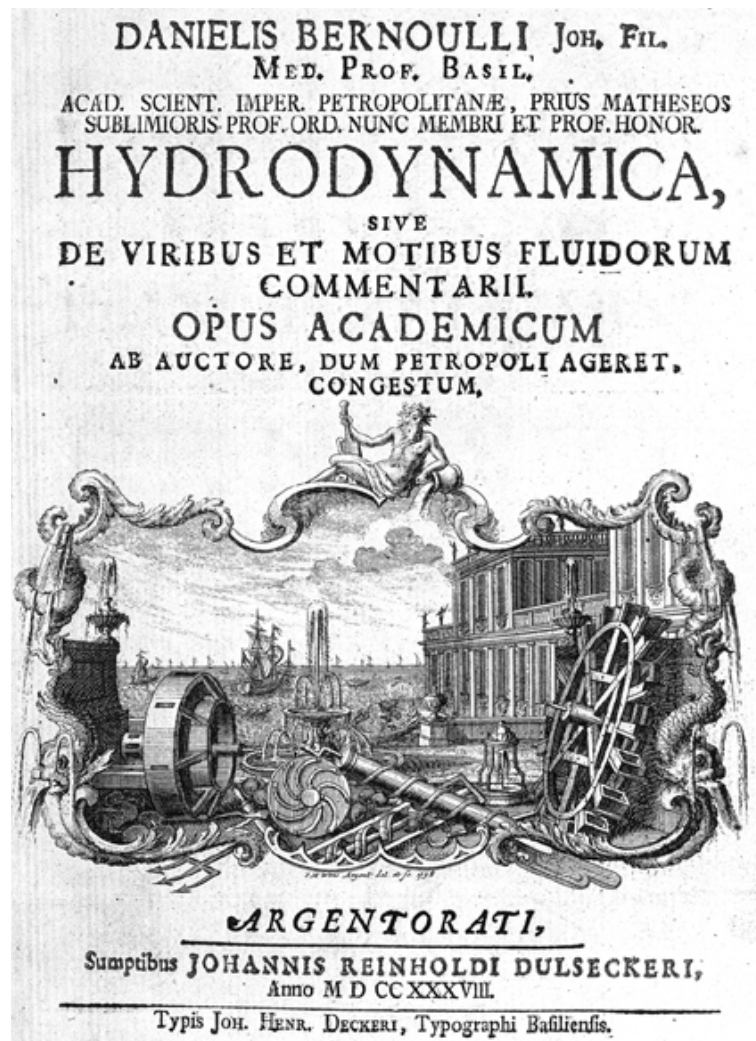

Exercices et problèmes – 2ème partie



Equipe pédagogique :
D. Fabre, M. Zagzoule, F. Moulin

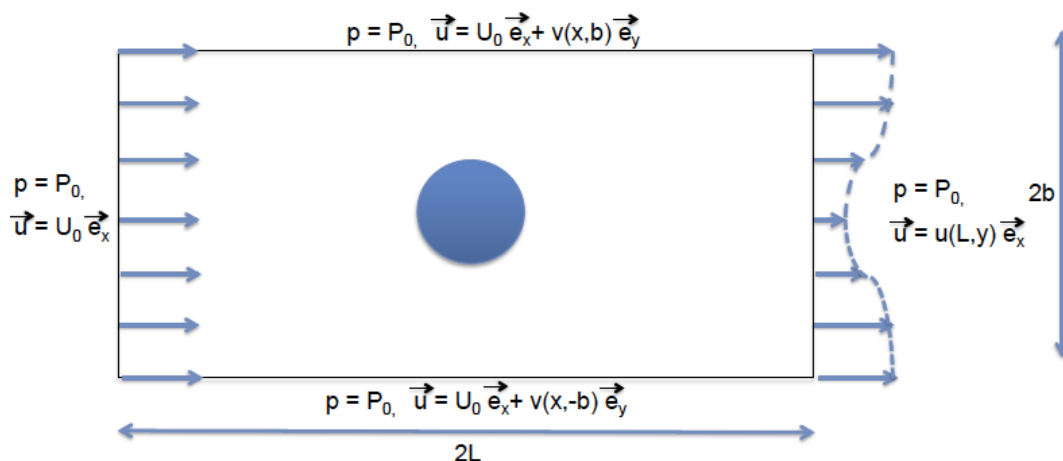
Table des matières

7	Ecoulements Inertiels I	2
7.0	Estimation de la traînée d'un cylindre (Exam mai 2017)	2
7.1	Ski nautique	3
7.2	Ventilation d'un tunnel (d'après examen 2008)	4
7.3	Tube de pitot	5
8	Ecoulements Inertiels II : Ecoulements potentiels	6
8.0	Ecoulement autour d'un cylindre : effet Magnus	6
8.1	Oscillations d'un pendule plongé dans un liquide	6
8.2	Ascension d'une bulle parachute (d'après Davies & Taylor, 1950) *	8
9	Ecoulements en conduite	10
9.1	Ecoulement dans une galerie	10
9.2	Elargissement brusque	10
9.3	Recherche d'un régime d'écoulement *	11
9.4	Ecoulement dans un oléoduc *	11
10	Acoustique	12
10.0	Transmission et réflexion	12
10.1	Acoustique des instruments à vent	12
10.2	Résonateur de Helmholtz*	14
11	Ecoulements compressibles	15
11.1	Limite de l'hypothèse incompressible	15
11.2	Vol subsonique	15
11.3	Ecoulement isentropique	15
11.4	Régimes isentropiques dans une tuyère	15
12	Ondes de choc	17
12.1	Tube de Pitot en écoulement supersonique	17
12.2	Régime d'écoulement discontinu dans une tuyère	17
12.3	Onde de choc dans une tuyère	17

7 Ecoulements Inertiels I

7.0 Estimation de la traînée d'un cylindre (Exam mai 2017)

On étudie l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe de rayon a et de longueur infinie dans la direction z (écoulement bidimensionnel dans le plan (x, y)). Le fluide est considéré comme un liquide incompressible de masse volumique ρ constante et de viscosité ν . On néglige l'effet de la pesanteur. On cherche à estimer la force $\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y$ exercée par le fluide sur le cylindre à partir de bilans intégraux.



