Politecnico di Bari
CdL Ingegneria Informatica e Automazione
CdL Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni
AA 2016-2017

Complementi di Analisi Matematica
Tracce di esame (con svolgimenti)

Docente: Prof. E. Caponio

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica

Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2016/2017 I esonero 9 novembre 2016 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola____________________

1) Determinare l'insieme su cui le seguenti funzioni sono olomorfe

$$f(z) = iz\bar{z}, \quad g(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2+2}, \quad h(z) = \bar{z}, \quad l(z) = g(z) + h(z).$$

8 pts.

2) Sia $f(t)$ il segnale $t_+^3 e^{2t}$. Scrivere la trasformata di

$$f(t-1), \quad e^{it} f(t), \quad f(t/2),$$

specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definita.

6 pts.

3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & 0 \leq t \leq \pi \\ \sin(3t) & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

7 pts.

4) Calcolare la convoluzione dei segnali $f(t) = e^{2t} t_+$ e $g(t) = H(t-1)$. Determinare poi la sua trasformata di Laplace specificando per quali s è ben definita.

7 pts.

5) Stabilire se la serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-i)^n \log(n^2) z^n$$

converge in $z = 2e^{i\pi/13}$.

7 pts.

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica

Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2016/2017 I esonero 9 novembre 2016 Traccia B

Cognome________________________Nome________________________N° Matricola________________________

1) Determinare l'insieme su cui le seguenti funzioni sono olomorfe

$$f(z) = i|z|, \quad g(z) = \frac{e^{2z}}{z^2+3}, \quad h(z) = \bar{z}, \quad l(z) = g(z) - h(z).$$

8 pts.

2) Sia $f(t)$ il segnale $\sin_+(2t)e^{2t}$. Scrivere la trasformata di

$$f(t-1), \quad e^{it}f(t), \quad f(t/2),$$

specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definita.

6 pts.

3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} \sin(3t) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \cos(2t) & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

7 pts.

4) Calcolare la convoluzione dei segnali $f(t) = e^t \sin_+ t$ e $g(t) = H(t-2)$. Determinare poi la sua trasformata di Laplace specificando per quali s è ben definita.

7 pts.

5) Stabilire se la serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (i)^n \log(n-1) z^n$$

converge in $z = 2e^{i\pi/13}$.

7 pts.

1) Determinare l'insieme su cui le seguenti funzioni sono olomorfe

A) $f(z) = i\, z \cdot \bar{z}$ $\qquad g(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^2+2}$, $h(z) = \bar{z}$, $l(z) = g(z) + h(z)$

B) $f(z) = i\,|z|$ $\qquad g(z) = \dfrac{e^{2z}}{z^2+3}$ $\quad h(z) = \bar{z}$, $l(z) = g(z) - h(z)$

A) Poiché $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ f assume valori solo in $i\mathbb{R}$ cioè f ha solo parte immaginaria $v(z) = z\bar{z}$ mentre la sua parte reale u è nulla. Poiché u e v sono differenziabili è sufficiente determinare i punti su cui sono soddisfatte le relazioni di Cauchy-Riemann: Posto $z = x+iy$, $u(x,y) = 0 \wedge v(x,y) = x^2+y^2$

$u_x(z) = 0$, $u_y(z) = 0$, $v_x(z) = 2x$, $v_y(z) = 2y$.

Deve quindi essere

$\begin{cases} 0 = 2y \\ 0 = -2x \end{cases}$ da cui $x = 0 \wedge y = 0$. Dunque f è derivabile solo in 0

g è il rapporto delle funzioni e^{z^2} e z^2+2 che sono entrambe olomorfe su $\mathbb{C}$: la prima in quanto composta delle funzioni z^2 e e^z che sono olomorfe su $\mathbb{C}$, la seconda in quanto è un polinomio. Quindi g è olomorfa nel suo insieme di definizione cioè $\mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$

h non è derivabile in alcun punto dato che le relazioni di Cauchy-Riemann non sono soddisfatte in alcun punto

Anche l non è derivabile in alcun punto del suo dominio (che coincide con quello di g). Infatti se esistesse $\bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$ su cui l è derivabile allora $h(z) = l(z) - g(z)$ sarebbe anch'essa derivabile in $\bar{z}$ in quanto somma di funzioni derivabili. Sappiamo però che h non è derivabile in alcun punto.

B) È analoga ad A)

2) Sia $f(t)$ il seguente

A) $t_+^3\, e^{2t}$

B) $\sin_+(2t)\, e^{2t}$

Scrivere la trasformata di $f(t-1)$, $e^{it} f(t)$, $f\left(\frac{t}{2}\right)$ specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definita

A) Possiamo usare le formule per la trasformata di un segnale ritardato, "attenuato", ecc.

Poiché $\mathcal{L}(t_+^3 e^{2t})(s) = \dfrac{6}{(s-2)^4}$ $\forall s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} 2 = 2$

abbiamo che

$$\mathcal{L}(f(t-1))(s) = e^{-s}\mathcal{L}(f(t))(s) = e^{-s}\frac{6}{(s-2)^4} \quad ''$$

$$\mathcal{L}(e^{it} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-i) = \frac{6}{(s-i-2)^4} \quad ''$$

$$\mathcal{L}\left(f\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)(s) = 2\,\mathcal{L}(f(t))(2s) = \frac{12}{(2s-2)^4} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{(s-1)^4},$$
$$\forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > \tfrac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

B) è analogo:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{2}{(s-2)^2+4}, \quad \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 2$$

$$\mathcal{L}(f(t-1))(s) = \frac{2e^{-s}}{(s-2)^2+4} \quad ''$$

$$\mathcal{L}(f(t)e^{it})(s) = \frac{2}{(s-i-2)^2+4} \quad ''$$

$$\mathcal{L}\left(f\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)(s) = 2\cdot\frac{2}{(2s-2)^2+4} = \frac{1}{(s-1)^2+1}, \ \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > \tfrac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

3) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

A) $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ \cos(2t) & \text{se } 0 \le t \le \pi \\ \sin(3t) & \text{se } t > \pi \end{cases}$$

B) $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ \sin 3t & \text{se } 0 \le t \le 2\pi \\ \cos(2t) & \text{se } t > 2\pi \end{cases}$$

A) $$f(t) = \cos_+(2t) - \cos_+(2(t-\pi)) - \sin_+(3(t-\pi))$$

quindi $$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+4} - \frac{e^{-\pi s}\,3}{s^2+9}, \ \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0$$

quindi $\mathcal{L}(f(t))(s) = \dfrac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\dfrac{s}{s^2+4} - \dfrac{e^{-\pi s}\,3}{s^2+9}$, $\forall s\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}s>0$

B) $f(t) = \sin_+(3t) - \sin_+(3(t-2\pi)) + \cos_+(2(t-2\pi))$

quindi $\mathcal{L}[f(t)](s) = \dfrac{3}{s^2+9} - e^{-2\pi s}\dfrac{3}{s^2+9} + e^{-2\pi s}\dfrac{s}{s^2+4}$, "

4) Calcolare la convoluzione dei segnali

A) $f(t) = e^{2t}t_+$ e $g(t) = H(t-1)$.

B) $f(t) = e^{t}\sin_+ t$ e $g(t) = H(t-2)$

Determinare poi la sua trasformata di Laplace specificando per quali s è ben definita

A) $$f*g\,(t) = \int_0^t H(\tau-1)\,e^{2(t-\tau)}(t-\tau)\,d\tau \quad \text{per } t\geq 0$$
(per $t<0$ $f*g(t)=0$)

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t\in[0,1] \\ \displaystyle\int_1^t e^{2(t-\tau)}(t-\tau)\,d\tau & \text{se } t>1 \end{cases}$$

$$\int_1^t e^{2(t-\tau)}(t-\tau)\,d\tau \overset{t-\tau=x}{=\!=} -\int_{t-1}^0 e^{2x}x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{2x}x\Big|_{t-1}^{0} + \frac{1}{2}\int_{t-1}^0 e^{2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2(t-1)}(t-1) + \frac{1}{4}\left(1-e^{2(t-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2(t-1)}\left[t-1-\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2(t-1)}\left(t-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

quindi $$f*g\,(t) = \left(\frac{1}{2}e^{2(t-1)}\left(t-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}\right)H(t-1)$$

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)](s) = \mathcal{L}(f(t))(s)\cdot\mathcal{L}(H(t-1))(s) =$$

$$= \frac{1}{(s-2)^2}\,\frac{1}{s}\,e^{-s}, \quad \forall s\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}s>2$$

dato che $\sigma(f)=2$ e $\sigma(H(t-1))=0$

B) Analogamente alla traccia A)

$f*g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<2 \end{cases}$

B) Analogamente alla traccia A)

$$f * g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ \int_2^t e^{t-\tau} \sin(t-\tau)\, d\tau & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_2^t e^{t-\tau} \sin(t-\tau)\, d\tau \overset{t-\tau = x}{=} -\int_{t-2}^0 e^x \sin x \, dx =$$

$$= e^x \cos x \Big|_{t-2}^0 - \int_{t-2}^0 e^x \cos x \, dx =$$

$$= 1 - e^{t-2} \cos(t-2) - e^x \sin x \Big|_{t-2}^0 + \int_{t-2}^0 e^x \sin x \, dx$$

quindi $$-2 \int_{t-2}^0 e^x \sin x \, dx = 1 - e^{t-2} \cos(t-2) + e^{t-2} \sin(t-2)$$

da cui $$f * g(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{e^{t-2}}{2}\left(\sin(t-2) - \cos(t-2)\right)\right] H(t-2)$$

$$\mathcal{L}((f * g)(t))(s) = \mathcal{L}(e^t \sin t)(s)\, \mathcal{L}(H(t-2))(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1} \frac{e^{-2s}}{s}$$

$\forall s \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}\, s > 1$

5) Stabilire se la serie di potenze in $\mathbb{C}$

A) $$\sum_{n=3}^{+\infty} (-i)^n \log(n^2)\, z^n$$

B) $$\sum_{n=2}^{+\infty} (i)^n \log(n-1)\, z^n$$

Converge in $z = 2 e^{i\frac{\pi}{13}}$

A) Calcoliamo il raggio di convergenza

$$\sqrt[n]{|(-i)^n| \log(n^2)} = |-i| \sqrt[n]{2 \log n} = \sqrt[n]{2 \log n}$$

$$\lim_n (2 \log n)^{\frac{1}{n}} = \lim_n e^{\frac{1}{n} \log(2 \log n)} =$$

$$= \lim_n e^{\frac{\log 2}{n} + \frac{\log(\log n)}{n}} \quad (*)$$

Poiché $\frac{\log 2}{n} \to 0$ e $\frac{\log(\log n)}{n} = \frac{\log(\log n)}{\log n} \frac{\log n}{n} \to 0$

$(*) = e^0 = 1$ quindi $\rho = 1$

Dato che $\left| 2 e^{i\frac{\pi}{13}} \right| = 2 > 1$, la serie non converge in $\overline{Z}$

B) È analoga.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|i^{n+1}|}{|i^n|} \frac{|\log n|}{|\log(n-1)|} = \frac{|i|^{n+1}}{|i|^n} \frac{\log n}{\log(n-1)} = \frac{\log n}{\log(n-1)}$$

$$\lim_n \frac{\log n}{\log(n-1)} = \lim_n \frac{1}{n} \Big/ \frac{1}{n-1} = 1$$

La conclusione è la stessa di A)

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica

Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2016/2017 Appello 19 gennaio 2017 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola____________________

Programma: precedente AA 2014/2015 ☐ da AA 2014/2015 in poi ☐

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, l'esercizio 1) non è dovuto. Il punteggio dei rimanenti esercizi è aumentato di uno.

