КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 127, кн. 3 *Ученые записки* **1967**

Р. Г. БУХАРАЕВ

О ПРЕДСТАВИМОСТИ СОБЫТИЙ В ВЕРОЯТНОСТНЫХ АВТОМАТАХ

В настоящей работе мы исследуем возможности конечных вероятностных автоматов. Приводится критерий представимости событий в конечных вероятностных автоматах на языке линейных расширений полугрупп. Этот критерий используется для конструирования события, не представимого ни в каком конечном вероятностном автомате. Построенный нами аппарат полностью применим к изучению возможностей линейных автоматов вообще, поэтому определения и теоремы формулируются в более общем виде для линейных автоматов. Определение последних мы получаем, отказавшись от требования стохастичности матриц, описывающих поведение вероятностного автомата.

Мы будем рассматривать вероятностный автомат так, как это делается в работе [2]. Вероятностный автомат есть объект

$$< \mathfrak{X},\ \mathfrak{U},\ \mathfrak{A},\ \mu(a),\ \mu(a', y/a, x) >,$$

где $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}$ — соответственно множества входов, выходов и состояний автомата (конечные в этой работе), $\mu(a', y/a, x)$ — условная вероятностная мера, определяющая функционирование автомата, а $\mu(a)$ — начальное распределение вероятностей на множестве состояний. По определению

$$\mu(a_1 \dots a_n y_1 \dots y_n / x_1 \dots x_n) = \sum_{a_0} \mu(a_0) \prod_{i=1}^{n} \mu(a_i, y_i / a_{i-1}, x_i).$$ [1]

Будем рассматривать величину

$$\mu(\cdot a/x_1 \dots x_n) = \sum_{\substack{a_1 \dots a_{n-1} \\ y_1 \dots y_n}} \mu(a_1 \dots a_{n-1}\, a y_1 \dots y_n / x_1 \dots x_n).$$

Для вектора-строки

$$\mu(\cdot a_1/p),\ \mu(\cdot a_2/p) \dots \mu(\cdot a_n/p)$$

мы будем применять обозначение $\overline{\mu}(p)$, имея в виду, что

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^i(p) = 1.$$

[1] Во избежание громоздкости записи мы часто отождествляем случайные величины, например, a_i, x_i, y_i, с теми значениями, которые они принимают.

Получим основное реккурентное соотношение для преобразования вектора $\overline{\mu}(p)$:

$$\mu(\cdot a/px) = \sum_{\substack{a_1 \dots a_n \\ y_1 \dots y_{n+1}}} \mu(a_1 \dots a_n a y_1 \dots y_{n+1}/px) =$$

$$= \sum_{a_0} \mu(a_0) \sum_{\substack{a_1 \dots a_n \\ y_1 \dots y_{n+1}}} \mu(a_1 y_1/a_0 x_1) \cdot \ldots \cdot \mu(a_n y_n/a_{n-1} x_n) \cdot \mu(a y_{n+1}/a_n x) =$$

$$= \sum_{a'} \mu(\cdot a'/p) \cdot \mu(a/a', x).$$

Итак,

$$\mu(\cdot a/px) = \sum_{a'} \mu(\cdot a'/p) \cdot \mu(a/a', x), \tag{1}$$

или, в векторных обозначениях, вводя в рассмотрение стохастические матрицы

$$A(x) = \| a_{ij}(x) \| = \| \mu(a_j/a_i, x) \|,$$

$$\overline{\mu}(px) = \overline{\mu}(p) \cdot A(x). \tag{2}$$

Определение 1 (М. О. Рабин)[1]. Будем говорить, что слово p принадлежит множеству состояний $\mathfrak{M}$ вероятностного автомата A с константой λ, если выполнено условие

$$\sum_{a \in \mathfrak{M}} \mu(\cdot a/p) = \chi(p) > \lambda. \tag{3}$$

В дальнейшем удобно ввести вместо знака суммирования вектор-столбец $\overline{m}$ вида:

$$\overline{m} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}}\right\} \mathfrak{M} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

и условие (3) записать еще в виде

$$\overline{\mu}(p) \cdot \overline{m} = \chi(p) > \lambda. \tag{4}$$

Множество слов p, принадлежащих множеству отмеченных состояний $\mathfrak{M}$ автомата A с константой λ, и только этих слов, образует событие, представленное в автомате A множеством состояний $\mathfrak{M}$ и константой λ. Обозначим это событие по Рабину $S = T(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, \lambda)$. Итак, для того, чтобы слово p принадлежало событию $T(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, \lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3) или условие (4).

В дальнейшем выгодно ввести вектор-строку начального распределения $\overline{\mu}_0 = (\mu_0^1, \mu_0^2, \dots \mu_0^n)$. В частности, если начальное распределение вырождено (то есть автомат инициален), то вектор $\overline{\mu}_0$ будет иметь вид

$$\overline{\mu}_0 = (0, \dots 0, \underset{a_0}{1}, 0, \dots 0).$$

[1] Отметим, что Рабин рассматривает представимость только в автомате с фиксированным начальным состоянием [1].

