Politecnico di Bari
CUC Ingegneria dell'Informazione
CdL Ingegneria Informatica e Automazione
AA 2010-2011

Complementi di Analisi Matematica - Tracce di esame

Docente: Dott. E. Caponio

A.A 2010/2011 Appello 8 Luglio 2011 Traccia A

1) Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n - 3^n}.$$

Stabilire poi su quali insiemi tale serie converge uniformemente.

2) Dimostrare che se $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è il limite uniforme su (a,b) di una successione di funzioni continue allora f è continua

3) Sia Ω una regione in $\mathbb{C}$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica in Ω. Ricavare la relazione esistente tra il coefficiente k-esimo della serie di potenze di centro $z_0 \in \Omega$ di cui f è la somma e la derivata di ordine k di f in z_0.

4) Calcolare

$$\int_C \frac{\sin^2(z^3)}{z^2 - 2iz - 1} \mathrm{d}z,$$

dove C è la circonferenza di centro $-1+i$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

5) Usando il metodo dei residui, calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 4} \mathrm{d}x.$$

6) Sia $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(3x)$. Scrivere le leggi delle estensioni pari e dispari di f su $[-\pi,\pi]$. Qual è la serie di Fourier dell'estensione pari? Determinare infine i coefficienti di Fourier dell'estensione dispari.

A.A 2010/2011 Appello 8 Luglio 2011 Traccia B

1) Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n - 5^n}.$$

Stabilire poi su quali insiemi tale serie converge uniformemente.

2) Dimostrare che se $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è il limite uniforme su (a,b) di una successione di funzioni continue allora f è continua

3) Sia Ω una regione in $\mathbb{C}$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica in Ω. Ricavare la relazione esistente tra il coefficiente k-esimo della serie di potenze di centro $z_0 \in \Omega$ di cui f è la somma e la derivata di ordine k di f in z_0.

4) Calcolare

$$\int_C \frac{\sinh^2(z^2)}{z^2 + 2iz - 1} \mathrm{d}z,$$

dove C è la circonferenza di centro $1-i$ e raggio 3 percorsa in senso antiorario.

5) Usando il metodo dei residui, calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 2}{1 + x^4} \mathrm{d}x.$$

6) Sia $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$. Scrivere le leggi delle estensioni pari e dispari di f su $[-\pi,\pi]$. Qual è la serie di Fourier dell'estensione dispari? Determinare infine i coefficienti di Fourier dell'estensione pari.

POSSIBILE SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 8 LUGLIO 2011

Svolgiamo gli esercizi della traccia B (quelli della traccia A si svolgono in modo analogo).

1) Poiché $\lim_n \left(\left|\frac{1}{3^n-5^n}\right|\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_n \left(\frac{1}{5^n-3^n}\right)^{\frac{1}{n}} =$

$\lim_n \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{5}$, il raggio di convergenza

è $\rho = 5$. La serie di potenze ha quindi intervallo

di convergenza $(-6, 4)$ (il centro è -1!)

Per $x = -6$ si ottiene la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{3^n-5^n} =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{5^n}{3^n-5^n}$

Poiché la successione $(-1)^n \frac{5^n}{3^n-5^n}$ è irregolare (per n

pari converge a -1, mentre per n dispari converge a 1)

la serie non converge.

Per $x = 4$ si ottiene $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{3^n-5^n}$, la successione

$\frac{5^n}{3^n-5^n} \to -1$ quindi la serie diverge negativamente.

In definitiva l'insieme di convergenza puntuale è $(-6,4)$ e la convergenza è uniforme su ogni intervallo $[a,b] \subset (-6,4)$

2) Vedere, ad esempio, la lezione del 20/05/11

3) Vedere, ad esempio, la lezione del 01/06/11

4) Possiamo applicare la II formula di rappresentazione di Cauchy; consideriamo la funzione $f(z) = \sinh^2(z^2)$ che è intera e osserviamo che il denominatore è uguale $(z+i)^2$ e che il punto $-i \in T$, dove T è il disco di centro $1-i$ e raggio 3 (il cui bordo è quindi la circonferenza C)

$$\int_C \frac{\sinh^2(z^2)}{(z+i)^2} = 2\pi i \, D\left(\sinh^2(z^2)\right)\Big|_{z=-i} =$$

$$2\pi i \; 2\sinh((-i)^2)\cosh((-i)^2)\,(-2i) = 8\pi \sinh(-1)\cosh(-1)$$

$$= -8\pi \frac{e^{-1}-e^{1}}{2}\,\frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = 2\pi\left(e^{-2}-e^{2}\right) = 2\pi\,\frac{1-e^4}{e^2}$$

Un'altro modo per calcolare l'integrale è quello di usare il I teorema dei residui.

5) Osserviamo che $\exists C>0$ t.c. $\left|\frac{x^2-2}{1+x^4}\right| \le \frac{C}{x^2}$,

quindi $\frac{x^2-2}{1+x^4}$ è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$.

Poiché l'integranda è pari $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-2}{1+x^4}\,dx$

La funzione $f(z) = \frac{z^2-2}{1+z^4}$ estende l'integranda a $\mathbb{C}$ ed è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{\sqrt[4]{-1}\}$, inoltre $\lim_{|z|\to\infty} z f(z) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{z^3-2z}{1+z^4} = 0$.

Applicando quindi il metodo dei residui abbiamo, tenendo presente che

$$\sqrt[4]{-1} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right)}, \quad k=0,1,2,3$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-2}{1+x^4}\,dx = \pi i\left[\left(\operatorname{Res}\left(f, e^{i\pi/4}\right) + \operatorname{Res}\left(f, e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)\right)\right]$$

Sia $e^{i\pi/4}$ che $e^{i\frac{3}{4}\pi}$ sono poli semplici per f

dato che $\lim_{z\to e^{i\pi/4}} \left(z-e^{i\pi/4}\right)\frac{z^2-2}{1+z^4} = \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2-2}{4\left(e^{i\pi/4}\right)^3} =$

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}-2}{4e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{i-2}{4e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{1}{4}(i-2)e^{-i\frac{3}{4}\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}(i-2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{8}(i-2)(\sqrt{2}+i\sqrt{2}) =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\sqrt{2}i-2\sqrt{2}-\sqrt{2}-i2\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{8}\left(-3\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$$

e

$$\lim_{z\to e^{i\frac{3}{4}\pi}} \left(z-e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)\frac{z^2-2}{1+z^4} = \frac{\left(e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)^2-2}{4\left(e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)^3} = \frac{-i-2}{4e^{i\pi/4}} =$$

$$-\frac{1}{4}(i+2)e^{-i\pi/4} = -\frac{1}{4}(i+2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$-\frac{1}{8}\left(\sqrt{2}i+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\right) = -\frac{1}{8}\left(3\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$-\frac{\pi i}{8}\left(-3\sqrt{2}-i\sqrt{2}+3\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

