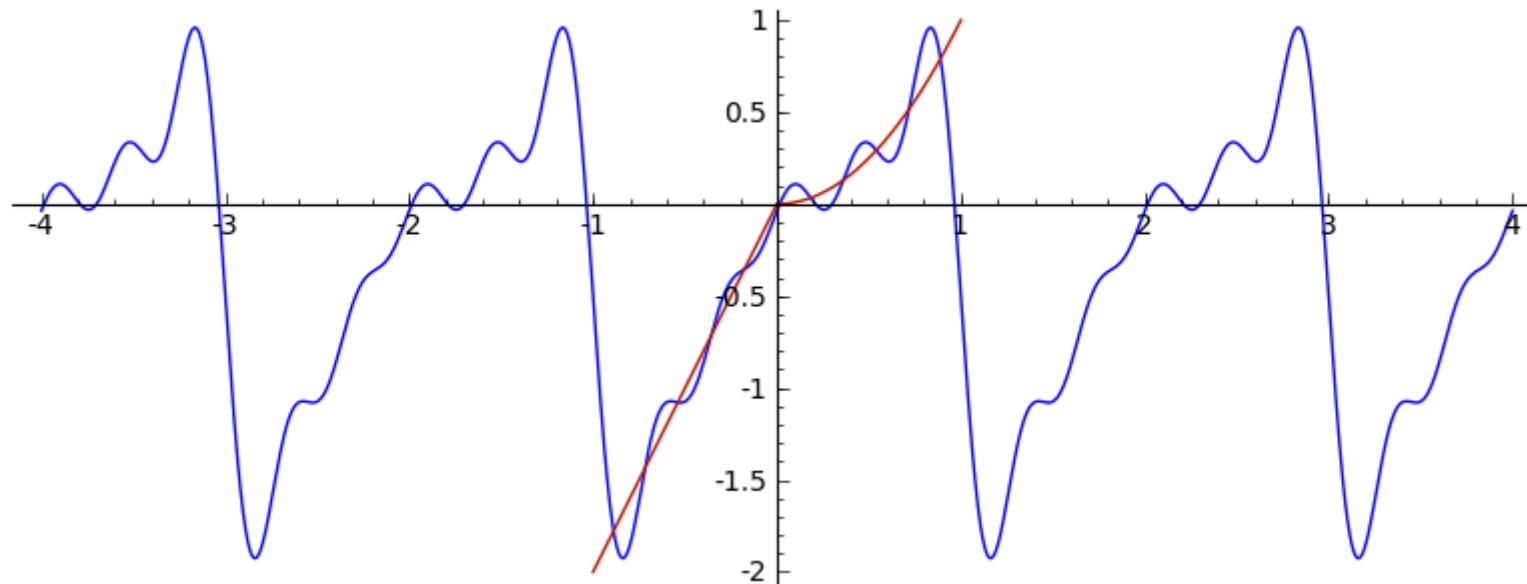


```
h.fourier_series_partial_sum(6,1)
```

$$\frac{3 \sin(\pi x)}{\pi} - \frac{3 \sin(2 \pi x)}{2 \pi} + \frac{\sin(3 \pi x)}{\pi} - \frac{3 \sin(4 \pi x)}{4 \pi} + \frac{3 \sin(5 \pi x)}{5 \pi} + \frac{2 \cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{\cos(2 \pi x)}{2 \pi^2} + \frac{2 \cos(3 \pi x)}{9 \pi^2} + \frac{\cos(4 \pi x)}{8 \pi^2} + \frac{2 \cos(5 \pi x)}{25 \pi^2} - \frac{4 \sin(\pi x)}{\pi^3} -$$

```
b = h.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0), plot_points=40)
c = h.plot_fourier_series_partial_sum(6,1,-4,4)
```

```
show(c + b, aspect_ratio=1)
```



Infine un esempio di una funzione il cui prolungamento periodico su \mathbb{R} è una funzione continua in ogni punto. Consideriamo la funzione

$$l(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in (-1, 0) \\ x^2 & \text{se } x \in [0, 1) \end{cases}$$

