N° punto traccia

1) a)$_1$ Determinare la forma cartesiana del numero complesso

A) $\left|\frac{i}{1-i}\right| e^{i\frac{\pi}{2}}$

B) $\left|\frac{2-i}{i}\right| e^{-\pi i}$

a)$_2$ Determinare in forma cartesiana

C) $\sqrt[3]{-8i}$

D) $\sqrt[4]{-81}$

Svolgiamo la traccia B); la traccia A) è analoga

$|i| = 1 \qquad |2-i| = \sqrt{5}$ quindi

$$\left|\frac{2-i}{i}\right| = \frac{|2-i|}{|i|} = \sqrt{5}$$

$e^{-\pi i} = -1$ quindi

$$\left|\frac{-i}{1+i}\right| e^{-\pi i} = -\sqrt{5}$$

C) $$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{|-8i|}\; e^{\left(\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \frac{2\pi}{3}k\right)i} \qquad k=0,1,2$$

$$= \sqrt[3]{8}\; e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi k\right)i} \qquad k=0,1,2$$

Quindi otteniamo le 3 radici $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $2e^{\frac{7}{6}\pi i}$, $2e^{\frac{11}{6}\pi i}$ cioè

rispettivamente, $2i$, $2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

D) $$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{|-81|}\; e^{\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{2\pi}{4}k\right)i}, \quad k=0,1,2,3$$

$$= 3\, e^{\left(\pi/4 + \frac{\pi}{2}k\right)i}, \quad k=0,1,2,3$$

Otteniamo quindi $3e^{i\frac{\pi}{4}}$, $3e^{i\frac{3}{4}\pi}$, $3e^{i\frac{5}{4}\pi}$, $3^{i\frac{7}{4}\pi}$ cioè

rispettivamente $3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) Determinare il dominio della seguente funzione. Stabilire se è monotona e specificare il tipo di monotonia. Motivare la risposta

A) $f(x) = \sqrt{\pi - \arccos x}$

B) $f(x) = \log\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$

Stabilire che l'insieme X seguente:

C) è limitato, ha massimo, calcolare l'inf.

$X = \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \; ; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

D) è illimitato superiormente, limitato inferiormente, ha minimo

$X = \left\{ 2^{\sqrt{n+1}} : n \in \mathbb{N} \right\}$

A) Deve essere $x \in [-1,1]$ e $\pi - \arccos x \geq 0$. Poiché $0 \leq \arccos x \leq \pi$, quest'ultima disuguaglianza è soddisfatta $\forall x \in [-1,1]$. Quindi $\operatorname{dom} f = [-1,1]$

Poiché $y = \arccos x$ è strettamente decrescente $y = -\arccos x$ è strettamente crescente e quindi f è strettamente crescente in quanto composta da due funzioni strettamente crescenti

B) è analoga salvo che f è strettamente decrescente in quanto composta da una funzione strettamente crescente $y = \log x$ e una strettamente decrescente $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Il suo dominio è $\mathbb{R}$.

C) X coincide con l'immagine della successione $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$;

poiché $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\quad 0 < \operatorname{artg} \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$

X è limitato. La successione $\left(\operatorname{artg} \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ è strettamente decrescente in quanto composta da una successione strettamente decrescente $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ e una funzione strett. crescente $y = \operatorname{arctg} x$. Quindi $\max\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right) = \operatorname{artg} 1 = \frac{\pi}{4}$

e $\inf\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right) = \lim \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = 0$

D) Analogamente: $2^{\sqrt{n+1}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ quindi $\left(2^{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata inferiormente. Inoltre $\left(2^{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente in quanto composta dalla successione $\left(\sqrt{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e dalla funzione $y=2^x$ entrambe strettamente crescenti. Quindi $\min\left(2^{\sqrt{n+1}}\right) = 2^{\sqrt{1}} = 2$

e $\sup\left(2^{\sqrt{n+1}}\right) = \lim 2^{\sqrt{n+1}} = +\infty$

2) Calcolare i limiti in 0 da destra e in $+\infty$ per la funzione

A) $f(x) = \dfrac{(\sin x)^2 - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}}$

B) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + \sqrt[3]{x} - x^2}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + x^2}$

Cosa si può dire riguardo ai suoi zeri nell'intervallo $(0,+\infty)$? Motivare la risposta

A)
$$\lim_{x\to0^+} \frac{(\sin x) - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}\left(\frac{(\sin x)^2}{\sqrt{x}} - 1 + 2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{x}\left(\frac{(\sin(2\sqrt{x}))^2}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + 1\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{0 - 1 + 0}{0 + 0 + 1}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sin x)^2 - \sqrt{x} + 2x}{(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{(\sin x)^2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\right)}{x\left(\frac{(\sin(2\sqrt{x}))^2}{x} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)}$$
$$= 1 \cdot \frac{(0 - 0 + 2)}{0 + 1 + 0} = 2$$

Poiché per $x \geq 0$

$(\sin(2\sqrt{x}))^2 + x + \sqrt{2x} = 0$ se e solo se tutti e tre gli addendi sono nulli, f è continua su $(0,+\infty)$. Dato che $\lim_{x\to0^+} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\sqrt{2} < 0$, esiste almeno uno zero in $(0,+\infty)$.

