1) - a) Sia $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

Si determini $\left(\frac{|z|^2}{z}\right)^9$ in forma esponenziale prima e poi cartesiana

Poiché $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $\frac{|z|^2}{z} = \bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

$|\bar{z}| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$

$\operatorname{Arg} \bar{z} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3/2}{\sqrt{3}/2}\right) = -\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$;

quindi $\left(\frac{|z|^2}{z}\right)^9 = \bar{z}^9 = \left(\sqrt{3}e^{-i\pi/3}\right)^9 = \underbrace{3^{\frac{9}{2}} e^{-i3\pi}}_{\text{forma esponenziale}} = \underbrace{-3^{\frac{9}{2}}}_{\text{forma cartesiana}}$

1) - b) Determinare il dominio della funzione

$f(x) = \sinh(x^2 - 1) + \log(x^{1/4} - 2)$

Determinare poi il tipo di monotonia di f e la sua immagine

dom f: $\begin{cases} x^{1/4} - 2 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 16 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\{ x > 16$

quindi dom $f = (16, +\infty)$

f è somma delle funzioni $f_1(x) = \sinh(x^2 - 1)$ e $f_2(x) = \log(x^{1/4} - 2)$

f_1 è strett. crescente in quanto composta dalla funzione $y = \sinh x$, strett. crescente e $y = x^2 - 1$, strett. crescente su $[16, +\infty)$

f_2 è anche strett. crescente in quanto composta da $y = \log x$, strett. crescente e da $y = x^{1/4} - 2$ pure strett. crescente. Quindi f è strett. crescente in quanto somma di funzioni strett. crescenti.

$f \in C^0((16, +\infty))$ quindi $\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x \to 16} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$

2) Sia $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$. Si determinino gli asintoti di f.

Si consideri poi la funzione $g(x) = x^4 f(x^2)$, definita su $\mathbb{R}$.

Si determinino i punti stazionari di g e se ne studi la natura.

Si scriva infine la formula di McLaurin di ordine 10 per g.

Poiché f è definita e continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'unico punto in cui avere asintoti verticali è $x = 0$: $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} = 1(\pm\infty) = \pm\infty$

Quindi la retta $x = 0$ è asintoto verticale sia a dx che a sx per f

Poiché $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, abbiamo che

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$ e quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

Osserviamo che $g(x) = x^4 \dfrac{\sin(x^2)}{x^4} = \sin(x^2)$; $g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$

I suoi punti stazionari sono quindi $x=0$ e le soluzioni di $\cos(x^2)=0$

cioè $x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ ovvero $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$.

Dato che $g''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)$, possiamo studiare la natura di tali punti valutando g'' in essi:

$g''(0) = 2 > 0$ quindi 0 è un minimo locale forte

$$g''\left(\pm\sqrt{\tfrac{\pi}{2}+k\pi}\right) = 2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right) - 4\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$$
$$= 0 - 4\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right) = \begin{cases} -4\left(\frac{\pi}{2}+2h\pi\right) & \text{se } k=2h, \ h\in\mathbb{N} \\ +4\left(\frac{\pi}{2}+(2h+1)\right) & \text{se } k=2h+1, \ h\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Quindi i punti $x_h^1 = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+2h\pi}$ sono tutti di massimo locale forte dato che $g''(x_h^1)<0$, $\forall h\in\mathbb{N}$
mentre i punti $x_h^2 = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+(2h+1)\pi}$ sono di minimo locale forte dato che $g''(x_h^2)>0$, $\forall h\in\mathbb{N}$

Dato che $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$
$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{5!} + o(x^{10}).$$

3) Calcolare
$$\int_{-1/2}^{1/2}\left(\sin(x^3) - \frac{|x|\operatorname{arctg}(x^2)}{3}\right)dx \qquad (*)$$

Osserviamo che $y = \sin(x^3)$ è una funzione dispari e quindi $\int_{-1/2}^{1/2}\sin(x^3)\,dx = 0$

Osserviamo anche che $|x|/3 \operatorname{arctg}(x^2)$ è una funzione pari e quindi

Dunque $(*) = -\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}|x|\operatorname{arctg} x^2\,dx = -\dfrac{2}{3}\int_0^{1/2} x \operatorname{arctg}(x^2)\,dx =$

$$\underset{dt=2x\,dx}{\overset{x^2=t}{=}} -\frac{1}{3}\int_0^{1/4}\operatorname{arctg} t\,dt = -\frac{1}{3}\, t\operatorname{arctg} t\Big|_0^{1/4} + \frac{1}{3}\int_0^{1/4}\frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{4}\right) - 0 + \frac{1}{6}\log(1+t^2)\Big|_0^{1/4} = -\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{4}\right) + \frac{1}{6}\log\left(1+\tfrac{1}{16}\right)$$

4) Enunciare il teorema del doppio confronto per il limite di una reale di variabile reale.
Usarlo per dimostrare che $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

si veda, ad esempio, p. 88 del manuale consigliato per l'enunciato
e pag. 100 per $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$