

## 第二章 逻辑代数基础

## 主要内 容

- ❖ 逻辑代数的基本运算
- ❖ 逻辑代数的基本公式和常用公式
- ❖ 逻辑代数的基本定理
  - 代入定理、反演定理、对偶定理
- ❖ 逻辑函数及其描述方法
- ❖ 逻辑函数的化简方法
- ❖ 具有无关项的逻辑函数及其化简
- ❖ 多输出逻辑函数的化简
- ❖ 逻辑函数形式的变换

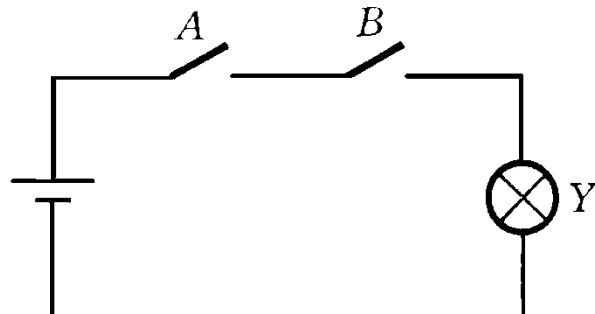
## 2. 1 概述

### ❖ 基本概念

- 逻辑：事物的因果关系
- 逻辑运算的数学基础：逻辑代数（布尔代数、开关代数）
- 在二值逻辑中的变量取值：0/1

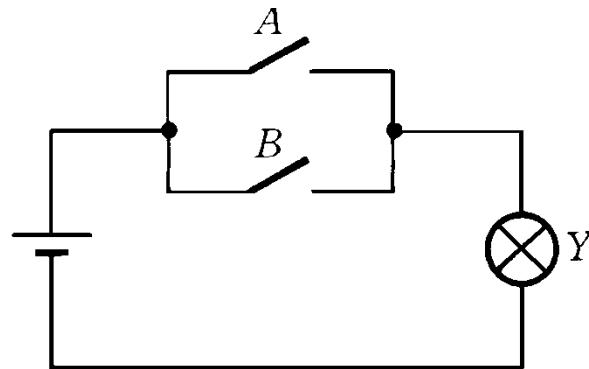
## 2.2 逻辑代数中的三种基本运算

与 (AND)



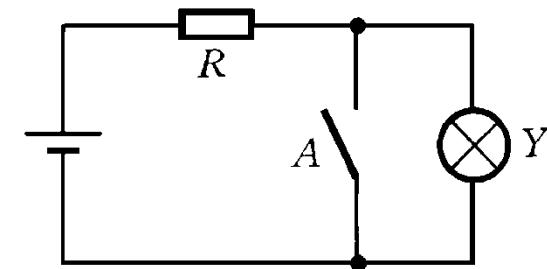
(a)

或 (OR)



(b)

非 (NOT)



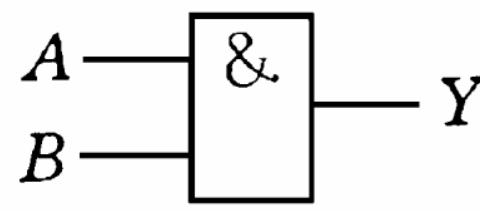
(c)

以 $A=1$ 表示开关A合上,  $A=0$ 表示开关A断开;  
以 $Y=1$ 表示灯亮,  $Y=0$ 表示灯不亮;  
三种电路的因果关系不同。

## 与

- ❖ 条件同时具备，结果发生
- ❖  $Y=A \text{ AND } B = A \& B = A \cdot B = AB$

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



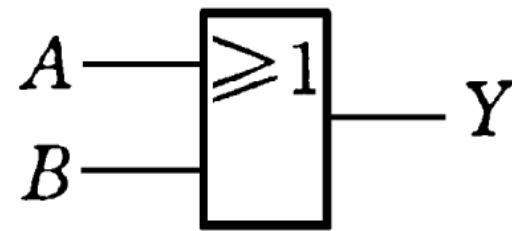
与



**或**

- ❖ 条件之一具备，结果发生
- ❖  $Y = A \text{ OR } B = A + B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



**或**

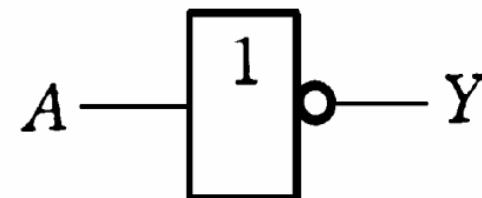


# 非

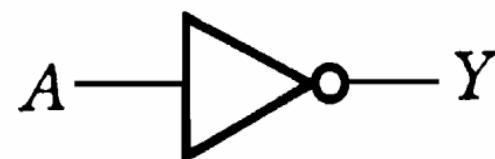
◆ 条件不具备，结果发生

$$Y = A' = NOT A$$

$A$	$Y$
0	1
1	0

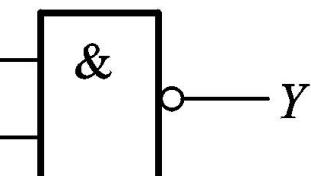
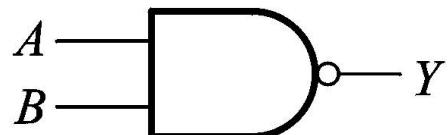


非



# 几种常用的复合逻辑运算

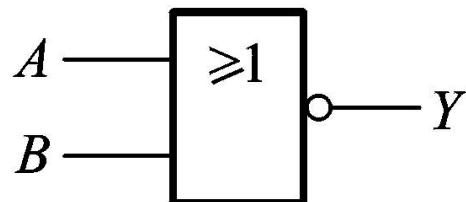
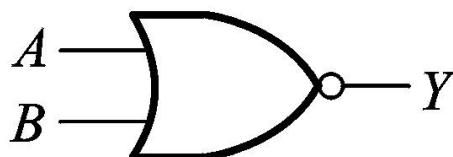
与非



与非

$$Y = (A \cdot B)'$$

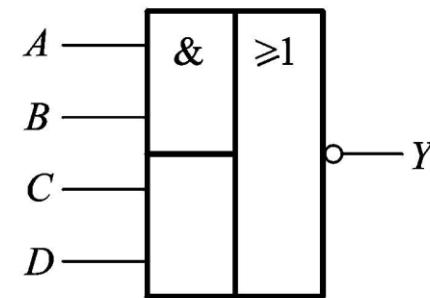
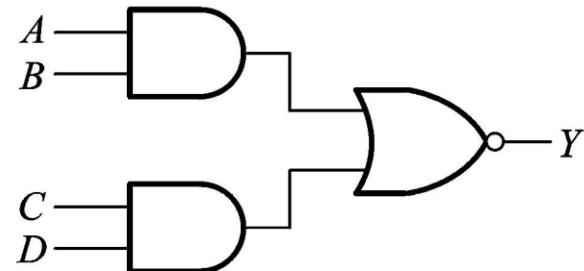
或非



或非

$$Y = (A + B)'$$

与或非



与或非

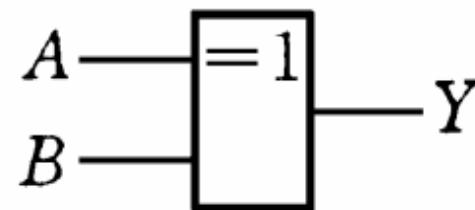
$$Y = (A \cdot B + C \cdot D)'$$

# 几种常用的复合逻辑运算

## ❖ 异或

$$Y = A \oplus B$$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



异或



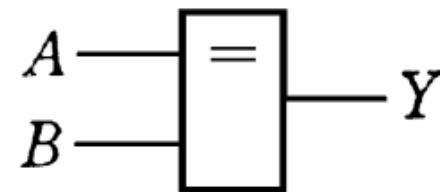
$$Y = A \oplus B$$

# 几种常用的复合逻辑运算

## ❖ 同或

$$Y = A \odot B$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



同或



$$Y = A \odot B$$

## 2.3 逻辑代数的基本公式和常用公式

### 2.3.1 基本公式

### 2.3.2 常用公式

## 2.3.1 基本公式

证明方法：推演 真值表

❖ 根据与、或、非的定义，得出表2.3.1的布尔恒等式

序号	公 式	序号	公 式
		10	$1' = 0; 0' = 1$
1	$0A = 0$	11	$1 + A = 1$
2	$1A = A$	12	$0 + A = A$
3	$AA = A$	13	$A + A = A$
4	$AA' = 0$	14	$A + A' = 1$
5	$AB = BA$	15	$A + B = B + A$
6	$A(BC) = (AB)C$	16	$A + (B + C) = (A + B) + C$
7	$A(B + C) = AB + AC$	17	$A + BC = (A + B)(A + C)$
8	$(AB)' = A' + B'$	18	$(A + B)' = A'B'$
9	$(A')' = A$		

