1-a) Determinare la forma cartesiana del numero complesso

$z=(2i-2)^4$

$$z = 2^4 (i-1)^4 = 2^4\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^4 = 2^6 e^{3\pi i} = 2^6(-1) = -2^6$$

1)-b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2^{\sqrt{x-1}}+1}.$$

$\operatorname{dom} f = \{x\in\mathbb{R} : x-1\geq 0\} = [1,+\infty);$

f è composta da $x\in[1,+\infty) \longmapsto \sqrt{x-1}+1 \longmapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x-1}+1}$

quindi è strettamente decrescente, $\operatorname{im}(f) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ f(1)\right] = \left(0,\frac{1}{2}\right]$

2) Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0=2\pi$. Stabilire che $x_0=2\pi$ è un punto di massimo per f.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f\in C^0(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ quindi gli eventuali asintoti sono

da cercare in 0 e in $+\infty$ e $-\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\text{th. Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$: Non ci sono asintoti verticali in 0

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\left|\frac{\cos x - 1}{x^2}\right| \leq \frac{2}{x^2} \to 0$ quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

analogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Dunque la retta $y=0$ è asintoto orizzontale

sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$.

Retta tangente: $y = f(2\pi) + f'(2\pi)(x-2\pi)$

$f(2\pi) = \frac{1-1}{(2\pi)^2} = 0$

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)\, x^2 - (\cos x - 1) 2x}{x^4} = -\frac{\sin x \cdot x + 2(1-\cos x)}{x^3}$$

$f'(2\pi) = 0$; quindi la retta tangente ha equazione $y = 0$

2π è un punto di massimo (assoluto) per f in quanto $f(x) \leq 0 \ \forall x \in \operatorname{dom} f$
Allo stesso risultato si può arrivare calcolando la derivata seconda
e osservando che $f''(2\pi) < 0$:

$$f''(x) = -\frac{(\cos x \cdot x + \sin x + 2\sin x)\, x^3 - (\sin x \cdot x + 2(1-\cos x))\, 3x^2}{x^6}$$

$$f''(2\pi) = -\frac{2\pi \cdot (2\pi)^3}{(2\pi)^6} = -\frac{1}{4\pi^2} \quad \text{che è negativo}$$

3) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x \cdot \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1}$$

Calcolare poi la media integrale di f sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Posto $t = \cos x$, otteniamo:

$$-\int \frac{t}{t^2+2t+1}\, dt = -\int \frac{t}{(t+1)^2}\, dt = -\int \frac{t+1-1}{(t+1)^2}\, dt = -\int \frac{1}{t+1}\, dt + \int \frac{1}{(t+1)^2}\, dt$$

$$= -\log|t+1| - \frac{1}{t+1} + c \text{ ; quindi}$$

$$\int \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1}\, dx = -\log|\cos x + 1| - \frac{1}{\cos x + 1} + c$$

media integrale : $$\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1}\, dx = -\frac{4}{\pi} \left(\log|\cos x + 1| + \frac{1}{\cos x + 1} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{4}{\pi} \left(\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} - \log 2 - \frac{1}{2} \right)$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema dei carabinieri per il limite di una funzione

Siano $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cap D(X)$. Supponiamo che $\exists U \in \mathcal{I}(x_0)$
tale che $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ e che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0} g(x)$
con $\ell \in \mathbb{R}$ allora $\exists \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

Dobbiamo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_1 \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c $\forall x \in U_1 \cap X \setminus \{x_0\}$: $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

Sia quindi $\varepsilon > 0$. Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0} g(x)$, esistono $U_2 \in \mathcal{I}(x_0)$ e $U_3 \in \mathcal{I}(x_0)$ tali che $\forall x \in U_2 \cap X \setminus \{x_0\}$: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ e $\forall x \in U_3 \cap X \setminus \{x_0\}$: $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$.

Sia quindi $U_1 = U \cap U_2 \cap U_3$. Essendo intersezione di tre intorni di x_0, U_1 è un intorno di x_0; inoltre $\forall x \in U_1 \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \varepsilon,$$

come volevasi dimostrare.