

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

MASTER MIMSE

TRAVAIL D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

---

# Prix d'options européennes

---

Estelle RAMBIER  
Inés AÑIBARRO GOROSTIZA

Tuteur : Adrien Richou

19 Mai 2016



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Fixer les idées</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Modèle de Cox, Ross et Rubinstein</b>	<b>5</b>
3.1	Présentation et Hypothèses . . . . .	5
3.2	Détermination du prix du call . . . . .	8
3.2.1	Unicité du prix de l'option . . . . .	8
3.2.2	Unicité de la probabilité à risque neutre . . . . .	8
3.2.3	Parité Call-Put . . . . .	10
3.2.4	Portefeuille . . . . .	11
3.2.5	Test Statistique . . . . .	13
3.2.6	Black-Scholes comme limite de CRR . . . . .	16
3.3	Simulations . . . . .	19
3.4	Vitesse de convergence . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Estimation de la volatilité</b>	<b>23</b>
4.1	Méthode historique . . . . .	23
4.2	Méthode implicite . . . . .	26
4.3	Remarque . . . . .	29
4.4	Smile de Volatilité . . . . .	29
4.5	Régression . . . . .	31
4.6	Critiques Volatilité . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Illustration</b>	<b>34</b>
<b>6</b>	<b>Critiques</b>	<b>35</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>36</b>

# 1 Introduction

Une option financière est un produit financier qui peut être acheté pour se prémunir contre un risque financier du, par exemple, aux variations de prix d'une action, d'un taux de change ou d'une matière première. En particulier, une option est un titre donnant à son détenteur le droit, et *non l'obligation*, d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente, respectivement call ou put option) une certaine quantité d'un actif financier, à une date convenue et à un prix d'avance fixé.

Historiquement, les premières options ont été mises en place par la bourse de commerce d'Amsterdam en 1752, où on trouvait déjà un marché d'options qui permettait l'acquisition d'un droit, sans obligation, d'acheter des marchandises à terme, moyennant le paiement d'une prime. Les options ont été massivement développées dans les années 70 comme conséquence des taux de change instables, de l'augmentation de la volatilité de marché et de l'accroissement des volumes échangés sur les marchés financiers.

Le point de départ de la finance moderne et des idées développées le long de ce TER, est introduit en 1900 par Louis BACHELIER [1] dans sa thèse sur la "Théorie de la spéculation", où il établit les liens entre processus stochastiques, notamment entre le mouvement Brownien, et la finance. En effet, il suffit d'observer le comportement de la bourse pour observer qu'on a un mouvement d'apparence désordonné, c'est pour ça que les modèles probabilistes semblent relativement bien adaptés à cette situation [2]. Depuis, de nombreux mathématiciens se sont penchés sur ce problème raffinant sans cesse les modèles utilisés pour prédire les comportements du marché. C'est à partir de 1973, avec les travaux de Fisher BLACK, Myron SCHOLES et Robert C. MERTON [3] que ces modèles sont devenus populaires. Ils ont proposé une formule explicite donnant le prix d'une option européenne, leur modèle demeure de nos jours la référence du fait de son caractère simple et pratique et leur valût le prix Nobel d'économie en 1997.

Le but de ce TER est de déterminer explicitement le juste prix que doit proposer le banquier pour une option européenne afin que ce dernier ne perde pas d'argent. On s'intéresse donc aux façons de calculer la prime  $p$ . On illustrera la stratégie mise en place par le banquier pour ne pas perdre d'argent grâce à la fameuse formule de Black et Scholes. Premièrement, on commen-

cera par étudier le modèle de Cox, Ross et Rubinstein pour ensuite aboutir à la fameuse formule de Black et Scholes. En deuxième partie, on s'intéressera à l'estimation de la volatilité du marché selon différentes méthodes.

## 2 Fixer les idées

Avant de continuer, une introduction des éléments et de leurs notations, intervenant dans la définition précise d'une option s'impose :

- le type d'option : européenne, américaine, exotique...
- la nature de l'option : deux possibilités, soit l'option donne le droit d'acheter et c'est donc une option d'achat ou un *call*, soit elle donne le droit de vendre et c'est donc une option de vente ou un *put*.
- l'actif sous-jacent : c'est à dire l'action sur laquelle porte l'option. Le prix de l'action en question à l'instant  $t$  sera noté  $S_t$ .
- l'échéance ou date d'expiration : la durée de vie de l'option, notée  $T$ .
- la prime : le prix de l'option, noté  $p$ .
- le prix d'exercice : le prix fixé d'avance auquel se fait la transaction en cas d'exercice, noté  $K$ .

On s'intéressera aux options européennes, c'est à dire aux options qui peuvent s'exercer que à date d'échéance.

Pour mieux comprendre l'intérêt d'acheter où de vendre des options examinons le gain final dans chaque cas. Dans le cas du call européen : si à  $T$ ,  $S_T < K$ , le détenteur aura pas intérêt à l'exercer et donc son profit sera nul. Par contre si à  $T$ ,  $S_T > K$  le détenteur peut acheter l'action au prix  $K$  et la revendre sur le marché au prix  $S_T$ .

Le **pay-off** d'une option est son résultat à l'échéance, donc dans le cas d'un call il vaut :

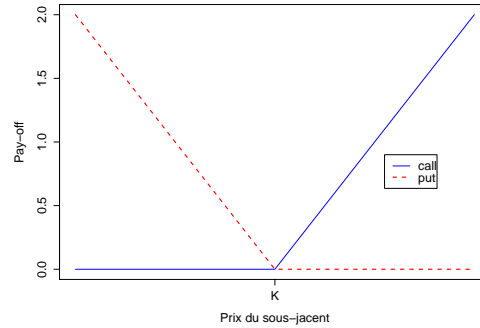
$$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$$

Dans le cas d'un put :

$$(K - S_T)_+ = \max(K - S_T, 0)$$

Dans le graphique suivant on trace le résultat à échéance d'une option

par rapport au prix du sous-jacent  $S_T$  dans le cas d'une option de vente et d'achat.



Maintenant on examine le cas du vendeur de l'option, du banquier par exemple. En cas d'exercice, il doit être en mesure de fournir une action au prix  $K$ , mais si le prix de cette action  $S_T$  s'avère être supérieur à  $K$ , il doit pouvoir produire à l'échéance une richesse égale à  $(S_T - K)$  pour ne pas perdre d'argent.

Le long de ce TER on se place dans le rôle d'un banquier. Pour lui, deux problèmes se posent :

- le problème du *pricing* : trouver le juste prix de l'option. C'est à dire quelle somme doit-il demander aujourd'hui pour être en mesure de fournir une action au prix  $K$  ? Autrement dit, comment évaluer à l'instant  $t=0$ , une richesse disponible à la date  $T$  ?
- le problème de *couverture* : comment faire judicieusement évoluer la prime  $p$  d'un call, pour produire la richesse  $(S_T - K)_+$  à l'instant  $T$  ?

Dans cette étude on fournira des stratégies et des méthodes pour réduire l'impact de ces problèmes.

On introduit ici quelques définitions utiles pour la compréhension de la suite. La plupart seront reprises et approfondies.

- Un **portefeuille** désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu. Les quantités des  $d$  divers actifs  $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$ , détenus en portefeuille à l'instant  $n$ , sont notées  $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$ . La valeur du portefeuille à l'instant  $n$  est donnée par le

produit scalaire :  $V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n$

- Une stratégie  $\phi$  est dite **autofinancée** si la relation  $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$  est réalisée pour tout  $n$ , ceci veut dire que il y a ni apports ni retrait de fonds pour passer de  $n$  à  $n + 1$ .
- Une stratégie  $\phi$  est dite **admissible** si elle est autofinancée et si  $V_n(\phi) \geq 0$  pour tout  $n$ .
- La notion d'**arbitrage** est la possibilité de réaliser du profit sans prendre de risques. Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.
- On dit que le marché est **viable** s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.
- Un marché viable est **complet** si, et seulement si, il existe une stratégie admissible.

## 3 Modèle de Cox, Ross et Rubinstein

### 3.1 Présentation et Hypothèses

Ce modèle a pour objectif de simplifier la dynamique du sous-jacent en se plaçant dans un marché financier idéal afin de satisfaire une première approximation du prix d'un call (où d'un put) à l'instant 0 dont on étudiera la tendance asymptotique.

On considère un marché sans friction : transactions instantanées, pas de taxe ou impôts, pas de restriction sur la ventes à découvert. Les prix des différents actifs reflètent à tout moment toute l'information disponible et tout le monde possède la même information.

Cette partie est une étude approfondie du premier chapitre du livre de LAMBERTON et LAPEYRE [4]. Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein est une version *discrétisée* du Modèle de Black-Scholes dans lequel il y a un seul actif à risque noté  $S_n$ . On discrétise le temps  $T$  en  $N$  intervalles, l'évolution de l'obligation (actif sans risque) est donnée par :

$$S_n^0 = (1 + r)^n$$

La variation relative de l'actif risqué entre deux périodes consécutives est

soit  $a$ , soit  $b$ , avec  $-1 < a < b$  :

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \\ S_n(1+b) \end{cases}$$

Le cours initial  $S_0$  est connu. L'espace naturel des résultats disponibles est donc  $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$ , chaque N-tuple représentant les valeurs successives de  $S_{n+1}/S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . On prend naturellement :  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . La tribu  $\mathcal{F}_n$  sera, pour  $n = 1, \dots, N$ , la tribu  $\sigma(S_1, \dots, S_n)$  engendrée par les variables aléatoires  $S_1, \dots, S_n$ . On fait l'hypothèse qu'il existe une probabilité  $\mathbf{P}$  telle que tous les singletons de  $\Omega$  ont une probabilité non nulle.

