1) a) Stabilire se il seguente integrale converge o meno

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin(1-x^2)}{2x^{3/2}}\,dx$$

b) Calcolare

$$\int_{-2}^{0} \frac{2}{\sqrt{|x+1|}}\,dx$$

a) $\left|\frac{\sin(1-x^2)}{2x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{2x^{3/2}} \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2},+\infty\right).$

Poiché $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{2x^{3/2}}\,dx$ converge l'integrale assegnato converge assolutamente e dunque converge

b) $$\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x+1|}}\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{-x-1}}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$= \lim_{\omega\to -1^-} -2\sqrt{-x-1}\Big|_{-2}^{\omega} + \lim_{\omega\to -1^+} 2\sqrt{x+1}\Big|_{\omega}^{0}$$

$$= \lim_{\omega\to -1^-} \left(-2\sqrt{-\omega-1} + 2\sqrt{1}\right) + \lim_{\omega\to -1^+} \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{\omega+1}\right)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

2) Stabilire se esiste il piano tangente nel punto $(-1,0,f(-1,0))$ al grafico della funzione

$$f(x) = 2^{x^2-y^2}(x-y)^2$$

e in caso affermativo determinarne l'equazione. Determinare poi gli eventuali punti estremali di f.

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, quindi è differenziabile in $\mathbb{R}^2$. In particolare l'equazione del piano tg richiesto esiste ed è data da

$$z = f(-1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(-1,0)(x+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0)\,y$$

$$f(-1,0) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2^{x^2-y^2}(2x)\log 2\,(x-y)^2 + 2^{x^2-y^2}(x-y)\cdot 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\,2^{x^2-y^2}\log 2\,(x-y)^2 - 2^{x^2-y^2}(x-y)\cdot 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = -4\log 2 + 4 = 4(1-\log 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = 0 - 4 = -4$$

Quindi l'equazione richiesta è

$$z = 2 + 4(1-\log 2)(x+1) - 4y$$

$z = 2 + 4(1-\log 2)(x+1) - 4y$

Osserviamo subito che $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e che f si annulla sui punti della retta $y = x$.

Pertanto tutti i punti di tale retta sono di minimo assoluto (non forte).

Vediamo se f ha altri punti stazionari oltre quelli della retta $y = x$

$$\begin{cases} 2^{x^2-y^2}(2x)\log 2\,(x-y)^2 + 2^{x^2-y^2}(x-y)\cdot 2 = 0 \\ -2y\, 2^{x^2-y^2}\log 2\,(x-y)^2 - 2^{x^2-y^2}(x-y)\cdot 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 2^{x^2-y^2}(x-y)\left[\log 2\cdot x(x-y)+1\right] = 0 \\ 2\, 2^{x^2-y^2}(x-y)\left[-\log 2\cdot y\,(x-y) - 1\right] = 0 \end{cases}$$

Gli eventuali altri punti stazionari sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \log 2\cdot x(x-y) + 1 = 0 \\ -\log 2\cdot y\,(x-y) - 1 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro otteniamo

$$\begin{cases} \log 2\cdot(x-y)(x-y) = 0 \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

e quindi dovrebbe necessariamente essere $x - y = 0$; non ci sono dunque ulteriori punti stazionari.

3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + \frac{5}{2}y = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è

$\lambda^2 + \lambda + \frac{5}{2} = 0$ che ha soluzioni $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$.

L'omogenea associata ha quindi soluzioni:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\tfrac{3}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\tfrac{3}{2}x\right)\right)$$

Poiché $-\frac{1}{2}$ non è soluzione dell'equazione caratteristica cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\tilde{y}(x) = k\, e^{-\frac{1}{2}x}$

tipo $\tilde{y}(x) = k\, e^{-\frac{1}{2}x}$

$$\tilde{y}'(x) = -\frac{1}{2} k\, e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\tilde{y}''(x) = \frac{1}{4} K e^{-\frac{1}{2}x}$$

Quindi

$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{4}K - \frac{1}{2}K + \frac{5}{2}K\right) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$$

dunque deve essere $\frac{9}{4}k = -\frac{1}{2} \iff k = -\frac{2}{9}$

Quindi l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\tfrac{3}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\tfrac{3}{2}x\right)\right) - \frac{2}{9} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\tfrac{3}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\tfrac{3}{2}x\right)\right) +$$

$$+ e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{3}{2}c_1 \sin\left(\tfrac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2}c_2 \cos\left(\tfrac{3}{2}x\right)\right) + \frac{1}{9} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\left((c_1 - 3c_2)\cos\left(\tfrac{3}{2}x\right) + (c_2 + 3c_1)\sin\left(\tfrac{3}{2}x\right) - \frac{2}{9}\right)$$

$$y(0) = c_1 - \frac{2}{9}$$

$$y'(0) = -\frac{1}{2}\left(c_1 - 3c_2 - \frac{2}{9}\right)$$

c_1 e c_2 sono quindi determinati da

$$\begin{cases} c_1 = \frac{2}{9} \\ c_1 - 3c_2 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{2}{9} \\ -3c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{2}{9} \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

la soluzione del problema di Cauchy è data quindi da

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\, \frac{2}{9}\cos\left(\tfrac{3}{2}x\right) - \frac{2}{9} e^{-x^2}$$

4) Dare la definizione di insieme normale del piano rispetto all'asse delle x.

Enunciare la formula di riduzione per l'integrale di una funzione su un tale dominio normale

Per la formula di riduzione si veda il Teorema 16.17 del manuale consigliato