venerdì 11 novembre 2022 08:30

1)-a) Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso

TRACCIA A :

$$\left(\frac{i e^{-\frac{\pi}{4} i}}{1+i} \right)^{10}$$

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ quindi $\dfrac{i e^{-\frac{\pi}{4}i}}{1+i} = \dfrac{i e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} = \dfrac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{2}i} = \dfrac{-i^2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

e quindi

$$\left(\frac{i e^{-\frac{\pi}{4} i}}{1+i} \right)^{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{10} = \frac{1}{2^5} \quad \text{cioè}$$

$$\mathrm{Re}\left[\left(\frac{i e^{-\frac{\pi}{4} i}}{1+i} \right)^{10} \right] = \frac{1}{2^5}; \quad \mathrm{Im}\left[\left(\frac{i e^{-\frac{\pi}{4} i}}{1+i} \right)^{10} \right] = 0$$

TRACCIA B

$$\left(\frac{i^3\, 2\, e^{-2+i\frac{\pi}{4}}}{1-i} \right)^5$$

$1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ e quindi

$$\frac{i^3\, 2\, e^{-2+i\frac{\pi}{4}}}{1-i} = \frac{-i\, 2}{\sqrt{2} e^2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = -i \frac{\sqrt{2}}{e^2} e^{i\frac{\pi}{2}} = -i^2 \frac{\sqrt{2}}{e^2} = \frac{\sqrt{2}}{e^2}$$

E dunque

$$\left(\frac{i^3\, 2\, e^{-2+i\frac{\pi}{4}}}{1-i} \right)^5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{e^2} \right)^5 = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{e^{10}} \quad \text{cioè}$$

$$\mathrm{Re}\left[\left(\frac{i^3\, 2\, e^{-2+i\frac{\pi}{4}}}{1-i} \right)^5 \right] = \frac{2^{5/2}}{e^{10}} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\left[\left(\frac{i^3\, 2\, e^{-2+i\frac{\pi}{4}}}{1-i} \right)^5 \right] = 0$$

1)-b) Determinare il dominio naturale della funzione

TRACCIA A

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\arcsin(x-1) \right)$$

TRACCIA B

$$\frac{1}{2^{\arccos(x+1)}}$$

Stabilire poi se f è iniettiva e continua sul suo dominio e determinarne l'immagine

TRACCIA A :

$$\mathrm{dom}\, f: \quad \begin{cases} x-1 \le 1 \\ x-1 \ge -1 \\ \arcsin(x-1) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 2 \\ x \ge 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad 1 < x \le 2$$

f è continua sul suo dominio essendo composta da funzioni continue

Se dimostriamo che f è strettamente monotona otteniamo anche che f è iniettiva. Essendo composta dalle funzioni
$y = x-1$, $y = \arcsin x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ f è strettamente decrescente.

$\operatorname{Im} f = \left[f(2), \lim_{x \to 1^+} f(x) \right) = \left[\log_{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}, +\infty \right)$

TRACCIA B:

dom f: $\begin{cases} x+1 \leq 1 \\ x+1 \geq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$

Quindi dom $f = [-2, 0]$

f è continua nel suo dominio essendo composta da funzioni continue.
Se dimostriamo che f è strettamente monotona otteniamo anche che f è iniettiva. Essendo composta dalle funzioni
$y = x+1$, $y = \arccos x$ e $y = \frac{1}{2^x}$ f è strettamente crescente.

$\operatorname{Im} f = [f(-2), f(0)] = \left[\frac{1}{2^\pi}, \frac{1}{2^0} \right] = \left[\frac{1}{2^\pi}, 1 \right]$

2) Stabilire che il polinomio

TRACCIA A

$p(x) = x^8 - \frac{1}{5} x^5 - 1$

ha solo due zeri reali.

TRACCIA B

$p(x) = -\frac{1}{2} x^5 + 3x^3 + 10$

ha solo tre zeri reali.

Si consideri poi la funzione $g(x) = 2^x$ (TRACCIA A) $g(x) = e^x$ (TRACCIA B)

Si calcolino: $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(g \circ p')(x) - 1}{p'(x)}$ (TRACCIA A); $\lim_{x \to 3} \frac{(g \circ p')(x) - 1}{p'(x)}$ (TRACCIA B)

e $\lim_{x \to 0} \frac{(g \circ p')(x) - 1}{x}$

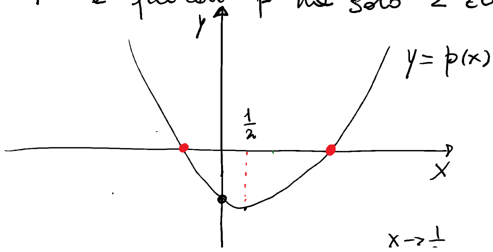
TRACCIA A:

