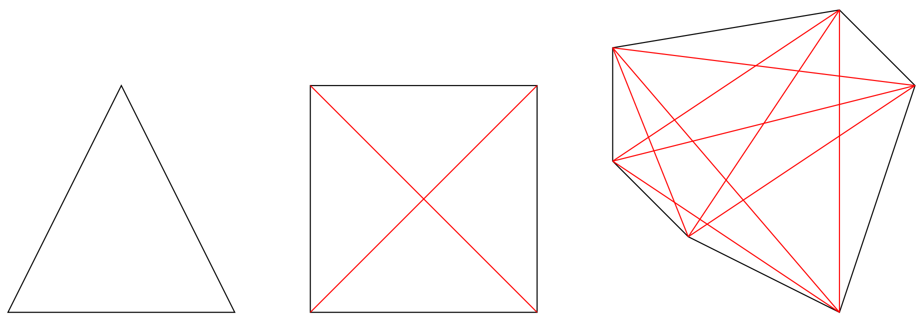
I. 기하

1. 다각형과 각

1.1. 대각선의 개수

대각선의 수는 다음과 같이 계산된다:

$$E = \frac{n(n-3)}{2}$$



$n = 3,\ E = 0$ $n = 4,\ E = 2$ $n = 6,\ E = 9$

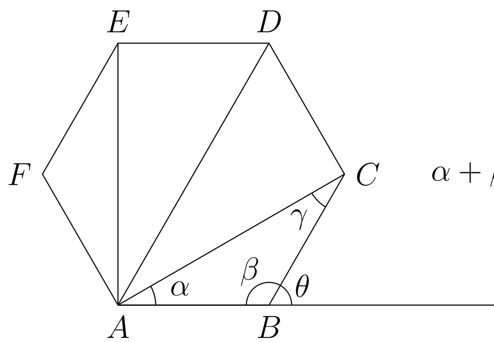
여기서 n은 다각형의 꼭짓점의 개수, $(n-3)$은 한 꼭짓점에서 이을 수 있는 대각선의 개수이다. 마지막으로 한 대각선은 두 점을 공유하므로, 2로 나누어준다.

1.2. 내각과 외각

n각형의 내각의 합(I)은, 하나의 꼭짓점에서 나오는 $n-2$개의 삼각형의 내각의 합과 같으므로

$$I = (n-2) \times 180^\circ$$

으로 나타낼 수 있다. 한편



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \beta + \theta = 180^\circ$$

한 꼭짓점에서의 내각과 외각의 합은 180°이다. 전체 n각형에 대해서 내각과 외각의 합은 $n \times 180^\circ$이고, 내각의 총합이 $(n-2) \times 180^\circ$이므로 외각의 총합(E)은

$$E = n \times 180^\circ - (n-2) \times 180^\circ = 360^\circ$$

으로 계산된다.

예를 들어, 육각형의 경우 내각의 합은 $I = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$, 외각의 합은 $E = 360^\circ$임을 알 수 있다.

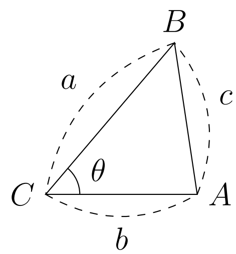
2. 삼각형

2.1. 피타고라스 정리과 삼각형

피타고라스 정리(Pythagorean Theorem)이란 직각삼각형의 빗변 길이의 제곱이, 나머지 변들의 제곱의 합과 같다는 정리이다. 수식으로 표현하면 다음과 같다.