6) L'estensione pari di f è la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{se } x \in [0, \pi] \\ \sin(2(-x)) = -\sin(2x) & \text{se } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

l'estensione dispari è, ovviamente, la funzione $h: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$
$h(x) = \sin(2x)$

La serie di Fourier di $h(x)$ si riduce alla stessa funzione h dato che h è un polinomio trigonometrico! (in altri termini la sua serie di Fourier ha tutti i coefficienti nulli tranne $b_2 = 1$ infatti
$\forall\, m, k \in \mathbb{N}: \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(kx)\,dx = 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(kx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq k \\ \pi & \text{se } m = k \end{cases}$)

Calcoliamo i coefficienti di Fourier di g.
Poiché g è pari i coefficienti della serie dei sin

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\underbrace{\left.\frac{\sin(2x)\sin(kx)}{k}\right|_0^{\pi}}_{=0}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos(2x)\frac{\sin(kx)}{k}\,dx =$$

$$= +\frac{4}{\pi}\left|\cos(2x)\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi}\int 2\sin(2x)\frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx$$

Da cui

$$\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\int_0^{\pi}\sin(2x)\cos(kx)\,dx = \frac{4}{\pi}\left[\cos(2x)\ \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}$$

se k è pari $\quad \left[\cos(2x)\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} = 0$

se k è dispari $\quad \left[\cos(2x)\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} = -\frac{2}{k^2}$

Quindi $\quad a_k = 0 \quad$ se k pari

e $\quad a_k = -\frac{4}{\pi}\,{}^{2}\!/_{k^2} \Big/ \left(1-\frac{2}{k^2}\right) = \frac{-8}{\pi(k^2-2)}$ se k è dispari

A.A 2010/2011 Appello 25 Luglio 2011 Traccia A

1) Sia $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, $d(x,y) = \max_{i\in\{1,\dots,n\}}\{|x^i - y^i|\}$. Dimostrare che d è una distanza su $\mathbb{R}^n$.

2) Studiare la convergenza puntuale e totale su $[0,+\infty)$ della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(2nx+1)}{(nx)^2+n}.$$

3) Sia $f\colon (-r,r) \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty\big((-r,r)\big)$ e $M \geq 0$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in (-r,r)$

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{Mk!}{r^k}.$$

Dimostrare che f è la somma della propria serie di MacLaurin.

4) Si considerino l'operatore differenziale $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, un aperto Ω in $\mathbb{C}$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Si verifichi che se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$, per ogni $z \in \Omega$ allora f soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann su Ω.

5) Scrivere in forma cartesiana il numero complesso

$$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\mathrm{Log}_{2\pi}(1+i).$$

6) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos(3x)}{4+x^2}\mathrm{d}x.$$

POSSIBILE SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 25 LUGLIO 2011

1) Ovviamente $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $d(x,y) \geq 0$, inoltre $d(x,y) = 0 \iff$

$$\max_{i \in \{1,\dots,n\}} \{|x^i - y^i|\} = 0 \iff |x^i - y^i| = 0, \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

$$\iff x^i = y^i, \ \forall i \in \{1,\dots,n\} \iff x = y$$

Poiché $|x^i - y^i| = |y^i - x^i|$, si ha $d(x,y) = d(y,x)$

$$d(x,y) = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x^i - y^i| = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x^i - z^i + z^i - y^i| \leq$$

$$\leq \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \{|x^i - z^i| + |z^i - y^i|\} \leq \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x^i - z^i| + \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |z^i - y^i|$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

2) Sia $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\log(2nx+1)}{(nx)^2 + n}$

Osserviamo che per $x = 0$, $f_n(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$
e quindi in $x = 0$ la serie assegnata converge.
Fissiamo ora $x > 0$. Possiamo applicare il criterio degli infinitesimi

$$n^{3/2} \frac{\log(2nx+1)}{n^2x^2 + n} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$ Quindi la serie converge puntualmente

su $[0,+\infty)$. Studiamo ora la convergenza totale.

Poiché, fissato n, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\log 3}{1+n} \sim \dfrac{\log 3}{n}$ e $\sum_n \dfrac{\log 3}{n} = +\infty$ la convergenza

non può essere totale su $[0,+\infty)$ (dato che $c_n = \sup_{x \in [0,+\infty)} |f_n(x)| =$

$= \sup_{x \in [0,+\infty)} f_n(x) \geq \dfrac{\log 3}{1+n}$)

Vediamo se la convergenza è totale su intervalli del tipo $[a,+\infty)$ con $a>0$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 : \quad \frac{\log(2nx+1)}{(nx)^2+n} \leq \frac{2nx+1}{(nx)^2+n}, \quad \forall x \in [0,+\infty)$$

Fissiamo n e calcoliamo il sup della funzione $g_n(x) = \frac{2nx+1}{(nx)^2+n}$

$$g_n'(x) = \frac{2n\left((nx)^2+n\right) - (2nx+1)(2n^2x)}{\left((nx)^2+n\right)^2} = \frac{-2n^3x^2+2n^2-2n^2x}{\left((nx)^2+n\right)^2}$$

$$= \frac{2n^2}{\left((nx)^2+n\right)^2}\left(-nx^2-x+1\right)$$

Poiché sull'intervallo $[0,+\infty)$, $-nx^2-x+1>0$ per

$$0 \leq x < \frac{1-\sqrt{1+4n}}{-2n} = \frac{\sqrt{1+4n}-1}{2n}$$

g_n ha un massimo assoluto in $x_n = \frac{\sqrt{1+4n}-1}{2n}$

Poiché $\lim_n x_n = 0$ definitivamente $x_n < a$ e quindi definitivamente

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = \max_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a)$$

Poiché sappiamo già che $\sum_n f_n(a)$ è convergente

la convergenza è totale su $[a,+\infty)$, qualunque sia $a>0$.

