1) Stabilire se la seguente forma differenziale è esatta sul suo dominio

$$\omega(x,y) = \left(\operatorname{arctg}(xy)^2 + \frac{2x^2y^2}{1+x^4y^4} \right) dx + \frac{2x^3y}{1+x^4y^4}\, dy$$

Il dominio di ω è $\mathbb{R}^2$. ω è di classe C^∞ su tale insieme

ω è chiusa su $\mathbb{R}^2$ cioè $\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}(xy)^2 + \frac{2x^2y^2}{1+x^4y^4} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^3y}{1+x^4y^4} \right)$ fare conto!

Poiché $\mathbb{R}^2$ è stellato ω è esatta

2) Calcolare

(a) $$\int_{\mathscr{C}^+(i,3)} \frac{e^z}{(z+i)^3}\, dz$$, dove $\mathscr{C}^+(i,3)$ è la circonferenza di centro i e raggio 3 orientata nel verso positivo

(b) $$\int_0^{2\pi} \frac{27 e^{3it}}{(2i+3e^{it})^3}\, dt$$

(a): dalla II formula di rappresentazione di Cauchy, prendendo $g(z) = e^z$ ottenimamo

$$\int_{\mathscr{C}^+(i,3)} \frac{e^z}{(z+i)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2}\, g''(-i) = \pi i\, e^{-i}$$

e osservando che $-i \in D(i,3)$

(b) osserviamo che l'integrale assegnato è uguale (per definizione di integrale di una funzione complessa di variabile complessa) a:

$$\int_{\mathscr{C}^+(i,3)} \frac{(z-i)^2}{(z+i)^3}\, dz,$$ infatti la circonferenza $\mathscr{C}^+(i,3)$

ha rappresentazione parametrica $\gamma(t) = i + 3e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

quindi $$\int_{\mathscr{C}^+(i,3)} \frac{(z-i)^2}{(z+i)^3} = \int_0^{2\pi} \frac{9e^{2it}}{(2i+3e^{it})^3} \cdot 3i\, e^{it}\, dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{27 e^{3it}}{(2i+3e^{it})^3}\, dt$$

Possiamo quindi calcolare $\int_{\mathscr{C}^+(i,3)} \frac{(z-i)^2}{(z+i)^3}\, dt$ usando la II formula di rappresentazione di Cauchy, come per l'esercizio (a).

questa volta $g(z) = (z-i)^2$ quindi

$$\int \frac{(z-i)^2}{(z+i)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2}\, g''(-i) = 2\pi i$$

$$\int_{\mathcal{C}^+(i,3)} \frac{(z-i)^2}{(z+i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2}\, g''(-i) = 2\pi i$$

3) Determinare le singolarità al finito delle funzioni

(a) $f(z) = \dfrac{z+\pi}{\sin z}$ (b) $f(z) = z^5 \cos \dfrac{1}{z^2}$

specificando di che tipo esse siano e calcolandone il residuo

(a) f è olomorfa in $\mathbb{C}$ tranne che nei punti z per cui $\sin z = 0$

Sappiamo che $\sin z = 0 \iff z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Dunque le singolarità di f sono $\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$

Poiché $D \sin z = \cos z$ e $\cos(k\pi) = (-1)^k$ abbiamo

che $k\pi$ è un polo di ordine 1 $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

Per $k = -1$ cioè in $z = -\pi$ si annulla anche la

funzione al numeratore. Cerchiamo di stabilire che

tipo di singolarità è $-\pi$.

Dato che $\sin z = \overbrace{\sin(-\pi)}^{=0} - 1\,(z+\pi) + \frac{1}{6}(z+\pi)^3 + o((z+\pi)^4)$

abbiamo
$$\frac{z+\pi}{\sin z} = \frac{z+\pi}{-(z+\pi) + \frac{1}{6}(z+\pi)^3 + o((z+\pi)^4)} =$$
$$= \frac{z+\pi}{(z+\pi)\left(-1 + \frac{1}{6}(z+\pi)^2 + \frac{o((z+\pi)^4)}{(z+\pi)}\right)} \xrightarrow{z\to -\pi} -1$$

Quindi $-\pi$ è una singolarità eliminabile e $\mathrm{Res}(f,-\pi) = 0$

Per $k \neq -1$ $\mathrm{Res}(f, k\pi) = \lim\limits_{z\to k\pi} (z-k\pi)\, f(z) =$
$$= \lim_{z\to k\pi} \frac{z+\pi \,|_{z=k\pi}}{\cos(k\pi)} = \frac{k\pi+\pi}{(-1)^k} = (-1)^k \pi(k+1)$$

(b) L'unica singolarità è 0. Poiché $\cos z = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, per $z\neq 0$ otteniamo:

$$z^5 \cos\frac{1}{z^2} = z^5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{z^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{z^{2k-5}} \quad (*)$$