On considère pour cela un volume de contrôle correspondant à un domaine parallélépipédique de largeur $2b$, longueur $2L$, et profondeur $2H$ (dans la direction z). Les champs de vitesse $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$ et de pression sur les frontières de ce volume de contrôle sont indiqués sur la figure. La troisième composante de vitesse w est nulle sur toutes les frontières du domaine. On suppose que les effets visqueux sont négligeables loin du cylindre (y compris sur les frontières du volume de contrôle).

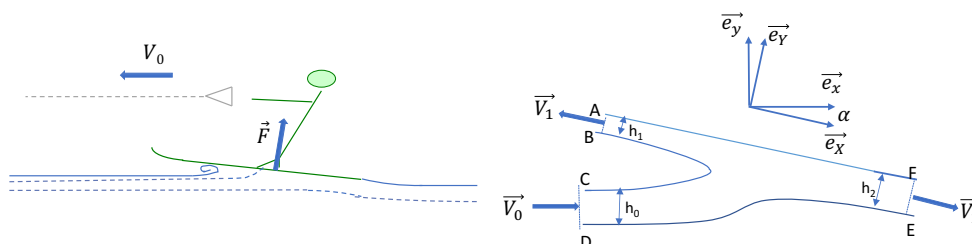
1. Ecrire un bilan de masse sur le volume de contrôle, et en déduire une relation intégrale reliant U_0 , $u(L, y)$, $v(x, -b)$ et $v(x, b)$. (ici et dans la question suivante on ne cherchera pas à calculer les intégrales apparaissant dans l'expression).
2. Ecrire un bilan de quantité de mouvement (théorème d'Euler) projeté dans la direction x , et en déduire une expression de la traînée (composante F_x de la force exercée) sur le cylindre en fonction du champ de vitesse sur les frontières du domaine.
3. En combinant les équations obtenues aux deux questions précédentes, montrez que la force de traînée peut être estimée par l'équation suivante : $F_x = 2H \int_{-b}^b u(L, y) (U_0 - u(L, y)) dy$
4. Application. On suppose qu'en sortie le profil de vitesse peut être approximé par la loi suivante :

$$u(L, y) = \begin{cases} U_0 & |y| > a \\ 0.7U_0 & |y| < a \end{cases}$$

En déduire le coefficient de traînée $C_x = F_x / (\rho U_0^2 a H)$.

5. A partir d'un bilan de quantité de mouvement projeté dans la direction y , donnez une expression de la portance (composante F_y de la force exercée) en fonction de la vitesse sur les frontières du domaine. A quelle condition cette portance est-elle nulle ? interprétez physiquement.

7.1 Ski nautique



Un skieur nautique se déplace à une vitesse V_0 (en module) sur une étendue d'eau (fluide de propriétés $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ supposées uniformes) dans l'environnement terrestre au niveau de la mer ($P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$; $g = 10 \text{ m}^2/\text{s}$).

Il utilise un monoski, supposé rectangulaire, de longueur $L = 1.5 \text{ m}$ et largeur $\ell = 20 \text{ cm}$.

On cherche à estimer la force \vec{F} exercée sur le ski.

