1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di un segnale periodico

Si vedano ad esempio gli appunti nella mia pagina web riguardanti le trasformate di Laplace

Anni precedenti

1) Enunciare il teorema di integrazione termine a termine. Usarlo poi per

calcolare per serie l'integrale: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx$

Poiché $\displaystyle \sin(x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{x^{4k+2}}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Integrando termine a termine otteniamo dunque

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 x^{4k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{4k+1}$$

2) Stabilire se la serie di potenze in $\mathbb{C}$ data da

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} (z-1)^n$ converge nel punto $z = 2i$

Poiché $\displaystyle \lim_n \sqrt[n]{\frac{n}{3^{n+1}}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}}{3^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{3}$ il raggio di convergenza della serie è 3

Quindi la serie converge nel disco $D(1,3)$

Poiché $|2i - 1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} < 3$, $2i \in D(1,3)$

e la serie assegnata converge in $z = 2i$

3) Enunciare il "principio di identità per le funzioni olomorfe" e fornire, poi, almeno una sua applicazione

Si veda, ad esempio, p. 80 degli appunti. Possibili applicazioni:

∞

la somma della serie $\sum_{k=0} \frac{z^k}{k!}$ è l'unica estensione olomorfa su $\mathbb{C}$ della funzione reale $y = e^x$; $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, etc.

4) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+e^2}\, dx$$

L'integranda è una funzione reale a valori in $\mathbb{C}$

$$\left| \frac{e^{2ix}}{x^2+e^2} \right| = \frac{1}{x^2+e^2} \sim \frac{1}{x^2},$$ quindi è assolutamente

integrabile su $\mathbb{R}$ e dunque integrabile.

La sua estensione complessa è la funzione

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2+e^2}$$

Poiché $\frac{1}{z^2+e^2} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$, possiamo applicare il lemma di Jordan nel

semipiano dei numeri complessi con parte immaginaria positiva

Gli zeri della funzione al denominatore sono le radici quadrate di $-e^2$ cioè ie e $-ie$

Appartiene al semipiano dei numeri complessi con parte immaginaria positiva solo ie

che è un polo semplice, quindi

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i2z}}{z^2+e^2}, ie\right) = \lim_{z\to ie} (z-ie)\frac{e^{2iz}}{z^2+e^2} = \frac{e^{2i(ie)}}{D(z^2+e^2)\big|_{z=ie}}$$

$$= \frac{e^{-2e}}{2ie}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+e^2} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+e^2}, ie\right) = 2\pi i \frac{e^{-2e}}{2ie} = \pi e^{-2e-1}$$

5) Calcolare la serie di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \\ -1 & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

Dimostrare poi, usando tale serie, che $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin(kx)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(kx)\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + 1 + \cos(k\pi) - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(-2\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + 1 + (-1)^k\right)$$

Poiché $\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 0$ se k è dispari ed è uguale a $(-1)^h$ se $k = 2h$

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \frac{4}{2h\pi}\left(-(-1)^h + 1\right) & \text{se } k = 2h \end{cases}$$

Quindi la serie di soli seni di f è data da

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{h\pi}\left(-(-1)^h + 1\right)\sin(2hx)$$

Per $x = \frac{\pi}{4}$ la serie converge a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Quindi $\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty} \frac{2}{h\pi}\left(-(-1)^h + 1\right)\sin\left(h\frac{\pi}{2}\right) = 1$; poiché

$$\sin\left(h\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^m & \text{se } h = 2m+1 \\ 0 & \text{se } h = 2m \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi}(2)(-1)^m = 1 \quad \text{cioè} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 4}{(2m+1)} = \pi$$

ovvero $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$