1) Calcolare la trasformata di Laplace della derivata della funzione $f(t) = \cos(\sqrt{2}t)e^{(2-i)t}$, specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definita.

6 pts.

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\cos(k\pi) - \sin\frac{1}{k}\right)(x-\pi)^k.$$

6 pts.

3) Dare la definizione del logaritmo di un numero complesso non nullo. Dare poi la definizione di selezione principale del logaritmo. Dimostrare, infine, che la selezione principale del logaritmo non è continua in tutti i punti della semiretta $r_0 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0,\ \mathrm{Im}(z) = 0\}$.

6 pts.

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\partial^+ Q} \frac{e^{1/(z+1)}}{(z+1)^2}\mathrm{d}z,$$

dove Q è il quadrilatero di vertici i, $-2+i$, $-2-i$, $-i$.

6 pts.

5) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale dell'algebra.

5 pts.

6) Calcolare la serie di soli seni della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0,2]$ e studiarne convergenza puntuale e uniforme sull'intervallo $[0,2]$.

7 pts.

Appello Complementi di Analisi Matematica

giovedì 19 gennaio 2017 14:30

1) Calcolare la trasformata di Laplace della derivata della funzione $f(t) = \cos(\sqrt{2}t)\, e^{(2-i)t}$ specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ è ben definita

Osserviamo che f è derivabile ed ha crescita esponenziale dato che
$|f(t)| = |\cos(\sqrt{2}t)| \cdot |e^{(2-i)t}| \leq e^{2t}$

Quindi f' è $\mathcal{L}$-trasformabile e $\forall s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > 2$
abbiamo che $\mathcal{L}(f')(s) = -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s) =$

$$= -1 + \frac{s(s-2+i)}{(s-2+i)^2 + 2}$$

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\cos(k\pi) - \sin\frac{1}{k}\right)(x-\pi)^k$$

Osserviamo che la successione di coefficienti $\{a_k\}$ non è a termini non-negativi dato che

$$k\left((-1)^k - \sin\frac{1}{k}\right) = \begin{cases} k\left(1 - \sin\frac{1}{k}\right) & \text{se } k \text{ è pari} \\ -k\left(1 + \sin\frac{1}{k}\right) & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k} \cdot \left|(-1)^k - \sin\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{k}} \longrightarrow 1 \cdot 1^0 = 1$$

Quindi $\rho = 1$. Dunque l'intervallo di convergenza è

$(\pi - 1, \pi + 1)$

Per $x = \pi + 1$ otteniamo la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left((-1)^k - \sin\frac{1}{k}\right)$ (*)

osserviamo che $k\left((-1)^k - \sin\frac{1}{k}\right)$ non ha limite per

$k \to +\infty$ dato che se $k = 2h$ $\displaystyle\lim_{h\to\infty} 2h\left(1 - \sin\frac{1}{2h}\right) = +\infty$

mentre per $k = 2h+1$ $\displaystyle\lim_{h\to+\infty} (2h+1)\left(-1 - \sin\frac{1}{(2h+1)}\right) = -\infty$

Dunque non converge

Analogamente per $x = \pi - 1$ otteniamo $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left((-1)^k + \sin\frac{1}{k}\right)(-1)^k$

$k\left((-1)^k + \sin\frac{1}{k}\right)(-1)^k \overset{\text{per } k=2h}{=} 2h\left(1 + \sin\frac{1}{\ldots}\right) \cdot 1 \longrightarrow +\infty$

Analogamente per $x = \pi - 1$ otteniamo $\sum_{k=1} k\left((-1)^k + \sin\frac{1}{k}\right)(-1)$

ma $k\left((-1)^k + \sin\frac{1}{k}\right)(-1)^k \overset{\text{per } k=2h}{=} 2h\left(1 + \sin\frac{1}{2h}\right)\cdot 1 \longrightarrow +\infty$

Dunque la successione $k\left((-1)^k + \sin\frac{1}{k}\right)(-1)^k$ non converge a 0

Dunque la serie assegnata converge puntualmente in $(\pi-1, \pi+1)$ e uniformemente in ogni intervallo $[a,b] \subset (\pi-1, \pi+1)$

3) Dare la definizione del logaritmo di un numero complesso $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dare poi la definizione di selezione principale del logaritmo. Dimostrare infine che la selezione principale del logaritmo non è continua in tutti i punti della semiretta $r_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \wedge \operatorname{Re} z < 0\}$

Si vedano pagg. 87, 89, 90 degli appunti

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\partial^+ Q} \frac{e^{\frac{1}{z+1}}}{(z+1)^2}\, dz$$

dove Q è il quadrilatero di vertici $i, -2+i, -2-i, -i$

Osserviamo che la funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z+1}}$ non è olomorfa in $\mathring{Q}$ (dato che $-1 \in \mathring{Q}$): non possiamo quindi applicare le formule di rappresentazione di Cauchy.

Sappiamo però che l'integrale assegnato è uguale a

$2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\frac{1}{z+1}}}{(z+1)^2}; -1\right)$ $\to g = g(z)$. Poiché -1 è una singolarità essenziale per g calcoliamo tale residuo usando il II teorema dei residui, quindi $-2\pi i \operatorname{Res}(g; \infty) = -2\pi i \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2}g\left(\frac{1}{z}\right); 0\right)$

$$-\frac{1}{z^2}\, g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{\frac{1}{\frac{1}{z}+1}}}{\left(\frac{1}{z}+1\right)^2}\cdot -\frac{1}{z^2} = -\frac{e^{\frac{z}{1+z}}}{\frac{(1+z)^2}{z^2}}\,\frac{1}{z^2} = -\frac{e^{\frac{z}{1+z}}}{(1+z)^2}$$

Poiché $\exists \lim_{z\to 0} -\frac{e^{z/1+z}}{(1+z)^2} = -1$, concludiamo che $-\frac{1}{z^2}\, g\left(\frac{1}{z}\right)$ ha una singolarità eliminabile in 0 e quindi

$\operatorname{Res}(g; \infty) = 0$

5) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra

Si vedano, ad esempio, pagg. 94-95 degli appunti

6) Scrivere la serie di soli seni della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0,2]$ e studiarne convergenza puntuale e uniforme sull'intervallo $[0,2]$

Detta g l'estensione dispari di f su $[-2,2]$

$$b_k = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} g(x)\sin\left(\frac{2\pi k x}{4}\right)dx =$$

$$= \int_0^2 x^2 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx = -\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)x^2\Big|_0^2 + \frac{4}{k\pi}\int_0^2 x\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$= -\frac{8}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{8}{k^2\pi^2}x\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 - \frac{8}{k^2\pi^2}\int_0^2 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

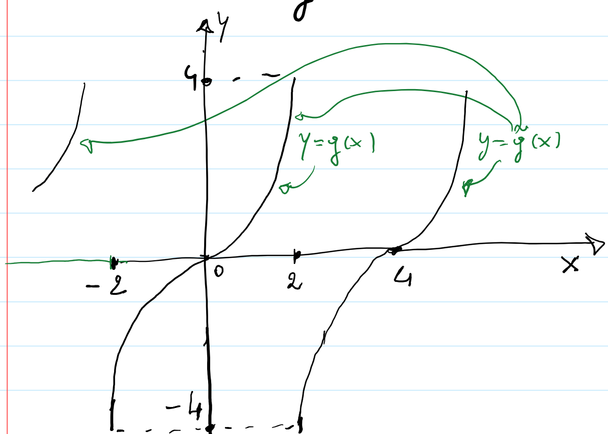
$$= -\frac{8}{k\pi}(-1)^k + 0 - \frac{16}{k^3\pi^3}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{8}{k\pi}(-1)^k - \frac{16}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k - 1\right]$$

Dunque la serie di soli seni di f è

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{8}{k\pi}(-1)^k - \frac{16}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k-1\right]\right)\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \qquad (*)$$

Detta $\tilde{g}$ l'estensione periodica a $\mathbb{R}$ di g con periodo 4, dato che $\tilde{g}$ è di classe C^1 su $[0,2)$, $(*)$ converge



uniformemente a $y=x^2$ su ogni intervallo chiuso e limitato del tipo $[0,a]$ con $a<2$ (quindi converge puntualmente su $[0,2)$)

Dato che $\exists \lim_{x\to 2^-} g'(x) = 4$

e $\exists \lim_{x\to -2^+} g'(x) = 4 = \lim_{x\to 2^+}\tilde{g}'(x)$

$(*)$ converge a $\dfrac{g(2_-)+\tilde{g}(2_+)}{2} = \dfrac{4-4}{2} = 0$

nel punto $x=2$

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica

Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2016/2017 II esonero – I chance 19 gennaio 2017 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola____________________

1) Dare la definizione di forma differenziale esatta e di forma differenziale chiusa. Dimostrare, poi, che la forma differenziale $\omega = \frac{4y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{4x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ è chiusa ma non è estta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

7 pts.

2) Quanto valgono i seguenti integrali? Motivare la risposta:

(a) $\displaystyle\int_{\partial^- Q} z^2 \mathrm{d}z,$ dove Q è il quadrato di vertici $0, 1, 1+i, i$;

(b) $\displaystyle i\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2e^{it})}{4e^{2it}}\mathrm{d}t.$

7 pts.

3) Quali sono i residui in 1 delle seguenti funzioni:

(a) $\displaystyle f(z) = \frac{\pi}{z-1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \cos z;$

(b) $\displaystyle g(z) = \frac{\pi}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \cos z;$

(c) $h(z) = (z-1)^4 e^{1/(z-1)}.$

6 pts.

4) Sia $\displaystyle f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^8}$. Dimostrare che $\mathrm{Res}(f; i) = -\mathrm{Res}(f; -i)$.

7 pts.

5) sapendo che $\displaystyle\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-4}{k\pi}\sin(k\pi x)$ è la serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0,2]$, calcolare $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^4\pi^4} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right)$. Quali fra le seguenti serie non sono sicuramente la serie di soli coseni di f? Motivare la risposta:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(1)} \cos(k\pi x/2);$

(b) $\displaystyle\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(2)} \cos(k\pi x);$

(c) $\displaystyle\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(3)} \cos(k\pi x/2).$

8 pts.

