1) - a) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2}{4^n}$$

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2}{4^n} = 2\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = 2\,\frac{1}{4^4}\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{4^{n-4}} = \frac{2}{2^8}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2^7}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2^5}\,\frac{1}{3}$$

1) - b) Stabilire il carattere della serie seguente

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{n\log^{\sqrt{2}} n} + \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)n\right)$$

Osserviamo che entrambe le successioni $\left\{\frac{1}{n\log^{\sqrt{2}} n}\right\}$ e $\left\{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)n\right\}$ sono a termini positivi e quindi entrambe le serie $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\log^{\sqrt{2}} n}$ e $\sum_{n=3}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)n$ sono regolari. Poiché

$$\lim\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)n = \lim\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$$

la serie $\sum_{n=3}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)n = +\infty$ e quindi anche la serie assegnata diverge positivamente

2) Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = (y-yx)^2(x-2y)^3$ e studiarne la natura

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(y-yx)(-y)(x-2y)^3 + (y-yx)^2\,3(x-2y)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y-yx)(1-x)(x-2y)^3 - 6(y-yx)^2(x-2y)^2$$

I punti stazionari $P=(x,y)$ di f sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 2(y-yx)(-y)(x-2y)^3 + (y-yx)^2\,3(x-2y)^2 = 0 \\ 2(y-yx)(1-x)(x-2y)^3 - 6(y-yx)^2(x-2y)^2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2(y-yx)(x-2y)^2\left((x-2y)(1-x) - 3(y-yx)\right) = 0 \\ 2(y-yx)(-y)(x-2y)^3 + (y-yx)^2\,3(x-2y)^2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2y(1-x)(x-2y)^2\left((x-2y)(1-x) - 3y(1-x)\right) = 0 \\ 2y(1-x)(-y)(x-2y)^3 + y^2(1-x)^2\,3(x-2y)^2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2y(1-x)^2(x-2y)^2(x-2y-3y) = 0 \\ y^2(1-x)(x-2y)^2(-2x+4y + 3(1-x)) = 0 \end{cases}$$

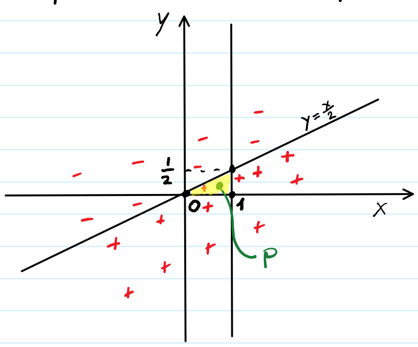
$\begin{cases} y=0 \\ 0=0 \end{cases}$ quindi la retta $r_1: y=0$ è una retta di punti critici

$\begin{cases} 1-x=0 \\ 0=0 \end{cases}$ quindi la retta $r_2: x=1$ è una retta di punti critici

$\begin{cases} (x-2y)^2=0 \\ 0=0 \end{cases}$ quindi la retta $r_3: y=\frac{x}{2}$ è una retta di punti critici

$\begin{cases} y=\frac{x}{5} \\ -5x+\frac{4}{5}x+3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{21}{5}x=3 \\ y=\frac{x}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=5/7 \\ y=\frac{1}{7} \end{cases}$ $P\left(\frac{5}{7},\frac{1}{7}\right)$ è un punto critico

Determiniamo la natura dei punti critici sulle rette r_i, $i=1,2,3$ usando la definizione di punto di estremo: osserviamo che se $(\bar{x},\bar{y})\in r_i$, $i=1,2,3$ $f(\bar{x},\bar{y})=0$; quindi $f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})=f(x,y)$ e il segno di $f(x,y)$ dipende solo dal fattore $x-2y$:



Pertanto se $(\bar{x},\bar{y})\in r_1$, $\bar{x}>0$, $(\bar{x},\bar{y})$ è di min loc. NON forte
" " " $\bar{x}<0$ " " " max " " "
" " $\in r_2$ $\bar{y}>\frac{1}{2}$ " " " " " " "
" " " $\bar{y}<\frac{1}{2}$ " " " min " " "
" " $\in r_3$ è di sella

P è interno al triangolo T delimitato da r_1, r_2 e r_3
Poiché $f_{|\partial T}\equiv 0$ e $f(P)>0$, P è un max locale forte

3) Determinare le soluzioni singolari e l'integrale generale in forma esplicita dell'equazione
$y'=xy(\log y)(\sin x)$

L'equazione assegnata è a variabili separabili. Le soluzioni singolari sono le funzioni costanti di costante valore uno zero della funzione $y\in(0,+\infty)\mapsto y\log y$, quindi $y\equiv 1$ in questo caso. Dividendo quindi ambo i membri per $y\log y$, otteniamo

$$\frac{y'}{y\log y}=x\sin x \quad \text{da cui} \quad \int\frac{dy}{y\log y}=\int x\sin x\,dx$$

$$\int\frac{dy}{y\log y}=\log|\log y| \quad ; \quad \int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+c,\ c\in\mathbb{R}$$

Dunque $\log|\log y|=-x\cos x+\sin x+c$ ovvero $|\log y|=e^c e^{-x\cos x}e^{\sin x}$

da cui, dato che nessuna soluzione non singolare può assumere il valore 1 (e quindi o è $y>1,\ \forall x$ o $0<y<1,\ \forall x$) $\log y=k\,e^{-x\cos x}e^{\sin x}$, $k\in\mathbb{R}$
e quindi $y=e^{k e^{-x\cos x}e^{\sin x}}$

4) Dare la definizione di funzione scalare differenziabile in un punto di un aperto.
Dimostrare poi che se f è differenziabile in $x_0\in A$, $A\subset\mathbb{R}^n$ aperto,

4) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto di un aperto.
Dimostrare poi che se f è differenziabile in $x_0 \in A$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, versore, $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$

Si veda, ad esempio, p. 334 del manuale di riferimento.