N° EXE - TRACCIA

1) - a) - A   Determinare parte reale e parte immaginaria di $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$, dove $k \in \mathbb{Z}$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Quindi $\operatorname{Re} z = \sqrt{2}$ e $\operatorname{Im} z = -\sqrt{2}$

1) - a) - B

Determinare parte reale e parte immaginaria di $z = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$$z = 1 - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 1 - e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1 - \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

quindi $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}$ e $\operatorname{Im} z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1) - b) - A)

Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}\,\sin x + \left(\frac{1}{2}\right)^{\log\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

$$\operatorname{dom} f : \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{\pi}{4} - x > 0 \end{cases} \quad \text{quindi } \operatorname{dom} f = \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ $y = \sin x$ è strettamente crescente e non negativa così come $y = \sqrt{x}$ quindi $y = \sqrt{x}\sin x$ è strett. crescente su tale intervallo in quanto prodotto di due funzioni non negative strett. crescenti

La funzione

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \longmapsto \frac{\pi}{4} - x \longmapsto \log\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \longmapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\log\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

è strettamente crescente in quanto composta di due funzioni strett. decrescenti e una strett. crescente. Infine f è strett. crescente poiché somma di funzioni strett. crescenti

Poiché $f \in C^0\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right)\right)$, $f\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x)\right) = \left[\frac{1}{2^{\log\frac{\pi}{4}}}, +\infty\right)$

1) - b) - B)

Determinare dominio, monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\operatorname{dom} f : \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - x^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff 0 \leq x \leq 1$$

la funzione $y = 1 - x^2$ è strett. decrescente su $[0, 1]$

quindi $y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ è strett. crescente su $[0,1]$ in quanto composto da funzioni strett. decrescenti; inoltre essa è non negativa così come $y = \sqrt{x}$ che è anche strett. crescente. Quindi f è strett. crescente in quanto prodotto di due funzioni nonnegative strett. crescenti

$f \in C^0([0,1])$ e quindi $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0, \arccos 0] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2) - A)   Determinare dominio e asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}$$

Determinare, poi, la miglior approssimazione lineare per f in 0

dom f: $\quad x+\sqrt{\frac{\pi}{2}} > 0 \iff x > -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$f \in C^0\left(\left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)\right)$ quindi dobbiamo solo stabilire se $x = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale a dx e se c'è asintoto orizzontale o obliquo per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\sqrt{\frac{\pi}{2}}^+} f(x)$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Usando l'Hopital, abbiamo,
$$\lim_{x \to -\sqrt{\frac{\pi}{2}}^+} \frac{-\sin(x^2)\, 2x}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}} = \lim_{x \to -\sqrt{\frac{\pi}{2}}^+} -4x\sin(x^2)\sqrt{x+\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 0$$

Non c'è dunque asintoto verticale

$$0 \le |f(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

quindi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$$f(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin(x^2)\,2x\sqrt{x+\sqrt{\frac{\pi}{2}}} - \cos(x^2)\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}}{x+\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{4x\left(x+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\sin(x^2) - \cos(x^2)}{2\left(x+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{3/2}}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/4}$$

Dunque la miglior approssimazione lineare per f in 0 è la funzione affine
$$x \mapsto f(0) + f'(0)\,x = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} x$$

2)-B) Determinare il dominio di f, i suoi asintoti e i suoi punti massimo locale ed, eventualmente, assoluto, dove f è la funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$$

dom f: $\begin{cases} 4-x^2 \ge 0 \\ x \ne \pm 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ x \ne \pm 1 \end{cases}$; quindi dom $f = [-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,2]$

$f \in C^0(\text{dom } f)$ e dunque dobbiamo solo stabilire se le rette $x=-1$ e $x=1$ sono asintoti verticali:

$$\lim_{x \to -1^\pm} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{0^\mp} = \mp\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{0^\pm} = \pm\infty$$

Pertanto $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali sia a dx che a sx per f.

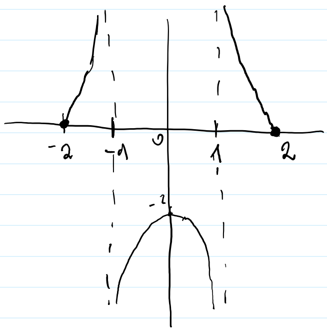
$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, 2x\,(x^2-1) - \sqrt{4-x^2}\, 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= -\frac{x(x^2-1) + (4-x^2)2x}{(x^2-1)^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x(x^2-1+8-2x^2)}{(x^2-1)^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-x(7-x^2)}{(x^2-1)^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$f'(x) > 0 \iff x < 0$, dato che $7-x^2>0$ su $[-2,2]$.

Dunque f è strett. crescente su $[-2,-1)$ e $(-1,0)$
e strett. decrescente su $(0,1)$ e $(1,2]$

Raccogliendo le informazioni che abbiamo su un grafico possiamo concludere che 0 è un punto di max locale forte



-2 e 2 sono punti di minimo locale forte.

Non ci sono punti di minimo o massimo assoluto.

3-A) Calcolare la media integrale sull'intervallo $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, della funzione

$$f(x) = \frac{x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 0}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \sqrt{2}\;\frac{1}{4}\left(\arcsin(x^2)\right)^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\pi^2}{36}$$

3)-B) Calcolare $\int_{-1}^{1} x^2 \sin(x^5)\,dx$ e $\int_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} x^2\cos(x^3)$

$f(x) = x^2\sin(x^5)$ è dispari quindi il primo integrale è nullo

$$\int_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} x^2\cos(x^3)\,dx = 2\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} x^2\cos(x^3)\,dx = \frac{2}{3}\sin(x^3)\Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} = \frac{2}{3}$$

4)-A) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

4)-A) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.
Fornire un esempio in cui la tesi del teorema non è valida
pur essendo la funzione nell'esempio derivabile su un intervallo
e avente un punto di estremo
Si veda, ad esempio, p. 195 del manuale di riferimento.

4)-B) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto e
e di migliore approssimazione lineare di una funzione in un punto
Dimostrare che le due nozioni sono equivalenti.
Si veda, ad esempio, p. 182 del manuale di riferimento.