

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_

- 1) Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti o divergenti:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} (x^{10} - x^7) dx; \quad \int_0^{+\infty} \log(2 + \cos^2 x) (e^{-\frac{1}{x^2+1}} - 1) dx.$$

6 pts.

- 2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x^3} \log \left( 1 + \frac{y}{x^3} \right)$$

e rappresentarlo sul piano; dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi. Stabilire poi se esiste il  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ . Calcolare infine  $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1)$  dove  $v$  è il versore  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ .

10 pts.

- 3) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{t-1}y + (t-1)^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

8 pts.

- 4) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass per una funzione scalare di più variabili reali.

6 pts.