Politecnico di Bari
CUC Ingegneria dell'Informazione
CdL Ingegneria delle Telecomunicazioni
AA 2008-2009

Corso di Analisi Matematica I - Tracce di esame

Docente: Dott. E. Caponio

A.A 2008/2009 I esonero 27 Novembre 2007 Traccia A

1) Stabilire se le seguenti funzioni e successioni sono strettamente monotone e determinarne il tipo di monotonia

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}[(2^x + 1)^3]$$

$$g(n) = \left\{1 + \arctan \frac{1}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ e^x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

2) Determinare la forma esponenziale e poi le radici terze del numero complesso

$$z = -|\sqrt{7} - 3i|\frac{2i - i}{i + 2}.$$

Rappresentare sul piano sia il numero complesso z che le sue radici terze.

3) Verificare (usando la definizione di limite) che

$$\lim_n \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

4) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(e^{\frac{\sin^2(x^2)}{x^3}} - 1\right).$$

A.A 2008/2009 I esonero 27 Novembre 2007 Traccia B

1) Stabilire se le seguenti funzioni e successioni sono strettamente monotone e determinarne il tipo di monotonia

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}[(3^x + 1)^5]$$
$$g(n) = \{1 + 2^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$
$$h(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{se } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2) Determinare la forma esponenziale e poi le radici terze del numero complesso

$$z = -|4 - \sqrt{12}i|\frac{2+i}{2i-1}.$$

Rappresentare sul piano sia il numero complesso z che le sue radici terze.

3) Verificare (usando la definizione di limite) che

$$\lim_n \frac{n+1}{3n+1} = \frac{1}{3}.$$

4) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(\frac{\cos^2(x^2)}{x^3} + 1\right).$$

A.A 2008/2009 I esonero 27 Novembre 2007 Traccia C

1) Stabilire se le seguenti funzioni e successioni sono strettamente monotone e determinarne il tipo di monotonia

$$f(x) = \log_{\frac{1}{4}}[(4^x + 1)^3]$$
$$g(n) = \left\{1 + \arcsin \frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$
$$h(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2) Determinare la forma esponenziale e poi le radici terze del numero complesso

$$z = -|\sqrt{5} + \sqrt{11}i| \frac{2i + i}{2 - i}.$$

Rappresentare sul piano sia il numero complesso z che le sue radici terze.

3) Verificare (usando la definizione di limite) che

$$\lim_n \frac{n-2}{4n+1} = \frac{1}{4}.$$

4) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{\arctan(x^5)}{x^2}} - 1 \right).$$

A.A 2008/2009 I esonero 27 Novembre 2007 Traccia D

1) Stabilire se le seguenti funzioni e successioni sono strettamente monotone e determinarne il tipo di monotonia

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}[(2^x + 1)^3]$$
$$g(n) = \left\{1 + \arccos\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$
$$h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

2) Determinare la forma esponenziale e poi le radici terze del numero complesso

$$z = -|\sqrt{10} + \sqrt{6}i|\frac{3+i}{3i-1}.$$

Rappresentare sul piano sia il numero complesso z che le sue radici terze.

3) Verificare (usando la definizione di limite) che

$$\lim_{n} \frac{n-1}{3n+2} = \frac{1}{3}.$$

4) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(\frac{\arctan(x^4)}{x^2} + 1\right).$$

A.A 2008/2009 II esonero e Appello del 10 Febbraio 2009 Traccia A

1) Stabilire quali tra le seguenti funzioni sono ingettive, quali surgettive e determinare, dove possibile, la funzione inversa.

$$f\colon [1/2,+\infty) \to [0,+\infty), \qquad f(x) = \sqrt{(2x)^2-1} + 2^{2x};$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = |x|x;$$
$$h\colon [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \to (-1,+\infty), \qquad h(x) = \sqrt{\frac{2-x^2}{2+x^2}}.$$

2) Stabilire che $+\infty$ è un punto di accumulazione per il dominio della funzione

$$f(x) = \log_4(4^{2x}3 - x^3 - 7^x).$$

Stabilire inoltre se f ha asintoto per $x \to +\infty$.

3) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue.