1) Dare la definizione di forma differenziale esatta e di forma differenziale chiusa

Dimostrare che la seguente forma differenziale ω è chiusa ma non è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\omega = \frac{4y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{4x}{x^2+y^2}\,dy$$

- Una forma differenziale $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ continua su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è esatta se $\exists\, f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$.
- $\omega \in C^1(\Omega)$ si dice chiusa se

$$\frac{\partial a}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial b}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

La forma differenziale assegnata è chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in quanto

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{4y}{x^2+y^2} = 4\,\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 4\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{4x}{x^2+y^2}\right) = -4\,\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 4\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Essa non è esatta dato che se γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1 orientata positivamente

$$\int_\gamma \omega = 4\int_0^{2\pi} (-\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,d\theta = -8\pi \neq 0$$

2) Quanto valgono i seguenti integrali

a) $\int_{\partial Q} z^2\,dz$, Q = quadrato di vertici $0, 1, 1+i, i$ b) $i\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2e^{it})}{4e^{2it}}\,dt$

Motivare la risposta

a) Essendo $f(z) = z^2$ una funzione olomorfa sul piano, per il teorema di Cauchy-Goursat, l'integrale è 0

b) L'integrale assegnato è uguale $\int_{\varphi^+(0,2)} \frac{\cos(z)}{z^3}\,dz$

e quindi per la II formula di rappresentazione di Cauchy è uguale a $\frac{2\pi i}{2} D^2 \cos z \big|_{z=0} = -\pi i \cos 0 = -\pi i$

3) Quali sono i residui in 1 delle seguenti funzioni

a) $f(z) = \frac{\pi}{\dots} + \frac{1}{(z+1)^2} + \cos z$

a) $f(z) = \dfrac{\pi}{z-1} + \dfrac{1}{(z+1)^2} + \cos z$

b) $g(z) = \dfrac{\pi}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{(z-1)} + \dfrac{1}{(z+1)^2} + \cos z$

c) $h(z) = (z-1)^4 e^{1/z-1}$

a) Poiché la funzione $f_1(z) = \dfrac{1}{z+1} + \cos z$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$

essa è uguale alla somma della sua serie di Taylor di centro 1 (su $D(1,2)$) : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$

Quindi $f(z) = \dfrac{\pi}{z-1} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$ e $\operatorname{Res}(f,1) = \pi$

b) Analogamente $g(z) = \dfrac{\pi}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{z-1} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}}{n!}(1)\,(z-1)^n$ e dunque

$\operatorname{Res}(f,1) = 1$

c) $h(z) = (z-1)^4 \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(z-1)^{4-k}$

$\operatorname{Res}(h,1)$ è il coefficiente di $\dfrac{1}{z-1}$. L'esponente $4-k$ è

uguale a -1 per $k=5$ quindi $\operatorname{Res}(h,1) = \dfrac{1}{5!}$

4) Sia $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)^8}$. Dimostrare che $\operatorname{Res}(f,i) = -\operatorname{Res}(f,-i)$

f non ha altre singolarità oltre i e $-i$. Per il II teorema dei

residui è sufficiente dimostrare che $\operatorname{Res}(f,\infty) = 0$

$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

$-\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{1}{z^2} \dfrac{\frac{1}{z}}{\left(\frac{1}{z^2}+1\right)^8} = -\dfrac{1}{z^3} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{z^{16}}(1+z^2)^8} = -\dfrac{z^{13}}{(1+z^2)^8}$

Poiché $\displaystyle\lim_{z \to 0} -\frac{z^{13}}{(1+z^2)^8} = 0$, $\operatorname{Res}(f,\infty) = 0$.

5) Sapendo che $\dfrac{4}{3} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \cos(k\pi x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{k\pi}\right) \sin(k\pi x)$ è la serie

di Fourier della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0,2]$,

calcolare $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^4\pi^4} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right)$

Quali fra le seguenti non sono sicuramente le serie di soli coseni di f? Motivare la risposta

(a) $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(1)} \cos\left(k\pi \frac{x}{2}\right)$; (b) $\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(2)} \cos(k\pi x)$; (c) $\frac{4}{3} + \sum a_k^{(3)} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$.

Dall'identità di Parseval

$$\frac{1}{2}\int_0^2 x^4\,dx = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{(k\pi)^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{k\pi}\right)^2 \quad \text{da cui}$$

$$\frac{16}{5} = \frac{16}{9} + 8\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^4\pi^4} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right)\right) \quad \text{cioè}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^4\pi^4} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{16}{5} - \frac{16}{9}\right) = \frac{8}{45}$$

La (a) non può essere in quanto manca $a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{4}{3}$

La (b) non può essere in quanto la serie di soli coseni di f è la serie di Fourier delle funzione x^2 su $[-2,2]$ (l'estensione pari di f è sempre la funzione $y = x^2$);
l'ampiezza dell'intervallo è 4 e quindi i polinomi trigonometrici che appaiono nella serie di soli coseni sono del tipo $\cos\left(\frac{2\pi}{4}kx\right)$ cioè $\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)$ e non $\cos(k\pi x)$

Politecnico di Bari
Complementi di Analisi Matematica
Laurea Ingegneria Informatica e Automazione
A.A. 2016/2017 Appello 14 febbraio 2017 Traccia A

Cognome____________________ Nome____________________ N° Matricola____________________

Programma: precedente AA 2014/2015 ☐ da AA 2014/2015 in poi ☐

1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di Laplace di un segnale periodico. Usarlo poi per calcolare la trasformata del segnale g periodico di periodo 2 ottenuto estendendo per periodicità la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ -1 & \text{se } t \in (1,2] \end{cases}$$

7 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Stabilire che la seguente serie di funzioni non converge totalmente su $(0,1]$ mentre converge totalmente su ogni intervallo $[a,1]$ con $a \in (0,1)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - \log(x^n)}{n^3+1}.$$

7 pts.

2) Enunciare e dimostrare almeno un teorema sul calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze in $\mathbb{C}$.

5 pts.

3) Dimostrare che

$$\int_{C^+(0,1)} \frac{\sin z + \cos z}{(z^2 - z(1-i))^2} \mathrm{d}z + \int_{E^-(i)} \frac{e^z}{(z^2 - z(1-i))^2} \mathrm{d}z = 0,$$

dove $C^+(0,1)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1 orientata positivamente e $E^-(i)$ è l'ellisse di centro i avente un asse, di lunghezza 2, parallelo all'asse dei reali e l'altro asse, di lunghezza 3, coincidente con l'asse degli immaginari puri.

6 pts.

4) Data $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, con $g,\ h \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, dimostrare che se h ha uno zero di molteplicità m in $z_0 \in \Omega$ e $g(z_0) \neq 0$ allora f ha un polo di ordine m in z_0. Dimostrare inoltre che, nel caso in cui $m = 1$, $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

5 pts.

5) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)t}{1+t^4} \mathrm{d}t.$$

6 pts.

6) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = e^{|x|}$, $x \in [-1,1]$. Dimostrare poi che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(e + (-1)^{k+1})}{k^2\pi^2 + 1} = 1.$$

7 pts.

1) Stabilire che la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - \log(x^n)}{n^3+1}$$

non converge totalmente su $(0,1]$, mentre converge totalmente su ogni intervallo $[a,1]$ con $a \in (0,1)$.

$$\frac{x^n - \log x^n}{n^3+1} = \frac{x^n - n\log x}{n^3+1} \geq 0 \quad \forall x \in (0,1]$$

Fissiamo n e consideriamo la funzione $f_n(x) = \dfrac{x^n - n\log x}{n^3+1}$

$$f_n'(x) = \frac{n x^{n-1} - n\frac{1}{x}}{n^3+1} = \frac{1}{x}\frac{1}{n^3+1}(n x^n - 1)$$

Poiché $\frac{1}{x}\frac{1}{n^3+1} > 0 \quad \forall x \in [0,1)$ e $n x^n - 1 \leq 0 \quad \forall x \in (0,1]$

$f_n'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0,1]$ dunque f_n è monotona decrescente su $(0,1]$. Poiché $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty \quad \forall n \geq 1$

$\sup_{x \in (0,1)} f_n(x) = +\infty$ e la serie assegnata non può convergere totalmente su $(0,1)$. Sull'intervallo $[a,1]$ abbiamo invece

$$\sup_{x \in [a,1]} f_n(x) = f_n(a) = \frac{a^n - n\log a}{n^3+1}$$

Studiamo la convergenza della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n - n\log a}{n^3+1}$ $(*)$

$-\frac{n\log a}{n^3+1} \sim -\frac{\log a}{n^2}$ dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n\log a}{n^3+1} \in \mathbb{R}$

$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^3+1}} = \frac{a}{\sqrt[n]{n^3+1}} \longrightarrow a < 1$ quindi anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^3+1} \in \mathbb{R}$

Pertanto $(*)$ converge e dunque la serie assegnata converge totalmente su $[a,1]$

1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di un segnale periodico. Usarlo poi per calcolare la trasformata del segnale periodico g di periodo 2 ottenuto estendendo per periodicità la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ -1 & \text{se } t \in (1,2] \end{cases}$$

Per il teorema si vedano, ad esempio, gli appunti sulla mia pagina web

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 f(t)\, e^{-st}\,dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 e^{-st}\,dt - \int_1^2 e^{-st}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1 + \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s}\right), \ \forall s \in \mathbb{C} \ \operatorname{Re} s > 0$$

2) Enunciare e dimostrare almeno un teorema sul calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze in $\mathbb{C}$

Si vedano, ad esempio, pagg. 37-38 degli appunti

3) Dimostrare che

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,1)} \frac{\sin z + \cos z}{(z^2 - z(1-i))^2}\,dz + \int_{\mathcal{E}^-(i)} \frac{e^z}{(z^2 - z(1-i))^2}\,dz = 0$$

dove $\mathcal{C}^+(0,1)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1 orientata positivamente ed $\mathcal{E}^-(i)$ è l'ellisse di centro i con un asse parallelo all'asse dei reali e lunghezza 2 e l'altro coincidente con l'asse degli immaginari puri di lunghezza 3, orientato negativamente

È sufficiente usare la seconda formula di rappresentazione di Cauchy. Infatti $(z^2 - z(1-i))^2 = z^2\,(z-(1-i))^2$ quindi posto

$$g(z) = \frac{\sin z + \cos z}{(z-1+i)^2} \quad \text{e} \quad h(z) = \frac{e^z}{(z-1+i)^2}$$ entrambe queste funzioni

sono olomorfe, rispettivamente, in $D(0,1)$ e all'interno del dominio avente per bordo $\mathcal{E}^+(i)$

quindi

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,1)} \frac{g(z)}{(z-1+i)^2}\,dz = 2\pi i\, g'(0)$$

$$g'(z) = \frac{(\cos z - \sin z)(z-1+i)^2 - 2(z-1+i)(\sin z + \cos z)}{(z-1+i)^4}$$

$$g'(0) = \frac{(-1+i)^2 - 2(-1+i)}{(-1+i)^4} = \frac{-1+i-2}{(-1+i)^3} = \frac{-3+i}{(-1+i)^3}$$

$$\int_{\mathcal{E}^-(i)} \frac{h(z)\,dz}{(z-1+i)^2} = -2\pi i\, h'(0)$$

$$h'(z) = \frac{e^z\,(z-1+i)^2 - 2(z-1+i)\,e^z}{(z-1+i)^4}$$

$$h'(0) = \frac{(-1+i)^2 - 2(-1+i)}{\ldots} = \frac{-3+i}{(\ldots)^3}$$

$$h'(0) = \frac{(-1+i)^2 - 2(-1+i)}{(-1+i)^4} = \frac{-3+i}{(-1+i)^3}$$

4) Data $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, con g e $h \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, dimostrare che se h ha uno zero di molteplicità m in $z_0 \in \Omega$ e $g(z_0) \neq 0$ allora f ha un polo di ordine m in z_0.
Dimostrare inoltre che nel caso in cui $m = 1$

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Si vedano ad esempio, pag 118 degli appunti, per la prima parte e pag 141 per la seconda parte

5) Usando il metodo dei residui calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \sin t}{1+t^4}\, dt \quad (*)$$

Osserviamo che $\left|\frac{t \sin t}{1+t^4}\right| \le \frac{|t|}{|1+t^4|} \sim \frac{1}{|t|^3}$ per $t \to \pm\infty$

quindi $\frac{t \sin t}{1+t^4}$ è integrabile su $\mathbb{R}$.