$p'(x) = 8x^7 - x^4 = x^4 (8x^3 - 1)$

Studiamo il segno di $p'(x)$. Poiché $x^4 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, il segno di $p'(x)$ coincide con quello di $8x^3 - 1$ e quindi $p'(x) > 0$ su $\left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$ e $p'(x) < 0$ su $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$

quindi p è strett. decrescente su $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ($p'(x)$ si annulla solo in $x = 0$)
e strett. crescente su $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$p(0) = -1$ e quindi p ha solo 2 zeri reali



$x \to \frac{1}{}$

Poichè $p'(\frac{1}{2})=0$ e p' è continua $\left(p'(x) \xrightarrow{x\to\frac{1}{2}} 0\right)$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{g(p'(x))-1}{p'(x)} \quad \lim_{y\to 0} \frac{g(y)-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{2^y-1}{y} = \log 2$$

Anche $p'(0)=0$ e quindi per il Teorema di L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{(g\circ p')(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} (g\circ p')'(x) = \lim_{x\to 0} g'(p'(x))\cdot p''(x) = g'(0)\,p''(0)$$

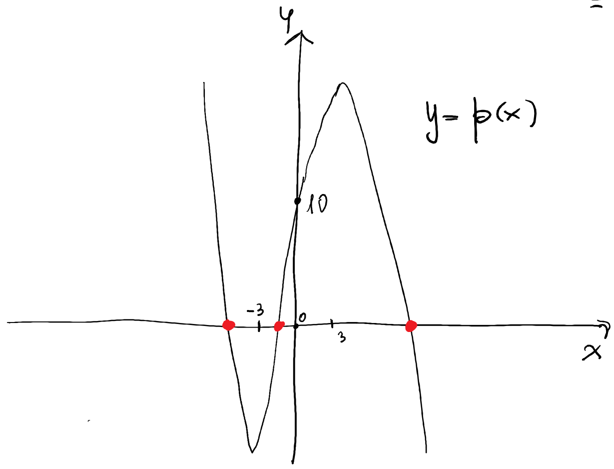
poichè $p''(x) = 56x^6-4x^3$, $p''(0)=0$ e quindi $\lim_{x\to 0} \frac{(g\circ p')(x)-1}{x} = g'(0)\,p''(0)=0$

TRACCIA B:

$$p'(x) = -x^4+9x^2 = x^2(9-x^2)$$

Poichè $x^2\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $p'(x)>0$ se e solo se $-3<x<3$
quindi p è strettamente crescente su $(-3,0)$ e $(0,3)$
strettamente decrescente su $(-\infty,-3)$ e $(3,+\infty)$

$p(0)=10$. $p(-3) = \frac{1}{5}3^5 - 3^4 + 10 = 3^4\left(\frac{3}{5}-1\right)+10$
$= -3^4\,\frac{2}{5}+10 = -\frac{162}{5}+10<0$



Quindi p ha minimo locale in -3 e il suo valore di minimo è negativo. Poichè $p(0) < p(3)$ e $p(0)=10$ è chiaro che $p(3)>0$ e quindi p ha tre zeri reali

Poichè $p'(3)=0$ e p' è continua $\left(p'(x) \xrightarrow{x\to 3} 0\right)$

$$\lim_{x\to 3} \frac{g(p'(x))-1}{p'(x)} \overset{y=p'(x)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{g(y)-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$$

Anche $p'(0)=0$ e quindi per il Teorema di L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{(g\circ p')(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} (g\circ p')'(x) = \lim_{x\to 0} g'(p'(x))\cdot p''(x) = g'(0)\,p''(0)$$

poichè $p''(x) = -4x^3+18x$, $p''(0)=0$ e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(g\circ p')(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} (g\circ p')'(x) = g'(0)\,p''(0) = 0$$

3) Calcolare

TRACCIA A $\int \frac{x^2-4}{x^2+2}\,dx$

TRACCIA B $\int \frac{1}{x\log^{3/2}x}\,dx$

TRACCIA A

$$\int \frac{x^2-4}{x^2+2}\,dx = \int 1\,dx - 6\int \frac{1}{x^2+2}\,dx =$$

$$= x - \frac{6}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$$= x - 3\sqrt{2}\int \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= x - 3\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

TRACCIA B

Posto $\log x = t$ $\quad dt = \frac{1}{x}\,dx$ quindi

$$\int \frac{1}{x\log^{3/2}x}\,dx = \int t^{-3/2}\,dt \quad , \ t = \log x$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\,t^{-\frac{3}{2}+1} = -2\,t^{-\frac{1}{2}} \ , \ t = \log x$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{\log x}} + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

4) TRACCIA A

Enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione della monotonia mediante il segno della derivata

TRACCIA B

Enunciare e dimostrare il teorema di Cauchy