公式(17)的证明(公式推演法)：

$$\begin{aligned}\text{右} &= (A + B)(A + C) \\&= A + AB + AC + BC \\&= A(1 + B + C) + BC \\&= A + BC = \text{左}\end{aligned}$$

# 公式 (17) 的证明 (真值表法) :

$A$	$B$	$C$	$BC$	$A+BC$	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

## 2.3.2 若干常用公式

序号	公 式	证明方法
21	$A + A'B = A$	
22	$A + A'B = A + B$	分配律
23	$AB + AB' = A$	
24	$A(A + B) = A$	结合律
25	$AB + A'C + BC = AB + A'C$ $AB + A'C + BCD = AB + A'C$	加入 ( $A+A'$ )
26	$A(AB)' = AB'; A'(AB)' = A'$	展开

## 2.4 逻辑代数的基本定理

### ❖ 2.4.1 代入定理

-----在任何一个包含A的逻辑等式中，若以另外一个逻辑式代入式中A的位置，则等式依然成立。

## 2.4.1 代入定理

❖ 应用举例：

$$\text{式 (17)} \quad A + B \mathbf{C} = (A + B)(A + \mathbf{C})$$

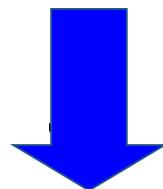
$$\begin{aligned} A + B(\mathbf{C}\mathbf{D}) &= (A + B)(A + \mathbf{C}\mathbf{D}) \\ &= (A + B)(A + \mathbf{C})(A + \mathbf{D}) \end{aligned}$$

## 2.4.1 代入定理

◆ 应用举例：

式 (8)  $(A \cdot B)' = A' + B'$

以  $B \cdot C$  代入  $B$



$$(A \cdot B \cdot C)' = A' + (BC)'$$

$$A' + B' + C'$$

## 2.4.2 反演定理

-----对任一逻辑式

$$Y \Rightarrow Y'$$

变换顺序 先括号，  
然后乘， 最后加

$$\bullet \Rightarrow +, \quad + \Rightarrow \bullet, \quad 0 \Rightarrow 1, \quad 1 \Rightarrow 0,$$

原变量  $\Rightarrow$  反变量

反变量  $\Rightarrow$  原变量

不属于单个变量的  
上的反号保留不变

## 2.4.2 反演定理

❖ 应用举例：

$$Y = A(B + C) + CD$$

$$Y' = (A' + B'C')(C' + D')$$

$$= A'C' + B'C' + A'D' + \cancel{B'C'D'}$$

## 2.4.3 对偶定理

-----对任一逻辑式  $Y \Rightarrow Y^D$

$$\bullet \Rightarrow +, \quad + \Rightarrow \bullet, \quad 0 \Rightarrow 1, \quad 1 \Rightarrow 0,$$

“若两逻辑式相等，则它们的对偶式也相等”

