Appello Complementi di Analisi Matematica

venerdì 6 ottobre 2017 14:30

1) Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ \cos(\pi t) & \text{se } t \in (1,+\infty) \end{cases}$$

Calcolare quindi la trasformata di $f * H$ dove H è la funzione di Heaviside

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^1 e^{-st} + \int_1^{+\infty} \cos(\pi t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^1 - \mathcal{L}\left(\cos_+\left(\pi(t-1)\right)\right)(s)$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} - e^{-s} \frac{s}{s^2+\pi^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0$$

Quindi $\mathcal{L}(f * H)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(H)(s)$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2+\pi^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0$$

1) Stabilire che la seguente serie di funzioni converge uniformemente su $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos^2(\pi x) - 2n}{n^{5/2} - n + 1} \qquad (*)$$

$$\forall n \geq 2 \ ; \quad \left| \frac{\cos^2(\pi x) - 2n}{n^{5/2} - n + 1} \right| \leq \frac{1 + 2n}{n^{5/2} - n + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poiché $\dfrac{1+2n}{n^{5/2} - n + 1} \sim \dfrac{2}{n^{3/2}}$ e $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}} \in \mathbb{R}$,

la $(*)$ converge totalmente e quindi uniformemente su $\mathbb{R}$

2) Dimostrare che se una serie di potenze di centro 0 converge in $\bar{z} \in \mathbb{C}$ allora converge in modulo su $D(0, |\bar{z}|)$

Si veda, ad esempio, pag. 34 degli appunti

3) Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}^+(i,1)} \frac{zi}{(z^2+1)^3}\, dz$$, dove $\mathcal{C}^+(i,1)$ è la circonferenza di centro i e raggio 1

Poiché $z^2+1 = (z-i)(z+i)$ l'integrando è uguale a $\dfrac{zi}{(z+i)^3(z-i)^3}$. La funzione

$f(z) = \dfrac{zi}{(z+i)^3}$ è olomorfa su $D(i,1)$. Possiamo quindi usare la seconda formula di Cauchy ottenendo

$$\int_{\mathcal{C}^+(i,1)} \frac{f(z)}{(z-i)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = \pi i\, f''(i)$$

$$f'(z) = \frac{i}{(z+i)^3} - 3zi\,(z+i)^{-4}$$

$$f''(z) = -3i\,(z+i)^{-4} - 3i\,(z+i)^{-4} + 12zi\,(z+i)^{-5}$$

$$f''(i) = -6i\,(2i)^{-4} - 12\,(2i)^{-5} = -\frac{6i}{16} + \frac{12i}{32} = 0$$

4) Sia $f \in H(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{C}$. Dimostrare che uno zero è isolato per f se e solo se è di ordine finito

Si veda, ad esempio, p. 79 degli appunti

si veda, ad esempio, p. 79 degli appunti

5) Calcolare i residui in 0 delle funzioni

a) $f(z) = \cos^2 z + \frac{\pi}{z} - \frac{1}{z^2}$

b) $g(z) = z^5 e^{1/z^2}$

c) $h(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$

a) Poiché $\cos^2 z$ è analitica, $\forall z \in \mathbb{C}$:

$\cos^2 z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$; quindi

$f(z) = -\frac{1}{z^2} + \frac{\pi}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e quindi

$\mathrm{Res}(f,0) = \pi$

b) $g(z) = z^5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^{2k-5}}$

$2k-5 = 1 \iff k = 3$ quindi $\mathrm{Res}(g,0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

c) Poiché $e^{\frac{1}{z^2}}$ ha una singolarità essenziale in 0

calcoliamo $\mathrm{Res}(h,0)$ usando il II teorema dei residui

$$\mathrm{Res}(h,0) = -\mathrm{Res}(h,1) - \mathrm{Res}(h,\infty)$$

1 è un polo semplice per h quindi

$\mathrm{Res}(h,1) = \lim_{z\to 1} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}(z-1) = e$

$$\mathrm{Res}(h,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}h\left(\frac{1}{z}\right),0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2}h\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{e^{z^2}}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z}\frac{e^{z^2}}{1-z}$$

quest'ultima funzione ha in 0 un polo semplice, quindi

$$\mathrm{Res}(h,\infty) = \lim_{z\to 0} -\frac{1}{z}\frac{e^{z^2}}{1-z}\cdot z = -1$$

Dunque $\mathrm{Res}(h,0) = 1-e$

6) Calcolare la serie di soli coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\in[0,1] \\ 1, & x\in(1,2] \end{cases}$$

estesa a $\mathbb{R}$ per periodicità con periodo 2. Usare, poi tale serie per dimostrare che

$$\frac{2}{3}+\sum_{h=1}^{+\infty}(-1)^h\frac{2}{h^2\pi^2} = \sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^h\frac{16}{(2h+1)^3\pi^3}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 1\,dx\right) = \frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{2k\pi x}{4}\right)dx = \int_0^1 x^2\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{k\pi}x^2\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 - \frac{4}{k\pi}\int_0^1 x\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx + \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{k^2\pi^2}x\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{8}{k^2\pi^2}\int_0^1 \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx + 0 - \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{k^3\pi^3}\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{8}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{k^3\pi^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

Osserviamo che per $k = 2h$

$$\frac{8}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{k^3\pi^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8\cos(h\pi)}{(2h)^2\pi^2} = (-1)^h\frac{2}{h^2\pi^2}$$

Per $k = 2h+1$

$$\frac{8}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{k^3\pi^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-16}{(2h+1)^3\pi^3}\sin\left(h\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{-16}{(2h+1)^3\pi^3}(-1)^h$$

Quindi la serie di soli coseni di f è data da

$$\frac{1}{3} + \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^h}{h^2\pi^2}\cos\left(\frac{2h\pi}{2}x\right) + \sum_{h=0}^{+\infty}\frac{-16(-1)^h}{(2h+1)^3\pi^3}\cos\left(\frac{(2h+1)\pi x}{2}\right)$$

Per $x=0$ Tale serie converge a $\tilde{f}(0)=0$, dove $\tilde{f}$ è l'estensione pari di f su $[-2,2]$.

Quindi $\frac{2}{3} + \sum_{h=1}^{+\infty}(-1)^h\frac{2}{h^2\pi^2} - \sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^h\frac{16}{(2h+1)^3\pi^3} = 0$

Quindi $\frac{2}{3} + \sum_{h=1} \cdot (-1) \frac{2}{h^2\pi^2} - \sum_{h=0} (-1) \frac{16}{(2h+1)^3\pi^3} - \dots$

da cui la uguaglianta richiesta