

제어공학 중간 대체 과제

2016171073 송명우

1. 본인이 관심있는 분야 또는 주제 선정

취리히 대학에서 Cubli 라는 Inverted pendulum 로봇을 만든 것을 보고 따라 만들어 보고 싶어서 1년 전 동아리에서 사람을 모아 3D 프린터, 자이로 센서, 모터, 엔코더 등으로 2차원 Cubli 를 만드는 시도를 한 적이 있다. 그 당시 칼만 필터와 PID 제어를 공부했는데 제대로 아는 것이 없어서 결국 제작에 실패한 경험이 있다. 제어공학에 대한 지식이 약간 생겼으니 다시 2차원 Cubli 의 시물레이션에 도전해본다.

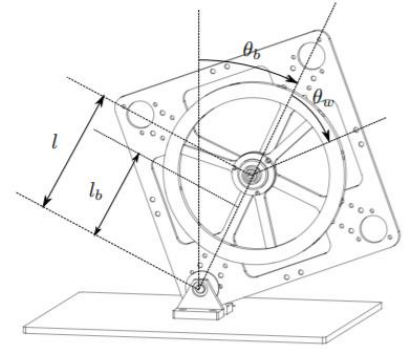


그림 1 평면 Cubli 모델

2. 모델링

그림 1은 평면 Cubli의 모습이다. l 은 pivot 부터 wheel의 무게 중심 까지의 거리, l_b 는 pivot 부터 body의 무게중심까지의 거리. θ_b 는 바닥에 수직인 축을 기준으로 켜 body 의 기울어진 각도, θ_w 는 body의 축을 기준으로 켜 wheel 의 회전 각도, m_b 는 body의 질량, m_w 는 wheel의 질량, I_b 는 pivot에서 켜 body 의 회전관성, I_w 는 wheel 의 무게중심에서 켜 wheel 의 회전관성, C_b 는 pivot 과 body 의 마찰 계수, C_w 는 wheel 과 모터축의 마찰계수이다.

θ_b 와 토크에 관한 식을 세우면 다음과 같다.

$$(I_b + m_w l^2) \ddot{\theta}_b = (m_b l_b + m_w l) g \sin \theta_b - T_m + C_w \dot{\theta}_w - C_b \dot{\theta}_b$$

θ_w 와 토크에 관한 식을 세우면 다음과 같다.

$$\ddot{\theta}_w = \ddot{\theta}_{w,abs} - \ddot{\theta}_{w,b} = \frac{T_m - C_w \dot{\theta}_w}{I_w} - \frac{(m_b l_b + m_w l) g \sin \theta_b - T_m + C_w \dot{\theta}_w - C_b \dot{\theta}_b}{I_b + m_w l^2}$$

3. 본인 시스템의 전달함수를 구하세요.

$x = \begin{bmatrix} \theta_b \\ \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_w \end{bmatrix}$ 라 하고 $\sin \theta_b \approx \theta_b$ 로 근사하면 위 두 식과 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 와 $y(t) = Cx(t)$ 로부터 다음이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_b \\ \ddot{\theta}_b \\ \ddot{\theta}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(m_b l_b + m_w l)g}{I_b + m_w l^2} & \frac{-C_b}{I_b + m_w l^2} & \frac{C_w}{I_b + m_w l^2} \\ \frac{-(m_b l_b + m_w l)g}{I_b + m_w l^2} & \frac{C_b}{I_b + m_w l^2} & -\left(\frac{1}{I_w} + \frac{1}{l_b + m_w l^2}\right)C_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_b \\ \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-K_m}{I_b + m_w l^2} \\ \left(\frac{1}{I_w} + \frac{1}{l_b + m_w l^2}\right)K_m \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta_b \\ \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_w \end{bmatrix}$$

