TRACCIA A

1) - a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^4\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4} =$$

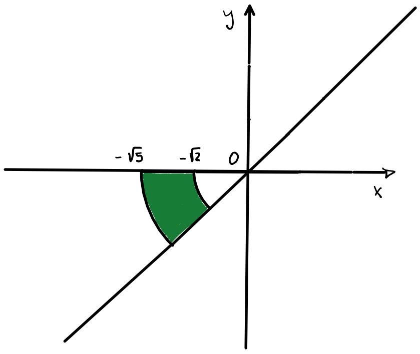
$$= \frac{8}{81}\sum_{h=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^h = \frac{8}{81}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}$$

1) - b) Calcolare l'integrale

$$\int_A \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) dx\,dy$$ dove A è l'insieme

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ 2 < x^2+y^2 < 5 \text{ e } y > x,\ y<0,\ x<0\}$$

L'insieme A è il settore di corona circolare rappresentato in figura



$$\int_A \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) dx\,dy = \int_A \frac{x^2+y^2}{x^2}\,dx\,dy$$

Passando alle coordinate polari l'integrale assegnato è quindi dato da

$$\int_{(-\pi,-\frac{3}{4}\pi)\times(\sqrt{2},\sqrt{5})} \frac{\rho^2}{\rho^2\cos^2\theta}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \left(\int_{-\pi}^{-\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\right)\cdot\left(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\rho\,d\rho\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\theta\,\Big|_{-\pi}^{-\frac{3}{4}\pi}\ \frac{1}{2}\rho^2\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = 1\cdot\frac{1}{2}(5-2) = \frac{3}{2}$$

2) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{x-y}{\log(x^2-y^2)}$$

Se ne determini il dominio e lo si rappresenti sul piano

Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.

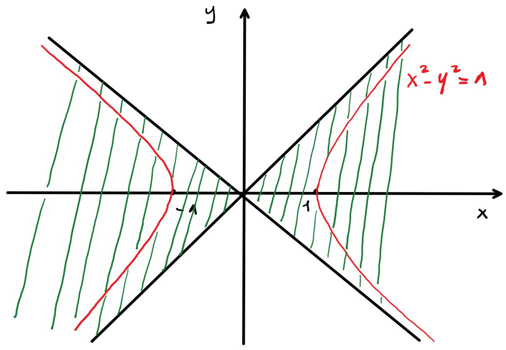
Stabilire che f è differenziabile nel suo dominio e

si determini il suo campo gradiente.

Si determini infine l'equazione del piano tg al grafico

di f nel punto $(2,1)$

$$\text{dom} f: \begin{cases} x^2-y^2>0 \\ x^2-y^2\neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-y)(x+y)>0 \\ x^2-y^2\neq 1 \end{cases}$$



Il dominio di f è il cono completo nel piano individuato dalle bisettrici, tratteggiato in verde, privo dei punti dell'iperbole di equazione $x^2-y^2=1$.

È un insieme aperto (non è chiuso), non è limitato e non è connesso per archi

$\forall (x,y)\in \text{dom} f$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\log(x^2-y^2) - (x-y)\frac{1}{x^2-y^2}\,2x}{\log^2(x^2-y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\log(x^2-y^2) - (x-y)\frac{1}{x^2-y^2}\,(-2y)}{\log^2(x^2-y^2)}$$

Entrambe le derivate parziali di f sono definite e continue su dom f e quindi f è differenziabile in tutti i punti di dom f.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\log(x^2-y^2) - \frac{2x}{x+y}}{\log^2(x^2-y^2)} \,,\, \frac{-\log(x^2-y^2) + \frac{2y}{x+y}}{\log^2(x^2-y^2)} \right)$$

L'equazione del piano tg al grafico di f nel punto $(2,1)$ è

$$z = f(2,1) + \langle \nabla f(2,1), ((x-2),(y-1)) \rangle$$

$$= \frac{1}{\log 3} + \left\langle \left(\frac{\log 3 - \frac{4}{3}}{\log^2 3}, \frac{-\log 3 + \frac{2}{3}}{\log^2 3} \right), ((x-2),(y-1)) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\log 3} + \frac{\log 3 - \frac{4}{3}}{\log^2 3} x - 2 + \frac{\frac{2}{3} - \log 3}{\log^2 3}(y-1)$$