Легко видеть, что

$$\bar{\mu}(x) = \bar{\mu}_0 \cdot A(x).$$

Таким образом, получаем

$$\bar{\mu}(x) = \bar{\mu}_0 A(x), \quad \bar{\mu}(px) = \bar{\mu}(p) \cdot A(x).$$

Отсюда по индукции

$$\bar{\mu}(x_1 x_2 \ldots x_n) = \bar{\mu}_0 A(x_1) \cdot A(x_2) \cdot \ldots \cdot A(x_n). \tag{5}$$

Если положить

$$A(x_1 \ldots x_n) = A(x_1) \cdot A(x_2) \cdot \ldots \cdot A(x_n),$$

то

$$\bar{\mu}(p) = \bar{\mu}_0 \cdot A(p),$$

причем

$$\bar{\mu}(pq) = \bar{\mu}_0 A(p) \cdot A(q) = \bar{\mu}(p) \cdot A(q). \tag{6}$$

Будем называть функцию на свободной полугруппе $\varphi(p)$, $p \in F_{\mathfrak{X}}$ конечно-автоматной, если она изоморфна конечномерной векторной функции вида $\{\bar{\mu}(p),\ p \in F_{\mathfrak{X}}\}$, где

$$\bar{\mu}(p) = (\mu^1(p),\ \mu^2(p), \ldots \mu^n(p)),\quad \mu^i(p) \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \mu^i(p) = 1 \quad i = 1, \ldots n$$

и существуют такие стохастические матрицы $A(x_1)$, $A(x_2) \ldots A(x_n)$, что

$$\bar{\mu}(x_1 \ldots x_k) = \bar{\mu}(e) \cdot A(x_1) \cdot A(x_2) \cdot \ldots \cdot A(x_k),\quad x_i \in \mathfrak{X}.$$

Отметим здесь одно важное свойство многообразия $L(A) = \{\bar{\mu}(p),\ p \in F_{\mathfrak{X}}\}$. Очевидно, множество $L(A)$ представляет собой счетную систему точек гиперплоскости Σ n-мерного векторного пространства E_n:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^i = 1 \quad (\Sigma).$$

Пусть некоторая линейная комбинация векторов $\bar{\mu}(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots s$ принадлежит $L(A)$, то есть пусть

$$\bar{\mu}(q) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \bar{\mu}(p_i),\ \sum_{l=1}^{s} \alpha_i = 1.$$

Тогда, так как $\bar{\mu}(qr) = \bar{\mu}(q) A(r)$, а $A(r)$ — линейное преобразование, получим

$$\bar{\mu}(qr) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \bar{\mu}(p_i r),\quad r \in F_{\mathfrak{X}}.$$

Далее мы будем изучать погружения полугрупп в линейные пространства. Такая модель полугруппы будет обладать некоторыми свойствами, не являющимися свойствами абстрактной полугруппы. Иначе это равносильно вве ению на абстрактной полугруппе некоторых дополнительных соотношений между элементами. В качестве такого соотношения мы рассмотрим отношение линейной зависимости между элементами.

Напомним тот факт из теории полугрупп (см. например, [3]), что всякая полугруппа G есть гомоморфный образ некоторой свободной полугруппы $F_{\mathfrak{X}}$, алфавитом которой служит множество элементов полугруппы G, образующих ее порождающее множество $\mathfrak{X}$. Имея в виду этот результат, мы будем в дальнейшем брать произвольную полугруппу G в виде

$$G = \{\mu(p),\ p \in F_{\mathfrak{X}}\},$$

где $\mu(p)$ — есть гомоморфизм $F_{\mathfrak{X}}$ на G и $\mathfrak{X}$ — порождающее множество полугруппы G.

Пусть $G = \{\mu(p),\ p \in F_{\mathfrak{X}}\}$ — произвольная полугруппа. Линейным расширением полугруппы G над множеством $\mathfrak{M}$ будем называть множество формальных линейных комбинаций

$$L_{\mathfrak{M}}G = \left\{\sum_i \alpha_i \mu(p_i),\ \tilde{\alpha} \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Если множество $\mathfrak{M}$ есть линейное пространство всех последовательностей действительных чисел вида $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k)$, $k = 1, 2, \dots$, то расширение полугруппы G будем называть просто линейным. Если последовательности $\tilde{\alpha}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \quad k = 1, 2, \dots,$$

то расширение будем называть линейным нормированным. Если дополнительно к предыдущему условию выполнены неравенства

$$\alpha_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2, \dots k,\ k = 1,\ 2, \dots,$$

то расширение будем называть стохастическим. Соответствующие множества последовательностей $\tilde{\alpha}$ будем обозначать $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Распространим операцию полугруппового умножения на расширение, полагая

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(p_i)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j \mu(q_j)\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mu(p_i q_j).$$

Легко видеть, что во всех рассматриваемых типах расширений полугруппы операция умножения определена для любой пары элементов расширения и ассоциативна. Исходная полугруппа является подполугруппой своих линейных расширений $L_{\mathfrak{M}}G$, $L_{\overline{\mathfrak{M}}}G$, $L_{\tilde{\mathfrak{M}}}G$. Сама полугруппа является своим „несобственным“ линейным расширением, когда множество $\mathfrak{M}$ состоит из одного элемента $\alpha = 1$.

Пусть на линейном расширении полугруппы LG задано некоторое отношение эквивалентности R, удовлетворяющее условиям:

1) если Z_1, Z_2, Z — классы эквивалентности по отношению R и $\nu_1, \nu_1' \in Z_1$, ν_2, $\nu_2' \in Z_2$, то из $\alpha\nu_1 + \beta\nu_2 \in Z$ следует $\alpha\nu_1' + \beta\nu_2' \in Z$; (7)

2) если Z_1 — класс эквивалентности и ν_1, $\nu_2 \in Z_1$, то для любого $\mu \in G$, $\nu_1\mu$, $\nu_2\mu \in Z$, где Z — класс эквивалентности;

3) в линейном пространстве классов эквивалентности существует базис из линейно-независимых элементов, в котором все классы эквивалентности представляются в виде $Z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z_i$, где $\tilde{\alpha}$ принад-

лежит множеству, над которым рассматривается расширение. Будем этот базис называть главным.