Introduisons la suite de variables aléatoires  $T_n = S_n/S_{n-1}$ , pour  $n = 1, \dots, N$ . Si  $(x_1, \dots, x_N)$  est un élément de  $\Omega$ , on a  $\mathbf{P}\{(x_1, \dots, x_N)\} = \mathbf{P}(T_1 = x_1, \dots, T_N = x_N)$ . On a alors aussi pour  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n)$ . Notons  $\tilde{S}_n$  le prix actualisé de l'actif défini par  $\tilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^d, \dots, \beta_n S_n^1)$  où  $\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$ . Enfin, on notera  $(\tilde{S}_n)_n$  la martingale sous  $\mathbf{P}$  du prix actualisé.

On comprend pourquoi ce modèle est couramment appelé le modèle binomial. On peut le représenter sous forme d'un arbre binaire où à chaque période le sous-jacent ne peut prendre que deux valeurs.

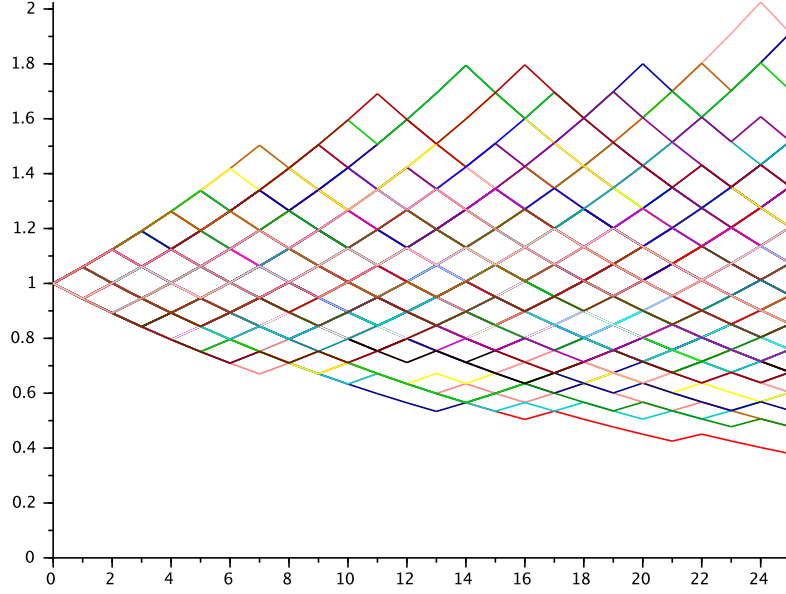


FIGURE 1 – Exemple de trajectoire de l'évolution du cours sur un horizon à 25 périodes

Tout d'abord, montrons que le prix actualisé  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}$  si et seulement si  $\mathbf{E}(T_{n+1} \mid F_n) = 1 + r$  :

*Sous  $\mathbf{P}$ ,  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale, donc on a  $\mathbf{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid F_n) = \tilde{S}_n \Leftrightarrow \mathbf{E}(\tilde{S}_{n+1}/\tilde{S}_n \mid F_n) = 1$ , puisque  $\tilde{S}_n$  est  $F_n$ -mesurable. Cette dernière égalité équivaut, par simplification, à  $\mathbf{E}(T_{n+1} \mid F_n) = 1 + r$ . De plus comme  $T_{n+1}$  est à valeurs dans  $\{1+a, 1+b\}$  et par hypothèse prends ces deux valeurs avec probabilité non nulle, on a nécessairement :  $(1+r) \in [1+a, 1+b]$ .*

Il est pertinent de définir maintenant la notion de *probabilité risque neutre*. Nous verrons que, dans ce modèle elle existe et est unique. Elle est fondamentale car les résolutions des problèmes de pricing et couverture s'exprimeront en fonction de celle-ci et non en fonction de la loi inconnue qui régit le cours de l'action.



**Définition :** On dit que  $\mathbf{P}^*$  est une probabilité risque neutre si :  $\mathbf{P}^*$  est l'unique probabilité équivalente à la probabilité  $\mathbf{P}$ , telle que le cours réactualisé de l'option  $(\tilde{S}_n)_{n \geq N}$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ .

D'après la démonstration qu'on vient de voir, une conséquence directe de cette propriété est que le marché est *viable* si  $\mathbf{E}^*(T_{n+1} \mid F_n) = 1 + r$

Une traduction mathématique de cette propriété est que  $r$  appartient à l'intervalle  $]a, b[$ . C'est à dire que si  $r$  n'est pas dans l'intervalle  $]a, b[$ , une stratégie d'arbitrage est possible.

L'hypothèse de base, retenue dans tout les modèles est justement *l'absence* d'opportunité d'arbitrage. Ceci permet d'assurer l'existence et l'unicité de  $\mathbf{P}^*$  [5], ainsi que l'unicité du prix de l'option. On verra ça dans les parties qui suivent.

## 3.2 Détermination du prix du call

On note  $C_n$  (respectivement  $P_n$ ) la valeur à l'instant  $n$  d'un call (respectivement d'un put) européen sur un actif risqué d'échéance  $N$  et au prix d'exercice (strike)  $K$ . Le but de ce paragraphe est de déterminer le prix du call et d'un put au temps 0.

### 3.2.1 Unicité du prix de l'option

Supposons que l'on ait déterminé par une méthode le prix de l'option en 0,  $C_0$ , et qu'il existe une autre méthode qui nous conduirait à une autre valeur de  $C$ . Il n'y a pas de restriction à supposer  $C < C_0$ . Alors en empruntant la somme  $C$  on pourrait acheter l'option au prix moindre  $C$  et on la vendrait par la suite au prix  $C_0$ . On réaliserait ainsi une opération d'arbitrage.

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage nous assure donc *l'unicité du prix de l'option*.

### 3.2.2 Unicité de la probabilité à risque neutre

On suppose que  $r \in ]a, b[$  (donc pas d'opportunité d'arbitrage). On veut montrer que  $\tilde{S}_n$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$  si et seulement si les variables

$T_1, \dots, T_N$  sont indépendantes et identiquement distribuées de loi :  $\mathbf{P}^*(T_1 = a + 1) = \mathbf{p} = 1 - \mathbf{P}^*(T_1 = 1 + b)$  où  $\mathbf{p} = (r - a)/(b - a)$ . Ceci nous permettra de déduire que marché est *viabile* et *complet*.

*On veut montrer :*

$(\tilde{S}_n)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^* \Leftrightarrow (T_n)_n$  i.i.d de loi énoncée ci dessus.

$(\Rightarrow)$  : On suppose que  $\tilde{S}_n$  est une martingale.

$$\mathbf{E}^*(T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 1 + r$$

$$\Leftrightarrow (1 + a)\mathbf{P}^*(T_{n+1} = 1 + a \mid \mathcal{F}_n) + (1 + b)\mathbf{P}^*(T_{n+1} = 1 + b \mid \mathcal{F}_n) = 1 + r$$

$$\Leftrightarrow (1 + a)\mathbf{E}^*[1_{\{T_{n+1}=1+a\}} \mid \mathcal{F}_n] + (1 + b)\mathbf{E}^*[1_{\{T_{n+1}=1+b\}} \mid \mathcal{F}_n] = 1 + r$$

Or,  $\mathbf{P}^*(T_{n+1} = 1 + a) + \mathbf{P}^*(T_{n+1} = 1 + b) = 1$ , donc on remplace et on obtient :

$$(1 + a)\mathbf{P}^*(T_{n+1} = 1 + a \mid \mathcal{F}_n) + (1 + b)(1 - \mathbf{P}^*(T_{n+1} = 1 + a \mid \mathcal{F}_n)) = 1 + r$$

*On développe et on trouve bien :*

$$\mathbf{P}^*(T_{n+1} = 1 + a \mid \mathcal{F}_n) = p \text{ et } \mathbf{P}^*(T_{n+1} = 1 + b \mid \mathcal{F}_n) = 1 - p$$

Il reste à démontrer que les variables  $(T_n)_n$  sont indépendantes. On utilise la propriété des espérances conditionnelles suivante :  $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbf{E}[X]$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(T_1 = x_1 \dots T_n = x_n) &= \mathbf{E}^*[1_{\{T_1=x_1\}} 1_{\{T_2=x_2\}} \dots 1_{\{T_n=x_n\}}] \\ &= \mathbf{E}^*[\mathbf{E}[1_{\{T_1=x_1\}} 1_{\{T_2=x_2\}} \dots 1_{\{T_n=x_n\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}]] \\ &= \mathbf{E}^*[1_{\{T_n=x_n\}} \mathbf{E}^*[1_{\{T_1=x_1\}} 1_{\{T_2=x_2\}} \dots 1_{\{T_{n-1}=x_{n-1}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}]] \\ &= \mathbf{P}^*(T_n = x_n) \mathbf{E}^*[1_{\{T_1=x_1\}} 1_{\{T_2=x_2\}} \dots 1_{\{T_{n-1}=x_{n-1}\}}] \end{aligned}$$

Par récurrence sur  $n$  on en déduit que pour tout  $x_i \in \{1 + a, 1 + b\}$ ,

$$\mathbf{P}^*(T_1 = x_1 \dots T_n = x_n) = \prod_{i=1}^n p_i$$

avec  $p_i = p$  si  $x_i = 1 + a$  et  $p_i = 1 - p$  si  $x_i = 1 + b$ . Ceci prouve que les  $T_i$  sont indépendantes et équidistribuées.

( $\Leftarrow$ ) :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}(T_{n+1}) \\ &= p(1+a) + (1-p)(1+b) \\ &= p(a-b) + b + 1 = r + 1\end{aligned}$$

$\tilde{S}_n$  est bien une martingale.

On voit que la condition que  $\tilde{S}_n$  soit une  $\mathbf{P}^*$ -martingale détermine la loi de  $(T_1, \dots, T_N)$  sous  $\mathbf{P}^*$ , et donc la probabilité  $\mathbf{P}^*$  elle-même de façon unique. Le marché est donc viable et complet.