참조[1]에서 실제 cubli에 사용된 각 parameter 들을 대입하여 A, B, C 행렬을 구하면,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(m_b l_b + m_w l)g}{I_b + m_w l^2} & \frac{-C_b}{I_b + m_w l^2} & \frac{C_w}{I_b + m_w l^2} \\ \frac{-(m_b l_b + m_w l)g}{I_b + m_w l^2} & \frac{C_b}{I_b + m_w l^2} & -\left(\frac{1}{I_w} + \frac{1}{l_b + m_w l^2}\right)C_w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 99.3418 & -211.886 & 10.3866 \\ -99.3418 & 211.886 & -98.1059 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-K_m}{I_b + m_w l^2} \\ \left(\frac{1}{I_w} + \frac{1}{l_b + m_w l^2}\right)K_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5.2141 \\ 49.249 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Parameter	Values
m_w	0.204kg
m_b	0.419kg
l	0.085m
l_b	0.075m
I_w	0.57mkgm ²
I_b	3.34mkgm ²
C_b	1.02mkgm ² /s
C_w	0.05mkgm ² /s
K_m	25.1mNm/A

이를 매트랩으로 Transfer function 을 구하면,

```

1 - A = [0 1 0; 99.3418 -211.886 10.3866; -99.3418 211.886 -98.1059];
2 - B = [0 ; -5.2141 ; 49.249];
3 - C = [1 0 0];
4 - D = 0;
5 - [nom, den] = ss2tf(A,B,C,D)

명령 창

nom =

    0    0 -5.2141 -0.0043

|

den =

1.e+04 *

0.0001    0.0310    1.8487   -0.8714

```

$$\therefore \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-5.2141s - 0.0043}{s^3 + 310s^2 + 18487s - 8714}$$

Negative feedback 을 쓸 것이므로 $K_m = -K_m$ 을 사용하면

$$\therefore \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5.2141s + 0.0043}{s^3 + 310s^2 + 18487s - 8714}$$

이 함수가 앞으로 사용할 전달함수이다.

4. Proportional negative feedback 시스템을 고려하여 다음에 답하세요.

1) Routh's stability criterion 를 사용하여 시스템이 안정하기 위한 K의 범위를 구하세요.

$$\begin{array}{c} s^3 \quad 1 \quad 18487 + 5.214K \\ s^2 \quad 310 \quad -8714 + 0.0043K \\ s^1 \quad 18487 + 5.214K + \frac{8714 - 0.0043K}{310} \\ s^0 \quad -8714 + 0.0043K \end{array}$$

$$\frac{8714}{0.0043} = 2.02651 \cdot 10^6 < K \text{ 면 된다.}$$

2) 시스템이 안정하기 위한 K 하나를 선택하고 매트랩이나 시뮬링크를 이용하여 출력값을 보이세요.

(입력은 unit step function 이며 코드나 블록을 캡처해서 보고서에 첨부하세요.)