Dans les applications numériques on prendra une valeur de la vitesse $V_0 = 25 \text{ km/h}$.

A. Analyse du problème

1. A quel régime d'écoulement a-t-on affaire dans ce problème? (justifiez en terme de nombres adimensionnels et/ou d'hypothèses physiques).
2. On étudie le problème dans le référentiel du skieur, ce qui a l'avantage de pouvoir supposer que l'écoulement d'eau est *stationnaire*. On observe que sous le ski une partie de l'écoulement d'eau est réorienté sous la forme d'un jet d'eau vers l'avant, qui déferle ensuite (voir figure). Justifiez l'existence d'un point d'arrêt S situé sous le ski. Tracez la forme de la ligne de courant passant par S , ainsi que quelques lignes de courant voisines de celles-ci.
3. On note $[z]$ l'ordre de grandeur des variations d'altitude dans l'écoulement, et on définit le nombre de Froude par $Fr = \frac{V_0^2}{g[z]}$. Vérifiez que ce nombre est sans dimensions. Quelle est son interprétation physique?
4. En comparant l'ordre de grandeur des différents termes dans l'équation de Bernoulli, montrez que si $Fr \gg 1$ celle-ci se simplifie et conduit à $p + \rho|\vec{u}|^2/2 = \text{cte}$.
5. Justifiez qu'il est raisonnable de supposer $[z] \approx \ell$. En tirer les conclusions.

B. Estimation de la force par un bilan de quantité de mouvement

On souhaite maintenant calculer la force à l'aide d'un bilan de quantité de mouvement. On note α l'angle d'incidence du ski et on introduit deux repères (\vec{e}_x, \vec{e}_y) et (\vec{e}_X, \vec{e}_Y) comme définis sur la figure.

On considère un volume de contrôle Ω comme représenté sur la figure, délimité par un contour $\partial\Omega = (ABCDEF A)$ comme représenté sur la figure, d'épaisseur ℓ (dans la direction perpendiculaire z).

- les portions (BC) et (DE) sont des *lignes de courant*,
 - la portion (FA) est la surface du ski sur laquelle on souhaite calculer la force exercée. On suppose ici que la longueur (FA) vaut L .
 - la portion (AB) est une "section d'entrée" de dimension $S_0 = \ell h_0$ à travers laquelle la vitesse est supposée uniforme et de valeur $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$.
 - la portion (CD) est la section $S_1 = \ell h_1$ à travers laquelle s'effectue le "jet déferlant". On suppose également la vitesse uniforme dans cette section est donnée par $\vec{V}_1 = -V_1 \vec{e}_X$.
 - la portion (EF) est la section "de sortie" $S_2 = \ell h_2$ de l'écoulement. Dans cette section on suppose la vitesse uniforme et donnée par $\vec{V}_2 = +V_2 \vec{e}_X$.
6. Justifiez que la pression sur les portions (AB), (BC), (CD), (DE), (EF) il est justifié de considérer que la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique P_{atm} (on pourra admettre ce résultat en ce qui concerne la portion (DE)).

7. Montrez que $V_1 = V_0$ et $V_2 = V_0$.
8. A l'aide d'un bilan de masse sur le volume de contrôle, donnez une relation entre h_0, h_1 et h_2 .
9. A l'aide du bilan de quantité de mouvement sur le volume de contrôle (théorème d'Euler), donnez une expression de la force \vec{F} sous forme d'une intégrale sur le contour (ouvert) $(ABCDEF)$.
10. En projetant cette expression sous la forme $\vec{F} = F_X e_X + F_Y e_Y$, et en simplifiant les intégrales compte tenu des hypothèses formulées, montrez que :

$$F_X = \rho \ell V_0 (h_0 \cos \alpha + h_1 - h_2)$$

et donnez une expression similaire pour la composante F_Y .

11. Justifiez pourquoi la composante F_X est nulle. En déduire que $h_1 = h_0(1 - \cos \alpha)/2$ et donnez une expression similaire pour h_2 .
12. Montrez que la composante selon Y des forces exercées sur le ski par les fluides (eau+air) est :

$$F_{Y,(\text{eau+air})} = \rho \ell h_0 V_0 \sin \alpha$$

13. On écrit maintenant la force sous la forme $\vec{F} = F_y e_y + F_x e_x$. Exprimez la traînée F_x et la portance F_y en fonction des paramètres du problème.
14. Applications numériques : En supposant que $h_0 \approx \ell$ et $V_0 = 25 \text{ km/h}$, donnez l'angle α générant une portance équilibrant le poids d'un skieur d'une masse de 80 kg . Que vaut alors la traînée F_x .

