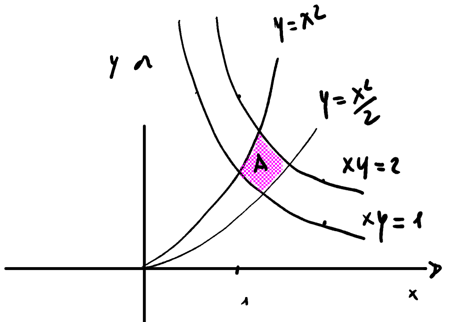
1) Calcolare

$$\int_A x^3\,dx\,dy \quad \text{dove } A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le \frac{x^2}{y}\le 2 \ \text{ e } \ 1\le xy\le 2\}$$



$1\le \frac{x^2}{y}\le 2$ è equivalente a $\frac{1}{2}x^2 \le y \le x^2$

Introduciamo la trasformazione del piano

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{x^2}{y} = v \end{cases} \qquad \psi(x,y) = \left(xy, \frac{x^2}{y}\right)$$

Nel piano $\{u,v\}$, $\psi(A) = [1,2]\times[1,2]$

$$x^3 = uv$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2\frac{x}{y} & -\frac{x^2}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = -\frac{x^2}{y} - 2\frac{x^2}{y} = -\frac{3x^2}{y} = -3v$$

e dunque $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = -\frac{1}{3v}$

Quindi $\displaystyle\int_A x^3\,dx\,dy = \int_{[1,2]\times[1,2]} uv\left|-\frac{1}{3v}\right| du\,dv = \frac{1}{3}\int_{[1,2]\times[1,2]} u\,du\,dv$

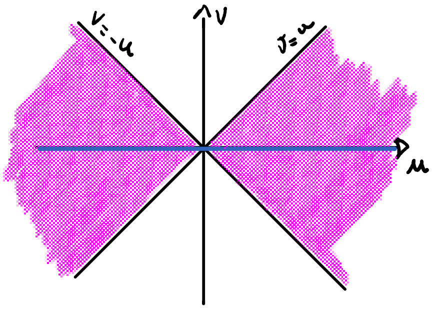
$$= \frac{1}{3}\int_1^2 u\,du \cdot \int_1^2 dv = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}u^2\Big|_1^2 = \frac{1}{6}(4-1) = \frac{1}{2}$$

2) Si consideri la funzione a valori vettoriali $F: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$$F(u,v) = \left(\frac{1}{uv},\ \log[(u-v)(u+v)],\ u^2-v^2\right)$$

Determinare il dominio naturale A di f e rappresentarlo sul piano.
Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.
Stabilire se F è differenziabile nel punto $(1,\frac{1}{2})$ e determinare la miglior approssimazione lineare di F in tale punto

$$\text{dom } F: \quad \begin{cases} uv\neq 0 \\ (u-v)(u+v)>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u\neq 0 \\ v\neq 0 \\ (u-v)(u+v)>0 \end{cases}$$



L'insieme A è quello colorato qui a fianco privato dei punti dell'asse delle u in blu. I punti delle rette $v=u$ e $v=-u$ non appartengono ad A.

A è quindi aperto, non è chiuso, non è limitato e non è connesso per archi.

Le componenti di F sono le funzioni $F_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ date da

$$F_1(u,v) = \frac{1}{uv}, \quad F_2(u,v) = \log[(u-v)(u+v)], \quad F_3(u,v) = u^2 - v^2$$

Sono funzioni di classe C^∞ su A dato che F_1 è una funzione razionale, F_2 è composta dal logaritmo e da un polinomio, F_3 è un polinomio. Quindi F è differenziabile su A per il teorema del differenziale totale. In particolare lo è nel punto $(1, \frac{1}{2}) \in A$.

Esiste dunque la migliore approssimazione lineare di F in tale punto. Essa è la funzione affine

$$(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto F(1, \tfrac{1}{2}) + J_F(1, \tfrac{1}{2})[(h_1, h_2)] \in \mathbb{R}^3 \quad (*)$$

$$F(1, \tfrac{1}{2}) = \left(2, \log\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}\right)$$

$$J_F(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{vu^2} & -\frac{1}{v^2u} \\ \frac{u+v-u+v}{(u-v)(u+v)} & \frac{-u-v-u+v}{(u-v)(u+v)} \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$$

$$J_F(1, \tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$(*) = (h_1, h_2) \longmapsto \left(2, \log\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}\right) + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(2, \log\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}\right) + \left(-2h_1 - 4h_2, \tfrac{4}{3}h_1 - \tfrac{8}{3}h_2, 2h_1 - h_2\right)$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2 e^{y-t} \quad (*) \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

(*) è un'equazione a variabili separabili.

$y' = t^2 e^{-t} e^{y}$ da cui $y' e^{-y} = t^2 e^{-t}$ e integrando

ambo i membri $\int e^{-y}\, dy = \int t^2 e^{-t}\, dt$ cioè

$$-e^{-y} = -t^2 e^{-t} + 2\int t e^{-t}\, dt = -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} + 2\int e^{-t}\, dt$$
$$= -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + c$$
$$= -e^{-t}(t^2+2t+2) + c$$

Quindi $e^{-y} = e^{-t}(t^2+2t+2) + c$

Poiché $y(-1) = 0$ otteniamo $1 = e(1) + c$ cioè $c = 1-e$

Quindi $y = -\log\left(e^{-t}(t^2+2t+2) + 1 - e\right)$

4) Dare la definizione di sottoinsieme compatto e sequenzialmente compatto di $\mathbb{R}^n$

Dimostrare che una funzione continua $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

trasforma insiemi compatti in insiemi compatti

Un insieme è compatto se è chiuso e limitato

$K \subset \mathbb{R}^n$ è sequenzialmente compatto se $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, $\exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

successione estratta tale che $a_{n_k} \to \bar{a} \in K$

Sappiamo che K è compatto $\iff$ K è sequenzialmente compatto

Per dimostrare quindi che $f(K)$ è compatto se K è compatto

possiamo equivalentemente dimostrare che $f(K)$ è sequenzialmente compatto

Sia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in K$ t.c. $f(x_n) = y_n$

Poiché K è compatto da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possiamo estrarre $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

tale che $x_{n_k} \to \bar{x} \in K$ dato che f è continua

$f(x_{n_k}) \to f(\bar{x})$ ma $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ quindi

(y_n) ammette (y_{n_k}) come sottosuccessione convergente a $f(\bar{x})$

$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(\bar{x})$ ma $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ quindi (y_n) ammette (y_{n_k}) come sottosuccessione convergente a $f(\bar{x})$ che appartiene a $f(K)$ dato che $\bar{x} \in K$. Quindi $f(K)$ è sequenzialmente compatto.