1)-a) Calcolare, in forma esponenziale, il prodotto dei numeri complessi

$z_1 = -\sqrt{2}\, e^{2-3i}$ $\quad z_2 = \sqrt{2}\, e^{-2+2i}$. Quanto vale la parte reale del numero ottenuto?

$$(-\sqrt{2}\, e^{2-3i})\cdot(\sqrt{2}\, e^{-2+2i}) = -\sqrt{2}\, e^{2} e^{-3i}\cdot \sqrt{2}\, e^{-2} e^{2i} =$$
$$= -2\, e^{2-2}\, e^{-3i+2i} = -2\cdot e^{0}\, e^{-i} = -2\, e^{-i}$$

Dalla formula di Eulero $-2e^{-i} = -2\left(\cos(-1) + i \sin(-1)\right) =$
$$= -2\left(\cos 1 - i \sin 1\right)$$

Quindi la parte reale di $z_1 \cdot z_2$ è $-2\cos 1$

1)-b)

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = e^{2x^2-1} + \log_3 (x^4-4)$$

Stabilire la monotonia su ognuno dei due intervalli disgiunti la cui unione è uguale al dominio di f.

dom f: $\quad x^4-4>0 \iff x < -\sqrt[4]{4} = -\sqrt{2}$ e $x > \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

quindi dom $f = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

su $(\sqrt{2}, +\infty)$ la funzione $y_1(x) = 2x^2-1$ è strettamente crescente così come $y_2(x) = x^4-4$ quindi entrambe le funzioni $y_3(x) = e^{2x-1}$ e $y_4(x) = \log_3(x^4-4)$, essendo composte da funzioni strettamente crescenti, sono strettamente crescenti.

$f(x) = y_3(x) + y_4(x)$ è quindi strettamente crescente su $(\sqrt{2}, +\infty)$

Sull'intervallo $(-\infty, -\sqrt{2})$, y_1 e y_2 sono strett. decrescenti e quindi y_3, y_4 e $f = y_3 + y_4$ sono strett. decrescenti.

2) Determinare gli asintoti e gli eventuali punti di estremo locale e assoluto della funzione:

$f(x) = \log(1+x^2) - \log(1-x)$. Tracciarne quindi approssimativamente il grafico.

dom f : $\begin{cases} 1+x^2 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < 1 \end{cases}$ $\{ x < 1$; quindi dom f $= (-\infty, 1)$

$f \in C^0(-\infty, 1)$ poiché somma delle funzioni $y_1(x) = \log(1+x^2)$

e $y_2(x) = -\log(1-x)$ entrambe continue in $(-\infty, 1)$.

Quindi l'unico punto in cui cercare un eventuale asintoto verticale (da sinistra)

è $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = [\log 2 - (-\infty)] = +\infty$$

Vediamo se f ha asintototo orizzontale per $x \to -\infty$:

il $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \log\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) - \log\left(-x\left(\frac{1}{-x}+1\right)\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log(x^2) + \log\left(\frac{1}{x^2}+1\right) - \log(-x) - \log\left(\frac{1}{-x}+1\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2\log(-x) - \log(-x) + \log\left(\frac{1}{x^2}+1\right) - \log\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log(-x) + \log\left(\frac{1}{x^2}+1\right) - \log\left(1-\frac{1}{x}\right) = [+\infty + 0 - 0] = +\infty$$

Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x} - \frac{\log(1-x)}{x} = 0 + 0 = 0.$$

Poiché $f(x) - 0 \cdot x = f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, f non ha neanche

asintoto obliquo. Cerchiamo ora i punti estremali di f tenendo

presente che dom f $= (-\infty, 1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{2x(1-x)+1+x^2}{(1+x^2)(1-x)} = \frac{2x-2x^2+1+x^2}{(1+x^2)(1-x)} = \frac{-x^2+2x+1}{(1+x^2)(1+x)}$$

Per $x < 1$: $f'(x) > 0 \iff x^2 - 2x - 1 < 0 \iff 1-\sqrt{2} < x < 1$

Quindi f è strett. decrescente su $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ e strett. crescente su $(1-\sqrt{2}, 1)$

