

Possibile svolgimento della prova del 7 novembre 2025 – Modulo A

- 1) (a) Calcoliamo la parte reale e immaginaria di  $z = \left( \frac{i^3 e^{-2+i3\pi/4}}{1-i} \right)^4$ .

Partiamo dal numeratore:

- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $e^{-2+i3\pi/4} = e^{-2} \cdot e^{i3\pi/4}$
- Quindi:  $i^3 e^{-2+i3\pi/4} = -i \cdot e^{-2} e^{i3\pi/4} = e^{-2} (-i) e^{i3\pi/4}$

Scriviamo  $-i$  in forma esponenziale:  $-i = e^{-i\pi/2}$

Quindi:

$$i^3 e^{-2+i3\pi/4} = e^{-2} e^{-i\pi/2} e^{i3\pi/4} = e^{-2} e^{i(3\pi/4-\pi/2)} = e^{-2} e^{i\pi/4}$$

Per il denominatore:

$$1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

Quindi:

$$\frac{i^3 e^{-2+i3\pi/4}}{1-i} = \frac{e^{-2} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/4+\pi/4)} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2}$$

Elevando alla quarta:

$$z = \left( \frac{e^{-2}}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2} \right)^4 = \frac{e^{-8}}{4} e^{i2\pi} = \frac{e^{-8}}{4},$$

dato che  $e^{i2\pi} = 1$ . Quindi:

$$z = \frac{e^{-8}}{4} = \frac{1}{4e^8}$$

e dunque

- **Parte reale:**  $\Re(z) = \frac{1}{4e^8}$
- **Parte immaginaria:**  $\Im(z) = 0$

- (b) Studiamo l'insieme  $A = \left\{ \frac{n^2-1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ .

Riscriviamo:

$$a_n = \frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n}$$

**Monotonia:** Confrontiamo  $a_{n+1}$  con  $a_n$ :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left( n+1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left( n - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{n+1-n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Quindi la successione è **strettamente crescente**.

Poiché la successione  $(a_n)$  è strettamente crescente e  $A$  è la sua immagine, possiamo dedurre che  $\inf A = \min A = a_1 = 0$  mentre  $\sup A = \lim a_n = \lim \left( n - \frac{1}{n} \right) = +\infty$  e dunque  $A$  è illimitato superiormente.

- 2) Per la funzione  $f(x) = \log \left( \frac{x^2-1}{x^2-4} \right) + \frac{1}{x-3}$ :

(a) **Dominio naturale:**

Dobbiamo richiedere:

1.  $\frac{x^2-1}{x^2-4} > 0$  (argomento del logaritmo positivo)

2.  $x \neq 3$  (denominatore della frazione non nullo)

Studiamo il segno di  $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ :

- $x^2 - 1 > 0$  per  $x < -1$  e  $x > 1$ ;
- $x^2 - 4 > 0$  per  $x < -2$  e  $x > 2$ .

Quindi  $\frac{x^2-1}{x^2-4} > 0$  per  $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ .

Escludendo  $x = 3$ :

$$\text{dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$$

(b) **Asintoti:**

*Asintoti verticali:*

I candidati sono  $x = -2, -1, 1, 2, 3$ .

- Per  $x \rightarrow -2^-$ :  $\frac{x^2-1}{x^2-4} \rightarrow \frac{3}{0^+} = +\infty$ , quindi  $\log(\dots) \rightarrow +\infty$  e  $\frac{1}{x-3} \rightarrow \frac{1}{-5}$ . Quindi  $f(x) \rightarrow +\infty$ . La retta  $x = -2$  è asintoto verticale a sx.
- Per  $x \rightarrow -1^+$ :  $\frac{x^2-1}{x^2-4} \rightarrow \frac{0^-}{-3} = 0^+$ , quindi  $\log(\dots) \rightarrow -\infty$ . Dunque  $f(x) \rightarrow -\infty$ . La retta  $x = -1$  è asintoto verticale a dx.
- Per  $x \rightarrow 1^-$ : analogo a  $x \rightarrow -1^+$ , quindi  $x = 1$  è asintoto verticale a sx.
- Per  $x \rightarrow 2^+$ :  $\frac{x^2-1}{x^2-4} \rightarrow \frac{3}{0^+} = +\infty$ , quindi  $f(x) \rightarrow +\infty$ . La retta  $x = 2$  è asintoto verticale a dx.
- Per  $x \rightarrow 3$ :  $\frac{x^2-1}{x^2-4} \rightarrow \frac{8}{5}$ , quindi  $\log(\dots) \rightarrow \log(8/5)$  (finito), ma  $\frac{1}{x-3} \rightarrow \pm\infty$  per  $x \rightarrow 3^\pm$ . Quindi  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  e  $x = 3$  è asintoto verticale sia a sx che a dx.

