1) Calcolare la trasformata di Laplace della derivata della funzione $f(t) = \cos(\sqrt{2}t)\, e^{(2-i)t}$ specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definita

Osserviamo che f è derivabile ed ha crescita esponenziale dato che
$|f(t)| = |\cos(\sqrt{2}t)| \cdot |e^{(2-i)t}| \le e^{2t}$

Quindi f' è $\mathcal{L}$-trasformabile e $\forall\, s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > 2$
abbiamo che $\mathcal{L}(f')(s) = -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s) =$

$$= -1 + \frac{s(s-2+i)}{(s-2+i)^2+2}$$

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\cos(k\pi) - \sin\frac{1}{k}\right)(x-\pi)^k$$

Osserviamo che la successione dei coefficienti $\{a_k\}$ non è a termini non-negativi dato che

$$k\left((-1)^k - \sin\frac{1}{k}\right) = \begin{cases} k\left(1-\sin\frac{1}{k}\right) & \text{se } k \text{ è pari} \\ -k\left(1+\sin\frac{1}{k}\right) & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k} \cdot \left|(-1)^k - \sin\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{k}} \longrightarrow 1 \cdot 1^0 = 1$$

Quindi $\rho = 1$. Dunque l'intervallo di convergenza è

$(\pi-1, \pi+1)$

Per $x = \pi+1$ otteniamo la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left((-1)^k - \sin\frac{1}{k}\right)$ $(*)$

osserviamo che $k\left((-1)^k - \sin\frac{1}{k}\right)$ non ha limite per

$k \to +\infty$ dato che se $k = 2h$ $\displaystyle\lim_{h\to\infty} 2h\left(1 - \sin\frac{1}{2h}\right) = +\infty$

mentre per $k = 2h+1$ $\displaystyle\lim_{h\to+\infty} (2h+1)\left(-1 - \sin\frac{1}{(2h+1)}\right) = -\infty$

Dunque non converge

Analogamente per $x = \pi-1$ otteniamo $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left((-1)^k + \sin\frac{1}{k}\right)(-1)^k$

$k\left((-1)^k + \sin\frac{1}{k}\right)(-1)^k \overset{\text{per } k=2h}{=} 2h\left(1 + \sin\frac{1}{\ldots}\right) \cdot 1 \longrightarrow +\infty$

Analogamente per $x = \pi - 1$ otteniamo $\sum_{k=1} k\left((-1)^k + \sin\frac{1}{k}\right)(-1)^k$

ma $k\left((-1)^k + \sin\frac{1}{k}\right)(-1)^k \overset{\text{per } k=2h}{=} 2h\left(1 + \sin\frac{1}{2h}\right)\cdot 1 \longrightarrow +\infty$

Dunque la successione $k\left((-1)^k + \sin\frac{1}{k}\right)(-1)^k$ non converge a 0

Dunque la serie assegnata converge puntualmente in $(\pi-1, \pi+1)$ e uniformemente in ogni intervallo $[a,b] \subset (\pi-1, \pi+1)$

3) Dare la definizione del logaritmo di un numero complesso $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dare poi la definizione di selezione principale del logaritmo. Dimostrare infine che la selezione principale del logaritmo non è continua in tutti i punti della semiretta $r_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \wedge \operatorname{Re} z < 0\}$

Si vedano pagg. 87, 89, 90 degli appunti

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\partial^+ Q} \frac{e^{\frac{1}{z+1}}}{(z+1)^2}\, dz$$

dove Q è il quadrilatero di vertici $i, -2+i, -2-i, -i$

Osserviamo che la funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z+1}}$ non è olomorfa in $\mathring{Q}$ (dato che $-1 \in \mathring{Q}$): non possiamo quindi applicare le formule di rappresentazione di Cauchy.

Sappiamo però che l'integrale assegnato è uguale a

$2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\frac{1}{z+1}}}{(z+1)^2}; -1\right)$ $g = g(z)$. Poiché -1 è una singolarità essenziale per g calcoliamo tale residuo usando il II teorema dei residui, quindi $-2\pi i \operatorname{Res}(g; \infty) = -2\pi i \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} g\left(\frac{1}{z}\right); 0\right)$

$$-\frac{1}{z^2} g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{\frac{1}{\frac{1}{z}+1}}}{\left(\frac{1}{z}+1\right)^2} \cdot -\frac{1}{z^2} = -\frac{e^{\frac{z}{1+z}}}{\frac{(1+z)^2}{z^2}} \frac{1}{z^2} = -\frac{e^{\frac{z}{1+z}}}{(1+z)^2}$$

Poiché $\exists \lim_{z\to 0} -\frac{e^{z/1+z}}{(1+z)^2} = -1$, concludiamo che $-\frac{1}{z^2} g\left(\frac{1}{z}\right)$ ha una singolarità eliminabile in 0 e quindi

$\operatorname{Res}(g; \infty) = 0$

5) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra

Si vedano, ad esempio, pagg. 94-95 degli appunti

6) Scrivere la serie di soli seni della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0,2]$ e studiarne convergenza puntuale e uniforme sull'intervallo $[0,2]$

Detta g l'estensione dispari di f su $[-2,2]$

$$b_k = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} g(x)\sin\left(\frac{2\pi k x}{4}\right) dx =$$

$$= \int_0^2 x^2 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)x^2\Big|_0^2 + \frac{4}{k\pi}\int_0^2 x\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$= -\frac{8}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{8}{k^2\pi^2}\,x\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 - \frac{8}{k^2\pi^2}\int_0^2 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

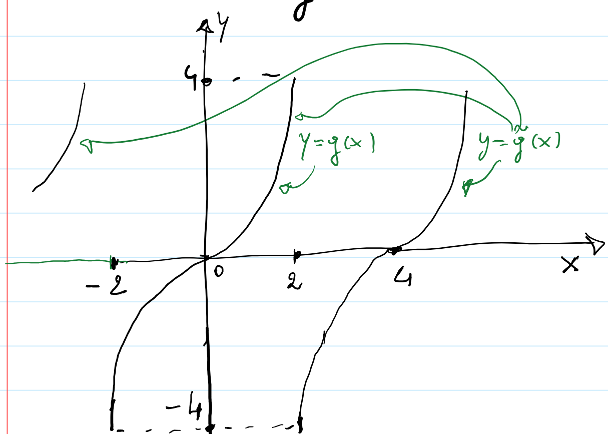
$$= -\frac{8}{k\pi}(-1)^k + 0 - \frac{16}{k^3\pi^3}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{8}{k\pi}(-1)^k - \frac{16}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k - 1\right]$$

Dunque la serie di soli seni di f è

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{8}{k\pi} - \frac{16}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k - 1\right]\right)\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \qquad (*)$$

Detta $\tilde{g}$ l'estensione periodica a $\mathbb{R}$ di g con periodo 4, dato che $\tilde{g}$ è di classe C^1 su $[0,2)$, $(*)$ converge



uniformemente a $y=x^2$ su ogni intervallo chiuso e limitato del tipo $[0,a]$ con $a<2$ (quindi converge puntualmente su $[0,2)$)

Dato che $\exists \lim_{x\to 2^-} g'(x) = 4$

e $\exists \lim_{x\to -2^+} g'(x) = 4 = \lim_{x\to 2^+} \tilde{g}'(x)$

$(*)$ converge a $\dfrac{g(2_-)+\tilde{g}(2_+)}{2} = \dfrac{4-4}{2} = 0$

nel punto $x=2$