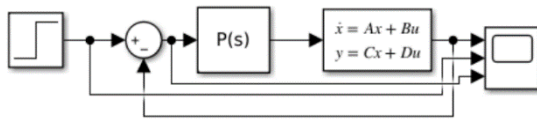


Figure 1 Simulink Block

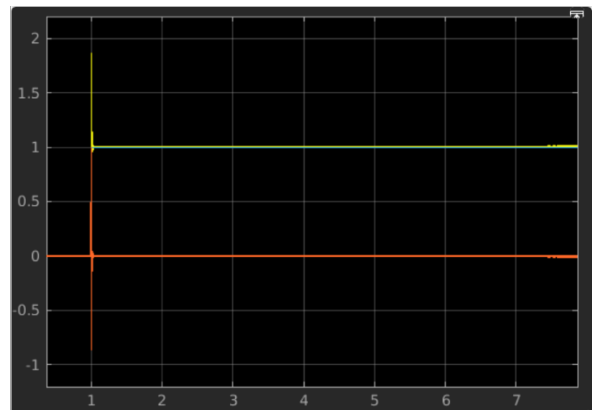
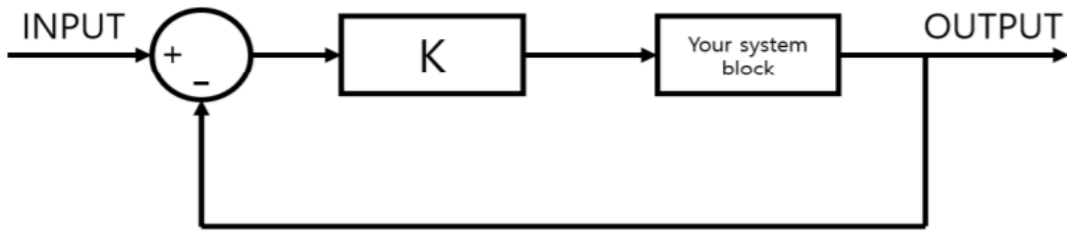


Figure 1 초기값 $0.1\text{rad} \approx 5.73^\circ$, $K = 3 \cdot 10^6$

그런데 Simulink 의 내부적으로 오류가 있는건지 큰 시간(100 초)을 관찰했을 때 이하의 그래프들이 이상하게 나와 여기서부터는 matlab 으로만 그래프를 그렸다.

5. 본인의 시스템의 root locus 와 관련된 다음 문제들에 답하세요.

1) Proportional negative feedback 시스템의 root locus 를 손으로 그리세요.



<Figure 3-@>

$$1 + \frac{K(5.214s + 0.0043)}{s^3 + 310s^2 + 18487s - 8714} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{5.2141 \cdot K(s + \frac{0.0043}{5.2141})}{(s - 467.685 \cdot 10^3)(s + 81.3059)(s + 229.162)} = 0$$

$$\therefore \alpha - 3\alpha = -2\alpha = \pm 180^\circ(2K+1)$$

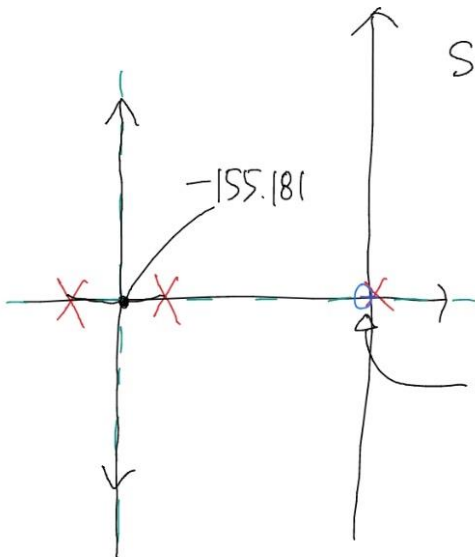
$$\alpha = 90^\circ, -90^\circ, 180^\circ, 360^\circ$$

$$s \rightarrow \infty \text{ 일 때 } G(s) = \frac{1}{(s + \frac{310}{3})^3} \therefore s = -\frac{310}{3}$$

or

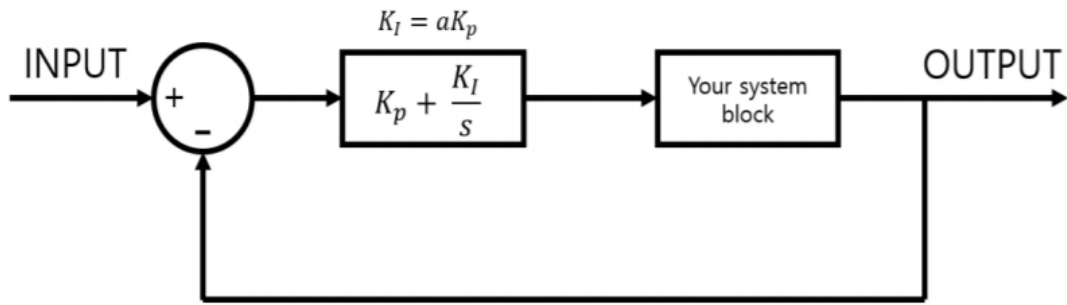
$$\frac{dK}{d\alpha} = 0 \Rightarrow s = -155.181$$

여기서 안정성이 결정된다.