Quindi 0 è una singolarità essenziale e il residuo di f in 0 è uguale al coefficiente del termine $\frac{1}{z}$ in tale serie: $2k-5 = 1 \iff k = \frac{3}{2}$; dato che non esiste $k\in\mathbb{N}$ tale che $2k-5=1$, il coefficiente del termine $\frac{1}{z}$ in $(*)$ è 0 cioè $\mathrm{Res}(g,0)=0$

4) Usando il metodo dei residui calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)\, t^2}{1+t^4}\, dt$$

Osserviamo che $\left| \frac{\cos(2t)t^2}{1+t^4} \right| \leq \frac{t^2}{1+t^4} \sim \frac{1}{t^2}$ per $t \to +\infty$

quindi $\frac{\cos(2t)\,t^2}{1+t^4}$ è integrabile su $[0,+\infty)$; essendo una funzione pari, l'integrale assegnato è uguale a $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)\,t^2}{1+t^4}dt$

Ricordando che $\cos(2t) = \frac{e^{i2t}+e^{-i2t}}{2}$, abbiamo

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)\,t^2}{1+t^4}dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2t}t^2}{1+t^4}dt + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i2t}\,t^2}{1+t^4}dt$$

Osserviamo che ponendo $-t = u$ il secondo integrale diviene

$$-\frac{1}{4}\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{i2u}\,u^2}{1+u^4}du = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2u}\,u^2}{1+u^4}du$$

per cui $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)\,t^2}{1+t^4}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2t}\,t^2}{1+t^4}dt$.

Consideriamo l'estensione olomorfa dell'integranda a $\mathbb{C}$

$g(z) = \frac{e^{i2z}z^2}{1+z^4}$. Sia $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. Osserviamo che

$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, per cui dal lemma di Jordan

$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma(R)} g(z)\,dz = 0$, dove $\gamma(R)$ è la semicirconferenza con diametro sull'asse dei reali, centro 0, raggio R contenuta nel semipiano

$S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. La funzione g ha singolarità $\sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k}$, $k = 0,1,2,3$

Tra queste, solo $e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ appartengono ad S. Per cui

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2t}\,t^2}{1+t^4}dt = \pi i\Big(\operatorname{Res}\big(g, \underbrace{e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}}\big) + \operatorname{Res}\big(g, \underbrace{e^{i\frac{3\pi}{4}}}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}}\big)\Big)$$

$e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{3}{4}\pi}$ sono poli semplici

$$\operatorname{Res}(g, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{e^{i2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\, e^{2i\frac{\pi}{4}}}{4\,e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}}\,e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{i\sqrt{2}-\sqrt{2}}(1-i)$$

$$\overline{} - 4 \qquad 4\sqrt{2}$$
$$4 e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$\mathrm{Res}\left(g, e^{i\frac{3}{4}\pi}\right) = \frac{e^{i2\left(-\frac{1}{\sqrt2}+i\frac{1}{\sqrt2}\right)} e^{2i\frac{3}{4}\pi}}{4 e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{i2}{\sqrt2}-\frac{2}{\sqrt2}} e^{-\frac{3}{4}\pi i} = \frac{1}{4\sqrt2} e^{-i\sqrt2-\sqrt2}(-1-i)$$

quindi $\pi i \left(\mathrm{Res}(g, e^{i\frac{\pi}{4}}) + \mathrm{Res}(g\, e^{-i\frac{\pi}{4}})\right) =$

$$= \frac{\pi i}{4\sqrt2} e^{-\sqrt2}\left(e^{i\sqrt2}(1-i) + e^{-i\sqrt2}(-1-i)\right)$$

$$= \frac{\pi i}{4\sqrt2} e^{-\sqrt2}\left(e^{i\sqrt2} - e^{-i\sqrt2} - i\, e^{i\sqrt2} + e^{-i\sqrt2}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{4\sqrt2} e^{-\sqrt2}\left(2i\sin\sqrt2 - 2i\cos\sqrt2\right) = -\frac{\pi}{2\sqrt2} e^{-\sqrt2}\left(\sin\sqrt2 - \cos\sqrt2\right)$$

5) Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,\pi] \\ -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$

Determinare la serie di Fourier di f e studiarne convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$. Dimostrare poi che $\sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{4}{(2h+1)\pi} = 1$

f è una funzione dispari, per cui $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{k\pi}\left(\cos(k\pi) - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{(2h+1)\pi}\sin((2h+1)x)$$

Dato che f è continua e derivabile su ogni intervallo del tipo $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Tale serie converge puntualmente su $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a $\tilde{f}$ prolungamento periodico di f su $\mathbb{R}$ di periodo 2π. Poiché per $x = k\pi$

$\sin((2h+1)k\pi) = 0$ abbiamo che essa converge a 0 in tutti i punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In particolare per $x = \frac{\pi}{2}$, dato che $\sin\left((2h+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^h$, otteniamo

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h \, 4}{(2h+1)\pi} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$