Econometria

Autocorrelação

Autocorrelação

- Uma das suposições no modelo clássico de regressão linear é que os erros são variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância constante.

- Os dados em corte transversal geralmente são gerados por meio de uma amostra aleatória de várias unidades econômicas como famílias (análise de consumo) ou empresas (análise de investimentos).

- A aleatoriedade da amostra implica que o termo de erro para diferentes observações (famílias ou empresas) sejam não correlacionados.

- Se tal correlação é observada nas unidades de corte transversal ela é denominada de autocorrelação espacial.

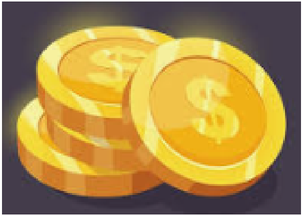
Autocorrelação

- Contudo, quando as observações seguem uma ordenação natural com o tempo, existe a possibilidade de que observações sucessivas e por consequência os erros sucessivos estejam correlacionados uns com os outros.

- Por exemplo, os índices de preços de ações, como o Dow Jones, sobem ou descem por vários dias seguidos.

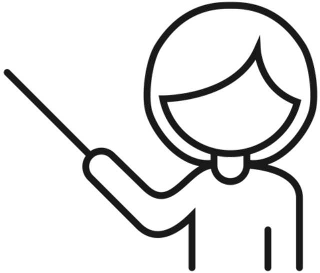
Autocorrelação

- Em uma equação para explicar a demanda agregada por moeda na economia através de variáveis explicativas, qualquer choque terá um impacto sobre a demanda por moeda por meio do termo de erro. Assim, em qualquer período o termo de erro contém não apenas os efeitos de choque correntes, mas também o efeito acumulado remanescente de choques prévios.



Autocorrelação

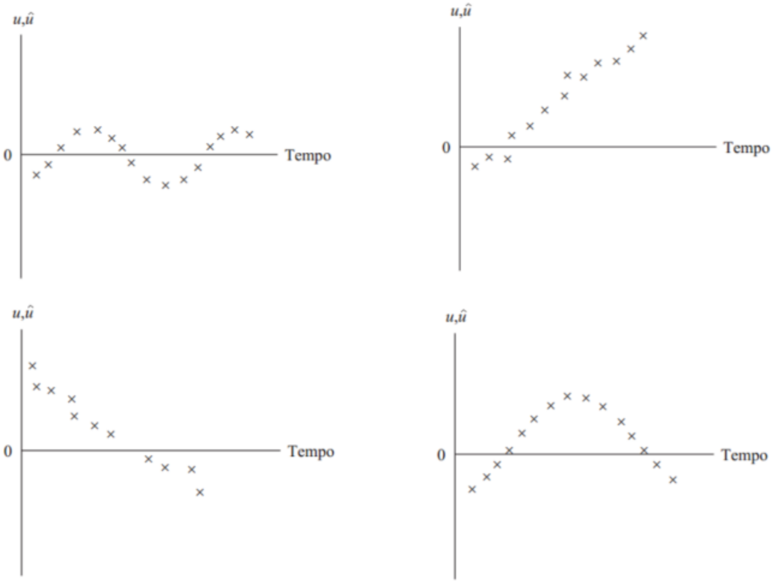
- Este efeito remanescente estará correlacionado com os efeitos de choques anteriores.
- Em situações como essa, a hipótese de ausência de autocorrelação nos termos de erro, que embasa o modelo clássico de regressão linear, será violada.
- A autocorrelação pode ser definida como uma correlação entre integrantes de séries de observações ordenadas no tempo ou no espaço.



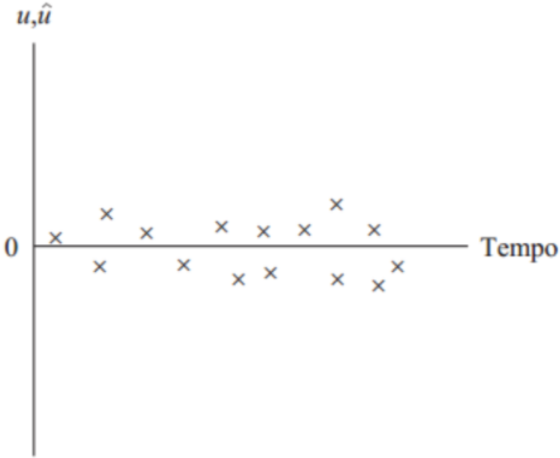
Autocorrelação

- Por exemplo, em um estudo para regressão da produção contra outras variáveis, uma greve em um trimestre pode afetar o trimestre seguinte. Ou em uma regressão das despesas de uma família sobre a renda, o aumento das despesas de uma família pode levar outra família a aumentar seu consumo para não ficar para trás.