2) PI 제어 시스템의 root locus 를 손으로 그리세요.

$a=1$ 을 사용하였다.



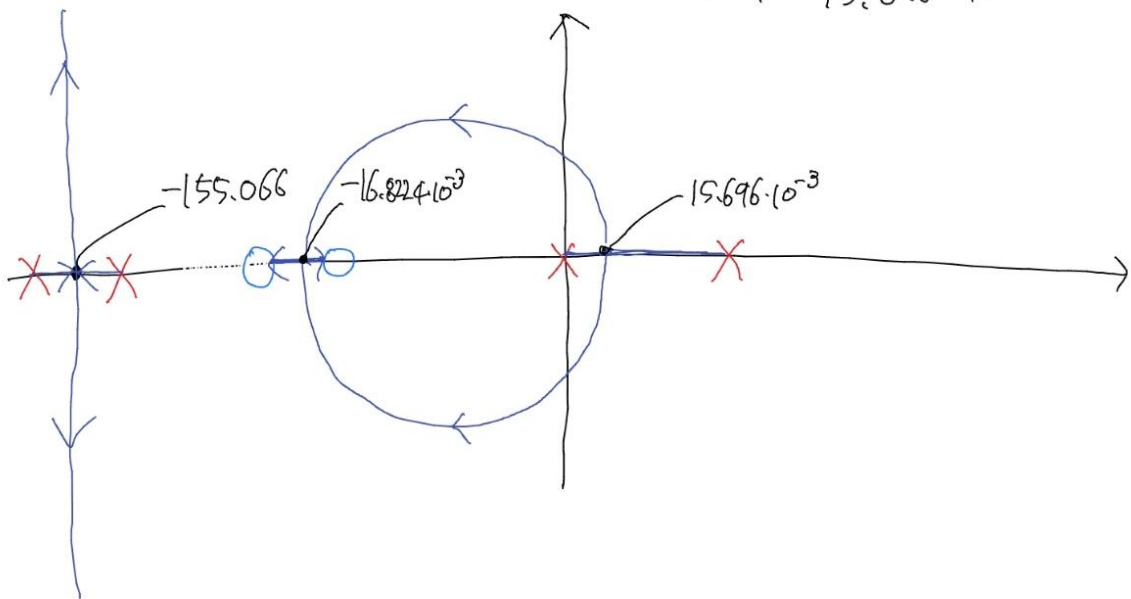
$$G(s) = K_p \left(1 + \frac{a}{s}\right) \left(\frac{5.2141s + 0.0043}{s^3 + 310s^2 + 18487s - 8714}\right)$$

$$= K_p \left(\frac{5.2141(s + \frac{0.0043}{5.2141})(s + a)}{(s - 467.685 \cdot 10^{-3})(s + 81.3059)(s + 229.162)s}\right)$$

$$\therefore 2\alpha - 4\alpha = -2\alpha = \pm 180^\circ(2k-1)$$

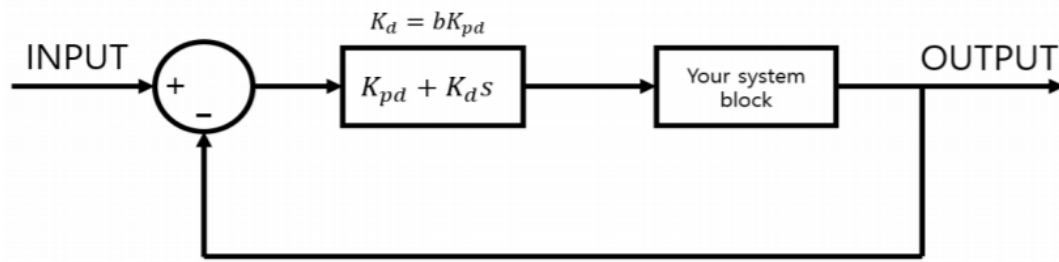
$$\alpha = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$$

$$|1 + G(s)| = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dK_p}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} -155.066 \\ -16.8224 \cdot 10^{-3} \\ a=1 \quad 15.696 \cdot 10^{-3} \end{array}$$



