1) - a)

Calcolare modulo e argomento principale del numero complesso $z = (1-\sqrt{3}i)^5$

Scriviamo $1-\sqrt{3}i$ in forma trigonometrica

$\rho = \sqrt{1+3} = 2$ $\begin{cases} 1 = 2\cos\theta \\ -\sqrt{3} = 2\sin\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \theta = -\frac{\pi}{3}$

quindi usando la formula di De-Moivre

$$\left(2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{3}\pi\right)\right)$$

per cui il modulo di z è 2^5 e un suo argomento è $-\frac{5}{3}\pi$

Per determinare l'argomento principale sommiamo a $-\frac{5}{3}\pi$ un multiplo di 2π

in modo che $-\frac{5}{3}\pi + 2k\pi \in [-\pi,\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché

$-\frac{5}{3}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{3} \in [-\pi,\pi)$, l'argomento principale è $\frac{\pi}{3}$

1) - b) Determinare insieme di definizione, monotonia e immagine della funzione

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+1} - 2\right)$

$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \text{ e } \sqrt{x+1} - 2 > 0\}$

quindi $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} > 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 > 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \end{cases}$

f è composta dalle funzioni $x \in (3,+\infty) \mapsto \sqrt{x+1} - 2 \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1}-2)$

la funzione $\sqrt{x+1} - 2$ è strettamente crescente mentre $\log_{\frac{1}{2}} x$ è strettamente decrescente quindi f è strettamente decrescente e dunque

$$\operatorname{im}(f) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 3^+} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$$

2) Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$f(x) = x(\log^2 x - 2\log x)$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = e$. Scrivere la formula di Taylor per f di ordine 2, centro $x_0 = e$ col resto di Peano.

f è definita in $(0, +\infty)$ ed è continua su tale insieme. Gli eventuali asintoti sono quindi da cercare in 0 e in $+\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\log^2 x - 2\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0 - 0 = 0$. Non c'è asintoto verticale

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\log^2 x\left(1 - \frac{2}{\log x}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \log^2 x\left(1 - \frac{2}{\log x}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Non ci sono quindi asintoti orizzontali né obliqui per $x \to +\infty$

L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = e$ è

$$y = f(e) + f'(e)(x-e)$$

$$f(e) = e(1-2) = -e$$

$$f'(x) = \log^2 x - 2\log x + x\left(2\log x \cdot \frac{1}{x} - 2\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \log^2 x - 2\log x + 2\log x - 2 = \log^2 x - 2$$

$f'(e) = -1$; quindi la retta tangente richiesta ha equazione

$$y = -e - (x-e) = -x$$

La formula di Taylor di centro e ordine 2 col resto di Peano è

$$f(x) = f(e) + f'(e)(x-e) + \frac{f''(e)}{2}(x-e)^2 + o((x-e)^2) \quad \text{per } x \to e$$

$f''(x) = 2\log x \cdot \frac{1}{x}$; $f''(e) = \frac{2}{e}$ quindi otteniamo:

$$f(x) = -x + \frac{1}{e}(x-e)^2 + o((x-e)^2), \quad \text{per } x \to e$$

3) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \, \frac{\log x}{\log^2 x - 2\log x + 1}$$

Calcolare poi la media integrale di f sull'intervallo $[4,6]$

Posto $t = \log x$ l'integrale indefinito di f si ottiene da

$$\int \frac{t}{t^2 - 2t + 1}\, dt = \int \frac{t}{(t-1)^2}\, dt = \int \frac{t-1+1}{(t-1)^2}\, dt = \int \frac{1}{t-1}\, dt + \int \frac{1}{(t-1)^2}\, dt$$

$$= \log|t-1| - \frac{1}{t-1} + c$$

quindi $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, \frac{\log x}{\log^2 x - 2\log x + 1}\, dx = \log|\log x - 1| - \frac{1}{\log x - 1} + c$

la media integrale richiesta è

$$\frac{1}{2}\int_4^6 \frac{1}{x}\, \frac{\log x}{\log^2 x - 2\log x + 1}\, dx = \frac{1}{2}\left(\log|\log x - 1| \Big|_4^6 - \frac{1}{\log x - 1}\Big|_4^6 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log(\log 6 - 1) - \log(\log 4 - 1) - \frac{1}{\log 6 - 1} + \frac{1}{\log 4 - 1} \right)$$

4) Enunciare e dimostrare il criterio di stretta monotonia su un intervallo

Si veda, ad esempio, pagg. 147-148 del Marcellini-Sbordone "Elementi di Analisi Matematica uno" Liguori Editore, 2002.

Esempi possibili sono:

- $f(x) = x^3$ (strettamente crescente, $f'(x) = 0$ per $x = 0$)
- $f(x) = -x^3$ (" decrescente, ")
- $f(x) = e^{x^3}$ (" crescente, " ")
- $f(x) = e^{-x^3}$ (" decrescente, " ")
- . . .