1)-a) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{e^3}{8e^n}$

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{e^3}{8e^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^3 \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{e^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^3 \frac{1}{e^4} \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{e^{n-4}} = \frac{1}{8e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e^k}$$
$$= \frac{1}{8e} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{e-1}$$

1)-b) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + (-1)^n \log n}{3n^{3/2} - 1}$$

$$\frac{n + (-1)^n \log n}{3n^{3/2} - 1} = \frac{n\left(1 + \frac{(-1)^n \log n}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}\left(3 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)} \sim \frac{1}{3n^{\frac{1}{2}}}$$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3n^{\frac{1}{2}}} = +\infty$ anche la serie assegnata diverge positivamente

2) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2-y+1} \arcsin(y-x^2-1)$$

e rappresentarlo nel piano. Dire se è un insieme

limitato, aperto, convesso.

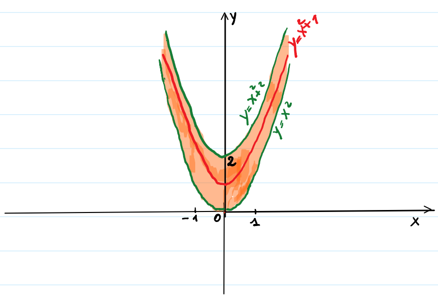
Stabilire, inoltre, che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Stabilire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(0, \frac{1}{2}, f(0,\frac{1}{2}))$

e determinarne l'equazione. Calcolare infine $\frac{\partial f}{\partial v}(0,\frac{1}{2})$

dove v è il versore associato al vettore $w=(-1,-1)$

$$\text{dom} f: \begin{cases} -1 \le y - x^2 - 1 \le 1 \\ y - x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - x^2 \le 2 \\ y - x^2 \ge 0 \\ y \neq x^2 + 1 \end{cases}$$



Il dominio della funzione è l'insieme colorato in figura; i punti delle parabole $y=x^2+2$ e $y=x^2$ appartengono al dominio mentre i punti della parabola $y=x^2+1$ non appartengono ad esso.

È quindi un insieme illimitato, non è aperto (in quanto i punti delle parabole $y=x^2$ e $y=x^2+2$ non sono interni), non è chiuso (poiché i punti della parabola $y=x^2+1$ sono di frontiera ma non appartengono al dominio);

non è convesso (in quanto, ad esempio, il segment che unisce due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_1) aventi stessa ordinata $y_1 > 2$ non è contenuto nel dominio.

Osserviamo che f è continua in $(0,0)$ quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

f è derivabile con derivate parziali continue in $\mathring{\text{dom}f}$ quindi è differenziabile in ogni punto di $\mathring{\text{dom}f}$. In particolare è differenziabile in $(0,\frac{1}{2})$ e dunque esiste il piano tangente al grafico di f in $(0, \frac{1}{2}, f(0,\frac{1}{2}))$. L'equazione di tale piano è

$$z = f(0,\tfrac{1}{2}) + \nabla f(0,\tfrac{1}{2}) \cdot (x, y-\tfrac{1}{2})$$

$$f(0,\tfrac{1}{2}) = \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{\pi}{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2-y+1) - (y+x^2)2x}{(x^2-y+1)^2} \arcsin(y-x^2-1) + \frac{y+x^2}{x^2-y+1} \frac{1}{\sqrt{1-(y-x^2-1)^2}}(-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y+1 + (y+x^2)}{(x^2-y+1)^2} \arcsin(y-x^2-1) + \frac{y+x^2}{x^2-y+1} \frac{1}{\sqrt{1-(y-x^2-1)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\tfrac{1}{2}) = 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{4}} \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = 4\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Quindi l'equazione del piano è

$$z = -\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Il versore associato a w è $\frac{w}{|w|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e dunque (dato che f è differenziabile in $(0,\frac{1}{2})$)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,\tfrac{1}{2}) = \nabla f(0,\tfrac{1}{2}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0, -\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

La soluzione è $y(x) = e^{\int_1^x \frac{1}{s^2} ds} \left(0 + \int_1^x -\frac{1}{s^3} e^{-\int_1^s \frac{1}{\tau^2} d\tau} ds\right)$

$$= e^{-\frac{1}{s}} \left(\int^x -\frac{1}{s^3} e^{\frac{1}{\tau}\Big|_1^s} ds\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{s}\Big|_1^x} \left(\int_1^x -\frac{1}{s^3}\, e^{\frac{1}{c}\Big|_1^s} ds \right)^{1}$$

$$= e^{-\frac{1}{x}+1} \left(\int_1^x -\frac{1}{s^3}\, e^{\frac{1}{s}-1} ds \right)$$

$$= \frac{e}{e^{1/x}} \frac{1}{e} \int_1^x -\frac{1}{s^3}\, e^{\frac{1}{s}} ds$$

$\frac{1}{s} = t$; $dt = -\frac{1}{s^2} ds$

$$= \frac{1}{e^{1/x}} \int_1^{1/x} t\, e^t\, dt = \frac{1}{e^{1/x}} \left(t e^t \Big|_1^{\frac{1}{x}} - \int_1^{\frac{1}{x}} e^t \right) =$$

$$= \frac{1}{e^{1/x}} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - e - e^{\frac{1}{x}} + e \right) = \frac{1}{x} - 1$$

4) Dimostrare che se $f \in \mathcal{R}(Q)$, $Q \subset \mathbb{R}^2$ rettangolo e $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in Q$ allore $\int_Q f \geq 0$. Dimostrare inoltre che se $g \in \mathcal{R}(Q)$ e $f(x,y) \leq g(x,y), \forall (x,y) \in Q$, allora $\int_Q f \leq \int_Q g$

Poiché $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in Q$: $\quad \inf_Q f \geq 0$

e quindi $\quad \int_Q f \geq \inf_Q f \cdot |Q| \geq 0$

Poiché $f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in Q$, $\quad (g-f)(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in Q$

e quindi $\quad 0 \leq \int_Q g - f = \int_Q g - \int_Q f$