Esonero Complementi di Analisi Matematica

giovedì 19 gennaio 2017 14:30

1) Dare la definizione di forma differenziale esatta e di forma differenziale chiusa

Dimostrare che la seguente forma differenziale ω è chiusa ma non è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\omega = \frac{4y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{4x}{x^2+y^2}\,dy$$

• Una forma differenziale $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ continua su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è esatta se $\exists\, f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$.

• $\omega \in C^1(\Omega)$ si dice chiusa se

$$\frac{\partial a}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial b}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

La forma differenziale assegnata è chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in quanto

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{4y}{x^2+y^2} = 4\,\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 4\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{4x}{x^2+y^2}\right) = -4\,\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 4\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Essa non è esatta dato che se γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1 orientata positivamente

$$\int_\gamma \omega = 4\int_0^{2\pi} (-\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,d\theta = -8\pi \neq 0$$

2) Quanto valgono i seguenti integrali

a) $\displaystyle\int_{\partial Q} z^2\,dz$, Q = quadrato di vertici $0, 1, 1+i, i$ b) $\displaystyle i\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2e^{it})}{4e^{2it}}\,dt$

Motivare la risposta

a) Essendo $f(z) = z^2$ una funzione olomorfa sul piano, per il teorema di Cauchy-Goursat, l'integrale è 0

b) L'integrale assegnato è uguale $\displaystyle\int_{\varphi^+(0,2)} \frac{\cos(z)}{z^3}\,dz$

e quindi per la II formula di rappresentazione di Cauchy è uguale a $\frac{2\pi i}{2} D^2 \cos z\,\big|_{z=0} = -\pi i \cos 0 = -\pi i$

3) Quali sono i residui in 1 delle seguenti funzioni

a) $f(z) = \frac{\pi}{\dots} + \frac{1}{(z+1)^2} + \cos z$

a) $f(z) = \dfrac{\pi}{z-1} + \dfrac{1}{(z+1)^2} + \cos z$

b) $g(z) = \dfrac{\pi}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{(z-1)} + \dfrac{1}{(z+1)^2} + \cos z$

c) $h(z) = (z-1)^4 e^{1/z-1}$

a) Poiché la funzione $f_1(z) = \dfrac{1}{z+1} + \cos z$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$

essa è uguale alla somma della sua serie di Taylor di centro 1 (su $D(1,2)$) : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$

Quindi $f(z) = \dfrac{\pi}{z-1} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$ e $Res(f,1) = \pi$

b) Analogamente $g(z) = \dfrac{\pi}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{z-1} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}}{n!}(1)\,(z-1)^n$ e dunque

$Res(f,1) = 1$

c) $h(z) = (z-1)^4 \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(z-1)^{4-k}$

$Res(h,1)$ è il coefficiente di $\dfrac{1}{z-1}$. L'esponente $4-k$ è

uguale a -1 per $k=5$ quindi $Res(h,1) = \dfrac{1}{5!}$

4) Sia $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)^8}$. Dimostrare che $Res(f,i) = -Res(f,-i)$

f non ha altre singolarità oltre i e $-i$. Per il II teorema dei

residui è sufficiente dimostrare che $Res(f,\infty) = 0$

$Res(f,\infty) = Res\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

$-\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{1}{z^2}\,\dfrac{\frac{1}{z}}{\left(\frac{1}{z^2}+1\right)^8} = -\dfrac{1}{z^3}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{z^{16}}(1+z^2)^8} = -\dfrac{z^{13}}{(1+z^2)^8}$

Poiché $\displaystyle\lim_{z\to 0} -\frac{z^{13}}{(1+z^2)^8} = 0$, $Res(f,\infty) = 0$.

5) Sapendo che $\dfrac{4}{3} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{k\pi}\right)\sin(k\pi x)$ è la serie

di Fourier della funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0,2]$,

calcolare $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^4\pi^4} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right)$

Quali fra le seguenti non sono sicuramente la serie di soli coseni di f? Motivare la risposta

(a) $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(1)} \cos\left(k\pi \frac{x}{2}\right)$; (b) $\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(2)} \cos(k\pi x)$; (c) $\frac{4}{3} + \sum a_k^{(3)} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$.

Dall'identità di Parseval

$$\frac{1}{2}\int_0^2 x^4\,dx = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{(k\pi)^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{k\pi}\right)^2 \quad \text{da cui}$$

$$\frac{16}{5} = \frac{16}{9} + 8\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^4\pi^4} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right)\right) \quad \text{cioè}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^4\pi^4} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{16}{5} - \frac{16}{9}\right) = \frac{8}{45}$$

La (a) non può essere in quanto manca $a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$

La (b) non può essere in quanto la serie di soli coseni di f è la serie di Fourier della funzione x^2 su $[-2,2]$ (l'estensione pari di f è sempre la funzione $y = x^2$);
l'ampiezza dell'intervallo è 4 e quindi i polinomi trigonometrici che appaiono nella serie di soli coseni sono del tipo $\cos\left(\frac{2\pi}{4}kx\right)$ cioè $\cos\left(\frac{\pi}{2}kx\right)$ e non $\cos(k\pi x)$