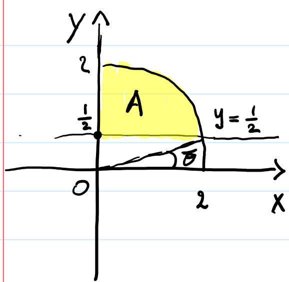
1) Calcolare $\displaystyle\int_A \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$

dove A è il sottoinsieme del I quadrante compreso tra la retta di equazione $y=\frac{1}{2}$, l'asse delle y e la circonferenza di centro O e raggio 2

A è l'insieme rappresentato in figura



In coordinate polari (θ,ρ) esso è definito da $\bar{\theta}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ dove $\bar{\theta}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ è l'angolo tale che $2\sin\bar{\theta}=\frac{1}{2}$ quindi $\bar{\theta}=\arcsin\frac{1}{4}$

$\rho\le 2$ e inoltre, poiché la retta $y=\frac{1}{2}$ ha equazione in coordinate polari $\rho\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\rho\ge\frac{1}{2\sin\theta}$.

Quindi in coordinate polari, l'insieme di integrazione è un insieme normale rispetto all'asse delle θ. Usando quindi la formula di riduzione otteniamo

$$\int_A \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{2}\frac{\rho^3\sin^3\theta}{\rho^4}\,\rho\,d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{2}d\rho = \int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\left(2-\frac{1}{2\sin\theta}\right)d\theta$$

$$= 2\int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta =$$

Calcoliamo separatamente i due integrali qui sopra

$$2\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta = 2\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\, d\theta =$$

$$= -2\cos\theta\Big|_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\cos^3\theta\Big|_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= +2\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3}\cos^3\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\Big|_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{8}\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\, d\theta$$

Per cui $-\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{8}\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$
$-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}$

e $-\frac{1}{2}\int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{16}\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{4}$

2) Determinare i punti stazionari della funzione
$f(x,y) = (x+y)(x^2-y+1)^2$ e studiarne la natura

f è un polinomio quindi di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2-y+1)^2 + 2(x+y)(x^2-y+1)\,2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2-y+1)^2 - 2(x+y)(x^2-y+1)$$

$$\begin{cases}(x^2-y+1)^2 + 2(x+y)(x^2-y+1)\,2x = 0\\(x^2-y+1)^2 - 2(x+y)(x^2-y+1) = 0\end{cases}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases}2(x+y)(x^2-y+1)(2x+1) = 0\\(x^2-y+1)(x^2-y+1-2x-2y) = 0\end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono l'unione delle soluzioni dei seguenti 3 sistemi:

1. $\begin{cases}x^2-y+1=0\\0=0\end{cases}$ quindi la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y=x^2+1$ è una curva di punti critici

1. $\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ quindi la parabola γ di equazione $y = x^2+1$ è una curva di punti critici

2. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - y + 1 - 2(x+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$

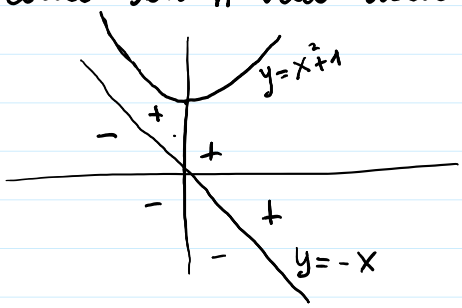
che non ha soluzioni dato che la seconda equazione non ha soluzioni reali

3. $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - y + 1 + 1 - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ 3y = \frac{9}{4} \end{cases} \qquad P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

Studiamo la natura dei punti critici $(\bar{x},\bar{y}) \in \gamma$

$$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y)$$

Poiché il segno di f è uguale al segno della funzione $g(x,y) = x+y$ abbiamo che tutti i punti $(\bar{x},\bar{y}) \in \gamma$ sono di minimo locale non forte dato che $x+y > 0$ in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$ come ben si vede dalla figura qui sotto



Studiamo ora la natura di P_1

$$f_{xx}(x,y) = 2(x^2-y+1)2x + 2(x^2-y+1)2x + 8(x+y)x^2 + 4(x+y)(x^2-y+1)$$

$$f_{yy}(x,y) = -2(x^2-y+1) - 2(x^2-y+1) + 2(x+y)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4x(x^2-y+1) - 2(x^2-y+1) - 4x(x+y)$$

$$f_{xx}\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right) = 2\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} + 1\right)(-1) + 2 \cdot \tfrac{1}{2}(-1) + 8\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\right)\tfrac{1}{4} + 4\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}$$

$$= -1 - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = -1$$

$$f_{yy}\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = -2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$f_{xy}\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = f_{yx}\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = -2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$$

$\left|H_f\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\right| = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 < 0$ quindi P_1 è di sella

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = e^{-2x} + x & (*) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ che ha soluzioni 1 e -2

quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Una soluzione particolare di $(*)$ si ottiene sommando una di

$y'' + y' - 2y = e^{-2x}$ e una di $y'' + y' - 2y = x$

Usando il metodo di similarità per entrambe otteniamo

$\bar{y}_1(x) = x k e^{-2x}$

$\bar{y}_1'(x) = k e^{-2x} - 2kx e^{-2x}$

$\bar{y}_1''(x) = -4k e^{-2x} + 4kx e^{-2x}$ quindi

$-3k e^{-2x} = e^{-2x}$ da cui $k = -\frac{1}{3}$

$\bar{y}_2(x) = ax + b$

$\bar{y}_2'(x) = a$

$\bar{y}_2''(x) = 0$ quindi

$0 + a - 2ax - 2b = x$

da cui

$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ -2a = 1 \end{cases}$ cioè

$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$ quindi

$\bar{y}_2(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Pertanto l'integrale generale di $(*)$ è

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} x e^{-2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{4}$$

$$y'(x) = c_1 e^{x} - 2c_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{2}{3} x e^{-2x} - \frac{1}{2}$$

$$y'(0) = c_1 - 2c_2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

Deve dunque essere $\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{1}{4} = 1 \\ c_1 - 2c_2 - \frac{5}{6} = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{5}{4} \\ c_1 - 2c_2 = -\frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} 3c_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \\ c_1 + c_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{7}{9} \\ c_2 = \frac{5}{4} - \frac{7}{9} = \frac{17}{45} \end{cases}$$

4) Per le definizioni si veda, ad esempio, pag. 259 del manuale Marcellini, Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno", Liguori Ed.
Per il teorema si veda pag 264 dello stesso.