Padrões de presença de Autocorrelação



Padrão de Ausência de Autocorrelação



Algumas Causas da Autocorrelação

- **Inércia:** séries econômicas podem registrar ciclos

Ex: *Um país sai da recessão e se move em sentido ascendente. Neste movimento, o valor da série (PIB) em um ponto é sempre maior que o anterior. Por isso, as observações tendem a ser interdependentes.*

- **Ausência de estacionariedade**

Estacionariedade é um conceito típico de séries temporais. Trata-se de uma característica que descreve uma série temporal que apresenta média, variância e covariância constantes no tempo.

Quando o termo de erro é não estacionário, poderá haver autocorrelação.

Algumas Causas da Autocorrelação

- **Erro de Especificação:** Exclusão de variáveis e Forma funcional incorreta.

$$\begin{cases} Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t, & \textit{Modelo} \quad \textit{Correto} \\ Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \nu_t, & \textit{Modelo} \quad \textit{Estimado} \\ \nu_t = \beta_4 X_{4t} + u_t, & \textit{Falsa} \quad \textit{Autocorrelaçao}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{2t}^2 + u_t, & \textit{Modelo} \quad \textit{Correto} \\ Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \nu_t, & \textit{Modelo} \quad \textit{Estimado} \\ \nu_t = \beta_3 X_{2t}^2 + u_t, & \textit{Falsa} \quad \textit{Autocorrelaçao}. \end{cases}$$

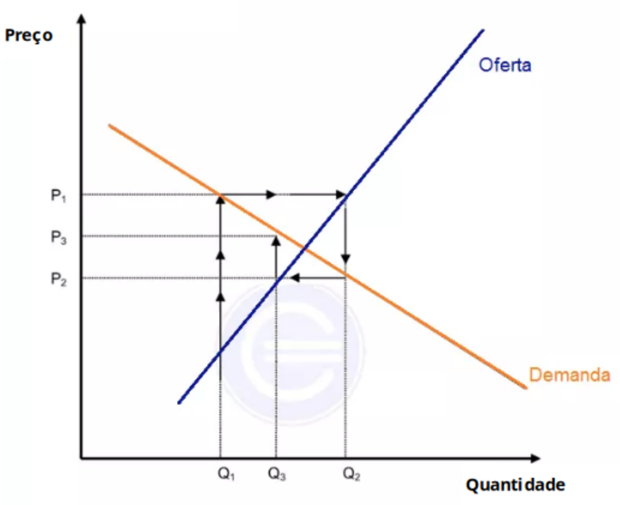
Algumas Causas da Autocorrelação

- **O Fenômeno da Teia de Aranha:**
  - A oferta de algum produto pode ser influenciada pelo preço com a defasagem de um período.

$$Oferta_t = \beta_1 + \beta_2 P_{t-1} + u_t$$

  - Isso ocorre porque as decisões de oferta levam um tempo para serem implementadas. No início de um período a oferta pode estar influenciada pelo preço vigente no período anterior.
  - O mercado se adapta a um determinado processo de modificação ou reajuste cedendo espaço entre a oferta e a procura chegando a um ponto de equilíbrio.
  - Graficamente, esse processo tem o formato de uma teia de aranha.

Algumas Causas da Autocorrelação



Algumas Causas da Autocorrelação

- **Defasagens:** Por exemplo em um modelo da despesa sobre a renda, a despesa do período atual pode depender, dentre outras coisas, da despesa do período anterior.

$$Despesa_t = \beta_1 + \beta_2 renda_t + \beta_3 Despesa_{t-1} + u_t (Autoregressao)$$

Se omitirmos o termo defasado, os resíduos serão autocorrelacionados.

- **Manipulação dos Dados:** Exemplos podem ser a interpolação, extrapolação ou obtenção de um valor trimestral tirando a média de três observações mensais.

Algumas Causas da Autocorrelação

- **Transformação de Dados:** Considere o modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$. Os modelos transformados (abaixo) são muito utilizados em Economia.