3) Si veda, ad esempio, la lezione del 03/06/11

4) Si veda, ad esempio, la lezione del 07/06/11

5) Bisogna scegliere tra gli argomenti di $1+i$ quello appartenente all'intervallo $[\pi, 3\pi)$ e cioè $\frac{9}{4}\pi$

$$Log_{2\pi}(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{9}{4}\pi$$

$$\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i} = 1 - i$$

e quindi $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \log_{2\pi}(1+i) = (1-i)\left(\log\sqrt{2} + i\frac{9}{4}\pi\right)$

$$= \log\sqrt{2} + \frac{9}{4}\pi + i\left(\frac{9}{4}\pi - \log\sqrt{2}\right)$$

6) Osserviamo che $\left|\frac{\cos(3x)}{4+x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ e quindi la funzione $f(x) = \frac{\cos(3x)}{4+x^2}$ è assolutamente integrabile su $(-\infty, 0]$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos(3x)}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{4+x^2} = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{4+x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i3x}}{4+x^2}\,dx\right)$$

Osserviamo che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i3x}}{4+x^2}\,dx \overset{y=-x}{=} -\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{i3y}}{4+y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3y}}{4+y^2}\,dy$

Quindi è sufficiente calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{4+x^2}\,dx$

Consideriamo l'estensione a $\mathbb{C}$ della funzione integranda e cioè $\tilde{f}(z) = e^{i3z}/4+z^2$

$\tilde{f} \in H(\mathbb{C} \setminus \sqrt{-4})$

$\sqrt{-4} = \{2i, -2i\}$

Applicando quindi il metodo dei residui abbiamo

$$2\pi i \, \mathrm{Res}(\tilde{f}, 2i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{4+x^2}\,dx + \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i3z}}{4+z^2}\,dz$$

Dal lemma di Jordan, dato che $\lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{4+z^2} = 0$,

si ha che $\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i3z}}{4+z^2}\,dz = 0$.

$2i$ è un polo semplice per $\tilde{f}$ dato che

$$\lim_{z \to 2i} (z-2i)\tilde{f}(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{e^{i3z}}{z+2i} = \frac{e^{-6}}{4i} \neq 0$$

Quindi
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{4+x^2}\,dx = 2\pi i \, \frac{e^{-6}}{4i} = \frac{\pi}{2} e^{-6}$$

L'integrale cercato è quindi uguale a $\frac{1}{4}\left(2 \frac{\pi}{2} e^{-6}\right) = \frac{\pi}{4} e^{-6}$

A.A 2010/2011 Appello 14 Settembre 2011 Traccia A

1) Enunciare e dimostrare il criterio della radice per la convergenza di una serie numerica a termini non-negativi.

2) Enunciare il Principio di identità per le funzioni olomorfe; usarlo poi per dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}z \leq 0,\ \mathrm{Im}z = 0\}$ si ha

$$\mathrm{Log}_0(az) = \log a + \mathrm{Log}_0 z.$$

3) Calcolare

$$\int_{\partial^+ T} \frac{e^{z^2}}{(z-1)^3 z^2} \mathrm{d}z,$$

dove T è la corona circolare di centro 3 e raggi 1 e $\frac{5}{2}$.

4) Dare la definizione di singolarità essenziale. Provare poi che la funzione $f(z) = z^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$ ha una singolarità essenziale in 0.

5) Calcolare la somma dei residui al finito della funzione

$$f(z) = \frac{\sin(1/z^3)}{z^4 + 2z - 1}.$$

6) Determinare la serie di Fourier di soli seni della funzione $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dire, motivando la risposta, su quali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tale serie converge puntualmente all'estensione periodica di periodo 2 dell'estensione dispari su $(-1,1)$ di f.

POSSIBILE SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 14 SETTEMBRE 2011

1) Si veda il manuale consigliato

2) Per l'enunciato si veda, ad esempio, la lezione del 13/06/11

Sia $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$.

Poiché per questa scelta di z si ha $\mathrm{Log}_0(az) = \log(az)$

e $\log a + \mathrm{Log}_0 z = \log a + \log z$,

la funzione olomorfa

$$f = z \in \left(\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \leq 0,\ \mathrm{Im}\, z = 0\}\right) \longmapsto \mathrm{Log}_0(az)$$

risulta uguale alla funzione olomorfa

$$g = z \in \left(\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \leq 0,\ \mathrm{Im}\, z = 0\}\right) \longmapsto \log a + \mathrm{Log}_0 z$$

sull'insieme dei numeri complessi $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0 \text{ e } \mathrm{Im}\, z = 0\}$

Poiché tale insieme ha punti di accumulazione (ogni suo punto è di accumulazione!) $f = g$ sull'aperto connesso

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \leq 0,\ \mathrm{Im}\, z = 0\}$$

3) Sia $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^2}$. $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, possiamo quindi applicare la II formula di rappresentazione di Cauchy

(dato che $0 \notin T$, e quindi f è olomorfa su T, e inoltre $1 \in T$)

$$\int_{\partial^+ T} \frac{f(z)}{(z-1)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1) = \pi i\, f''(1)$$

$$f'(z) = \frac{2z^3 e^{z^2} - e^{z^2} 2z}{z^4} = \frac{2z^2 e^{z^2} - 2e^{z^2}}{z^3}$$

$$f''(z) = \frac{\left(4z e^{z^2} + 4z^3 e^{z^2} - 4z e^{z^2}\right) z^3 - \left(2z^2 e^{z^2} - 2e^{z^2}\right) 3z^2}{z^6}$$

e quindi $f''(1) = 4e$

4) Per la definizione, si veda, ad esempio la lezione del 20/06/11

Poiché $\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, si ha:

$$\cos\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{z^{4k}}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Quindi $1 - \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{z^{4k}}$

e $z^2\left(1 - \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{z^{4k-2}}$

da cui si deduce che 0 è una singolarità essenziale

5) È sufficiente calcolare il residuo all'infinito di f, poiché per il II teorema dei residui esso è uguale all'opposto della somma richiesta.

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sin(z^3)}{\frac{1}{z^4}+\frac{2}{z}-1}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{\sin(z^3)}{1+2z^3-z^4}\, z^2$$

Poiché $\lim_{z\to 0}\left(-\frac{\sin(z^3)\, z^2}{1+2z^3-z^4}\right) = 0$

$z=0$ è una singolarità eliminabile per $g(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

e quindi $\mathrm{Res}(f,\infty) = 0$

6) La serie di Fourier di soli seni per f è per definizione la serie di Fourier della estensione dispari $\tilde{f}$ di f all'intervallo $(-1,1)$.

