Svolgimento della prova del 10 aprile 2025 – Modulo B

1) Il dominio di integrazione A è il settore di corona circolare di raggio interno 1 e raggio esterno 2 nel primo quadrante. Poiché sia l'integranda che il dominio di integrazione suggeriscono l'uso delle coordinate polari, effettuiamo il cambio di variabili:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Il dominio di integrazione diventa:

$$A = \{(r,\theta) : 1 < r < 2,\ 0 < \theta < \pi/2\}.$$

L'integranda nelle coordinate polari diventa:

$$\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^4} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

L'elemento di area in coordinate polari è $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, quindi l'integrale diventa:

$$\int_A \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \cdot \int_1^2 \frac{1}{r}\mathrm{d}r.$$

Calcoliamo i due integrali separatamente:

$$\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin(2\theta)\mathrm{d}\theta = \left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta)\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2};$$

$$\int_1^2 \frac{1}{r}\mathrm{d}r = [\ln r]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

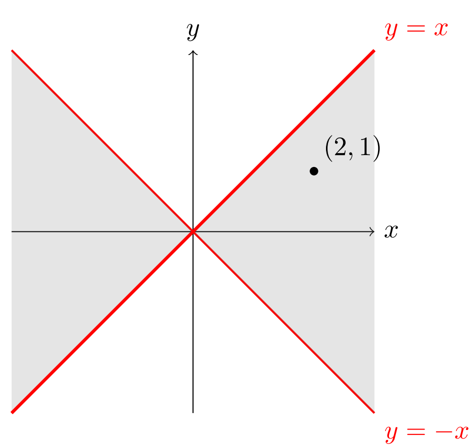
Quindi l'integrale assegnato è uguale a $\frac{\ln 2}{2}$.

2) Per determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \log(x^2-y^2) + \arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$, consideriamo separatamente i domini dei due addendi.

Per il primo, $\log(x^2-y^2)$, deve essere $x^2-y^2>0$, cioè $(x-y)(x+y)>0$. Questa disequazione è soddisfatta dai punti interni del cono ombreggiato in figura.

Per il secondo, $\arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$, deve essere $x-y\neq 0$, cioè $x\neq y$. Questo esclude la retta $y=x$.

Dunque il dominio di f è il cono ombreggiato in figura privato delle rette $y=\pm x$ tracciate in rosso.



Il dominio è un insieme aperto (corrisponde alla controimmagine dell'intervallo $(0,+\infty)$ mediante il polinomio $p(x,y) = (x-y)(x+y)$), non limitato, non connesso per archi (il vertice del cono completo $(0,0)$ disconnette i due angoli opposti).

Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{2y}{(x-y)^2+(x+y)^2};$$

$$f_y(x,y) = -\frac{2y}{x^2-y^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = -\frac{2y}{x^2-y^2} + \frac{2x}{(x-y)^2+(x+y)^2}.$$

Come si vede, le due derivate parziali sono funzioni razionali definite sul dominio f. Esse sono quindi continue sul dominio di f e pertanto il Teorema del differenziale totale assicura che f è differenziabile in tutti i punti del dominio (ricordiamo che il dominio è aperto e quindi tutti i suoi punti sono interni).
Calcoliamo ora $\nabla f(2,1)$:

$$f_x(2,1) = \frac{4}{4-1} - \frac{2}{(2-1)^2+(2+1)^2} = \frac{4}{3} - \frac{2}{1+9} = \frac{4}{3} - \frac{2}{10} = \frac{4}{3} - \frac{1}{5} = \frac{20-3}{15} = \frac{17}{15};$$
$$f_y(2,1) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{10} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{5} = -\frac{10-6}{15} = -\frac{4}{15}.$$

Quindi $\nabla f(2,1) = \left(\frac{17}{15}, -\frac{4}{15}\right)$.
Calcoliamo $f(2,1)$:

$$f(2,1) = \log(4-1) + \arctan\left(\frac{2+1}{2-1}\right) = \log(3) + \arctan(3).$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1,\log(3)+\arctan(3))$ è:

$$\begin{aligned} z &= f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1) \\ &= \log(3) + \arctan(3) + \frac{17}{15}(x-2) - \frac{4}{15}(y-1). \end{aligned}$$