Эквивалентности, удовлетворяющие условиям (7), для краткости будем называть правильными. Условие 3) в определении правильной эквивалентности имеет нетривиальное значение только в случае стохастического расширения. Размерностью правильной эквивалентности будем называть размерность линейного пространства классов эквивалентности.

В дальнейшем естественно ввести систему координат в пространство классов эквивалентности. Тем не менее, мы будем оперировать с элементами линейного расширения полугруппы, имея в виду, что это представители соответствующих классов эквивалентности.

Поскольку отношение R стабильно справа по отношению к элементам G, то имеет смысл говорить о полугруппе сдвигов $\overline{G}(R)$ фактор-пространства LG/R, определяемой правыми умножениями классов эквивалентности на элементы полугруппы G.

Выясним строение полугруппы G, изоморфно отображая ее на некоторую полугруппу линейных преобразований в LG/R. Пусть отношение R конечномерно и $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_k$ — главный базис в LG/R. Тогда для любого слова p, $p \in F_{\mathfrak{X}}$ можно записать

$$\mu(p) = \sum_{i=1}^{k} \mu^i(p) \cdot \nu_i.$$

Если

$$\mu(pq) = \sum_{i=1}^{k} \mu^i(p) \cdot \nu_i \cdot \mu(q),$$

то пусть

$$\nu_i \cdot \mu(q) = \sum_{j=1}^{k} \nu_i^j(q) \cdot \nu_j.$$

Положим

$$A(q) = \| \nu_i^j(q) \|.$$

Тогда

$$\mu(pq) = \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i=1}^{k} \mu^i(p) \cdot \nu_i^j(q)\right] \nu_j = \sum_{i=1}^{k} \mu^j(pq) \cdot \nu_j.$$

Таким образом, ввиду единственности представления класса, содержащего элемент $\mu(pq)$ в базисе, определенном элементами $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_k$, получим:

$$\mu^j(pq) = \sum_{i=1}^{k} \mu^i(p) \cdot \nu_i^j(q).$$

Обозначим как вектор систему чисел

$$\overline{\mu}(p) = (\mu^1(p), \mu^2(p), \dots \mu^k(p)).$$

Тогда в векторной форме получим:

$$\overline{\mu}(pq) = \overline{\mu}(p) \cdot A(q).$$

Вообще, пусть $A(q) = \| \nu_i^j(q) \|$ и $A(r) = \| \nu_i^j(r) \|$. Умножая соотношение

$$\mu(p) = \sum_{i=1}^{k} \mu^i(p) \cdot \nu_i$$

последовательно на $\mu(q)$, $\mu(r)$ и $\mu(qr)$, получим:

$$\overline{\mu}(pqr)=\sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{k}\mu^i(p)\cdot\nu_i^j(q)\right]\cdot\nu_j\mu(r)=\sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{k}\mu^i(p)\cdot\nu_i^j(q)\right]\cdot\left[\sum_{s=1}^{k}\nu_j^s(r)\cdot\nu_s\right]=$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{k}\mu^i(p)\cdot\nu_i^s(qr)\right]\cdot\nu_s=\sum_{s=1}^{k}\mu^s(pqr)\cdot\nu_s,$$

откуда следует, что $\overline{\mu}(pqr)=\overline{\mu}(pq)\cdot A(r)=\overline{\mu}(p)\cdot A(qr)$. Если $\mu(e)$ — класс, соответствующий пустому слову, то получим:

$$\overline{\mu}(x_1x_2\ldots x_n)=\overline{\mu}(e)\cdot A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot\ldots\cdot A(x_n).$$

Итак, доказана

Теорема 1. *Полугруппа $\overline{G}$ сдвигов фактор-пространства $L_{\widetilde{\mathfrak{M}}}G/R$ стохастического расширения полугруппы G относительно правильного отношения эквивалентности R размерности k есть полугруппа вероятностного автомата с k состояниями.*

Одновременно мы доказали, что полугруппа сдвигов $\overline{G}$ фактор-пространства $L_{\mathfrak{M}}G/R$ (соответственно $L_{\overline{\mathfrak{M}}}G/R$) произвольной полугруппы G относительно правильного отношения эквивалентности R размерности k изоморфна полугруппе бесконечного линейного автомата, функционирование которого определено следующим образом: если $\mathfrak{X}$ — множество входных символов и множество состояний суть множество элементов некоторого линейного пространства размерности k, то

$$a'=\overline{\mu}(px)=\overline{\mu}(p)\,A(x)=aA(x),$$

где $A(x_i)$ — произвольные квадратные матрицы с действительными коэффициентами порядка k (соответственно $A(x_i)$ — квадратные матрицы порядка k с действительными коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\sum_{j=1}^{k}a_{ij}(x)=1,\ A(x)=\|a_{ij}(x)\|).$$

Пусть L — некоторый линейный функционал, определенный на фактор-множестве относительно правильного отношения эквивалентности R линейного расширения полугруппы G. Тогда условие, задаваемое неравенством

$$S=\{L\overline{\mu}(p)>\lambda\},\tag{8}$$

определит некоторое множество слов или событие в алфавите, определенном порождающим множеством полугруппы G.

Определение 2. Будем говорить, что событие S $\mathfrak{M}$-представимо в полугруппе G правильным отношением эквивалентности R, если для некоторого гомоморфизма $\mu(p)$ свободной полугруппы $F_{\mathfrak{X}}$ на полугруппу G и правильного отношения эквивалентности R на линейном расширении $L_{\mathfrak{M}}G$ существуют такой линейный функционал L, определенный на фактор-пространстве $L_{\mathfrak{M}}G/R$, и константа λ, что для слов из S и только для них выполнено неравенство (8).

