



Politecnico di Bari  
CdL Ingegneria Informatica e Automazione  
AA 2012-2013

Complementi di Analisi Matematica  
Tracce di esame (con svolgimenti)  
Docente: Dott. E. Caponio

Politecnico di Bari  
 Complementi di Analisi Matematica – Laurea Ingegneria Informatica e Automazione  
 A.A. 2012/2013      Appello 11 Luglio 2013      Traccia A

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

Programma: AA 2012/2013  Anni precedenti

- 1) Studiare la convergenza puntuale su  $\mathbb{R}$  della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^n - 1)x}{e^n}.$$

Dire poi, motivando la risposta, su quali intervalli la serie converge totalmente.

- 2) Enunciare e dimostrare almeno un teorema per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze.  
 3) Determinare e rappresentare sul piano l'immagine dell'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \in [-1, 1], \operatorname{Im} z \in [0, \pi]\},$$

mediante la funzione esponenziale in  $\mathbb{C}$ .

- 4) Determinare la funzione armonica coniugata di  $u(x, y) = 2x + y - 2$  che sui punti della retta di equazione  $y = x/2$  sia uguale a 1.  
 5) Dare la definizione di residuo all'infinito per una funzione  $f \in H(\mathbb{C} \setminus K)$ , con  $K$  sottoinsieme limitato di  $\mathbb{C}$ . Dimostrare, poi, che  $\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$ .

- 6) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2 + x + 1} dx$$

*Per gli anni accademici precedenti al 2012/2013, si sostituiscano gli esercizi 4) e 5) con i seguenti:*

- 4) Calcolare come serie il seguente integrale

$$\int_0^1 \cos(x^3) dx$$

- 5) Dare la definizione di residuo in un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  per una funzione  $f \in H(D'(z_0, \delta))$ ,  $\delta > 0$ . Dimostrare, poi che per un polo di ordine 1,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^n - 1)x}{e^n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{e^n}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{e^n}}_{\textcircled{2}}$$

$\textcircled{1}$  : è una serie di potenze; il coefficiente  $a_n$  è  $\frac{1}{e^{n-1}}$

$$\lim_m \sqrt[m]{\frac{1}{e^{m-1}}} = \lim_m \sqrt[m]{\frac{e}{e^m}} = \frac{1}{e}$$

Dunque il raggio di convergenza è  $r = e$

Per  $x = e$  ovviamente la serie numerica definita dalla successione costante di costante valore  $e$  e quindi diverge positivamente. Per  $x = -e$  ovviamente  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} e$  quindi è indeterminata.

$n=0$

$$\textcircled{2}: \forall x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{e^n} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n} \in \mathbb{R}$$

Dunque la serie di partenza converge puntualmente sull'intervallo  $(-e, e)$ .

Essa converge totalmente in ogni intervallo del tipo  $[-a, a]$  con  $0 \leq a < e$  dato da  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\left| \frac{(x^n - 1)x}{e^n} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{e^n} + \frac{|x|}{e^n} \leq \frac{a^{n+1}}{e^n} + \frac{a}{e^n}, \quad \forall x \in [-a, a], \quad e$$

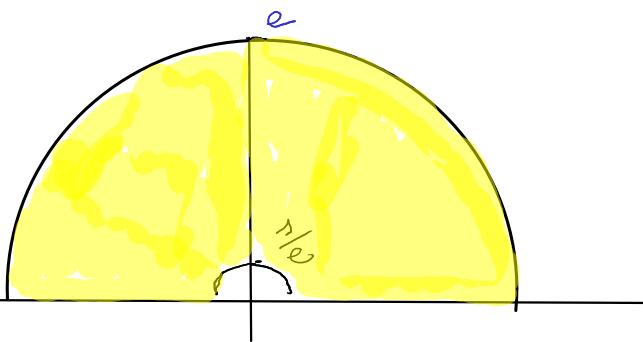
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{a^{n+1}}{e^n} + \frac{a}{e^n} \right) = a \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{a}{e} \right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n} \right).$$

La prima serie converge in quanto serie geometrica di ragione  $\frac{a}{e} \in (-1, 1)$  moltiplicata per  $a$ ; la seconda converge come si può vedere subito usando, ad esempio, il criterio della radice.

2) Si veda, ad esempio, p. 37 degli appunti

3) Sia  $z \in A$ ,  $z = x + iy$

$e^z = e^x e^{iy}$ . Dunque l'immagine di  $A$  mediante la funzione esponenziale è data da tutti i numeri complessi di modulo  $r = e^x$ ,  $x \in [-1, 1]$ , (e cioè  $\frac{1}{e} \leq r \leq e$ ) e argomento principale uguale a  $y \in [0, \pi]$ . Dunehi essa è l'insieme colorato in giallo.



4) Deve essere  $v_y = ux$  e  $v_x = -uy$

Dunque  $V_y(x, y) = 2$  e  $V_x(x, y) = -1$

Integrando rispetto a  $y$  la prima equazione ottieniamo

$V(x, y) = 2y + g(x)$ , dove  $g$  è una qualsiasi funzione olomorfa  $C^\infty$  su  $\mathbb{R}$ . Dalla seconda equazione

$g'(x) = -1$ , cioè  $g(x) = -x + C$

Dunque  $V(x, y) = 2y - x + C$ . Poi dei sui punti della retta  $y = \frac{x}{2}$ ,  $V$  deve avere 1 otteniamo che  $C=1$ .

5) Si veda ad esempio p. 125 degli appunti.

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2 + x + 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{izx}}{2(x^2 + x + 1)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-izx}}{2(x^2 + x + 1)} dx$$

Sia  $f(z) = \frac{1}{2(z^2 + z + 1)}$ ,  $f_1(z) = e^{izx} f(z)$  e  $f_2(z) = e^{-izx} f(z)$ .

Poiché  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ ,

possiamo usare il lemma di Jordan per i semiassi dei numeri con parte immaginaria positiva e la sua versione per l'ellisse semiellisse.

Pertanto, dato che  $\frac{\cos(3x)}{x^2+x+1}$  è assolutamente integrabile

sul  $(-\infty, +\infty)$ , abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{2(x^2+x+1)} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(g_1, -\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$= 2\pi i e^{\frac{i3}{2}(-1+\sqrt{3}i)} \cancel{2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)}$$

$$= \frac{\pi i e^{\frac{i3}{2}(-1+\sqrt{3}i)}}{\sqrt{3}i} = \frac{\pi e^{\frac{i3}{2}(-1+\sqrt{3}i)}}{\sqrt{3}}$$

Analogamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i3x}}{2(x^2+x+1)} dx = -2\pi i \operatorname{Res}\left(g_2, -\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$= \frac{-2\pi i e^{-\frac{i3}{2}(-1-\sqrt{3}i)}}{2\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)} = -\frac{\pi e^{-\frac{i3}{2}(-1-\sqrt{3}i)}}{-\sqrt{3}}$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+x+1} dx = \frac{\pi e^{-\frac{i3}{2}} e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} + \frac{\pi e^{+\frac{i3}{2}} e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}} \left(e^{-\frac{i3}{2}} + e^{+\frac{i3}{2}}\right) =$$

$$= 2 \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{3}{2}\right) e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Politecnico di Bari  
 Complementi di Analisi Matematica – Laurea Ingegneria Informatica e Automazione  
 A.A. 2012/2013      Appello 3 Settembre 2013      Traccia A

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_  
 Programma: AA 2009/2010  Altri anni

- 1) Studiare la convergenza puntuale su  $\mathbb{R}$  della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2 + 1} - 1.$$

Stabilire inoltre se la convergenza è uniforme su  $\mathbb{R}$  e, in caso contrario, su un qualunque insieme del tipo  $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ ,  $a > 0$ .

- 2) Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$  e si consideri la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ . Dimostrare che se essa converge in  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  allora converge in modulo per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z - z_0| < |\bar{z} - z_0|$ .

- 3) Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{(z^2 - 1)(z - i)} dz,$$

dove  $\gamma$  è l'ellisse avente asse maggiore di estremi i punti  $0$  e  $2i$  e asse minore di lunghezza  $1$  percorso in senso orario. Dire, inoltre, motivando la risposta, se il risultato cambia considerando un ellisse con stesso asse maggiore, stesso orientamento, asse minore di lunghezza  $a > 0$ .

- 4) Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dare la definizione di selezione  $\alpha$  del logaritmo. Determinare poi e rappresentare sul piano il sottoinsieme dei punti  $z \in \mathbb{C}$  per cui  $\text{Log}_0(z) = \text{Log}_{\pi}(z)$ .
- 5) Enunciare e dimostrare il II teorema dei residui.
- 6) Scrivere la serie di soli coseni della funzione  $f(x) = (x - 1)^2$ ,  $x \in [0, 1]$ . Stabilire poi che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

*Per l'anno accademico 2009/2010, si sostituisca l'esercizio 6) con il seguente:*

- 6) Scrivere la serie di Fourier della  $f(x) = (x - 1)^2$ ,  $x \in [-1, 1]$  e se ne discuta la convergenza puntuale e uniforme.

Possibile svilupimento provvisorio 03/09/2013

1)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(0) = -1$

Per  $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f_n(\bar{x}) \rightarrow -1$

Per cui la funzione costante oh costante valore -1 è la funzione limite puntuale della successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  su  $\mathbb{R}$ .