### 3.2.3 Parité Call-Put

La *parité Call-Put* est une relation entre le prix d'un call et celui d'un put, qui ont tout deux même échéance et même prix d'exercice.

*Pour bien comprendre, plaçons nous, dans un premier temps, dans un modèle à taux  $r$  égal à zéro. Alors soit on nous achète un call de strike  $K$  d'échéance  $N$  périodes, soit on vend un put de strike  $K$  d'échéance  $N$  périodes sur le même sous-jacent. Dans un an, le bénéficiaire de l'option aura intérêt à exercer son option seulement si, soit le sous-jacent monte au dessus du strike  $K$  dans le cas du Call, soit le sous-jacent baisse sous le strike dans le cas du Put. On aboutit à :*

$$C_n - P_n = S_n - K$$

*Maintenant si les taux ne sont pas nuls, on a les relations  $C_n = (S_n - K)_+$  et  $P_n = (K - S_n)_+$ . De plus,  $S_N = S_0(1+r)^N = S_n(1+r)^{N-n}$ , on note  $\mathbf{E}^*$  l'espérance par rapport à l'unique probabilité  $\mathbf{P}^*$  selon laquelle  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale, on a :*

$$\begin{aligned}C_n - P_n &= \mathbf{E}^*[(S_n - K)_+ - (K - S_n)_+ \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (1+r)^{-(N-n)} \mathbf{E}^*[(S_N - K) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= S_n - K(1+r)^{-(N-n)}\end{aligned}$$

*Les formules de prix sous formes d'espérance conditionnelles sont :*

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)} \mathbf{E}^*((S_N - K)_+ | \mathcal{F}_n) \quad (1)$$

$$P_n = (1+r)^{-(N-n)} \mathbf{E}^*((K - S_N)_+ | \mathcal{F}_n) \quad (2)$$

On retrouve bien la relation parité Call-Put :

$$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}$$

### 3.2.4 Portefeuille

Au cours du temps, le banquier répartit son capital entre les actifs risqués et non risqués : cette répartition est appelée portefeuille ou stratégie. On le définit par un processus (simplement une suite dans le cas discret) aléatoire  $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ , donnant à chaque instant  $n$  les quantités  $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$  des divers actifs détenus en portefeuille.

La valeur du portefeuille à l'instant  $n$  est donnée par le produit scalaire :

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n = \sum_{i=0}^d \phi_n^i \cdot S_n^i$$

La valeur actualisée est donnée par :

$$\tilde{V}_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n \cdot \frac{1}{S_n^0}$$

On dira qu'une stratégie est autofinancée si la relation suivante est réalisée :

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$$

En effet, à l'instant  $n$ , après avoir pris connaissance des cours  $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$ , l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition  $\phi_n$  à la composition  $\phi_{n+1}$ , le réajustement se faisant aux cours de la date  $n$  en réinvestissant la valeur totale du portefeuille et rien de plus. Il n'y a donc ni apports, ni retraits de fonds. On peut remarquer de manière équivalente qu'une stratégie autofinancée est une stratégie pour laquelle les variations de valeurs du portefeuille viennent uniquement des gains dû à l'agitation des

cours :  $\phi_{n+1}(S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n \cdot S_n$ .

### Exemple à une période :

Notons  $h(S_1)$  la quantité que doit fournir le banquier à échéance (appelée fonction payoff ou l'actif contingent). On cherche à savoir la quantité d'actif risqué  $x$  et la quantité de non risqué  $y$  à avoir afin de produire la richesse  $h(S_1)$ . Au temps 0, la valeur du portefeuille est donc

$$V_0 = xS_0 + y$$

Au temps 1 à l'échéance, la valeur du portefeuille est donnée par :

$$V_1 = xS_1 + y(1 + R) = \begin{cases} xS_0(1 + a) + (1 + r)y & \text{si l'actif monte,} \\ xS_0(1 + b) + (1 + r)y & \text{sinon} \end{cases}$$

À l'échéance, on a de plus la contrainte d'autofinancement :

$$V_1 = h(S_1) = \begin{cases} h(S_0(1 + a)) \\ h(S_0(1 + b)) \end{cases}$$

Cela nous donne deux équations à deux inconnues, les quantités  $x$  et  $y$  sont donc données par :

$$\begin{cases} x = \frac{h(S_0(1 + a)) - h(S_0(1 + b))}{S_0(a - b)} \\ y = \frac{h(S_0(1 + b))a - h(S_0(1 + a))a}{S_0(a - b)} \end{cases}$$

En réinjectant dans la valeur initiale de  $V_0$  on obtient bien le prix du call à l'échéance 1 :

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{1 + r} \left[ h(S_0(1 + a)) \left( \frac{r - b}{a - b} \right) + h(S_0(1 + b)) \left( \frac{a - r}{b - a} \right) \right] \\ &= \frac{1}{1 + r} (p^* h(S_0(1 + a)) + (1 - p^*) h(S_0(1 + b))) = \frac{1}{1 + r} \mathbf{E}(h(S_1)) \\ &= (1 + r)^{-1} \mathbf{E}^*(S_1 - K)_+ = C_1 \end{aligned}$$

On peut donc voir le prix de l'option à  $t = 0$  comme l'espérance actualisée de sa valeur à l'échéance.

### Généralisation :

La stratégie de couverture parfaite d'un call est définie par une quantité d'actif risqué  $H_n = \Delta(n, S_{n-1})$  à détenir à l'instant  $n$ , où  $\Delta$  est une fonction dépendant de  $C_n$ .

Notons  $H_n^0$  la quantité d'actif sans risque dans le portefeuille simulant le call, on a :

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_n = c(n, S_n)$$

$H_n^0$  et  $H_n$  étant  $\mathcal{F}_{n-1}$  mesurables, ce sont des fonctions uniquement de  $S_1, \dots, S_{n-1}$ , et  $S_n$  étant égal à  $S_{n-1}(1+a)$  ou  $S_{n-1}(1+b)$ , on a :

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_{n-1}(1+a) = c(n, S_{n-1}(1+a))$$

et

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_{n-1}(1+b) = c(n, S_{n-1}(1+b)).$$

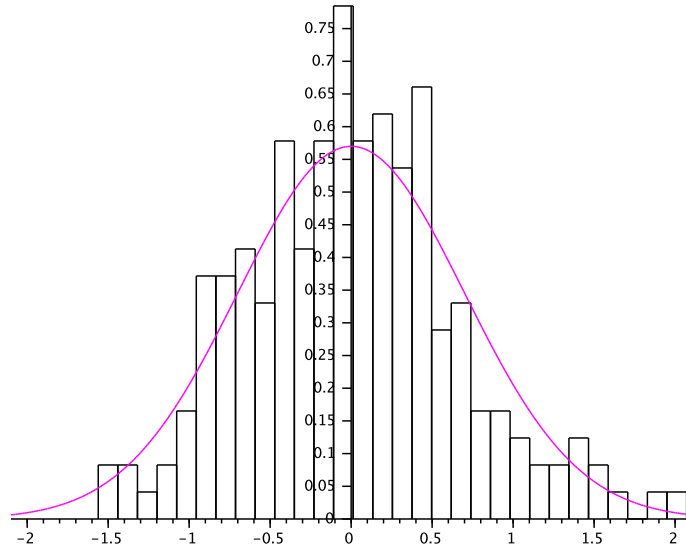
D'où par soustraction,

$$\Delta(n, x) = \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}$$

### 3.2.5 Test Statistique

Tout d'abord, passons à la limite sur les trajectoires. Dans le modèle de Black Scholes, on s'intéressera afin d'éviter des outils mathématiques complexes, au quotient :  $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ . On sait que celui ci suit une loi log-normale. Montrons l'adéquation des trajectoires du modèle de Cox à une loi log-normale.

On simule  $n = 201$  trajectoires, et on s'intéresse à la moyenne de la variable  $\log(T_n)$ . Voici l'histogramme correspondant :



Vérifions l'hypothèse de normalité de la variable aléatoire  $Z_i = \log(T_i)$  grâce à un test statistique [6] :

On dispose d'un n-échantillon ( $n = 200$ ) de réalisations de  $Z_i$ . On souhaite tester l'adéquation de l'échantillon à une loi normale centrée de variance  $\sigma^2$  dont la fonction de répartition sera notée  $F_0$ . Nous choisissons d'effectuer un test d'ajustement de Kolmogorov.

— **Hypothèses :**

$$H_0 : "F_Z = F_0" \text{ contre } H_1 : "F_Z \neq F_0"$$

— **Statistique de Test :** On prend la Statistique de Kolmogorov  $D_n(F)$  définie par :

$$D_n(F) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{F}_Z(t) - F_0(t)|$$

Où  $\hat{F}_Z(t)$  est la fonction de répartition empirique de  $Z$  à l'instant  $t$ .

— **Région de Rejet :** Pour  $\alpha \in ]0, 1[$  quelconque fixé, le test de Kolmogorov au niveau  $\alpha$ , qui teste l'hypothèse nulle  $H_0$  contre l'alternative

$H_1$ , a une région de rejet de la forme :

$$\mathcal{W}_\alpha := \{D_n(F) \geq d^{(n)}_{1-\alpha}\}$$

Comme  $n \geq 80$ , on utilise l'approximation suivante :

$$d^{(n)}_{1-\alpha} \approx \sqrt{\frac{-\ln(\alpha/2)}{2n}} - \frac{1}{6n}$$

- **Application numérique :** Une implémentation pénible sur Scilab nous fournit :  $D_n(F) = 0.0075$

Calcul de la p-value :

$$\begin{aligned} D_n &\geq d^{(n)}_{1-\alpha} \\ \Leftrightarrow 0.0075 &\geq \sqrt{\frac{-\ln(\alpha/2)}{2 \times 200}} - \frac{1}{6 \times 200} \\ \Leftrightarrow 0.075 &\geq \sqrt{\frac{-\ln(\alpha/2)}{2 \times 200}} \\ \Leftrightarrow 0.0056 &\geq \frac{-\ln(\alpha/2)}{2 \times 200} \\ \Leftrightarrow 2.24 &\geq -\ln(\alpha/2) \\ \Leftrightarrow \exp(-2.24) &\leq \alpha/2 \\ \Leftrightarrow 0.2 &\leq \alpha \end{aligned}$$

- **Conclusion :** La p-value est grande, on ne rejette pas  $H_0$  jusqu'au risque 20% . On ne peut pas conclure par l'existence d'une différence significative entre les fonctions de répartition. La distribution de l'échantillon issue de  $T_n$ , n'est pas incompatible avec le fait que  $T_n$  suit une loi log-Normale.