По свойствам фактор-пространства $L_{\mathfrak{M}}G/R$ и линейного функционала на нем для того, чтобы элемент $\overline{\mu}(p)$ определялся словом, принадлежащим событию S, необходимо и достаточно, чтобы все элементы полугруппы G, принадлежащие классу эквивалентности $\overline{\mu}(p)$, определялись словами события S.

Теорема 2. *Если событие S $\mathfrak{M}$-представимо в полугруппе G правильным отношением эквивалентности $R(\mu)$, то оно $\mathfrak{M}$-представимо во всякой полугруппе G', гомоморфным образом которой является полугруппа G, некоторым правильным отношением эквивалентности $R(\mu')$.*

Действительно, пусть S $\mathfrak{M}$-представимо в G относительно $R(\mu)$. Это означает, что существуют гомоморфизм $\mu(p)$ и правильное отношение эквивалентности $R(\mu)$ на линейном расширении $L_{\mathfrak{M}}G$ такие, что

$$S = \{L\overline{\mu}(p) > \lambda\}$$

для некоторого линейного функционала L и некоторой константы λ. Условие гомоморфизма G и G' означает, что существует функция φ такая, что $\mu(p) = \varphi(\mu'(p))$, $p \in F_{\mathfrak{X}}$. Пусть $L_{\mathfrak{M}}G$ и $L_{\mathfrak{M}}G'$ — линейные расширения полугрупп G и G'. Гомоморфизм φ полугруппы G' на полугруппу G индуцирует гомоморфизм линейного расширения $L_{\mathfrak{M}}G'$ на линейное расширение $L_{\mathfrak{M}}G$. Действительно, продолжим отображение φ на $L_{\mathfrak{M}}G'$, полагая, что

$$\overline{\varphi}(\nu') = \nu,$$

где

$$\nu = \sum_1^s \alpha_i \mu(p_i),$$

если

$$\nu' = \sum_1^s \alpha_i \mu'(p_i) \text{ и } \mu(p_i) = \varphi(\mu'(p_i)),\ i = 1, 2, \ldots s.$$

Иначе можно записать еще, что

$$\overline{\varphi}\Big(\sum_1^s \alpha_i \mu'(p_i)\Big) = \sum_1^s \alpha_i \overline{\varphi}(\mu'(p_i))\Big),$$

то есть отображение $\overline{\varphi}$ перестановочно с операцией линейной комбинации. Далее,

$$\overline{\varphi}(\nu_1')\cdot\overline{\varphi}(\nu_2') = \nu_1\cdot\nu_2 = \Big(\sum_1^{s_1}\alpha_i\mu(p_i)\Big)\cdot\Big(\sum_1^{s_2}\beta_j\cdot\mu(q_j)\Big) = \sum_1^{s_1}\sum_1^{s_2}\alpha_i\beta_j\mu(p_i)\cdot\mu(q_j) =$$

$$= \sum_1^{s_1}\sum_1^{s_2}\alpha_i\beta_j\overline{\varphi}(\mu'(p_i))\,\overline{\varphi}(\mu'(q_j)) = \sum_1^{s_1}\sum_1^{s_2}\alpha_i\beta_j\,\overline{\varphi}(\mu'(p_iq_j)) =$$

$$= \overline{\varphi}\Big(\sum_1^{s_1}\sum_1^{s_2}\alpha_i\beta_j\mu'(p_iq_j)) = \overline{\varphi}(\nu_1'\cdot\nu_2').$$

Итак, $\overline{\varphi}$ — это гомоморфизм $L_{\mathfrak{M}}G'$ на $L_{\mathfrak{M}}G$, притом линейный гомоморфизм, то есть

$$\overline{\varphi}\Big(\sum\alpha_i\nu_1'\Big) = \sum\alpha_i\overline{\varphi}(\nu_i'),\ \overline{\alpha}\in\mathfrak{M}.$$

Введем на $L_{\mathfrak{M}}G'$ отношение R' следующим образом:

$$\nu_1' \sim \nu_2'(R') \Longleftrightarrow \overline{\varphi}(\nu_1') \sim \overline{\varphi}(\nu_2')(R).$$

а) Очевидно, что R' — эквивалентность.

б) R' — стабильно справа. Действительно, в силу свойств гомоморфизма и стабильности справа отношения R, если

$$\nu_1' \sim \nu_2' (R'),$$

то

$$\bar{\varphi}(\nu_1') \sim \bar{\varphi}(\nu_2')(R)$$

или

$$\bar{\varphi}(\nu_1')\cdot\bar{\varphi}(\nu) \sim \bar{\varphi}(\nu_2')\cdot\bar{\varphi}(\nu)(R),$$

то есть

$$\bar{\varphi}(\nu_1'\nu) \sim \bar{\varphi}(\nu_2'\nu)(R)$$

или

$$\nu_1'\nu \sim \nu_2'\nu (R').$$

в) R' — линейное отношение эквивалентности. В самом деле, если $\nu_1' \sim \nu_2' (R')$, $\nu_3' \sim \nu_4' (R')$, то

$$\nu_1 \sim \nu_2 (R),\ \nu_3 \sim \nu_4 (R),\ \nu_i = \bar{\varphi}(\nu_i'),\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Тогда

$$\alpha\nu_1 + \beta\nu_2 \sim \alpha\nu_3 + \beta\nu_4\ (R).$$

Это влечет за собой

$$\alpha\bar{\varphi}(\nu_1') + \beta\bar{\varphi}(\nu_2') \sim \alpha\bar{\varphi}(\nu_3') + \beta\bar{\varphi}(\nu_4')\ (R)$$

