Esonero Complementi di Analisi Matematica

giovedì 12 novembre 2015 12:00

1) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione

A) $f(t) = e^{-it} \sin(2t)$

B) $f(t) = e^{-t} \cos(3t)$

C) $f(t) = e^{it} t^2$

D) $f(t) = e^{t} t^3$

specificando per quali $s \in \mathbb{C}$ converge.

Usando le proprietà della trasformata si ottiene subito

A) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{2}{4+(s+i)^2}$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$

B) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{s+1}{9+(s+1)^2}$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > -1$

C) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{2}{(s-i)^3}$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$

D) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{6}{(s-1)^4}$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 1$

2) Stabilire se la funzione

A) $\dfrac{s+1}{s-i}$

B) $s^2 - i$

C) $\dfrac{i-s}{1+s}$

D) $\dfrac{s^2-1}{s}$

può essere la trasformata di Laplace di qualche funzione.

Motivare la risposta

La risposta è negativa per tutte le tracce poiché:

A) $\lim_{Re s \to +\infty} \frac{s+i}{s-i} = 1 \neq 0$ per s che varia nella retta $x+i\bar{y}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$ fissato

B) fissato $\bar{y} \in \mathbb{R}$, $s = x+i\bar{y}$, $\lim_{Re s \to +\infty} s^2 - i =$

$= \lim_{x \to +\infty} x^2 - \bar{y}^2 + 2ix\bar{y} - i = +\infty \neq 0$

C) $\lim_{Re s \to +\infty} \frac{i-s}{1+s} = -1 \neq 0$ per s che varia nella retta $x+i\bar{y}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$ fissato

D) fissato $\bar{y} \in \mathbb{R}$, $s = x+i\bar{y}$, $\lim_{Re s \to +\infty} \frac{s^2-1}{s} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - \bar{y}^2 + 2ix\bar{y} - 1}{x+i\bar{y}} = +\infty \neq 0$

3) Calcolare la trasformata del seguente

A) $f(t) = \begin{cases} \sin 2t & 0 \leq t \leq \pi \\ \cos t & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

B) $f(t) = \begin{cases} \cos 3t & 0 \leq t \leq \pi \\ \sin t & t > \pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

C) $f(t) = \begin{cases} \sin 3t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \cos t & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

D) $f(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

A) Poiché $f(t) = \sin_+(2t) - \sin_+(2(t-\pi)) - \cos_+(t-\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{2}{4+s^2} - e^{-\pi s}\frac{2}{4+s^2} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{2}{4+s^2} - e^{-\pi s}\frac{2}{4+s^2} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

B) $f(t) = \cos_+(3t) + \cos_+(3(t-\pi)) - \sin_+(t-\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{9+s^2} + e^{-\pi s}\frac{s}{9+s^2} - e^{-\pi s}\frac{1}{1+s^2}$$

C) $f(t) = \sin_+(3t) - \sin_+(3(t-2\pi)) + \cos_+(t-2\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{3}{9+s^2} - e^{-2\pi s}\frac{3}{9+s^2} + e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

D) $f(t) = \cos_+(2t) - \cos_+(2(t-2\pi)) + \sin_+(t-2\pi)$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{4+s^2} - e^{-2\pi s}\frac{s}{4+s^2} + e^{-2\pi s}\frac{1}{1+s^2}$$

4) Dire qual'è la funzione di trasferimento dell'equazione

A) $y'' - 6y' + 9y = 0$

B) $y'' + 2y' + y = 0$

C) $y'' - 4y' + 4y = 0$

D) $y'' - 2y' + y = 0$

Calcolarne, poi, la sua antitrasformata.

Per definizione, la funzione di trasferimento è $\frac{1}{P(s)}$ dove $P = P(s)$ è il polinomio caratteristico dell'equazione; quindi:

A) $$\frac{1}{s^2-6s+9} = \frac{1}{(s-3)^2}$$

B) $$\frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

C) $\frac{1}{s^2-4s+4} = \frac{1}{(s-2)^2}$

D) $\frac{1}{s^2-2s+1} = \frac{1}{(s-1)^2}$

L'antitrasformata è quindi la funzione

A) te^{3t} B) te^{-t} C) te^{2t} D) te^{t}

5) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

A) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{nx+1}}$

B) $\sum_{n=2}^{+\infty} (x^2-1)^n$

C) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$

D) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{nx-3}$

converge puntualmente. Calcolarne poi la somma.

A) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{nx+1}} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3\cdot(3^x)^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^x}\right)^n$

e quindi converge se e solo se $-1 < \frac{1}{3^x} < 1$

cioè se $x \geq 0$. La sua somma è data da

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} - 1 - \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3^{2x}}\right)$$

B) Converge se e solo se $-1 < x^2-1 < 1$ cioè

$0 < x^2 < 2$ ossia $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$

La sua somma è data da

$$\frac{1}{1-(x^2-1)} - 1 - x^2 + 1 = \frac{1}{2-x^2} - x^2$$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ e quindi

se e solo se $-1 < \frac{1}{1+x^2} < 1$ ossia $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

La sua somma è data da

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} - 1 = \frac{1+x^2}{x^2} - 1 = \frac{1}{x^2}$$

D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{nx-3} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} (2^x)^n$ e

quindi converge se e solo se $2^x < 1$ cioè

se e solo se $x < 0$. La sua somma è data da

$$\frac{1}{8} \frac{1}{1-2^x} - \frac{1}{8}$$