Politecnico di Bari

Corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Informatica (corso A)

Tracce di esame AA 2003-2004

Docenti: Prof.ssa G. Cerami, Dr. E. Caponio

A.A. 2003/2004 Esonero 07 Novembre 2003 Traccia A

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \Big(\log(3 - \sqrt{x+1})\Big)^{\sqrt{xe^x}}.$$

2) A partire dal grafico della funzione $f(x) = \log x$, tracciare il grafico delle funzioni

$$g(x) = \log(x-1) \qquad\qquad h(x) = \log|x|.$$

3) Si considerino le funzioni $f(x) = 1 + x$ e $g(x) = \arctan x$. Determinare $f \circ g$, $g \circ f$ e il loro insieme immagine.

4) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x^3 - 2x}{x + \tan x}.$$

5) Stabilire se esiste una soluzione negativa dell'equazione

$$\arctan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - |x|^{\sqrt{2}} = 0.$$

A.A. 2003/2004 Esonero 07 Novembre 2003 Traccia B

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)^{\log(2-\sqrt{x+1})}.$$

2) A partire dal grafico della funzione $f(x) = e^x$, tracciare il grafico delle funzioni

$$g(x) = e^{x+1} \qquad\qquad h(x) = e^{|x|}.$$

3) Si considerino le funzioni $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ e $g(x) = \sin x$. Determinare $f \circ g$, $g \circ f$ e il loro insieme immagine.

4) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x - \tan x}{x + \log(x+1)}.$$

5) Stabilire se esiste una soluzione positiva dell'equazione

$$e^{-x^2+x} - \sqrt{|x|} = 0.$$

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{xe^x}\right)^{\sqrt{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}}.$$

2) A partire dal grafico della funzione $f(x) = x^3$, tracciare il grafico delle funzioni

$$g(x) = (x-1)^3 \qquad\qquad h(x) = |x|^3.$$

3) Si considerino le funzioni $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ e $g(x) = \cos x$. Determinare $f \circ g$, $g \circ f$ e il loro insieme immagine.

4) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{\sin x}.$$

5) Stabilire se esiste una soluzione negativa dell'equazione

$$e^x + \arctan\left(\frac{3x^3}{2x^2+1}\right) = 0.$$

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \left(\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)^{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

2) A partire dal grafico della funzione $f(x) = \arctan x$, tracciare il grafico delle funzioni

$$g(x) = \arctan(x-1) \qquad\qquad h(x) = \arctan|x|.$$

3) Si considerino le funzioni $f(x) = x - 1$ e $g(x) = e^{-x}$. Determinare $f \circ g$, $g \circ f$ e il loro insieme immagine.

4) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - 2x^2}{\tan x + x}.$$

5) Stabilire se esiste una soluzione positiva dell'equazione

$$\log(x^2+1) - e^{-x} = 0.$$

A.A. 2003/2004 Esonero 15 Dicembre 2003 Traccia A

1) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e massimo della funzione

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - x|x| + 2x}{x^2 - 1} \right|.$$

2) Determinare, mediante il calcolo differenziale, il numero di radici reali del polinomio

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1.$$

3) Enunciare il Teorema di Lagrange. Utilizzarlo poi per stabilire se una funzione $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, continua in $[-2,2]$, derivabile in $(-2,2)$ e tale che $f(0) = 0$ e $|f'(x)| > \frac{1}{2}$ per ogni $x \in (-2,2)$ può assumere in almeno uno degli estremi dell'intervallo $[-2,2]$ il valore -1.

4) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\log(2x+1)} \right).$$

5) Calcolare l'integrale

$$\int_0^\pi e^{2x} \sin x \mathrm{d}x.$$

6) Sia $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ e $w = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$. Calcolare le forme polari di zw e $\dfrac{z}{w}$ scrivendo prima z e w in forma polare.

A.A. 2003/2004 Esonero 15 Dicembre 2003 Traccia B

1) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e massimo della funzione

$$f(x) = \left| \frac{-x^2 + x|x| - 4x}{4 - x^2} \right|.$$

2) Determinare, mediante il calcolo differenziale, il numero di radici reali del polinomio

$$p(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 3.$$

3) Enunciare il Teorema di Lagrange. Utilizzarlo poi per stabilire se una funzione $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, continua in $[-1,1]$, derivabile in $(-1,1)$ e tale che $f(0) = 1$ e $|f'(x)| < 2$ per ogni $x \in (-1,1)$ può assumere in almeno uno degli estremi dell'intervallo $[-1,1]$ il valore -2.

4) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\log(x^2+1)} - \frac{1}{\sin x^2} \right).$$

5) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi} 2e^{2x} \cos x \mathrm{d}x.$$

6) Sia $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ e $w = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$. Calcolare le forme polari di zw e $\dfrac{z}{w}$ scrivendo prima z e w in forma polare.

1) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e massimo della funzione

$$f(x) = \left| \frac{x^2 + x|x| - 2x}{1 - x^2} \right| .$$

2) Determinare, mediante il calcolo differenziale, il numero di radici reali del polinomio

$$p(x) - 4x^3 + x^2 + 2x + 4.$$

3) Enunciare il Teorema di Lagrange. Utilizzarlo poi per stabilire se una funzione $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, continua in $[-1,1]$, derivabile in $(-1,1)$ e tale che $f(0) = -1$ e $|f'(x)| > 2$ per ogni $x \in (-1,1)$ può assumere in almeno uno degli estremi dell'intervallo $[-1,1]$ il valore 1.

4) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x} - 1} - \frac{1}{\sin 2x} \right) .$$

5) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi} 2e^{-3x} \cos x \mathrm{d}x.$$

6) Sia $z = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ e $w = -1 + \mathrm{i}$. Calcolare le forme polari di zw e $\dfrac{z}{w}$ scrivendo prima z e w in forma polare.

1) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e massimo della funzione

$$f(x) = \left| \frac{-x^2 + x|x| + x}{4x^2 - 1} \right|.$$

2) Determinare, mediante il calcolo differenziale, il numero di radici reali del polinomio

$$p(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 1.$$

3) Enunciare il Teorema di Lagrange. Utilizzarlo poi per stabilire se una funzione $f\colon [-2, 2] \to \mathbb{R}$, continua in $[-2, 2]$, derivabile in $(-2, 2)$ e tale che $f(0) = 0$ e $|f'(x)| < \frac{1}{4}$ per ogni $x \in (-2, 2)$ può assumere in almeno uno degli estremi dell'intervallo $[-2, 2]$ il valore $-\frac{1}{2}$.

4) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x^2} - \frac{1}{e^{x^2} - 1} \right).$$

5) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi} e^{-3x} \sin x \mathrm{d}x.$$

6) Sia $z = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$ e $w = 1 - \mathrm{i}$. Calcolare le forme polari di zw e $\dfrac{z}{w}$ scrivendo prima z e w in forma polare.

A.A. 2003/2004 Esonero 8 Gennaio 2004 Traccia A

1) Si consideri la funzione
$$f(x) = \cos^2 x - \log(\cos x).$$
Si determinino gli asintoti, la monotonia e i punti di minimo e massimo di f.

2) Scrivere la formula di Taylor di centro il punto 0 e di ordine 2 della funzione
$$f(x) = \sin^3(\log(1 + x)).$$

3) Sia $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 9$. Mostrare che f assume almeno una volta il valore 3 nell'intervallo $[1,4]$.

4) Calcolare l'integrale
$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{1 - \sin x}\mathrm{d}x.$$

5) Risolvere l'equazione
$$(z + \mathrm{i})^3 = \frac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}.$$

A.A. 2003/2004 Esonero 8 Gennaio 2004 Traccia B

1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin^2 x - \log(\sin x).$$

Si determinino gli asintoti, la monotonia e i punti di minimo e massimo di f.

2) Scrivere la formula di Taylor di centro il punto 0 e di ordine 2 della funzione

$$f(x) = \cos^3(\log(1 + x)).$$

3) Sia $f\colon [0, 5] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 10$. Mostrare che f assume almeno una volta il valore 2 nell'intervallo $[0, 5]$.

4) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x}\mathrm{d}x.$$

5) Risolvere l'equazione

$$(z + \mathrm{i})^3 = \frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}.$$

A.A. 2003/2004 Appello 15 Dicembre 2003 Traccia A

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) - \log\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}.$$

2) Sia $f(x) = 2(1+x)^2$ e $g(x) = \log x$. Determinare $f \circ g$ e il suo insieme immagine.

3) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e massimo della funzione

$$f(x) = \left|\frac{x^2 - x|x| + 2x}{x^2-1}\right|.$$

4) Determinare, mediante il calcolo differenziale, il numero di radici reali del polinomio

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1.$$

5) Enunciare il Teorema di Lagrange. Utilizzarlo poi per stabilire se una funzione $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, continua in $[-2,2]$, derivabile in $(-2,2)$ e tale che $f(0) = 0$ e $|f'(x)| > \frac{1}{2}$ per ogni $x \in (-2,2)$ può assumere in almeno uno degli estremi dell'intervallo $[-2,2]$ il valore -1.

6) Calcolare, sia utilizzando il Teorema di De L'Hopital sia non facendone uso, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\sin^2 x + 1)}{x}.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\int_0^\pi e^{2x} \sin x \mathrm{d}x.$$

8) Sia $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ e $w = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$. Calcolare le forme polari di zw e $\dfrac{z}{w}$ scrivendo prima z e w in forma polare.

A.A. 2003/2004 Appello 15 Dicembre 2003 Traccia B

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{1+x}{x^2-1}\right) + \log x}.$$

2) Sia $f(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)$ e $g(x) = \mathrm{e}^x$. Determinare $f \circ g$ e il suo insieme immagine.

3) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e massimo della funzione

$$f(x) = \left|\frac{-x^2 + x|x| - 4x}{4-x^2}\right|.$$

4) Determinare, mediante il calcolo differenziale, il numero di radici reali del polinomio

$$p(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 3.$$

5) Enunciare il Teorema di Lagrange. Utilizzarlo poi per stabilire se una funzione $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, continua in $[-1,1]$, derivabile in $(-1,1)$ e tale che $f(0) = 1$ e $|f'(x)| < 2$ per ogni $x \in (-1,1)$ può assumere in almeno uno degli estremi dell'intervallo $[-1,1]$ il valore -2.

6) Calcolare, sia utilizzando il Teorema di De L'Hopital sia non facendone uso, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\mathrm{tg}^2 x + 1)}{x}.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi} 2e^{2x} \cos x \mathrm{d}x.$$

8) Sia $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ e $w = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$. Calcolare le forme polari di zw e $\dfrac{z}{w}$ scrivendo prima z e w in forma polare.

A.A. 2003/2004 Apppello 15 Dicembre 2003 Traccia C

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log(3-x) + \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}.$$

2) Sia $f(x) = 2(x-1)$ e $g(x) = \arctan x$. Determinare $f \circ g$ e il suo insieme immagine.

3) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e massimo della funzione

$$f(x) = \left|\frac{x^2 + x|x| - 2x}{1 - x^2}\right|.$$

4) Determinare, mediante il calcolo differenziale, il numero di radici reali del polinomio

$$p(x) - 4x^3 + x^2 + 2x + 4.$$

5) Enunciare il Teorema di Lagrange. Utilizzarlo poi per stabilire se una funzione $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, continua in $[-1,1]$, derivabile in $(-1,1)$ e tale che $f(0) = -1$ e $|f'(x)| > 2$ per ogni $x \in (-1,1)$ può assumere in almeno uno degli estremi dell'intervallo $[-1,1]$ il valore 1.

6) Calcolare, sia utilizzando il Teorema di De L'Hopital sia non facendone uso, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin^2 x} - 1}{x}.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi} 2e^{-3x} \cos x \mathrm{d}x.$$

8) Sia $z = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ e $w = -1 + \mathrm{i}$. Calcolare le forme polari di zw e $\dfrac{z}{w}$ scrivendo prima z e w in forma polare.

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{2x - x^3}{x+1}\right) - \log\left(\frac{x^2 + x - x^3}{x+1}\right)}.$$

2) Sia $f(x) = \dfrac{1-x}{2}$ e $g(x) = \sin x$. Determinare $f \circ g$ e il suo insieme immagine.

3) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e massimo della funzione

$$f(x) = \left|\frac{-x^2 + x|x| + x}{4x^2 - 1}\right|.$$

4) Determinare, mediante il calcolo differenziale, il numero di radici reali del polinomio

$$p(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 1.$$

5) Enunciare il Teorema di Lagrange. Utilizzarlo poi per stabilire se una funzione $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, continua in $[-2,2]$, derivabile in $(-2,2)$ e tale che $f(0) = 0$ e $|f'(x)| < \frac{1}{4}$ per ogni $x \in (-2,2)$ può assumere in almeno uno degli estremi dell'intervallo $[-2,2]$ il valore $-\frac{1}{2}$.

6) Calcolare, sia utilizzando il Teorema di De L'Hopital sia non facendone uso, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\tan^2 x} - 1}{x}.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi} e^{-3x} \sin x \mathrm{d}x.$$

8) Sia $z = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$ e $w = 1 - \mathrm{i}$. Calcolare le forme polari di zw e $\dfrac{z}{w}$ scrivendo prima z e w in forma polare.

A.A. 2003/2004 Appello 8 Gennaio 2004 Traccia A

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x+2}{x-1}\right) + \frac{1}{x+1}.$$

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+a^2) & \text{se } x \geq 0 \\ -b + \tan x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di a e b in $\mathbb{R}$, f risulta continua in 0 e per quali valori risulta derivabile in 0.

3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\log(1-x^2)\right).$$

Si determini il suo insieme di definizione e si verifichi che f è prolungabile per continuità agli estremi di tale insieme. Si consideri poi $\tilde{f}$, il prolungamento per continuità di f, e si calcolino i punti di minimo e di massimo assoluto di $\tilde{f}$.

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}\, e^{\frac{1}{x^2-1}}.$$

5) Sia $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 9$. Mostrare che f assume almeno una volta il valore 3 nell'intervallo $[1,4]$.

6) Calcolare l'integrale

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{1-\sin x}\mathrm{d}x.$$

7) Risolvere l'equazione

$$(z+\mathrm{i})^3 = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

A.A. 2003/2004 Appello 8 Gennaio 2004 Traccia B

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) + \frac{1}{x-1}.$$

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a(e^{x^2} + x) & \text{se } x \geq 0 \\ b + \tan x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di a e b in $\mathbb{R}$, f risulta continua in 0 e per quali valori risulta derivabile in 0.

3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\log(4 - x^2)\right).$$

Si determini il suo insieme di definizione e si verifichi che f è prolungabile per continuità agli estremi di tale insieme. Si consideri poi $\tilde{f}$, il prolungamento per continuità di f, e si calcolino i punti di minimo e di massimo assoluto di $\tilde{f}$.

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\, e^{\frac{1}{1-x^2}}.$$

5) Sia $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 10$. Mostrare che f assume almeno una volta il valore 2 nell'intervallo $[0,5]$.

6) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x.$$

7) Risolvere l'equazione

$$(z + \mathrm{i})^3 = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}.$$

A.A. 2003/2004 Appello 8 Gennaio 2004 Traccia C

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \arccos\left(\frac{x-2}{x+1}\right) + \frac{1}{x-1}.$$

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(a^2 + x) & \text{se } x \geq 0 \\ b + \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di a e b in $\mathbb{R}$, f risulta continua in 0 e per quali valori risulta derivabile in 0.

3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Si determini il suo insieme di definizione e si verifichi che f è prolungabile per continuità agli estremi di tale insieme. Si consideri poi $\tilde{f}$, il prolungamento per continuità di f, e si calcolino i punti di minimo e di massimo assoluto di $\tilde{f}$.

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x-2}\, e^{\frac{1}{x^2-4}}.$$

5) Sia $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 9$. Mostrare che f assume almeno una volta il valore 3 nell'intervallo $[0,3]$.

6) Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2}{1-\cos x}\mathrm{d}x.$$

7) Risolvere l'equazione

$$(z-\mathrm{i})^3 = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

A.A. 2003/2004 Appello 8 Gennaio 2004 Traccia D

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) + \frac{1}{x+1}.$$

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a(e^{x^2} - x) & \text{se } x \geq 0 \\ b + \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di a e b in $\mathbb{R}$, f risulta continua in 0 e per quali valori risulta derivabile in 0.