I suoi coefficienti sono quindi

$$b_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{\tilde{f}(x)\sin\left(\frac{2\pi}{2}kx\right)}_{\text{è pari!}} dx = 2\int_0^1 x^2 \sin(\pi k x)\, dx$$

$$= -2\left[x^2 \frac{\cos(\pi k x)}{\pi k}\right]_0^1 + \frac{4}{\pi k}\int_0^1 x\cos(k\pi x)\, dx$$

$$= -\frac{2\cos(k\pi)}{\pi k} + \frac{4}{\pi k}\left[x\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{4}{(\pi k)^2}\int_0^1 \sin(k\pi x)\, dx$$

$$= -\frac{2\cos(k\pi)}{\pi k} + 0 + \frac{4}{(\pi k)^3}\Big[\cos(k\pi x)\Big]_0^1$$

$$= -\frac{2\cos(k\pi)}{\pi k} + \frac{4}{(\pi k)^3}\left(\cos(k\pi) - 1\right) = \begin{cases} -\frac{2}{k\pi}, & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{2}{k\pi} - \frac{8}{(k\pi)^3}, & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} \qquad (*)$$

La serie di Fourier di soli seni di f è quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\pi x) \quad , \quad \text{con } b_k = (*)$$

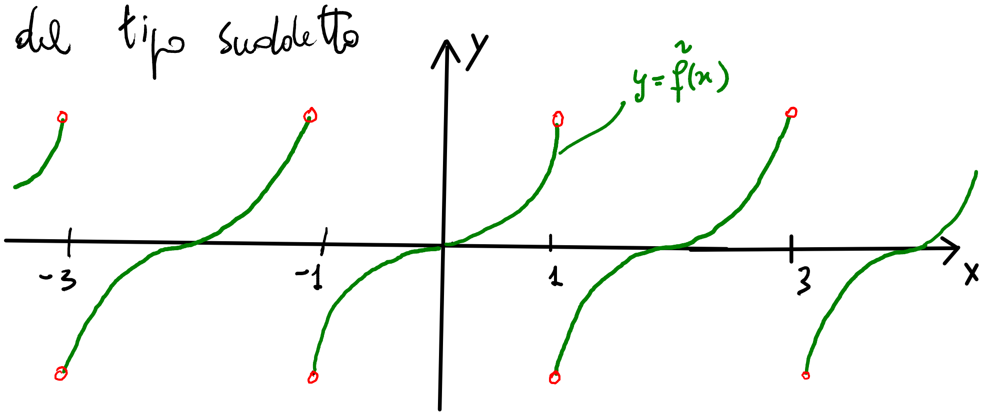
Tale serie converge puntualmente all'estensione periodica di periodo 2 di $\tilde{f}$ su ogni intervallo del tipo

$$(2m+1 \, , \, 2m+3) \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}$$

Infatti su tali insiemi l'estensione periodica di $\tilde{f}$ è derivabile

(Si tenga presente che $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [0,1) \\ -x^2 & \text{se } x \in (-1,0) \end{cases}$

è derivabile su $(-1,1)$ (si vede facilmente che è derivabile anche in 0, con derivata nulla) e quindi il prolungamento periodico che è definito in $\mathbb{R} - \{2m+1\}_{m \in \mathbb{Z}}$ è derivabile in ogni intervallo del tipo suddetto



A.A 2010/2011 Appello 30 Settembre 2011 Traccia A

1) Studiare la convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Stabilire inoltre che la convergenza è uniforme su ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$.

2) Enunciare il Teorema di derivazione termine a termine per una serie di funzioni. Usarlo poi per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \qquad t \in [0,1).$$

3) Dare la definizione di zero isolato e di zero di ordine finito per una funzione olomorfa. Dimostrare che se f è una funzione olomorfa sull'aperto Ω, $z_0 \in \Omega$ è uno zero isolato se e solo se è di ordine finito.

4) Si consideri la funzione $f(z) = e^{1/z^2}$. Dimostrare che l'immagine mediante f di un qualunque disco bucato di centro 0 è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

5) Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6xe^{i3x}}{x^2+1} \mathrm{d}x.$$

6) Determinare la serie di Fourier della funzione $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$, estesa per periodicità con periodo 2 su $\mathbb{R}$. È vero che tale serie converge puntualmente su $\mathbb{R}$? *(Motivare la risposta)* In caso affermativo, qual è il suo limite puntuale?

POSSIBILE SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 30 SETTEMBRE 2011

1) Fissato $x \in \mathbb{R}$, $\lim_n \frac{nx}{n+1} = 1 \cdot x = x$; la funzione limite puntuale delle successioni assegnate è quindi $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Sia ora $A \subset \mathbb{R}$ sottoinsieme limitato; fissato $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in A} \left| \frac{nx}{n+1} - x \right| = \sup_{x \in A} \frac{|x|}{n+1} = \frac{|L|}{n+1}$$

dove $L = \max \{ |\sup A|, |\inf A| \}$

Poiché $\frac{|L|}{n+1} \xrightarrow{n} 0$, la convergenza è uniforme su A.

2) Per l'enunciato si veda, per esempio, la lezione del 27/05/2011

La serie delle derivate della serie assegnata è $\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$; posto $t^2 = y$ questa diventa una serie geometrica di ragione y che, per $-1 < y < 1$ converge a $\frac{1}{1-y}$. Poiché $t \in [0,1)$, $t^2 \in [0,1)$ e dunque $\sum_{n=0}^{+\infty} t^2 = \frac{1}{1-t^2}$, $\forall t \in [0,1)$

Pertanto poiché la serie assegnata converge per $t = 0$ e la sua serie delle derivate converge uniformemente a $\frac{1}{1-t^2}$ $\forall t \in [0,a]$, con $a < 1$, dal teorema di derivazione termine a termine sappiamo che la serie assegnata converge uniformemente su $[0,a]$ e detta $s = s(t)$ la sua somma si ha $s'(t) = \frac{1}{1-t^2}$, $\forall t \in [0,a]$

Dato che a è un qualunque numero in $[0,1)$, possiamo dire che

$f'(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$, $\forall t \in [0,1)$. Integrando quindi tra 0 e $x \in [0,1)$

otteniamo $$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[-\log(1-x) + \log(1+x)\right]$$

Poiché $f(0) = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

3) Si veda, per esempio, la lezione del 13/06/2011

4) Sia $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; vogliamo dimostrare che qualunque sia $\delta > 0$

esiste $z \in D'(0,\delta)$ tale che $e^{\frac{1}{z^2}} = w$.

