



**Politecnico di Bari**  
**Laurea Ingegneria Informatica e dell'Automazione**  
**Programma di Complementi di Analisi Matematica**  
*versione preliminare*  
**AA 2016-2017 Docente: Prof. E. Caponio**

La voce “(nodim)”, a fianco ad un argomento, indica che su di esso non sono state fornite dimostrazioni durante le lezioni. Pertanto tale argomento, così come gli altri senza alcun contrassegno, può essere oggetto di domande di natura teorica solo per quel che riguarda definizioni, enunciati, applicazioni, conseguenze. Le voci in blu sono quelle per cui si chiede la conoscenza di una dimostrazione.

**Funzioni complesse di variabile complessa**

La metrica e la topologia euclidea di  $\mathbb{C}$ . Parte reale e parte immaginaria di una funzione complessa. Esempi. Nozione di limite per successioni e funzioni. Continuità. Funzioni olomorfe. Operazioni con le derivate, derivata di una funzione composta. Relazioni di Cauchy-Riemann. Esempi di funzioni olomorfe e non olomorfe. Funzioni armoniche. Funzioni olomorfe aventi derivata non nulla come funzioni conformi.

**Trasformata di Laplace**

Definizione. Ascissa di convergenza. Trasformabilità di funzioni a crescita esponenziale. Esempi: trasformata della funzione di Heaviside, della funzione caratteristica di un intervallo  $[0, h]$ , della funzione  $f(t) = e^{at}$ . Linearità dell'operatore di trasformazione. Trasformata delle funzioni seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico. Delta di Dirac e sua trasformata. Trasformata di una funzione potenza. Segnali. Trasformata di una funzione riscalata, di un segnale ritardato, di un segnale “smorzato”. Ascissa di convergenza di una funzione a supporto compatto (nodim). Proprietà della trasformata: limitatezza, derivabilità (nodim). Trasformata di un segnale periodico. Esempi di trasformate di segnali periodici. Trasformata della derivata di una funzione. Trasformate della derivata di ordine  $k > 1$ . Prodotto di convoluzione di segnali e trasformata di Laplace (nodim). Trasformata della primitiva di un segnale. Applicazione alle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti. Risposta impulsiva. Funzione di trasferimento.

**Serie di potenze nel campo dei numeri complessi**

Serie numeriche in  $\mathbb{C}$ . Generalità sulle successioni e sulle serie di funzioni: definizione e nozioni di convergenza puntuale, uniforme, totale e in modulo. Teoremi sulla continuità del limite uniforme di una successione di funzioni continue e della somma di una serie di funzioni continue convergente uniformemente (nodim). Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e di integrazione termine a termine (nodim). Teorema di derivazione termine a termine (nodim). Serie di potenze. Raggio di convergenza e disco di convergenza.

Convergenza in modulo sul disco di convergenza. Convergenza totale sui compatti contenuti nel disco di convergenza. Teoremi per il calcolo del raggio di convergenza. Teorema di Abel (*nodim*). Serie geometrica, serie esponenziale, serie binomiale. Applicazione del teorema di integrazione termine a termine e del teorema di Abel per il calcolo della somma della serie armonica a segni alterni. Raggio di convergenza della serie delle derivate di una serie di potenze. Derivabilità della somma di una serie di potenze. Relazione tra il coefficiente  $n$ -esimo della serie e il valore nel centro della derivata  $n$ -esima della somma.

### **Funzioni analitiche nel campo dei numeri reali**

Nozione di funzione analitica. Condizione affinché una funzione reale sia analitica in un intervallo. Analiticità e sviluppi in serie di MacLaurin di alcune funzioni reali elementari. Funzione degli errori.