$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ quindi $(*) = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{it}}{1+t^4} - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{-it}}{1+t^4}$ $(**)$

$$-\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{-it}}{1+t^4}\, dt \overset{-t=u}{=} -\frac{1}{2i}\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{u e^{iu}}{1+u^4}\, du = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u e^{iu}}{1+u^4}\, du$$

quindi $(**) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{it}}{1+t^4}\, dt$ $(***)$

Sia $f(z) := \frac{z}{1+z^4}$ e $g(z) := f(z)\, e^{iz}$.

Poiché $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$, per il lemma di Jordan, otteniamo che $(***) = 2\pi \left(\operatorname{Res}\left(g, \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{Res}\left(g, -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ $(\square)$

Dato che $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono poli semplici per g, i loro residui sono uguali, rispettivamente, a

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}{4 e^{i\frac{3}{4}\pi}} \quad e \quad \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}\, e^{i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}{4 e^{i\frac{9}{4}\pi}}$$

Quindi $(\square) = \frac{\pi}{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} + e^{-i\frac{3}{2}\pi}\, e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

$$= \frac{\pi}{2}\, e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(-i e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}} + i e^{-i\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-i e^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + i e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}} - e^{-i\frac{1}{\sqrt{2}}}}{i} \right) = \pi e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin\frac{1}{\sqrt{2}}$$

6) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = e^{|x|}$, $x \in [-1,1]$
Dimostrare poi che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(e+(-1)^{k+1})}{k^2\pi^2+1} = 1$

Poiché f è pari $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{|x|}\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = e-1$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} e^{|x|}\cos\left(\frac{2\pi kx}{2}\right)dx = 2\int_0^1 e^x \cos(k\pi x) \quad (*)$$

$$(*) = \frac{2}{k\pi} e^x \sin(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 e^x \sin(k\pi x)\,dx$$

$$= 0 + \frac{2}{k^2\pi^2} e^x \cos(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1 e^x\cos(k\pi x)\,dx$$

quindi $\displaystyle\left(1+\frac{1}{k^2\pi^2}\right) 2\int_0^1 e^x\cos(k\pi x)\,dx = \frac{2}{k^2\pi^2}\left(e\cos(k\pi) - 1\right)$

cioè $\displaystyle a_k = \frac{2}{k^2\pi^2+1}\left(e(-1)^k - 1\right)$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$e-1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2\pi^2+1}\left(e(-1)^k - 1\right)\cos(k\pi x)$$

Per $x=1$ essa converge a $f(1)=e$ e quindi

$$e-1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k^2\pi^2+1}\left(e(-1)^k-1\right)(-1)^k = e$$

cioè $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k^2\pi^2+1}\left(e+(-1)^{k+1}\right) = 1$

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica

Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2016/2017 II esonero – II chance 14 febbraio 2017 Traccia A

Cognome_______________ Nome_______________ N° Matricola_______________

1) Stabilire se la seguente forma differenziale è esatta sul suo dominio

$$\omega(x,y) = \left(\arctan((xy)^2) + \frac{2x^2y^2}{1+x^4y^4}\right)\mathrm{d}x + \frac{2x^3y}{1+x^4y^4}\mathrm{d}y.$$

5 pts.

2) Calcolare i seguenti integrali:

(a) $\displaystyle\int_{C^+(i,3)} \frac{e^z}{(z+i)^3}\mathrm{d}z,$ dove $C^+(i,3)$ è la circonferenza di centro i e raggio 3 percorsa in senso antiorario

(b) $\displaystyle i\int_0^{2\pi} \frac{27e^{3it}}{(2i+3e^{it})^3}\mathrm{d}t.$

8 pts.

3) Determinare le singolarità al finito delle funzioni:

(a) $f(z) = \dfrac{z+\pi}{\sin z};$

(b) $g(z) = z^5\cos\left(\dfrac{1}{z^2}\right);$

specificando di che tipo esse siano e calcolandone il residuo.

8 pts.

4) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t.$$

7 pts.

5) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,\pi] \\ -1 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Determinare la serie di Fourier di f e studiarne converge puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$. Dimostrare poi che $\displaystyle\sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^h\frac{4}{(2h+1)\pi} = 1.$

8 pts.

1) Stabilire se la seguente forma differenziale è esatta sul suo dominio

$$\omega(x,y) = \left(\operatorname{artg}(xy)^2 + \frac{2x^2y^2}{1+x^4y^4}\right)dx + \frac{2x^3y}{1+x^4y^4}\,dy$$

Il dominio di ω è $\mathbb{R}^2$. ω è di classe C^∞ su tale insieme

ω è chiusa su $\mathbb{R}^2$ cioè $\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{artg}(xy)^2 + \frac{2x^2y^2}{1+x^4y^4}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^3y}{1+x^4y^4}\right)$ fare conto!

Poiché $\mathbb{R}^2$ è stellato ω è esatta

2) Calcolare

(a) $\displaystyle\int_{\mathscr{C}^+(i,3)} \frac{e^z}{(z+i)^3}\,dz$, dove $\mathscr{C}^+(i,3)$ è la circonferenza di centro i e raggio 3 orientata nel verso positivo

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{27e^{3it}}{(2i+3e^{it})^3}\,dt$

(a): dalla II formula di rappresentazione di Cauchy, prendendo $g(z) = e^z$ e osservando che $-i \in D(i,3)$ otteniamo $\displaystyle\int_{\mathscr{C}^+(i,3)} \frac{e^z}{(z+i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2}\, g''(-i) = \pi i\, e^{-i}$

(b) osserviamo che l'integrale assegnato è uguale (per definizione di integrale di una funzione complessa di variabile complessa) a:

$\displaystyle\int_{\mathscr{C}^+(i,3)} \frac{(z-i)^2}{(z+i)^3}\,dz$, infatti la circonferenza $\mathscr{C}^+(i,3)$ ha rappresentazione parametrica $\gamma(t) = i + 3e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

quindi

$$\int_{\mathscr{C}^+(i,3)} \frac{(z-i)^2}{(z+i)^3} = \int_0^{2\pi} \frac{9e^{2it}\cdot 3i\,e^{it}}{(2i+3e^{it})^3}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{27e^{3it}}{(2i+3e^{it})^3}\,dt$$

Possiamo quindi calcolare $\displaystyle\int_{\mathscr{C}^+(i,3)} \frac{(z-i)^2}{(z+i)^3}\,dt$ usando la II formula di rappresentazione di Cauchy, come per l'esercizio (a). Questa volta $g(z) = (z-i)^2$ quindi

$$\int \frac{(z-i)^2}{(z+i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2}\, g''(-i) = 2\pi i$$

$$\int_{\mathcal{C}^+(i,3)} \frac{(z-i)^2}{(z+i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2}\, g''(-i) = 2\pi i$$

3) Determinare le singolarità al finito delle funzioni

(a) $f(z) = \dfrac{z+\pi}{\sin z}$ (b) $f(z) = z^5 \cos\dfrac{1}{z^2}$

specificando di che tipo esse siano e calcolandone il residuo

(a) f è olomorfa in $\mathbb{C}$ tranne che nei punti z per cui $\sin z = 0$

Sappiamo che $\sin z = 0 \iff z = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Dunque le singolarità di f sono $\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$

Poiché $D\sin z = \cos z$ e $\cos(k\pi) = (-1)^k$ abbiamo

che $k\pi$ è un polo di ordine 1 $\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$

Per $k=-1$ cioè in $z=-\pi$ si annulla anche la funzione al numeratore. Cerchiamo di stabilire che tipo di singolarità è $-\pi$.

Dato che $\sin z = \underbrace{\sin(-\pi)}_{=0} - 1\,(z+\pi) + \frac{1}{6}(z+\pi)^3 + o((z+\pi)^4)$

abbiamo $\dfrac{z+\pi}{\sin z} = \dfrac{z+\pi}{-(z+\pi)+\frac{1}{6}(z+\pi)^3+o((z+\pi)^4)} =$

$$= \frac{z+\pi}{(z+\pi)\left(-1+\frac{1}{6}(z+\pi)^2+\frac{o((z+\pi)^4)}{(z+\pi)}\right)} \xrightarrow{z\to-\pi} -1$$

Quindi $-\pi$ è una singolarità eliminabile e $\mathrm{Res}(f,-\pi)=0$

Per $k\neq -1$ $\mathrm{Res}(f,k\pi) = \lim\limits_{z\to k\pi}(z-k\pi)\,f(z) =$

$$= \lim_{z\to k\pi} \frac{z+\pi\,|_{z=k\pi}}{\cos(k\pi)} = \frac{k\pi+\pi}{(-1)^k} = (-1)^k\pi(k+1)$$

(b) L'unica singolarità è 0. Poiché $\cos z = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}$, $\forall z\in\mathbb{C}$, per $z\neq0$ otteniamo:

$z^5\cos\dfrac{1}{z^2} = z^5\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\dfrac{1}{z^{2k}} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\dfrac{1}{z^{2k-5}}$ $(*)$. Quindi 0 è una singolarità essenziale e il residuo di f in 0 è uguale al coefficiente del termine $\frac{1}{z}$ in tale serie: $2k-5=1 \iff k=\frac{3}{2}$; dato che non esiste $k\in\mathbb{N}$ tale che $2k-5=1$, il coefficiente del termine $\frac{1}{z}$ in $(*)$ è 0 cioè $\mathrm{Res}(g,0)=0$

4) Usando il metodo dei residui calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)\, t^2}{1+t^4}\, dt$$

Osserviamo che $\left| \frac{\cos(2t)t^2}{1+t^4} \right| \leq \frac{t^2}{1+t^4} \sim \frac{1}{t^2}$ per $t \to +\infty$

quindi $\frac{\cos(2t)\, t^2}{1+t^4}$ è integrabile su $[0, +\infty)$; essendo una funzione pari,

l'integrale assegnato è uguale a $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)\, t^2}{1+t^4}\, dt$

Ricordando che $\cos(2t) = \frac{e^{i2t} + e^{-i2t}}{2}$, abbiamo

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)\, t^2}{1+t^4}\, dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2t} t^2}{1+t^4}\, dt + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i2t}\, t^2}{1+t^4}\, dt$$

Osserviamo che ponendo $-t = u$ il secondo integrale diviene

$$-\frac{1}{4}\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{i2u}\, u^2}{1+u^4}\, du = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2u}\, u^2}{1+u^4}\, du$$

per cui $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)\, t^2}{1+t^4}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2t} t^2}{1+t^4}\, dt$.