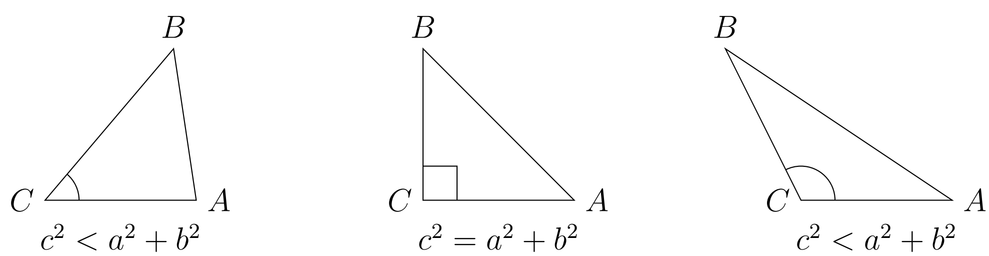
$$c^2 = a^2 + b^2$$

이 피타고라스 정리를 모든 삼각형에 대하여 일반화된 것이 코사인 법칙(Cosine Law)이라 할 수 있다. 코사인 법칙은 삼각형의 한 점에 대하여, 그에 대한 대변과 점 주변 변들에 대해 다음과 같은 성질이 나타남을 의미한다.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

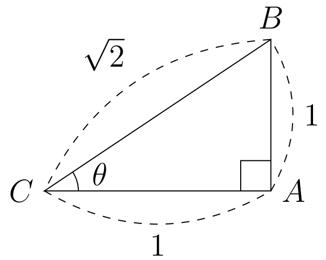
이를 통해, 예각 삼각형과 직각 삼각형, 그리고 둔각 삼각형을 나누는 판별 방법을 알 수 있다.



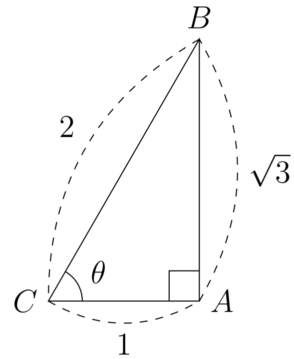
이때, $c > a, b$ 이어야 한다.

2.2. 삼각형의 특수비

아래에 제시된 직각삼각형의 특수비는 무조건 알아두도록 하자.

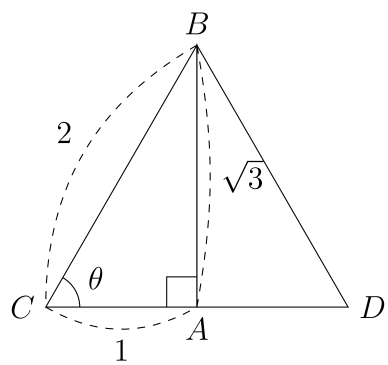


$\theta = 45^\circ$



$\theta = 60^\circ$

특히 $\theta = 60^\circ$인 경우, 정삼각형의 절반에 해당한다는 사실도 잊지 말자. 정삼각형을 반대로 쪼개어 길이비를 파악할 수 있어야 한다.

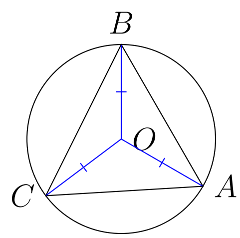


$\theta = 60^\circ$

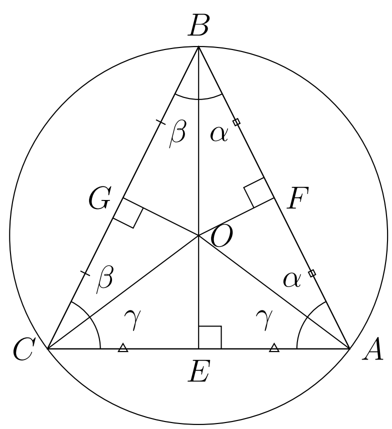
2.3. 삼각형의 외심

삼각형과 원은 수능 수학에서 항상 나오는 주제이다. 먼저 삼각형의 오심(五心) 중에서 가장 출제 빈도가 높은 외심과 내심에 대해 알아보자.

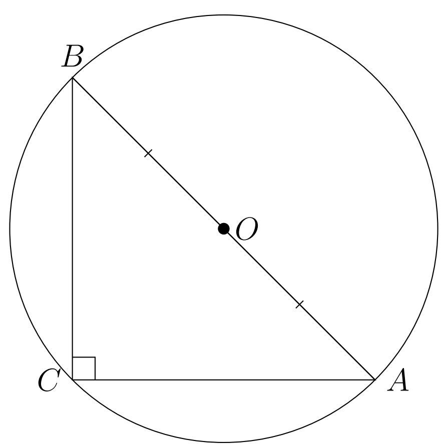
먼저 외심의 정의는 삼각형의 외접원의 중심으로, 삼각형의 꼭짓점에서 같은 거리에 존재하는 점을 의미한다.



