1) - a) Determinare la forma esponenziale del numero complesso

$$z = (2i)^2 \frac{e^{2-i}}{i-1}$$

ed estrarne le radici terze

$$z = -4 \frac{e^{2-i}}{\sqrt{2}\, e^{+\frac{3}{4}\pi i}} = -2\sqrt{2}\, e^2 e^{i(-\frac{3}{4}\pi - 1)} = 2\sqrt{2}\, e^2 e^{+i\pi} e^{i(-\frac{3}{4}\pi - 1)}$$

$$= \underbrace{2\sqrt{2}\, e^2 e^{i\frac{\pi-4}{4}}}_{\text{forma esponenziale}}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt{2}\, e^{2/3} e^{i\left(\frac{\pi-4}{12} + \frac{2}{3}\pi k\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

1) - b) Determinare dominio, tipo di monotonia e immagine della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \log(2^x + 1)$$

$\mathrm{dom} f = (0, +\infty)$

f è il prodotto di due funzioni positive: $f_1(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ e $f_2(x) = \log(2^x+1)$

f_1 è strett. crescente in quanto composta da

$x \in (0,+\infty) \mapsto -x^{-\frac{1}{2}}$ (poiché $y = x^{-\frac{1}{2}}$ è strett. decrescente, $y = -x^{-\frac{1}{2}}$ è strett. crescente)

e da $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ che sono entrambe strett. crescenti

f_2 è composta da $x \in \mathbb{R} \mapsto 2^x + 1$ e $x \in (0,+\infty) \mapsto \log x$

che sono entrambe strett. crescenti. Quindi f è strett. crescente.

Poiché $f \in C^0((0,+\infty))$, abbiamo che $\mathrm{Im} f = \left(\lim_{x \to 0^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$

2) Determinare gli asintoti della funzione

$f(x) = \dfrac{\log(2^x - 4)}{x - 3}$. Si consideri poi la funzione $g(x) = (x-3) f(x)$ e se ne studi la convessità

$\mathrm{dom} f$: $\begin{cases} 2^x - 4 > 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x > 2^2 \\ x \neq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$ quindi $\mathrm{dom} f = (2, +\infty) \setminus \{3\}$

$f \in C^0((2,3) \cup (3,+\infty))$ quindi gli asintoti verticali sono da cercare nei punti

$x = 2$ e $x = 3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{-\infty}{-1} = +\infty$ quindi la retta $x = 2$ è asintoto verticale a dx

$\lim_{x \to 3^\pm} f(x) = \dfrac{\log(4)}{0^\pm} = \pm\infty$ " " " $x = 3$ " " " sia a sx che a dx

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(2^x\left(1 - \frac{4}{2^x}\right)\right)}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log 2^x + \log\left(1 - \frac{4}{2^x}\right)}{x-3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(2^x\left(1-\frac{4}{2^x}\right)\right)}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log 2^x + \log\left(1-\frac{4}{2^x}\right)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x \log 2}{x-3} + \lim_{x\to+\infty} \log\left(1-\frac{4}{2^x}\right)\Big/ x-3 = \log 2 + \frac{0}{+\infty} = \log 2$$

quindi la retta $y = \log 2$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

$$g(x) = \log(2^x - 4) \; ; \quad g'(x) = \frac{1}{2^x - 4} \, 2^x \log 2$$

$$g''(x) = \frac{2^x \log^2 2 \,(2^x-4) - (2^x \log 2)^2}{(2^x-4)^2} = \frac{2^x \log^2 2 \; (2^x - 4 - 2^x)}{(2^x-4)^2} = -4\,\frac{2^x \log^2 2}{(2^x-4)^2}$$

$g''(x) < 0 \quad \forall x \in \text{dom}\, g$ quindi g è strett. concava sul suo dominio.

3) Calcolare $\int_1^2 x\, e^{\sqrt{x}}\, dx$

$$\int_1^2 x\, e^{\sqrt{x}}\, dx \underset{\substack{x = t^2 \\ dx = 2t\,dt}}{\overset{\sqrt{x}=t}{=}} \int_1^{\sqrt{2}} 2t^3 e^t\, dt = 2t^3 e^t \Big|_1^{\sqrt{2}} - 6\int_1^{\sqrt{2}} t^2 e^t\, dt = 4\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}} - 2e - 6t^2 e^t \Big|_1^{\sqrt{2}} + 12\int_1^{\sqrt{2}} t\, e^t\, dt$$

$$= 4\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}} - 2e - 12\, e^{\sqrt{2}} + 6e + 12te^t \Big|_1^{\sqrt{2}} - 12\int_1^{\sqrt{2}} e^t\, dt$$

$$= (4\sqrt{2} - 12)e^{\sqrt{2}} + 4e + 12\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}} - \cancel{12e} - 12e^{\sqrt{2}} + \cancel{12e} = (16\sqrt{2} - 24)e^{\sqrt{2}} + 4e$$

4) Scrivere la definizione topologica di limite per una funzione reale di variabile reale

Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno per una funzione avente limite

Fornire un esempio per cui l'implicazione opposta nel teorema della permanenza del segno è falsa

Definizione: Sia $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$ e $l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se, per definizione, $\forall V \in \mathcal{I}(l)\ \exists U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $\forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\} : f(x) \in V$

Per enunciato e dimostrazione del teorema richiesto si guardi, ad esempio, p. 84 del manuale consigliato.

Un possibile esempio è $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Infatti $f > 0$ ma $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$