1)-a) Determinare in forma cartesiana, le radici quadrate del numero complesso

$$16\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Il numero assegnato è in forma esponenziale. Possiamo ricavare le sue due radici quadrate in forma esponenziale e poi determinarne la forma cartesiana

$$z_1 = \sqrt{16}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = 4\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_2 = \sqrt{16}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{2}\right)} = 4\, e^{i\frac{5}{6}\pi} = 4\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

b) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\arccos x)$$

Stabilire inoltre che f è monotona specificando il tipo di monotonia. Determinarne poi l'immagine. Della funzione de

f è composta dalle funzioni $g(x) = \operatorname{arctg} x$ e $h(x) = \arccos x$

$f = g \circ h$. Poiché il dominio di h è l'intervallo $[-1,1]$ (e g è definita su $\mathbb{R}$) anche il dominio di f è $[-1,1]$

Poiché h è strett. decrescente e g è strett. crescente f è strett. decrescente. Essendo h e g continue, anche f è continua e la sua immagine è quindi l'intervallo $[f(1), f(-1)]$ cioè $[0, \operatorname{arctg}\pi]$

2) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

a) $\lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi)^2 + \sin(x)}{e^{x-\pi} - 1}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{artg}(x^2+x)}{x^2+x}$

Si consideri poi la funzione $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2+x}$ e si mostri che è definitivamente strettamente decrescente per $x \to +\infty$

a) posto $x - \pi = y$ il limite assegnato è uguale

a $\lim_{y \to 0} \frac{y^2 + \sin(y+\pi)}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 - \sin y}{e^y - 1}$

$= \lim_{y\to 0} \sin y \left(\frac{y^2}{\sin y} - 1 \right) \Big/ e^y - 1$

$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \left(\frac{y^2}{\sin y} - 1 \right) \Big/ \frac{e^y - 1}{y}$

$= 1 \,(1 \cdot 0 - 1) \big/ 1 = -1$

b) $\left| \frac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2+x} \right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2+x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2+x} = 0$

Al fine di rispondere all'ultimo quesito, calcoliamo la derivata di f

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+(x^2+x)^2}(2x+1)(x^2+x) - \operatorname{arctg}(x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

Poiché il denominatore di f' è positivo per $x>0$ il segno di f' (per $x>0$) è uguale al segno del suo denominatore cioè al segno di

$(2x+1)\left(\frac{x^2+x}{1+(x^2+x)^2} - \operatorname{arctg}(x^2+x) \right)$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} (2x+1)\left(\frac{x^2+x}{1+(x^2+x)^2} - \operatorname{arctg}(x^2+x) \right)$

$= +\infty \left(0 - \frac{\pi}{2} \right) = -\infty$, per il teorema della permanenza del segno, f' è negativa in un intorno di $+\infty$, e di conseguenza f è strettamente decrescente nello stesso intorno, che era quello che si voleva mostrare.

3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x + 1}\, dx$$

Posto $\sin x = t$, per sostituzione l'integrale diviene $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+t+1}\, dt = \int \frac{1}{t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\, dt$

$$= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dt$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\, \operatorname{artg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{artg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

4) Dare la definizione di punto di minimo relativo per una funzione reale di variabile reale.
Enunciare poi il teorema di Fermat e dimostrarlo nel caso di un punto di minimo relativo.

Si veda, ad esempio, il manuale consigliato "Elementi di Analisi Matematica 1" di P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori 2002, pagg. 141, 142