-----为了证明两个逻辑式相等，也可以证明它们的对偶式相等来完成。

考察：基本公式

## 2.5 逻辑函数及其描述方法

### 2.5.1 逻辑函数

❖  $Y=F(A,B,C,\dots)$

-----若以逻辑变量为输入，运算结果为输出，则输入变量值确定以后，输出的取值也随之而定。输入/输出之间是一种函数关系。

注：在二值逻辑中，输入/输出都只有两种取值0/1。

## 2.5.2 逻辑函数的描述方法

- ❖ 真值表
- ❖ 逻辑式
- ❖ 逻辑图
- ❖ 波形图
- ❖ 卡诺图
- ❖ 计算机软件中的描述方式

各种表示方法之间可以相互转换

## ➤ 真值表

输入变量 $A \ B \ C \dots$	输出 $Y_1 \ Y_2 \ \dots$
遍历所有可能的输入变量 的取值组合	输出对应的取值

### ◆ 逻辑式

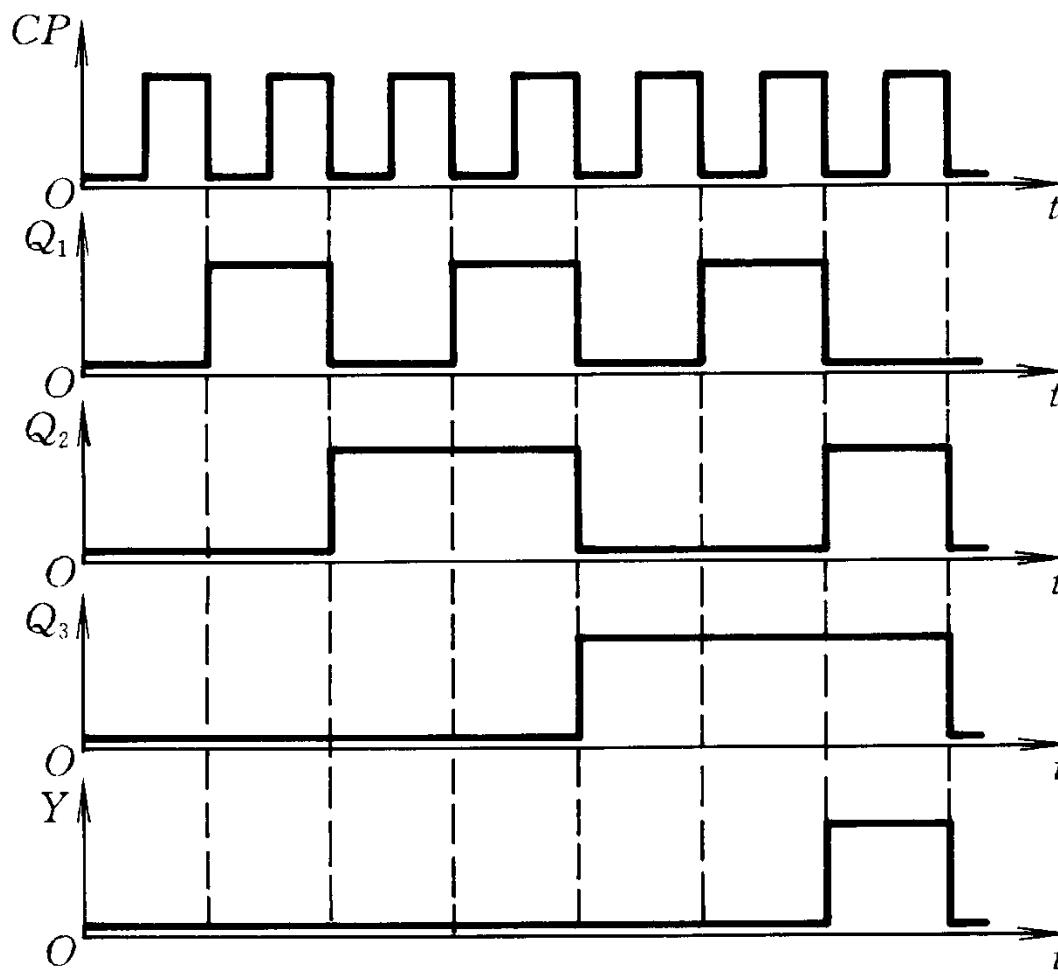
将输入/输出之间的逻辑关系用**与/或/非**的运算式表示就得  
到逻辑式。

### ◆ 逻辑图

用逻辑图形符号表示逻辑运算关系，与逻辑电路的实现相  
对应。

### ◆ 波形图

将输入变量所有取值可能与对应输出按时间顺序排列起来  
画成时间波形。



❖ 卡诺图

❖ EDA中的描述方式

**HDL (Hardware Description Language)**

**VHDL (Very High Speed Integrated Circuit ...)**

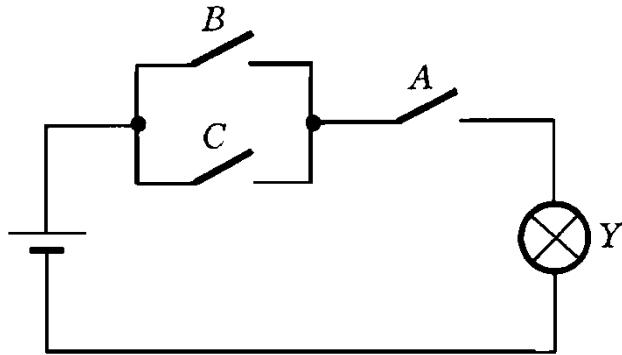
**Verilog HDL**

**EDIF**

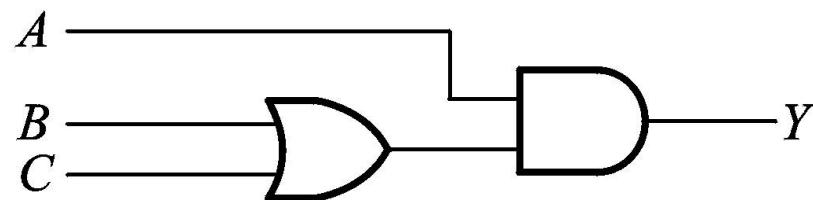
**DTIF**

◦ ◦ ◦

# 举例：举重裁判电路



$$Y = A \cdot (B + C)$$



A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

# 各种表现形式的相互转换:

◆ 真值表  $\leftrightarrow$  逻辑式

例：奇偶判别函数的真值表

- $A=0, B=1, C=1$  使  $A'BC=1$
- $A=1, B=0, C=1$  使  $AB'C=1$
- $A=1, B=1, C=0$  使  $ABC'=1$

这三种取值的任何一种都使  $Y=1$ ,  
所以  $Y= ?$

$A$	$B$	$C$	$Y$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

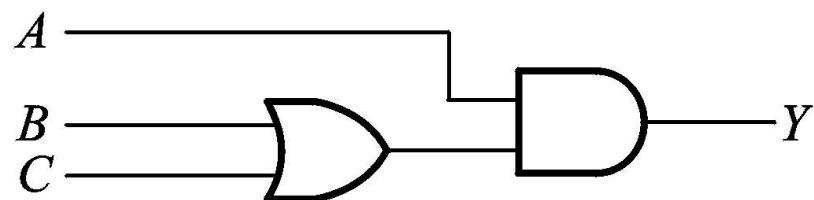
❖ 真值表  $\leftrightarrow$  逻辑式:

1. 找出真值表中使  $Y=1$  的输入变量取值组合。
  2. 每组输入变量取值对应一个乘积项，其中取值为1的写原变量，取值为0的写反变量。
  3. 将这些变量相加即得  $Y$ 。
- 
4. 把输入变量取值的所有组合逐个代入逻辑式中求出Y，列表

◆ 逻辑式  $\leftrightarrow$  逻辑图：

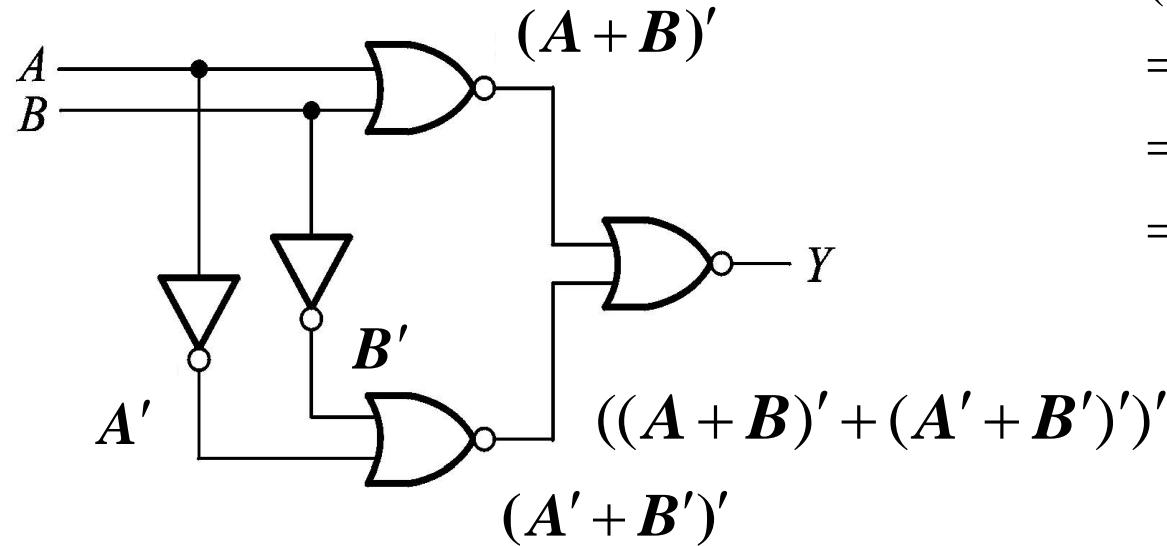
1. 用图形符号代替逻辑式中的逻辑运算符。

$$Y = A \cdot (B + C)$$

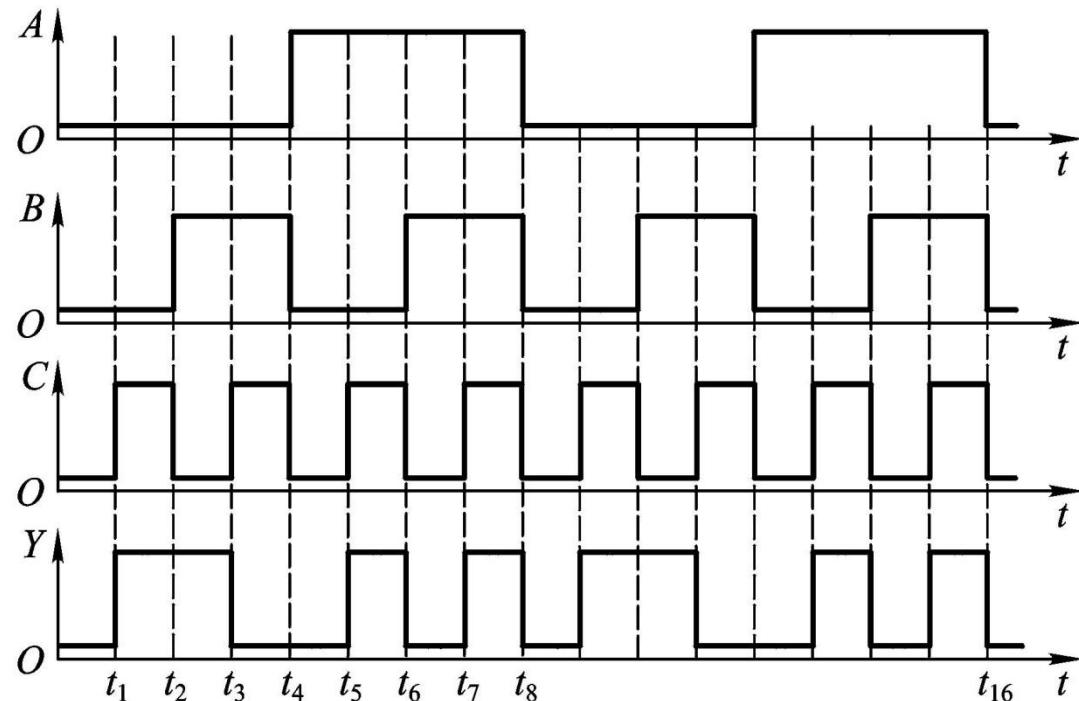


❖ 逻辑式  $\leftrightarrow$  逻辑图

2. 从输入到输出逐级写出每个图形符号对应的逻辑运算式。



$$\begin{aligned}
 & ((A + B)' + (A' + B')')' \\
 &= (A + B)(A' + B') \\
 &= AB' + A'B \\
 &= A \oplus B
 \end{aligned}$$

❖ 波形图  $\leftrightarrow$  真值表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