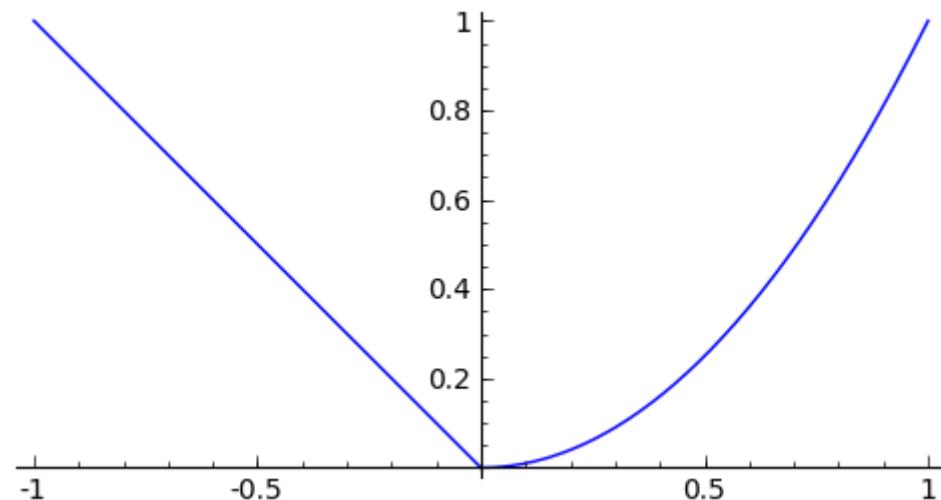
estesa per periodicità su \mathbb{R} con periodo 2 e confrontiamo i grafici di l (in rosso) e della somma parziale di indice 4 della sua serie di Fourier nell'intervallo $[-1, 1]$.

```

11(x)= x^2
12(x)= -x
l = Piecewise([[-1,0],12],[[0,1],11])
a = plot(l)

```

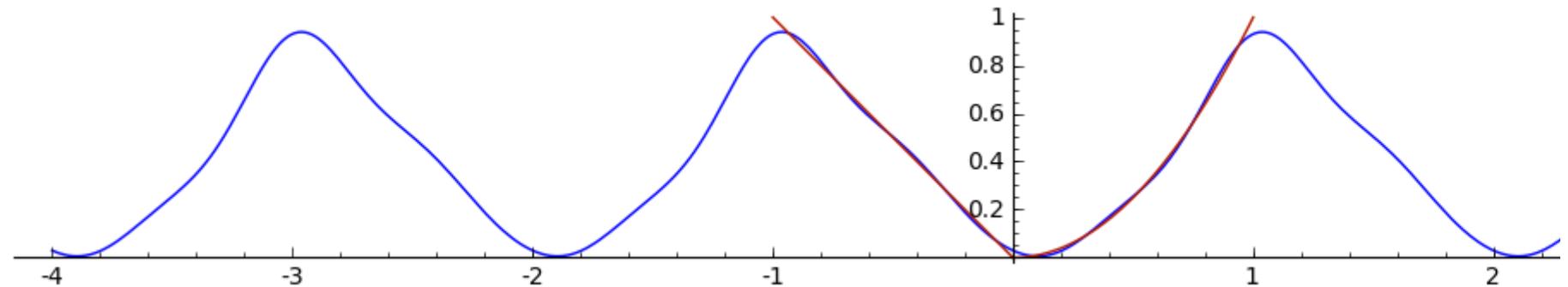
```
show(a, aspect_ratio=1, figsize = 5)
```



```
b = l.plot(rgbcolor=(0.7,0.1,0), plot_points=40)
```

```
c = l.plot_fourier_series_partial_sum(5,1,-4,4)
```

```
show(c + b, aspect_ratio=1, figsize = 12)
```



Come si vede, grazie alla maggiore regolarità dell'estensione periodica di l rispetto ai due casi precedenti, la somma parziale di indice 4 già approssima l in modo pressoché perfetto.