Poiché z deve soddisfare l'uguaglianza $e^{\frac{1}{z^2}} = w$, deve essere

$\dfrac{1}{z^2} = \mathrm{Log}\, w = \log|w| + i(\mathrm{Arg}\, w + 2k\pi)$ cioè

$$z = z(k) = \left(\frac{1}{\log|w| + i(\mathrm{Arg}\,w + 2k\pi)}\right)^{\frac{1}{2}}$$. Osserviamo che se $k \to \infty$

il modulo degli elementi della successione $\mathrm{Log}\, w$ tende a $+\infty$

quindi $\left|\dfrac{1}{\log|w| + i(\mathrm{Arg}\,w + 2k\pi)}\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ e dunque anche

$$\left|\left(\frac{1}{\log|w| + i(\mathrm{Arg}\,w + 2k\pi)}\right)^{\frac{1}{2}}\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$ cioè le due successioni

che si ottengono considerando le radici quadrate di $\dfrac{1}{\log|w| + i(\mathrm{Arg}\,w + 2k\pi)}$

tendono entrambe a 0. Pertanto qualunque sia $\delta > 0$, definitivamente

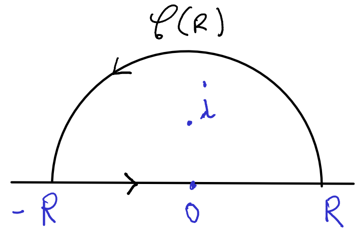
gli elementi di tali due successioni appartengono a $D'(0,\delta)$. Quindi possiamo

concludere che esiste in $D'(0,\delta)$, qualunque sia $\delta>0$, non uno ma un numero

infinito di numeri complessi $z \in D'(0,\delta)$ tali che $e^{\frac{1}{z^2}} = w$.

5) Possiamo applicare il teorema dei residui. Scegliamo Γ curva chiusa data dall'unione del segmento di estremi $-R$ e R sull'asse dei numeri reali e dalla semicirconferenza $\mathcal{C}(R)$ di centro 0 e raggio R. Estendiamo f a $\mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{6z\, e^{i3z}}{z^2+1}.$$



$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; i)$$

$$\| $$

$$\int_{-R}^{R} \frac{6x\, e^{i3x}}{x^2+1}\,dx + \int_{\mathcal{C}(R)} \frac{6z\, e^{i3z}}{z^2+1}\,dz$$

Passando al limite per $R \to +\infty$ in tutti e due i membri di questa uguaglianza, otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6x\, e^{i3x}}{x^2+1}\,dx + \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathcal{C}(R)} \frac{6z\, e^{i3z}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

$\hookrightarrow$ NON DIPENDE DA R.

Poiché $\lim_{|z|\to\infty} \frac{6z}{z^2+1} = 0$, per il lemma di Jordan $\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathcal{C}(R)} \frac{6z\, e^{i3z}}{z^2+1}\,dz = 0$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6x\, e^{i3x}}{x^2+1}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f; i) = 2\pi i \lim_{z\to i} (z-i)\frac{6z\, e^{i3z}}{(z-i)(z+i)} =$$

$$= 2\pi i \cdot 6i\, \frac{e^{-3}}{2i} = \frac{6\pi i}{e^3}$$

6) Poiché $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, la serie di Fourier richiesta

è uguale alla serie dei seni della funzione assegnata nell'esercizio 6

della prova scritta del 14 settembre 2011. Tale serie converge puntualmente su $\mathbb{R}$ in quanto

l'estensione periodica di periodo 2 a $\mathbb{R}$ di f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{2m+1\}, m \in \mathbb{Z}$; nei punti

in cui non è continua (cioè nei punti del tipo $2m+1$, $m \in \mathbb{Z}$) ha discontinuità di I specie

ed esistono $\lim_{h \to 0^{\pm}} \dfrac{f(2m+1+h) - \ell^{\pm}_{2m+1}}{h}$, dove $\ell^{\pm}_{2m+1} = \lim_{x \to 2m+1^{\pm}} f(x)$, $m \in \mathbb{Z}$.

La funzione limite puntuale è quindi (si veda ad esempio il teorema sulla convergenza

della serie di Fourier alla fine della lezione del 28/06/2011):

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2m+1\}, m \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\ell^{+}_{2m+1} + \ell^{-}_{2m+1}}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0 & \text{se } x = 2m+1, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

A.A 2010/2011 Appello 23 Novembre 2011 Traccia A

1) Studiare la convergenza puntuale su $(0, +\infty)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx \log(2 + nx)}{(1 + nx)^3}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Stabilire inoltre che la convergenza non è uniforme su tale insieme mentre lo è su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

2) Dimostrare che se una serie di potenze in $\mathbb{C}$ di centro 0 converge in $\bar{z} \neq 0$ allora converge anche per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |\bar{z}|$.

3) Sia $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva continua. Dimostrare che $\left| \int_a^b \gamma(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)|\mathrm{d}t$

4) Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}^+} \frac{ze^{z^2}}{z^3 - 1}\mathrm{d}z,$$

dove $\mathcal{C}^+$ è la circonferenza di centro 1 e raggio 3/2 orientata in senso antiorario.

5) Determinare l'insieme su cui la funzione $f(z) = \mathrm{Log}_0(1 + z^2)$ è olomorfa. Stabilire poi il tipo di singolarità isolate della funzione $g(z) = f(z)/z^2$.

6) Calcolare, usando il metodo dei residui, il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2(2x)}{1 + x^4}\mathrm{d}x$$

Possibile svolgimento della prova del 23 novembre 2011

1) Sia $\bar{x} \in (0,+\infty)$, $f_n(\bar{x}) = \underbrace{\frac{n\bar{x}}{(1+n\bar{x})^2}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}} \underbrace{\frac{\log(1+(1+n\bar{x}))}{(1+n\bar{x})}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Stabiliamo ora che la convergenza a 0 NON è uniforme su $(0,+\infty)$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo il punto $x_n = \frac{1}{n}$. Valutiamo f_n in tale punto:

$$f_n(x_n) = \frac{\log 3}{8}$$

Come si vede il risultato ottenuto è indipendente da n e, poiché $\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in(0,+\infty)} f_n(x) \geq f_n(x_n) = \frac{\log 3}{8}$,

la convergenza non può essere uniforme

Vediamo ora che invece la convergenza a 0 è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a,+\infty)$ con $a>0$. Fissiamo dunque $n \in \mathbb{N}$.

$$|f_n(x)| \leq \frac{nx}{(1+nx)^2} \underbrace{\frac{\log(1+(1+nx))}{1+nx}}_{\leq 1}$$