Consideriamo l'estensione olomorfa dell'integrando a $\mathbb{C}$

$g(z) = \frac{e^{i2z} z^2}{1+z^4}$. Sia $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. Osserviamo che

$\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$, per cui dal lemma di Jordan

$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma(R)} g(z)\, dz = 0$, dove $\gamma(R)$ è la semicirconferenza con

diametro sull'asse dei reali, centro 0, raggio R contenuta nel semipiano

$S = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$. La funzione g ha singolarità $\sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k}$, $k = 0, 1, 2, 3$

Tra queste, solo $e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ appartengono ad S. Per cui

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2t} t^2}{1+t^4}\, dt = \pi i \left(\operatorname{Res}\left(g, \underbrace{e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\frac{1}{\sqrt2} + i\frac{1}{\sqrt2}}\right) + \operatorname{Res}\left(g, \underbrace{e^{i\frac{3\pi}{4}}}_{-\frac{1}{\sqrt2} + i\frac{1}{\sqrt2}}\right) \right)$$

$e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{3}{4}\pi}$ sono poli semplici

$$\operatorname{Res}(g, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{e^{i2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2} + i\frac{1}{\sqrt2}\right)}\, e^{2i\frac{\pi}{4}}}{4 e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{1}{4} e^{i\frac{2}{\sqrt2} - \frac{2}{\sqrt2}} e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{4\sqrt2} e^{i\sqrt2 - \sqrt2}(1-i)$$

$$\overline{} - \quad 4 \qquad\qquad 4\sqrt{2}$$
$$4\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$\mathrm{Res}\left(g, e^{i\frac{3}{4}\pi}\right) = \frac{e^{i\,2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\; e^{2i\frac{3}{4}\pi}}{4\, e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{1}{4}\, e^{-\frac{i2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}}\; e^{-\frac{3}{4}\pi i} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\, e^{-i\sqrt{2}-\sqrt{2}}\,(-1-i)$$

quindi $\pi i\left(\mathrm{Res}\left(g, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + \mathrm{Res}\left(g\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right) =$

$$= \frac{\pi i}{4\sqrt{2}}\, e^{-\sqrt{2}}\left(e^{i\sqrt{2}}(1-i) + e^{-i\sqrt{2}}(-1-i)\right)$$

$$= \frac{\pi i}{4\sqrt{2}}\, e^{-\sqrt{2}}\left(e^{i\sqrt{2}} - e^{-i\sqrt{2}} - i\, e^{i\sqrt{2}} + e^{-i\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{4\sqrt{2}}\, e^{-\sqrt{2}}\left(2i \sin\sqrt{2} - 2i\cos\sqrt{2}\right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\, e^{-\sqrt{2}}\left(\sin\sqrt{2} - \cos\sqrt{2}\right)$$

5) Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,\pi] \\ -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$

Determinare la serie di Fourier di f e studiarne convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$. Dimostrare poi che $\displaystyle\sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{4}{(2h+1)\pi} = 1$

f è una funzione dispari, per cui $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{k}\,\cos kx\,\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{k\pi}\left(\cos(k\pi) - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{(2h+1)\pi}\sin\left((2h+1)x\right)$$

Dato che f è continua e derivabile su ogni intervallo del tipo $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Tale serie converge puntualmente su $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a $\tilde{f}$ prolungamento periodico di f su $\mathbb{R}$ di periodo 2π. Poiché per $x = k\pi$

$\sin((2h+1)k\pi) = 0$ abbiamo che essa converge a 0 in tutti i punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In particolare per $x = \frac{\pi}{2}$, dato che

$\sin\left((2h+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^h$, otteniamo

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h\, 4}{(2h+1)\pi} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica

Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2016/2017 Appello 21 aprile 2017 Traccia A

Cognome________________________Nome________________________N° Matricola________________________

Programma: precedente AA 2014/2015 ☐ da AA 2014/2015 in poi ☐

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale periodico f di periodo π definito da

$$f(t) = \begin{cases} 2 & t \in (0, \pi/4] \\ 0 & t \in (\pi/4, \pi/2) \\ \sin(4t) & t \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

6 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Calcolare per serie il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{1}{4}} x^3 \sin(x^3) \mathrm{d}x.$$

6 pts.

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k-2} \left(x + \frac{1}{3} \right)^k.$$

6 pts.

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{C^+(4,2)} \frac{\mathrm{Log}_0 z}{\big(z - (4+i)\big)^4} \mathrm{d}z,$$

dove $C^+(4,2)$ è la circonferenza di centro 4 e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

6 pts.

4) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale dell'algebra

5 pts.

5) Dare la definizione di residuo in una singolarità isolata. Calcolare poi il residuo in 0 delle seguenti funzioni:

$$f(z) = z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + \cos z, \qquad g(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z - i}.$$

6 pts.

6) Determinare la serie di Fourier della funzione $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Dimostrare poi, usando tale serie, che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

7 pts.

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale periodico f di periodo π definito da

$$f(t) = \begin{cases} 2 & t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right] \\ 0 & t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(4t) & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} f(t)\, e^{-st}\, dt \quad \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0$$

Quindi

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2e^{-st} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(4t)\, e^{-st}\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(-\frac{2}{s} e^{-st} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(4t)\, e^{-st}\, dt \right)$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(4t)\, e^{-st}\, dt$:

se consideriamo la funzione $g(t) = \sin(4t)\, \chi_{\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]}$,

tale integrale è uguale a $\mathcal{L}(g)(s)$

$$g(t) = \sin_+\left(4\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) - \sin_+\left(4(t-\pi)\right)$$

quindi $\displaystyle \mathcal{L}(g)(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{4}{16+s^2} - e^{-\pi s} \frac{4}{16+s^2} = \frac{4\left(e^{-\frac{\pi}{2}s} - e^{-\pi s}\right)}{16+s^2}$

Pertanto

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(-\frac{2}{s} e^{-\frac{\pi}{4}s} + \frac{2}{s} + \frac{4\left(e^{-\frac{\pi}{2}s} - e^{-\pi s}\right)}{16+s^2} \right).$$

1) Calcolare per serie

$$\int_0^{\frac{1}{4}} x^3 \sin(x^3)\, dx$$

Poiché $\displaystyle \sin(x^3) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x^3)^{2k+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$x^3 \sin(x^3) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{6k+6}$$

Quindi

$$\int_0^{\frac{1}{4}} x^3 \sin(x^3)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^{\frac{1}{4}} x^{6(k+1)} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{6(k+1)+1} x^{6(k+1)+1} \Big|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{6(k+1)+1} \left(\frac{1}{2^2}\right)^{6(k+1)+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{6(k+1)+1} \frac{1}{2^{12(k+1)+2}}$$

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k-2} \left(x+\frac{1}{3}\right)^k$$

$$\lim_k \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_k \frac{1}{|3(k+1)-2|} |3k-2| =$$

$$\lim_k \frac{3k-2}{3(k+1)-2} = 1$$

Quindi $\rho = 1$ e l'intervallo di convergenza della serie è $\left(-\frac{1}{3}-1, -\frac{1}{3}+1\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Studiamo la convergenza della serie negli estremi di tale intervallo

Per $x = -\frac{4}{3}$ otteniamo la serie numerica:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k-2} (-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3k-2}$$

Poiché $\frac{1}{3k-2} \sim \frac{1}{3k}$, tale serie diverge

Per $x = \frac{2}{3}$ otteniamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k-2}$$ che è una serie a segni alterni

Poiché $\frac{1}{3k-2} \to 0$ e $\left\{\frac{1}{3k-2}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ è decrescente,

tale serie converge per il criterio di Leibniz.

In conclusione, la serie assegnata converge in $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$ e dunque, per il teorema di

Abel, converge uniformemente su $\left[a, \frac{2}{3}\right]$,

$\forall\ a \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\mathcal{C}^+(4,2)} \frac{\mathrm{Log}_0\, z}{(z-(4+i))^4}\, dz ,$$

dove $\mathcal{C}^+(4,2)$ è la circonferenza di centro 4 e raggio 2 orientata nel verso antiorario

Ricordiamo che la selezione principale del logaritmo $\mathrm{Log}_0\, z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus r_0$, dove $r_0 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z = 0 \wedge \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$

Poiché $D(4,2) \subset \mathbb{C} \setminus r_0$ e $4+i \in D(4,2)$ possiamo applicare la II formula di rappresentazione di Cauchy

Si osservi che non si possono invece applicare I e II teorema dei residui per calcolare l'integrale in quanto ∞ non è una singolarità isolata per $\mathrm{Log}_0 z / (z-(4+i))^4$ dato che non lo è per $\mathrm{Log}_0\, z$!!

$$D^{(3)}\, \mathrm{Log}_0\, z \,\Big|_{z=4+i} = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+(4,2)} \frac{\mathrm{Log}_0\, z}{(z-(4+i))^4}$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$D^{(3)}\, \mathrm{Log}_0\, z \,\Big|_{z=4+i} \cdot \frac{2\pi i}{3!}$$

$$D^{(3)}\, \mathrm{Log}_0\, z = \frac{2}{z^3} \quad \text{quindi}$$

. . .

$$D^{(3)} \operatorname{Log}_0 z \,\big|_{z=2+i} \cdot \frac{2\pi i}{3!} = \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{(4+i)^3}$$

4) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra

Si veda, ad esempio, pagg. 94-95 degli appunti

5) Dare la definizione di residuo in una singolarità isolata. Calcolare poi il residuo in 0 delle funzioni

a) $f(z) = z^5 \sin \frac{1}{z^2} + \cos z$

b) $g(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z-i)}$

Per la definizione si veda pag. 122 degli appunti

a) Tenendo presente che $\cos z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

e $$z^5 \sin \frac{1}{z^2} = z^5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k-3}},$$

abbiamo, sommando,

$$z^5 \sin \frac{1}{z^2} + \cos z = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k-3}}}_{1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}}_{2}$$

Questa è chiaramente una serie di Laurent di centro 0. Quindi il residuo in 0 di f è uguale al coefficiente del termine $1/z$ in tale serie. Dato che la serie 2 ha termini con potenze positive, questo è eventualmente presente solo nella serie 1. Lo è se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $4k-3 = 1$. Dato che per $k=1$ questa uguaglianza è soddisfatta otteniamo che $\operatorname{Res}(f,0) = \dfrac{-1}{3!} = -\dfrac{1}{6}$

b) Possiamo usare il II teorema dei residui:

$$\operatorname{Res}(g,0) = -\operatorname{Res}(g,\infty) - \operatorname{Res}(g,i)$$

$\operatorname{Res}(g,\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} g\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

$-\frac{1}{z^2} g\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{e^{z^2}}{\left(\frac{1}{z}-i\right)} = -\frac{e^{z^2}}{1-iz} \cdot \frac{1}{z}$

Questa funzione ha in 0 un polo semplice

quindi $\operatorname{Res}(g,\infty) = \lim_{z\to 0} -z \frac{e^{z^2}}{1-iz} \cdot \frac{1}{z} = -1$

Il punto i è anch'esso un polo semplice per g

Quindi $\operatorname{Res}(g,i) = \lim_{z\to i} (z-i) \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z-i)} = e^{-1}$.

Pertanto $\operatorname{Res}(g,0) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$

6) Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 2 & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$$

Usare tale serie per dimostrare che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 2\,dx = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{2}\right)dx = \int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx + 2\int_1^2 \cos(k\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{k\pi} x\sin(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi x)\,dx + \frac{2}{k\pi}\sin(k\pi x)\Big|_1^2$$

$$= 0 + \frac{1}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x)\Big|_0^1 + 0 = \frac{1}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\frac{2}{k^2\pi^2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{2}\right) = \int_0^1 x\sin(k\pi x)\,dx + 2\int_1^2 \sin(k\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{k\pi} x\cos(k\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos(k\pi x)\,dx - \frac{2}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{k\pi}(-1)^k + \frac{1}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$= -\frac{1}{k\pi}(-1)^k + 0 - \frac{2}{k\pi} + 2\frac{(-1)^k}{k\pi} =$$

$$= \frac{1}{\ldots}\left((-1)^k - 2\right) = \begin{cases} -\frac{1}{k\pi} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \ldots \end{cases}$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left((-1)^k - 2\right) = \begin{cases} -\frac{1}{k\pi} & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\frac{3}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier di f è data da

$$\frac{5}{4} + \sum_{h=0}^{+\infty} -\frac{2}{(2h+1)^2\pi^2} \cos((2h+1)\pi x) +$$
$$+ \sum_{h=0}^{+\infty} -\frac{1}{2h\pi} \sin(2h\pi x) + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{-3}{(2h+1)\pi} \sin((2h+1)\pi x)$$

Nel punto $x=1$ tale serie deve convergere a

$$\frac{f(1^-)+f(1^+)}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

cioè

$$\frac{5}{4} + \sum_{h=0}^{+\infty} -\frac{2}{(2h+1)^2\pi^2} \underbrace{\cos((2h+1)\pi)}_{=-1\ \forall h} + \sum_{h=0}^{+\infty} -\frac{1}{2h\pi} \underbrace{\sin(2h\pi)}_{=0\ \forall h}$$
$$+ \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{-3}{(2h+1)\pi} \underbrace{\sin((2h+1)\pi)}_{=0\ \forall h} = \frac{3}{2}$$

cioè

$$-\frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{(2h+1)^2\pi^2} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{1}{4} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{(2h+1)^2\pi^2} \quad \text{cioè} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(2h+1)^2}$$

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica

Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2016/2017 Appello 26 giugno 2017 Traccia A

Cognome____________________Nome____________________N° Matricola____________________

Programma: precedente AA 2014/2015 ☐ da AA 2014/2015 in poi ☐

1) Sia $f(t) = \sin^2_+(t-\pi)$, calcolare $f \star H$ dove H è la funzione di Heaviside.