Studiamo la convergenza uniforme su  $\mathbb{R}$ .

$$\left| f_n(x) - (-1) \right| = \frac{|nx|}{n^2x^2 + 1}$$

Consideriamo, per  $n$  fissato in  $\mathbb{N}$ , la funzione

$$g_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{Tale funzione è dispari, per cui}$$

possiamo limitarci a studiarla sull'intervallo  $[0, +\infty)$

$$g'_n(x) = \frac{n^3x^2 + n - 2n^3x^2}{(n^2x^2 + 1)^2},$$

per cui  $g'_n(x) > 0$  in  $[0, +\infty)$  se e solo se  $0 \leq x < \frac{1}{n}$

dunque la funzione  $|f_n(x) + 1|$  assume massimo assoluto su  $\mathbb{R}$  nei punti  $x_m^+ = \frac{1}{m}$  e  $x_m^- = -\frac{1}{m}$

$$\text{Chiamate} \quad |f_n(\frac{1}{m}) + 1| = |f_n(-\frac{1}{m}) + 1| = \frac{1}{2}$$

e quindi la convergenza non è uniforme su  $\mathbb{R}$

Su un insieme A del tipo  $(-\infty, -z] \cup [z, +\infty)$ ,  $z > 0$

$$\max_{x \in A} |f_n(x) + 1| = |f_n(z) + 1| = \frac{nz}{n^2z^2 + 1}$$

Poiché  $\frac{nz}{n^2z^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , la convergenza è uniforme su A.

2) si veda ad esempio p. 34 degli appunti

3) Sia  $g(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1}$ ;  $g$  è olomorfa sul dominio aperto

avente per bordo l'ellisse  $\gamma$  e quindi stalle

I formula di rappresentazione di Cauchy

$$\int_{\gamma} \frac{g(z)}{z-i} dz = -2\pi i g(i) = -2\pi i \frac{e^{-1}}{-2} = \frac{\pi i}{e}.$$

Se consideriamo l'integrale su  
un qualche ellisse  $\gamma_\alpha$  come dentro nella traccia  
il risultato sarebbe lo stesso in quanto  
la funzione  $g$  continuerebbe ad essere olomorfa sul  
dominio aperto per frontiera  $\gamma_\alpha$  e la formula di rappresentazione  
di Cauchy darebbe ancora

$$\int_{\gamma_\alpha} \frac{g(z)}{z-i} dz = -2\pi i g(i)$$

$$4) \log_\alpha(z) = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$$

dove  $k_\alpha$  è l'intero per cui  $\operatorname{Arg} z + 2k\pi \in [\alpha - \pi, \alpha + \pi]$

$$\log_0(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg} z$$

$$\log_\pi(z) = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$$

con  $k$  in modo che  $\operatorname{Arg} z + 2k\pi \in [0, 2\pi]$

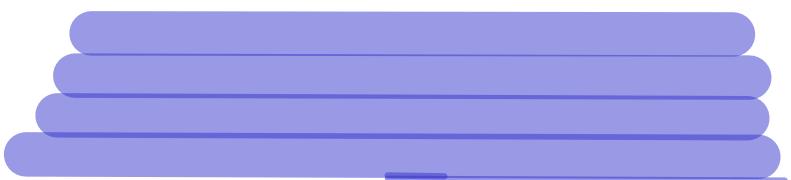
Per cui se  $z$  è un numero complesso tale che  $\operatorname{Arg} z \in [0, \pi]$

$$\log_0(z) = \log_\pi(z),$$

dato che è sufficiente prendere  $k=0$  per avere

$$\operatorname{Arg} z + 2\pi k \in [0, 2\pi] \quad \text{quando } \operatorname{Arg} z \in [0, \pi]$$

Tale insieme è rappresentato in figura in blu



punti esclusi

5) Si vede, ad esempio, p. 327 degli appunti

6)  $b_k = 0$

$$a_0 = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$a_k = 2 \int_0^1 (x-1)^2 \cos(\pi kx) dx =$$

$$= 2(x-1)^2 \frac{\sin(\pi kx)}{\pi k} \Big|_0^1 - \frac{4}{\pi k} \int_0^1 (x-1) \sin(\pi kx) dx$$

$$= 0 + \frac{4}{(\pi k)^2} (x-1) \cos(\pi kx) \Big|_0^1 - \frac{4}{(\pi k)^2} \int_0^1 \cos(\pi kx) dx$$

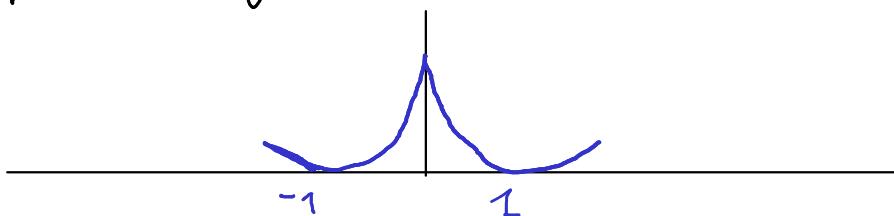
$$= \frac{4}{(\pi k)^2} - \frac{4}{(\pi k)^3} \sin(\pi kx) \Big|_0^1 = \frac{4}{(\pi k)^2}$$

Per cui la serie di sommi di  $f$  è

$$\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos(\pi kx)$$

Poiché l'estensione periodica di periodo 2 dell'estensione pari di  $f$  sull'intervallo  $[-1, 1]$  è continua ed è

oltre  $C^\infty$   
su un intorno del  
punto 1,



Questa serie converge in 1 e  $f(1) = 0$

cioè

$$\frac{1}{3} + 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2} = 0$$

$$\text{da cui } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

- 1) Determinare l'insieme di convergenza puntuale in  $\mathbb{R}$  della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\log k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k.$$

Stabilire poi su quali insiemi la convergenza è uniforme.

- 2) Dare la definizione di funzione complessa analitica in un punto  $z_0$  di un aperto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Fornire poi un paio di esempi di funzioni analitiche su tutto il piano complesso. Dire infine, motivando la risposta, perché una funzione analitica su  $\Omega$  è ivi olomorfa.
- 3) Dare la definizione di polo semplice. Dimostrare che il residuo in  $z_0 \in \mathbb{C}$  per una funzione avente un polo semplice in  $z_0$  è uguale a  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$ .
- 4) Dire, motivando la risposta, se l'insieme  $\left\{\frac{k}{k^2+1}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$  possa essere l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa su  $\mathbb{C}$  che non sia costante di costante valore 0.
- 5) Calcolare l'integrale
- $$\int_{C^+} \frac{z^2 - 1}{z^3 + 1} dz,$$
- dove  $C^+$  è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 percorsa in senso antiorario.
- 6) Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in [0, \pi) \\ 0 & \text{se } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

estesa per periodicità su  $\mathbb{R}$  con periodo  $2\pi$ . Discuterne poi convergenza puntuale e uniforme su  $\mathbb{R}$ .

## Possibile svilupimento prova del 23/09/2013

1) Si tratta di una serie di potenze. Per raggiro di convergenza si doto da  $p = 1$  poiché

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{|a_{K+1}|}{|a_K|} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\log K}{\log(K+1)} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\log K}{\log K + \log(1 + \frac{1}{K})} = 1$$

Poiché il centro della serie è  $x_0 = \frac{1}{2}$ , l'intervolo di convergenza è dato da  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .

Per  $x = -\frac{1}{2}$ , la serie diviene:  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\log k} (-1)^k = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\log k} = +\infty$

Per  $x = \frac{3}{2}$ , la serie diviene:  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}$  che converge per il criterio di Leibniz.

Pertanto l'insieme di convergenza è l'intervolo  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  e per il teorema di Abel la convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo  $[-\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{3}{2}]$ , con  $\epsilon \in (0, 2]$

2) Si veda, ad esempio, p. 49 degli appunti per la definizione e p. 47 per il fatto che una funzione analitica è omorfo

3) Si veda, per esempio, p. 114 degli appunti per la definizione e p. 124 per il motivo in un modo semplice

4) Poiché 0 è punto di accumulazione per l'insieme  $\left\{ \frac{k}{k^2+1} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  (infatti  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k^2+1} = 0$ )

se esistesse una tale funzione per il principio di identità delle funzioni omorfie dovrebbe essere la funzione costante di costante valore 0 (equivolentemente: se l'insieme degli zeri di una funzione omorfa ha un punto di accumulazione allora tale funzione è costante di costante valore 0 (p. 80))

5) La funzione integrante ha 3 singolarità di finito dato da  $\sqrt[3]{-1}$ . Queste appartengono al disco aperto di centro 0 e raggio 2, dunque  $f \in H(\mathbb{C} - \{\sqrt[3]{-1}\})$  e sicuramente

dalla definizione di residuo all'infinito

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$$

Oppure si ragioni così: per il I teorema dei residui

$$\int_{\Gamma^+} \frac{z^2-1}{z^3+1} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^3 \operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^3+1}, z_j\right),$$

dove  $z_j$  sono le 3 radici cubiche di  $-1$ .