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{t-1} + u_{t-1} \quad (valores \quad defasados)$$

$$\Delta Y_t = \beta_2 \Delta X_t + \Delta u_t \quad (primeira \quad diferença)$$

Propriedades do erro considerando autocorrelação

Suponhamos que os erros sigam o processo:

$$u_t = \boxed{\rho} u_{t-1} + \varepsilon_t$$

→ coeficiente de autocorrelação

→ $-1 < \rho < 1$

A expressão é conhecida como processo regressivo de primeira ordem [AR(1)].

ε_t é o termo de erro estocástico tal que,

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s}) = 0 \quad \forall s \neq 0$$

Justificativa para uso de um modelo AR(1) para o Erro

- ρu_{t-1} é a persistência do erro aleatório do período anterior como consequência da inércia nos sistemas econômicos, em que a magnitude de ρ determina o quanto é levado para o período seguinte.

- ε_t é um novo choque no nível da variável econômica.

- Por exemplo, considere um exemplo em que se deseja modelar a resposta da oferta para uma safra agrícola, especificando um modelo em que a área plantada depende do preço.

Justificativa para uso de um modelo AR(1) para o Erro

Justificativa para uso de um modelo AR(1) para o Erro

Justificativa para uso de um modelo AR(1) para o Erro

Consequências da autocorrelação para o estimador de mínimos quadrados

Seja o modelo: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + e_t$

Pelo MQO: $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{t=1}^{n} x_t y_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$ e $S^2_{\hat{\beta}_1} = \dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$ não viesado na ausência de autocorrelação e viesado na presença de autocorrelação

Na ausência de autocorrelação: $E(e_t e_{t-s}) = 0$ ⇒ $Var(e_t) = \sigma^2$ $Cov(e_t, e_{t+s}) = 0$

⇒ $Var(\hat{\beta}) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$

Na presença de autocorrelação: $e_t = \rho e_{t-s} + u_t$ ⇒ $Var(e_t) = \dfrac{\sigma^2}{1-\rho^2}$ e $Cov(e_t, e_{t+s}) = \rho^s \dfrac{\sigma^2}{1-\rho^2}$

⇒ $Var(\hat{\beta}) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{n} x_i^2} + 2\dfrac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{n} x_i^2} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-t} \rho^s x_t x_{t+s}$

Consequências da Autocorrelação para o estimador de mínimos quadrados

- A variância do estimador de MQO, sob autocorrelação, é igual a variância do estimador de MQO na ausência de autocorrelação, multiplicada por um fator que depende de X e de ρ.

- Assim, quando ignoramos a autocorrelação, obtemos uma estimativa enganosa da variância do estimador de MQO e, por consequência, dos Intervalos de Confiança e Testes de Hipóteses.

Consequências da autocorrelação para o estimador de mínimos quadrados

- Apesar de linear e não tendencioso o estimador será ineficiente e não será mais BLUE.
- O estimador da variância é viesado e assim os intervalos de confiança e testes de hipóteses não são mais confiáveis.
- O R^2 pode ser superestimado.

Exemplo 1: Dados simulados

Considere o modelo $Y_t = 1 + 0.8X_t + u_t$.

- Suponha que u_t sejam gerados pelo processo autoregressivo de primeira ordem: $u_t = 0.9u_{t-1} + \epsilon_t$, em que ϵ_t satisfaz todas as hipóteses de MQO. Gere 10 valores para ϵ_t considerando distribuição normal com média 0 e variância 1. Obtenha u_t considerando $u_0 = 5$.
- Trace o gráfico de u_t contra o tempo $t = 1, 2, \ldots, 10$. O que você pode concluir no que se refere a autocorrelação?
- Considere agora $X = 1, 2, \ldots, 10$. Obtenha uma amostra de 10 valores de Y com base na equação dada e nos valores de X_t e u_t. Faça a regressão de Y contra X. Avalie o resultado.
- Faça o gráfico Y versus X e plote a verdadeira equação de regressão e a equação estimada acima. O que você pode concluir?

Exemplo 1: Dados simulados

- Para entender melhor as consequências da subestimação do verdadeiro σ^2, considere os X_t e os ϵ_t obtidos anteriormente. Adicionalmente, considere que $\rho = 0$, ou seja, nenhuma autocorrelação. Obtenha os novos valores de Y_t e a nova reta de regressão de Y_t contra X_t. Compare σ^2 e os erros padrão de $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$. Qual regressão se aproxima mais da "verdadeira" regressão?

Exemplo 1: Dados simulados

Exemplo 1: Dados simulados