$\frac{\log(1+y)}{y} \leq 1$ per $y \in (0,+\infty)$

Studiamo quindi la funzione $g_n(x) = \dfrac{nx}{(1+nx)^2}$ su $[a,+\infty)$

$$g_n'(x) = \frac{n(1+nx)^2 - nx\, 2(1+nx)n}{(1+nx)^4} =$$

$$= \frac{n(1+nx)\,(1+nx-2nx)}{(1+nx)^4} =$$

$$= \frac{n}{(1+nx)^3}\,(1-nx)$$

Se $x \in [a,+\infty)$, questa funzione è positiva se $1-nx>0$ cioè $x < \frac{1}{n}$. Pertanto definitivamente per $n\to\infty$

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = \max_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a) = \frac{na}{(1+na)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

2) Si vedano, ad esempio, gli appunti della lezione del 30/05/11

3) Si vedano, ad esempio, gli appunti della lezione del 8/6/11

4) Poiché $z^3-1 = (z-1)(z^2+z+1)$

e gli zeri di z^2+z+1 sono $\dfrac{-1\pm 3i}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \end{cases}$

(e quindi non appartengono al disco aperto $D(1,\frac{3}{2})$ di centro 1 e raggio $3/2$) possiamo scrivere la funzione integranda

Come $\frac{ze^{z^2}}{(z^2+z+1)(z-1)}$ e usare la I formula di rappresentazione di Cauchy dato che la funzione $f(z)=\frac{ze^{z^2}}{z^2+z+1}$ è olomorfa in $D(1,\frac{3}{2})$. Pertanto l'integrale assegnato è uguale a $2\pi i\, f(1) = 2\pi i\, \frac{e}{3}$

5) Dato che la funzione $z \mapsto \log_0 z$ è olomorfa in

$$\mathbb{C} \setminus \{ z\in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \le 0 \text{ e } \mathrm{Im}\, z = 0 \},$$ deve essere

$$1+z^2 \neq a \quad \forall a \in \mathbb{R},\ a\le 0$$

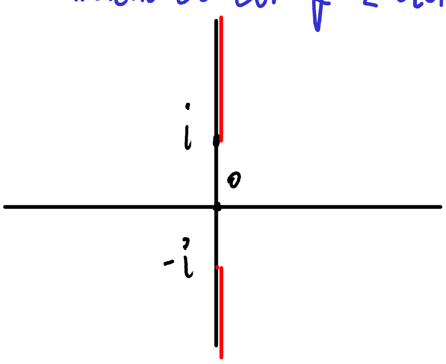
cioè $z^2 \neq a-1$ e quindi $z \neq \pm \sqrt{|a-1|}\, i$

L'insieme su cui f è olomorfa è quindi

$$\mathbb{C} \setminus \{ z\in\mathbb{C} : z = \pm\sqrt{|a-1|}\, i ,\ a\in\mathbb{R},\ a\le 0 \}$$

ossia $\mathbb{C}$ meno le due semirette contenute nell'asse dei numeri immaginari puri di origine i punti i e $-i$

INSIEME SU CUI f È OLOMORFA



0 è l'unica singolarità isolata per la funzione $g(z) = f(z)/z^2$. Poiché

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2} z^2 + o(z^2)$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{2}\cdot 2\, z^2 + o(z^2)$$

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+o(z^2)}{z^2} = 1$$

e quindi 0 è una singolarità eliminabile per g.

6) Si osservi che $\left|\frac{\cos(2x)}{1+x^4}\right| \le \frac{1}{1+x^4} \sim \frac{1}{x^4}$ e quindi la funzione assegnata è assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$.

Inoltre

$$\cos^2(2x) = \left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{i4x}}{4} + \frac{e^{-i4x}}{4} + \frac{1}{2}$$

e quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2(2x)}{1+x^4}\,dx =$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i4x}}{1+x^4}\,dx + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i4x}}{1+x^4}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i4x}}{1+x^4}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

che sono entrambi integrali molto semplici da calcolare con il metodo dei residui (si vedano esercizi svolti in classe o gli esercizi analoghi delle tracce precedenti)

A.A 2010/2011 Appello 10 Febbraio 2012 Traccia A

1) Dimostrare il Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per una successione di funzioni continue e limitate su un intervallo (a, b).

2) Determinare e disegnare sul piano complesso il disco di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{n+1}}(z-1+i)^n.$$

3) Enunciare il teorema di Cauchy-Goursat. Darne una dimostrazione sotto le ipotesi aggiuntive che $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sia una funzione C^1 e Ω un aperto semplicemente connesso.

4) Determinare e disegnare sul piano l'immagine dell'insieme $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = e, \mathrm{Arg} z \in [-\pi/4, \pi/4]\}$ mediante la funzione multivoca $z \mapsto \mathrm{Log} z$.

5) Enunciare e dimostrare il I Teorema dei residui.

6) Calcolare la serie di Fourier di soli coseni della funzione $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$. Usarla, poi per dimostrare che

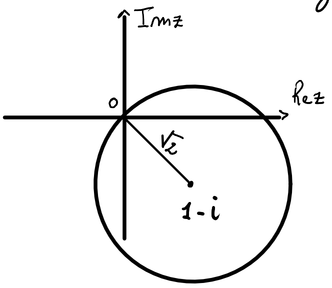
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} + e}{\pi^2 k^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

POSSIBILE SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 10/02/12

1) Confrontare, ad esempio la lezione del 23/05/11

2) Poiché $\lim_n \sqrt[n]{\left|\frac{(1+i)^n}{2^{n+1}}\right|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{|1+i|^n}{2\,2^n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{(\sqrt{2})^n}{2\,2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

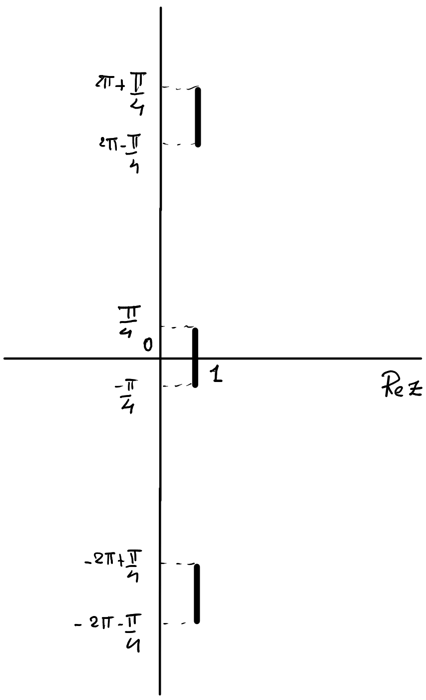
il raggio di convergenza della serie è uguale a $\sqrt{2}$ e quindi il disco di convergenza ha centro $1-i$ e raggio $\sqrt{2}$ ed è dato da



3) Confrontare, ad esempio la lezione del 08/06/11

4) Poiché $\operatorname{Log} z = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{Log}(A) = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w = \log e = 1 \text{ e } \operatorname{Im} w \in \left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right], k \in \mathbb{Z} \right\}$$



ed è quindi l'insieme unione di infiniti segmenti di ampiezza $\frac{\pi}{2}$ costituiti da punti aventi parte reale 1 i cui centri distano 2π. Il segmento corrispondente a $k=0$ ha centro nel punto 1.