Per il II teorema dei residui

$$\sum_{j=1}^3 \operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^3+1}, z_j\right) = -\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^3+1}, \infty\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^3+1}, \infty\right) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z^2}-1}{\frac{1}{z^3}+1}, 0\right) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z} \frac{1-z^2}{1+z^3}, 0\right)$$

=  $-1$  data che  $0$  è un polo semplice per la funzione

$$-\frac{1}{z} \frac{1-z^2}{1+z^3} \text{ e } \lim_{z \rightarrow 0} z \left( -\frac{1}{z} \frac{1-z^2}{1+z^3} \right) = -1$$

ehunque  $\int_{\Gamma^+} \frac{z^2-1}{z^3+1} dz = 2\pi i \cdot (-1) = 2\pi i$

c)  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1-x) dx = \frac{1}{2\pi} \left( \pi - \frac{1}{2} \pi^2 \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{4}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1-x) \cos(kx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ (1-x) \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi + \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin(kx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 0 - \frac{1}{k\pi} \left. \cos(kx) \right|_0^\pi = \frac{1}{k^2\pi} (1 - (-1)^k)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1-x) \sin(kx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ -(1-x) \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi - \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k} dx$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left( -(\pi-1)(-1)^k + 1 \right) + 0 = \frac{1}{k\pi} ((\pi-1)(-1)^k + 1)$$

La serie ali Fourier di  $f$  è dunque data da

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi} (1 - (-1)^k) \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} ((\pi-1)(-1)^k + 1) \sin(kx)$$

essa converge puntualmente ad  $f$  su  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Nei punti del tipo  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , converge a  $\frac{1}{2}$   
 $\left( \frac{1}{2} = \frac{f((2k\pi)^+) + f((2k\pi)^-)}{2} \right).$

Nei punti del tipo  $(2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , converge  $\frac{1-\pi}{2}$   
 $\left( \frac{1-\pi}{2} = \frac{f((2k+1)\pi)^+) + f((2k+1)\pi)^-}{2} \right)$

La convergenza a  $f$  è uniforme su ogni intervallo del tipo  $[k\pi + \varepsilon, (k+1)\pi - \varepsilon]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon \in (0, \pi)$

Politecnico di Bari  
Complementi di Analisi Matematica – Laurea Ingegneria Informatica e Automazione  
A.A. 2012/2013      Appello 11 Novembre 2013      Traccia A

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

- 1) Determinare la funzione  $f$  limite puntuale in  $\mathbb{R}$  della successione di funzioni  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{10\sqrt{n} - \sin(n^2x)}{n}.$$

Stabilire poi se  $(f_n)$  converge uniformemente ad  $f$  su  $\mathbb{R}$ .

- 2) Dare la definizione di funzione reale analitica in un intervallo  $(a, b)$ . Sia poi  $f \in C^\infty((a, b))$ ; fornire una condizione sufficiente perché  $f$  sia analitica in  $(a, b)$ .
- 3) Determinare l'insieme dei numeri  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui si ha

$$\text{Log}_0(i-1) = \text{Log}_\alpha(i-1).$$

- 4) Dare la definizione di zero isolato per una funzione  $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Omega$  aperto. Dimostrare poi che per una funzione  $f$  olomorfa in  $\Omega$ ,  $z_0 \in \Omega$  è uno zero isolato di  $f$  se e solo se  $z_0$  è uno zero di ordine finito.
- 5) Determinare le singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{1 - e^{z^2}},$$

specificandone il tipo.

- 6) Usando il metodo dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t) - \sin t}{\sin t + 2} dt.$$

Possibile ragionamento prova dal 11/11/13

1) Fissato  $\bar{x} \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{10\sqrt{n} + \min(n^2 \bar{x})}{n} \right| \leq \frac{10\sqrt{n} + 1}{n}, \text{ per } n$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ n \rightarrow \infty \\ 0 \end{matrix}$$

Quindi  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}$ , cioè la funzione limite punto a punto su  $\mathbb{R}$  è la funzione di costante valore 0.

Poiché fissato  $\bar{m} \in \mathbb{N}$ , come sopra si ha  $|f_{\bar{m}}(x) - 0| \leq \frac{10\sqrt{\bar{m}} + 1}{\bar{m}}$ ,

la convergenza è anche uniforme su  $\mathbb{R}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}$

2) Si vuole, per esempio, provare gli 2 punti per la definizione e prop. 52 per una condizione sufficiente.

3)  $\log_0(i-1) = \log \sqrt{2} + i \frac{3}{4}\pi$

$\log_\alpha(i-1) = \log \sqrt{2} + i \beta$ , con  $\beta$  argomento di  $i-1$  che appartiene all'intervallo  $[\alpha-\pi, \alpha+\pi]$ .

Affinché  $\log_\alpha(i-1)$  sia uguale a  $\log_0(i-1)$  deve quindi essere  $\beta = \frac{3}{4}\pi$

e cioè  $\alpha - \pi \leq \frac{3}{4}\pi < \alpha + \pi$  da cui

$$\alpha \leq \frac{3}{4}\pi + \pi = \frac{7}{4}\pi \quad \text{e} \quad \alpha > \frac{3}{4}\pi - \pi = -\frac{\pi}{4}$$

Quindi l'inequazione è soddisfatta se e solo se  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right]$

4) Si vuole, ad esempio, provare gli 2 punti.

5) Le singolarità di finito di  $f$  sono tutti gli zeri della funzione al denominatore

$$1 - e^{z^2} \neq 0 \text{ cioè}$$

$$z^2 = \log 1 = \log 1 + i(0 + 2k\pi) = i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

quindi per  $k=0$  abbiamo  $z^2=0$  cioè  $z=0$

$$\text{per } k > 0 : z = \sqrt{i2k\pi} = \begin{cases} \sqrt{2k\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \sqrt{2k\pi} e^{i\frac{5\pi}{4}} \end{cases}$$

$$\text{per } k < 0 : z = \sqrt{i2k\pi} = \begin{cases} \sqrt{-2k\pi} e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ \sqrt{-2k\pi} e^{i\frac{7\pi}{4}} \end{cases}$$

$0$  è una singolarità eliminabile data da  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - e^{z^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1 - e^h} = -1$

Sia  $\tilde{\gamma}$  l'insieme delle singolarità rimanenti e sia  $w \in \tilde{\gamma}$

Sia  $g$  la funzione al denominatore. Perché  $g'(z) = -2z e^{z^2}$

$g'(w) = -2w e^{w^2} = -2w \neq 0$  e quindi ogni  $w \in \tilde{\gamma}$  è una zera semplice per  $g$  e quindi un polo di ordine 1 per  $f$ .

$$(6) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t - \sin t}{\sin t + 2} dt = \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{\frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right) + 2} \frac{1}{zi} dz =$$

(dove  $D(0,1)$  è il disco di centro 0 e raggio 1)

$$= \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{\frac{z^4 + 1}{z^2} - \frac{z^2 - 1}{z} \cdot \frac{1}{i}}{\frac{z^2 - 1}{z} \cdot \frac{1}{i} + 4} \frac{1}{zi} dz = \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{(z^4 + 1)i - z(z^2 - 1)}{z^2 i + 4z i} dz$$

$$= \frac{1}{i} \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{i z^4 - z^3 + z + i}{z^2(z^2 + 4z - 1)} dz = \frac{1}{i} 2\pi i \sum_{\substack{z \text{ sing. d' } f \\ z \in D(0,1)}} \operatorname{Res}(f, z)$$

Le singolarità di  $f$  sono 0 e gli zeri di  $z^2 + 4zi - 1$  cioè

$$z = -2i \pm \sqrt{-4+1} = \begin{cases} -2i + \sqrt{3}i \in D(0,1) \\ -2i - \sqrt{3}i \notin D(0,1) \end{cases}$$

0 è polo di ordine 2 dato che

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{iz^4 - z^3 + z + i}{z^2 + 4zi - 1} = -i \neq 0$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} D(z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(iz^3 - 3z^2 + 1)(z^2 + 4zi - 1) - (iz^4 - z^3 + z + i)(2z + 4i)}{(z^2 + 4zi - 1)^2}$$

$$= -1 + 4 = 3$$

$(\sqrt{3}-2)i$  è invece un polo semplice per  $f$  dato che

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow (\sqrt{3}-2)i} (z - (\sqrt{3}-2)i) f(z) &= \lim_{z \rightarrow (\sqrt{3}-2)i} \frac{iz^4 - z^3 + z + i}{z^2 (z - (-\sqrt{3}-2)i)} = \\ &= \frac{i((\sqrt{3}-2)i)^4 - ((\sqrt{3}-2)i)^3 + (\sqrt{3}-2)i + i}{-(\sqrt{3}-2)^2 2\sqrt{3}i} = \\ &= - \frac{i((\sqrt{3}-2)^4 + (\sqrt{3}-2)^3 + (\sqrt{3}-2) + 1)}{i(\sqrt{3}-2)^2 2\sqrt{3}} = \\ &= - \frac{(\sqrt{3}-2)^3 ((\sqrt{3}-2) + 1) + (\sqrt{3}-2) + 1}{(\sqrt{3}-2)^2 2\sqrt{3}} = \\ &= - \frac{((\sqrt{3}-2) + 1)((\sqrt{3}-2)^3 + 1)}{(\sqrt{3}-2)^2 2\sqrt{3}} = - \frac{(\sqrt{3}-1)((\sqrt{3}-2) + 1)((\sqrt{3}-2)^2 - (\sqrt{3}-2) + 1)}{(\sqrt{3}-2)^2 2\sqrt{3}} \\ &= - \frac{(\sqrt{3}-1)^2 (3 + 4 - 4\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3)}{(\sqrt{3}-2)^2 2\sqrt{3}} = - \frac{(\sqrt{3}-1)^2 5 (2 - \sqrt{3})}{(\sqrt{3}-2)^2 2\sqrt{3}} = \\ &= - \frac{5 (3 + 1 - 2\sqrt{3}) (2 - \sqrt{3})}{(\sqrt{3}-2)^2 2\sqrt{3}} = - \frac{10 (2 - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}-2)^2 2\sqrt{3}} = - \frac{5}{\sqrt{3}} = \operatorname{Res}(f, (\sqrt{3}-2)i) \end{aligned}$$

Per cui l'integrale assegnato è uguale a  $2\pi (\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, (\sqrt{3}-2)i)) =$

$$= 2\pi \left( 3 - \frac{5}{\sqrt{3}} \right)$$

Politecnico di Bari  
 Complementi di Analisi Matematica – Laurea Ingegneria Informatica e Automazione  
 A.A. 2012/2013      Appello 20 Gennaio 2014      Traccia A

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

Programma: AA 2009/2010  AA 2012/2013  Altri anni

- 1)** Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( n(\arctan(1/n) - \arctan(-1/n)) \right)^n z^n.$$

*AA 2012/2013:*

- 2)** Dare la definizione di funzione conforme. Dimostrare che una funzione  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa sull'aperto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  e tale che  $f'(z) \neq 0$ , per ogni  $z \in \Omega$ , è conforme.