6 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(t) = \cos\left(\frac{\pi n^2 t^2}{1+n^2t^2}\right).$$

6 pts.

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + n}{n^2+1}(x-1)^n.$$

7 pts.

3) Dare la definizione di integrale di una funzione f complessa di variabile complessa e continua, lungo una curva regolari a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Dimostrare poi che

$$\left| \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \ell(\gamma) \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t)|,$$

dove $\ell(\gamma)$ è la lunghezza della curva γ.

5 pts.

4) Dare la definizione di singolarità eliminabile. Dimostrare poi che se $f \in H(D'(z_0,\delta))$ ed esiste $L \geq 0$ tale che $|f(z)| \leq L$, per ogni $z \in D'(z_0,\delta)$, allora z_0 è una singolarità eliminabile per f.

5 pts.

5) Calcolare

$$\int_{\partial^+ Q} \frac{z^2 e^{1/z^2}}{z^3+z},$$

6 pts.

dove Q è il quadrato di vertici $2(1+i)$, $2(i-1)$, $-2(1+i)$, $2(1-i)$.

6) Determinare la serie di soli coseni della funzione $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ x^2 & x \in (1,2] \end{cases}$$

Dimostrare poi, usando tale serie, che

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^h 2 - 1}{h^2\pi^2} = -\frac{1}{3}.$$

7 pts.

1) Sia $f(t) = \sin_+^2(t-\pi)$. Calcolare $f*H$, dove H è la funzione di Heaviside.

Sappiamo che $f*H$ è il segnale che per $t>0$ è dato da

$$(f*H)(t) = \int_0^t f(\tau)H(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\,d\tau = $$
$$= \int_0^t \sin_+^2(\tau-\pi)\,d\tau$$

Ora se $t\in[0,\pi]$: $\sin_+^2(\tau-\pi) = 0$ $\forall \tau\in[0,t]$ e quindi

$(f*H)(t) = 0$ $\forall t\in[0,\pi]$

Se $t>\pi$: $\sin_+^2(\tau-\pi) = \sin^2(\tau-\pi) = \sin^2(\tau)$ $\forall\tau>\pi$

e $\sin_+^2(\tau-\pi) = 0$ $\forall \tau\in[0,\pi]$ quindi

$$(f*H)(t) = \int_0^t \sin_+^2(\tau-\pi) = \int_\pi^t \sin^2(\tau)\,d\tau =$$

$$\int_\pi^t \sin^2(\tau)\,d\tau = -\sin\tau\cos\tau\Big|_\pi^t + \int_\pi^t \cos^2(\tau)\,d\tau =$$
$$= -\sin t\cos t + \int_\pi^t (1-\sin^2(\tau))\,d\tau$$
$$= -\sin t\cos t + t-\pi - \int_\pi^t \sin^2(\tau)\,d\tau \text{, cioè}$$
$$\int_\pi^t \sin^2(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}\left(\sin t\cos t - t+\pi\right)$$

In definitiva

$$(f*H)(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t\le\pi \\ -\frac{1}{2}(\sin t\cos t - t+\pi) & \text{se } t>\pi \end{cases}$$

1) Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \cos\left(\pi\frac{n^2x^2}{n^2x^2+1}\right)$$

Se $x=0$: $\dfrac{\pi n^2\cdot x^2}{n^2x^2+1} = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ quindi

$f_n(0) = \cos(0) = 1$ $\forall n$ e $\lim_n f_n(0) = 1$

Fissato $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, abbiamo che $\dfrac{n^2 \bar{x}^2}{n^2 \bar{x}^2 + 1} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$

quindi $\cos\left(\pi \dfrac{n^2 \bar{x}^2}{n^2 \bar{x}^2 + 1}\right) \to \cos(\pi) = -1$

Dunque f_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Poiché le funzioni f_n sono continue su $\mathbb{R}$ mentre il limite puntuale f ha una discontinuità in 0, f_n non converge a f uniformemente in quanto se per assurdo $f_n \to f$ unif. su $\mathbb{R}$ allora f sarebbe continua su $\mathbb{R}$; in particolare anche in 0.

2) Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + n}{n^2+1} (x-1)^n \qquad (*)$$

Calcoliamo il raggio di convergenza di $(*)$

$$\lim_n \frac{e^{n+1} + n+1}{(n+1)^2+1} \frac{n^2+1}{e^n+n} = \lim_n \frac{e\, e^n + n+1}{e^n+n} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = e \cdot 1 = e$$

quindi $\rho = \dfrac{1}{e}$

L'intervallo di convergenza di $(*)$ è $\left(1 - \frac{1}{e}, 1 + \frac{1}{e}\right)$

Studiamo la convergenza negli estremi di tale intervallo

Per $x = 1 - \frac{1}{e}$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + n}{n^2+1} (-1)^n \frac{1}{e^n} \qquad (\square)$$

che è a segni alterni. Osserviamo che

$$\frac{e^n + n}{e^n(n^2+1)} \xrightarrow{n} 0$$

Sia ora $f(x) = \dfrac{e^x + x}{e^x(x^2+1)}$

$$f'(x) = \frac{(e^x+1)(e^x(x^2+1)) - (e^x+x)(e^x(x^2+1) + 2xe^x)}{e^{2x}(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^{2x} - xe^x(x^2+1) - 2x^2e^x}{e^{2x}(x^2+1)^2}$$

$$= e^{2x}\left(-2x + \frac{x^2+1}{e^x} - \frac{x(x^2+1)}{e^x} - \frac{2x^2}{e^x}\right)$$

Poiché $-2x + \dfrac{x^2+1}{e^x} - \dfrac{x(x^2+1)}{e^x} - \dfrac{2x^2}{e^x} \longrightarrow -\infty$ per $x \to +\infty$

il numeratore di $f'(x)$ è definitivamente negativo

Quindi $\dfrac{e^n+n}{e^n(n^2+1)}$ è definitivamente monotona decrescente

e per il criterio di Leibniz, la serie $(\square)$ converge

Per $x = 1 + \frac{1}{e}$, otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n+n}{n^2+1} \cdot \frac{1}{e^n}$$

$$\frac{e^n+n}{e^n(n^2+1)} \sim \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Quindi converge (osserviamo anche che la stessa stima asintotica dà la convergenza in modulo di $(\square)$ e quindi potevamo dedurre che $(\square)$ converge senza usare il criterio di Leibniz).

In definitiva $(*)$ converge puntualmente su $\left[1-\frac{1}{e}, 1+\frac{1}{e}\right]$. Per il Teorema di Abel la convergenza è anche uniforme sullo stesso intervallo

3) Dare la definizione di integrale di una funzione continua $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lungo una curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ regolare a tratti.

Dimostrare poi che $\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \ell(\gamma)$

dove $\ell(\gamma)$ è lunghezza della curva γ.

Si veda, ad esempio, p. 64 degli appunti

4) Dare la definizione di singolarità eliminabile.

Dimostrare poi che se $f \in H(D'(z_0, \delta))$ ed $\exists L \geq 0$ t.c $|f(z)| \leq L$, $\forall z \in D'(z_0, \delta)$, allora z_0 è una singolarità eliminabile per f.

Si vedano p. 110 e p. 112 degli appunti

5) Calcolare

$$\int_{\partial^+ Q} \frac{z^2 e^{1/z^2}}{z^3 + z}\, dz \, , \qquad (*)$$

dove Q è il quadrato di vertici $2(1+i)$, $2(i-1)$, $-2(1+i)$, $2(1-i)$

Le singolarità della funzione $f(z) = \dfrac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}}{z^3 + z}$ sono 0 e $\pm i$ entrambe appartenenti a $\mathring{Q}$

Possiamo usare il I e il II teorema dei residui per calcolare $(*)$

$$(*) = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, i) + \mathrm{Res}(f, -i) \right) = -2\pi i \, \mathrm{Res}(f, \infty)$$

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^4} \frac{e^{z^2}}{\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z}} = -\frac{e^{z^2}}{1 + z^2} \frac{1}{z}$$

$$\lim_{z\to 0} -\frac{e^{z^2}}{1+z^2}\frac{1}{z}\cdot z = \lim_{z\to 0} \frac{-e^{z^2}}{1+z^2} = -1$$

Quindi 0 è un polo semplice per $-\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$

e $\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0\right) = -1$. Pertanto

$$(*) = -2\pi i\,(-1) = 2\pi i$$

6) Calcolare la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \\ x^2 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$

Dimostrare poi che $\displaystyle\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^h 2 - 1}{\pi^2 h^2} = -\frac{1}{3}$

Sia $\tilde{f} = \tilde{f}(x)$ l'estensione pari di f all'intervallo $[-2,2]$

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)\,dx = \frac{2}{4}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{6}(8-1) = \frac{7}{6}$$

$$a_K = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{2\pi}{4}kx\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx = \int_1^2 x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx$$

$$= x^2\frac{2}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\Big|_1^2 - \frac{4}{\pi k}\int_1^2 x\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)dx$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{8}{\pi^2 k^2}x\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\Big|_1^2 - \frac{8}{\pi^2 k^2}\int_1^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{16}{\pi^2 k^2}\cos(k\pi) - \frac{8}{\pi^2 k^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

$$- \frac{16}{\pi^3 k^3}\sin\left(\frac{\pi}{2}kx\right)\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{16}{\pi^2k^2}(-1)^k - \frac{8}{\pi^2k^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{16}{\pi^3k^3}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

Quindi la serie di soli coseni di f è data da

$\frac{7}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)$, dove gli a_k sono quelli calcolati sopra

Per $x = 1$ la serie converge a $\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

Quindi $\frac{7}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \frac{1}{2}$

Poiché $\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h \end{cases}$

Otteniamo

$$\sum_{h=1}^{+\infty} a_{2h}(-1)^h = \frac{1}{2} - \frac{7}{6} = -\frac{2}{3}$$

se k è pari ($k=2h$, con $h \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$)

$a_{2h} = \frac{16}{\pi^2(2h)^2} - \frac{8(-1)^h}{\pi^2(2h)^2}$ e quindi

$$\sum_{h=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi^2h^2} - \frac{(-1)^h 2}{\pi^2h^2}\right)(-1)^h = \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^h4 - 2}{\pi^2h^2} =$$

$$2\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^h2-1}{\pi^2h^2} = -\frac{2}{3} \quad \text{da cui} \quad \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^h2-1}{\pi^2h^2} = -\frac{1}{3}$$

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica

Laurea Ingegneria Informatica e Automazione

A.A. 2016/2017 Appello 10 luglio 2017 Traccia A

Cognome____________________ Nome____________________ N° Matricola____________________

Programma: precedente AA 2014/2015 ☐ da AA 2014/2015 in poi ☐

1) Calcolare la trasformata del segnale periodico di periodo π definito da

$$f(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, \pi/2] \\ \cos t & t \in (\pi/2, \pi] \end{cases}$$

6 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Calcolare per serie

$$\int_{1/2}^{1} \frac{e^{x^2}}{x^2} \mathrm{d}x.$$

6 pts.