3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right).$$

Si determini il suo insieme di definizione e si verifichi che f è prolungabile per continuità agli estremi di tale insieme. Si consideri poi $\tilde{f}$, il prolungamento per continuità di f, e si calcolino i punti di minimo e di massimo assoluto di $\tilde{f}$.

4) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 2^-} \sqrt{2-x}\, e^{\frac{1}{4-x^2}}.$$

5) Sia $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 20$. Mostrare che f assume almeno una volta il valore 5 nell'intervallo $[0,4]$.

6) Calcolare l'integrale

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{2}{\sin x - 1}\mathrm{d}x.$$

7) Risolvere l'equazione

$$(z-\mathrm{i})^3 = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}.$$

A.A. 2003/2004 Appello 29 Marzo 2004 Traccia A

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \tan(e^{2x} - \pi).$$

2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x + \arcsin(2x^2)}{2x^2 - x}.$$

3) Enunciare il Teorema di Waierstrass. Fornire poi un esempio di una funzione continua su un intervallo limitato priva di punti di minimo e massimo.

4) Determinare gli asintoti e studiare la monotonia della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{1-x}\right).$$

5) Sia $g = g(y)$ la funzione inversa della funzione f nell'esercizio 4). Dopo aver indicato insieme di definizione e codominio di g, si dica se g è derivabile sul suo insieme di definizione e si determini $g'(f(x))$.

6) Calcolare l'area dell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x \arctan x\}$.

7) Sia $z \in \mathbb{C}$, tale che $|z| = 1$. Verificare che $z = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

A.A. 2003/2004 Appello 29 Marzo 2004 Traccia B

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \cot(e^{2x} - \frac{\pi}{2}).$$

2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x^2) - x\arcsin x}{x^2 + x}.$$

3) Enunciare il Teorema di Waierstrass. Fornire poi un esempio di una funzione continua su un intervallo chiuso illimitato priva di punti di massimo.

4) Determinare gli asintoti e studiare la monotonia della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1-2x}}{x}\right).$$

5) Sia $g = g(y)$ la funzione inversa della funzione f nell'esercizio 4). Dopo aver indicato insieme di definizione e codominio di g, si dica se g è derivabile sul suo insieme di definizione e si determini $g'(f(x))$.

6) Calcolare l'area dell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2 \mathrm{e}^x\}$.

7) Sia $z \in \mathbb{C}$, tale che $|z| = 1$. Verificare che $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \operatorname{ctg} x.$$

2) Dare la definizione di estremo superiore per un insieme numerico non vuoto e per una funzione reale di variabile reale. Fornire poi un esempio di una funzione con estremo superiore finito e di una con estremo superiore $+\infty$.

3) Dire quali tra le seguenti funzioni è prolungabile per continuità nel punto $x = 0$. Motivare la risposta.

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = \frac{x}{|x|} \cos x, \qquad h(x) = \frac{x}{|x|} x^2.$$

4) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \log\big(\cos(2x)\big) \log(2x^2).$$

5) Determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x) = x - \arcsin(x^2 - 1).$$

6) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sin t} \mathrm{d}t.$$

7) Verificare l'uguaglianza

$$\mathrm{e}^{-2+i\pi} = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}.$$

A.A. 2003/2004 Appello 16 Aprile 2004 Traccia B

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{9}{4}\pi^2 - x^2}} \tan x.$$

2) Dare la definizione di estremo inferiore per un insieme numerico non vuoto e per una funzione reale di variabile reale. Fornire poi un esempio di una funzione con estremo inferiore finito e di una con estremo inferiore $-\infty$.

3) Dire quali tra le seguenti funzioni è prolungabile per continuità nel punto $x = 0$. Motivare la risposta.

$$f(x) = \frac{1}{x^3}, \qquad g(x) = \frac{x}{|x|}\,\mathrm{e}^x, \qquad h(x) = \frac{x}{|x|}x.$$

4) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \log\big(\cos(3x)\big)\log(x^2).$$

5) Determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x) = x + \arccos(1 - x^2).$$

6) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t.$$

7) Verificare l'uguaglianza

$$\mathrm{e}^{-1+\mathrm{i}\pi} = -\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

A.A. 2003/2004 Appello 5 Luglio 2004 Traccia A

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x(2-x^2)} - x\right).$$

2) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Si consideri la funzione $g(x) = kf\left(\frac{x}{k}\right)$. Quale relazione intercorre tra il grafico di f e quello di g?