*Altri anni accademici:*

- 2)** Enunciare le condizioni di Cauchy-Riemann. Considerare, poi, le funzioni  $f(z) = z^2$  e  $g(z) = z\bar{z}$ . Determinarne parte reale  $u$  e parte immaginaria  $v$  e verificare se queste soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann su  $\mathbb{C}$ .

- 3)** Calcolare l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C^+(1,1)} \frac{z}{z^3 - z^2 - z + 1} dz,$$

dove  $C^+(1,1)$  è la circonferenza di centro 1 e raggio 1 orientata nel verso antiorario.

- 4)** Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra.

- 5)** Determinare il tipo di singolarità in 0 della funzione  $f(z) = z^2 \cos(\frac{1}{z})$ . Calcolare poi il residuo nello stesso punto.

*AA 2009/2010:*

- 6)** Determinare la serie di Fourier della funzione  $f(x) = x$ ,  $x \in (-2, 2)$ , estesa per periodicità con periodo 4 a  $\mathbb{R}$ .

*Altri anni accademici:*

- 6)** Determinare la serie di soli coseni della funzione  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 2]$ . Verificare, poi, che in  $x = 1$  essa converge a  $f(1) = 1$  e che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1) \cos\left(\frac{\pi}{8}k\right) = -\frac{3}{4}.$$

Possibile seggiamento prova del 20/01/13

$$1) \lim_m \left( \left( m \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{m} - \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{m} \right) \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} = \lim_m m \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{m} + \operatorname{arctg} \frac{1}{m} \right) = \lim_m \frac{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{m}}{\frac{1}{m}} = 2$$

Quindi il rapporto di convergenza è uguale a  $\frac{1}{2}$

2) AA 2012/2013 : Si veda, ad esempio, pp. 28-30 degli appunti

3)  $z^3 - z^2 - z + 1 = (z-1)^2(z+1)$

Quindi la funzione integranda è uguale a

$$\frac{f(z)}{(z-1)^2}, \text{ con } f(z) = \frac{z}{z+1}.$$

$f$  è analoga in  $D(1,1)$ ; poniamo quindi usare le II formule di rappresentazione di Cauchy ottenute

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C^+(1,1)} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = i f'(1) = i \left. \frac{1}{(z+1)^2} \right|_{z=1} = i \frac{1}{4} = \frac{i}{4}$$

4) Si veda, ad esempio, pp. 94-95 degli appunti

5) Poiché  $\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , abbiamo

$$z^2 \cos \frac{1}{z} = z^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{z^{2k}} \frac{1}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{z^{2(k-1)}} \frac{1}{(2k)!} (*)$$

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

dai cui si evince che  $0$  è una singolarità essenziale

Scriviamo esplicitamente alcuni termini della serie di Laurent (\*) per determinare il coefficiente del termine  $\frac{1}{z}$

(che sappiamo essere definita in  $0$ ) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{z^{2(k-1)}} \frac{1}{(2k)!} = z^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \frac{1}{z^2} + \dots$$

Come si vede il termine  $\frac{1}{z}$  non compare nello sviluppo di Laurent di  $f$  in 0 cioè il suo coefficiente è nullo, quindi  $\text{Res}(f, 0) = 0$

6) Per gli AA  $\neq 2009/2010$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_0^2 x = 1 \\ a_k &= \int_0^2 x \cos\left(\frac{\pi k x}{2}\right) dx = \\ &= \frac{2}{\pi k} \left[ \sin\left(\frac{\pi k x}{2}\right) \right]_0^2 - \frac{2}{\pi k} \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi k x}{2}\right) dx = \\ &= \frac{2}{\pi k} \left( \sin(\pi k) - 0 \right) + \frac{4}{\pi^2 k^2} \left[ \cos\left(\frac{\pi k x}{2}\right) \right]_0^2 = \\ &= 0 + \frac{4}{\pi^2 k^2} \left( (-1)^k - 1 \right) \end{aligned}$$

La serie di cui conioli  $f$  è quindi

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \left( (-1)^k - 1 \right) \cos\left(\frac{\pi k x}{2}\right)$$

Per  $x=1$  ottengiamo la serie numerica

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \left( (-1)^k - 1 \right) \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

Osserviamo che  $(-1)^k - 1 = 0$  per  $k$  pari

mentre  $\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) = 0$  per  $k$  dispari. Quindi

la serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \left( (-1)^k - 1 \right) \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$  ha tutti i termini nulli e quindi la sua somma è 0 per cui

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \left( (-1)^k - 1 \right) \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) = 1 = f(1)$$

Poiché  $f$  è di classe  $C^\infty$  su  $(0, 2)$ , sapiamo che la

ma serie di soli coseni converge puntualmente a  $f$ .

In particolare per  $x = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \left((-1)^k - 1\right) \cos\left(\frac{\pi k}{8}\right)$$

$$\text{cioè } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \left((-1)^k - 1\right) \cos\left(\frac{\pi k}{8}\right) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} .$$

Politecnico di Bari  
 Complementi di Analisi Matematica – Laurea Ingegneria Informatica e Automazione  
 A.A. 2012/2013      Appello 13 Febbraio 2014      Traccia A

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

- 1) Enunciare il teorema di derivazione termine a termine per una serie di funzioni. Usarlo, poi, per stabilire che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n3^{1-n} = \frac{9}{4}$$

- 2) Dimostrare che una serie di potenze converge totalmente su ogni disco chiuso di raggio strettamente più piccolo del raggio di convergenza.

- 3) Enunciare la prima formula di rappresentazione di Cauchy. Considerare, poi, la funzione a valori in  $\mathbb{C}$

$$r \in (0, +\infty) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{C^+(0,r)} \frac{e^{-z^2}}{z} dz + \frac{1}{2-i},$$

dove  $C^+(0, r)$  è la circonferenza di centro 0 e raggio  $r$  percorsa in verso antiorario. Che tipo di funzione è? Calcolare la sua parte reale e la sua parte immaginaria.

- 4) Calcolare le soluzioni dell'equazione  $e^{i\pi/4} = e^{2z}$ .

- 5) Considerare la serie bilatera di potenze  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ . In quale caso il suo insieme di convergenza è sicuramente vuoto? Supponendo, poi, che il suo insieme di convergenza sia una corona circolare aperta  $C$ , dimostrare che la sua somma è olomorfa in  $C$ .

- 6) Calcolare

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C^+(0,2)} \frac{z}{z^3 + z^2 - z - 1} dz,$$

dove  $C^+(0, 2)$  è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 orientata nel verso antiorario.

1) Per l'enunciato si veda, ad esempio pág. 7 degli appunti.

Ricordiamo che  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ,  $x \in (-1, 1)$ ;

la serie delle derivate di  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  è

$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ , la quale converge uniformemente in ogni intervallo

$[-a, a] \subset (-1, 1)$ . Abbiamo quindi:

$$D\left(\frac{1}{1-x}\right)|_{x=\frac{1}{3}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n 3^{1-n}$$

$$\text{II} \\ \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

2) Si veda, ad esempio, p. 36 degli appunti

3) Per l'enunciato si vuole, ad esempio, p. 69 degli appunti

Poiché la funzione  $f(z) = e^{-z^2}$  è domostra su  $\mathbb{C}$ , qualsiasi

si è  $r > 0$ , si ha:  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^+} \frac{f(z)}{z} dz = i f(0) = i$ .

La funzione assegnata è quindi una funzione complessa costante (di variabile reale). La sua parte reale e la sua parte immaginaria sono anch'esse funzioni costanti date da  $\operatorname{Re}\left(i + \frac{1}{2-i}\right)$  e  $\operatorname{Im}\left(i + \frac{1}{2-i}\right)$  cioè

$$\operatorname{Re}\left(i + \frac{1}{2-i}\right) = \operatorname{Re}\left(i + \frac{2+i}{5}\right) = \frac{2}{5} \text{ e}$$

$$\operatorname{Im}\left(i + \frac{1}{2-i}\right) = \operatorname{Im}\left(i + \frac{2+i}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

4) Se  $z = x + iy$ . Dove essere

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{2x} e^{2iy} \quad \text{cioè}$$

$$e^{2x} = 1 \quad \text{e} \quad e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{2iy} \quad \text{da cui}$$

$$x=0 \quad \text{e} \quad 2y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dunque le soluzioni sono tutti i numeri complessi della forma  $i\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right)$ , al variare di  $k$  in  $\mathbb{Z}$ .

5) Si veda ad esempio, pp. 101-102 degli appunti

6)  $f(z) = \frac{z}{z^3 + z^2 - z - 1} = \frac{z}{(z+1)^2(z-1)}$ , che ha singolarità nei punti  $z = -1$  e  $z = 1$ . Poiché entrambe le singolarità appartengono a  $D(0,2)$ , poniamo usare il Teorema del residuo ottenendo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+ D(0,2)} \frac{z}{z^3 + z^2 - z - 1} dz = i(\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, -1)) = -i \operatorname{Res}(f, \infty)$$

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= -\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z}}{\left(\frac{1}{z} + 1\right)^2 \left(\frac{1}{z} - 1\right)} = \frac{-\frac{1}{z^3}}{\frac{(1+z)^2}{z^2} \frac{1-z}{z}} = \\ &= \frac{-1}{(1+z)^2(1-z)} \end{aligned}$$

$$\text{Poiché } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{(1+z)^2(1-z)} = -1$$

$0$  è una singolarità eliminabile per  $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$  e quindi  $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$ .