외심에서 삼각형의 꼭짓점으로 뻗어나온 선분들은 모두 길이가 같으므로, $\triangle OCA$, $\triangle OAB$, $\triangle OAB$는 모두 이등변삼각형이다. 이등변삼각형, 예를 들어 그림 상의 $\triangle OCA$에 대해 O에서 대변에 내린 선은 수직 이등분선이므로, 다음 그림이 성립한다.

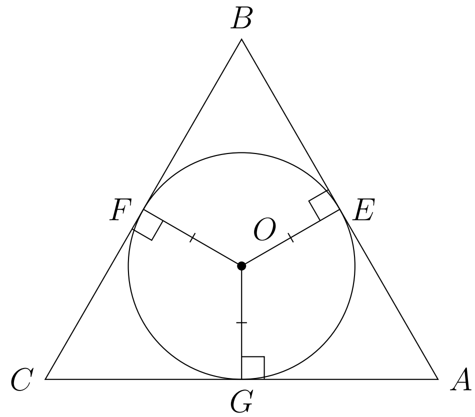


추가적으로, 직각삼각형의 외심은 대변의 중점임을 알 수 있다.

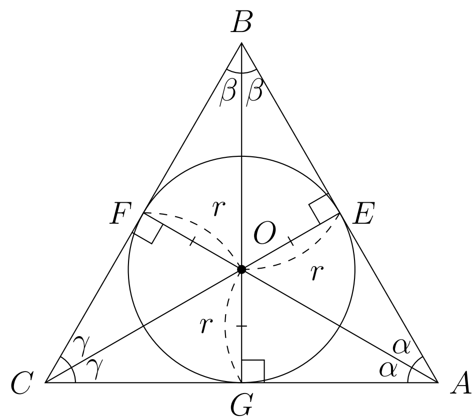


2.4. 삼각형의 내심

내심은 삼각형의 내접원의 중심을 의미한다. 삼각형의 세 변과 원이 접하고 있기 때문에, 원과 삼각형의 세 변의 접점들은 원에서 세 변 각각에 내린 수선의 발과 같다.



원 밖의 한 점에서 원에 접하는 두 선을 이을 수 있다. 그리하면 원과 접선의 관계에 의해 $\overline{CO}$는 $\angle FCG$를 이등분하므로 다음과 같은 그림이 성립함을 알 수 있다.



이때, 삼각형의 넓이는 다음과 같이 계산할 수 있다.

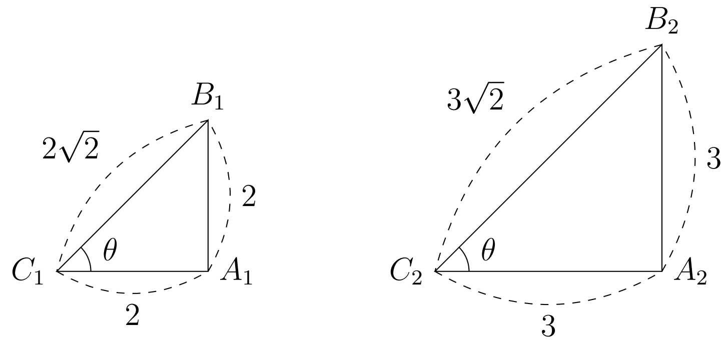
$$S = \triangle OCA + \triangle OAB + \triangle OBC = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

2.5. 닮음

도형의 닮음은, 두 개의 도형이 주어졌을 때, 하나를 일정 비율로 확대 혹은 축소 시 다른 하나와 합동이 될 수 있음을 의미한다. 기호로는 '$\sim$'로 표기한다. 이 닮음에는 세 가지 경우가 존재한다.

1. SSS닮음

   세 변의 길이비가 모두 같은 경우이다.