**Remarque :** Modéliser les fluctuations du cours selon une loi gaussienne semble surprenant étant donné la possibilité d'un crack boursier. En effet, les queues de distribution d'une loi gaussienne sont très légères tandis que, sur une durée suffisamment longue, il devient assez probable que le cours s'emballe et prenne des valeurs extrêmes (comme on le note sur l'histogramme précédent, dont la volatilité choisie était tout de même de 0.5).



### 3.2.6 Black-Scholes comme limite de CRR

Dans le modèle de CRR, la prime du Put (ou du Call) s'exprime comme l'espérance, sous la probabilité risque neutre, du pay-off actualisé :

$$P_0^n = e^{-rT} \mathbf{E}^*(h(S_T))$$

L'objet de ce paragraphe est de montrer que, lorsque  $n$  tends vers l'infini, la limite de  $P_0^n$  existe et qu'elle est précisément égale au prix donné par la formule de Black Scholes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-rT} \mathbf{E}^*((K - S_T)_+) = Ke^{-rT} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \mathcal{N}(-d_1)$$

avec :

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T \right] \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \\ \mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}u^2) du \end{cases}$$

L'équivalent dans le cas du call est vrai aussi et découlera du Put par la parité Call-Put. Le choix d'étudier ce passage à la limite dans le cas du Put apparaîtra plus loin.

Pour cela, on fait tendre  $N$  vers l'infini en imposant tout d'abord les relations suivantes :  $r = \frac{RT}{N}$ ,  $\log((1+a)/(1+r)) = -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}$  et  $\log((1+b)/(1+r)) = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}$ . Le réel  $R$  s'interprète comme le taux d'intérêt instantané entre les instants 0 et  $T$ , puisque  $e^{RT} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1+r)^N$ . La valeur  $\sigma^2 T$  s'interprète comme la variance limite, sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ , de la variable aléatoire  $\log(S_N)$ ,  $S_N$  représentant le cours de l'action à la date  $T$ . Le nombre  $\sigma^2$  s'interprète comme une variance par unité par unité de temps.

Explicitons la valeur limite d'un put à l'instant 0 (nous en déduirons celui d'un call) à partir des formules sous forme d'espérances conditionnelles (1) et (2).

Pour  $N$  fixé, le prix du put est donné en 0 par :

$$P_0^{(N)} = (1 + RT/N)^{-N} \mathbf{E}^* \left( K - S_0 \prod_{n=1}^N T_n \right)_+$$

$$= \mathbf{E}^* \left( (1 + RT/N)^{-N} K - S_0 e^{Y_N} \right)_+$$

où  $Y_N = \sum_{n=1}^N \log(T_N/(1+r))$ .

Avec les hypothèses énoncées, la suite  $Y_N$  est du type  $Y_N = X_1^N + X_2^N + \dots + X_N^N$  où les variables aléatoires  $X_i^N$  sont indépendantes et équidistribuées sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ , à valeurs dans  $\{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}, \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\}$ .

Montrons que  $(Y_N)$  converge en loi vers une gaussienne de moyenne  $\mu$  (où  $\mu$  est la limite quand  $N$  tends vers l'infini de  $N$  fois la moyenne  $\mu_N$  de  $X_1^N$ ). Pour cela, il suffit d'étudier la convergence de la fonction caractéristique  $\phi_{Y_N}$  de  $Y_N$  :

$$\phi_{Y_N}(u) = \mathbf{E}(e^{iuY_N}) = \prod_{j=1}^N \mathbf{E}^* \left( e^{iuX_j^N} \right) = \left( \mathbf{E}^*(e^{iuX_1^N}) \right)^N = \left( 1 + iu\mu_N - \frac{\sigma^2 T u^2}{2N} + o(1/N) \right)$$

D'où  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \phi_{Y_N}(u) = \exp(iu\mu - \frac{\sigma^2 T u^2}{2})$ , on reconnaît la fonction de répartition d'une gaussienne de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2 T$ .

Dans notre cas,  $\mu = \frac{-\sigma^2 T}{2}$ . En effet :

$$\mu_N = \mathbf{E}^*(X_1^N) = (1-2p) \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{N}} = \frac{2 - e^{\sigma\sqrt{T/N}} - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}}{e^{\sigma/\sqrt{T/N}} - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}} \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{N}}$$

par les relations imposées. Vu qu'on a aussi :

$$e^{\sigma\sqrt{T/N}} = 1 + \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma^2 T}{2N} + \frac{T}{N} \epsilon\left(\frac{T}{N}\right)$$

$$e^{-\sigma\sqrt{T/N}} = 1 - \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma^2 T}{2N} + \frac{T}{N} \epsilon\left(\frac{T}{N}\right)$$

On a par simplification que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N\mu_N = -\frac{\sigma^2 T}{2}$$

Posons maintenant :  $\psi(y) = (Ke^{-RT} - S_0 e^y)_+$ . On peut écrire :

$$|P_0^{(N)} - \mathbf{E}^*(\psi(Y_N))| = |\mathbf{E}^* \left( ((1 + RT/N)^{-N} K - S_0 e^{Y_N}) \right)_+ - (Ke^{-RT} - S_0 e^{Y_N})_+|$$

$$\leq K|(1 + RT/N)^{-N} - e^{-RT}|$$

Il est clair que  $\psi$  est bornée sinon on aurait une opportunité d'arbitrage (voilà pourquoi on a choisi d'étudier le put en premier). En utilisant la convergence en loi de  $(Y_N)$  on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_0^{(N)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{E}^*(\psi(Y_N)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( (Ke^{-RT} - S_0 e^{\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}y})_+ e^{y^2/2} \right) dy$$

Ici, on pose :

$$\begin{aligned} & (Ke^{-RT} - S_0 e^{\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}y}) > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{K}{S_0} e^{-RT} > e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}y} \\ \Leftrightarrow & \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - RT > -\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}y \\ \Leftrightarrow & \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - RT + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} > y \\ \Leftrightarrow & -d_2 > y \end{aligned}$$

On écrit :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} P_0^{(N)} &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} Ke^{-RT} e^{-y^2/2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 \int_{-\infty}^{-d_2} e^{\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}y} e^{-y^2/2} dy}_{= Ke^{-RT} \mathcal{F}(-d_2)} \\ &= Ke^{-RT} \mathcal{F}(-d_2) \end{aligned}$$

En faisant un changement de variable  $x = y - \sigma\sqrt{T}$  et en remarquant que  $-d_1 = -d_2 - \sigma\sqrt{T}$ , on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 \int_{-\infty}^{-d_2} e^{\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}y - y^2/2} dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 \int_{-\infty}^{-d_2} e^{\frac{-(y - \sigma\sqrt{T})^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 \int_{-\infty}^{-d_1} e^{-x^2/2} dx = S_0 \mathcal{F}(-d_1) \end{aligned}$$

On aboutit bien à la formule voulue :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_0^{(N)} = Ke^{-RT} F(-d_2) - S_0 F(-d_1)$$

avec :

- $d_1 = (\log(S_0/K) + RT + \sigma^2 T/2)/\sigma\sqrt{T}$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$
- $\mathcal{F}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{1}{2}u^2)du$

Le prix du Call est obtenu en utilisant la parité Call - Put :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} C_0^{(N)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{E}^*(\psi(Y_N)) = S_0 \mathcal{F}(d_1) - K e^{-RT} \mathcal{F}(d_2)$$

### 3.3 Simulations

Ce paragraphe a pour but d'observer le comportement des formules précédemment démontrées.

---

#### Algorithm 1 Prix en n

---

```

1: procedure CALLCRR( $N, n, K, r, a, b, S_0$ )  $N \leftarrow N - n$ 
2:  $a \leftarrow (1 + r) \exp \frac{-\sigma}{\sqrt{N}} - 1$ 
3:  $b \leftarrow (1 + r) \exp \frac{\sigma}{\sqrt{N}} - 1$ 
4:  $p \leftarrow \frac{b-r}{b-a}$ 
5:  $p_1 \leftarrow \frac{p}{1+r}$ 
6:  $p_2 \leftarrow \frac{1-p}{1+r}$ 
7:  $X \leftarrow S_0 \times (1 + a)^N \times (\frac{(1+b)}{(1+a)})^{(0:N)}$ 
8:  $Prix = \max(X - K, 0)$ 
9:
10:   for  $i$  in  $0 : N$  do
11:      $Prix = p_1 \times Prix(1 : (N - j + 1)) + p_2 \times Prix(2 : (N - j + 2))$ 
12:   end for ▷ biblio 6p25
13:   return  $Prix$ 
14: end procedure

```

---



---

#### Algorithm 2 Prix en n

---

```

1: procedure CALLBS( $t, K, r, T, \sigma$ )
2:    $d_1 \leftarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T]$ 
3:    $d_2 \leftarrow d_1 - \sigma\sqrt{T}$ 
4:
5:   return  $S_0 \times \mathcal{F}_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_1) - K \times e^{-R(T-t)} \mathcal{F}_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_2)$ 
6: end procedure