### **Funzioni olomorfe**

Integrale di una curva regolare a tratti a valori nel campo dei numeri complessi. Integrale di una funzione complessa lungo una curva regolare a tratti e sua interpretazione come coppia di integrali di due forme differenziali associate alla funzione. Richiami su curve e integrali curvilinei: parametrizzazione di una curva, curve rettificabili, lunghezza di una curva, ascissa curvilinea, integrali di I specie, invarianza di un integrale di prima specie rispetto a riparametrizzazioni, forme differenziali esatte, integrale di una forma differenziale e sua invarianza rispetto a riparametrizzazioni che conservano l'orientamento, caratterizzazione delle forme differenziali continue esatte, forme chiuse, domini semplicemente connessi, condizione sufficiente perché una forma differenziale chiusa sia esatta. Convezione sull'orientamento positivo della frontiera di un dominio regolare. Teorema di Cauchy-Goursat (*nodim*). Prima formula di rappresentazione di Cauchy. Analiticità di una funzione olomorfa e seconda formula di rappresentazione di Cauchy. Applicazioni delle formule di Cauchy al calcolo di integrali di funzioni olomorfe lungo curve. Zeri di una funzione olomorfa. Ordine di uno zero. Zeri isolati. Equivalenza tra zeri isolati e zeri di ordine finito. Principio di identità per le funzioni olomorfe (*nodim*). Estensioni olomorfe di alcune funzioni elementari reali (esponenziale, seno, coseno, funzioni iperboliche). Formula di Eulero. Logaritmo di un numero complesso. Funzioni multivoche. Determinazione principale del logaritmo. Continuità e derivabilità della determinazione principale del logaritmo; piano complesso tagliato. Potenza con esponente complesso. Teorema di Hermite-Liouville. Teorema fondamentale dell'algebra e sue conseguenze. Coniugata di una funzione armonica su un aperto del piano semplicemente connesso. Proprietà della media per le funzioni armoniche di due variabili.

### **Serie di Laurent**

Serie numeriche bilatere. Serie di Laurent. Insieme di convergenza di una serie di Laurent. Univocità dei coefficienti nello sviluppo in serie di Laurent. Sviluppabilità in serie di Laurent di una funzione olomorfa su una corona circolare. Singolarità isolate. Classificazione delle singolarità isolate. Caratterizzazione di singolarità eliminabili, poli e singolarità essenziali. Teorema di Picard (*nodim*).

Residuo in un punto singolare. I Teorema dei residui. Metodi per il calcolo del residuo in un punto singolare. Singolarità all'infinito e residuo all'infinito. II Teorema dei residui. Calcolo di alcuni integrali attraverso il metodo dei residui: integrali di funzioni trigonometriche, integrali impropri sulla retta reale di funzioni aventi al più un numero finito

di discontinuità, lemma del grande cerchio (*nodim*), lemma del piccolo cerchio (*nodim*), integrali di tipo Fourier, lemma di Jordan (*nodim*).

### **Serie di Fourier**

Coefficienti di Fourier e serie di Fourier di una funzione assolutamente integrabile sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . Polinomi trigonometrici. **Riconduzione del caso di una funzione definita nell'intervallo  $[a, b]$  a quello dell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .** Estensione all'asse dei reali, periodica di periodo  $b-a$ , di una funzione definita sull'intervallo  $[a, b]$ . Estensioni pari ed estensione dispari sull'intervallo  $[-T, T]$  di una funzione definita in  $[0, T]$  e relative serie dei coseni e serie dei seni. Identità di Parseval (*nodim*). Condizioni sufficienti per la convergenza puntuale e uniforme ad  $f$  della serie di Fourier di  $f$  (*nodim*).

### **Testi di riferimento**

- V. De Cicco, D. Giachetti "Metodi Matematici per l'Ingegneria", Esculapio, Bologna, 2011.
- G. C. Barozzi "Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione", Zanichelli, Bologna, 2001.

### **ULTERIORI TESTI SUGGERITI**

- M. Giaquinta e G. Modica "Note di Metodi Matematici per Ingegneria Informatica", Pitagora Editrice, Bologna, 2007.
- F. Gazzola, F. Tomarelli, M. Zanotti "Analytic Functions, Integral transform, Differential Equations", Esculapio, Bologna, 2013.
- Si vedano anche gli appunti delle lezioni e gli esercizi svolti delle tracce di esame disponibili per il download all'indirizzo <http://goo.gl/6sVkT>

Bari, 26/09/2016



Prof. E. Caponio