1) - a) Determinare la rappresentazione esponenziale del numero complesso

$$\frac{i}{-2-2\sqrt{3}i}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$$

Scrivere poi le radici quarte

$$\frac{i}{-2-2\sqrt{3}i} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{4e^{-\frac{2}{3}\pi i}} = \frac{1}{4} e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)i}$$

quindi $\frac{i}{-2-2\sqrt{3}i} e^{i\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4} e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{8}\right)i} = \frac{1}{4} e^{\frac{31}{24}\pi i}$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4} e^{\frac{31}{24}\pi i}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\left(\frac{31}{96}\pi + \frac{\pi}{2}k\right)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

1) - b) Determinare il dominio, la monotonia e l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}\cosh\left(x^{\frac{1}{e}} + e\right) - 2$$

dom f : $x \geq 0$

f è somma della funzione costante $y = -2$ con la funzione

$x \in [0,+\infty) \longmapsto x^{\frac{1}{e}} + e \longmapsto \frac{1}{2}\cosh\left(x^{\frac{1}{e}}+e\right)$

stett. crescente

strett. crescente dato che $x^{\frac{1}{e}}+e > 0$ e $y = \cosh x$ è strett. crescente su $(0,+\infty)$

Quindi f è strett. crescente. Poiché $f \in C^0([0,+\infty))$

$$\operatorname{Im} f = \left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[\frac{1}{2}\cosh e - 2, +\infty\right)$$

2) Determinare il dominio e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+2x^3)}{x^2-1}$$

Si consideri poi la funzione $g(x) = \log(1+2x^3)$ e usando la formula di McLaurin se ne determini la derivata di ordine 9 in 0

dom f: $\begin{cases} 1+2x^3 > 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1/\sqrt[3]{2} \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$ quindi dom $f = \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

$f \in C^0(\text{dom} f)$ quindi gli asintoti verticali sono da cercare solo nei punti $x = -1/\sqrt[3]{2}$ e $x = 1$

$\lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}^+} f(x) = \frac{-\infty}{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1} = +\infty$; $x = -1$ è asintoto verticale a dx

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\log 3}{0^-} = -\infty$$

quindi la retta $x=1$ è asintoto verticale sia a dx che a sx per f

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{\log 3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+2x^3}\cdot 6x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{2x(1+2x^3)} = 0$$

quindi la retta $y=0$ è asintoto orizzontale per $x\to+\infty$.

Poiché $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, per $t\to 0$. Sostituendo a t, $2x^3$ (che tende a 0 per $x\to 0$)

$$\log(1+2x^3) = 2x^3 - \frac{4x^6}{2} + \frac{8x^9}{3} + o(x^9) \text{ per } x\to 0$$

la derivata nona di g in 0 deve dunque soddisfare

$$\frac{D^{(9)}g(0)}{9!} = \frac{8}{3} \quad \text{da cui} \quad D^{(9)}g(0) = \frac{9!\,8}{3}$$

3) Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$

L'integranda può essere decomposta in fratti semplici così:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{A}x^2 - 4\cancel{A}x + 4A + \cancel{B}x^2 - 2\cancel{B}x - \cancel{B}x + 2B + \cancel{C}x - C}{(x-1)(x-2)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-4A-3B+C)x + 4A + 2B - C}{(x-1)(x-2)^2} \quad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-3B+C=1 \\ 4A+2B-C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ -4A+3A+C=1 \\ 4A-2A-C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ -A+C=1 \\ 2A-C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ A=2 \\ -A+C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=3 \end{cases}$$

Quindi $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{2}{x-1}\,dx - \int_{-2}^{-1} \frac{2}{x-2}\,dx + \int_{-2}^{-1} \frac{3}{(x-2)^2}\,dx$

$$= 2\log|x-1|\Big|_{-2}^{-1} - 2\log|x-2|\Big|_{-2}^{-1} - \frac{3}{(x-2)}\Big|_{-2}^{-1} =$$

$$= 2(\log 2 - \log 3) - 2(\log 3 - \log 4) + 1 - \frac{3}{4}$$

$$= 6\log 2 - 4\log 3 + \frac{1}{4}$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale

4) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale
si fornisca una sua applicazione

Per enunciato e dimostrazione si vedano, ad esempio, le pagine 242 e 243 del manuale di riferimento

Una sua applicazione è il fatto che l'integrale definito di una funzione continua è dato dalla differenza dei valori che una primitiva assume negli estremi dell'intervallo di integrazione.