или

$$\bar{\varphi}(\alpha\nu_1' + \beta\nu_2') \sim \bar{\varphi}(\alpha\nu_3' + \beta\nu_4'),\ (R)$$

или

$$\alpha_1\nu_1' + \beta\nu_2' \sim \alpha\nu_3' + \beta\nu_4'.\ \ (R')$$

г) R' обладает той же размерностью, что и R. Если $\nu_1\nu_2\ldots\nu_k$ — базис в $L_{\mathfrak{M}}G$, то, очевидно, $\nu_1'\nu_2'\ldots\nu_k'$, где $\nu_i = \bar{\varphi}(\nu_i')$, $i = 1, 2\ldots k$, образуют базис в $L_{\mathfrak{M}}G'$, так как каждая эквивалентность вида

$$\nu \sim \sum \alpha_i\nu_i\ (R)$$

индуцирует в $L_{\mathfrak{M}}G'$ эквивалентность вида

$$\nu' \sim \sum_i \alpha_i\nu_i'\ (R')$$

и обратно. Таким образом, фактор-пространства $L_{\mathfrak{M}}G/R$ и $L_{\mathfrak{M}}G'/R'$ полностью изоморфны, если считать соответствующими классы эквивалентности, содержащие соответствующие в гомоморфизме $\bar{\varphi}$ элементы. Отсюда следует изоморфизм и соответствующих полугрупп сдвигов, что легко проверяется изоморфным отображением обоих полугрупп на полугруппы вида $\{A(x_1),\ldots A(x_n)\}$ введением соответствующих систем координат в $L_{\mathfrak{M}}G/R$ и $L_{\mathfrak{M}}G'/R'$. Но тогда становится очевидным утверждение теоремы. Любое событие S, полученное как $S = \{L\bar{\mu}(p) > \lambda\}$, где $\{\bar{\mu}(p),\ p\in F_{\mathfrak{X}}\}$ — векторная функция, индуцированная полугруппой, изоморфной $\bar{G}(R)$, может быть получена как $S = \{L\bar{\mu}'(p) > \lambda\}$, где $\{\bar{\mu}'(p),\ p\in F_{\mathfrak{X}}\}$ — векторная функция, индуцированная полугруппой, изоморфной $\bar{G}'(R')$.

Следствие. В свободной полугруппе $F_{\mathfrak{X}}$ $\mathfrak{M}$-представимо любое событие, $\mathfrak{M}$-представимое в произвольной полугруппе G, обладающей порождающим множеством $\mathfrak{X}$.

Теорема 3. *Для того, чтобы событие S было представимо в конечном вероятностном автомате, необходимо и достаточно, чтобы оно было $\tilde{\mathfrak{M}}$-представимо в некоторой полугруппе G конечномерным правильным отношением эквивалентности R — линейным функционалом, имеющим вид $L = (0 \ldots 01 \ldots 1 \ldots 0)$. Число состояний автомата равно размерности отношения R.*

Необходимость. Действительно, если событие S представлено в конечном вероятностном автомате $A\{\mathfrak{X}, \mathfrak{U}, \mathfrak{A}, \mu(a), \mu(a', y/a, x)\}$, при начальном распределении вероятностей $\mu(a)$, то это, по определению, означает, что

$$S = \left\{\sum_{a \in \mathfrak{M}} \mu(\cdot a/p) = \chi(p) > \lambda\right\}.$$

Таким образом, событие S $\tilde{\mathfrak{M}}$-представимо в полугруппе автомата G. Отношение эквивалентности R определится линейной зависимостью векторов в k-мерном пространстве, поскольку элементы полугруппы суть k-мерные векторы, полугруппа сдвигов $\overline{G}(R)$ будет совпадать с полугруппой G. Линейный функционал будет иметь вид $L = (\underbrace{1 \ldots 1}_{\mathfrak{M}} 0 \ldots 0)$, где $\mathfrak{M}$ — множество отмеченных состояний вероятностного автомата.

Достаточность. Если полугруппа G есть та полугруппа, в которой S $\tilde{\mathfrak{M}}$-представлено конечномерным правильным отношением эквивалентности R, то рассмотрим полугруппу сдвигов $\overline{G}(R)$. Согласно теореме 1, эта полугруппа есть полугруппа вероятностного автомата с k состояниями. Если $A\{\mathfrak{X}, \mathfrak{U}, \mathfrak{A}, \mu(a), \mu(a'y/a, x)\}$ — конечный вероятностный автомат, определенный условиями

$$\mu(a) = \mu(e), \quad \|\mu(a'/a, x)\| = A(x),$$

а множество отмеченных состояний $\mathfrak{M}$ определяется ненулевыми координатами линейного функционала L, то событие S представлено в автомате A множеством состояний $\mathfrak{M}$ и константой λ, фигурирующей в представлении S полугруппой G. Из теорем 2 и 3 следует

Теорема 4. *Для того, чтобы событие S, $S \subseteq F_{\mathfrak{X}}$ было представимо в конечном вероятностном автомате, необходимо и достаточно, чтобы оно было $\tilde{\mathfrak{M}}$-представимо в свободной полугруппе $F_{\mathfrak{X}}$ конечномерным правильным отношением эквивалентности R — линейным функционалом, имеющим вид $L = \{0 \ldots 01 \ldots 10 \ldots 0\}$. Число состояний автомата равно размерности отношения R.*

Таким образом, описание класса событий, представимых в конечных вероятностных автоматах, сводится к описанию класса правильных конечномерных отношений эквивалентности на линейном расширении $L_{\tilde{\mathfrak{M}}} F_{\mathfrak{X}}$ свободной полугруппы $F_{\mathfrak{X}}$.

