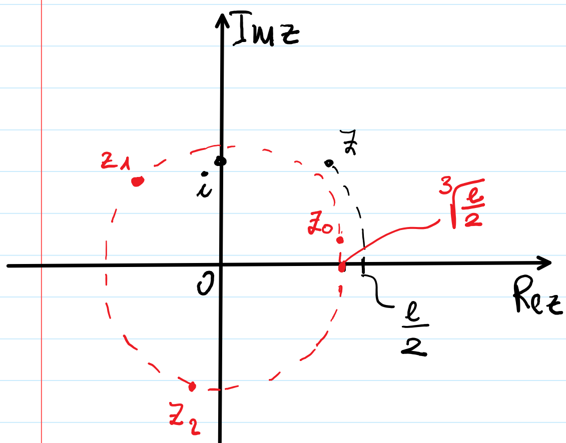
1) - a) Scrivere in forma cartesiana il numero complesso

$$z = \frac{e^{2 - i\pi/4}}{2\, e^{1 - i\pi/2}}$$

Determinare poi le radici terze di z e rappresentarle sul piano insieme al numero z

$$z = \frac{1}{2} e^{2 - i\frac{\pi}{4} - 1 + i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^{1 + i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} e \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z_k = \sqrt[3]{\frac{1}{2} e^{1 + i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[3]{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$



b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + \operatorname{arctg}\left(\log_2 (x-2)\right)$$

dom f: $x - 2 > 0$ quindi dom f $= (2, +\infty)$

f è somma delle funzioni $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ strett. crescente

e $f_2(x) = \operatorname{arctg}\left(\log_2 (x-2)\right)$ che è composta dalle

funzioni $x \in (2, +\infty) \mapsto x - 2 \mapsto \log_2(x-2) \mapsto \operatorname{arctg}(\log_2(x-2))$

tutte strett. crescenti ; quindi f è strett. crescente

Poiché f è anche continua $\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x\to 2} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right) = \left(\sqrt[3]{2} - \frac{\pi}{2}, +\infty \right)$

2) Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \arccos(1-x^2) + \left(1-(1-x^2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Determinarne poi i suoi punti di minimo e massimo globali

dom f :
$$\begin{cases} 1-x^2 \leq 1 \\ 1-x^2 \geq -1 \\ 1-(1-x^2)^2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x^2 \leq 2 \\ (1-x^2)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ -1 \leq 1-x^2 \leq 1 \end{cases} \qquad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

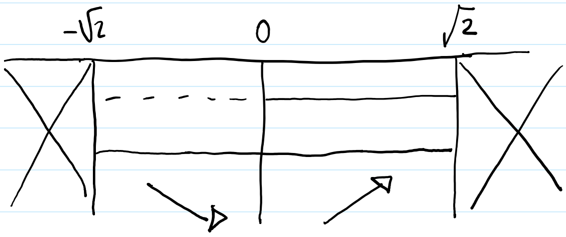
$f \in C^0([-\sqrt{2}, \sqrt{2}])$ e quindi non ci sono asintoti verticali (ovviamente non ha senso cercare asintoti orizzontali o obliqui in quanto il dominio è un intervallo limitato)

$$f'(x) = -\frac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} + \frac{1}{2}\,\frac{-2(1-x^2)(-2x)}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}$$

$$= \frac{2x\left(1+(1-x^2)\right)}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}$$

$$f'(x) > 0 \iff 2x\left(1+(1-x^2)\right) > 0$$

$$1+(1-x^2) > 0 \iff x^2 < 2 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$



f ha quindi punti di max locale in $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ e un punto di min locale in 0. Poiché $f \in C^0([-\sqrt{2}, \sqrt{2}])$ f ha massimo e minimo globali.

Poiché f è pari, $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$ e quindi
$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ sono entrambi massimi globali
0 è il minimo globale

3) Calcolare la media integrale della funzione
$f(x) = (1-x)^3 - x + x\cos(x^2) - x\cos x$
sull'intervallo $[0, \pi]$

La media integrale richiesta è data da

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[(1-x)^3 - x + x\cos(x^2) - x\cos x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{4}(1-x)^4\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x^2)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x\cos x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{4}(1-\pi)^4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\sin(\pi^2) - x\sin x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{4}(1-\pi)^4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\sin(\pi^2) - 0 - \cos x\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{4}(1-\pi)^4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\sin(\pi^2) + 1 + 1\right]$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione di una funzione inversa.
Usarlo poi per calcolare $(f^{-1})'(2+e^2)$

con $f(x) = x + e^x$

Per enunciato e dimostrazione si veda la lezione 19

Osserviamo che $f(2) = 1 + e^2$, $f'(x) = 1 + e^x$ e $f'(2) = 1 + e^2 \neq 0$

quindi $(f^{-1})'(2+e^2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{1+e^2}$