

1)-a) Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n \log^3 n} - \frac{1}{(n-1)^{3/2}} \right)$$

Possiamo studiare separatamente $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n \log^3 n}$ e $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^{3/2}}$

(1)

(2)

(2) converge dato che $\frac{1}{(n-1)^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$

Per la (1) possiamo usare il criterio dell'integrale:

Consideriamo $f(x) = \frac{2}{x \log^3 x}$. Poiché f sugli intervalli maggiori o uguali di 2 coincide con la successione $\frac{2}{n \log^3 n}$ e f è dimostrato allora il criterio di (1) è lo stesso di quello dell'integrale $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ che seppiamo essere convergente. La serie assegnata essendo somma di due serie convergenti è anch'essa convergente.

1)-b) Calcolare la somma di $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n} &= \sum_{n=3}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 4 = \frac{1}{4} - \frac{27}{16} = -\frac{23}{16} \end{aligned}$$

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sin(x^2 - y^2)} \quad \text{e rappresentarla sul piano}$$

Dice se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi

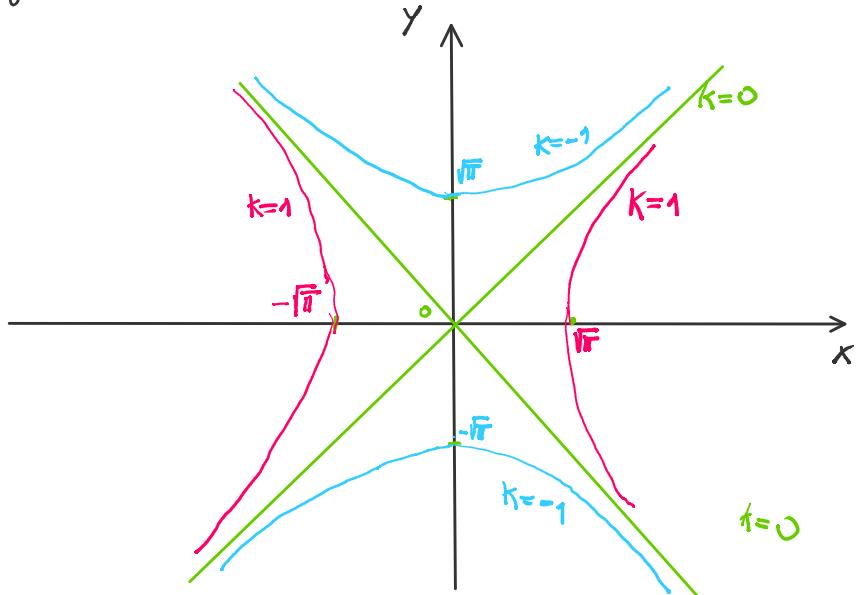
Trovare poi le curve di livello 0 di f

Stabilire che f è differenziabile nel suo dominio

Determinare infine l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0, f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\right)$

$\text{dom } f: \sin(x^2 - y^2) \neq 0 \Rightarrow x^2 - y^2 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ovviamente $\text{dom } f$ è il piano privato della famiglia di iperbolidi $x^2 - y^2 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Disegniamo quelli che si ottengono per $k=0, -1, 1$



Osserviamo che $\text{dom } f = \mathbb{R}^2 \setminus g^{-1}\{0\}$, con $g(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$.

Poiché g è continua e $g^{-1}\{0\}$ è chiuso e quindi $\text{dom } f$ è aperto

Già noto che $\text{dom } f$ è un unione illimitata e non连通的 per svolto che le iperbolidi $x^2 - y^2 = k\pi$ suddividono il piano in regioni che non possono essere collegate da curve continue senza attraversare alcuna delle iperbolidi stesse.

La curva di livello 0 è data dai punti (x,y) per cui $f(x,y) = 0$

Oltre allo punto che soddisfano $xy=0$; quelli sono tutti i punti dell'asse delle x e di quello delle y

Sul dominio f è differentiabile in quanto le derivate parziali continue (th del differenziabile):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y \sin(x^2-y^2) - xy \cos(x^2-y^2) \cdot 2x}{\sin^2(x^2-y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x \sin(x^2-y^2) - xy \cos(x^2-y^2) \cdot (-2y)}{\sin^2(x^2-y^2)}$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(\frac{\pi}{2}, 0, f(\frac{\pi}{2}, 0))$ è

$$z = f(\frac{\pi}{2}, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, 0)(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}, 0)y, \text{ cioè}$$

$$z = 0 + 0(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} / \sin(\frac{\pi^2}{4})y \text{ cioè}$$

$$z = \frac{\pi}{2 \sin(\frac{\pi^2}{4})}y$$

3) Determinare l'integrale generale in forma esplicita dell'equazione

$$y' = (y+1)^2 x^{2x^2-1}$$

Qual è la soluzione che soddisfa la condizione $y(1) = -1$?

Si tratta di un'equazione a variabili separabili:

Supponendo che $y(x) \neq -1$, $\forall x$ positivo dividere entro i numeri per $y+1$

$$\frac{y'}{(y+1)^2} = x e^{2x^2-1}; \text{ integrando entro i numeri ottiene}$$

$$\int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int x e^{2x^2-1} dx \text{ da cui}$$

$$-\frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} e^{2x^2-1} + C \text{ è quindi l'integrale generale}$$

$$\text{in forma esplicita è } y(x) = -\frac{4}{e^{2x^2-1} + C} - 1, \forall C \in \mathbb{R}$$

da sostituire che soddisfa la condizione $y(1) = -1$ è quello
sia ovvero $y(x) \equiv -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- a) Enumerare le caratteristiche di un insieme misurabile
mediante le sue frontiere. Forse poi per stabilire che un
insieme normale è misurabile

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$; A è misurabile se ∂A è misurabile con misure
miste. Poiché le frontiere di un insieme misurabile è
costituita da due segmenti e due grafici di funzioni
continue, e ognuno di questi insiemini è misurabile con misure
miste, offriamo immediatamente che ogni insieme normale
è misurabile.