1) Studiare la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx$$

Osserviamo che la funzione integranda $f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2}$ è continua su $(0,+\infty)$

Sia quindi $c \in (0,+\infty)$ e cerchiamo di stabilire che entrambi gli integrali impropri $\int_0^c \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx$ e $\int_c^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx$ convergono

Poiché $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^3 x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \sin x \, \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0 \cdot 1 = 1$, f ha in 0 una discontinuità eliminabile e quindi $\int_0^c \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx \in \mathbb{R}$

Poiché $\left|\frac{\sin^3 x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ e la funzione $\frac{1}{x^2}$ è integrabile su $[c,+\infty)$, f è assolutamente integrabile e quindi integrabile anche su $[c,+\infty)$.

2) Sia $f(x,y) = \frac{x\, e^{-x^2+y^2}}{\sqrt{y-x^2-1}}$

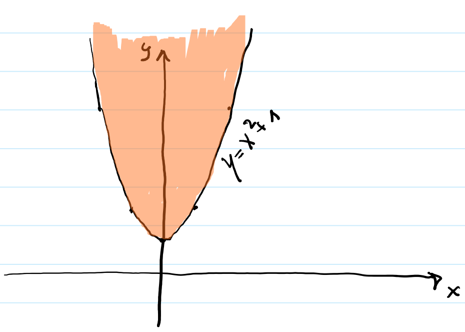
Determinare e rappresentare nel piano il dominio di f.

Dire se esso è un insieme aperto, chiuso, compatto, limitato

Stabilire se esiste il piano tangente al grafico di f in tutti i punti del suo dominio. In caso affermativo calcolare l'equazione del piano tangente nel punto $(0,2,f(0,2))$

Determinare anche $\frac{\partial f}{\partial v}(0,2)$ dove v è il versore di componenti $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

dom f: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y - x^2 - 1 > 0\}$



Il dominio di f è quindi la regione di piano in arancione. I punti della parabola di equazione $y = x^2+1$ non appartengono al dominio.

Esso è un insieme aperto, illimitato (non è quindi chiuso, né compatto)

Poiché f è il quoziente delle funzioni $x e^{-x^2+y^2}$ e $\sqrt{y-x^2-1}$ (la prima è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, la seconda $C^\infty(\text{dom} f)$)

che sono entrambe derivabili con derivate parziali continue in ogni

Che sono entrambe derivabili con derivate parziali continue in ogni punto del dominio di f, per il teorema del differenziale, f è differenziabile nel suo dominio. Esiste quindi il piano tangente al grafico di f in tutti i punti del dominio.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(e^{-x^2+y^2} - 2x^2 e^{-x^2+y^2}\right)\sqrt{y-x^2-1} + x\, e^{-x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y-x^2-1}} \cdot x}{y-x^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy\, e^{-x^2+y^2}\sqrt{y-x^2-1} - x\, e^{-x^2+y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-x^2-1}}}{y-x^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = e^4 \qquad ; \qquad f(0,2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 0$$

Il piano tg nel punto $(0,2,0)$ ha quindi equazione

$$z = 0 + e^4 x + 0(y-2) = e^4 x$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,2) = \nabla f(0,2) \cdot v = \frac{1}{3} e^4 .$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = x e^{-x} + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata a $y'' - y' = 0$ ha insieme

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Usiamo il metodo di similarità per determinare una soluzione particolare. Poiché il termine noto della equazione cioè $f(x) = x e^{-x} + 1$ è somma della funzione $x e^{-x}$ e della funzione costante di costante valore 1, applichiamolo separatamente alle equazioni:

$$y'' + y' = x e^{-x}$$

-1 è soluzione dell'omogenea associata quindi cerchiamo $\tilde{y}_1$ del tipo

$$\tilde{y}_1(x) = x\,(k_1 + k_2 x)\, e^{-x}$$

$$\tilde{y}_1'(x) = (k_1 + k_2 x)\, e^{-x} + x\, k_2\, e^{-x} - x(k_1 + k_2 x)\, e^{-x}$$

$$y'' + y' = 1 \cdot (e^{0x})$$

0 è soluzione dell'omogenea associata, cerchiamo $\tilde{y}_2$ del tipo $\tilde{y}_2(x) = kx$;

$k = 1$, quindi $\tilde{y}_2(x) = x$

$$\tilde{y}_1'(x) = (k_1 + k_2 x)e^{-x} + x\,k_2\,e^{-x} - x(k_1+k_2x)\,e^{-x}$$

$$\tilde{y}_1''(x) = k_2 e^{-x} - (k_1 + h_2 x)e^{-x} + k_2 e^{-x} - x k_2 e^{-x}$$
$$- (k_1 + k_2 x)e^{-x} - x k_2 e^{-x} + x(k_1 + k_2 x)e^{-x}$$

Quindi $\tilde{y}_2''(x) + \tilde{y}_2'(x) =$

$$k_2 e^{-x} - \cancel{(k_1 + h_2 x)e^{-x}} + k_2 e^{-x} - \cancel{x k_2 e^{-x}} - (k_1 + k_2 x)e^{-x} - x k_2 e^{-x} + \cancel{x(k_1 + k_2 x)e^{-x}}$$
$$+ \cancel{(k_1 + k_2 x)e^{-x}} + \cancel{x\,k_2\,e^{-x}} - \cancel{x(k_1+k_2x)\,e^{-x}}$$
$$= (2k_2 - k_1)e^{-x} - 2x k_2 e^{-x}$$

Deve quindi essere $(2k_2 - k_1 - 2xk_2)e^{-x} = x e^{-x}$

cioè $\begin{cases} 2k_2 - k_1 = 0 \\ -2k_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} k_2 = -\frac{1}{2} \\ k_1 = -1 \end{cases}$

Una soluzione particolare per l'equazione assegnata è dunque

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = x\left(-1 - \frac{1}{2}x\right)e^{-x} + x =$$

L'integrale generale è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + x\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{-x}\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = c_1 + c_2$$

$$y'(x) = -c_2 e^{-x} + 1 - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{-x} + x\left(-\frac{1}{2}e^{-x} + \left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{-x}\right)$$

$$y'(0) = -c_2 + 1 - 1 = -c_2$$

$$\begin{cases} -c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi $y(x) = x\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{-x}\right)$

4) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per la convergenza di una serie numerica

Si veda uno dei manuali consigliati.