```

---

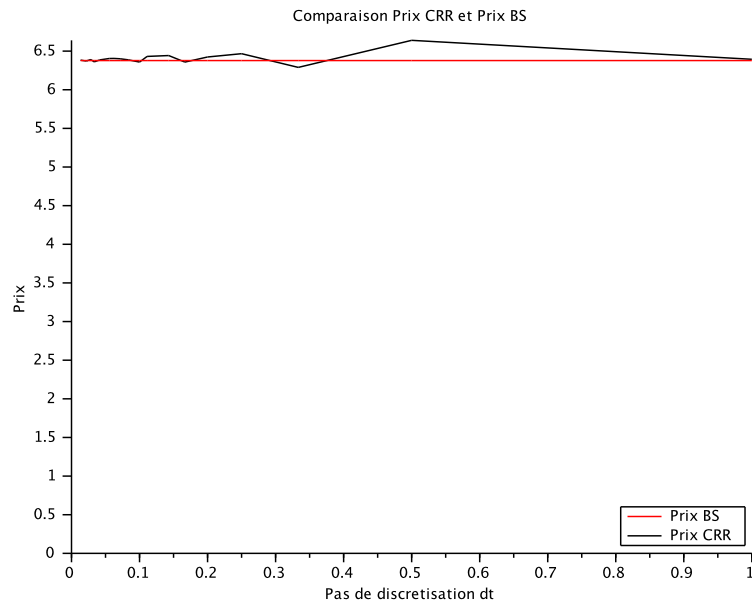
---

**Algorithm 3** Couverture

---

```
1: procedure DELTA( $N, n, K, r, a, b, S_0, \text{Call}$ )  
2:   return  $\frac{\text{Call}(N, n, K, r, a, b, S_0 \times (1+b)) - \text{Call}(N, n, K, r, a, b, S_0 \times (1+a))}{S_0 \times (b-a)}$  ▷ ref : 3.2.4  
3: end procedure
```

---



On remarque que le prix calculé selon l'algorithme de Cox, Ross et Rubinstein converge bien vers celui calculé par Black Scholes. Le contraire aurait été mystérieux.

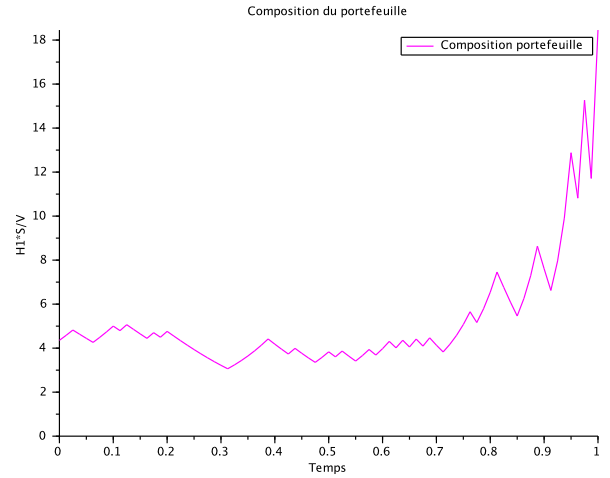
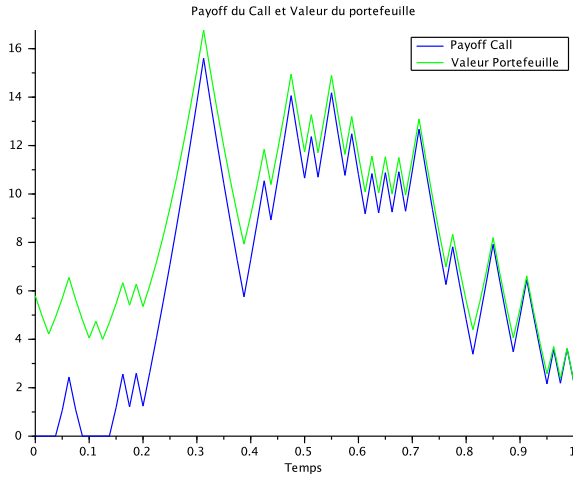
---

**Algorithm 4** Portefeuille

---

```
1:  $S(1) \leftarrow S_0$ 
2:  $C_0 \leftarrow CallBS(0, S_0, K, T, R, \sigma)$ 
3:  $H_1(1) \leftarrow DeltaBS(t, S_0, K, T, R, \sigma)$ 
4:  $H_0(1) \leftarrow V(1) - H_1(1) \times S(1)$ 
5:  $composition(1) \leftarrow H_1(1) \times S(1)/V(1)$ 
6: for  $n$  in  $2 : N$  do
7:    $t \leftarrow (i - 1) \times dt$ 
8:    $S(n) \leftarrow S(i - 1) \times (1 + b + (-b) \times (rand(1, 1) < p))$ 
9:    $V(n) \leftarrow H_0(n - 1) \times (1 + r)^{(n-1)} + H_1(n - 1) \times S(n)$ 
10:   $H_1(n) \leftarrow DeltaBS(t, S(n), K, T, R, \sigma)$ 
11:   $H_0(n) \leftarrow (V(n) - H_1(n) \times S(n))/(1 + r)^{n-1}$ 
12:   $payoff(n) \leftarrow H_1(n) \times S(n)/V(n)$ 
13: end for
14:  $S(N + 1) \leftarrow S(N) \times (1 + b + (a - b) \times (rand(1, 1) < p))$ 
15:  $V(N + 1) \leftarrow H_0(N) \times (1 + r)^N + H_1(N) \times S(N + 1)$ 
16:  $payoff(N + 1) = \max(S(N + 1) - K, 0)$ 
17:  $composition(N + 1) = H_1(N) \times S(N + 1)/V(N + 1)$ 
18:  $ErreurCouverture = payoff(N + 1) - V(N + 1)$ 
```

---



Cette simulation a été réalisée avec les données suivantes :  $K = 39$ ,  $S_0 = 40$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $T = 3$ . Comme espéré, la valeur du portefeuille s'aligne sur celle

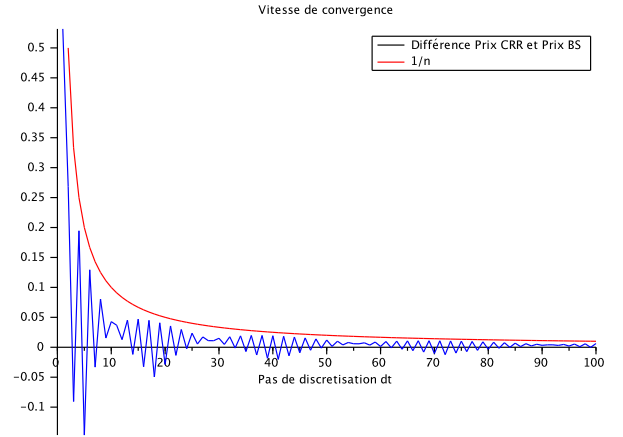
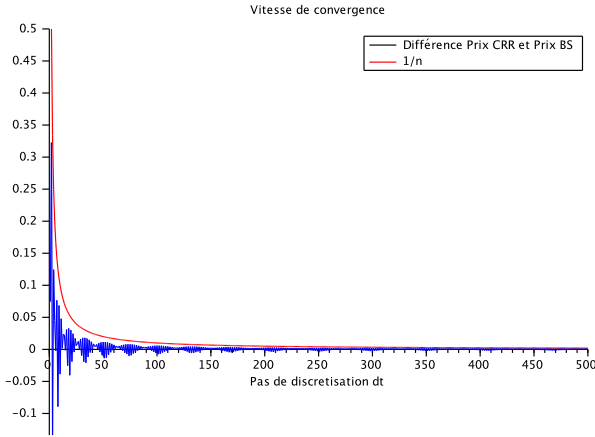
de la fonction payoff. On note de plus, sur le graphique de droite (représentant la quantité d'actif risqué dans le portefeuille), que l'échéance approchant, le contenu varie plus.

### 3.4 Vitesse de convergence

Si cette méthode s'adapte bien pour des cas simples, elle présente une faiblesse notable : le pas de discrétisation doit tendre vers l'infini pour avoir une bonne convergence. Or, dans la pratique, la vitesse de convergence vers un prix acceptable est un critère vital dans le choix d'une méthode numérique.

Nous avons vu, en montrant la convergence que la méthode de Cox Ross était une discrétisation de la trajectoire (continue) du modèle de Black et Scholes, et donc, quand  $n \rightarrow +\infty$  le prix converge vers le prix du modèle de Black et Scholes. Toutefois, cette convergence n'est pas du tout monotone. Si  $\Delta t = \frac{T}{n}$ , et si  $\epsilon_n$  représente la différence entre le prix obtenu par la méthode de Cox et la méthode de Black-Scholes :

$$|\epsilon_n| \leq O\left(\frac{1}{n}\right).$$



Plusieurs techniques d'amélioration de la convergence ont donc été proposées notamment par BROADIE et DETEMPLE [7] et ne seront pas dé-

veloppées dans ce rapport.

**Ouverture :** Le modèle de Black-Scholes est un outil économique très puissant utilisé dans tous les compartiments des marchés financiers. Son caractère simple et pratique le rend accessible et facilement manipulable. En effet, la formule pour le prix d'un call européen dépend de plusieurs paramètres faciles à obtenir et donc à calculer. Il y a un seul paramètre non directement observable, la volatilité de l'action notée  $\sigma$ .

## 4 Estimation de la volatilité

La volatilité représente le *risque* d'un titre, c'est à dire, les variations d'un titre sur un temps plus ou moins espacé. Plus la volatilité est forte, plus la rentabilité financière court terme est importante mais plus les pertes peuvent l'être également.

On s'intéresse maintenant aux différentes façons d'estimer  $\sigma$  et aux limites de ces méthodes. Dans la pratique, deux méthodes sont utilisées pour évaluer  $\sigma$  : la méthode historique et la méthode implicite.

