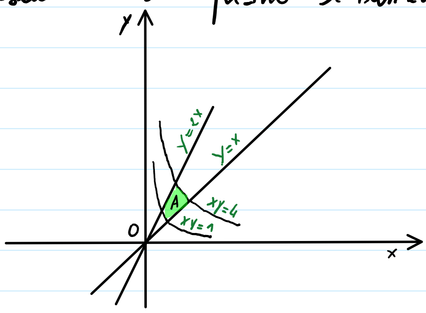
1) Calcolare

$$\int_A \left((xy)^2-1\right) dx\,dy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le xy \le 4, \quad x \le y \le 2x \}$

Rappresentiamo sul piano l'insieme A.



Usiamo il seguente cambio di coordinate per calcolare l'integrale assegnato:

$$\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y}{x} = v \end{cases} \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}; \quad \det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} = 2v$$

Quindi $\det\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \dfrac{1}{2v}$

Chiaramente la trasformazione che porta (u,v) in (x,y) trasforma il rettangolo $[1,4]\times[1,2]$ nell'insieme A

Quindi $$\int_A \left((xy)^2-1\right) dx\,dy = \int_{[1,4]\times[1,2]} (u^2-1)\cdot\frac{1}{2v}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 (u^2-1)\,du \cdot \int_1^2 \frac{1}{v}\,dv =$$

$$= \left(\frac{1}{6}u^3\Big|_1^4 - \frac{3}{2}\right)\cdot \log 2$$

$$= \left(\frac{1}{6}(4^3-1) - \frac{3}{2}\right)\log 2 = \frac{4^3-1-9}{6}\log 2 = 9\log 2$$

2) Determinare e rappresentare sul piano il dominio della funzione

$f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-3)$

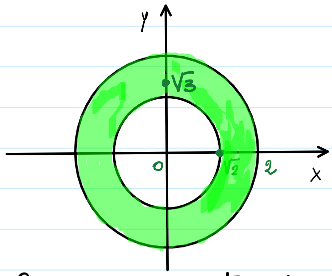
Dire se è o meno un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.

Stabilire se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto

$(0,\sqrt{3}, f(0,\sqrt{3}))$ e in caso affermativo scriverne l'equazione

dom f: deve essere $\begin{cases} x^2+y^2-3 \le 1 \\ x^2+y^2-3 \ge -1 \end{cases}$ quindi $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \ge 2 \end{cases}$

Pertanto il dominio di f è una corona circolare:



dom f non è aperto dato che i punti delle circonferenze $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=2$ appartengono a dom f ma non sono punti interni. È chiuso dato che $\partial(\text{dom} f) \subset \text{dom} f$; è limitato ($\text{dom} f \subset B(0,3)$, per esempio); è connesso per archi

f ha piano tangente nel punto $(0,\sqrt{3}, f(0,\sqrt{3}))$ in quanto è differenziabile in $(0,\sqrt{3})$. Infatti le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2-3)^2}} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2-3)^2}} \cdot 2y$$

sono ben definite e continue in $\overset{\circ}{\text{dom} f}$

L'equazione del piano tangente è

$$z = f(0,\sqrt{3}) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,\sqrt{3})\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\sqrt{3})(y-\sqrt{3})$$

$f(0,\sqrt{3}) = \arcsin 0 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{1}}\, 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ ; quindi}$$

$$z = 2\sqrt{3}\,(y-\sqrt{3})$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^{-t} + \sin t \quad (*) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata a $(*)$ è l'equazione caratteristica dell'omogenea associata a (*) è

$\lambda^2+2\lambda+2=0$ che ha soluzioni $\lambda=-1\pm i$.

Pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y(t)=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\sin t,\quad c_1, c_2\in\mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione $\bar y$ di (*) con il metodo di similarità.

Possiamo applicare il metodo di similarità alle due equazioni

$y''+2y'+2y=e^{-t}$

$\bar y_1(t)=k_1e^{-t}$, con $k_1\in\mathbb{R}$

$k_1e^{-t}-2k_1e^{-t}+2k_1e^{-t}=e^{-t}$

da cui

$k_1=1$

$y''+2y'+2y=\sin t$

$\bar y_2(t)=k_2\sin t+k_3\cos t$, con $k_2,k_3\in\mathbb{R}$

$-k_2\sin t-\cancel{k_3\cos t}+\cancel{2k_2\cos t}-2k_3\sin t+2k_2\sin t+\cancel{2k_3\cos t}=\sin t$

da cui

$$\begin{cases}k_3+2k_2=0\\k_2-2k_3=1\end{cases}\quad\begin{cases}k_3=-2k_2\\k_2+4k_2=1\end{cases}\quad\begin{cases}k_2=\frac{1}{5}\\k_3=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

Pertanto $\bar y(t)=\bar y_1(t)+\bar y_2(t)=e^{-t}+\frac{1}{5}\sin t-\frac{2}{5}\cos t$ e l'integrale generale di (*) è dato da

$$y(t)=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\sin t+e^{-t}+\frac{1}{5}\sin t-\frac{2}{5}\cos t \quad (**)$$

Determiniamo ora fra tutte le soluzioni di (*), quelle che soddisfa le condizioni iniziali

$$0=y(0)=c_1+1-\frac{2}{5}\quad \text{da cui}\quad c_1=-\frac{3}{5}$$

Possiamo quindi inserire questo valore per c_1 in (**) e calcolare $y'(t)$:

$$y'(t)=+\frac{3}{5}e^{-t}\cos t+\frac{3}{5}e^{-t}\sin t-c_2e^{-t}\sin t+c_2e^{-t}\cos t-e^{-t}+\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t$$

$$0=y'(0)=\frac{3}{5}+c_2-1+\frac{1}{5}\quad\text{da cui}\quad c_2=\frac{1}{5}$$

4) Dare la definizione di curva rettificabile e di lunghezza di una curva rettificabile. Ricordare a cosa sia uguale la lunghezza di una curva di classe C^1 e dimostrare che tale lunghezza è invariante per riparametrizzazioni.

Per le definizioni si veda la Definizione 12.9 a p. 363 del manuale; per l'invarianza si veda il Teorema 12.11 a p. 365.