1) - a)

Determinare, in forma esponenziale, le radici quarte del numero complesso

$(1-i)\,\overline{(1-i)}\,(2-2i)$

$$(1-i)\,\overline{(1-i)}\,(2-2i) = 2(2-2i) = 4(1-i) = 4\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

Quindi $\sqrt[4]{(1-i)\overline{(1-i)}(2-2i)} = \sqrt[4]{4\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}} = 2^{\frac{5}{8}}\,e^{-\frac{\pi}{16}i+\frac{\pi}{2}k}$, $k=0,1,2,3$

1) - b) Determinare il dominio della funzione

$f(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$

e stabilire se f è strettamente monotona specificandone il tipo di monotonia. Determinare infine l'immagine di f.

dom f: $\begin{cases} x \neq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} - 1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \geq e^0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{1}{x} \geq 0 \end{cases}$ $\{\, x < 0$

quindi dom $f = (-\infty, 0)$

Su tale intervallo, la funzione $y = -\frac{1}{x}$ è strett. crescente

quindi $e^{-\frac{1}{x}} - 1$ lo è anche e dunque anche f è strett. crescente.

Poiché $f \in C^0((-\infty,0))$, $\quad \text{Im} f = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to 0^-} f(x)\right) = (0,+\infty)$

2) Determinare il numero di zeri reali del polinomio

$p(x) = x^7 - 7x^5 - 1$

Si determinino anche i punti di flesso di p.

Si calcoli infine $\lim_{x\to 0} (f\circ p)(x)$

dove $f = f(w) = \dfrac{\log^2(w+2)}{2w+2}$

Per determinare il numero di zeri reali di p, ne studiamo l'andamento

$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$

$p'(x) = 7x^6 - 35x^4 = 7x^4(x^2 - 5)$

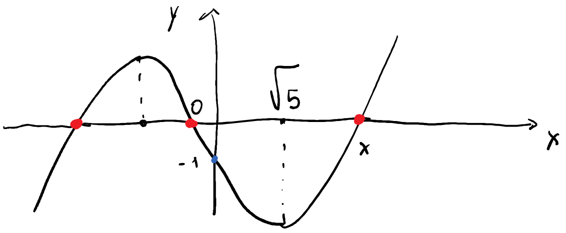
$p'(x) > 0 \iff x > \sqrt{5} \ \vee\ x < -\sqrt{5}$

Quindi p è strett. crescente in $(-\infty, -\sqrt{5})$ e $(\sqrt{5}, +\infty)$ e strett. decrescente su $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

Poiché $p(\sqrt{5}) = 5(\sqrt{5})^5 - 7(\sqrt{5})^5 - 1$, $p(\sqrt{5}) < 0$; $p(0) = -1$;

$p(-\sqrt{5}) = -5(\sqrt{5})^5 + 7(\sqrt{5})^5 - 1 > 0$;

quindi p ha tre zeri reali come si deduce dal suo andamento riportato qui a fianco



$$p''(x) = 42x^5 - 140x^3 = 14x^3(3x^2 - 10)$$

$p''(x) > 0$

	$-\sqrt{10/3}$	0	$\sqrt{10/3}$	
$- \ -$	$- \ - \ -$			
	$- \ - \ -$	$- \ - \ -$		
$-$	$+$	$-$	$+$	

p è strett. convessa in $(-\sqrt{10/3}, 0)$ e in $(\sqrt{10/3}, +\infty)$ e strett. concava in $(-\infty, -\sqrt{10/3})$ e $(0, \sqrt{10/3})$

Quindi p ha punti di flesso $-\sqrt{10/3}$, 0 e $\sqrt{10/3}$.

$$\lim_{x \to 0} (f \circ p)(x) \overset{p(x)=w}{=} \lim_{w \to -1} f(w) = \lim_{w \to -1} \frac{\log^2(w+1+1)}{2(w+1)} \overset{z=w+1}{=} \lim_{z \to 0} \frac{\log^2(z+1)}{2z}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\log^2(z+1)}{2z^2} z = 0$$

3) Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left| \frac{2x-1}{x^2+x+4} \right| dx$

Osserviamo che su $[-1, 0]$, $2x - 1 < 0$ mentre $x^2 + x + 4 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

quindi $\left| \dfrac{2x-1}{x^2+x+4} \right| = \dfrac{1-2x}{x^2+x+4}$ su $[-1, 0]$.

Dunque $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left| \frac{2x-1}{x^2+x+4} \right| dx = \int_{-1}^{0} \frac{1-2x}{x^2+x+4} dx =$

$$= -\int_{-1}^{0} \frac{2x+1-2}{x^2+x+4} dx = -\log(x^2+x+4)\Big|_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+x+4} dx$$

$$= -\log 4 + \log 4 + 2\int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{15}{4}}\,dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{0} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} = \frac{8}{15}\int_{-1}^{0} \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{8}{15}\int_{-1}^{0} \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1} = \frac{4}{\sqrt{15}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)\Bigg|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{4}{15}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) - \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)\right) =$$

$$= \frac{8}{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$$

4) Dare la definizione di derivabilità in un punto per una funzione reale di variabile reale.

Enunciare il teorema sulla derivata di una funzione inversa e usarlo per stabilire che $y = \arcsin x$ è derivabile su $(-1,1)$ con derivata $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$