Stabilire, poi, che l'equazione

$$2^{x^{4/3}-x} + 3^{x-x^2} = \frac{4}{1+\frac{x^2}{3}},$$

ha almeno due soluzioni.

4) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo locale e assoluti della funzione

$$f(x) = -x^2\sqrt{\frac{x}{x-3}}.$$

5) Calcolare, usando la formula di MacLaurin, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + \frac{x^3}{2}e^x}{x^2\log(1+x)}.$$

6) Sia I un intervallo aperto ed $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $x_0 \in I$ e si consideri $F(x) = \int_{x_0}^x f(s)\mathrm{d}s$. Dimostrare che F è derivabile per ogni $x \in I$ e che $F'(x) = f(x)$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{-1} \frac{e^{2x}}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x,$$

A.A 2008/2009 II esonero e Appello del 10 Febbraio 2009 Traccia B

1) Stabilire quali tra le seguenti funzioni sono ingettive, quali surgettive e determinare, dove possibile, la funzione inversa.

$$f\colon [\sqrt{2}, +\infty) \to [0, +\infty), \qquad f(x) = \sqrt{x^4 - 2} + 3^{x/\sqrt{2}};$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2}x;$$
$$h\colon [-1, 1] \to (-2, +\infty), \qquad h(x) = \sqrt{\frac{1 - x^2}{3 + x^2}}.$$

2) Stabilire che $+\infty$ è un punto di accumulazione per il dominio della funzione

$$f(x) = \log_3(3^{2x}2 - x^4 - 6^x).$$

Stabilire inoltre se f ha asintoto per $x \to +\infty$.

3) Enunciare il Teorema degli zeri per le funzioni continue.

Stabilire poi che l'equazione

$$2^{x^{8/5} - x} + 4^{x - x^2} = \frac{6}{2 + \frac{x^4}{2}},$$

ha almeno due soluzioni.

4) Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo locale e assoluti della funzione

$$f(x) = -x^2\sqrt{\frac{x}{x + 2}}.$$

5) Calcolare, usando la formula di MacLaurin, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} = \frac{\sqrt[2]{1 - x} + \sin\frac{x}{2} - \cos x}{\log(1 - x^2)}.$$

6) Sia I un intervallo aperto ed $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $x_0 \in I$ e si consideri $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\mathrm{d}s$. Dimostrare che F è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{-2} \frac{e^x - 1}{e^{-x} + e^x}\mathrm{d}x,$$

A.A 2008/2009 II esonero e Appello del 23 Febbraio 2009 Traccia A

1) Stabilire se le seguenti funzioni sono monotone nel loro insieme di definizione specificando, in caso positivo, il tipo di monotonia.

$$f(x) = \frac{1}{2^{\log_3 x}} - x^2,$$
$$g(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{se } x \leq -1 \\ -x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

2) Sia $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$. Verificare che

$$\frac{1}{\bar{z}} = z.$$

3) Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e obliqui della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 2^x}{2x^2 - \log(1-x)}.$$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

5) Dare la definizione di funzione monotona decrescente e di funzione convessa.

Studiare la monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto e studiare la convessità della funzione

$$f(x) = \frac{\log_{1/2} x}{x^5}.$$

6) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 8 per la funzione

$$f(x) = (1 - 8x^3)^{1/2}.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/4} \cos^5 x \mathrm{d}x.$$

A.A 2008/2009 II esonero e Appello del 23 Febbraio 2009 Traccia B

1) Stabilire se le seguenti funzioni sono monotone nel loro insieme di definizione specificando, in caso positivo, il tipo di monotonia.

$$f(x) = 3^{\log_{1/2} x} - x^4,$$
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ -x+2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

2) Sia $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$. Verificare che
$$\frac{1}{z} = \bar{z}.$$

3) Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e obliqui della funzione

$$f(x) = \frac{3^x - 2x^4}{x^3 - \log(2-x)}.$$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

5) Dare la definizione di funzione monotona crescente e di funzione concava.