### 4.1 Méthode historique

La volatilité historique se calcule grâce aux *fluctuations passées* d'un titre, il suffit de calculer l'écart type de la courbe historique du titre à l'échelle de temps désirée. Elle est facile à calculer, néanmoins elle est très critiquable car elle est basée sur une analyse de données passées pour prédire une volatilité future.

Selon le modèle de Black-Scholes,  $T_n = S_n/S_{n-1}$  suit une loi Log-Normale. On se donne un pas  $h$  (1 jour par exemple), et en étudiant  $\log(S_h/S_0)$ , on retrouve une loi Normale et il devient pratique d'estimer sa variance. En effet, on s'intéresse à la suite de variables :  $(\log(S_h/S_0), \log(S_{2h}/S_h), \dots, \log(S_{Nh}/S_{(N-1)h}))$ . C'est une suite i.i.d de loi Gaussienne de variance  $\sigma^2 h$ .

On cherche à estimer  $\sigma^2$  par des voies statistiques en utilisant la formule de la *variance empirique* donnée par :



$$\hat{\sigma}_{log}^2 = \frac{1}{h(n-1)} \sum_{i=1}^n \left( \ln\left(\frac{S_{h_{i+1}}}{S_{h_i}}\right) - \hat{\mu}_n \right)^2 \quad (3)$$

avec  $\hat{\mu}_n$  : *moyenne empirique* des variables aléatoires  $\ln\left(\frac{S_{h_{i+1}}}{S_{h_i}}\right)$ .

### Application :

Pour la suite, on va prendre des données réelles observées sur le marché pour observer leur comportement. On s'intéresse aux cours de bourse de l'entreprise Airbus entre le 1er Janvier 2014 et le 1er Janvier 2016 [8]. On calcule le logarithme des quotients des cours, on trace l'histogramme et on vérifie que ça suit, approximativement, une distribution Gaussienne.

Deuxièmement, on veut vérifier que c'est une loi de variance  $\sigma^2 h$ . On estime la volatilité par la méthode historique en implémentant l'algorithme sur SciLab. On retrouve la volatilité historique des logs de cours en utilisant la formule (3), or on voudrait analyser la volatilité des cours. Pour la retrouver, on remarque que les cours  $\frac{S_{h_{i+1}}}{S_{h_i}}$  sont des exponentielles de Lois Normales.

Pour récupérer la volatilité historique des cours,  $\hat{\sigma}^2$ , on centre et on réduit la loi Normale et on prend l'exponentielle. Précisément, dans cet exemple, on trouve  $\hat{\sigma}_{log}^2 = 0.00039$ , on calcule  $e^{\sqrt{\hat{\sigma}_{log}^2}(\mathcal{N}(0,1)-\mu)} \simeq 1.0199$ .

On interprète ce résultat de la façon suivante : d'une journée à l'autre (ici nos données sont espacées d'une journée donc  $h = 1$ ) la volatilité historique des actions Airbus est à peu près égale à 1.9%.

Ce résultat reste approximatif et c'est pour ça qu'on préfère donner un intervalle de confiance pour la volatilité. On va calculer l'intervalle de confiance de niveau  $\alpha = 5\%$  pour  $\hat{\sigma}_{log}^2$  (et ensuite de  $\hat{\sigma}^2$ ) lorsque  $\mu$  est inconnue. La formule est donnée par :

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[ \frac{n-1}{v_{1-\alpha/2}^{n-1}} S_n^2, \frac{n-1}{v_{\alpha/2}^{n-1}} S_n^2 \right]$$

Avec, dans ce cas :

- $n = 521$
- $S_n^2 = \hat{\sigma}_{log}^2$

—  $v_\gamma^{n-1}$  : le quantile d'ordre  $\gamma$  d'une  $\chi^2$  à  $n - 1 = 520$  degrés de liberté.

Application numérique :

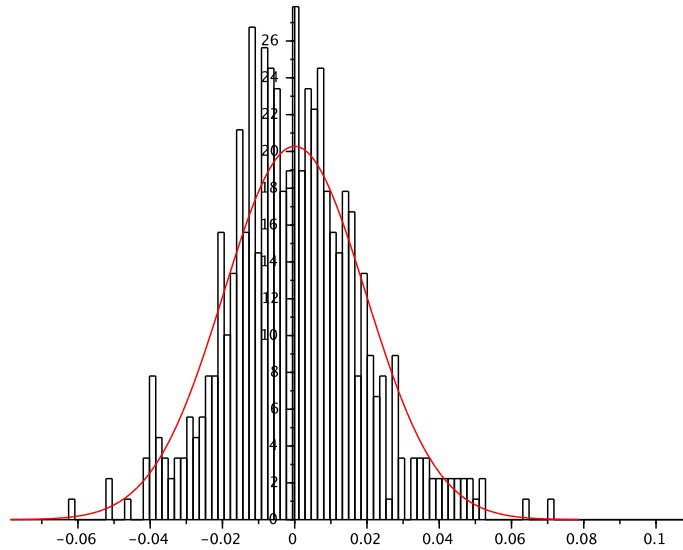
$$IC_{0.95}(\hat{\sigma}_{log}^2) = [0.0003465; 0.0004422]$$

Donc :

$$IC_{0.95}(\hat{\sigma}^2) = [1.01878; 1.02125]$$

Pour conclure, on peut dire que la volatilité historique d'une action Airbus d'un jour sur l'autre, se trouve, au risque 5%, entre 1.8 % et 2.1 %.

Il est maintenant pertinent d'exposer un graphique avec nos observations.



En traçant l'histogramme des logarithmes des cours et en lui superposant la densité d'une Gaussienne centrée de variance  $\hat{\sigma}_{log}^2$  on peut conjecturer son *adéquation* à une Loi Normale. Afin de conclure et ainsi d'être convaincu que le modèle de BS est approprié dans l'approximation de  $\sigma$ , effectuons un test statistique.

### Test Statistique :

Vérifions l'hypothèse de log-normalité de la variable aléatoire  $T_i = S_{i+1}/S_i$  par voies statistiques :

On dispose d'un n-échantillon ( $n = 521$ ) de réalisations de  $Z_i$ . On souhaite tester l'adéquation de l'échantillon des données Airbus à une loi normale centrée de variance  $\hat{\sigma}^2$  dont la fonction de répartition sera notée  $F_0$ . Nous choisissons d'effectuer le test non paramétrique d'ajustement de Kolmogorov. En reprenant la démarche élaborée en **3.2.5** on arrive à une p-value de 0.152.

**Conclusion :** La p-value est grande on ne rejette pas  $H_0$  jusqu'au risque 15%. On ne peut pas conclure à l'existence d'une différence significative entre les fonctions de répartition. La distribution de l'échantillon issue de  $T_n$ , n'est pas incompatible avec le fait que  $T_n$  suit une loi log-Normale.

**Remarque :** Une nouvelle fois, l'histogramme nous met en alerte sur l'existence de valeurs extrêmes mal modélisées par la loi normale.

## 4.2 Méthode implicite

La méthode de calcul de la volatilité implicite se base sur l'analyse des prix d'options cotées sur le marché. Le prix d'une option (d'un *call* ou d'un *put*) étant une fonction de  $\sigma$ , la méthode consiste à inverser la formule de Black-Scholes. Plaçons nous dans la cas d'un *call* coté sur le marché, et vérifions cette inversion. Premièrement, rappelons la formule de Black-Scholes :

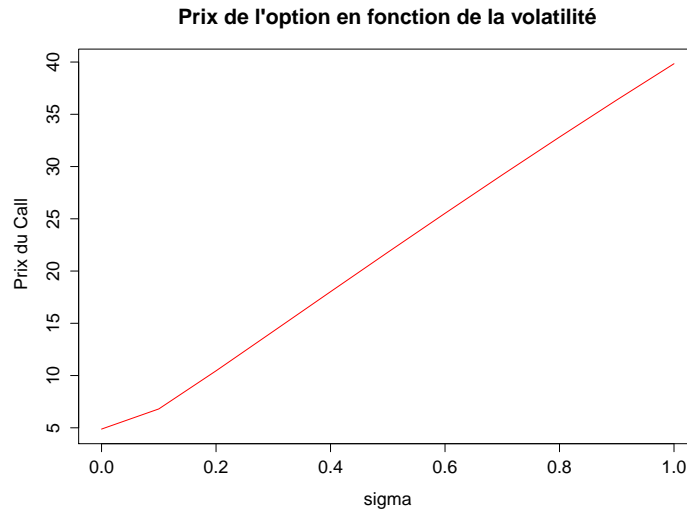
$$C(S_0, K, r, T, \sigma) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right] \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \\ \mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \end{array} \right.$$

Le résultat est un réel  $p$  (la prime), et dépend de  $S_0$ ,  $K$ ,  $r$  et  $T$  connus et  $\sigma$  inconnu. Il est facile d'assimiler la formule à une fonction de sigma,  $C(\sigma) = p$ , qu'on cherche à inverser.

Premièrement, vérifions que cette fonction est bien inversible, ce qui équivaut à montrer que  $C(\sigma)$  est une bijection. Le *Théorème de la Bijection* affirme qu'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle constitue une bijection entre cet intervalle et son image. La fonction  $C(\sigma)$  est continue sur l'intervalle  $[0, \infty[$  comme une somme de produits de fonctions continues sur cet intervalle. Pour avoir une première piste sur le comportement de la fonction on trace, sur R, l'évolution du prix d'un call en fonction de la volatilité.



Grâce au graphique on peut conjecturer que le prix d'un *call* (ou d'un *put*) est une fonction strictement croissante de  $\sigma$ . Pour le montrer, on s'intéresse au signe de sa dérivée et on constate qu'il est toujours positif.

