Analisi Matematica -- corso C -- modulo B

mercoledì 12 giugno 2024 11:00

1)-a) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{n\log^3 n}-\frac{1}{(n-1)^{3/2}}\right)$$

Possiamo studiare separatamente $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n\log^3 n}$ (1) e $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^{3/2}}$ (2)

(2) converge dato che $\displaystyle\frac{1}{(n-1)^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$

Per la (1) possiamo usare il criterio dell'integrale:

Consideriamo $f(x)=\dfrac{2}{x\log^3 x}$. Poiché f sugli interi maggiori o uguali di 2 coincide con la successione $\dfrac{2}{n\log^3 n}$ e f è decrescente allora il carattere di (1) è lo stesso di quello dell'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ che sappiamo essere convergente. La serie assegnata essendo somma di due serie convergenti è anch'essa convergente

1)-b) Calcolare la somma di $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}$

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}=\sum_{n=3}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]=\frac{1}{8}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^3 4=\frac{1}{4}-\frac{27}{16}=-\frac{23}{16}$$

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sin(x^2-y^2)}$$ e rappresentarlo sul piano

Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi

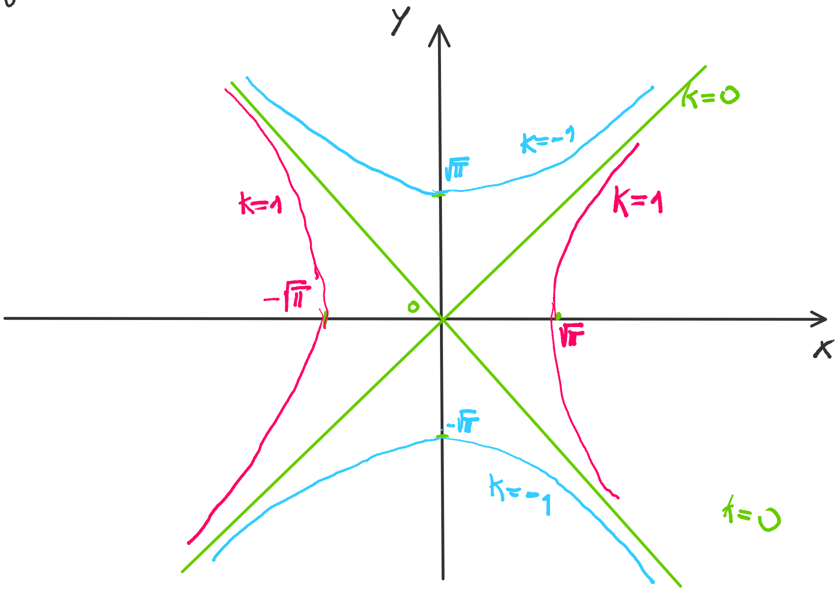
Tracciare poi le curve di livello 0 di f

Stabilire che f è differenziabile nel suo dominio

Determinare infine l'equazione del piano tg al grafico di f nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0, f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\right)$

dom f: $\quad \sin(x^2-y^2) \neq 0 \iff x^2-y^2 \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Quindi dom f è il piano privato della famiglia di iperboli $x^2-y^2 = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$. Disegniamo quelle che si ottengono per $k = 0, -1, 1$



Osserviamo che $\text{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus g^{-1}(\{0\})$, con $g(x,y) = \sin(x^2-y^2)$.
Poiché g è continua e $g^{-1}(\{0\})$ è chiuso e quindi dom f è aperto.
Chiaramente dom f è un insieme illimitato e non connesso per ardi dato che le iperboli $x^2-y^2 = k\pi$ suddividono il piano in in regioni che non possono essere collegate da curve continue senza attraversare almeno una delle iperboli stesse.

La curva di livello 0 è data dai punti (x,y) per cui $f(x,y) = 0$

ossia dai punti che soddisfano $xy=0$; quindi sono tutti i punti dell'asse delle x e di quello delle y tranne l'origine che non appartiene a dom f.

Sul dominio f è differenziabile in quanto ha derivate parziali continue (th del differenziale):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\sin(x^2-y^2) - xy\cos(x^2-y^2)\cdot 2x}{\sin^2(x^2-y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\sin(x^2-y^2) - xy\cos(x^2-y^2)\cdot(-2y)}{\sin^2(x^2-y^2)}$$

L'equazione del piano tg al grafico di f nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0, f\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right)$ è

$$z = f\left(\frac{\pi}{2},0\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2},0\right) y \text{ , cioè}$$

$$z = 0 + 0\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\Big/\sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right) y \quad \text{cioè}$$

$$z = \frac{\pi}{2\sin\left(\pi^2/4\right)}\, y$$

3) Determinare l'integrale generale in forma esplicita dell'equazione

$$y' = (y+1)^2 x e^{2x^2-1}$$

Qual è la soluzione che soddisfa la condizione $y(1) = -1$?

Si tratta di un'equazione a variabili separabili:

Supponendo che $y(x) \neq -1$, $\forall x$ possiamo dividere ambo i membri per $y+1$

$$\frac{y'}{(y+1)^2} = x e^{2x^2-1} \text{ ; integrando ambo i membri otteniamo}$$

$$\int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int x e^{2x^2-1}\, dx \quad \text{da cui}$$

$$-\frac{1}{y+1} = \frac{1}{4} e^{2x^2-1} + c$$ e quindi l'integrale generale

in forma esplicita è $y(x) = -\frac{4}{e^{2x^2-1}+c} - 1 \,, \forall c \in \mathbb{R}$

La soluzione che soddisfa la condizione $y(1) = -1$ è quella singolare $y(x) \equiv -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

4) Enunciare la caratterizzazione di un insieme misurabile mediante la sua frontiera. Usarla poi per stabilire che un insieme normale è misurabile

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$; A è misurabile $\Leftrightarrow$ ∂A è misurabile con misura nulla. Poiché la frontiera di un insieme misurabile è costituita da due segmenti e due grafici di funzioni continue, e ognuno di questi insiemi è misurabile con misura nulla, otteniamo immediatamente che ogni insieme normale è misurabile.