Studiare la monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto e studiare la convessità della funzione

$$f(x) = \frac{\log_{1/3} x}{x^3}.$$

6) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 8 per la funzione

$$f(x) = (1 - 27x^3)^{1/3}.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/4} \sin^5 x \mathrm{d}x.$$

A.A 2008/2009 Appello del 7 Maggio 2009 Traccia A

1) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, dove

$$f(x) = \log x, \qquad g(x) = \frac{3^x}{1 - 3^x},$$

indicando il loro insieme di definizione

2) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass.

3) Determinare e rappresentare sul piano le radici quarte del numero complesso

$$\frac{e^{i\pi/2}(2\sqrt{3} - 3 - i(3\sqrt{3} + 2))}{3i - 2}.$$

4) Studiare asintoti, monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{3 - x}{1 - 2x}\right) - x.$$

5) Dare la definizione di primitiva di una funzione.

Si consideri poi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sua primitiva tale che $F(a) = F(b)$. Dedurre che esiste $c \in (a, b)$ tale $f(c) = 0$.

6) Usando la formula di MacLaurin, calcolare la derivata settima in 0 della funzione

$$f(x) = x\sqrt{1 - x^3}.$$

7) Determinare l'equazione della retta tangente nel punto $x_0 = 1$ al grafico della funzione

$$G(x) = \int_{\log x}^{\sqrt{x}} \sqrt[3]{(s - 1)^2}\,\mathrm{d}s.$$

A.A 2008/2009 Appello del 7 Maggio 2009 Traccia B

1) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, dove

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = \frac{\frac{1}{2^x}}{\frac{1}{2^x} - 1},$$

indicando il loro insieme di definizione.

2) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass.

3) Determinare e rappresentare sul piano le radici quarte del numero complesso

$$\frac{e^{i\pi/4}(8\sqrt{2} + i20\sqrt{2})}{3 - 7i}.$$

4) Studiare asintoti, monotonia, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-1}{2x+1}\right) - x.$$

5) Dare la definizione di primitiva di una funzione.

Si consideri poi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una sua primitiva tale che $F(a) = F(b)$. Dedurre che esiste $c \in (a,b)$ tale $f(c) = 0$.

6) Usando la formula di MacLaurin, calcolare la derivata sesta in 0 della funzione

$$f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}.$$

7) Determinare l'equazione della retta tangente nel punto $x_0 = 0$ al grafico della funzione

$$G(x) = \int_{\sin x}^{e^x} \sqrt[5]{(s-2)^2}\,\mathrm{d}s.$$

A.A 2008/2009 Appello del 29 Giugno 2009 Traccia A

1) Dire, motivando la risposta, se le seguenti funzioni f e g sono o non sono uguali:

$$f(x) = \log(x(1-x^2)) \quad \text{e} \quad g(x) = \log x + \log(1-x^2);$$
$$f(x) = \sin(x+4\pi) \quad \text{e} \quad g(x) = \sin x;$$
$$f(x) = \frac{e^x}{e^{-x}} \quad \text{e} \quad g(x) = e^{x^2}$$

2) Studiare asintoti, monotonia e determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione

$$f(x) = \sqrt{2x^2-1} - 2x + 1.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z+3i)(\bar{z}-3i) = 4.$$

4) Enunciare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

Stabilire poi se la seguente funzione è invertibile e nel caso lo sia calcolare la derivata della sua funzione inversa nel punto $y_0 = 1$.

$$f(x) = \frac{1}{5^{x-3\pi/2}} - \cos x, \qquad x \in (\pi, 2\pi).$$

5) Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione

$$\log(1-x^2) + x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

6) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale

7) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x^2}{x^2+x+4} \mathrm{d}x.$$

A.A 2008/2009 Appello del 29 Giugno 2009 Traccia B

1) Dire, motivando la risposta, se le seguenti funzioni f e g sono o non sono uguali:

$$f(x) = \log \frac{1+x}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = \log(1+x) - \log x;$$
$$f(x) = |x|x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2;$$
$$f(x) = \sqrt[3]{x^9} \quad \text{e} \quad g(x) = x^3$$

2) Studiare asintoti, monotonia e determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione

$$f(x) = 2x - 2 - \sqrt{2x^2 - 1}.$$

3) Determinare e rappresentare graficamente le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z - 2i)(\bar{z} + 2i) = 4.$$