3) PD 제어 시스템의 root locus 를 손으로 그리세요. ($0 < b < 1$)

$b=0.5$ 를 사용하였다.

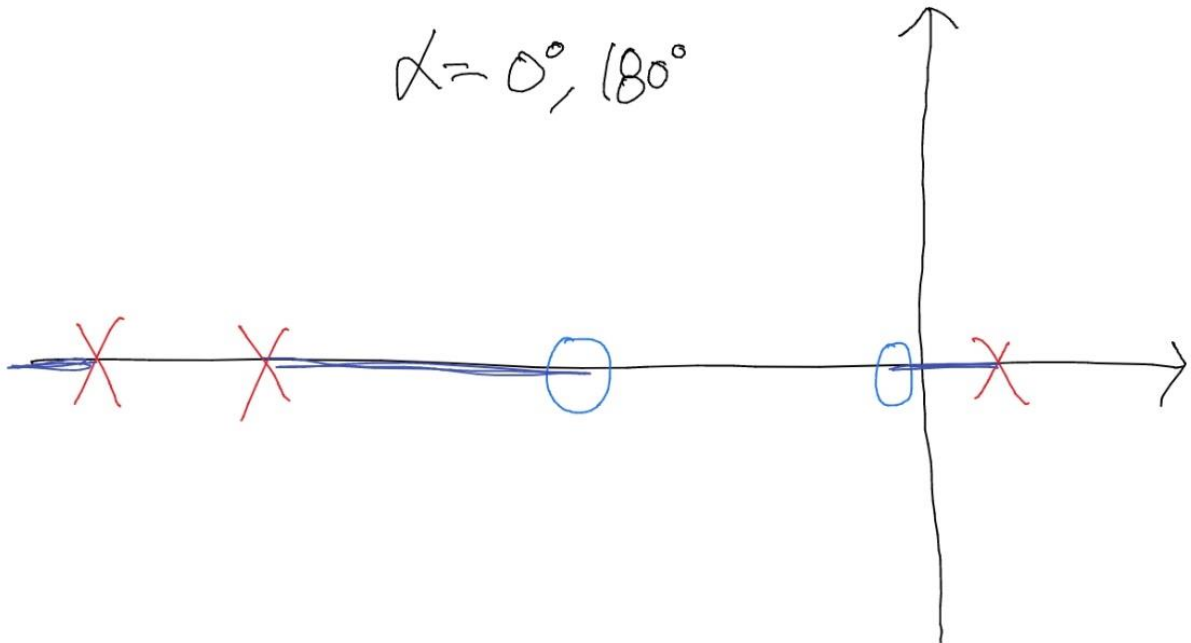


$$G(s) = K_{pd} \left(\frac{1}{2}s + 1 \right) \left(\frac{5.2141s + 0.0043}{s^3 + 310s^2 + 18487s - 8714} \right)$$

$$= \frac{K_{pd}}{2} \left(\frac{5.2141 \left(s + \frac{0.0043}{5.2141} \right) (s + 2)}{(s - 467.685 \cdot 10^3)(s + 81.3059)(s + 229.162)} \right)$$