2) Ricavare le relazioni che sussistono tra le derivate in z_0 della somma di una serie di potenze di centro z_0 e i coefficienti della serie stessa.

5 pts.

3) Calcolare

$$\int_{C^+(2i,1)} \frac{\mathrm{Log}_0(z^2)}{(z - \frac{3}{2}i)^2} \mathrm{d}z,$$

dove $C^+(2i, 1)$ è la circonferenza di centro $2i$ e raggio 1, orientata positivamente.

6 pts.

4) Dimostrare che la funzione $z \in \mathbb{C} \mapsto \sin z$ non è limitata.

5 pts.

5) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it} t}{1 + t^4} \mathrm{d}t.$$

7 pts.

6) Enunciare l'identità di Parseval. Usarla poi insieme alla funzione $f(x) = x$, $x \in [-1, 1]$, per dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7 pts.

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale periodico di periodo π definito da

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos t & \text{se } t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} f(t) e^{-st}\, dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st}\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\, e^{-st}\, dt \right) \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 0$$

Calcoliamo separatamente i due integrali

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{s}\left(e^{-s\pi/2} - 1\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\, e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{s} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \frac{1}{s} e^{-s\pi} + \frac{1}{s^2} \sin t\, e^{-st} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{s^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\, e^{-st}\, dt$$

Quindi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\, e^{-st}\, dt = \frac{s^2}{s^2+1} \left(\frac{1}{s} e^{-s\pi} - \frac{1}{s^2} e^{-\frac{s\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{s^2+1} \left(s e^{-s\pi} - e^{-\frac{s\pi}{2}} \right)$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare tenendo presente che

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\, e^{-st}\, dt = \mathcal{L}\left(-\sin_+\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos_+(t-\pi) \right)(s)$$

In definitiva la trasformata del segnale assegnato è

$$\frac{1}{1-e^{-\pi s}} \left(\frac{1}{s}\left(e^{-\frac{s\pi}{2}} - 1\right) + \frac{1}{s^2+1}\left(s e^{-s\pi} - e^{-\frac{s\pi}{2}} \right) \right)$$

1) Calcolare per serie

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{x^2}}{x^2}\, dx$$

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} \quad ; \quad \frac{e^{x^2}}{x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2(k-1)}}{k!}$$

Integrando termine a termine otteniamo

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{x^2}}{x^2}\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2(k-1)+1} \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}} \right)$$

2) Ricavare le relazioni che sussistono tra le derivate in z_0 della somma di una serie di potenze di centro z_0 e i coefficienti della serie stessa

Si veda, ad esempio, pagg. 47-48 degli appunti

3) Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}^+(2i,1)} \frac{\mathrm{Log}_0\, z^2}{\left(z-\frac{3}{2}i\right)^2}\,dz$$

dove $\mathcal{C}^+(2i,1)$ è la circonferenza di centro $2i$ e raggio 1 orientata nel verso antiorario

La determinazione principale del logaritmo è olomorfa nel disco $D(2i,1)$ e $\frac{3}{2}i \in D(2i,1)$. Possiamo quindi usare la II formula di rappresentazione di Cauchy ottenendo

$$\int_{\mathcal{C}^+(2i,1)} \frac{\mathrm{Log}_0\, z^2}{\left(z-\frac{3}{2}i\right)^2}\,dz = 2\pi i\, D\,\mathrm{Log}_0\, z^2 \Big|_{z=\frac{3}{2}i}$$

$$= 2\pi i \, \frac{2z}{z^2}\Big|_{z=\frac{3}{2}i} = \frac{4\pi i}{z}\Big|_{z=\frac{3}{2}i} = \frac{8\pi}{3}$$

4) Dimostrare che la funzione $z \in \mathbb{C} \mapsto \sin z$ non è limitata

Si veda, ad esempio, pag. 86 degli appunti

5) Usando il metodo dei residui calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it}\,\frac{t}{1+t^4}\,dt$$

Poiché $\left| e^{it}\frac{t}{1+t^4}\right| = \frac{|t|}{1+t^4} \sim \frac{1}{|t|^3}$ per $t \to \pm\infty$

la funzione assegnata è integrabile su $\mathbb{R}$

Consideriamo la sua estensione a $\mathbb{C}$

$f(t) = e^{iz}\,\frac{z}{1+z^4}$. Dato che $\lim_{|z|\to\infty} \frac{z}{1+z^4} = 0$, per il lemma di Jordan

$$\int_{\gamma(R)} e^{iz} \frac{z}{1+z^4}\, dz \xrightarrow{R\to+\infty} 0 \quad \text{dove } \gamma(R) \text{ è}$$

la semicirconferenza di centro 0 e raggio R
con diametro sull'asse dei reali

Quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}\,t}{1+t^4}\, dt = 2\pi i \left(\mathrm{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + \mathrm{Res}\left(f, e^{-\frac{3}{4}\pi}\right)\right)$

Entrambe le singolarità $e^{i\frac{\pi}{4}}$ ed $e^{i\frac{3}{4}\pi}$ sono poli semplici:

$$\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}} \left(z-e^{i\frac{\pi}{4}}\right) e^{iz}\frac{z}{1+z^4} = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{e^{iz}\,z}{\frac{1+z^4}{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}} =$$

$$= \frac{e^{ie^{i\frac{\pi}{4}}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{D(1+z^4)\big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}} = \frac{e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4\,e^{i\frac{3}{4}\pi}} =$$

$$= \frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}}\, i$$

analogamente

$$\lim_{z\to e^{i\frac{3}{4}\pi}} \left(z-e^{i\frac{3}{4}\pi}\right) \frac{e^{iz}\,z}{1+z^4} =$$

$$= \frac{e^{i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4\,e^{i\,9/4\pi}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2}}(-i)$$

Quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$-\frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\, i \left(e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\, 2i \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= i\pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

6) Enunciare l'identità di Parseval.
Usarla insieme con la funzione $f(x) = x$, $x \in [-1,1]$

per dimostrare che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Per l'enunciato si veda, ad esempio, p. 165 degli appunti.
Poichè la funzione assegnata è dispari, la sua serie di Fourier si riduce ad una serie di soli seni:

$$b_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} x \sin(k\pi x)\, dx = -\frac{x}{k\pi} \cos(k\pi x) \Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{k\pi} \int_{-1}^{1} \cos(k\pi x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{k\pi} \cos(k\pi) - \frac{1}{k\pi} \cos(-k\pi) + \frac{1}{(k\pi)^2} \sin(k\pi x) \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} \cos(k\pi) = -\frac{2}{k\pi} (-1)^k$$

Quindi $\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$ cioè

$$\frac{1}{6} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}$$ da cui

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$ ossia

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Politecnico di Bari

Complementi di Analisi Matematica
Laurea Ingegneria Informatica e Automazione
A.A. 2016/2017 Appello 6 ottobre 2017 Traccia A

Cognome__________________Nome__________________N° Matricola__________________

Programma: precedente AA 2014/2015 ☐ da AA 2014/2015 in poi ☐

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ \cos(\pi t) & t \in (1,+\infty) \end{cases}$$

Calcolare quindi la trasformata di $f \star H$, dove H è la funzione di Heaviside.

6 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Stabilire che la seguente serie di funzioni converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos^2(\pi x) - 2n}{n^{5/2} - n + 1}.$$

6 pts.

2) Dimostrare che se una serie di potenze di centro 0 converge in $\bar{z} \in \mathbb{C}$ allora converge in modulo su $D(0, |\bar{z}|)$.

5 pts.

3) Calcolare

$$\int_{C^+(i,1)} \frac{zi}{(z^2+1)^3} \mathrm{d}z,$$

dove $C^+(i,1)$ è la circonferenza di centro i e raggio 1, orientata positivamente.

6 pts.

4) Sia $f \in H(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{C}$. Dimostrare che uno zero è isolato per f se e solo se è di ordine finito.

5 pts.

5) Calcolare i residui in 0 per le funzioni

$$f(z) = \cos^2 z + \frac{\pi}{z} - \frac{1}{z^2};$$
$$g(z) = z^5 e^{1/z^2};$$
$$h(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z-1}.$$

7 pts.

6) Calcolare la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in (1,2] \end{cases}$$

estesa per periodicità con periodo 2 ad $\mathbb{R}$. Usando tale serie stabilire che

$$\frac{2}{3} + \sum_{h=1}^{+\infty} (-1)^h \frac{2}{h^2\pi^2} = \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{16}{(2h+1)^3\pi^3}.$$

7 pts.

Appello Complementi di Analisi Matematica

venerdì 6 ottobre 2017 14:30

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ \cos(\pi t) & \text{se } t \in (1,+\infty) \end{cases}$$

Calcolare quindi la trasformata di $f * H$ dove H è la funzione di Heaviside

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^1 e^{-st} + \int_1^{+\infty} \cos(\pi t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^1 - \mathcal{L}\left(\cos_+\left(\pi(t-1)\right)\right)(s)$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} - e^{-s} \frac{s}{s^2+\pi^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0$$

Quindi $\mathcal{L}(f * H)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(H)(s)$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2+\pi^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0$$

1) Stabilire che la seguente serie di funzioni converge uniformemente su $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos^2(\pi x) - 2n}{n^{5/2} - n + 1} \qquad (*)$$

$$\forall n \geq 2 \ ; \quad \left| \frac{\cos^2(\pi x) - 2n}{n^{5/2} - n + 1} \right| \leq \frac{1+2n}{n^{5/2} - n + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poiché $\dfrac{1+2n}{n^{5/2}-n+1} \sim \dfrac{2}{n^{3/2}}$ e $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}} \in \mathbb{R}$,

la $(*)$ converge totalmente e quindi uniformemente su $\mathbb{R}$

2) Dimostrare che se una serie di potenze di centro 0 converge in $\bar{z} \in \mathbb{C}$ allora converge in modulo su $D(0, |\bar{z}|)$

Si veda, ad esempio, pag. 34 degli appunti

3) Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}^+(i,1)} \frac{zi}{(z^2+1)^3} \, dz \,,$$ dove $\mathcal{C}^+(i,1)$ è la circonferenza di centro i e raggio 1

Poiché $z^2+1 = (z-i)(z+i)$ l'integrando è uguale a $\dfrac{zi}{(z+i)^3(z-i)^3}$. La funzione

$f(z) = \dfrac{zi}{(z+i)^3}$ è olomorfa su $D(i,1)$. Possiamo quindi usare la seconda formula di Cauchy ottenendo

$$\int_{\mathcal{C}^+(i,1)} \frac{f(z)}{(z-i)^3} \, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = \pi i \, f''(i)$$

$$f'(z) = \frac{i}{(z+i)^3} - 3zi\,(z+i)^{-4}$$

$$f''(z) = -3i\,(z+i)^{-4} - 3i\,(z+i)^{-4} + 12zi\,(z+i)^{-5}$$

$$f''(i) = -6i\,(2i)^{-4} - 12\,(2i)^{-5} = -\frac{6i}{16} + \frac{12i}{32} = 0$$

4) Sia $f \in H(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{C}$. Dimostrare che uno zero è isolato per f se e solo se è di ordine finito