## 2.5.3 逻辑函数的两种标准形式

最小项之和

最大项之积

最小项  $m$  定义：

- ❖  $m$  是乘积项
- ❖ 包含  $n$  个因子
- ❖  $n$  个变量均以原变量或反变量的形式在  $m$  中出现一次



对于  $n$  变量函数  
有  $2^n$  个最小项

## 最小项举例：

### ❖ 两变量 $A, B$ 的最小项

$A'B'$ ,  $A'B$ ,  $AB'$ ,  $AB$  ( $2^2 = 4$ 个)

### ❖ 三变量 $A, B, C$ 的最小项

$A'B'C'$ ,  $A'B'C$ ,  $A'BC'$ ,  $A'BC$

$AB'C'$ ,  $AB'C$ ,  $ABC'$ ,  $ABC$  ( $2^3 = 8$ 个)

# 最小项的编号:

最小项	取值	对应	编号
	$A B C$	十进制数	
$A'B'C'$	0 0 0	0	$m_0$
$A'B'C$	0 0 1	1	$m_1$
$A'BC'$	0 1 0	2	$m_2$
$A'BC$	0 1 1	3	$m_3$
$AB'C'$	1 0 0	4	$m_4$
$AB'C$	1 0 1	5	$m_5$
$ABC'$	1 1 0	6	$m_6$
$ABC$	1 1 1	7	$m_7$

## 最小项的性质

- ❖ 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最小项的值为1。
- ❖ 全体最小项之和为1。
- ❖ 任何两个最小项之积为0。
- ❖ 两个相邻的最小项之和可以合并，消去一对因子，只留下公共因子。

-----相邻：仅一个变量不同的最小项

如

$$A'BC' \text{ 与 } A'BC$$

$$A'BC' + A'BC = A'B(C' + C) = A'B$$

逻辑函数最小项之和的形式：

利用公式  $A + A' = 1$   
可将任何一个函数化为  $\sum m_i$

❖ 例：  $Y(A, B, C) = ABC' + BC$

$$\begin{aligned} &= ABC' + BC(A + A') \\ &= ABC' + ABC + A'BC \\ &= \sum m(3, 6, 7) \end{aligned}$$

# 逻辑函数最小项之和的形式：

## 例：

$$\begin{aligned}
 Y(A,B,C,D) &= AB'C'D + BCD' + B'C \\
 &= AB'C'D + (A + A')BCD' + B'C(D + D') \\
 &= ..... + B'CD + B'CD' \\
 &= ..... + (A + A')B'CD + (A + A')B'CD'
 \end{aligned}$$

# 最大项M定义:

对于n变量函数  
 $2^n$ 个

- ❖ M是相加项;
- ❖ 包含n个因子。
- ❖ n个变量均以原变量或反变量的形式在M中出现一次。
  
- ❖ 如: 两变量A, B的最大项

$$A' + B', \ A' + B, \ A + B', \ A + B \quad (2^2 = 4\text{个})$$

## 最大项的编号:

最大项	取值	对应	编号
	$A \ B \ C$	十进制数	
$A' + B' + C'$	1 1 1	7	$M_7$
$A' + B' + C$	1 1 0	6	$M_6$
$A' + B + C'$	1 0 1	5	$M_5$
$A' + B + C$	1 0 0	4	$M_4$
$A + B' + C'$	0 1 1	3	$M_3$
$A + B' + C$	0 1 0	2	$M_2$
$A + B + C'$	0 0 1	1	$M_1$
$A + B + C$	0 0 0	0	$M_0$

## 最大项的性质

- ❖ 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最大项的值为**0**；
- ❖ 全体最大项之积为**0**；
- ❖ 任何两个最大项之和为**1**；
- ❖ 只有一个变量不同的最大项的乘积等于各相同变量之和。

逻辑函数最大项之和的形式：

利用公式  $AA' = 0$   
可将任何一个函数化为  $\prod M_i$

❖ 例：
$$\begin{aligned} Y(A, B, C) &= A'B + AC \\ &= (A'B + A)(A'B + C) \\ &= (A + B)(A' + C)(B + C) \\ &= (A + B + CC')(A' + BB' + C)(AA' + B + C) \\ &= (A + B + C)(A + B + C')(A' + B + C)(A' + B' + C) \\ &= \prod M(0,1,4,6) \end{aligned}$$

# 最小项与最大项间的变换：

$$Y = \sum m_i$$



$$Y' = \sum_{k \neq i} m_k$$



$$Y' = \left( \sum_{k \neq i} m_k \right)'$$



$$Y' = \prod_{k \neq i} {m_k}' = \prod_{k \neq i} M_k$$

举例：

$$Y = ABC + A'BC + AB'C = m_7 + m_3 + m_5 = \sum m(3,5,7)$$



$$Y' = \sum m(0,1,2,4,6)$$



$$Y = (\sum m(0,1,2,4,6))'$$



$$Y = \prod m(0,1,2,4,6)' = \prod M(0,1,2,4,6)$$

## 2.6 逻辑函数的化简法

- ❖ 逻辑函数的最简形式  
“最简与或”

-----包含的乘积项已经最少，每个乘积项的因子也最少，称为最简的与-或逻辑式。

$$Y_1 = ABC + B'C + ACD$$

$$Y_2 = AC + B'C$$

## 2.6.1公式化简法

- 反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子。

例：

$$\begin{aligned}Y &= AC + B'C + BD' + CD' + A(B + C') + A'BCD' + AB'DE \\&= AC + B'C + BD' + CD' + A(B'C)' + AB'DE \\&= AC + B'C + BD' + CD' + A + AB'DE \\&= A + B'C + BD' + CD' \\&= A + B'C + BD'\end{aligned}$$

 **常用方法**

- 并项法

$$AB + AB' = A$$

- 吸收法

$$A + AB = A$$

- 消项法

$$AB + A'C + BC = AB + A'C$$

- 消因子法

$$A + A'B = A + B$$

- 配项法

$$A + A = A$$

$$A + A' = 1$$

 **并项法**  $AB + AB' = A$ 

$$Y_1 = A(B'CD)' + AB'CD = A((B'CD)' + B'CD)$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= AB' + ACD + A'B' + A'CD \\ &= A(B' + CD) + A'(B' + CD) = B' + CD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= A'BC' + AC' + B'C' = A'BC' + (A + B')C' \\ &= (A'B)C' + (A'B)'C' = C' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_4 &= BC'D + BCD' + BC'D' + BCD \\ &= B(C'D + CD') + B(C'D' + CD) \\ &= B(C \oplus D) + B(C \oplus D)' = B \end{aligned}$$

 **吸收法**  $A + AB = A$ 

$$Y_1 = ((A'B)' + C)ABD + AD = AD$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= AB + ABC' + ABD + AB(C' + D') \\ &= AB + AB(C' + D + (C' + D')) = AB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= A + (A'(BC)')'(A' + (B'C' + D)') + BC \\ &= (A + BC) + (A + BC)(A' + (B'C' + D)') = A + BC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_4 &= A'B'C + (A(C + D))' + BCD \\ &= A'B'C + A' + C'D' + BCD = A' + C'D' + BCD \end{aligned}$$

 **消项法**

$$AB + A'C + BC = AB + A'C$$

$$AB + A'C + BCD = AB + A'C$$

$$Y_1 = AC + AB' + (B + C)' = AC + AB' + B'C' = AC + B'C'$$

$$Y_2 = AB'CD' + (AB')'E + A'CD'E$$

$$= (AB')CD' + (AB')'E + A'CD'E$$

$$= AB'CD' + (AB')'E$$

$$Y_3 = A'B'C + ABC + A'BD' + AB'D' + A'BCD' + BCD'E'$$

$$= (A'B' + AB)C + (A'B + AB')D' + BCD'(A' + E')$$

$$= (A \oplus B)'C + (A \oplus B)D' + BCD'(A' + E')$$

$$= (A \oplus B)'C + (A \oplus B)D'$$

 消因子法  $A + A'B = A + B$ 

$$Y_1 = A' + ABC = A' + BC$$

$$Y_2 = AB' + B + A'B = A + B + A'B = A + B$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= AC + A'D + C'D = AC + (A' + C')D \\ &= AC + (AC)'D = AC + D \end{aligned}$$