5) Confrontare, ad esempio la lezione del 21/06/11

6) Sia $\tilde{f}: [-1,1] \to \mathbb{R}$ l'estensione pari di f all'intervallo $[-1,1]$. La serie di coseni di f è la serie di Fourier di $\tilde{f}$ estesa per periodicità con periodo 2 su $\mathbb{R}$.

Poiché $\tilde{f}$ è pari i coefficienti b_k sono nulli

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = e-1$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{2}x\right)dx = 2\int_0^1 e^x \cos(k\pi x)\,dx =$$

$$= 2\left[e^x \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 e^x \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\,dx =$$

$$= 2\cdot 0 - 2\left(-\left[e^x \frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2}\right]_0^1 + \int_0^1 e^x \frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2}\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{k^2\pi^2}\left(e(-1)^k - 1\right) - \underbrace{\frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1 e^x \cos(k\pi x)\,dx}_{a_k}$$

Quindi

$$a_k\left(1 + \frac{1}{k^2\pi^2}\right) = \frac{2}{k^2\pi^2}\left(e(-1)^k - 1\right)$$

cioè
$$a_k = \frac{2}{k^2\pi^2+1}\left(e(-1)^k - 1\right)$$

e la serie di coseni di f è data da

$$e-1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2\pi^2+1}\left(e(-1)^k - 1\right)\cos(k\pi x)$$

Per $x=1$ (poiché l'estensione periodica di $\tilde{f}$ è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ e per ogni $\bar{x}\in\mathbb{Z}$ ha derivate dx e sx finite) tale serie converge a $\tilde{f}(1) = e$ e quindi

$$e = e-1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2\pi^2+1}\left(e(-1)^k - 1\right)(-1)^k$$

da cui $2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2+1}\left(e + (-1)^{k+1}\right) = 1$.

A.A 2010/2011 Appello 24 Febbraio 2012 Traccia A

1) Studiare la convergenza uniforme sull'intervallo $[0, +\infty)$ della serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{1/2}(\cos^2(nx) - e^{-nx})}{(1+x)(n^{5/2}-1)}.$$

2) Dimostrare che se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, è olomorfa in $z_0 \in \mathbb{C}$ allora la parte reale e quella immaginaria di f sono differenziabili in z_0 e in tale punto valgono le relazioni di Cauchy-Riemann.

3) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di centro 0 della funzione $z \mapsto e^{\frac{1-z}{z}}$.

4) Sia $f\colon D'(z_0, r) \to \mathbb{C}$ olomorfa. Dimostrare che se esiste $L \geq 0$ tale che $|f(z)| \leq L$, per ogni $z \in D'(z_0, r)$, allora z_0 è una singolarità eliminabile per f.

5) Calcolare il residuo all'infinito della funzione $z \mapsto \dfrac{ze^{1/z}}{z^2 - i}$.

6) Usando la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \pi) \\ -1 & \text{se } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

dimostrare che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^{h+1}}{\pi(2h+1)} = -1.$$

Possibile svolgimento della prova del 24/02/12

1) $\left|\cos^2(nx) - e^{-nx}\right| \leq \left|\cos^2(nx)\right| + e^{-nx} \leq 1+1, \ \forall x \in [0,+\infty)$

inoltre $\left|\frac{1}{1+x}\right| \leq 1, \ \forall x \in [0,+\infty)$.

Quindi $\left|f_n(x)\right| \leq \dfrac{2n^{\frac{1}{2}}}{n^{5/3}-1}, \quad \forall x \in [0,+\infty)$

La successione $\dfrac{2n^{\frac{1}{2}}}{n^{5/3}-1}$ è asintotica a $\dfrac{2}{n^{7/6}}$. Poiché $\sum \frac{2}{n^{7/6}} < +\infty$,

la serie di funzioni assegnata converge totalmente (e quindi uniformemente) su $[0,+\infty)$

2) Si confronti, ad esempio, la lezione del 07/06/11

3) $e^{(1-z)/z} = e^{\frac{1}{z}-1} = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{e}$

e quindi la serie di Laurent richiesta è $\dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k}\frac{1}{k!}$

4) Si confronti, ad esempio, la lezione del 17/06/11

5) $\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\,\frac{\frac{1}{z}e^z}{\frac{1}{z^2}-i} = -\frac{1}{z^2}\,\frac{\frac{1}{z}e^z}{\frac{1-z^2 i}{z^2}} = \frac{e^z}{z(z^2 i - 1)}$$

Quest'ultima funzione ha in 0 un polo semplice e

$$\lim_{z\to 0} z\,\frac{e^z}{z(z^2 i-1)} = -1 = \operatorname{Res}(f,\infty)$$

6) Dato che f è dispari, $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

La serie di Fourier di f è quindi

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{(2h+1)\pi}\sin\left((2h+1)x\right).$$

Poiché tale serie in $-\frac{\pi}{2}$ converge a $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$, abbiamo

$$-1 = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{(2h+1)\pi}\sin\left(-(2h+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{-4}{(2h+1)\pi}(-1)^h$$

$$= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{-4(-1)^h}{(2h+1)\pi}$$

A.A 2010/2011 Appello 2 Maggio 2012 Traccia A

1) Enunciare il Teorema di derivazione termine a termine per una serie di funzioni. Applicarlo poi (scrivendo i passaggi necessari per arrivare al risultato) per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-t)^{n-2}.$$

2) Fornire un esempio di una funzione che non sia olomorfa in alcun punto del piano complesso. Giustificare la risposta.

3) Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione di Cauchy.

4) Dimostrare che per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Dimostrare inoltre che per ogni $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.

5) Usando i teoremi dei residui, calcolare

$$\int_{\triangle} \frac{z}{e^{1/z^2}(z-1)} \mathrm{d}z,$$

dove $\triangle$ è il triangolo di vertici i punti $p_1 = -1-i$, $p_2 = 2$ e $p_3 = i$, percorso in senso antiorario.

