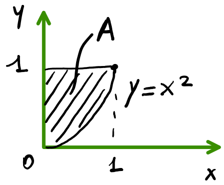
Analisi Matematica -- corso C -- modulo B

venerdì 22 gennaio 2021 08:30

1° TURNO

1) Calcolare

$$\int_A x(y-x^2)^{1/2}\,dx\,dy$$ dove A è l'insieme rappresentato in figura



Consideriamo A come normale rispetto all'asse delle x:

$$\int_A x\,(y-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy = \int_0^1 x\left(\int_{x^2}^1 (y-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^{1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= -\frac{2}{15}(1-x^2)^{5/2}\Big|_0^1 = 0 + \frac{2}{15} = \frac{2}{15}$$

2) Stabilire se esiste il piano tg al grafico di

$$f(x,y) = (x+y)^2\, e^{x^2-y^2}$$

nel punto $(1,1,f(1,1))$ e in caso affermativo scriverne l'equazione. Determinare poi i punti di estremo di f.

$f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ e dunque esiste il piano tg al suo grafico in ogni punto.

In particolare nel pto $(1,1,f(1,1))$ l'equazione di tale piano è

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$$f(1,1) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+y)\, e^{x^2-y^2} + (x+y)^2 e^{x^2-y^2} \cdot (2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y)\, e^{x^2-y^2} - (x+y)^2 e^{x^2-y^2}(2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4 + 8 = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4 - 8 = -4 \quad \text{quindi}$$

$$z = 4 + 12(x-1) - 4(y-1)$$

Gli eventuali punti estremali di f devono essere punti stazionari:

$$\begin{cases} 2(x+y)\, e^{x^2-y^2} + (x+y)^2 e^{x^2-y^2} \cdot (2x) = 0 \\ 2(x+y)\, e^{x^2-y^2} - (x+y)^2 e^{x^2-y^2}(2y) = 0 \end{cases}$$

sottraendo membro a membro otteniamo

$$\begin{cases} 2(x+y)^2 e^{x^2-y^2}(x+y) = 0 \\ 2(x+y)\, e^{x^2-y^2} + (x+y)^2 e^{x^2-y^2}(2x) = 0 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dunque tutti i punti della retta r $y + x = 0$ sono critici

Dato che $f \geq 0$ e se $(\bar{x},\bar{y}) \in r$, $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$, tali punti sono tutti di minimo globale

3) Determinare l'integrale generale in forma implicita dell'equazione

$$y' = \log x / \sin^2 y$$

L'equazione assegnata è a variabili separabili

$y' \sin^2 y = \log x$ e quindi integrando ambo i membri

$$\int \sin^2 y \, dy = \int \log x \, dx$$

$$\int \sin^2 y \, dy = -\sin y \cos y + \int \cos^2 y \, dy$$

$$= -\sin y \cos y + y - \int \sin^2 y \, dy \quad \text{da cui}$$

$$\int \sin^2 y \, dy = \frac{1}{2}(y - \sin y \cos y)$$

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int dx = x \log x - x$$

Quindi l'integrale generale in forma implicita è dato da

$$y - \sin y \cos y = 2x(\log x - 1) + c$$

4) Enunciare e dimostrare il criterio della radice per una serie a termini non negativi

Usarlo per dimostrare che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$, converge

cosa se ne deduce rispetto alla successione $\frac{n!}{n^n}$?

Per enunciato e dimostrazione si veda la lezione 31,

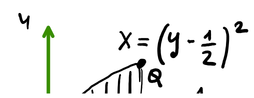
per la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ si veda la lezione 32.

2° TURNO

1) Calcolare

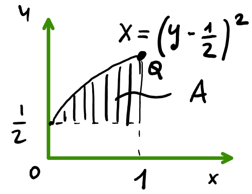
$$\int_A \frac{1}{y^2+1} \, dx \, dy, \quad \text{dove } A \text{ è l'insieme rappresentato}$$

in figura



$_A$ ...

in figura



Vogliamo considerare A come insieme normale rispetto all'asse delle y.
Calcoliamo le coordinate del punto Q di intersezione tra la parabola

di equazione $x=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$ e la retta $x=1$:

