Politecnico di Bari

Analisi Matematica – modulo B – Corso C

A.A. 2024/2025   Prova scritta 15 settembre 2025   Traccia A

1) Calcolare l'integrale doppio:

$$\int_A \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ 0 \le y \le \sqrt{3}\,x\}$.

7 pts.

2) Sia

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + \ln\big(3-x-y\big).$$

Determinare e rappresentare sul piano il dominio naturale di f. Calcolare $\nabla f(x,y)$ e determinare i punti critici interni al dominio. Stabilire se gli eventuali punti critici determinati sono di minimo locale, massimo locale o sella. Calcolare infine la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(2,0)$ lungo il versore $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

9 pts.

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma esplicita dell'equazione differenziale

$$y' = \big(y^2+y\big)\,e^x.$$

Trovare poi la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0)=1$.

8 pts.

4) Enunciare e dimostrare il *criterio della radice* per le serie a termini non negativi. Applicarlo poi per studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt[n]{n^2+1}\,.$$

6 pts.