Appello Analisi Matematica II modulo

venerdì 9 settembre 2016 09:00

1) • Determinare il carattere della seguente serie

A) $$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,(n^2-9)\right)$$

Ricordando che $\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in (0,+\infty)$

abbiamo che $\forall n \geq 2$ : $\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,(n^2-1) = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{n^2-1}$

quindi la serie assegnata è uguale a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{arctg}\,\frac{1}{n^2-1}$$

Poiché $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2-1}$ essa ha lo stesso

carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$ e quindi converge

• Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$$

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = 2\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

quindi è una serie geometrica, meno i primi 4 termini, moltiplicata per 2. È convergente in quanto la ragione è $\frac{1}{3}$ $(\in(-1,1))$

La sua somma è $2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27}\right)$

uguale anche a $2\cdot\frac{1}{3^4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

o anche $2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\frac{1}{3}}\right) = 2\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{27}$

B) • Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\sqrt{n-1}\right)$$

È analogo all'esercizio della traccia A. In questo caso

$\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\sqrt{n-1} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

quindi la serie assegnata diverge

• Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{5^n}$$

Come nella traccia A, la serie converge a

$$4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

2) Stabilire se la funzione

A) $$f(x,y) = \frac{\log(xy)\log(x+y)}{xy}$$

B) $$f(x,y) = \frac{\cos(xy)\sin(xy)}{xy}$$

ha derivata direzionale secondo qualunque versore in tutti punti del suo dominio (specificare quale esso sia)

Calcolare poi

A) $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1)$

B) $\frac{\partial f}{\partial v}(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$

qualunque sia il versore $v$ di componenti $(v_1, v_2)$

B) $\operatorname{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \wedge y\neq 0\}$

$f$ è di classe $C^\infty$ nel suo dominio quindi è ivi differenziabile (per il teorema del differenziale) e dunque ha derivata direzionale secondo qualunque versore in tutti i punti del suo dominio.

In particolare $\frac{\partial f}{\partial v}(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = \nabla f(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})\cdot v$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(-\sin^2(xy)\,y + \cos^2(xy)\,y\right)xy - \cos(xy)\sin(xy)\,y}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(-\sin^2(xy)\,x + \cos^2(xy)\,x\right)xy - \cos(xy)\sin(xy)\,x}{x^2y^2}$$

quindi $$\nabla f(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = \left(\frac{\sqrt{\pi}\cdot(-\pi)}{\pi^2},\ \frac{-\sqrt{\pi}\cdot(-\pi)}{\pi^2}\right)$$

e $$\frac{\partial f}{\partial v}(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}v_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}v_2$$

A) È analoga. In questo caso il dominio è dato dai punti $(x,y)$ tali che

$$\begin{cases} xy > 0 \\ x+y > 0 \\ x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$$ quindi da $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(\frac{y}{xy}\log(x+y) + \log(xy)\frac{1}{x+y}\right)xy - \log(xy)\log(x+y)\,y}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(\frac{x}{xy}\log(x+y) + \log(xy)\frac{1}{x+y}\right)xy - \log(xy)\log(x+y)\,x}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \log 2\, v_1 + \log 2\, v_2$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

A) $\begin{cases} y' = (y^2-1)\log x \\ y(2) = 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} y' = y^2 x e^x \\ y(3) = 2 \end{cases}$

A) $y' = (y^2-1)\log x$ è un'equazione a variabili separabili cioè del tipo $y' = g(y) f(x)$

Osserviamo che le soluzioni singolari (quelle del tipo $y(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in (0,+\infty)$ con $g(y_0) = 0$) sono $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$, $\forall x \in (0,+\infty)$ non sono soluzioni del problema di Cauchy. Possiamo quindi supporre $y(x) \neq \pm 1$, $\forall x \in (0,+\infty)$ e dividere per $y^2-1$ ottenendo:

$$\frac{y'}{y^2-1} = \log x$$ da cui

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{y^2(x)-1} = \int \log x \, dx$$ ossia

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \log x \, dx$$

$$\int \log x \, dx = x\log x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{y-1}\right)$$

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{y-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\log|y+1| - \log|y-1|\right) + c$$

dunque

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x\log x - x + c$$

Dato che $y(2)=0$ otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{-1}{1}\right| = 2\log 2 - 2 + c \quad \text{cioè}$$

$$c = 2 - 2\log 2$$

e quindi $\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2\left(x\log x - x + 2(1-\log 2)\right)$

da cui $\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2x\log x}\, e^{-2x}\, e^4\, \frac{1}{16}$

dato che questa funzione è invece positiva!

Poiché $y(2)=0$, in un intorno di 2 la quantità $\frac{y-1}{y+1}$ è negativa (per continuità)

dunque, in tale intorno, $\frac{y-1}{y+1} = -\frac{e^4}{16}\, e^{2x\log x}\, e^{-2x}$

da cui $y-1 = (y+1)\left(-\frac{e^4}{16}\left(e^{\log x}\right)^{2x} e^{-2x}\right)$

e quindi

$$y\left(1+\frac{e^4}{16}x^{2x}e^{-2x}\right) = -\frac{e^4}{16}x^{2x}e^{-2x} + 1$$

da cui

$$y(x) = \frac{-\frac{e^4}{16}x^{2x}e^{-2x}+1}{1+\frac{e^4}{16}x^{2x}e^{-2x}} =$$

$$= \frac{\frac{-e^4 e^{2x} + 16e^{2x}}{16e^{2x}}}{\frac{16e^{2x}+e^4x^{2x}}{16e^{2x}}} = \frac{16e^{2x} - e^4e^{2x}}{16e^{2x}+e^4x^{2x}}$$

B) È analoga. In questo caso c'è solo una soluzione singolare $y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ che non è soluzione del problema di Cauchy

Dividendo per $y^2$ otteniamo:

$$\frac{y'}{y^3} = xe^x$$ e integrando:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int e^x x \, dx$$

$$-\frac{1}{y} = xe^x - e^x + c$$

Poiché $y(3) = 2$ otteniamo che $c = e^3 - 3e^3 - \frac{1}{2}$

e quindi

$$-\frac{1}{y} = xe^x - e^x - 2e^3 - \frac{1}{2}$$

da cui

$$y = \frac{1}{2e^3 + \frac{1}{2} - xe^x + e^x}$$

4) Calcolare il seguente integrale:

B) $\int_Q xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove $Q$ è il quadrato di vertici $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,\pi)$

A) $\int_Q xy \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ dove $Q$ è il quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$

B)
$$\int_Q xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^\pi x \left( \int_0^\pi y\sqrt{x^2+y^2}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^\pi x \ \frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^\pi dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\pi x \left(x^2+\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} dx - \frac{1}{3}\int_0^\pi x^4\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0 x \left(x^2+\pi^2\right) dx - \frac{1}{3}\int x \, dx$$

$$= \frac{1}{15}\left(\pi^2+x^2\right)^{5/2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{15} x^5\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{15} 2^{5/2}\pi^5 - \frac{\pi^5}{15} - \frac{\pi^5}{15} = \frac{2}{15}\pi^5\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

A) $$\int_Q xy \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 x\left(\int_0^1 y \sin(x^2+y^2)\, dy\right) dx$$

$$= -\int_0^1 x \; \frac{1}{2}\cos(x^2+y^2)\Big|_0^1 dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\cos(x^2+1) - \cos(x^2)\right) dx$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(x^2+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\sin(x^2)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(2) + \frac{1}{4}\sin(1) + \frac{1}{4}\sin(1)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sin(1) - \sin(2)\right)$$