Politecnico di Bari  
 Complementi di Analisi Matematica – Laurea Ingegneria Informatica e Automazione  
 A.A. 2012/2013      Appello 28 Aprile 2014      Traccia A

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

Programma: AA 2009/2010  AA 2012/2013  Altri anni

- 1)** Determinare l'insieme di convergenza uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) (x-1)^n.$$

- 2)** Dimostrare che una funzione olomorfa su  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{C}$  è analitica su  $\Omega$ .

- 3)** Dimostrare che anche in  $\mathbb{C}$  vale l'identità  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ .

- 4)** Determinare il tipo di singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{e^{-1/z^2}}{i-z}.$$

Calcolare, poi, i residui in ognuna di esse.

*Per l'anno accademico 2012/2013:*

- 5)** Dimostrare che una qualunque funzione armonica su un dominio aperto semplicemente connesso ammette armonica coniugata

*Per gli altri anni, si sostituisca l'esercizio 5) con il seguente:*

- 5)** Dimostrare il Teorema di Hermite-Liouville.

*Per l'anno accademico 2009/2010:*

- 6)** Scrivere la serie di Fourier della funzione  $f(x) = 1 - |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$  e se ne discuta convergenza puntuale e uniforme su  $\mathbb{R}$ .

*Per gli altri anni, si sostituisca l'esercizio 6) con il seguente:*

- 6)** Scrivere la serie di soli seni della funzione  $f(x) = 1 - |x - 1|$ ,  $x \in [0, 2]$  e se ne discuta la convergenza uniforme su  $\mathbb{R}$ . Stabilire poi che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{8}{((2j+1)\pi)^2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}.$$

1) osserviamo che  $\lim \sin\left(\frac{m}{m^2+1}\right) \geq 0$

$$\lim_m \frac{\sin\left(\frac{m+1}{(m+1)^2+1}\right)}{\sin\left(\frac{m}{m^2+1}\right)} = \lim_m \frac{\sin\left(\frac{m+1}{(m+1)^2+1}\right)}{\frac{m+1}{(m+1)^2+1}} \cdot \frac{\frac{m+1}{(m+1)^2+1}}{\frac{m}{m^2+1}} \cdot \frac{\frac{m}{m^2+1}}{\sin\left(\frac{m}{m^2+1}\right)}$$

$$= \lim_m \frac{\frac{m+1}{m}}{\frac{m^2+1}{(m+1)^2+1}} = 1$$

Quindi il raggio di convergenza della serie è 1.

Studiamo la convergenza negli estremi dell'intervallo di convergenza otto abit  $(0, 2)$ . Per  $x=2$  la serie diviene

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{m}{m^2+1}\right); \text{ poiché } \sin\left(\frac{m}{m^2+1}\right) \sim \frac{m}{m^2+1} \sim \frac{1}{m} \text{ questa diverge.}$$

Per  $x=0$ , ottieniamo  $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \sin\left(\frac{m}{m^2+1}\right)$  che è una serie

a segni alterni. Poiché  $\lim\left(\frac{m}{m^2+1}\right) \rightarrow 0$  col inoltre  $\left\{\sin\left(\frac{m}{m^2+1}\right)\right\}$  è decrescente, per il criterio di Leibniz, la serie converge. Dimostriamo che  $\left\{\sin\left(\frac{m}{m^2+1}\right)\right\}$  è decrescente.

Basta osservare che  $\frac{m}{m^2+1} \in (0, \frac{\pi}{2})$ , intreverno su cui la funzione  $y = \sin x$  è crescente e che  $\frac{m}{m^2+1}$  è decrescente per  $m > 1$ .

Funzione composta  $\sin\left(\frac{m}{m^2+1}\right)$  è anch'essa decrescente per  $m > 1$ .

In definitiva, usando il Teorema di Abel, possiamo affermare che la serie di potenze assegnata converge uniformemente su ogni intervallo del tipo  $[0, 2-\varepsilon]$ ,  $0 < \varepsilon < 2$ .

2) Si vede ad esempio pag 71 degli appunti

3) Si vede, ad esempio, pag. 84 degli appunti

4) Le singolarità al finito sono  $z=0$  e  $z=i$

$$\text{Perché } \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{i-z} = -e$$

$i$  è un polo semplice e  $\text{Res}(f, i) = -e$

$$\text{Dato che } \forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{z \rightarrow 0} z^k e^{-\frac{1}{z^2}} \frac{1}{i-z} = \frac{1}{i} \lim_{z \rightarrow 0} z^k e^{-\frac{1}{z^2}}$$

e sappiamo che non esiste il  $\lim_{z \rightarrow 0} z^k e^{-\frac{1}{z^2}}$ , qualunque sia  $k \in \mathbb{N}$ , dato che  $0$  è una singolarità essenziale per  $e^{-\frac{1}{z^2}}$ ,  $0$  resta una singolarità essenziale anche per  $f$ .

Calcoliamo ora il residuo all'infinito  $\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{i - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{\frac{iz - 1}{z}} = \frac{1}{z} \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1 - iz}$$

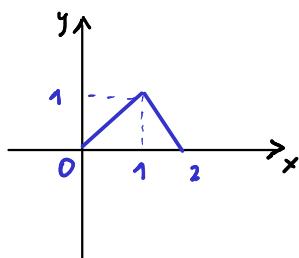
$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z} \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1 - iz} = 1 \quad \text{quindi } 0 \text{ è un polo semplice per } -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\text{e } \text{Res}(f, \infty) = 1$$

Dal Teorema del residuo  $\text{Res}(f, 0) = -\text{Res}(f, \infty) - \text{Res}(f, i) = e - 1$

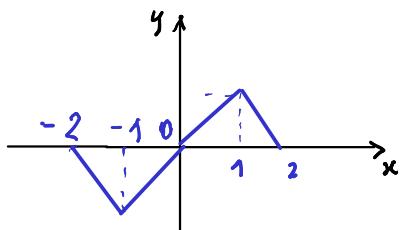
5) Si vede, ad esempio, pag. 96 degli appunti.

6) La funzione  $f$  ha grafico



$$\text{Osserviamo che } f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2-x & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases}$$

La sua estensione discontinua su  $[-2, 2]$  ha grafico



e quindi la sua estensione periodica a  $\mathbb{R}$  di periodo 4 è continua su  $\mathbb{R}$ , di classe  $C^\infty$  su  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  e in ogni  $m \in \mathbb{Z}$   $f$  è derivabile destra e destra minima. La serie di somme di  $f$  converge quindi uniformemente su  $\mathbb{R}$ .

I coefficienti della serie di soli seni sono dati da

$$\begin{aligned}
 b_k &= \int_0^2 (1 - |x-1|) \sin\left(\frac{\pi}{2} k x\right) dx = \\
 &= \int_0^1 x \sin\left(\frac{\pi}{2} k x\right) dx + \int_1^2 (2-x) \sin\left(\frac{\pi}{2} k x\right) dx = \\
 &= -\frac{2}{k\pi} \left( x \cos\left(\frac{\pi}{2} k x\right) \right) \Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} k x\right) dx - \\
 &\quad - \frac{2}{k\pi} \left( (2-x) \cos\left(\frac{\pi}{2} k x\right) \right) \Big|_1^2 - \frac{2}{k\pi} \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} k x\right) dx \\
 &= 0 + \frac{4}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} k x\right) \Big|_0^1 - 0 - \frac{4}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} k x\right) \Big|_1^2 = \\
 &= \frac{8}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} k\right)
 \end{aligned}$$

Dunque la serie dei soli seni di  $f$  è  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} k\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} k x\right)$

Per  $x=1$  questa converge a  $f(1)=1$  cioè

$$(*) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{(k\pi)^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} k\right) = 1 . \quad \text{Poiché } \sin^2\left(\frac{\pi}{2} k\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

possiamo risolvere (\*) così :  $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{8}{((2j+1)\pi)^2} = 1$

Quindi  $\frac{8}{\pi^2} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{8}{((2j+1)\pi)^2} = 1$

Politecnico di Bari  
 Complementi di Analisi Matematica – Laurea Ingegneria Informatica e Automazione  
 A.A. 2012/2013      Appello 9 luglio 2014      Traccia A

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

- 1) Studiare la convergenza totale su  $\mathbb{R}$  della serie

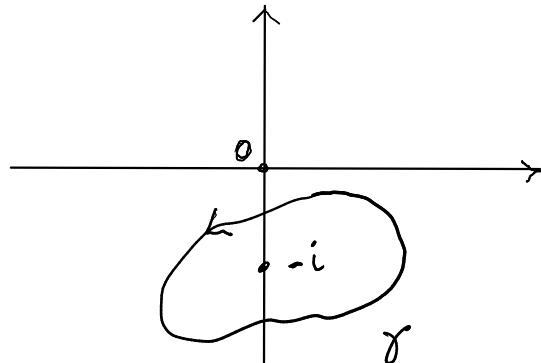
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2x^2}{\frac{1}{3} + n^2x^2} \log\left(1 + \frac{2}{n^2}\right).$$

- 2) Dare la definizione di raggio di convergenza e disco di convergenza per una serie di potenze in  $\mathbb{C}$ . Dimostrare poi che una serie di potenze in  $\mathbb{C}$  di centro 0 converge totalmente su ogni disco  $D(0, \rho')$  con  $0 \leq \rho' < \rho$ , dove  $\rho$  è il raggio di convergenza.