3) Si determini la soluzione del problema di Cauchy in forma esplicita

$$\begin{cases} y' = (y^2 - 5y + 6) \dfrac{x}{x^2+1} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

L'equazione nel problema di Cauchy è a variabili separabili

Osserviamo che $y \equiv -1$ non è una soluzione singolare

Possiamo quindi dividere per $y^2 - 5y + 6$ ambo i membri ottenendo:

$$\int \frac{y'(x)}{y^2 - 5y + 6} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx \quad \text{da cui}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 5y + 6} = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$$

Il trinomio $y^2 - 5y + 6$ ha $\Delta > 0$ e radici $y_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{array}$

Integriamo quindi il primo integrale decomponendo l'integranda in fratti semplici:

$$\frac{1}{y^2 - 5y + 6} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y-2} = \frac{Ay - 2A + By - 3B}{(y-3)(y-2)} = \frac{(A+B)y - 2A - 3B}{(y-3)(y-2)}$$

Deve quindi essere $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-3B=1 \end{cases}$ $\begin{cases} -B=A \\ -2A+3A=1 \end{cases}$ $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$

Dunque

$$\int \frac{dy}{y^2-5y+6} = \int \frac{1}{y-3}\,dy - \int \frac{1}{y-2}\,dy = \log|y-3| - \log|y-2| = \log\left|\frac{y-3}{y-2}\right|$$

Pertanto $\log\left|\frac{y-3}{y-2}\right| = \log\sqrt{x^2+1} + c$

Dato che $y(1)=-1$ otteniamo $\log\frac{4}{3} = \log\sqrt{2} + c$

da cui $c = \log\frac{4}{3\sqrt{2}}$. Quindi

$\log\left|\frac{y-3}{y-2}\right| = \log\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)\frac{4}{3\sqrt{2}}\right]$ da cui

$\left|\frac{y-3}{y-2}\right| = \sqrt{x^2+1}\,\frac{4}{3\sqrt{2}}$. Dato che $y(1)=-1$ la soluzione

è negativa in un intorno di 1 e quindi su tale intorno

$\frac{y-3}{y-2} > 0$; pertanto deve essere $\frac{y-3}{y-2} = \frac{4}{3\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}$

da cui $y-3 = \frac{4}{3\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}\,(y-2)$ e quindi

$$y = \left(3 - \frac{8}{3\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}\right) \Big/ \left(1 - \frac{4}{3\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}\right)$$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange per una funzione reale di più variabili reali.

Si veda, ad esempio, la lezione 39.

TRACCIA B

1) - a) Stabilire il carattere delle serie seguenti

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{10n^2+1}{n^2(n-1)}$$

$\frac{10n^2+1}{n^2(n-1)} \sim \frac{10}{n}$ poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{10}{n} = 10\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$

$$\frac{10n^2+1}{n^2(n-1)} \sim \frac{10}{n} \quad \text{poiché} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{10}{n} = 10\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

anche la serie assegnata diverge

1) - b)

Calcolare

$$\int_A \frac{1}{4x^2-y^2}\,dx\,dy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2(x-1) < y < 2x-1,\ 2(1-x) < y < 2(2-x)\}$.

$2x+y>2$ $\quad 2x+y<4$

$2x-y<2$ $\quad 2x-y>1$

$$\int_A \frac{1}{4x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_A \frac{1}{(2x-y)(2x+y)}\,dx\,dy$$

Possiamo considerare la trasformazione $\varphi: \begin{cases} u = 2x-y \\ v = 2x+y \end{cases}$

Sul piano (u,v) l'insieme $\varphi(A)$ è uguale al rettangolo $(1,2) \times (2,4)$

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|(x,y) = \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2+2 = 4$$

Quindi $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|(u,v) = \frac{1}{4}$, $\forall (u,v) \in (1,2)\times(2,4)$

Cambiando le variabili l'integrale assegnato diviene

$$\int_{(1,2)\times(2,4)} \frac{1}{uv}\cdot\frac{1}{4}\,du\,dv = \frac{1}{4}\left(\int_1^2 \frac{1}{u}\,du\right)\left(\int_2^4 \frac{1}{v}\,dv\right)$$

$$= \frac{1}{4}\log 2 \cdot (\log 4 - \log 2) = \frac{1}{4}(\log 2)^2$$

2) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\quad} \cdot \frac{1}{\quad}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{(y^2-2x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{y}$$

Se ne determini il dominio e lo si rappresenti sul piano.