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x \cos \frac{1}{x}.$$

4) Enunciare il Teorema di Fermat e illustrarne con un esempio il contenuto.

5) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e massimo della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x+1}\right) - 2x.$$

6) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^2 \log(x^2-1)\mathrm{d}x.$$

7) Rappresentare graficamente l'insieme dei numeri complessi che soddisfano l'equazione

$$|z-i| = 1.$$

A.A. 2003/2004 Appello 5 Luglio 2004 Traccia B

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x(1-2x^2)} - x\right).$$

2) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si consideri la funzione $g(x) = \frac{1}{k} f(kx)$. Quale relazione intercorre tra il grafico di f e quello di g?

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x \sin\frac{1}{x}.$$

4) Enunciare il Teorema di Fermat e illustrarne con un esempio il contenuto.

5) Determinare gli asintoti e i punti di minimo e massimo della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - x.$$

6) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^2 \log(1+x^2) \mathrm{d}x.$$

7) Rappresentare graficamente l'insieme dei numeri complessi che soddisfano l'equazione

$$|z-1| = 1.$$

A.A. 2003/2004 Appello 23 Luglio 2004 Traccia A

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x^2-x-1}{x+1}} - 1}.$$

2) Dare la definizione di

1. funzione continua in un punto e in un insieme,
2. funzione derivabile in un punto e in un insieme.

Fornire poi esempi di

3. una funzione continua,
4. una funzione continua tranne che in un punto del suo insieme di definizione,
5. una funzione continua sul suo insieme di definizione e derivabile tranne che in un punto del suo insieme di definizione.

3) Stabilire per quali valori dei parametri $a,\ b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(ax) & x \geq 0 \\ ax + b & x < 0 \end{cases}$$

è derivabile in 0.

4) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari e derivabile. Verificare che la sua derivata è una funzione dispari.

5) Determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x) = \sin^2 x \cos x,$$

ristretta all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

6) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{3 - x^2}\mathrm{d}x.$$

7) Determinare, nel campo complesso, le soluzioni dell'equazione

$$z^3 - 2 + i = 0.$$

A.A. 2003/2004 Appello 23 Luglio 2004 Traccia B

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^2-x-2}{x+1}} - 1}.$$

2) Dare la definizione di

1. funzione continua in un punto e in un insieme,
2. funzione derivabile in un punto e in un insieme.

Fornire poi esempi di

3. una funzione continua,
4. una funzione continua tranne che in un punto del suo insieme di definizione,
5. una funzione continua sul suo insieme di definizione e derivabile tranne che in un punto del suo insieme di definizione.

3) Stabilire per quali valori dei parametri $a,\ b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \tan(ax) & x \geq 0 \\ ax + b & x < 0 \end{cases}$$

è derivabile in 0.

4) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dispari e derivabile. Verificare che la sua derivata è una funzione pari.

5) Determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x) = \cos^2 x \sin x,$$

ristretta all'intervallo $[0, \pi]$.

6) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x.$$

7) Determinare, nel campo complesso, le soluzioni dell'equazione

$$z^3 - 1 + 2i = 0.$$

A.A. 2003/2004 Appello 20 Settembre 2004 Traccia A

1) Dare la definizione di punto di accumulazione e di punto isolato per un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$. Dire, inoltre, giustificando le risposte con esempi, se un punto di accumulazione per X appartiene necessariamente ad X e se X può contenere sia punti di accumulazione che punti isolati.

2) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log^2\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \sqrt{x+\pi}.$$

3) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2+1} - e^{x+2}}{x^2}.$$

4) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^3+1}}{\arctan(x^2)},$$

nel punto $x = 1$.

5) Determinare gli asintoti e i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x) = \log\left(e^{\frac{x+2}{x^2-1}} + 1\right).$$

6) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sin(\log x)\mathrm{d}x.$$

7) Scrivere il numero complesso $z = \frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}$ in forma trigonometrica ed in forma esponenziale.