$1=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \iff y-\frac{1}{2}=\pm 1$; ovviamente Q ha ordinata positiva

e quindi $Q=\left(1,\frac{3}{2}\right)$. Usando la formula di riduzione

otteniamo

$$\int_A \frac{1}{y^2+1}\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{y^2+1}\left(\int_{(y-\frac{1}{2})^2}^{1} dx\right) dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{y^2+1}\left(1-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right) dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{y^2+1}\,dy - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{y^2+1}\,dy$$

$$= \operatorname{arctg} y \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{y+\frac{3}{4}}{y^2+1}\right) dy$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{3}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\log(1+y^2)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg} y\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

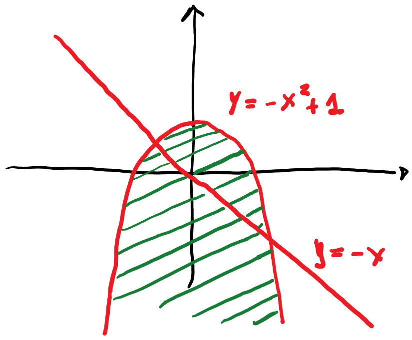
$$= \frac{7}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{1}{2}\log\frac{13}{5}$$

2) Si consideri il campo vettoriale $F(x,y)=\left(\frac{x-y}{x+y},\ \log(1-y-x^2)\right)$

Determinarne il dominio e rappresentarlo nel piano.
Dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.
Stabilire poi se F ha migliore approssimazione lineare
nel punto $(0,-1)$ e determinarne la legge.

dom F : $\begin{cases} x+y\neq 0 \\ 1-y-x^2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} y\neq -x \\ y<1-x^2 \end{cases}$

Rappresentandolo nel piano:



dove F è la parte in verde; è aperto in quanto ogni punto della sua frontiera non gli appartiene, non è quindi chiuso, non è limitato e non è connesso per archi dato che i punti al di sopra della retta di equazione $y = -x$ non possono essere collegati con una curva continua ai punti al di sotto senza che la curva intersechi la stessa retta.

Le componenti di F, $F_1(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ e $F_2(x,y) = \log(1-x^2-y)$ sono entrambe funzioni di classe C^∞ nel dominio F. Quindi F è differenziabile nel suo dominio in ogni punto. Pertanto F ha migliore approssimazione lineare nel punto $(0,-1)$ dato da

(*) $h \in \mathbb{R}^2 \longmapsto F(0,-1) + J_F(0,-1)\cdot h$, con $J_F(0,-1)$ matrice Jacobiana di F nel punto $(0,-1)$

ricordo che (*) è l'unica applicazione affine per cui

$$F((0,-1)+h) = F(0,-1) + J_F(0,-1)\cdot h + o(|h|)$$

Se si utilizzano le coordinate (x,y) allora

$$F(x,y) = F(0,-1) + J_F(0,-1)\cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-(-1) \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)$$

e quindi la miglior approssimazione lineare in tali coordinate è l'applicazione $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto F(0,-1) + J_F(0,-1)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = \frac{x+y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} \; ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y}(-2x) \; ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{1-x^2-y}$$

$J_F(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi la miglior approssimazione

$J_F(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e quindi la miglior approssimazione lineare di F in tale punto è

$$(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (-1, \log 2) + \left(-2h_1, -\frac{1}{2}h_2\right) = \left(-1-2h_1, \log 2 - \frac{1}{2}h_2\right)$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy + (1-x)e^x \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

L'equazione $y' = xy + (x+1)e^x$ è lineare del primo ordine; quindi l'integrale generale è dato da:

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(c + \int e^{-\frac{1}{2}x^2} e^x (1-x)\, dx\right)$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}}\left(c + \int e^{-\frac{x^2}{2}+x}(1-x)\, dx\right) =$$

$$= e^{x^2/2}\left(c + e^{-\frac{x^2}{2}+x}\right)$$

$$y(-1) = 2 \iff 2 = e^{\frac{1}{2}}\left(c + e^{-\frac{3}{2}}\right) \iff c = \frac{2}{\sqrt{e}} - e^{-3/2}$$

quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{x^2/2}\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - e^{-3/2}\right) + e^x$$

4) Fornire dimostrazione del carattere di una serie geometrica

Calcolare la somma della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{e^{n+1}}$

Per il carattere di una serie geometrica si veda la lezione 30

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{e^{n+1}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{2}{e}\right)^n = \frac{1}{e}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n = \frac{1}{e}\,\frac{4}{e^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{4}{e^3}\sum_{h=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^h = \frac{4}{e^3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{e}} = \frac{4}{e^2(e-2)}$$