- 3) Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{z^3 - 2}{z(z+i)^2} dz,$$

dove  $\gamma$  è la curva in figura percorsa nel verso antiorario.



- 4) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$e^{z+2\pi i} e^{z-8\pi i} = i.$$

- 5) Enunciare e dimostrare il I Teorema dei residui.

- 6) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2 + \cos(2t)} dt.$$

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

- 1) Studiare la convergenza totale su  $\mathbb{R}$  della serie

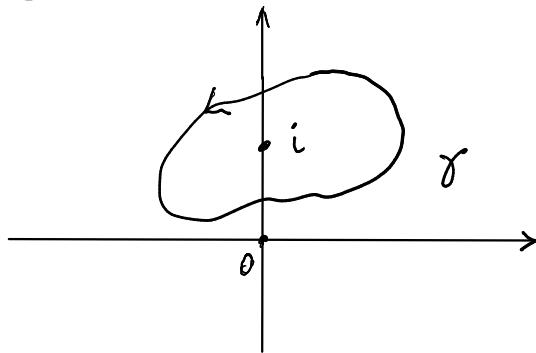
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n|x|}{\frac{1}{2} + n|x|} \arctan\left(\frac{2}{n^3}\right).$$

- 2) Dare la definizione di raggio di convergenza e disco di convergenza per una serie di potenze in  $\mathbb{C}$ . Dimostrare poi che una serie di potenze in  $\mathbb{C}$  di centro 0 converge totalmente su ogni disco  $D(0, \rho')$  con  $0 \leq \rho' < \rho$ , dove  $\rho$  è il raggio di convergenza.

- 3) Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{2+z^2}{z^2(z-i)^2} dz,$$

dove  $\gamma$  è la curva in figura percorsa nel verso antiorario.



- 4) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$e^{z-2\pi i} e^{z+6\pi i} = -1.$$

- 5) Enunciare e dimostrare il I Teorema dei residui.

- 6) Usando il metodo dei residui, calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2 + \sin(2t)} dt.$$

# Possibile soluzione prova del 9/7/14

TRACCIA A (la traccia B è del tutto analogo)

$$1) \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \frac{2m^2x^2}{\frac{1}{3} + m^2x^2} \leq 2$$

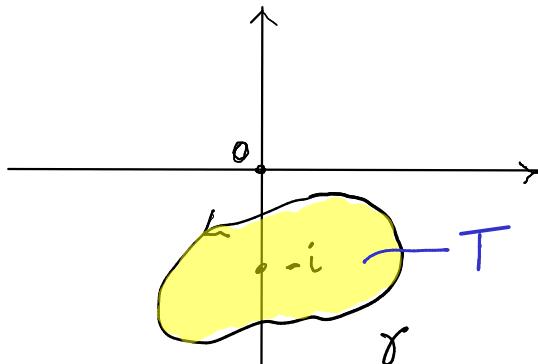
$$\text{per cui, } \forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \frac{2m^2x^2}{\frac{1}{3} + m^2x^2} \log\left(1 + \frac{2}{m^2}\right) \leq 2 \log\left(1 + \frac{2}{m^2}\right)$$

$$\text{Poiché } 2 \log\left(1 + \frac{2}{m^2}\right) \sim \frac{4}{m^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{m^2} \in \mathbb{R}$$

la serie assegnata converge totalmente su  $\mathbb{R}$

2) Si veda, ad esempio, pag 35-36 degli appunti.

3) Sia  $T$  il dominio ovale per borolo  $\gamma$ . Poiché  $f(z) = \frac{z^3 - 2}{z}$



è chiuso su  $T$ , possiamo applicare le seconde formule di rappresentazione di Cauchy.

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z+i)^2} = 2\pi i f'(-i)$$

$$f'(z) = \frac{3z^2 - (z^3 - 2)}{z^2}, \quad f'(-i) = \frac{-2i + 2}{-1}.$$

Riunendo

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z+i)^2} = -2\pi i (2 + 2i) = 4\pi - 4\pi i$$

$$4) e^{z+2\pi i} e^{z-8\pi i} = e^{2z-6\pi i} = e^{2z}$$

Dunque  $e^{2z} = i \Leftrightarrow 2z = \log(i) \Leftrightarrow$

$$2z = \log|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)i, k \in \mathbb{Z}$$

5) Si veda, ad esempio, p. 123 sopra.

$$6) \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2 + \cos(2t)} dt = \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{2 + \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)} \frac{1}{iz} dz$$

$$= \frac{1}{i} \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{z^2 + 1}{4z^2 + z^4 + 1} dz$$

le singolarità della funzione integranda sono gli zeri di  $z^4 + 4z^2 + 1$

Porto  $z^2 = w$ , questi sono soli due

$$z^2 = -2 + \sqrt{3}$$

$$e \quad z^2 = -2 - \sqrt{3}$$

Poiché  $|-2 - \sqrt{3}| > 1$

anche le radici

gli  $-2 - \sqrt{3}$  hanno

modulo  $> 1$ ; per cui

queste singolarità non appartengono a  $D(0,1)$

$$z = \pm i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Chiaro che entrambe queste singolarità sono poli semplici e primi.

$$\text{Res}\left(\frac{z^2 + 1}{z^4 + 4z^2 + 1}, i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2-\sqrt{3}}} (z - i\sqrt{2-\sqrt{3}}) \frac{z^2 + 1}{z^4 + 4z^2 + 1}$$

$$= \frac{- (2 - \sqrt{3}) + i}{D(z^4 + 4z^2 + 1) \Big|_{z=i\sqrt{2-\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4i\sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{3}-2+2)} =$$

$$= - \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}} ;$$

$$\text{Res} \left( \frac{z^2+1}{z^4+4z^2+1}, -i\sqrt{2-\sqrt{3}} \right) = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2-\sqrt{3}}} \frac{(z+i\sqrt{2-\sqrt{3}}) \frac{z^2+1}{z^4+4z^2+1}}{}$$

$$= \frac{- (2 - \sqrt{3}) + i}{D(z^4 + 4z^2 + 1) \Big|_{z=-i\sqrt{2-\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{-4i\sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{3}-2+2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}} ;$$

Quindi l'integrale cercato è uguale a

$$2\pi i \left( -\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}} i + \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}} i \right) = 0$$

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

- 1)** Studiare la convergenza totale su  $[0, +\infty)$  e su  $[a, +\infty)$ , con  $a > 0$ , della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 x^n + 1}.$$

- 2)** Dimostrare che se  $f = u + iv$  è olomorfa in  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aperto allora  $u$  e  $v$  sono differenziabili su  $\Omega$  e per ogni  $z_0 \in \Omega$  soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann.  
**3)** Determinare le soluzioni in  $\mathbb{C}$  dell'equazione

$$\sin z = e^{iz}.$$

- 4)** Dimostrare il Teorema fondamentale dell'algebra.  
**5)** Determinare le singolarità e i residui, al finito e all'infinito, della funzione

$$f(z) = \frac{2z^2 - 1}{z^3}.$$

- 6)** Determinare la serie di solo seni della funzione

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2).$$

Stabilire quindi, motivando la risposta che la serie

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \left( \frac{8}{(2h+1)\pi} - \frac{32}{((2h+1)\pi)^3} \right) (-1)^h$$

converge ed ha per somma 1

*Per l'anno accademico 2009/2010, si sostituisca l'esercizio 6) con il seguente:*

- 6)** Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-2, 2]$$

e discuterne la convergenza uniforme.

# PROVA DEL 01/09/14 (Possibile svolgimento)

1) Fissate  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ , la funzione  $f_m(x) = \frac{1}{m^3 x^m + 1}$  è positiva

strettamente decrescente su  $[0, +\infty)$ ,

$$\text{per cui } \max_{x \in [0, +\infty)} f_m(x) = f_m(0) = 1, \forall m.$$

Quindi la serie anzidata non converge totalmente su  $[0, +\infty)$

$$\text{Doveva, } \max_{x \in [0, +\infty)} f_m(x) = f_m(\alpha) = \frac{1}{m^3 \alpha^m + 1} \text{ e}$$

la serie  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{m^3 \alpha^n + 1}$  converge se  $\alpha > 1$

$$\text{in quanto } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{m \alpha^n + 1}} = \frac{1}{\alpha} < 1$$

se  $\alpha = 1$  anche converge in quanto  $\frac{1}{m^3 + 1} \sim \frac{1}{m^3}$

se  $0 < \alpha < 1$  diverge in quanto  $\frac{1}{m^3 \alpha^m + 1} \rightarrow 1$

Dunque la convergenza è totale solo su  $[\alpha, +\infty)$  con  $\alpha \geq 1$

2) Si vogliono, ad esempio, pp. 22-24 degli appunti

3) Poiché  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  l'equazione è equivalente a

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i e^{iz} \quad \text{cioè}$$

$$(1-2i) e^{iz} = \frac{1}{e^{iz}} \iff (1-2i) e^{2iz} = 1 \iff e^{2iz} = \frac{1}{1-2i}$$

$$\iff e^{2iz} = \frac{1+2i}{5} \iff 2iz = \log \left( \frac{1+2i}{5} \right) =$$

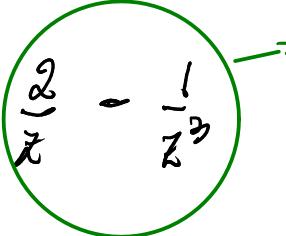
$$= \log \frac{1}{\sqrt{5}} + i \left( \arg \left( \frac{1+2i}{5} \right) + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff z = \frac{1}{2} \arg \left( \frac{1+2i}{5} \right) + k\pi + \frac{i}{2} \log \sqrt{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4) mi vole, ad esempio, p. ri degli appunti

5) l'unica singolarità al finito è  $z=0$  che è un polo di ordine 3.