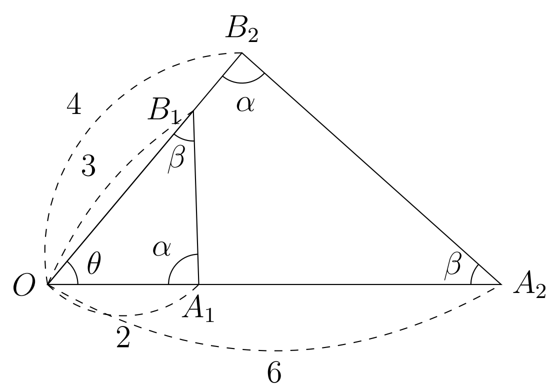


   $\overline{C_1A_1} : \overline{C_2A_2} = \overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2} = 2 : 3$이므로

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$$

2. SAS닮음

   두 변의 길이비가 같고, 그 사잇각이 같은 경우이다.



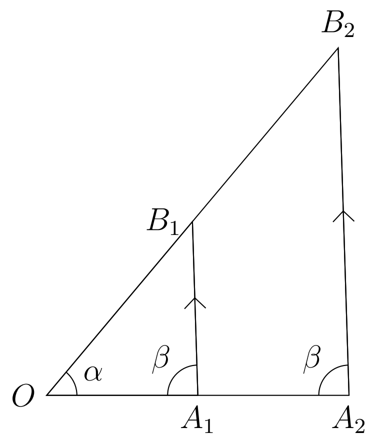
$$\overline{OA_1} : \overline{OB_2} = \overline{OB_1} : \overline{OA_2} = 1 : 2 \text{ 이고 } \alpha\text{를 공유하므로}$$

$$\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2$$

3. AA닮음

   두 각이 같은 경우이다.

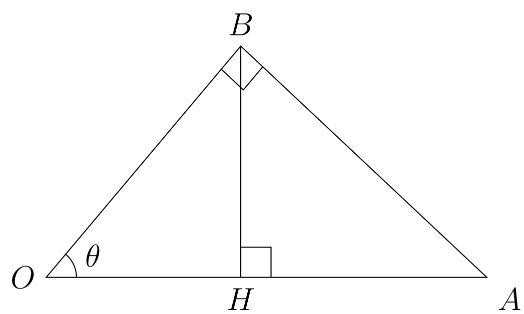
   특히 AA닮음은 평행선과 연관성이 깊어, 문제에 다음과 같은 형태로 나오는 경우도 많다.



   여기서 α와 β를, 두 삼각형 모두 가지고 있으므로

$$\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2$$

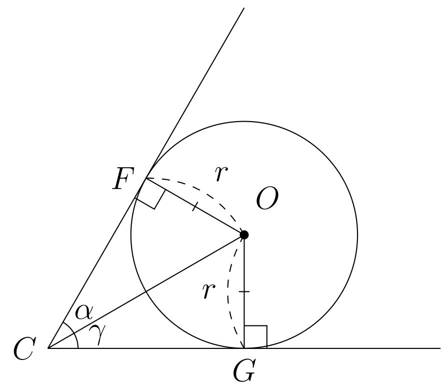
닮음비를 이용하여 두 삼각형 간 모르는 각이나 길이에 대한 관계를 알아낼 수 있다.
많이 등장하는 문제로, 직각삼각형에서 대변에 수선의 발을 내린 형태로 출제된다.
해당 도형에서 각도 관계나 길이 관계를, 닮음비를 이용하여 구할 수 있다.



