# Определение вероятностного автомата.

Математической моделью дискретного устройства является *абстрактный автомат*, определяемый как шестикомпонентный кортеж, или вектор, , у которого:

1. множество состояний (алфавит состояний);
2. множество входных сигналов (входной алфавит);
3. множество выходных сигналов (выходной алфавит);
4. *функция переходов*, реализующая отображение в .
5. *функция выходов*, реализующая отображение в .
6. начальное состояние автомата.

*Вероятностным автоматом* называется такой абстрактный автомат, для которого функции и соответственно принимают вид и , где случайная величина , определяющая переход.

Рассмотрим пример вероятностного автомата:

1. *.*
2. *.*
3. *.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  | |  | |  | |
|  | *p* |  | *p* |  | *p* |  | *p* |
|  |  | *0.5* |  |  |  | *0.3* |  |  |
|  | *0.3* |  | *1* |  | *0.4* |  | *0.7* |
|  | *0.2* |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *1* |  | *0.5* |  | *1* |  | *0.4* |
|  |  |  | *0.5* |  |  |  |  |

В таблице на пересечении -ого и -ого столбцов стоят пары переход-вероятность. Сумма всех вероятностей для конкретного и должна . Если , то *вероятность несрабатывания перехода*.

*Замечание.* Далее все рассуждения, приведённые для абстрактного автомата, также справедливы и для вероятностного автомата, если не будет указано обратное.

# Сеть автоматов и его свойства.

В качестве модели, описывающей совместную работу совокупности автоматов, в алгебраической теории автоматов используется понятие сети автоматов.

*Сеть автоматов* – это шестёрка

,

где:

1. Z – входной алфавит.
2. , – множество *компонентных автоматов* (КА) *сети*. КА - полуавтомат, - его входной алфавит:
3. *W –* выходной алфавит сети.
4. *-* множество *функций соединения* компонентных автоматов сети.
5. *–* множество *входных функций*.
6. *- выходная функция* сети.

Множества и назовём, соответственно, базисом и структурой сети.

Определённую таким образом сеть можно рассматривать как общую модель совместной работы совокупности автоматов, поскольку в ней нет ограничений ни на выбор элементов базиса, ни на выбор структуры.

Для сети N можно строить функционально эквивалентный её автомат , который будем называть результирующим автоматом сети N.

Результирующим автоматом сети назовём автомат

,

у которого:

1. Функция переходов , определяемая следующим образом:

Здесь

1. Функция выходов (в модели Мили), определяемая следующим образом:

В модели Мура

*Замечание.* Стоит отметить, что результирующим автоматов сети вероятностных автоматов также будет вероятностный автомат. Причём, функции переходов и выходов для этого автомата соответственно принимают вид: и .

# Задача декомпозиции автомата.

Введённые понятия сети автоматов и её результирующего автомата позволяют сформулировать задачи композиции и декомпозиции автоматов. Под задачей композиции автоматов понимается задача нахождения для сети N её результирующего автомата .

Для определения задачи декомпозиции автоматов введём дополнительные понятия.

Автомат называется подавтоматом автомата , если и только если и для любого справедливо

Другими словами, на области определения автомата поведение обоих автоматов совпадает. Таким образом, автомат S «делает столько же, сколько и , и, быть может, несколько больше».

*Замечание.* Для вероятностных автоматов приведённые выше условия принимают вид:

*,*

,

где .

Автоматы *S* и называются *изоморфными*, если существуют три взаимно-однозначных отображения

,

таких, что

и

для любых и .

*Замечание.* В случае вероятностных автоматов данные условия переписываются следующим образом:

,

,

где .

Тройку отображений , и называют *изоморфизмом* автоматов и . Кратко понятие изоморфизма формулируется следующим образом: образ функции равен функции образов. Иначе, изоморфные автоматы идентичны с точностью до обозначений состояний, входных и выходных сигналов.

Автомат назовём *реализацией автомата* (обозначение ), если у автомата *S* существует подавтомат, изоморфный . Таким образом, если автомат *S* реализует автомат , то поведение *S* с точностью до обозначений совпадает с поведением на области определения , так как у автомата *S* должен быть некоторый подавтомат , изоморфный .

Под *задачей декомпозиции автомата S* будем понимать задачу построения сети *N*, такой, что её результирующий автомат реализует заданный автомат *S*, т.е. .