 配项法

$$A + A = A$$

$$A + A' = 1$$

$$\begin{aligned}Y_1 &= A'BC' + A'BC + ABC \\&= (A'BC' + A'BC) + (A'BC + ABC) \\&= A'B + BC\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_2 &= AB' + A'B + BC' + B'C \\&= AB' + A'B(C + C') + BC' + (A + A')B'C \\&= (AB' + AB'C) + (BC' + A'BC') + (A'BC + A'B'C) \\&= AB' + BC' + A'C\end{aligned}$$

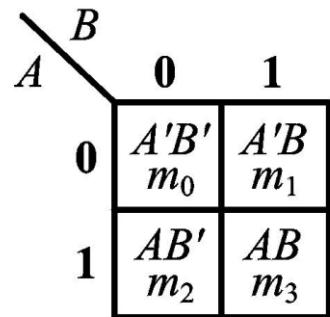
## 2.6.2 卡诺图化简法

### 逻辑函数的卡诺图表示法

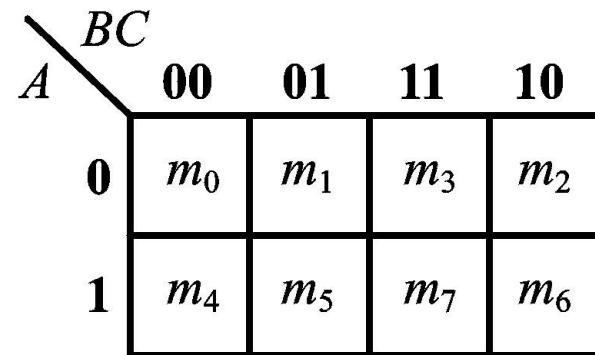
- ❖ 实质：将逻辑函数的最小项之和以图形的方式表示出来
- ❖ 以 $2^n$ 个小方块分别代表  $n$  变量的所有最小项，并将它们排列成矩阵，而且使**几何位置相邻**的两个最小项在**逻辑上也是相邻的**（只有一个变量不同），就得到表示 $n$ 变量全部最小项的卡诺图。

# 表示最小项的卡诺图

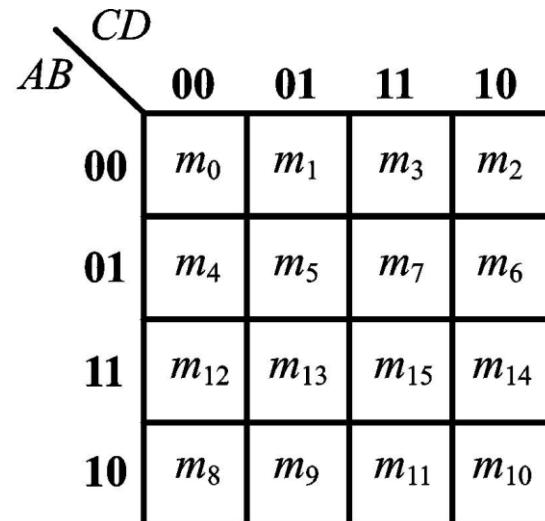
## ◆ 二变量卡诺图



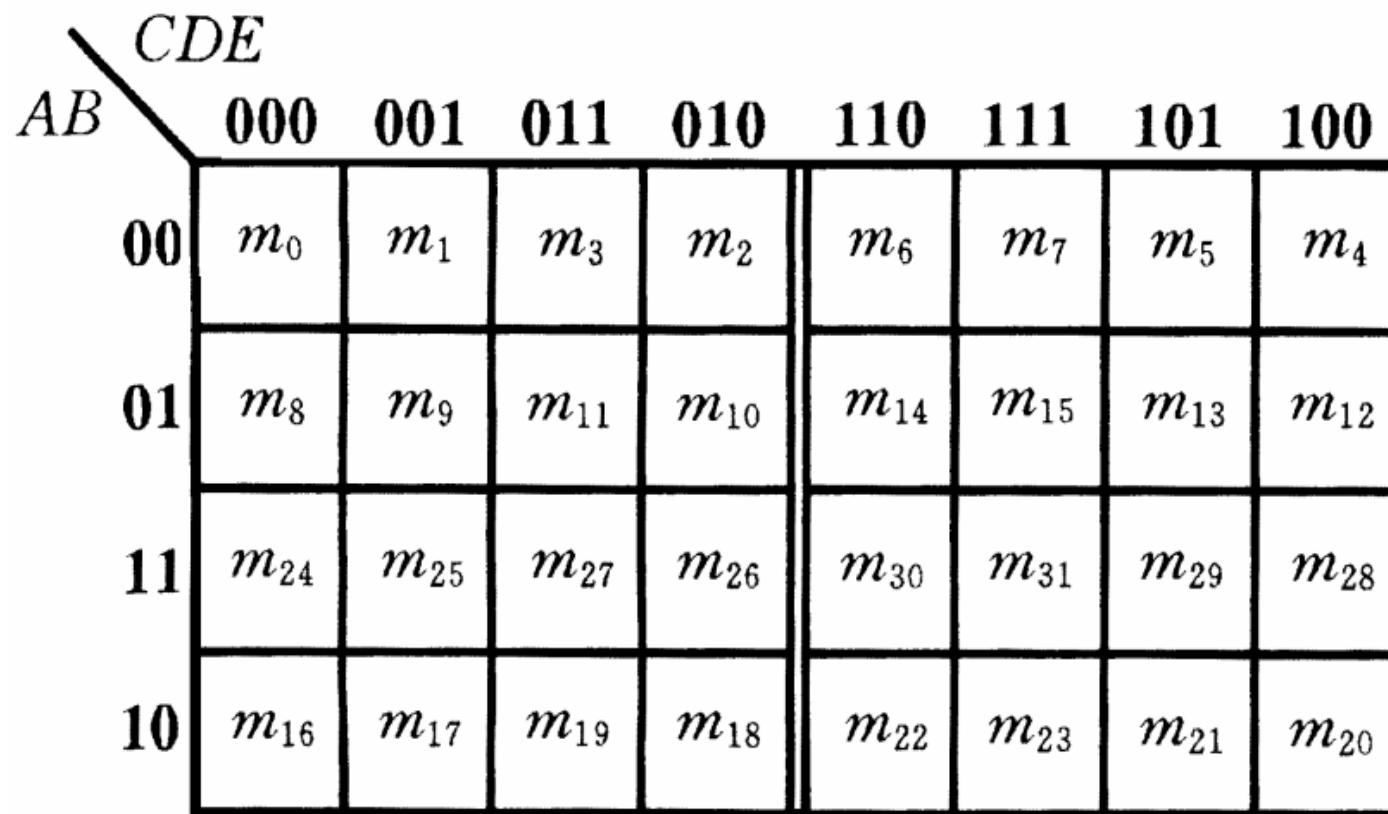
## 三变量的卡诺图



## ◆ 四变量的卡诺图



## ❖ 五变量的卡诺图



# 用卡诺图表示逻辑函数

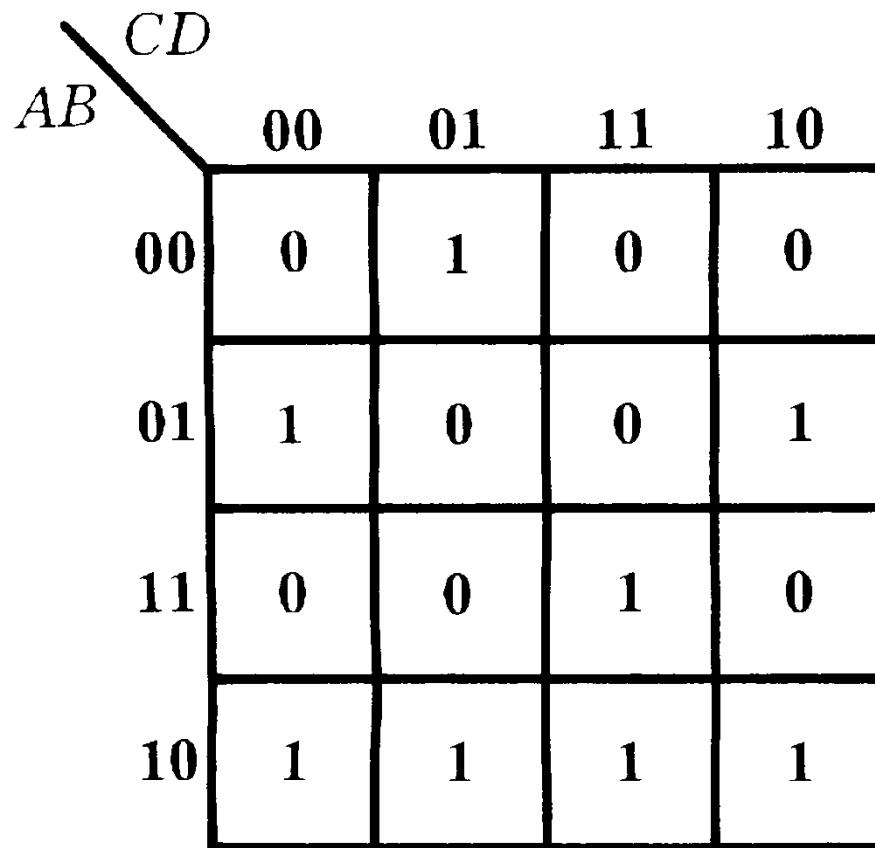
1. 将函数表示为最小项之和的形式  $\sum m_i$  。
2. 在卡诺图上与这些最小项对应的位置上添入1，其余地方添0。