Pertanto  $f(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^3}$



*è una mia idea (scusa!)*  
fatti gli zeri sono multipli  
d'ordine  $a_{-1}$  e  $a_{-3}$

$$a_{-1} = 2 = \text{Res}(f, 0)$$

$\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}(f, 0)$  per il II teorema dei residui

$$6) b_k = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 g(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{4}x\right) dx = \int_0^2 x^2 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

dove  $g = g(x)$  è l'estensione dispari di  $f$  all'intervento

$(-2, 2)$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) dx &= -\frac{2}{k\pi} \left( x^2 \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \right) \Big|_0^2 + \frac{4}{k\pi} \int_0^2 x \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &= -\frac{8}{k\pi} (-1)^k + \frac{8}{(k\pi)^2} \left( x \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \right) \Big|_0^2 - \frac{8}{(k\pi)^2} \int_0^2 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &= -\frac{8}{k\pi} (-1)^k + 0 + \frac{16}{(k\pi)^3} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \Big|_0^2 = \\ &= -\frac{8}{k\pi} (-1)^k + \frac{16}{(k\pi)^3} ((-1)^k - 1) \end{aligned}$$

Dunque la serie di zeri cui di  $f$  è data da

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left( -\frac{8}{k\pi} (-1)^k + \frac{16}{(k\pi)^3} ((-1)^k - 1) \right) \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

Per  $x=1$  questo converge a  $f(1) = 1$  dato che  
 $f$  è di classe  $C^\infty$  su  $[0, 2-\varepsilon]$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ .

Esistenza di per  $k$  pari ( $\neq x=1$ )

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$$

per  $k$  dispari cioè  $k = 2h+1$ ,  $h \in \mathbb{Z}$

la serie divenne

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \left( \frac{8}{(2h+1)\pi} - \frac{32}{((2h+1)\pi)^3} \right) \sin\left((2h+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (= f(z) = L)$$

e dato che  $\sin\left((2h+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^h$  si ottiene

il risultato richiesto.

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

- 1) Determinare l'insieme di convergenza della serie in  $\mathbb{R}$ :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n - n}.$$

- 2) Dimostrare che per una qualunque curva continua  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt.$$

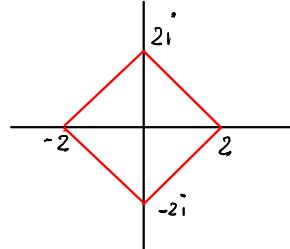
- 3) Dare la definizione di zero di ordine  $m$  e di zero isolato per una funzione  $f$  olomorfa su un aperto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Dimostrare, poi, che  $z_0 \in \Omega$  è uno zero isolato per  $f$  se e solo esiste  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  per cui  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$ .
- 4) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$\sin(iz) = 1.$$

- 5) Calcolare

$$\int_{\partial^+ D} \frac{z+1}{(z^2+1)^4(z-3)} dz,$$

done  $D$  è il rombo rappresentato in figura



- 6) Determinare la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1/2) \\ 0 & \text{se } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Calcolare, quindi, la somma della serie

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h 2}{(2h+1)\pi}$$

*Per l'anno accademico 2009/2010, si sostituisca l'esercizio 6) con il seguente:*

- 6) Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1/2) \\ 0 & \text{se } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

estesa per periodicità a  $\mathbb{R}$  con periodo 1, e discuterne convergenza puntuale e uniforme su  $\mathbb{R}$ .

PROVA DEL 19/09/2014 . POSSIBILE SVOLGIMENTO

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}}} = \frac{1}{2}$$

Dunque il raggio di convergenza è  $\rho = 2$  ed avendo centro  $-z$ , sicuramente la serie converge su  $(-3, 1)$

Per  $x=1$  la serie diviene

$$(a) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n - n} . \text{ Poiché } \frac{2^n}{2^n - n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ (a) diverge positivamente}$$

Per  $x=-3$  la serie diviene

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{2^n - n} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n - n} \text{ che è una serie a segni alterni.}$$

Poiché  $\frac{2^n}{2^n - n}$  non tende a 0, essa non converge. In definitiva

l'insieme di convergenza puntuale è l'intervallo  $(-3, 1)$

2) Si vede, ad esempio, p. 62 degli appunti

3) " " " p. 79 " "

$$4) \sin(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Allora l'equazione assegnata è equivalente a

$$z - e^{iz} - 2ie^{-iz} = 0 \text{ che equivale a } (e^{iz} + i)^2 = 0 \text{ cioè}$$

$$e^{iz} = -i \quad \text{ovvero} \quad z = \log|-i| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

5) Giurine applicare le I e il II teorema dei residui

Difatti le singolarità di  $f(z) = \frac{z+1}{(z^2+1)^4(z-3)}$  sono  $\{i, -i, 3\}$

Di queste solo  $i$  e  $-i$  appartengono a  $D$ , quindi fare il I  
teorema dei residui  $\int_D f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)) =$  II teorema

$$= -2\pi i (\text{Res}(f, 3) + \text{Res}(f, \infty))$$

$$3 \text{ è un polo semplice quindi } \text{Res}(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z+1}{(z^2+1)^4} = \frac{4}{10^4}$$

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\frac{1}{z} + 1}{\left(\frac{1}{z^2} + 1\right)^4 \left(\frac{1}{z} - 3\right)} = -\frac{\frac{1+z}{z}}{\frac{(1+z^2)^4}{z^8} \frac{1-3z}{z}} = -\frac{z^6(1+z)}{(1+z^2)^4}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-z^6(1+z)}{(1+z^2)^4} = 0, \text{ quindi } 0 \text{ è una singolarità eliminabile per } -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

e dunque  $\text{Res}(f, \infty) = 0$ . In definitiva l'integrale assegnato è uguale a  $-\frac{8\pi i}{10^4}$

6)

Sia  $f$  l'estensione pari di  $f$  all'intervallo  $[-1, 1]$ .

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

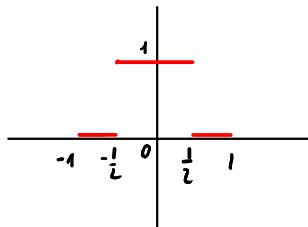
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{2}\right) dx = 2 \int_0^1 f(x) \cos(k\pi x) dx = \\ &= 2 \int_0^{1/2} \cos(k\pi x) dx = \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi x) \Big|_0^{1/2} = \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ (-1)^h & \text{se } k = 2h+1, h \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Quindi la serie di soli coseni di  $f$  è data da

$$\frac{1}{2} + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^h}{(2h+1)\pi} \cos((2h+1)\pi x)$$

Poiché l'estensione pari di  $f$  (il cui grafico è in basso qui sotto)



è olì class  $C^2$  su  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , la serie di soli coseni di  $f$  converge a  $f(x) = 1$  per  $x = 0$

Dunque  $\frac{1}{2} + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h 2}{(2h+1)\pi} = 1$  cioè  $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h 2}{(2h+1)\pi} = \frac{1}{2}$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ N° Matricola \_\_\_\_\_

- 1) Determinare l'insieme di convergenza della serie in  $\mathbb{R}$ :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(1/n)}{n^2 - 1} (x - 2)^n.$$

- 2) Ricavare lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione  $f(x) = \arctan x$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

- 3) Calcolare

$$\int_{\partial^- D(i, 1/2)} \frac{z^2 - 1}{z^3(z - i)^2} dz.$$

- 4) Enunciare e dimostrare il I teorema dei residui.

- 5) Calcolare i residui nelle singolarità al finito della funzione

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - 2iz - 1)(z + 1)}$$

- 6) Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

estesa per periodicità a  $\mathbb{R}$  con periodo 2. Dimostrare poi che

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} = \pi/4.$$

# Appello Complemento di Analisi Matematica

venerdì 14 novembre 2014 14:30

- 1) Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze in  $\mathbb{R}$

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{m})}{m^2-1} (x-2)^m.$$

$$\frac{\cos(\frac{1}{m+1})}{(m+1)^2-1} \cdot \frac{m^2-1}{\cos \frac{1}{m}} \rightarrow 1$$

quindi  $p=1$ . L'intervallo di convergenza è quindi  $(1,3)$

Per  $x=1$ , la serie diventa:

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{m})}{m^2-1} (-1)^m \quad (1)$$

$$\text{Per } x=3 \text{ diventa: } \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{m}}{m^2-1} \quad (2)$$

Entrambe queste serie convergono in modulo. Vediamo per

la (1) (la (2) è simile)

$$\left| \frac{\cos(\frac{1}{m})}{m^2-1} (-1)^m \right| = \frac{|\cos(\frac{1}{m})|}{m^2-1} \leq \frac{1}{m^2-1} \sim \frac{1}{m^2}$$

Poiché  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$ , la (1) converge in modulo e quindi converge. Dunque l'insieme di convergenza è  $[1,3]$

- 2) Ricavare lo sviluppo in serie di Mac-Laurin della funzione  $f(z) = \arctan z$ ,  $z \in [-1,1]$

Si veda pag. 58 degli appunti

- 3) Calcolare

$$\int_{D(i, \frac{1}{2})} \frac{z^2-1}{z^3(z-i)^2} dz$$

La funzione  $g(z) = \frac{z^2-1}{z^3(z-i)^2}$  ha singolarità 0 e  $i$

Di questo  $i \in D(i, \frac{1}{2})$  mentre  $0 \notin D(i, \frac{1}{2})$

Posto  $f(z) = \frac{z^3 - 1}{z^2}$ ,  $f \in H(D(i, \frac{1}{2}))$  e quindi per la II formula di rappresentazione di Cauchy

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(i, \frac{1}{2})} \frac{|f(z)| dz}{(z-i)^2} &= - \int_{\partial D(i, \frac{1}{2})} \frac{f'(z) dz}{(z-i)^2} = -2\pi i f'(i) = -2\pi i \frac{\frac{d}{dz}(z^3 - 1) \Big|_{z=i}}{z^2} \\ &= -2\pi i \frac{2 - (-2)(-3)}{-1} \\ &= -8\pi i \end{aligned}$$

4) Enunciare e dimostrare il Teorema dei residui.