4) Enunciare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

Stabilire poi se la seguente funzione è invertibile e nel caso lo sia calcolare la derivata della sua funzione inversa nel punto $y_0 = 1$.

$$f(x) = \frac{1}{2^{x-\pi/2}} + \cos x, \qquad x \in (0, \pi).$$

5) Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione

$$\sqrt{1 + x^3} - 1 - \frac{1}{2}x^3.$$

6) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale

7) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x^2}{x^2 - x + 2} \mathrm{d}x.$$

A.A 2008/2009 Appello del 15 Luglio 2009 Traccia A

1) Dare la definizione di estremo superiore e di massimo di un insieme numerico Determinare poi estremo superiore ed inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$\left\{\frac{n}{n^2-10} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = xe^{\sin(1/x^2)}.$$

3) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$e^{-i\pi/4}\frac{2}{\overline{3i-1}}.$$

4) Enunciare il teorema degli zeri per una funzione continua.

Stabilire poi che la seguente equazione

$$\sqrt{x^2-1} = \log\frac{1}{x^2-1}$$

ha due sole soluzioni reali.

5) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 9 della funzione

$$f(x) = \cos(x^2) - \sin(x^3).$$

6) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{3x-1}}{x}\mathrm{d}x.$$

A.A 2008/2009 Appello del 15 Luglio 2009 Traccia B

1) Dare la definizione di estremo inferiore e di minimo di un insieme numerico Determinare poi estremo superiore ed inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$\left\{ \frac{n}{n^2 - 17} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = xe^{\cos(1/x)-1}.$$

3) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$$e^{-i3\pi/4} \frac{3}{\overline{2i + 1}}.$$

4) Enunciare il teorema degli zeri per una funzione continua.

Stabilire poi che la seguente equazione

$$\sqrt{1 - x^2} = x \arctan x$$

ha due sole soluzioni reali.

5) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 9 della funzione

$$f(x) = \log(1 - x^3) - e^{x^2}.$$

6) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

7) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{4x - 1}}{x} \mathrm{d}x.$$

A.A 2008/2009 Appello del 23 settembre 2009 Traccia A

1) Dare la definizione di funzione invertibile. Determinare, poi, campo di esistenza e immagine di

$$f(x) = 3x^2 + \log_2 x$$

e provare che f è invertibile.

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{5x}{x^2-9}}.$$

3) Stabilire che la seguente equazione nella variabile complessa z ha solo soluzioni reali:

$$z = \frac{1}{\bar{z}} + 1.$$

4) Dare la definizione di punto di massimo locale e di massimo assoluto per una funzione di una variabile.

Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato, dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vero o false:

- se f è derivabile in I allora f ha un punto di massimo locale e in tale punto la derivata prima di f è nulla;
- se f è continua ma non derivabile in I, allora f non ha punti di massimo locale.

5) Enunciare il teorema di derivazione delle funzioni inverse ed applicarlo per determinare

$$(f^{-1})'(13),$$

dove f^{-1} è l'inversa della funzione dell'esercizio 1).

Scrivere infine l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(13, f^{-1}(13))$.

6) Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione non-negativa, convessa e derivabile due volte nell'intervallo I. Stabilire che anche la funzione

$$x \in I \mapsto (f(x))^2$$

è convessa.

7) Calcolare l'integrale

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} e^{|x|} \sin |x| \mathrm{d}x.$$

A.A 2008/2009 Appello del 23 settembre 2009 Traccia B

1) Dare la definizione di funzione invertibile. Determinare, poi, campo di esistenza e immagine di

$$f(x) = x + x^3 + \sqrt{3 + x}$$

e provare che f è invertibile.

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = (x + 1)e^{\frac{2x}{x^2-4}}.$$

3) Stabilire che la seguente equazione nella variabile complessa z ha solo soluzioni reali:

$$\bar{z} = \frac{1}{z} - 1.$$

4) Dare la definizione di punto di minimo locale e di minimo assoluto per una funzione di una variabile.

Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato, dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vero o false:

- se f è continua ma non derivabile in I, allora f non ha punti di minimo locale;
- se f è derivabile in I allora f ha un punto di minimo locale e in tale punto la derivata prima di f è nulla.