# 用卡诺图表示逻辑函数

例：

$$\begin{aligned}Y(A,B,C,D) &= A'B'C'D + A'BD' + ACD + AB' \\&= A'B'C'D + (C + C')A'BD' + AB'[(CD)' + C'D + CD' + CD] \\&= \sum m(1,4,6,8,9,10,11,15)\end{aligned}$$

# 用卡诺图表示逻辑函数



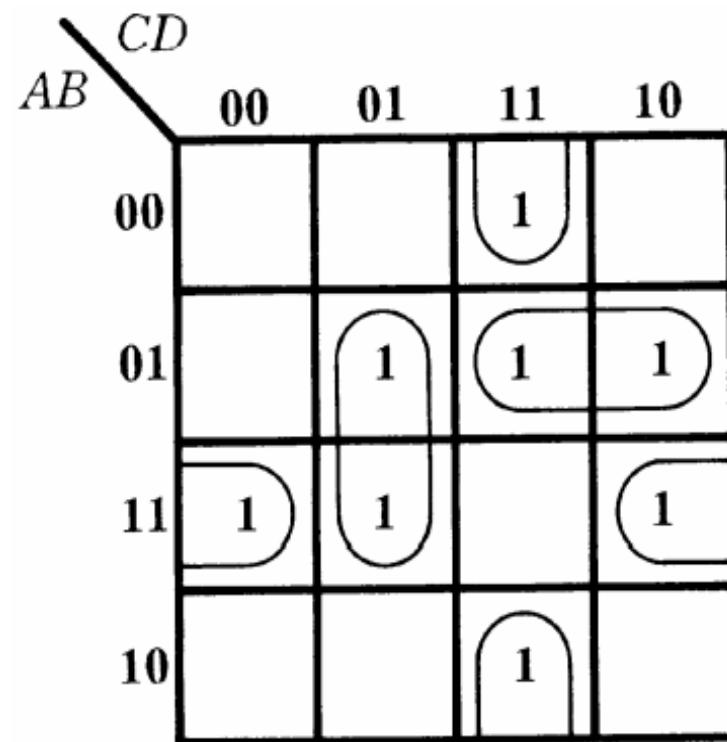
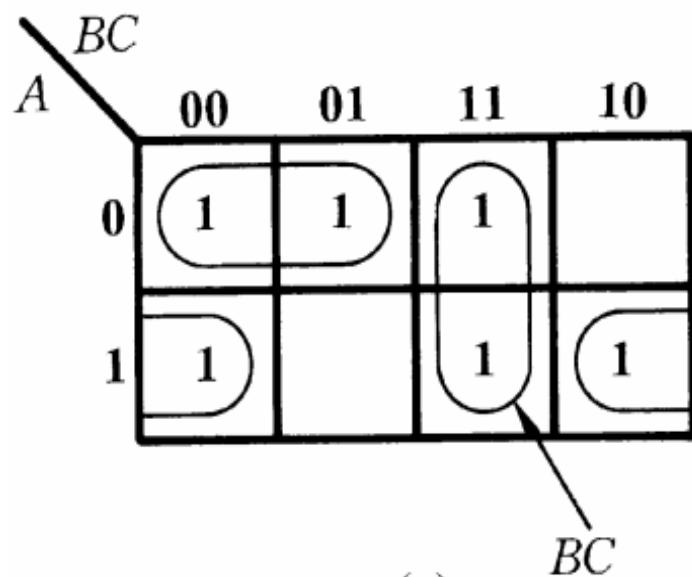
# 用卡诺图化简函数

- ❖ 依据：具有相邻性的最小项可合并，消去不同因子。
- ❖ 在卡诺图中，最小项的相邻性可以从图形中直观地反映出来。

## ❖ 合并最小项的原则：

- 两个相邻最小项可合并为一项，消去一对因子
- 四个排成矩形的相邻最小项可合并为一项，消去两对因子
- 八个相邻最小项可合并为一项，消去三对因子

两个相邻最小项可合并为一项，消去一对因子



# 用卡诺图化简函数

## ◆ 化简步骤：

-----用卡诺图表示逻辑函数

-----找出可合并的最小项

-----化简后的乘积项相加

(项数最少，每项因子最少)

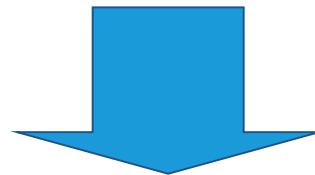
# 卡诺图化简的原则

- ❖ 化简后的乘积项应包含函数式的所有最小项，即覆盖图中所有的1。
- ❖ 乘积项的数目最少，即圈成的矩形最少。
- ❖ 每个乘积项因子最少，即圈成的矩形最大。

例：

$$Y(A, B, C) = AC' + A'C + B'C + BC'$$

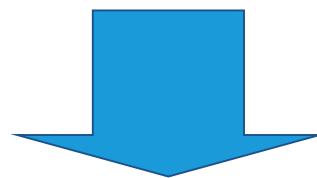
		BC	00	01	11	10
		0	0	1	1	1
		1	1	1	0	1
A	BC	00	01	11	10	
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1



$$AB' + A'C + BC'$$

例:  $Y(A, B, C) = AC' + A'C + B'C + BC'$

		BC	00	01	11	10
		0	0	1	1	1
A	0	0	1	1	1	1
	1	1	1	0	1	1

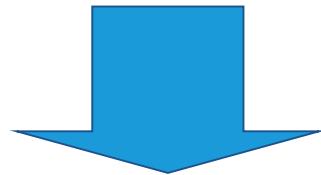


$$AC' + A'B + B'C$$

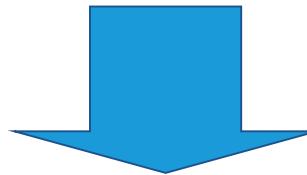
例:  $Y(A, B, C) = AC' + A'C + B'C + BC'$