B) È analoga ad A: nel limite per $x\to0^+$, è sufficiente raccogliere in evidenza $\sqrt[3]{x}$ sia al numeratore che al denominatore; in quello per $x\to+\infty$, x^2.

C)-D) Determinare l'immagine delle seguenti funzioni determinandone i suoi punti di minimo e massimo locale, la sua monotonia, i suoi asintoti

C) $f(x) = x^3 e^{-x^2} - 1$

D) $f(x) = x^2 e^{-|x|} + 1$

C) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $f \in C^0(\mathbb{R})$

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}(-2x) = x^2 e^{-x^2}(3 - 2x^2)$$

$$f'(x) > 0 \iff 3 - 2x^2 > 0 \wedge x \neq 0 \iff -\sqrt{\tfrac{3}{2}} \leq x < \sqrt{\tfrac{3}{2}} \wedge x \neq 0$$

Quindi per il criterio di stretta monotonia (la derivata prima di f è non-negativa e l'insieme dei punti su cui si annulla non contiene alcun intervallo)

f è strettamente crescente su $\left[-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right]$ e strettamente decrescente su $\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}}, +\infty\right)$ e su $\left(-\infty, -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right]$

Quindi $x_1 = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$ è un massimo locale stretto e $x_2 = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ è un minimo. Dato che $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^{x^2}} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2)^{3/2}}{e^{x^2}} \underset{=}{\overset{y = x^2}{=}} \lim_{y \to +\infty} \frac{y^{3/2}}{e^y} = 0$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$. Analogamente $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

Quindi f ha asintoto orizzontale la retta $y = -1$ sia per $x \to +\infty$, sia per $x \to -\infty$. Poiché $f(x_1) > -1$ (dato che $x_1^3 e^{-x_1^2} > 0$) e $f(x_2) < -1$ (dato che $x_2^3 e^{-x_2^2} = -x_1 e^{-x_1^2} < 0$)

i punti $x_1 = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$ e $x_2 = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

sono quindi di massimo e minimo (assoluto) per f

dunque $f(\mathbb{R}) = \left[f\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right), f\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\right]$ dato che f è continua

D) dom $f = \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Poiché f è pari possiamo

studiarla sull'intervallo $[0,+\infty)$. Su tale intervallo

$f(x) = x^2 e^{-x} + 1$, $f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x e^{-x}(2-x)$;

quindi $f'(x) > 0 \iff 2 - x > 0 \wedge x \neq 0 \iff x \neq 0, x < 2$

Quindi, per il criterio di stretta monotonia (la derivata prima di f è non-negativa e l'insieme dei punti su cui si annulla non contiene alcun intervallo)

f è strettamente crescente su $[0,2]$ e strettamente decrescente su $[2,+\infty)$. Pertanto 2 è un punto di massimo assoluto per f.

Essendo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} + 1 = 1$, la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Poiché $f(x) \geq 1$ $\forall x \in [0,+\infty)$ e $f(0) = 1$

0 è un punto di minimo (assoluto) per f.

Poiché f è continua e pari, abbiamo

$$f(\mathbb{R}) = f([0,+\infty)) = [1, f(2)] = \left[1, \frac{4}{e^2} + 1\right]$$

3) Calcolare il seguente integrale

A) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}\, dx$

B) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3x + 2}\, dx$

C) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx$

D) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\, dx$

A) $$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

quindi $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}\, dx = \int 1\, dx - 2\int \frac{1}{x+1}\, dx =$

$$= x - 2\log|x+1| + c$$

B) $$\frac{x^2+2}{x^2+3x+2} = \frac{x^2+3x+2 \quad -3x}{x^2+3x+2} = 1 - \frac{3x}{x^2+3x+2} =$$

$$= 1 - \frac{3x}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{3x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x+2A+B}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-2A \\ -A=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-3 \\ B=6 \end{cases}$$

Quindi $$\int \frac{x^2+2}{x^2+3x+2}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx - \int \frac{6}{x+2}\,dx$$
$$= x + 3\log|x+1| - 6\log|x+2|$$

c) Integriamo per parti:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = -x\,\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1-x)^{-\frac{1}{2}+1} + 2\int (1-x)^{\frac{1}{2}}$$
$$= -2x(1-x)^{\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + c$$

D) Integriamo per parti:

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = x\,\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{3}{2}+1}(1+x)^{\frac{5}{2}} + c$$

4) A) Dimostrare che $\forall x \in \mathbb{R}$: $D\sin x = \cos x$

B) Dimostrare che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall x>0$: $D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}$

c)-D) Dimostrare senza usare il teorema di l'Hopital, né la formula di Taylor che

C) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$$

D) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$