Si veda, ad esempio, p. 79 degli appunti

si veda, ad esempio, p. 79 degli appunti

5) Calcolare i residui in 0 delle funzioni

a) $f(z) = \cos^2 z + \frac{\pi}{z} - \frac{1}{z^2}$

b) $g(z) = z^5 e^{1/z^2}$

c) $h(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$

a) Poiché $\cos^2 z$ è analitica, $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\cos^2 z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$; quindi

$$f(z) = -\frac{1}{z^2} + \frac{\pi}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$ e quindi

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \pi$$

b) $$g(z) = z^5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^{2k-5}}$$

$2k-5 = 1 \iff k = 3$ quindi $\mathrm{Res}(g, 0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

c) Poiché $e^{\frac{1}{z^2}}$ ha una singolarità essenziale in 0

Calcoliamo $\mathrm{Res}(h, 0)$ usando il II teorema dei residui

$$\mathrm{Res}(h, 0) = -\mathrm{Res}(h, 1) - \mathrm{Res}(h, \infty)$$

1 è un polo semplice per h quindi

$$\mathrm{Res}(h, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}(z-1) = e$$

$$\mathrm{Res}(h,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}h\left(\frac{1}{z}\right),0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2}h\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{e^{z^2}}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z}\frac{e^{z^2}}{1-z}$$

quest'ultima funzione ha in 0 un polo semplice, quindi

$$\mathrm{Res}(h,\infty) = \lim_{z\to 0} -\frac{1}{z}\frac{e^{z^2}}{1-z}\cdot z = -1$$

Dunque $\mathrm{Res}(h,0) = 1-e$

6) Calcolare la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\in[0,1] \\ 1, & x\in(1,2] \end{cases}$$

estesa a $\mathbb{R}$ per periodicità con periodo 2. Usare, poi tale serie per dimostrare che

$$\frac{2}{3} + \sum_{h=1}^{+\infty} (-1)^h \frac{2}{h^2\pi^2} = \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{16}{(2h+1)^3\pi^3}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 1\,dx\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{2k\pi x}{4}\right)dx = \int_0^1 x^2\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{k\pi}x^2\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 - \frac{4}{k\pi}\int_0^1 x\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx + \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{k^2\pi^2}x\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 -$$

$$- \frac{8}{k^2\pi^2}\int_0^1 \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx + 0 - \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{k^3\pi^3}\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{8}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{k^3\pi^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

Osserviamo che per $k = 2h$

$$\frac{8}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{k^3\pi^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8\cos(h\pi)}{(2h)^2\pi^2} = (-1)^h\frac{2}{h^2\pi^2}$$

Per $k = 2h+1$

$$\frac{8}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{k^3\pi^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-16}{(2h+1)^3\pi^3}\sin\left(h\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{-16}{(2h+1)^3\pi^3}(-1)^h$$

Quindi la serie di soli coseni di f è data da

$$\frac{1}{3} + \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^h}{h^2\pi^2}\cos\left(\frac{2h\pi}{2}x\right) + \sum_{h=0}^{+\infty}\frac{-16(-1)^h}{(2h+1)^3\pi^3}\cos\left(\frac{(2h+1)\pi x}{2}\right)$$

Per $x=0$ Tale serie converge a $\tilde{f}(0) = 0$, dove $\tilde{f}$ è l'estensione pari di f su $[-2,2]$.

Quindi $$\frac{2}{3} + \sum_{h=1}^{+\infty}(-1)^h\frac{2}{h^2\pi^2} - \sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^h\frac{16}{(2h+1)^3\pi^3} = 0$$

Quindi $\frac{2}{3} + \sum_{h=1} \cdot (-1) \frac{2}{h^2\pi^2} - \sum_{h=0} (-1) \frac{16}{(2h+1)^3\pi^3} - \ldots$

da cui la uguaglianza richiesta

Politecnico di Bari
Complementi di Analisi Matematica
Laurea Ingegneria Informatica e Automazione
A.A. 2016/2017 Appello 6 novembre 2017 Traccia A

Cognome________________Nome________________N° Matricola________________

Programma: precedente AA 2014/2015 ☐ da AA 2014/2015 in poi ☐

1) Enunciare e dimostrare una versione del teorema sulla trasformata di Laplace della derivata

5 pts.

Per gli anni accademici precedenti al 2014/2015, si sostituisca l'esercizio 1) con il seguente:

1) Dimostrare che se una serie di funzioni converge totalmente su un insieme A allora converge uniformemente su A

5 pts.

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale per la serie di potenze in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log n}{n^2+1}(x+1)^n.$$

7 pts.

3) Calcolare

$$\int_{C^+(3,2)} \frac{\mathrm{Log}_0 z}{(z-3-i)^3} \mathrm{d}z,$$

dove $C^+(3,2)$ è la circonferenza di centro 3 e raggio 2, orientata positivamente.

6 pts.

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Hermite-Liouville.

5 pts.

5) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

6 pts.

6) Calcolare la serie di soli seni della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Usando tale serie stabilire che

$$\frac{1}{8} + 4\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{\pi^3(2h+1)^3} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{\pi(2h+1)}.$$

7 pts.

1) Enunciare e dimostrare una versione del teorema sulla trasformata della derivata

Si vedano, ad esempio, gli appunti sulla mia pagina web

1) Dimostrare che se una serie di funzioni converge totalmente su un insieme A allora essa converge uniformemente

Si vedano, ad esempio, gli appunti relativi all'AA 12-13, p.4

2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale per la serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log n}{n^2+1} (x+1)^n$$

$$\lim \frac{(n+1)\log(n+1)}{(n+1)^2+1} \frac{n^2+1}{n \log n} = \lim \frac{\log(n+1)}{\log n} \cdot \frac{(n^2+1)(n+1)}{n((n+1)^2+1)} = 1$$

quindi $\rho = 1$ e l'intervallo di convergenza è $(-1-1, -1+1) = (-2, 0)$

Per $x = -2$ otteniamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \log n}{n^2+1}$ (■)

È una serie a segni alterni : $\dfrac{n \log n}{n^2+1} \to 0$

vediamo se $\dfrac{n \log n}{n^2+1}$ è definitivamente decrescente studiando la funzione $f(x) = \dfrac{x \log x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(\log x + 1)(x^2+1) - (x \log x) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 \log x + x^2 + 1 + \log x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2(1-\log x) + 1 + \log x}{(x^2+1)^2}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno del numeratore dato che il denominatore è positivo.

Poiché $x^2(1-\log x) + 1 + \log x = x^2 \left(1 - \log x + \frac{1}{x^2} + \frac{\log x}{x^2}\right) \xrightarrow{x \to +\infty} -\infty$

il numeratore è negativo in un intorno di $+\infty$; quindi f è strettamente decrescente su tale intorno e dunque

$\left(\frac{n \log n}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ è definitivamente strettamente decrescente

Per il criterio di Leibniz $(\bullet)$ converge

Per $x=0$, otteniamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log n}{n^2+1}$ $(\circ)$

Poichè $n \cdot \frac{n \log n}{n^2+1} \sim \log n \to +\infty$, per il criterio degli infinitesimi $(\circ)$ diverge positivamente.

L'insieme di convergenza della serie di potenze assegnata è quindi $[-2,0)$

3) Calcolare $\int_{C^+(3,2)} \frac{\mathrm{Log}_0 z}{(z-3-i)^3}\, dz$

Poichè $f(z) = \mathrm{Log}_0 z$ è olomorfa su $D(3,2)$ e $3+i \in D(3,2)$, per la II formula di rappresentazione di Cauchy, l'integrale assegnato è uguale a

$$\frac{2\pi i}{2} D^{(2)} \mathrm{Log}_0 z \,\Big|_{z=3+i} =$$

$$\pi i \left(-\frac{1}{z^2}\right)\Big|_{z=3+i} = -\pi i \frac{1}{(3+i)^2} =$$

$$= \frac{-\pi i}{8+6i} = \frac{-\pi i\,(8-6i)}{100} = -\pi\left(\frac{3}{50} + \frac{2}{25} i\right)$$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Hermite-Liouville

Si veda, ad esempio, p. 92-93 degli appunti

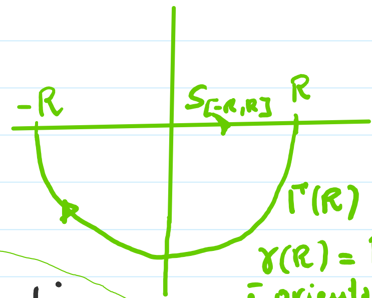
5) Calcolare usando il metodo dei residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{1+t^2}\, dt$$

$\left|\frac{e^{-it}}{1+t^2}\right| = \frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$ per $t \to \pm\infty$ quindi $f(t)$ è integrabile su $\mathbb{R}$

Consideriamo l'estensione a $\mathbb{C}$ di f: $\tilde{f}(z) = \frac{e^{-iz}}{1+z^2}$

Poiché $f(z) = \frac{1}{1+z^2} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$, possiamo applicare il lemma di Jordan per il semipiano $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z<0\}$ e



quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{1+t^2}\,dt = -2\pi i \operatorname{Res}(\tilde f, -i)$

$\gamma(R) = \Gamma(R)+S_{[-R,R]}$ è orientato nel verso orario quindi $-$

$-i$ è un polo semplice per $\tilde f$ e quindi

$$\operatorname{Res}(\tilde f, -i) = \lim_{z\to -i} (z+i)\frac{e^{-iz}}{1+z^2} = \lim_{z\to -i} (z+i)\frac{e^{-iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{i^2}}{-2i} = -\frac{e^{-1}}{2i}$$

da cui $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{1+t}\,dt = -2\pi i\left(-\frac{1}{2ie}\right) = \frac{\pi}{e}$

6) Determinare la serie di soli seni della funzione

$f(x) = x^2$, $x\in[0,1]$;

Dimostrare poi che $\displaystyle\frac{1}{8}+4\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{(2h+1)^3\pi^3} = \sum_{h=0}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi}$

Sia $\tilde f$ l'estensione dispari di f su $[-1,1]$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1}\tilde f(x)\sin\left(\frac{2k\pi x}{2}\right)dx = 2\int_0^1 x^2\sin(k\pi x)\,dx$$

$$= -2\frac{x^2}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big|_0^1 + \frac{4}{k\pi}\int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{(k\pi)^2}\, x\sin(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{4}{(k\pi)^2}\int_0^1 \sin(k\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{2}{k\pi}(-1)^k + 0 + \frac{4}{(k\pi)^3}\cos(k\pi x)\Big|_0^1 = \frac{-2}{k\pi}(-1)^k + \frac{4}{(k\pi)^3}(-1)^k - \frac{4}{(k\pi)^3}$$

La serie di soli seni di f è dunque

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{4(-1)^k}{k^3\pi^3} - \frac{4}{k^3\pi^3} - \frac{2(-1)^k}{k\pi}\right)\sin(k\pi x)$$

Per $x=\frac{1}{2}$ essa converge a $\tilde f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Quindi

$$\frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{4(-1)^k}{k^3\pi^3} - \frac{4}{k^3\pi^3} - \frac{2(-1)^k}{k\pi} \right) \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

Poiché $\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1 \end{cases}$ otteniamo

$$\frac{1}{4} = \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{-8}{(2h+1)^3\pi^3} + \frac{2}{(2h+1)\pi} \right) (-1)^h$$

e quindi $\frac{1}{4} + 8\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)^3\pi^3} = 2\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)\pi}$

da cui l'uguaglianza richiesta