En effet, on a :

$$d'_1(\sigma) = -\frac{1}{\sigma^2\sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT \right] + \frac{\sqrt{T}}{2}$$

$$d'_2(\sigma) = d'_1(\sigma) - \sqrt{T} = -\frac{1}{\sigma^2\sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT \right] - \frac{\sqrt{T}}{2}$$

Donc :

$$C'(\sigma) = S_0 d'_1(\sigma) \mathcal{N}'(d_1) - K e^{-rT} d'_2(\sigma) \mathcal{N}'(d_2)$$

$$C'(\sigma) = S_0 \left( -\frac{1}{\sigma^2 \sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT \right] + \frac{\sqrt{T}}{2} \right) \mathcal{N}'(d_1) - K e^{-rT} \left( -\frac{1}{\sigma^2 \sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT \right] - \frac{\sqrt{T}}{2} \right) \mathcal{N}'(d_2)$$

$$C'(\sigma) = \frac{\sqrt{T}}{2} \left( S_0 \mathcal{N}'(d_1) + K e^{-rT} \mathcal{N}'(d_2) \right) + \left( \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT \right) \left( \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{T}} \right) \mathbf{A}$$

$$\text{Où } \mathbf{A} = \left( K e^{-rT} \mathcal{N}'(d_2) - S_0 \mathcal{N}'(d_1) \right)$$

Par la suite, on cherche le signe de  $\mathbf{A}$  puisque le reste de la dérivée est strictement positif. Donc on calcule :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ K e^{-rT} e^{-\frac{1}{2}d_2^2} - S_0 e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \right] \quad \text{avec } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ K e^{-rT} e^{-\frac{1}{2}(d_1^2 - 2\sigma\sqrt{T}d_1 + \sigma^2 T)} - S_0 e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \right]$$

$$\mathbf{A} = \frac{e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ K e^{-rT} e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} \left( \frac{S_0}{K} (e^{rT} e^{\frac{\sigma^2 T}{2}}) \right)} - S_0 \right]$$

Après quelques simplifications on obtient :

$$\mathbf{A} = \frac{e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ K \left( \frac{S_0}{K} \right) - S_0 \right] = 0$$

$\mathbf{A}$  est nulle donc  $C'(\sigma) > 0$ .

On peut conclure que la dérivée est de signe positif sur tout l'intervalle, donc le prix d'un *call* est une fonction strictement croissante de  $\sigma$ . On a bien montré que  $C(\sigma)$  est continue et monotone donc elle est bijective et donc inversible.

Deuxièmement, on cherche ce  $\sigma$  grâce à l'implémentation de méthodes numériques sur R. L'algorithme de Newton nous permet de trouver la racine d'une fonction, c'est à dire à trouver le  $x$  tel que :  $f(x) = 0$ . Très adapté dans notre cas, on cherche  $\sigma$  tel que  $C(\sigma) - p = 0$ . On peut implémenter la fonction  $C(\sigma)$  sur R et se servir de la fonction *uniroot*, qui trouve la racine de  $C(\sigma) - p = 0$  pour un intervalle de  $\sigma$  qu'on définit comme étant  $[0.01, 0.99]$ .

### Exemple :

On prend le prix d'une action Apple [8], qui actuellement vaut 93.72 dollars. On prend une option d'achat sur une action Apple de strike 42.50 et d'échéance le 19 Janvier 2018. On s'attend à une grande volatilité puisque le prix d'exercice est très différent du prix du sous-jacent. Ici,  $T = 425/253$ , puisqu'il y a 425 jours ouvrés entre le 16 Mai et l'échéance et dans une année on compte 253 jours ouvrés. On rentre ces paramètres et on trouve une volatilité implicite de 32.51%. Cette méthode est utilisée pour des calculs de couverture, pour faire face au risque et arriver à se couvrir au maximum contre les variations du marché.

## 4.3 Remarque

Faute d'avoir une pleine confiance en la valeur de la volatilité trouvée (implicite ou historique), les traders la comparent à toutes celles qu'ils sont capables de calculer [9]. On distingue trois analyses :

Tout d'abord, la comparaison de la volatilité historique actuelle à la volatilité implicite actuelle informe de l'évaluation de la volatilité dans les options cotées : si elles sont disparates, une occasion pourrait se présenter d'acheter ou vendre une option à bon prix (si par exemple la volatilité implicite est plus haute que la volatilité historique cela signifie que les prix d'option sont hauts et vice versa).

Ensuite, une comparaison de la volatilité implicite passée, présente et future permet de jauger le niveau de la volatilité relatif. Si celui ci est bas, on est probablement devant une bonne affaire.

Enfin, la comparaison de la volatilité historique proche et plus lointaine permet également de jauger le niveau de volatilité présent et d'en tirer conclusion.

## 4.4 Smile de Volatilité

Dans cette partie on veut signaler une des imperfections du Modèle de Black-Scholes en mettant en évidence la dépendance entre la volatilité implicite et le Strike.

Pour ceci on dispose de prix d'options cotées sur le marché, qui ne diffèrent que par le prix d'exercice  $K$ . Commençons par un exemple concret pour ensuite généraliser ce phénomène.

### Exemple :

Le logiciel R dispose d'un package appelé RQuantLib de grande utilité pour cette partie.

On prend des données disponibles en ligne sur des options portant sur des actifs Google [8], avec une maturité de 50 jours et un prix du sous-jacent  $S$  qui vaut 723.96 dollars à la date. On suppose  $r$  égal à 0.03. On calcule la volatilité implicite pour chaque Strike grâce à la fonction `EuropeanOptionImpliedVolatility` et on obtient le graphique ci-dessous.

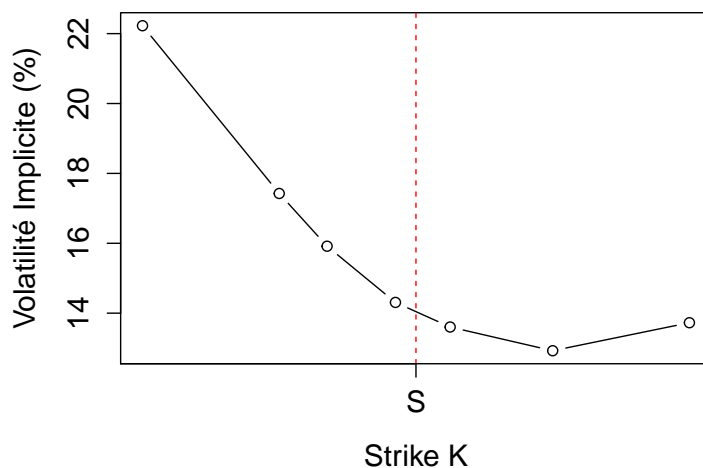


FIGURE 2 – Volatilité Implicite en fonction du Strike

On se heurte ici aux imperfections du Modèle de Black-Scholes. Celui-ci fait comme hypothèse que la volatilité est *constante*, alors qu'en regardant le graphique obtenu on voit bien que ce n'est pas le cas. On a mis en évidence le fameux *Smile de Volatilité* : la volatilité implicite dépend du Strike  $K$ . De plus, dans cet exemple, la courbe n'est pas symétrique : c'est le *Reverse Skew*

ou *Volatility Smirk*. Ceci veut dire que la volatilité implicite des options avec un  $K$  plus petit est plus grande que celle des options avec des strikes plus grands.

### Généralisation :

On définit une option *dans la monnaie* (in the money) lorsque son prix d'exercice est inférieur au prix de son actif sous-jacent (pour un call) ou supérieur au prix de son actif sous-jacent (pour un put). Au contraire, une option *hors de la monnaie* (out of the money) a un prix d'exercice supérieur au prix de son sous-jacent (dans le cas d'un call) ou inférieur (dans le cas d'un put). Finalement, une option est dite *à la monnaie* (at the money) si le prix d'exercice est égal au cours actuel de l'actif sous-jacent de l'option.

Le Smile de Volatilité a été observé pour la première fois après le Crash boursier de 1987 qui marque la baisse la plus importante (22%) jamais enregistrée en un jour sur un marché d'actions. Le Smile est dû à beaucoup de facteurs mais une explication du phénomène du Smile pourrait être qu'au vu des événements, les événements "extrêmes" seraient plus probables que ce que le Modèle de Black-Sholes, avec la distribution Normale, stipule. Les traders ont changé de comportement et préfèrent se munir contre les forts risques, c'est le phénomène de crash-o-phobia introduit par Rubinstein [10]. C'est à dire qu'ils préfèrent des options que ne sont pas *à la monnaie*. La demande pour ce type d'options va augmenter ainsi que leur prix et leur volatilité implicite, on obtient un Smile de Volatilité.

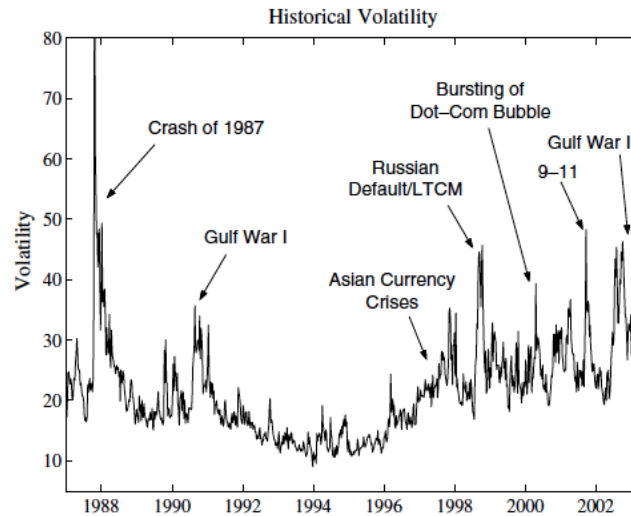
Comme ouverture, on peut aussi dire qu'en observant le prix des options dans le marché on constate un autre phénomène : la dépendance entre volatilité implicite et Strike augmente lorsque la date d'expiration  $T$  de l'option diminue. Donc la volatilité implicite dépend du Strike *et* de la durée de vie de l'option, on parle alors de *Surface de Volatilité*. La modélisation de cette surface ne sera pas traitée ici par faute de temps mais on peut

## 4.5 Régression

Pour finir, on se demande quels autres facteurs peuvent intervenir dans la variation de la volatilité. Dans le graphique suivant [7] on peut voir l'évolution historique de la volatilité pour des options S&P 500 à la monnaie d'échéance



un mois.