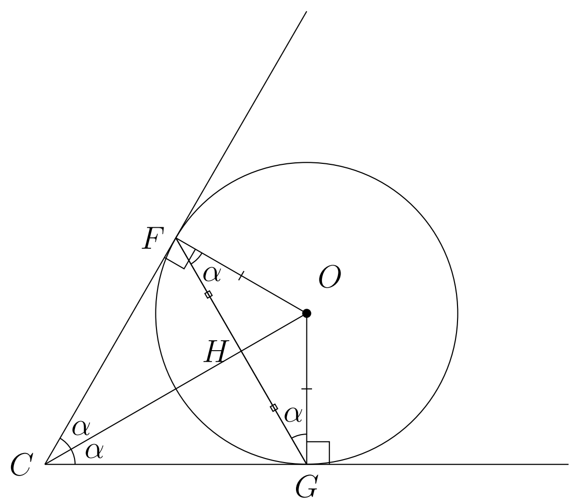
3. 원

3.1. 원과 접선

원 밖의 한 점에서 접선을 이으면



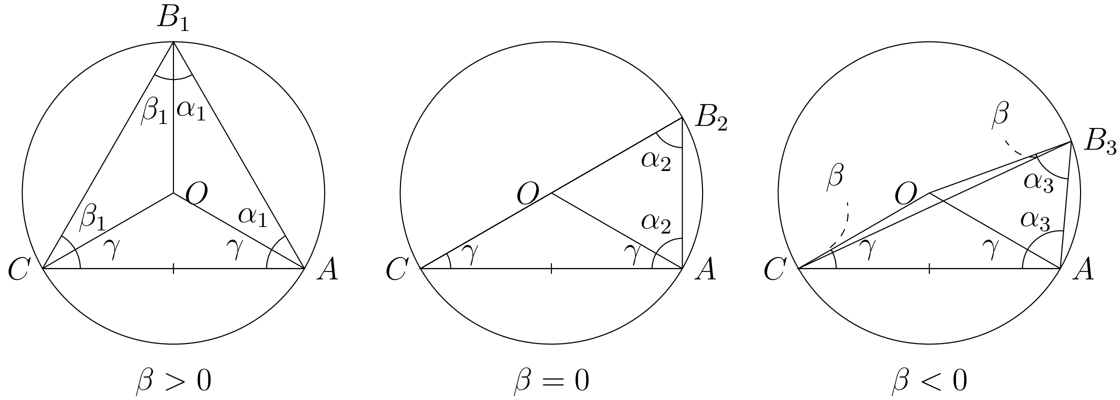
$\triangle CGO$와 $\triangle CFO$는 모두 직각을 가지고 있고 $\overline{CO}$를 공유, $\overline{OG} = \overline{OF}$이므로 SAS(혹은 RHS)합동이다($\therefore \alpha = \gamma$) 또한 F와 G를 이으면



$\triangle GOH$와 $\triangle FOH$는 SAS합동임을 알 수 있다.

2.2. 원주각과 중심각

외심의 성질을 이용하여 원주각, 중심각에 대해 정리해보자. 원 위에서 한 현($\overline{CA}$)과 그에 대한 한 호를 가정하면, 원의 중심과 현이 만드는 삼각형 $\triangle OCA$는 점 $B_i (i = 1, 2, 3)$가 어디에 위치하는가에 상관없이 존재한다.



위 그림은 각각 예각삼각형, 직각삼각형, 그리고 둔각삼각형이다. 여기서 두 가지 식를 얻을 수 있다. $\triangle COA$ 에서 삼각형의 내각의 합이 $180°$이므로

$$\angle COA + 2\gamma = \pi \quad \cdots (1)$$

이다. 또한 삼각형 CAB_i 에 대하여 내각의 합이 $180°$이므로

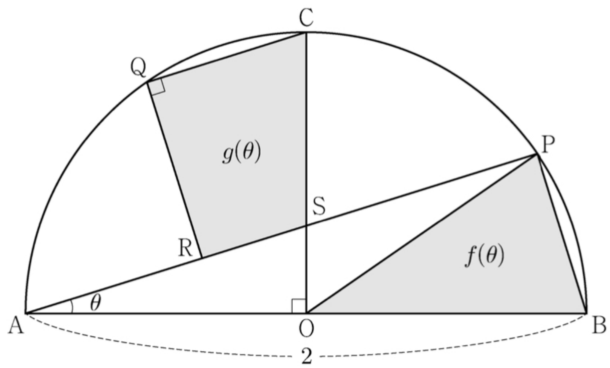
$$2(\alpha_i + \beta_i + \gamma) = \pi \quad \cdots (2)$$

이다. 두 식을 연립하면

$$\angle COA = 2(\alpha_i + \beta_i) = 2 \times \angle CB_iA$$

임을 알 수 있다. 원 위에서 한 현을 공유하는 어떤 삼각형이든, 그의 대각(원주각)은 중심각의 $\frac{1}{2}$이라는 것이다.

