1) Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2} \log\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)$

È una serie a termini positivi. Poiché $\lim_n \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right) =$

$= \lim_n \frac{n-1}{n^2+1}\cdot\frac{n}{2}\,\frac{\log\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)}{\frac{n-1}{n^2+1}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 0$, la serie diverge positivamente

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 e^{-n} \operatorname{artg}(n^3+1)$

Anche questa è una serie a termini positivi

$n^3 e^{-n}\operatorname{arctg}(n^3+1) \sim n^3 e^{-n}\frac{\pi}{2}$

Poiché $\lim_n n^2\cdot\left(n^3 e^{-n}\frac{\pi}{2}\right) = 0$, per il criterio degli infinitesimi la serie converge

2) Determinare i punti critici della funzione

$f(x,y) = (y-e^x)^2(x-y+2)^3$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; i suoi punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -2(y-e^x)e^x(x-y+2)^3 + (y-e^x)^2\,3(x-y+2)^2 = 0 \\ 2(y-e^x)(x-y+2)^3 - (y-e^x)^2\,3(x-y+2)^2 = 0 \end{cases} \iff$$

Sommando membro a membro otteniamo:

$$\begin{cases} 2(y-e^x)(1-e^x)(x-y+2)^3 = 0 \\ -2(y-e^x)e^x(x-y+2)^3 + (y-e^x)^2\,3(x-y+2)^2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 1-e^x = 0 \\ -2(y-e^x)e^x(x-y+2)^3 + (y-e^x)^2\,3(x-y+2)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ -2(y-1)(2-y)^3 + (y-1)^2\,3(2-y)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ (y-1)(2-y)^2\left(-2(2-y)+3(y-1)\right) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ $P_1(0,1)$

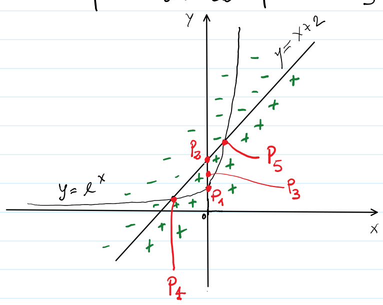
$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ $P_2(0,2)$

$\begin{cases} x=0 \\ 5y-7=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{7}{5} \end{cases}$ $P_3\left(0,\frac{1}{5}\right)$

$\begin{cases} y-e^x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ quindi il grafico G funzione $y=e^x$ è una curva di punti critici

$\begin{cases} x-y+2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ quindi la retta r di equazione $y=x+2$ è una retta di punti critici

Per $(\bar{x},\bar{y}) \in G\cup r$ si ha che $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ e quindi $f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y)$; per studiare la natura di tali punti è dunque sufficiente studiare il segno di f. Questo dipende solo dal fattore $x-y+2$:



Pertanto tutti i punti $(\bar{x},\bar{y}) \in G$ con $\bar{x}$ compreso tra le ascisse dei punti P_4 e P_5 di intersezione tra r e G sono di minimo locale (non stretto);

P_4 e P_5 sono di sella;

gli altri punti di G sono di massimo.

i punti di r sono tutti di sella

Osserviamo che P_1 e P_2 appartengono risp. a G e a r e sono quindi già stati studiati.

P_3 è interno all'insieme compatto K che ha per bordo il segmento P_4P_5 e l'arco di curva sul grafico G tra i punti P_4 e P_5. Poiché $f_{|\partial K} \equiv 0$ e $f_{|\mathring{K}} > 0$ per il teorema di Weierstrass applicato a $f_{|K}$, P_3 è un max locale forte.

curva sul grafico G tra i punti P_4 e P_5. Poiché $f|_{\partial K} \equiv 0$ e $f|_{\mathring{K}} > 0$

per il teorema di Weierstrass applicato a $f|_K$, P_3 è un max locale forte.

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x + \cos x & (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata a $(*)$ è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

che ha una soluzione doppia $\lambda = 1$; l'omogenea associata ha integrale

generale $\quad y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$

Determiniamo una soluzione particolare $\tilde{y}_1$ di $(*)$ considerando separatamente le equazioni

$y'' - 2y' + y = e^x$

Usiamo il metodo di similarità: dato che 1 è una soluzione doppia dell'equazione caratteristica, cerchiamo $\tilde{y}_1$ del tipo:

$\tilde{y}_1(x) = k x^2 e^x$

$\tilde{y}_1'(x) = 2kxe^x + kx^2e^x$

$\tilde{y}_1''(x) = 2ke^x + 2kxe^x + 2kxe^x + kx^2e^x$

$2ke^x + \cancel{4kxe^x} + \cancel{kx^2e^x} - \cancel{4kxe^x} - \cancel{2kx^2e^x} + \cancel{kx^2e^x} = e^x$

$2ke^x = e^x$ da cui $k = \frac{1}{2}$ e $\tilde{y}_1(x) = \frac{x^2}{2}e^x$

$y'' - 2y' + y = \cos x$

$\tilde{y}_2(x) = k_2 \cos x + k_3 \sin x$

$\tilde{y}_2'(x) = -k_2 \sin x + k_3 \cos x$

$\tilde{y}_2''(x) = -k_2 \cos x - k_3 \sin x$

$-\cancel{k_2 \cos x} - \cancel{k_3 \sin x} + 2k_2 \sin x - 2k_3 \cos x + \cancel{k_2 \cos x} + \cancel{k_3 \sin x} = \cos x$

$-2k_3 \cos x + 2k_2 \sin x = \cos x$, da cui

$k_2 = 0$ e $k_3 = -\frac{1}{2}$

Quindi $\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{2}\sin x$

Una soluzione particolare di $(*)$ è dunque $\tilde{y}(x) = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\sin x$ e

l'integrale generale di $(*)$ è dato da $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + \tilde{y}(x)$

Cerchiamo la soluzione del problema di Cauchy:

$y(0) = 0 \iff c_1 = 0$; con $c_1 = 0$ la derivata di $y(x)$ è:

$y'(x) = c_2 e^x + c_2 x e^x + x e^x + \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\cos x$

$y'(0) = c_2 - \frac{1}{2}$; deve essere quindi $c_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

4) Dare la definizione di curva rettificabile e di ascissa curvilinea

Dimostrare che ogni curva regolare può

essere parametrizzata rispetto all'ascissa curvilinea e con tale parametrizzazione

il vettore velocità ha norma costante uguale a 1.

Si vedano la definizione 12.9 e il paragrafo sull'ascissa curvilinea a p. 366 del manuale consigliato