On remarque que les pics de volatilité semblent avoir lieu relativement souvent et de plus, ces changements sont associés à des événements politiques, économiques et sociaux. Par contre, si les hypothèses du Modèle de Black-Scholes étaient correctes, la corrélation entre les changements de volatilité et le log des rendements devrait être nulle.

On se propose de tester par voies statistiques le lien entre la volatilité et ce type d'événements.

- On récupère les données mensuelles de l'indice CBOE VIO (Chicago Board Options Exchange Volatility Index) qui mesure la volatilité de l'indice américain S&P 500 [11]. On s'intéresse aux données disponibles depuis 1986 jusqu'à 2015. C'est notre variable continue  $V$  à expliquer.
- On établit une variable binaire  $Z$ , la variable explicative, qui vaut 1 si un événement d'importance majeure s'est produit ce mois-ci et 0 sinon.

Le choix de la variable  $Z$  est très discutable, en effet comment déterminer quels événement sont soi-disant marquants par rapport aux autres ? Quel critères faire intervenir ? Ces questions pourraient faire l'objet d'une étude

complète mais on va se restreindre, en tant qu'étudiantes en sciences, aux dix événements suivants :

- Octobre 1987 : Crash Boursier
- Août 1990 : Guerre du Golfe
- Août 1998 : Crise du rouble
- Mars 2000 : Bulle Internet
- Septembre 2001 : Attentats du World Trade Center
- Mars 2003 : Invasion de l'Irak
- Août 2005 : Ouragan Katrina
- Octobre 2008 : Crise économique
- Novembre 2008 : Élection d'Obama
- Mars 2011 : Accident Nucléaire de Fukushima

Une régression logistique semble adaptée à la résolution de notre problème. Avant de se lancer dans la régression, une petite étude descriptive nous informe que : la moyenne de  $V$  sachant que  $Z=0$  vaut 152 tandis que la moyenne des volatilités lorsque  $Z=1$  vaut 249. Ceci confirme notre intuition, il y a en effet un lien entre la volatilité du marché et les événements historiques.

FIGURE 3 – Sortie logiciel de la régression

```
> summary(glm(z~Vol, data=bontab, family=binomial))
```

Call:  
glm(formula = z ~ Vol, family = binomial, data = bontab)

Deviance Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.5447	-0.2741	-0.1505	-0.0829	3.5874

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z )
(Intercept)	-6.744026	1.361902	-4.952	7.35e-07 ***
Vol	0.015541	0.005351	2.904	0.00368 **

---  
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

On a  $\exp(\hat{\beta}_1) = 1.01$  : c'est l'estimation de l'Odds Ratio (risque relatif approché) [12]. On l'interprète comme exprimant le degrés de dépendance

entre les variables aléatoires. Il est proche de 1 ce qui n'est pas très bon signe sur la conclusion que l'on espérait. Cependant les p-values calculées par le modèle logistique, concluent sur le rejet de  $H_0$ , et donc à l'effet significatif des événements sur la variation de la volatilité.

## 4.6 Critiques Volatilité

On a noté que la volatilité est une fonction de  $T$  et  $K$ . Ceci est surprenant puisque Black-Scholes la suppose constante. À notre niveau, on note déjà une potentielle défaillance du modèle de prédiction. Nous ne sommes pas les seuls et on développera cette idée en partie 6.

Une phrase d'un auteur inconnu résume assez bien l'insouciance du modèle : "Implied volatility is the wrong volatility that one has to plug in the wrong model in order to get the right price."

## 5 Illustration

Afin d'illustrer les propos de ce TER, plaçons nous dans le monde réel. Nous avons récupéré l'évolution du cours des actions Airbus sur deux ans [8]. Plaçons nous il y a 6 mois. On est le 5 novembre 2015, le cours à l'ouverture est égal à  $S_0 = 46.955$  €. On vend un call qui permettra à son bénéficiaire de payer une action dans 130 jours (de bourse soit 6 mois) à  $K = 40$ . On se place dans les hypothèses nécessaires à l'application du modèle de Black-Scholes et on applique la stratégie vue dans la première partie. On suppose le taux d'intérêt sans risque à  $r = 1\%$ .

Dans un premier temps, estimons la volatilité à partir des trajectoires passées. Avant cela, vérifions rapidement l'hypothèse de lognormalité sur le cours passé. Une estimation de la volatilité journalière du cours nous donne

$$\hat{\sigma}^2 = 1.96\%.$$

L'algorithme de calcul du prix propose 7.35€. Lançons maintenant l'algorithme du portefeuille. La seule différence à celui de la première partie et que à chaque itération au lieu d'utiliser la donnée simulée dans la boucle précédente, on affecte celle observée sur le marché.



On exécute 2000 simulations, la moyenne de l'erreur de couverture est de  $-0.159\text{€}$ ! Si on avait mis la prime uniquement en rendement sans risque on aurait  $7.35 \times 0.01/2 = 0.03675$ , l'argent perdu sur les cours d'actif risqué est donc d'environ 20 centimes. Une explication serait que les hypothèses formulées sont peu réalistes, le marché a été trop simplifié.

## 6 Critiques

On a noté que la volatilité est une fonction de  $T$  et  $K$ . Ceci est surprenant puisque Black-Scholes la suppose constante. À notre niveau, on note déjà une potentielle défaillance du modèle de prédiction. Nous ne sommes pas les seules.

Le mathématicien franco-américain Benoît MANDELBROT a publié une approche par les fractales des marchés [13] où il dénonce les outils mathématiques de la finance en les jugeant inadaptés. Il fut en particulier très critique sur la théorie de Merton, Black et Scholes utilisée par les banques. Il critique

qu'elle ne prend pas en compte les changements de prix instantanés et omet des informations essentielles, faussant ainsi la perception des risques financiers par les acteurs de marché.

Il considère que ces théories, si belles soient-elles en apparence et si simples dans leurs applications, sont totalement déconnectées de la réalité des marchés financiers. Elles ont été maintes fois remises en cause lors, notamment, des différents crashes boursiers. Elles ont conduit à des politiques de gestion des risques pouvant être qualifiées d'irresponsables de la part des institutions financières.

Pour finir, une anecdote à méditer : Le hedge fund "Long Term Capital Management" fondé en 1994, notamment par Scholes et Merton, fit quasi-faillite en 1998 (4,2 milliards de dollars de perte) entraînant des perturbations très importantes sur les marchés financiers.

## 7 Conclusion

Le long de cette étude le monde de la finance s'est ouvert à nous. En tant qu'apprentis, la barrière du vocabulaire propre à la finance ainsi que les notions de bases jugés évidentes nous ont retardées. Néanmoins, le long de ce rapport de nombreuses notions ont été abordées et il nous a servi à comprendre le problème des options et donner une première approche.

Si les problèmes de pricing et couverture ont été résolus théoriquement, l'application au cours de la bourse réel n'a pas été un franc succès. Nous retiendrons que les calculs de prix d'options sont à la fois passionnants et particulièrement complexes. Les outils mathématiques utilisés sont peu accessibles et les hypothèses d'applications peu réalistes. Pourtant, beaucoup de néophytes semblent vouloir s'approprier la démonstration du calcul de prix, en considérant les hypothèses du modèle comme des axiomes. Une leçon apprise le long de ce TER, est de ne pas considérer comme exact toutes les documentations qu'on peut trouver.

## Références

- [1] Louis BACHELIER : *Théorie de la Spéculation*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1900.
- [2] Philippe BRIAND : *Le Modèle de Black-Scholes*, Cours de l'Université de Savoie, 2003.  
<https://www.lama.univ-savoie.fr/briand/igr/bs.pdf>
- [3] Fisher BLACK, Myron SCHOLES : *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 1973.
- [4] Damien LAMBERTON, Bernard LAPEYRE : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses, 2002.
- [5] Florient MALRIEU : *Prix d'options européennes*, Préparation à l'agrégation externe de mathématiques page 3, 2007.
- [6] Delphine FERAI : *Compléments sur la théorie des Tests*, Cours Master MIMSE, Chapitre 2 : Outils de la Statistique non paramétrique et Tests page 7, 2014-2015.
- [7] Mark BROADIE, Jerome B. DETEMPLE : *Option Pricing : Valuation Models and Applications*. Management Science, Vol.50, No.9, pp.1145-1177, 2004.
- [8] Yahoo Finances :  
<http://finance.yahoo.com/>
- [9] Dan PASSARALI : *MONEYSHOW.com*, 12/19/2011.  
<http://www.moneyshow.com/articles.asp?aid=optionsidea-25848>
- [10] Mark RUBINSTEIN : *Implied Binomial Trees*, Journal of Finance, pp. 771-818, 1994.
- [11] Chicago Board Options Exchange : *Volatility Index*.  
<http://www.cboe.com/micro/vix/vixintro.aspx>
- [12] Huilong ZHANG : *Régression Linéaire*, Cours Master MIMSE, Chapitre 3 : Régression Logistique, 2014-2015.
- [13] Benoît MANDELBROT, Richard L.HOUSTON : *The (Mis)Behaviour of Markets*, BasicBooks, 2004.
- [14] Marc et Francine DIENER : *Modèles Mathématiques Discrets pour la Finance et l'Assurance*, Laboratoire J.A. Dieudonné, Unice