		BC	
		00	01
A		11	10
0	0	0	(1)
1	1	(1)	0

		BC	
		00	01
A		11	10
0	0	0	(1)
1	1	(1)	0



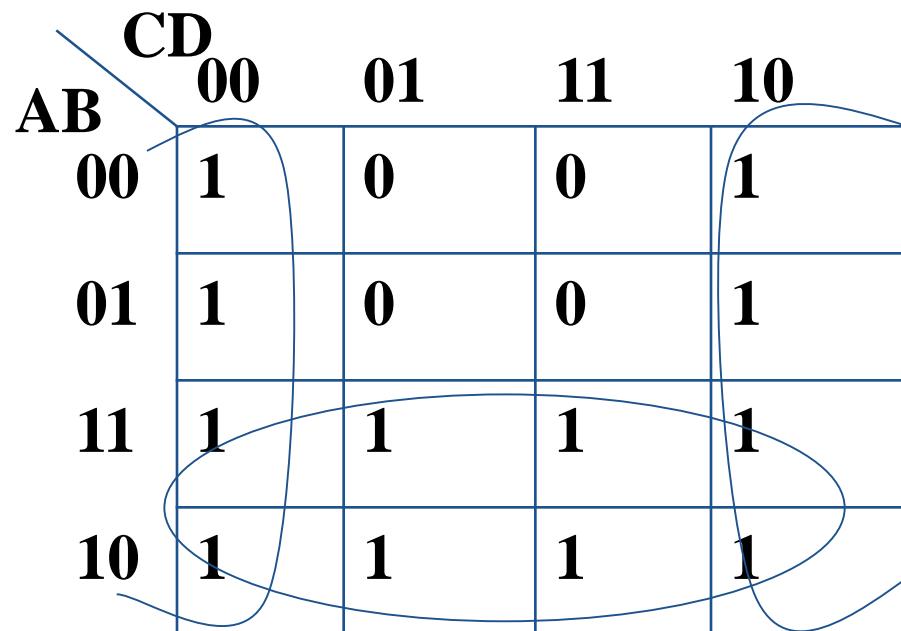
$$AB' + A'C + BC'$$



$$AC' + A'B + B'C$$

化简结果不唯一

例:  $Y = ABC + ABD + AC'D + C'D' + AB'C + A'CD'$



$$A + D'$$

## 2.7 具有关项的逻辑函数及其化简

### 2.7.1 约束项、任意项和逻辑函数式中的无关项

- ❖ 约束项
- ❖ 任意项



在逻辑函数中，对输入变量取值的限制，在这些取值下最小项为0，这些最小项被称为函数的约束项

在输入变量某些取值下，函数值为1或为0不影响逻辑电路的功能，在这些取值下为1的最小项称为任意项

- ❖ 逻辑函数中的无关项：约束项和任意项可以写入函数式，也可不包含在函数式中，因此统称为无关项。

## 2.7.2 无关项在化简逻辑函数中的应用

- ❖ 合理地利用无关项，可得更简单的化简结果。
- ❖ 加入（或去掉）无关项，应使化简后的项数最少，每项因子最少 .....

从卡诺图上直观地看，加入无关项的目的是为矩形圈最大，矩形组合数最少。

例:  $Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C' \cdot D'$

给定约束条件为:

$$A'B'CD + A'BC'D + ABC' \cdot D' + AB' \cdot C'D + ABCD + ABCD' + AB'CD' = 0$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00		1		
	01			1	
	11				
	10	1			

$$\text{例: } Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C' \cdot D'$$

给定约束条件为:

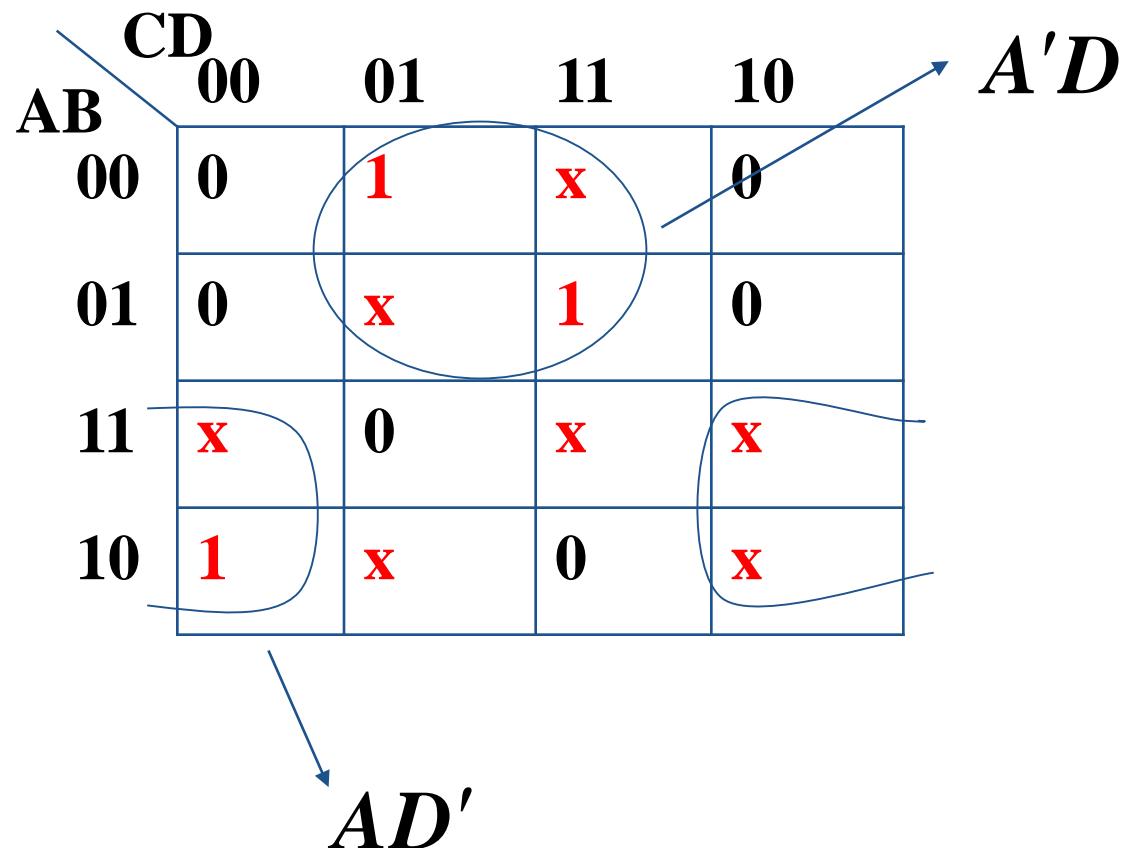
$$A'B'CD + A'BC'D + ABC' \cdot D' + AB' \cdot C'D + ABCD + ABCD' + AB'C'D' = 0$$

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
AB	00	0	1	x	0	
	01	0	x	1		0
	11	x	0	x		x
	10	1	x	0		x

$$\text{例: } Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C' \cdot D'$$

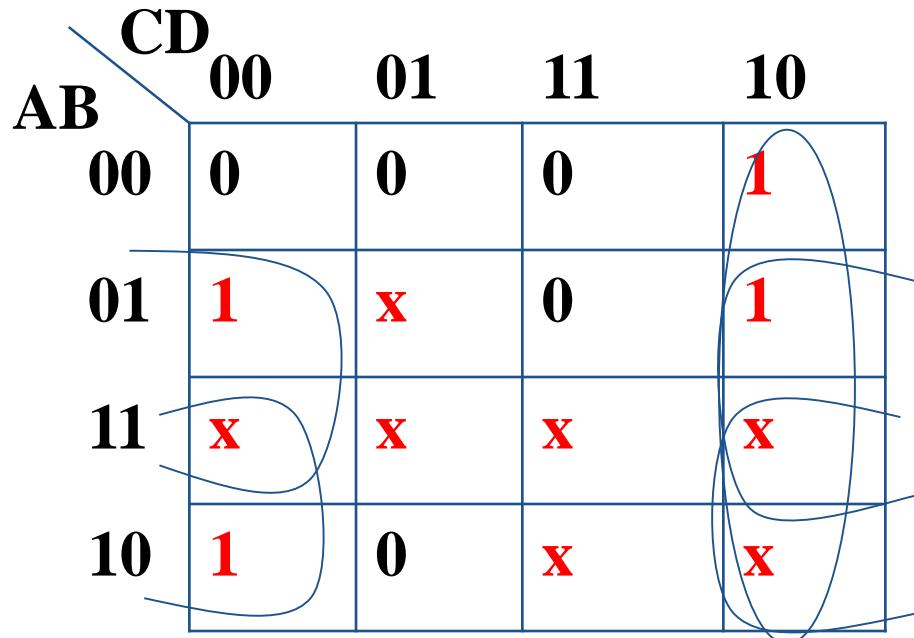
给定约束条件为:

$$A'B'CD + A'BC'D + ABC' \cdot D' + AB' \cdot C'D + ABCD + ABCD' + AB'CD' = 0$$



$$\text{例: } Y(A, B, C, D) = \sum m(2, 4, 6, 8)$$

$$\text{约束条件: } m_5 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15} = 0$$



$$Y = AD' + BD' + CD'$$

## 2.8 多输出逻辑函数的化简

**利用共用项进行化简：**

虽然每个函数本身可能不是最简与或形式，但每个共用项可以同时供两个输出函数使用，从而减少所需门电路的数目。

**例如：**

$$Y_1(A, B, C, D) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

$$Y_2(A, B, C, D) = \Sigma(1, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14)$$

$$Y_3(A, B, C, D) = \Sigma(3, 7, 10, 11)$$

化简后：

$$Y_1(A, B, C, D) = B + AC + A'C'D$$

$$Y_2(A, B, C, D) = A'D + BD'$$

$$Y_3(A, B, C, D) = A'CD + AB'C$$

	<i>AB</i>	<i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	1	0	0		
01	1	1	1	1		
11	1	1	1	1		
10	0	0	1	1		