6) Scrivere la serie di Fourier di soli coseni della funzione $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Dire, giustificando la ruisposta, se tale serie converge uniformente su $[0,2]$ a f. Stabilire infine che

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

Possibile svolgimento della prova del 02/05/12

1) Per l'enunciato si vede, ad esempio, la lezione del 27/05/11

Osserviamo che i termini della serie assegnata, $f_n(t) = n(n-1)(-t)^{n-2}$, si ottengono derivando due volte quelli della serie

(*) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n$ che sappiamo converge puntualmente in $(-1,1)$ ed ha

per somma la funzione $g(t) = \frac{1}{1+t}$, $t \in (-1,1)$

la serie delle derivate di (*) è $\sum_{n=1}^{+\infty} -n(-t)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} -n(-1)^{n-1} t^{n-1}$ (**)

è una serie di potenze con raggio di convergenza 1 e quindi converge uniformemente in ogni intervallo $[-a,a] \subset (-1,1)$, $0 \le a < 1$.

Analogamente, la serie delle derivate di (**) è la serie assegnata, ha raggio di convergenza 1 e converge uniformemente in $[-a,a]$

Applicando quindi due volte il teorema di derivazione termine a termine otteniamo che

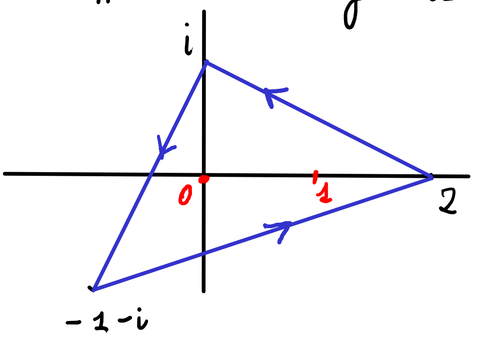
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(-t)^{n-2} = g''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$$

2) Si confronti, ad esempio, la lezione del 08/06/11

3) " " " " 10/06/11

4) " " " " 14/06/11

5) Il triangolo Δ è rappresentato qui in figura e come vediamo contiene le singolarità 0 e 1 della funzione integranda



$$f(z) = \frac{z}{e^{1/z^2}(z-1)}$$

Per il I Teorema dei residui

$$\int_{\Delta} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1) \right) \quad (*)$$

Poiché il calcolo del residuo in 0 non è banale, conviene usare anche il II Teorema dei residui, per cui la somma al secondo membro di $(*)$ è uguale a $-2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty)$

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z}}{e^{z^2}\left(\frac{1}{z}-1\right)} = -\frac{1}{z^3} \frac{1}{\frac{e^{z^2}(1-z)}{z}} =$$

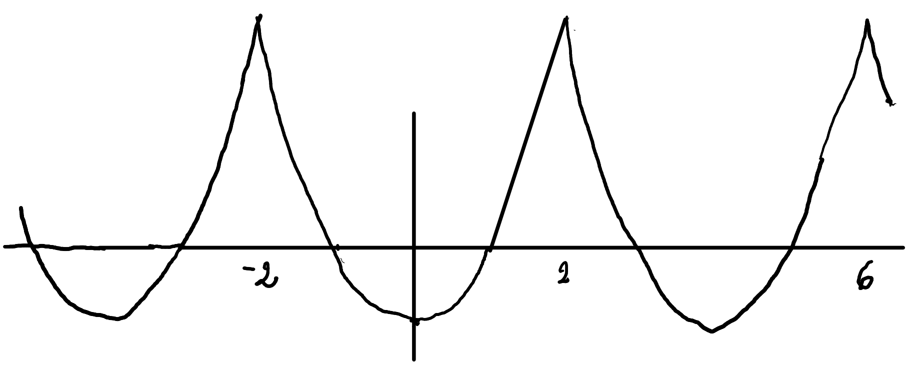
$$= -\frac{1}{z^2 e^{z^2}(1-z)} := g(z)$$

Poiché $\lim_{z\to 0} z^2 g(z) = -1 \neq 0$, 0 è un polo di ordine 2 per g.

Quindi $\mathrm{Res}(g,0) = \lim_{z\to 0} D\left(z^2 g(z)\right) = \lim_{z\to 0} \frac{2z e^{z^2}(1-z) - e^{z^2}}{\left(e^{z^2}(1-z)\right)^2} = -1$

Pertanto l'integrale assegnato è uguale a $-2\pi i(-1) = 2\pi i$

6) La serie di soli coseni di f è per definizione la serie di Fourier della estensione pari $\tilde{f}$ di f all'intervallo $[-2,2]$.
Nel nostro caso, tale funzione ha ovviamente la stessa legge di f, cioè $\hat{f}(x) = x^2 - 1$, $x \in [-2,2]$



Prolungamento periodico di $\hat{f}$ a $\mathbb{R}$ di periodo 4

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(x^2-1)\,dx = \frac{1}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2}(x^2-1)\cos\left(\frac{2\pi k x}{4}\right)dx = \int_{0}^{2}(x^2-1)\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx$$

$$= \left[(x^2-1)\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\frac{2}{k\pi}\right]_0^2 - \frac{2}{k\pi}\int_0^2 2x\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{6}{k\pi}\sin(k\pi) + \frac{2}{k\pi}\sin 0 + \left[\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2 2x\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\right]_0^2$$

$$- \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\int_0^2 2\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx =$$

$$= 0 + \frac{16}{k^2\pi^2}\cos(k\pi) - 0 - \left[\left(\frac{2}{k\pi}\right)^3 2\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\right]_0^2$$

$$= \frac{16}{k^2\pi^2}\cos(k\pi) - 0 = \frac{16}{k^2\pi^2}(-1)^k$$

Quindi la serie di soli coseni di f è

$$\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{16}{k^2\pi^2}(-1)^k\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$$

Poiché l'estensione periodica a $\mathbb{R}$ di periodo 4 di $\tilde{f}$ è continua con derivata continua tranne nei punti $4k+2$, $k\in\mathbb{Z}$ dove esistono finite la derivata destra e la derivata sinistra, la serie di Fourier di $\tilde{f}$ converge uniformemente a $\tilde{f}$ su $\mathbb{R}$.
Quindi, in particolare, la serie dei coseni di f converge uniformemente ad f sull'intervallo $[0,2]$. Per $x=0$, quindi si ha

$$-1 = f(0) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{16}{k^2\pi^2}(-1)^k\cos\left(\frac{k\pi}{2}0\right),$$ cioè

$$-\frac{4}{3} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{16(-1)^k}{k^2\pi^2}$$ da cui $$\frac{\pi^2}{12} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\pi^2}.$$