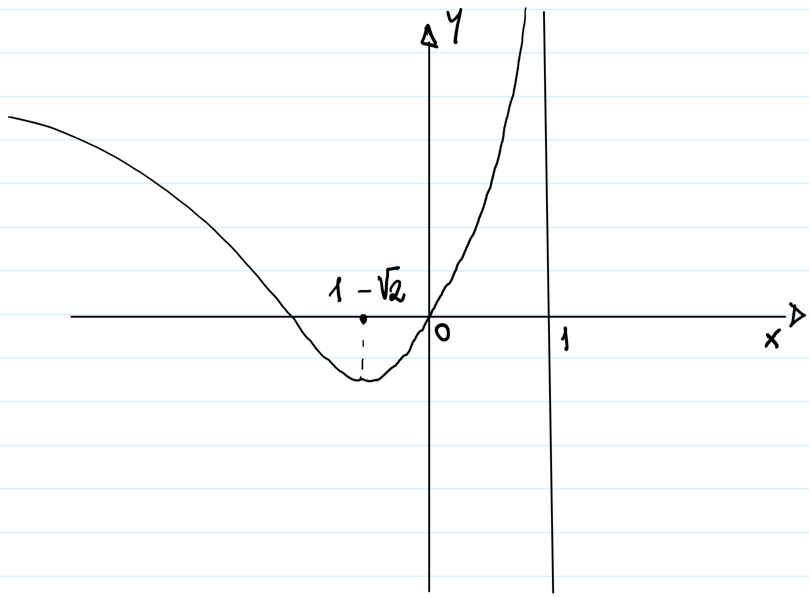
$1-\sqrt{2}$ è quindi un minimo locale e assoluto per f.

$$f(1-\sqrt{2}) = \log\left(1+1+2-2\sqrt{2}\right) - \log\left(1-1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \log(4-2\sqrt{2}) - \log(\sqrt{2}) = \log\left(2(2-\sqrt{2})\right) - \log(\sqrt{2})$$

$$= \log\left(\sqrt{2}(2-\sqrt{2})\right) = \log\left(2(\sqrt{2}-1)\right) < 0$$

dato che $2(\sqrt{2}-1) < 1$



3) Calcolare

$$\int_1^2 \frac{x+1}{1+x+x^2}\,dx$$

$$\frac{x+1}{1+x+x^2} = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{1+x+x^2} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{1+x+x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x+x^2}$$

Quindi

$$\int_1^2 \frac{x+1}{1+x+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x+1}{1+x+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+x+x^2)\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log(1+2+4) - \log(3)\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}\int_1^2 \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctg\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \log\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_1$$

$$= \frac{1}{2} \log\frac{7}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

4) Dare la definizione di estremo superiore di un insieme numerico.

Enunciare la caratterizzazione del sup di un insieme numerico

e usarla per dimostrare che detto $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \text{ tale che } x = 1-\frac{1}{n}\}$

si ha che $\sup A = 1$

Per la definizione e la caratterizzazione si veda p. 13 del manuale consigliato.

Dimostriamo, usando la caratterizzazione del sup, cioè

$\Lambda \in \mathbb{R}$ è il sup di $X \subset \mathbb{R}$ se e solo se: $\begin{cases} \forall x \in X : \ x \le \Lambda & (1) \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in X : \bar{x} > \Lambda - \varepsilon & (2) \end{cases}$

che $1 = \sup A$

Poiché se $x \in A$ allora $\exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tale che $x = 1 - \frac{1}{n}$

dato che $1 - \frac{1}{n} < 1$ abbiamo che ogni $x \in A$ è minore di 1

e quindi la (1) è soddisfatta. Sia ora $\varepsilon > 0$ dobbiamo trovare

$\bar{x} \in A$ per cui $\bar{x} > 1 - \varepsilon$; questo equivale a trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

per cui $1 - \frac{1}{\bar{n}} > 1 - \varepsilon$ ossia $\frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$. L'esistenza di $\bar{n}$

segue dalla proprietà archimedea cioè dal fatto che $\forall \, {}^a_b \in \mathbb{R}$

con ${}^a_b > 0$ $\exists \bar{n}$ tale che $a < \bar{n} b$ (basta applicarla ad $a = 1$

e $b = \varepsilon$).