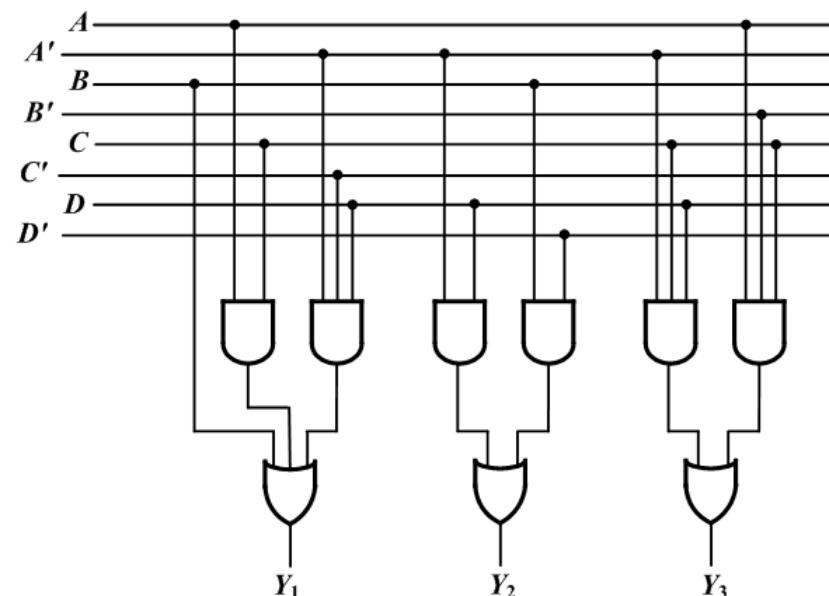
$$Y_1 = B + AC + A'C'D$$

	<i>AB</i>	<i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0		
01	1	1	1	1		
11	1	0	0	0	1	
10	0	0	0	0	0	

$$Y_2 = A'D + BD'$$

	<i>AB</i>	<i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	0	1	0		
01	0	0	1	0		
11	0	0	0	0	0	0
10	0	0	1	1		

$$Y_3 = A'CD + AB'C$$

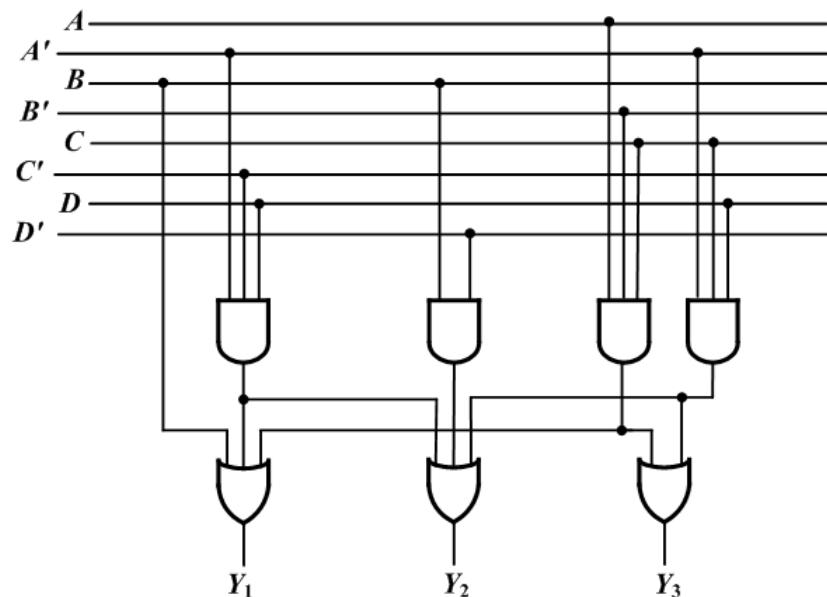


# 另一种化简结果：

$$Y_1(A, B, C, D) = B + \underline{AB'C} + \underline{A'CD}$$

$$Y_2(A, B, C, D) = \underline{A'C'D} + \underline{A'CD} + BD'$$

$$Y_3(A, B, C, D) = \underline{A'CD} + \underline{AB'C}$$



	CD			
AB	00	01	11	10
00	0	(1)	0	0
01	1	(1)	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	(1)	(1)

$$Y_1 = B + AB' + A'CD$$

	CD			
AB	00	01	11	10
00	0	(1)	(1)	0
01	1	(1)	(1)	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

$$Y_2 = A'C'D + A'CD + BD'$$

	CD			
AB	00	01	11	10
00	0	0	(1)	0
01	0	0	(1)	0
11	0	0	0	0
10	0	0	(1)	(1)

$$Y_3 = A'CD + AB'C$$

## 2.9 逻辑函数形式的变换

表达式种类：

$$Y = AB + BC + AC$$

$$= ((AB)'(BC)'(AC)')'$$

$$= ((A' + B')(B' + C')(A' + C'))'$$

$$= (A' + B')' + (B' + C')' + (A' + C')'$$

$$= (A'B' + B'C' + A'C)'$$

$$= (A'B')'(B'C')'(A'C)'$$

$$= (A+B)(B+C)(A+C)$$

$$= ((A+B)' + (B+C)' + (A+C)')'$$

与或式（积之和）

与非—与非式

或与非式

或非—或式

与或非式

与非—与式

或与式（和之积）

或非—或非式

与或式  $Y = AB + BC + AC$

路径1

→ 与非—与非式

$$Y = ((AB + BC + AC)')' \rightarrow Y = ((AB)'(BC)'(AC)')'$$

→ 或与非式

$$\rightarrow Y = ((A' + B')(B' + C')(A' + C'))'$$

→ 或非-或式

$$\rightarrow Y = (A' + B')' + (B' + C')' + (A' + C')'$$

与或式  $Y = AB + BC + AC$

路径2

→ 与或非式

$$Y = (Y')' = ((\sum m(3, 5, 6, 7))')' = (\sum m(0, 1, 2, 4))'$$

→  $Y = (A'B' + B'C' + A'C')'$

→ 与非-与式

→  $Y = (A'B')'(B'C')'(A'C')'$

与或式  $Y = AB + BC + AC$

路径3

→ 与或非式

$$Y = (Y')' = ((\sum m(3, 5, 6, 7))')' = (\sum m(0, 1, 2, 4))'$$

$$\rightarrow Y = (A'B' + B'C' + A'C')'$$

→ 或非-或非式 (反演律)

$$\rightarrow Y = ((A + B)' + (B + C)' + (A + C)')'$$

→ 或与式

$$\rightarrow Y = (A + B)(B + C)(A + C)$$

## 综合题：

已知函数  $Y_1(ABCD) = A'C'D' + BC'D' + ACD + BCD'$

$$Y_2(ABCD) = \sum m(2,5,7,10,12,14) + \sum d(0,8)$$

1. 写出函数  $Y_1$  的最简与或式，最简与或非式和最简或与式。
2. 写出函数  $Y_2$  的最简与或式，最简与或非式和最简或与式
3. 求复合函数  $Y_1 \cdot Y_2$ ,  $Y_1 \oplus Y_2$ 。结果写成最小项之和  $\sum m$  的形式。

问题1: 
$$\begin{aligned} Y_1 &= ACD + A'C'D' + BD' \\ &= (AB'D' + C'D + A'D + B'CD')' \\ &= (A' + B + D)(C + D')(A + D')(B + C' + D) \end{aligned}$$

问题2: 
$$\begin{aligned} Y_2 &= ACD' + B'D' + A'BD \\ &= (AD + A'BD' + B'D')' \\ &= (A' + D')(A + B' + D)(B + D') \end{aligned}$$

问题3: 
$$\begin{aligned} Y_1 \cdot Y_2 &= \sum_m (12, 14) + \sum_d (0) \\ Y_1 \oplus Y_2 &= \sum_m (2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 15) + \sum_d (0, 8) \end{aligned}$$