Используя геометрическую интерпретацию конечно-автоматной полугруппы, можно построить пример события, не представимого ни в каком конечном вероятностном автомате. Для простоты мы ограничиваемся моногенной полугруппой, хотя метод позволяет строить и более сложные примеры. Таким образом, построенный пример характеризует также возможности в смысле представимости событий S, принадлежащих свободной полугруппе $F_{\mathfrak{X}}$ в однобуквенном алфавите конечных однородных цепей Маркова.

Пусть $\{\bar{\mu}(p),\ p \in F_{\mathfrak{X}}\} = G$ — векторная конечно-автоматная функция. $F_{\mathfrak{X}}$ — свободная полугруппа над однобуквенным алфавитом $\mathfrak{X} = \{x\}$ и

$$\bar{\mu}(p) = \bar{\mu}(e) \cdot A(p) = \bar{\mu}(e) \cdot A^n(x), \quad |p| = n,$$

где $A(x)$ — стохастическая матрица.

Тогда верна

Лемма 1. *Для того, чтобы размерность линейного подпространства, содержащего все состояния моногенного вероятностного автомата A, была равна k, необходимо и достаточно, чтобы k первых элементов в ряду*

$$\bar{\mu}(p_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \mu(p_i), \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = 1$$

были линейно независимы, а $\bar{\mu}(\underbrace{xx\ldots x}_{k})$ линейно выражалось через первые k элементов.

Достаточность. Пусть

$$\bar{\mu}(p_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \bar{\mu}(p_i), \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = 1.$$

Тогда для p_{k+1} получим:

$$\bar{\mu}(p_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \bar{\mu}(p_i) \bar{\mu}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \bar{\mu}(p_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i \bar{\mu}(p_{i+1}) + \alpha_{k-1} \bar{\mu}(p_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{i-1} \bar{\mu}(p_i) + \alpha_{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \bar{\mu}(p_i) = \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_{k-1}\alpha_i) \cdot \bar{\mu}(p_i), \quad \alpha_{-1} = 0,$$

откуда следует, что система элементов $\bar{\mu}(e)$, $\bar{\mu}(x), \ldots \bar{\mu}(p_{k-1})$ образует базис.

Необходимость. Пусть размерность линейного подпространства, содержащего полугруппу G, есть k. Тогда k первых элементов полугруппы линейно-независимы. Предположим, что $\bar{\mu}(p_s)$, $s < k-1$ линейно зависит от элементов

$$\bar{\mu}(e), \ldots \bar{\mu}(p_{s-1}), \ \bar{\mu}(p_{s+1}) \ldots \bar{\mu}(p_k),$$

образующих базис:

$$\mu(p_s) = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i \bar{\mu}(p_i) + \sum_{i=s+1}^{k} \alpha_i \mu(p_i).$$

Тогда

$$\mu(p_{s+1}) = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i \bar{\mu}(p_{i+1}) + \sum_{i=s+1}^{k} \alpha_i \bar{\mu}(p_{i+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_{i-1} \bar{\mu}(p_i) + \alpha_{s-1} \bar{\mu}(p_s) + \sum_{i=s}^{k} \alpha_{i-1} \bar{\mu}(p_i) + \alpha_k \bar{\mu}(p_{k+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_{i-1} \bar{\mu}(p_i) + \alpha_{s-1} \left[\sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i \bar{\mu}(p_i) + \sum_{i=s+1}^{k} \alpha_i \bar{\mu}(p_i)\right] +$$

$$+ \sum_{i=s}^{k} \alpha_{i-1} \bar{\mu}(p_i) + \alpha_k \left[\sum_{i=0}^{s-1} \beta_i \bar{\mu}(p_i) + \sum_{i=s+1}^{k} \beta_i \bar{\mu}(p_i)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \{\alpha_{i-1} + \alpha_{s-1} \cdot \alpha_i + \alpha_k \cdot \beta_i\} \bar{\mu}(p_i) + \sum_{i=s+1}^{k} \{\alpha_{i-1} + \alpha_{s-1} \cdot \alpha_i + \alpha_k \cdot \beta_i\} \cdot \bar{\mu}(p_i),$$

$$\alpha_{-1} = 0.$$

Отсюда видно, что $\bar{\mu}(p_{s+1})$ — несущественный элемент базиса, так как выражается линейно через остальные элементы базиса. Продолжая аналогичные построения, мы убеждаемся в том, что базисом является система $\bar{\mu}(e)$, $\bar{\mu}(x) \dots \bar{\mu}(p_{s-1})$ и размерность пространства, следовательно, равна s, что противоречит исходному предположению.

Из леммы 1, в частности, вытекает следующее следствие: Пусть слова $p_{i_1}, p_{i_2} \dots p_{i_t}$, $\{i_1 i_2 \dots i_t\} = G_1$ не принадлежат событию S, представляемому данным конечным вероятностным автоматом, а слова $p_{i_{t+1}} \dots p_{i_k}$, $\{i_{t+1} \dots i_k\} = G_2$ принадлежат ему. Пусть, далее, слово p определено условием

$$\bar{\mu}(p) = \sum_{i \in G_1} \alpha_i \bar{\mu}(p_i) + \sum_{i \in G_2} \alpha_i \bar{\mu}(p_i),$$

где α_i, $i \in G_1$ и α_i, $i \in G_2$ имеют один и тот же знак. Тогда, если

$$i \in G_1, \ \alpha_i \geqslant 0$$
$$i \in G_2, \ \alpha_i \leqslant 0,$$

то

$$L\bar{\mu}(p) = \sum_{i \in G_1} \alpha_i L \bar{\mu}(p_i) + \sum_{i \in G_2} \alpha_i L \bar{\mu}(p_i) < \lambda$$

и, следовательно, p заведомо не принадлежит S. Аналогично, если

$$i \in G_1, \ \alpha_i \leqslant 0$$
$$i \in G_2, \ \alpha_i \geqslant 0,$$

то p принадлежит S. Это замечание позволяет конструировать события, не представимые ни в каком конечном вероятностном автомате.