Per calcolare la derivata direzionale secondo il vettore $v = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, usiamo la formula:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,1) = \nabla f(2,1)\cdot v = \frac{17}{15}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{4}{15}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{17+4}{15} = -\frac{21}{15\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

3) L'equazione differenziale è:

$$y'' + 4y' + 5y = \cos(2t)$$

Innanzitutto, risolviamo l'equazione omogenea associata:

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0, \quad \text{da cui} \quad \lambda = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i.$$

Quindi, la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$y_0(t) = e^{-2t}(c_1\cos t + c_2 \sin t).$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, osserviamo che il termine non omogeneo è $\cos(2t)$. Poiché $0 \pm 2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma:

$$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t).$$

Calcoliamo le derivate di y_p:

$$y_p'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t);$$
$$y_p''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t).$$

Sostituendo nell'equazione differenziale:

$$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) + 4(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) + 5(A\cos(2t) + B\sin(2t)) = \cos(2t).$$

Ovvero:

$$(-4A + 8B + 5A)\cos(2t) + (-4B - 8A + 5B)\sin(2t) = \cos(2t).$$

Semplificando:

$$(A + 8B)\cos(2t) + (-8A + B)\sin(2t) = \cos(2t).$$

Confrontando i coefficienti, otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned} A + 8B &= 1 \\ -8A + B &= 0 \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione: $B = 8A$ e sostituendo nella prima: $A + 8(8A) = 1 \Rightarrow A + 64A = 1 \Rightarrow 65A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{65}$. Quindi $B = 8A = \frac{8}{65}$. La soluzione particolare è:

$$y_p(t) = \frac{1}{65}\cos(2t) + \frac{8}{65}\sin(2t)$$

La soluzione generale è:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = e^{-2t}(c_1\cos t + c_2\sin t) + \frac{1}{65}\cos(2t) + \frac{8}{65}\sin(2t)$$

Ora imponiamo le condizioni iniziali per determinare c_1 e c_2: $y(0) = 1$ dà:

$$1 = c_1 + \frac{1}{65}.$$

Quindi $c_1 = 1 - \frac{1}{65} = \frac{64}{65}$.
$y'(0) = 0$ dà:

$$\begin{aligned} 0 &= -2c_1 + c_2 + 2B \\ 0 &= -2 \cdot \frac{64}{65} + c_2 + 2 \cdot \frac{8}{65} \\ 0 &= -\frac{128}{65} + c_2 + \frac{16}{65} \\ c_2 &= \frac{128 - 16}{65} = \frac{112}{65}. \end{aligned}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$y(t) = e^{-2t}\left(\frac{64}{65}\cos t + \frac{112}{65}\sin t\right) + \frac{1}{65}\cos(2t) + \frac{8}{65}\sin(2t),$$

4) Una serie geometrica di ragione $q \in \mathbb{R}$ è definita come:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

Il comportamento di questa serie dipende dal valore di q:

- Se $|q| < 1$, la serie converge e la sua somma è $\frac{1}{1-q}$,
- Se $q \geq 1$, la serie diverge,
- Se $q \leq -1$ la serie è indeterminata.

Dimostrazione: Per $q \neq 1$, consideriamo la somma parziale $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Si ha:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

$$qS_n = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}.$$

Sottraendo queste equazioni:

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

Quando $|q| < 1$, si ha $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, quindi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

Per $q \geq 1$, la serie diverge perché il suo termine generale non tende a 0 e la serie è a termini positivi.

Per $q \leq 1$ si vede che è indeterminata perché la succesione $\{q^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite.

Per studiare la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n}$, riscriviamola come somma di due serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Entrambe le serie sono geometriche con $|q| < 1$, quindi sono convergenti. Usando la formula della somma per serie geometriche senza il primo termine:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

Otteniamo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - 1 = 2.$$

Quindi la somma della serie data è 2.