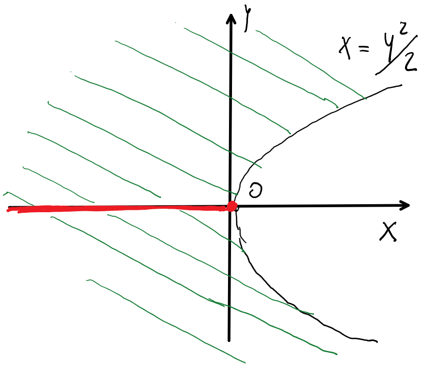
Scrivere se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.

Stabilire poi che f è differenziabile nel suo dominio.

Calcolare quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1)$ al variare del versore $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Qual è il versore v_m per cui $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1)$ è minima?

dom f : $\begin{cases} y^2 - 2x > 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < \frac{y^2}{2} \\ y \neq 0 \end{cases}$



Il dominio di f è la regione di piano tratteggiata in verde privata del semiasse delle x non-positive (in rosso)

È un insieme aperto (non è chiuso), non è limitato

non è connesso per archi

$\forall (x,y) \in$ dom f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{3}{\cancel{2}}(y^2-2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (-\cancel{2})}{(y^2-2x)^3} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{3}{\cancel{2}}(y^2-2x)^{\frac{1}{2}}\,\frac{\cancel{2y}}{\cancel{y}}}{(y^2-2x)^3} + \frac{1}{(y^2-2x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

Entrambe queste funzioni sono continue su dom$f$ e dunque

Entrambe queste funzioni sono continue su dom f e dunque
f è ivi differenziabile.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -3 - 1 = -4$$

Essendo f differenziabile in (0,1), abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \langle (3,-4), (\cos\theta, \sin\theta) \rangle = 3\cos\theta - 4\sin\theta$$

Sappiamo che $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1)$ è minima se v è il versore opposto a $\frac{\nabla f(0,1)}{|\nabla f(0,1)|}$

$|\nabla f(0,1)| = \sqrt{9+16} = 5$ quindi

$$v_m = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

3) Determinare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^4 x^3 \sin(2x^4+1) \\ y\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}}\right) = -1 \end{cases}$$

Osserviamo che l'unica soluzione singolare dell'equazione
è $y \equiv 0$; poiché questa non soddisfa il problema di Cauchy
(dato che $y\left(\sqrt[4]{\pi/8 - \frac{1}{2}}\right) = -1 \neq 0$) possiamo dividere ambo i membri
per y^4 ottenendo:

$$\int \frac{y'(x)}{y^4(x)}\,dx = \int x^3 \sin(2x^4+1)\,dx \quad \text{cioè}$$

$$\int \frac{dy}{y^4} = -\frac{1}{8}\cos(2x^4+1) + c \quad \text{da cui}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{8}\cos(2x^4+1) + c$$

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{8}\cos(2x^4+1)+c$$

Poiché $y\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}}\right) = -1$, deve essere

$$\frac{1}{3} = -\frac{1}{8}\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\right)+1\right)+c$$

$$= -\frac{1}{8}\cos\frac{\pi}{4} + c = -\frac{\sqrt{2}}{16}+c \quad \text{da cui}$$

$$c = \frac{16+3\sqrt{2}}{48}$$

quindi $\frac{1}{y^3} = \frac{3}{8}\cos(2x^4+1) - \frac{16+3\sqrt{2}}{16}$

$$y = \left(\frac{1}{\frac{3}{8}\cos(2x^4+1)+\frac{16+3\sqrt{2}}{16}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

4) Dare la definizione di insieme connesso per archi.
Dimostrare che una funzione continua trasforma insiemi connessi per archi in insiemi connessi per archi.

Per la definizione, si veda ad esempio la lezione 35.
Per la dimostrazione, la lezione 36.