$$2\alpha - 3\alpha = -\alpha = \pm 180^\circ (2k+1)$$

$$\alpha = 0^\circ, 180^\circ$$

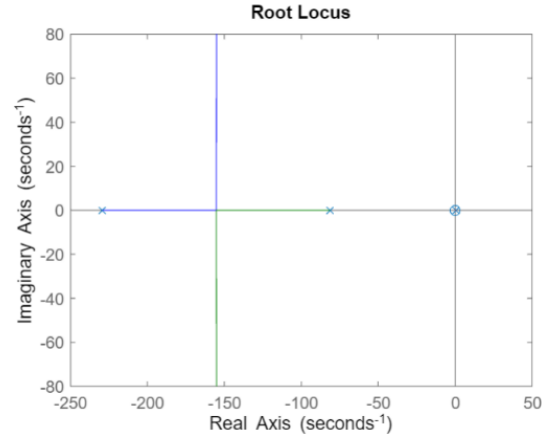


6. 이 문제에서는 본인 시스템의 root locus 를 그리기 위해 매트랩이나 시뮬링크를 이용합니다.

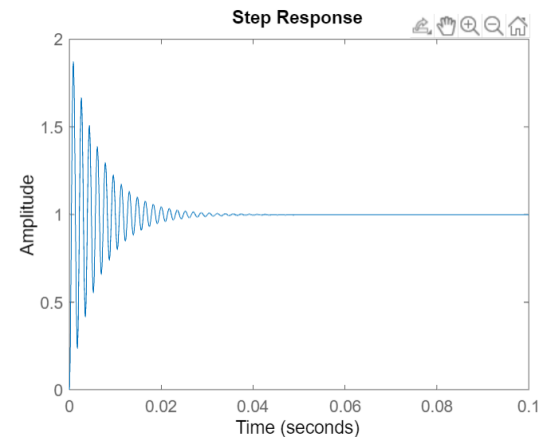
- 입력은 unit step function 입니다.
- 매트랩 코드나 시뮬링크 블록을 캡처해서 보고서에 첨부하세요.

1) 5-1 을 매트랩이나 시뮬링크로 그리세요. 원하는 K 값을 골라 대입해보고 출력을 보여주세요.

```
1 - A = [0 1 0; 99.3418 -211.886 10.3866; -99.3418 211.886 -98.1059];
2 - B = [0 ; 5.2141 ; -49.249];
3 - C = [1 0 0];
4 - D = 0;
5 - [num, den]=ss2tf(A,B,C,D);
6 - sys = tf(num, den);
7 - rlocus(sys)
```



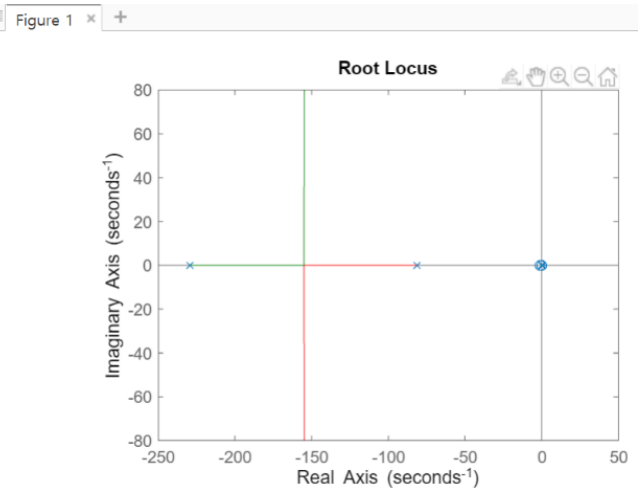
```
1 - A = [0 1 0; 99.3418 -211.886 10.3866; -99.3418 211.886 -98.1059];
2 - B = [0 ; 5.2141 ; -49.249];
3 - C = [1 0 0];
4 - D = 0;
5 - [num, den]=ss2tf(A,B,C,D);
6 - K = 2500000;
7 - sys = tf(num, den);
8 - step(K*sys/(1+K*sys),0.1);
9
10
11
12
```