5) Enunciare il teorema di derivazione delle funzioni inverse ed applicarlo per determinare

$$(f^{-1})'(-9),$$

dove f^{-1} è l'inversa della funzione dell'esercizio 1).

Scrivere infine l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(1, f^{-1}(-9))$.

6) Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione non-negativa, convessa e derivabile due volte nell'intervallo I. Stabilire che anche la funzione

$$x \in I \mapsto (f(x))^2$$

è convessa.

7) Calcolare l'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|} \cos x \mathrm{d}x.$$

A.A 2008/2009 Appello del 20 Novembre 2009 Traccia A

1) Stabilire se le seguenti funzioni sono stretamente monotone e in caso affermativo specificare, giustificando la risposta, il tipo di monotonia:

$$f(x) = \log_{1/2}(3^{\sqrt{x}} + x) + x^{-\sqrt{2}}, \qquad f(x) = \arccos(2x+1) - x^3.$$

2) Determinare insieme di definizione e asintoti della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2-4}\right) - 3x.$$

3) Determinare la rappresentazione esponenziale del numero complesso

$$\frac{3+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-3)i}{2+2i}.$$

4) Enunciare il teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue. Usarlo poi per dimostrare che l'equazione

$$\frac{2}{x} = e^{\frac{x-1}{2+x^2}}$$

ha almeno una soluzione positiva.

5) Enunciare il teorema di Lagrange. Usarlo poi per stabilire che considerata una funzione $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che per ogni $x \in [0,+\infty)$, $f'(x) > \frac{1}{10^{10}}$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

6) Scrivere la formula di Taylor di centro 1 e ordine 4 della funzione

$$f(x) = e^x(x-1).$$

7) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale. Usarlo poi per dimostrare che se $f\colon [0,\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile con derivata continua e tale che $f(0) = -1$ e $f'(x) < 3$ per ogni $x \in [0,\frac{1}{2}]$ allora $f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$.

A.A 2008/2009 Appello del 22 Febraio 2010 Traccia A

1) Partendo dalla conoscenza dei grafici delle funzioni elementari, disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$f(x) = -1 + |\log(x-2)|; \qquad g(x) = \tan|x|, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2); \qquad h(x) = (x+1)^{1/9}.$$

2) Stabilire che la seguente equazione ha almeno una soluzione maggiore di 1:

$$\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{1-x^2}} = 1.$$

3) Calcolare il modulo del numero complesso

$$\frac{e^{3i}(1-i)}{(2+i)e^{-2i}}.$$

4) Stabilire se la funzione $f(x) = (1/2)^x + \log_{1/e}(x+1)$ sia invertibile e, in caso affermativo, stabilire se esista la retta tangente al grafico dell'inversa di f nel punto di coordinate $(1,0)$ e scriverne l'equazione.

5) Fornire un esempio di una funzione non decrescente avente derivata strettamente negativa sul suo insieme di definizione.

6) Determinare insieme di definizione, asintoti ed eventuali punti di minimo e massimo locale e assoluto della funzione:

$$f(x) = x - \log\frac{1+x}{3+x}.$$

7) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x-x^2}{2+x^2}\mathrm{d}x.$$

A.A 2008/2009 Appello del 26 Aprile 2010 Traccia A

1) Determinare dominio e immagine della funzione

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^{1/4}}.$$

Stabilire, poi, se la funzione $f \circ f$ è ben definita e, in caso affermativo, determinarne la legge.

2) Determinare il dominio e gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\log(9/2 - x^2)}{x - \sqrt{4 - x^2}}.$$

3) Stabilire se esistano numeri complessi aventi parte immaginaria non nulla che siano soluzioni della seguente equazioni:

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

4) Stabilire che la seguente equazione ha almeno due soluzioni:

$$e^{-x} = \frac{3}{2} - \arctan(x^2 - 2x).$$

5) Determinare gli eventuali punti di minimo e massimo locale e assoluto della funzione:

$$f(x) = 2 - x\log^2(x^2).$$

6) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 6 per la funzione

$$f(x) = e^{x^2} - 3.$$

7) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{1 - e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$$