## Разбиение множества.

*Разбиением множества А* называется множество , элементы которого – подмножества , удовлетворяющие следующим условиям:

1. Для любых двух множеств и .
2. *.*

Множества назовём *блоками разбиения* .

{вставлять или нет информацию по свойствам разбиений, их сумме и произведению?}

Пусть – множество состояний компонентного автомата . Определим разбиение на множестве следующим образом: , если и только если для всех . Таким образом, два состояния и результирующего автомата попадают в один блок , если и только если в их кодах соответственно равны компоненты .

Каждый блок соответствует различным элементам во множестве ( - множество состояний компонентного автомата ), т.е. в столько блоков, сколько различных внутренних состояний имеет система автоматов . Если в , то на можно аналогичным образом задать разбиение (иногда его называют примарным разбиением). Это разбиение, очевидно, определяется следующим образом: , если и только если . Таким образом, в один блок разбиения попадают те состояния результирующего автомата, которые имеют одинаковые *i*-е компоненты. Следовательно, число блоков разбиения равно числу состояний компонентного автомата и между блоками и состояниями имеется взаимно-однозначное соответствие. В связи с этим можно отождествлять состояния с блоками разбиения .

## СП-разбиение.

Разбиением на множестве состояний автомата обладает свойством подстановки (является СП-разбиением), если и только если из ( - в одном блоке ) следует, что для всех .

Иначе, под действием любого входного сигнала автомат из состояний, находящихся в одном блоке , переходит в состояния, также находящиеся в одном блоке, т.е. каждый входной сигнал отображает блоки в блоки . Таким образом, для и существует единственный блок , такой, что .

Пусть СП-разбиение на множестве состояний автомата . Тогда -образом автомата *S* назовём полуавтомат , у которого , если и только если .

Если и СП-разбиения, то и тоже СП-разбиения.

## Процедура нахождения всех СП-разбиений:

1. Для каждой пары состояний вычисляется наименьшее СП-разбиение , которое отождествляет с (первичные СП-разбиения).
2. Находятся все возможные суммы полученных на первом шаге . Эти суммы образуют вторичные СП-разбиения.

Отождествим два состояния и в одном блоке искомого разбиения . Тогда из определения разбиения с СП следует, что для любого состояния и также должны быть отождествлены . Ясно, что если состояние отождествлено с , - с , то состояния и также должны быть отождествлены, поскольку разбиение соответствует эквивалентности, а последняя транзитивна. Процесс повторяется для каждой пары состояний, вошедших в один блок, до тех пор, пока не перестанут отождествляться новые состояния. Построенное таким образом разбиение имеет свойство подстановки и является минимальным разбиением, которое отождествляет состояния и в одном блоке. Чтобы получить другие разбиения, процесс повторяется для каждой пары состояний, т.е. раз, где *M* – число состояний автомата.

## Пары разбиений.

Два разбиения определённых на множестве состояний *A* автомата , назовём парой разбиений, если и только если из следует для всех .

Т.е. при работе *S* блоки переводятся в блоки под действием любого входного сигнала, т.е. для каждого и существует единственный блок , такой что .

Если СП-разбиение, то пара разбиений. Также можно показать, что если и две пары разбиений на множестве состояний *A* автомата *S*, то и тоже пары разбиений на множестве *A*.

По аналогии с взаимно-однозначным соответствием между блоками и состояниями , определяет входы в от других автоматов. Т.е. существует взаимно-однозначное соответствие между блоками и состояниями системы автоматов . Как и в любом автомате Мили, следующее состояние (блок разбиения ) определяется его текущим состоянием и входным сигналом (входной сигнал здесь – состояние системы автоматов и буква внешнего входного алфавита ). Таким образом, состояние в любой момент времени определяется состоянием системы автоматов , и , т.е. блоком разбиения и , поэтому пара разбиений, а реализует отображение в .

## Общая теорема декомпозиции.

Пусть некоторое множество разбиений на множестве *A* состояний декомпозируемого автомата .

Теорема. Множеству разбиений можно поставить в соответствие абстрактную сеть автоматов *N*, так чтобы , если и только если

. (1)

При этом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между разбиениями и компонентными автоматами .

Множество разбиений, удовлетворяющих условию (1), будем называть *ортогональным множеством разбиений*.

Таким образом, для декомпозиции автомата необходимо выбрать ортогональное множество разбиений. Способ выбора такого множества будет описан ниже, в соответствующем параграфе.

Поставим в соответствие каждому разбиению функцию , такую, что , т.е. значение функции на паре равно блоку , в котором содержится состояние .