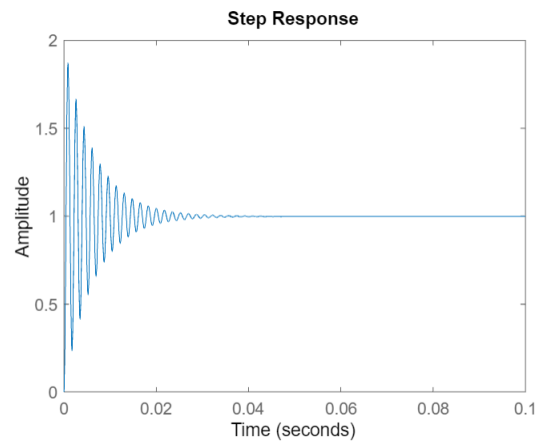
그래프를 통해 body의 각도가 90도가 넘는 진동이 발생함을 알 수 있다. 그리고 원점 근처의 RHS pole 을 LHS 로 옮기기 위해 2,500,000 의 게인을 사용했는데 이 경우 LHS pole 2개가 복소수가 되어 진동이 발생하게되었다.

2) 5-2 을 매트랩이나 시뮬링크로 그리세요. 원하는 K 값을 골라 대입해보고 출력을 보여주세요.

```
1 - A = [0 1 0; 99.3418 -211.886 10.3866; -99.3418 211.886 -98.1059];
2 - B = [0 ; 5.2141 ; -49.249];
3 - C = [1 0 0];
4 - D = 0;
5 - [num, den]=ss2tf(A,B,C,D);
6 - pin = [1 1];
7 - pid = [1 0];
8 - sys = tf(conv(num,pin), conv(den,pid));
9 - rlocus(sys)
```

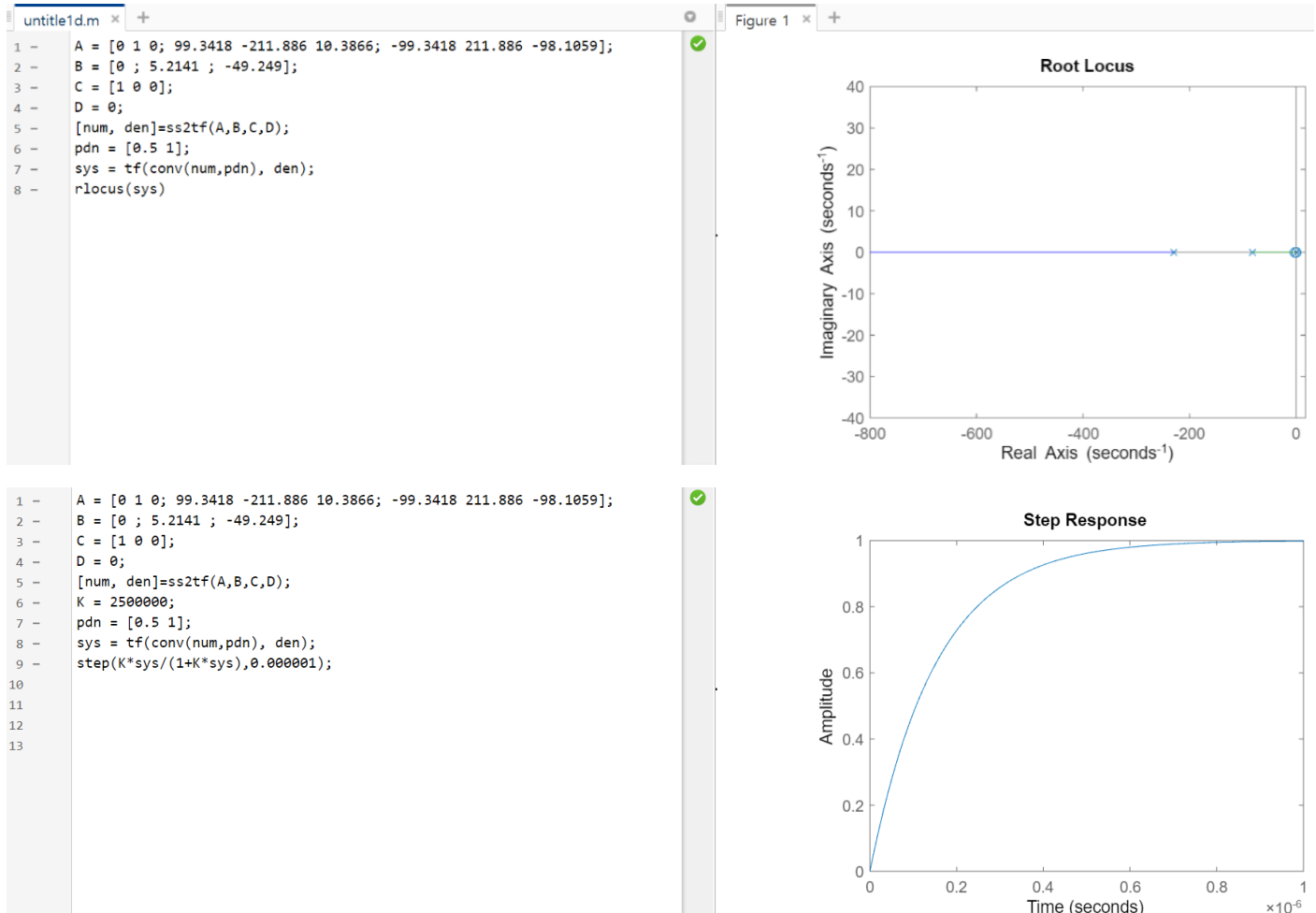


```
1 - A = [0 1 0; 99.3418 -211.886 10.3866; -99.3418 211.886 -98.1059];
2 - B = [0 ; 5.2141 ; -49.249];
3 - C = [1 0 0];
4 - D = 0;
5 - [num, den]=ss2tf(A,B,C,D);
6 - K = 2500000;
7 - pin = [1 1];
8 - pid = [1 0];
9 - sys = tf(conv(num,pin), conv(den,pid));
10 - step(K*sys/(1+K*sys),0.1);
11
12
13
14
```