Построим в свободной полугруппе, определенной однобуквенным алфавитом $\{x\}$, событие, которое мы будем обозначать $T(x)$. Для конструирования события $T(x)$ введем в рассмотрение предикат $\chi(N)$:

$$\chi(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } \underbrace{x \dots x}_{N} \in T(x) \\ 0, & \text{если } \underbrace{x \dots x}_{N} \bar{\in} T(x). \end{cases}$$

Пусть

$$\varphi(k) = 2^k (k+1),$$

$$\varkappa(k) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(i) = k \cdot 2^{k+1}.$$

Дадим вначале словесное описание алгорифма получения значения функции $\chi(N)$:

1. Найти $\bar{n}$, такое, что

$$\chi(\bar{n}) \geqslant N,$$

но

$$\chi(\bar{n}-1) < N.$$

2. $i = N - \varkappa(\bar{n}-1)$. Легко видеть, что $0 < i \leqslant \varphi(\bar{n})$.

3. Найти j такое, что

$$(j-1)(\bar{n}+1) < i,$$

но

$$j(\bar{n}+1) \geqslant i.$$

4. $k = i - (j-1)(\bar{n}+1)$. Очевидно, что $0 < k \leqslant \bar{n}+1$.

5.

$$\chi(N) = \begin{cases} \alpha(j, k), & \text{если } k < \bar{n}+1 \\ 0 & \text{, если } k = \bar{n}+1. \end{cases}$$

Здесь $\alpha(j, k)$ означает значение k-того разряда и числа j, записанного в двоичной форме.

Теперь легко записать алгорифм получения значения функции целиком формально. Справедливо следующее

Замечание. Наименьший целый корень неравенства

$$k \cdot 2^{k+1} \geqslant N$$

есть примитивно-рекурсивная функция от N.

Действительно, пусть корень неравенства с требуемыми свойствами есть

$$\bar{k} = \theta(N).$$

С ростом N на единицу $\bar{k}$ либо сохраняет свое значение, либо возрастает на единицу. Пусть нам известно значение $\bar{k}(N-1) = \theta(N-1)$. Тогда мы можем вычислить значение примитивно-рекурсивной функции

$$\tilde{N} = \varkappa(\theta(N-1)+1).$$

Если окажется, что $\tilde{N} \geqslant N$, то при переходе от $N-1$ к N сохраняется прежнее значение корня, если же окажется, что $\tilde{N} < N$, то значение корня должно возрасти на единицу. Таким образом,

$$\theta(N) = \begin{cases} \theta(N-1), & \text{если } \varkappa(\theta(N-1)+1) \geqslant N \\ \theta(N-1)+1, & \text{если } \chi(\theta(N-1)+1) < N. \end{cases}$$

Введем предикат

$$p(\theta, N) = \{\varkappa(\theta+1) \geqslant N\}.$$

Тогда

$$\theta(N) = \theta(N-1) \cdot p[\theta(N-1), N] + [\theta(N-1)+1] \cdot [1 - p[\theta(N-1), N]] = \\ = \theta(N-1) + 1 - p[\theta(N-1), N].$$

Поэтому функция $\theta(N)$ (см. например, [4]) примитивно-рекурсивна.

Далее, очевидно, что

$$j = \left]\frac{i}{\bar{n}+1}\right[,$$

где $]r[$ означает наименьшее целое число не меньшее, чем r. Наконец, пусть $p_2(k, \bar{n})$ — предикат, который равен 1 тогда и только тогда, если $k < \bar{n}+1$. Тогда функция $\chi(N)$ может быть записана в следующем виде:

$$\chi(N) = \alpha_i \left\{ \left] \frac{i}{\bar{n}+1} \right[,\ i - (\bar{n}+1)\cdot\left(\left] \frac{i}{\bar{n}+1} \right[-1 \right) \right\} \cdot$$
$$\cdot p_2 \left\{ i - (\bar{n}+1)\cdot\left(\left] \frac{i}{\bar{n}+1} \right[-1 \right),\ \bar{n} \right\},$$

где

$$\bar{n} = \theta(N)$$

и

$$i = N - \varkappa(\theta(N) - 1).$$

Поскольку все функции $\alpha(j, k)$, $]r[$, $\theta(N)$, $\varkappa(n)$, $p_2(k, n)$ и элементарные функции примитивно-рекурсивные, то функция $\chi(N)$ является примитивно-рекурсивной.

Замечание. Событие $T(x)$, определенное на свободной полугруппе $F(x)$ над однобуквенным алфавитом $\{x\}$ примитивно-рекурсивным предикатом $\chi(N)$, не представимо ни в каком конечном вероятностном автомате.