*Замечание.* В случае вероятностного автомата определение функции переписывается следующим образом: , где . Смысл функции, очевидно, остаётся тем же.

Образуем на множествах A и Z соответственно разбиения и , так что:

1. и находятся в одном блоке разбиения , если и только если для любого справедливо: .
2. и находятся в одном блоке разбиения , если и только если для любого справедливо: .

Полученные таким образом пара разбиений, т.е. каждый блок отображается любым входным сигналом в некоторый блок . При этом максимальное разбиение, образующее пару .

Построим сеть , для чего определим все компоненты кортежа *N*. Начнём с входного и выходного алфавитов сети.

1. Полагаем .
2. Полагаем .
3. Построим компонентные автоматы , т.е. определим базис сети.
4. Полагаем .
5. Для определения входного алфавита компонентного автомата воспользуемся построенными разбиениями и . Напомним, что

(2)

Здесь и соответственно внутренний и внешний входные алфавиты автомата .

Если на вход функции поступают выходы компонентных автоматов , то пара разбиений, где , так как максимальное разбиение, образующее пару с . Нетрудно также доказать, что . Таким образом, для нахождения автоматов, выходы которых присоединяются ко входу , необходимо найти такое произведение , которое не превосходит , и тогда выходы должны быть соединены со входом .

Определим разбиение следующим образом:

*,*

т. е. не входит в это произведение, так как ко входу могут присоединяться выходы других, отличных от , компонентных автоматов.

В автомате полагаем , а определяется согласно равенствам (2).

1. Определим функцию переходов компонентного автомата .

Пусть соответственно блоки разбиений . Если , т. е. (СП-разбиение), то

*.*

Таким образом, значение функции переходов равно блоку разбиения , содержащему . Здесь функция переходов декомпозируемого автомата .

Если же , то

*Замечание.* Для вероятностного автомата необходимо учитывать вероятность , входящую в сигнатуру функций и . Как было сказано выше [ссылка на определение вероятностного автомата] в некоторых случаях переход может быть не осуществлён (вероятность несрабатывания перехода). В этом случае переходы всех компонентных автоматов сети также не сработают.

1. Построим функции соединения компонентных автоматов ; иначе (в терминах разбиений) .

Пусть . Образуем множество , такое, что . Таким образом, в попадают только те векторы из , у которых пересечение всех компонентов не пусто. Такое пересечение имеет место, так как компоненты блоки разбиений, т.е. множества.

Функция реализует отображение . Значение определим следующим образом:

т.е. значение функции равно тому блоку разбиения , в который входит пересечение компонентов .

На множестве функция не определена.

1. Определим множество входных функций следующим образом:

т. е. значение функции на равно блоку разбиения , содержащему . Отсюда ясно, что автомат не различают тех букв входного алфавита , которые входят в один блок разбиения .

1. Построим выходную функцию сети , иначе (в терминах разбиений) .

Пусть . Образуем множество , такое, что . Таким образом, в попадают только те векторы из , у которых пересечение всех компонентов не пусто.

Функция реализует отображение . Значение определим следующим образом:

т. е. значение выходной функции сети совпадает со значением функции выхода декомпозируемого автомата на паре , где состояние, попавшее в пересечение компонентов вектора .

Замечание. Стоит отметить, что для вероятностного автомата обозначенное выше условие принимает следующий вид:

На множестве функция не определена.

В работе [ссылка] показано, что построенная таким образом сеть реализует исходный автомат .

Разбиения и однозначно определяется разбиением ; показывает, какие автоматы воздействуют на автомат , а определяет классы неразличимых автоматом букв входного алфавита .

Таким образом, характеристическая тройка автомата . Стоит отметить, что и являются наибольшими разбиениями, причём чем больше , тем меньше выходов других автоматов воздействует на . Чем больше , тем проще зависимость от внешнего входа . Использование разбиений и при построении является, таким образом, необходимым условием для построения сети наименьшей сложности.



# Выбор ортогонального множества разбиений.

Из конструктивного способа построения сети видно, что структура сети определена в общем случае не однозначно, поскольку неравенство , которое определяет автоматы , влияющие на поведение , может быть выполнено при различных совокупностях разбиений из , где последнее является ортогональным множеством разбиений (т.е. ).

Как было показано выше, от выбора ортогонального множества разбиений зависит структура и состав результирующей сети .

Выбор данного множества должен быть осуществлён до начала декомпозиции автомата.