1) - a)
Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\pi^2}{4\pi^n}$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\pi^2}{4\pi^n} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\pi^n} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{n-3}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^k} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\frac{\pi-1}{\pi}} = \frac{1}{4(\pi-1)}$$

1)- b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+(-1)^n \log(n^2+1)}{2n^{5/2}-1}$$

$$\frac{n+(-1)^n \log(n^2+1)}{2n^{5/2}-1} = \frac{n\left(1+(-1)^n \frac{\log(n^2+1)}{n}\right)}{n^{5/2}\left(2-\frac{1}{n^{5/2}}\right)} \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n^{3/2}} \in \mathbb{R}$ anche la serie assegnata converge

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2-y} \log(x-y^2+2)$$

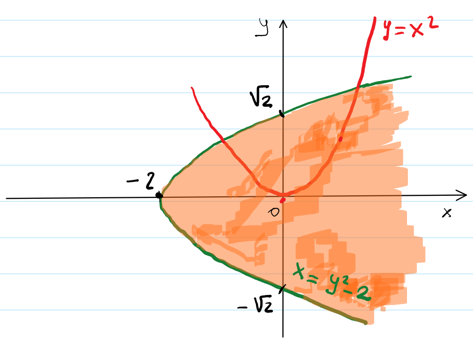
e rappresentarlo nel piano. Dire se è un insieme limitato, aperto, connesso.
Stabilire, inoltre, che non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

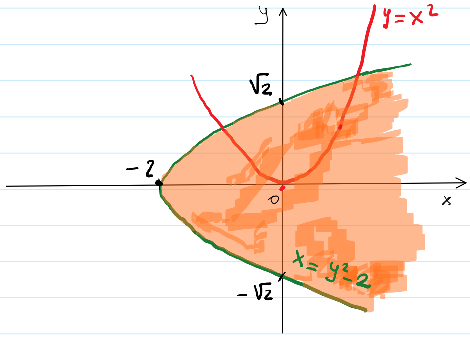
Stabilire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0,f(1,0))$

e determinarne l'equazione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

dove v è il versore associato al vettore $w=(-1,-1)$

dom f : $\begin{cases} x-y^2+2>0 \\ x^2-y \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > y^2-2 \\ y \neq x^2 \end{cases}$





Il dominio di f è dunque dato dall'insieme colorato in figura

I punti delle parabole $y=x^2$ e $x=y^2-2$ non appartengono ad esso.

È un insieme illimitato, aperto, non è connesso

$(0,0) \in D(\text{dom} f)$. Valutiamo f lungo le rette del fascio

proprio di centro $(0,0)$: $y = mx$

$$f(x,mx) = \frac{x^2+mx}{x^2-mx} \log(x-m^2x^2+2)$$

$$= \frac{x+m}{x-m} \log(x-m^2x+2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+m}{x-m} \log(x-m^2x+2) = -\log 2, \quad \forall m \neq 0$$

Se $m=0$, cioè $y=0$ otteniamo $f(x,0) = \frac{x^2}{x^2}\log(x+2) = \log(x+2)$

Poiché $\lim\limits_{x\to 0} \log(x+2) = \log(2) \neq -\log 2$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

Altra possibilità è quella di valutare

f lungo la parabola di equazione $y=-x^2$

(che è una curva passante per $(0,0)$ e contenuta nel dominio per x in un intorno di 0)

$$f(x,-x^2) = \frac{x^2-x^2}{x^2+x^2}\log(x-x^4+2) = 0$$

e quindi $\lim\limits_{x\to 0} f(x,-x^2) = 0$

Poiché il limite lungo la parabola di equazione $y=-x^2$ è

diverso dal limite lungo le rette del fascio $y=mx$ il limite

di f in $(0,0)$ non esiste

f è una funzione derivabile con derivate continue su dom f

quindi è differenziabile in ogni punto del suo dominio

In particolare è differenziabile in $(1,0)$ e quindi esiste il

piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0,f(1,0))$

la sua equazione è

$$z = f(1,0) + \nabla f(1,0)\cdot(x-1, y) =$$

$$f(1,0) = \log 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2-y)-(x^2+y)2x}{(x^2-y)^2}\log(x-y^2+2) + \frac{x^2+y}{x^2-y}\frac{1}{x-y^2+2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{2-2}{1}\log 3 + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y+(x^2+y)}{(x^2-y)^2}\log(x-y^2+2) + \frac{x^2+y}{x^2-y}\frac{1}{x-y^2+2}(-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{1+1}{1}\log 3 + 0 = 2\log 3$$

Dunque l'equazione del piano tangente richiesto è

$$z = \log 3 + \left(\frac{1}{3}, 2\log 3\right)\cdot(x-1, y) = \log 3 + \frac{1}{3}(x-1) + 2\log 3\, y$$

Il versore associato a w è $\frac{w}{|w|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e dunque (dato che f è differenziabile in $(1,0)$)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{3}, 2\log 3\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{2}} - \sqrt{2}\log 3$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

La soluzione è

$$y(x) = e^{\int_1^x \frac{1}{s}ds}\left(1 + \int_1^x -\frac{1}{s^2} e^{-\int_1^s \frac{1}{z}dz} ds\right)$$

$$= e^{\log x}\left(1 + \int_1^x -\frac{1}{s^2} e^{-\log s} ds\right)$$

$$= x\left(1 + \int_1^x -\frac{1}{s^3} ds\right) = x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}\Big|_1^x\right) =$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \frac{x^2+1}{2x}$$

4) Dare la definizione sottoinsieme del piano misurabile e di area per un sottoinsieme misurabile. Dimostrare poi che il rettangoloide sotteso da una funzione continua su $[a,b]\subset\mathbb{R}$ è misurabile e che la sua area è uguale a $\int_a^b f(x)dx$

A è misurabile se $\mathbb{1}_A$ è integrabile. In tal caso

$|A| := \int \mathbb{1}_A$ (con $|A|$ indichiamo l'area di A)

A è misurabile se $\mathbb{1}_A$ è integrabile. In tal caso

$$|A| := \int_A \mathbb{1}_A \qquad (\text{con } |A| \text{ indichiamo l'area di } A)$$

Dato che f è continua, il suo grafico è un insieme misurabile del piano di misura nulla, quindi il rettangoloide R sotteso da f è misurabile in quanto ∂R è misurabile (∂R è unione del grafico di f e di tre segmenti) e $|\partial R| = 0$

Usando le formule di riduzione otteniamo

$$|R| = \int_R \mathbb{1}_R = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_a^b \left(f(x) - 0 \right) dx = \int_a^b f(x) \, dx$$