Si risolve, ad esempio, p. 123 degli appunti

5) Calcolare i residui sulla singolarità di finito della funzione

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - 2iz - 1)(z+1)}$$

$(z^2 - 2iz - 1) = (z-i)^2$ , quindi le singolarità sono

$\{i, -1\}$ .  $i$  è un polo di ordine 2,  $-1$  un polo semplice. Per cui

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} D((z-i)^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow i} D\left(\frac{\cos z}{z+1}\right) = \\ &\lim_{z \rightarrow i} \frac{-\sin z (z+1) - \cos z}{(z+1)^2} = \frac{-\sin i (i+i) - \cos i}{(i+i)^2} = \frac{-\frac{e^{-i}-e^i}{2i} (1+i) - \left(\frac{e^{-i}+e^i}{2}\right)}{2i} \end{aligned}$$

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\cos z}{(z-i)^2} = \frac{\cos(-1)}{(1+i)^2} = \frac{\cos(-1)}{2i} = \frac{e^{-i} + e^i}{2i}$$

6) Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1] \\ 0 & t \in [-1, 0) \end{cases}$$

Dimostrare poi che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \int_{-1}^1 f(t) \cos\left(\frac{2\pi k t}{2}\right) dt = \int_0^1 \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi) \Big|_0^1$$

$$a_k = \int_{-1}^1 f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{2} kt\right) dt = \int_0^1 \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \Big|_0^1$$

$$= 0$$

$$b_k = \int_{-1}^1 f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{2} kt\right) dt = \int_0^1 \sin(k\pi t) dt = -\frac{1}{k\pi} \cos(k\pi t) \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{k\pi} (\cos(k\pi) - 1) = \frac{1}{k\pi} (1 + (-1)^k)$$

Quindi la serie di Fourier di  $f$  è

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} (1 - (-1)^k) \sin(k\pi t) = \frac{1}{2} + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{(2h+1)\pi} \sin((2h+1)\pi t)$$

Poiché  $f$  è di classe  $C^\infty$  in un intorno di  $t = \frac{1}{2}$ , la

nuova serie di Fourier converge a  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$  per  $t = \frac{1}{2}$

Quindi:

$$\frac{1}{2} + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{(2h+1)\pi} (-1)^h = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\text{cioè } \frac{2}{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

Cognome\_\_\_\_\_ Nome\_\_\_\_\_ N° Matricola\_\_\_\_\_

- 1)** Determinare il limite puntuale sull'intervallo  $[0, +\infty)$  della successione di funzioni reali

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1+x^n}.$$

Dire poi se la convergenza è anche uniforme sullo stesso intervallo.

- 2)** Enunciare il teorema sulla derivabilità di una funzione complessa. Stabilire, poi, se la funzione  $f(z) = \bar{z}z^2$  è derivabile in  $z = 1$ .
- 3)** Dare la definizione di zero di ordine  $m$  per una funzione olomorfa. Dimostrare, poi, che  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$  per  $f$  se e solo se  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$  per ogni  $k \in \{0, \dots, m-1\}$  e  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ .
- 4)** Calcolare il residuo in 0 per la funzione  $f(z) = z^5 \sin(1/z^2)$ .
- 5)** Dare la definizione di residuo all'infinito. Dimostrare poi che  $\text{Res}(f(z); \infty) = \text{Res}(-\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}); 0)$ .
- 6)** Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \\ x^2 & \text{se } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

estesa per periodicità a  $\mathbb{R}$  con periodo 2. Dimostrare poi che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(k\pi)^2} = \frac{1}{3}.$$

1) Determinare il limite puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1+x^n} \quad \text{su } [0, +\infty). \quad \text{Stabilire, poi, se}$$

$f_n$  converge uniformemente nello stesso insieme

- Se  $\bar{x} \in [0, 1)$ ,  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , quindi  $f_n(\bar{x}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}^2$
- se  $\bar{x} = 1$   $f_n(1) = \frac{1}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  quindi  $f_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$
- se  $\bar{x} > 1$   $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , quindi  $f_n(\bar{x}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Dunque, le limiti puntuali di  $\{f_n\}$  è la funzione  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

Poiché le funzioni  $f_n$  sono continue su  $[0, +\infty)$  e  $\{f_n\}$  convergono uniformemente a  $f$  su  $[0, +\infty)$ ,  $f$  dovrebbe essere continua. Poiché  $f$  ha una discontinuità in  $x = 1$  la convergenza non è uniforme su  $[0, +\infty)$

2) Per l'esercizio sul teorema riporta, ad esempio, pag. 21 degli appunti

$$\begin{aligned} \text{Posto } z = x+iy \quad f(z) &= (x-iy)(x+iy)^2 = \\ &= (x-iy)(x^2 - y^2 + 2ixy) \\ &= \underbrace{x(x^2 - y^2 + 2xy)}_{u(x,y)} + i \underbrace{(y(y^2 - x^2) + 2x^2)}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

$$u_x(x, y) = x^2 - y^2 + 2x^2 + 2xy$$

$$v_y(x, y) = y^2 - x^2 + 2x^2$$

Poiché  $u_x(1, 0) = 3 \neq v_y(1, 0) = -1$ ,  $f$  non è derivabile in 1

3) Si vedano, ad esempio, pagg. 77-78 degli appunti.

$$4) f(z) = z^5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^{2k+1} =$$

...

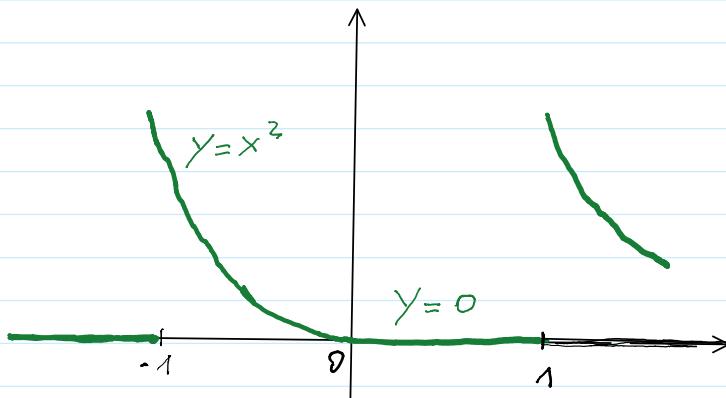
$$4) f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z^2}\right) = z^5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k+2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k-3}}$$

Dei coefficienti dei termini  $\frac{1}{z^k}$  si ottiene per  $4k-3=1$

$$\text{cioè } k=1, \text{ quindi } \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

5) Si veda, ad esempio, pagg. 125-126 degli appunti

6)



$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 x^2 dx = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{2}\right) dx = \int_{-1}^0 x^2 \cos(k\pi x) dx = \\ &= \frac{x^2 \sin(k\pi x)}{k\pi} \Big|_{-1}^0 - \frac{2}{k\pi} \int_{-1}^0 x \sin(k\pi x) dx = \\ &= 0 + \frac{2}{(k\pi)^2} x \cos(k\pi x) \Big|_{-1}^0 - \frac{2}{(k\pi)^2} \int_{-1}^0 \cos(k\pi x) dx = \\ &= \frac{2}{(k\pi)^2} \cos(k\pi) - \frac{2}{(k\pi)^2} \sin(k\pi x) \Big|_{-1}^0 = \frac{2(-1)^k}{(k\pi)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \sin(k\pi x) dx = \int_{-1}^0 x^2 \sin(k\pi x) dx = \\ &= -x^2 \cos(k\pi x) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 x \cos(k\pi x) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x^2}{k\pi} \cos(k\pi x) \Big|_{-1}^0 + \frac{2}{k\pi} \int_{-1}^0 x \cos(k\pi x) dx = \\
&= \frac{1}{k\pi} \cos(k\pi) + \frac{2}{(k\pi)^2} x \sin(k\pi x) \Big|_{-1}^0 - \frac{2}{(k\pi)^2} \int_{-1}^0 \sin(k\pi x) dx \\
&= \frac{(-1)^k}{k\pi} + 0 + \frac{2}{(k\pi)^3} \cos(k\pi x) \Big|_{-1}^0 = \frac{(-1)^k}{k\pi} + \frac{2}{(k\pi)^3} (1 - (-1)^k)
\end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier di  $f$  è data da

$$\frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^k 2}{(k\pi)^2} \cos(k\pi x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k\pi} + \frac{2}{(k\pi)^3} (1 - (-1)^k) \right] \sin(k\pi x) \right]$$

Notiamo che per  $x=1$  tale serie converge a  $\frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{1}{2}$

$$\text{Quindi } \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^k 2}{(k\pi)^2} (-1)^k + 0 \right] \xrightarrow{\forall k \in \mathbb{N}} \sin(k\pi) = 0$$

$$\text{di cui ottieniamo } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(k\pi)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$