*Asintoti orizzontali/obliqui:*

Per  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$\frac{x^2-1}{x^2-4} \rightarrow 1$$

quindi  $\log\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right) \rightarrow 0$  e  $\frac{1}{x-3} \rightarrow 0$ .

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

La retta  $y = 0$  è asintoto orizzontale per  $x \rightarrow \pm\infty$ .

(c) **Teorema degli zeri in  $(2, 3)$ :**

La funzione  $f$  è continua su  $(2, 3)$ .

Calcoliamo i limiti agli estremi:

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  (come visto sopra)
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$  (come visto sopra)

Per l'estensione del teorema degli zeri a intervalli aperti), dato che  $f$  è continua su  $(2, 3)$  con  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty < 0$ , esiste almeno un punto  $c \in (2, 3)$  tale che  $f(c) = 0$ .

3) Calcoliamo  $\int \frac{2}{2x^2+x+1} dx$ .

Completiamo il quadrato al denominatore:

$$\begin{aligned} 2x^2 + x + 1 &= 2 \left( x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2 \left[ \left( x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \right] \\ &= 2 \left[ \left( x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{2}{2x^2 + x + 1} dx = \int \frac{2}{2 \left[ \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \right]} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} dx$$

Poniamo  $t = x + \frac{1}{4}$ , quindi  $dt = dx$ :

$$\int \frac{1}{t^2 + \frac{7}{16}} dt = \int \frac{1}{\frac{7}{16} \left( \frac{16t^2}{7} + 1 \right)} dt = \frac{16}{7} \int \frac{1}{\frac{16t^2}{7} + 1} dt$$

Poniamo  $u = \frac{4t}{\sqrt{7}}$ , quindi  $du = \frac{4}{\sqrt{7}} dt$  e  $dt = \frac{\sqrt{7}}{4} du$ :

$$\frac{16}{7} \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} du = \frac{4}{\sqrt{7}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{4\sqrt{7}}{7} \arctan(u) + C$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{2x^2 + x + 1} dx &= \frac{4\sqrt{7}}{7} \arctan \left( \frac{4(x + 1/4)}{\sqrt{7}} \right) + C \\ &= \frac{4}{\sqrt{7}} \arctan \left( \frac{4x + 1}{\sqrt{7}} \right) + C \end{aligned}$$

- 4) **Enunciato e dimostrazione del teorema di de l'Hôpital (caso 0/0):** Si possono vedere le note della lezione 22.

**Applicazione:** Calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{x - \sin x}$ .

Verifichiamo che siamo nella forma  $\frac{0}{0}$ :

- $\lim_{x \rightarrow 0} (3 \sin x - \sin(3x)) = 0 - 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0 - 0 = 0$

Applichiamo de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{x - \sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x - 3 \cos(3x)}{1 - \cos x}$$

Ancora forma  $\frac{0}{0}$  (perché  $3 \cos 0 - 3 \cos 0 = 0$  e  $1 - \cos 0 = 0$ ). Applichiamo di nuovo de l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x - 3 \cos(3x)}{1 - \cos x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin x + 9 \sin(3x)}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( -3 + \frac{9 \sin(3x)}{\sin x} \right) \end{aligned}$$

Calcoliamo il limite del secondo addendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \sin(3x)}{\sin x} = 9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin x} = 9 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 27$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{x - \sin x} = -3 + 27 = 24$$