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB} = \overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB = \theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

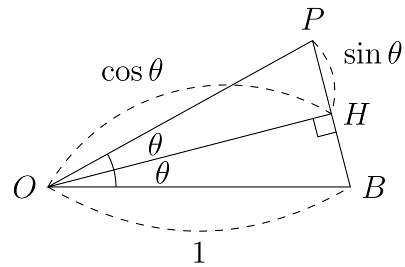
다음 문제는 **2022년 수능 미적분 28번** 이다. 이 문제를 시작하고 $f(\theta)$를 구하는 데에 있어 원주각이 필요하다. $f(\theta)$를 구하는 데에 있어 다양한 접근법들이 존재한다.

첫 번째로, $\triangle OBP$와 같이 원의 중심의 대변이 원의 현인 삼각형의 경우, 항상 이등변삼각형($\because \overline{OB} = \overline{OP} = r$)이다. 또한 원주각과 중심각의 관계에 의해 $\angle BOP$=2θ($\because \angle BAP = \theta$)이므로, 삼각형 넓이 공식에 의해

$$f(\theta) = \frac{1}{2}ab\sin\theta = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 2\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta \quad \cdots (1)$$

로 계산 가능하다(마지막 $\frac{1}{2}\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta$은 삼각함수의 덧셈정리로, 미적분 내용이다.)

둘째, $\triangle OBP$가 이등변 삼각형임을 이용하여 $\overline{BP}$를 수직이등분하는 수선의 발 H를 내리면 삼각비에 의해 $\overline{OH} = \overline{OP}\cos\theta = \cos\theta, \overline{BP} = 2\overline{HP} = 2\sin\theta$이므로

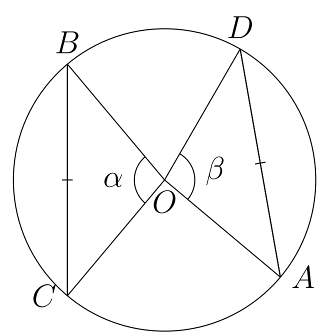


$$f(\theta) = \frac{1}{2}s \times h = \sin\theta\cos\theta \quad \cdots(2)$$

이다.

추가로 현이 원의 지름으로 잡힌 경우에 대해서도 생각해보면, 이 경우 $\overline{BP}$는 직각 삼각형의 삼각비를 이용하면 $\overline{BP} = \overline{AB}\sin\theta = 2\sin\theta$로 바로 구할 수 있다. 위 세 방법들은 모두 자주 사용되는 방법들이므로 잘 기억해두자.

마지막으로 현과 원주각에 관련하여, 원 위 길이가 같은 어떠한 현을 잡아도 그 원주각이 같음을 증명할 수 있다.



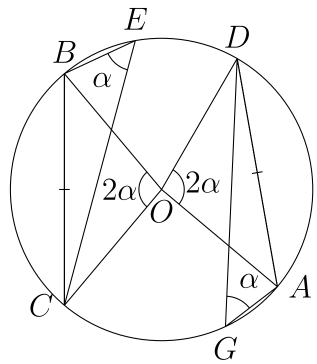
현의 길이가 같은 두 삼각형 $\triangle OBC$와 $\triangle OAD$ 에 대하여, $\overline{OC}$,$\overline{OB}$, $\overline{OA}$, $\overline{OD}$는 원의 반지름 길이와 같다. 코사인 법칙에 의해

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{OC}^2 - \overline{OB}^2}{2\overline{OC}\times\overline{OB}}, \quad \cos\beta = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{OA}^2 - \overline{OD}^2}{2\overline{OA}\times\overline{OD}}$$

$$\longrightarrow \cos\alpha = \frac{l^2 - 2r^2}{2r^2} = \cos\beta$$

$0 < \theta < \pi$에서 코사인 함수는 일대일 대응 함수이므로

$$\cos\alpha = \cos\beta \longleftrightarrow \alpha = \beta$$



이다. 이에 따라 원 위에 길이가 같은 임의의 두 현을 그으면, 다음과 같이 그들의 원주각이 같음을 알 수 있다.