Докажем высказанное утверждение от противного. Пусть существует конечный вероятностный автомат с k состояниями, в котором событие $T(x)$ представлено некоторым множеством состояний M. Тогда размерность линейного подпространства, содержащего все состояния $\bar{\mu}(p)$ этого автомата, будет не более k. Пусть она равна s. Согласно лемме 1, первые s элементов $\bar{\mu}(e)$, $\bar{\mu}(x) \dots \bar{\mu}(p_{s-1})$ линейно независимы, тогда как $\bar{\mu}(p_s)$ выражается через них линейно. Предположим, что

$$\bar{\mu}(p_s) = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i \bar{\mu}(p_i),\ \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i = 1,\ p_i = \underbrace{xx \dots x}_{i} \quad p_0 = e.$$

Пусть $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_t}$, $\{i_1 \dots i_t\} = G_1$—положительны, $\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{s-t}} \{j_1 \dots j_{s-t}\} = G_2$—неположительны. Поэтому, если слова $p_{i_1} \dots p_{i_t}$ $i_1 \dots i_t \in G_1$ принадлежат событию $T(x)$, а слова $p_{j_1} \dots p_{j_{s-t}}$ $j_1 \dots j_{s-t} \in G_2$ не принадлежат ему, то слово p_s должно принадлежать событию $T(x)$. Однако в силу того, что полугрупповое умножение дистрибутивно справа по отношению к операции линейной комбинации, мы получим

$$\bar{\mu}(p_s q) = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i \bar{\mu}(p_i \cdot q).$$

Поэтому вышеуказанное свойство системы векторов

$$\bar{\mu}(e),\ \bar{\mu}(x) \dots \bar{\mu}(p_{s-1}),\ \bar{\mu}(p_s)$$

сохраняется при любом „сдвиге" q. Пусть

$$\bar{K} = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{s-1}$$

— число, записанное в двоичной форме, где

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_i > 0 \\ 0, & \text{если } \alpha_i \leqslant 0. \end{cases}$$

Положим длину слова $q(t)$ равной $N + t$, где

$$N = \varkappa(s-1) + K\cdot(s+1) + 1,\ K + 1 = \bar{K}.$$

Тогда получим последовательность слов P_{N+t}, $t = 0, 1, \dots s$

$$P_N,\ P_{N+1} \dots P_{N+s-1},\ P_{N+s}.$$

Найдем $\chi(N+t)$. Согласно словесному определению алгорифма вычисления $\chi(N)$, получаем:

1. $\bar{n} = \theta(N+t) = s, \ t = 0, 1, \ldots s$
2. $i = N + t - \varkappa(\bar{n}-1) = K(s+1) + 1 + t$
3. $j = \left]\dfrac{i}{\bar{n}+1}\right[= \left]\dfrac{K(s+1)+1+t}{s+1}\right[= K+1, \ t = 0, 1, \ldots s$
4. $k = K\cdot(s+1) + 1 + t - K(s+1) = 1 + t$
5. $\chi(N+t) = \alpha(K+1, \ 1+t) = \begin{cases} \sigma_t, & t < s \\ 0, & t = s. \end{cases}$

Следовательно, слова P_N, $P_{N+1} \ldots P_{N+s-1}$ таковы, что

$$\{P_{N+t} \in T_x\} = \sigma_t.$$

Но

$$\sum_{t=0}^{s-1} \alpha_t P_{N+t} = P_{N+s}.$$

Так как $\alpha_t > 0$ для $\sigma_t = 1$ и $\alpha_t \leqslant 0$ для $\sigma_t = 0$, то P_{N+s} должно принадлежать событию $T(x)$. Однако $\chi(N+s) = 0$, поскольку $k = 1 + t = 1 + s = 1 + \bar{n}$, то есть слово P_{N+s}, по определению $\chi(N)$, в событие $T(x)$ не входит. Противоречие доказывает утверждение.

Наряду с автоматными отображениями свободной полугруппы $F_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X} = \{x_1 \ldots x_n\}$ на свободную полугруппу $F_{\mathfrak{U}}$, $\mathfrak{U} = \{y_1 \ldots y_m\}$, определяемыми конечными детерминированными автоматами, естественно рассматривать более общие отображения такого типа, производимые алгорифмами, принадлежащими некоторому классу.

Определение[1]. Событие S называется рекурсивным, если существует алгорифм $\mathfrak{A}$, определенный для любого слова свободной полугруппы F_x, которой принадлежит событие S, и перерабатывающий за конечное число шагов слова из S и только эти слова в некоторую фиксированную букву алфавита $\mathfrak{U}$.

Как легко видеть, рекурсивная функция $\chi(N)$, построенная нами, определяет некоторый алгорифм, преобразующий в единицу слова из события $T(x)$ и только эти слова. Таким образом, событие $T(x)$ оказывается рекурсивным. Более того, оно даже примитивно-рекурсивно.

Отметим, что, так как замечание на стр. 20 относительно свойства принадлежности событию $T(x)$ последовательного ряда слов остается справедливым и для случая M- и $\overline{M}$-представимости событий в полугруппе G правильным конечномерным отношением эквивалентности, то совершенно аналогично можно показать, что событие $T(x)$ M- и $\overline{M}$-непредставимо никаким конечномерным правильным отношением эквивалентности в произвольной полугруппе G.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. О. Рабин. Вероятностные автоматы. Inf. and Control, № 6, 1963.
2. Р. Г. Бухараев. Некоторые эквивалентности в теории вероятностных автоматов. Сб. „Вероятностные методы и кибернетика", III. Изд. КГУ, 1964.
3. Е. С. Ляпин. Теория полугрупп. Физматгиз, М., 1960.
4. Р. Петер. Рекурсивные функции. ИЛ, Москва, 1954.

Статья поступила 9 сентября 1966 года.

[1] Определение рекурсивного события сообщено автору С. В. Яблонским.