P 제어와 마찬가지로 body의 각도가 90도를 넘는 것을 볼 수 있다. 그리고 진동이 발생하는 것도 P 제어와 마찬가지로이다.

3) 5-3 을 매트랩이나 시뮬링크로 그리세요. 원하는 K 값을 골라 대입해보고 출력을 보여주세요.



Body 각도가 앞선 두 제어기와 달리 진동하지 않으며 잘 수렴하는 것을 확인했다. 모든 pole 이 실수이므로 진동이 발생하지 않음을 그래프를 그리기 전에 확인할 수 있다.

4) 본인의 시스템 중 더 나은 제어기는 무엇인가요? 그 이유를 자세히 설명하세요.

P 제어나 PI 제어도 잘 수렴하나 PD 제어가 수렴이 오만배정도 빠르고 진동도 없다. 게다가 그림 1의 모델에서도 확인할 수 있듯이 2차원 Cubli는 평평한 바닥 위에서 동작하므로 진동의 각도가 90도를 넘으면 제대로 된 시뮬레이션도 아닐 뿐더러 실용적이라고 보기 힘들다. P제어나 PI제어는 이 조건을 만족시키지 못해 PD 제어를 사용해야한다.

참조.

[1] Mohanarajah Gajamohan, Michael Merz, Igor Thommen and Raffaello D'Andrea , "The Cubli: A Cube that can Jump Up and Balance " , 2012.

[Online] Available : <http://speed.pub.ro/speed3/wp-content/uploads/2015/07/2015-Proiect-Diploma-Lupu-Sorina.pdf>

[2] Elena Sorina Lupu , "2015-Proiect-Diploma-Lupu-Sorina", 2015, [Online] Available : <http://speed.pub.ro/speed3/wp-content/uploads/2015/07/2015-Proiect-Diploma-Lupu-Sorina.pdf>