7.2 Ventilation d'un tunnel (d'après examen 2008)

On considère un tunnel horizontal de section S uniforme, ventilé par un soufflage d'air frais comme indiqué sur la figure 1. L'air soufflé à la vitesse U_s dans un conduit de section s se mélange à l'air du tunnel entre les sections 1 et 2. Dans la partie amont du tunnel (partie gauche), le soufflage peut induire un écoulement vers la droite comme sur la figure, ou vers la gauche. On veut déterminer les conditions réalisant l'un ou l'autre écoulement. Dans tout le problème, on négligera les effets visqueux, et on considèrera l'écoulement isovolume, stationnaire, et uniforme dans toute section du tunnel, sauf entre les sections 1 et 2.

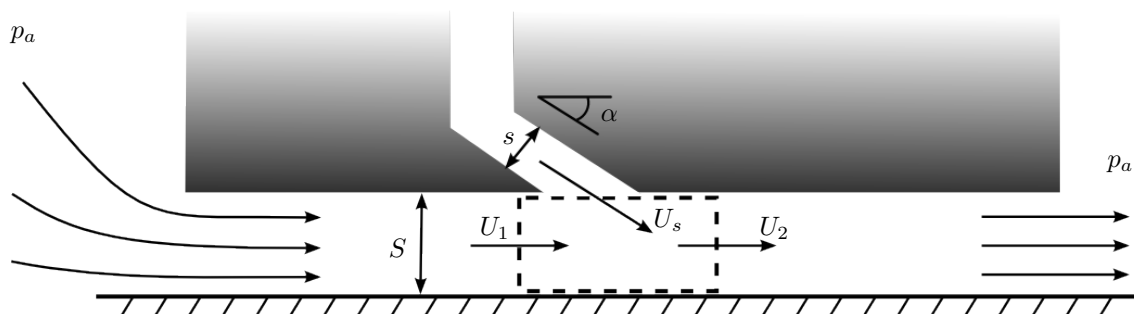
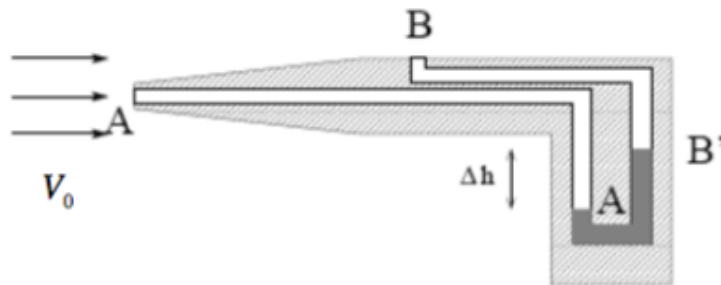


FIGURE 1 – Schéma du tunnel ventilé.

1. On considère que l'écoulement correspond à la figure : au voisinage de l'entrée du tunnel, l'air atmosphérique est accéléré progressivement, alors qu'il sort du tunnel sous la forme d'un jet.
 - (a) Ecrire la relation de Bernoulli pour une ligne de courant entre l'extérieur du tunnel (infini amont) et la section 1.
 - (b) Quelle est la pression de l'air à la sortie du tunnel ? En déduire, en utilisant la relation de Bernoulli, la pression dans la section 2.
 - (c) Appliquer le bilan intégral de quantité de mouvement pour le volume de contrôle limité par les parois du tunnel, les sections 1 et 2 et la section de soufflage, d'aire $s/\sin \alpha$ où α est l'angle du conduit de soufflage avec l'axe du tunnel. On considèrera l'angle α petit, soit $\cos \alpha \approx 1$.
 - (d) Ecrire la relation liant U_s , U_1 et U_2 , issue de la conservation de la masse.
 - (e) Déduire des équations établies ci-dessus la relation quadratique donnant la vitesse normalisée $u = U_1/U_s$ en fonction du rapport des sections $r = s/S$.

- (f) Montrer qu'il n'existe de solution correspondant à la figure que si le rapport des sections r est inférieur à une valeur critique que l'on précisera.
 - (g) Tracer l'évolution de u en fonction de r , en précisant les points remarquables de la courbe. On donnera en particulier la valeur de r qui maximise l'entraînement d'air, et la valeur de ce maximum de u .
2. Lorsque le rapport des sections excède la valeur critique déterminée ci-dessus, l'écoulement dans la partie amont du tunnel s'inverse. Aux deux extrémités du tunnel, l'air sort sous la forme d'un jet.
- (a) En procédant de façon similaire à la question précédente, déterminer la vitesse normalisée u en fonction du rapport des sections r .
 - (b) Vérifier que la vitesse u , en tant que fonction de r , ne subit pas de discontinuité entre les deux régimes d'écoulement.
 - (c) Pour un tunnel de 6 mètres de diamètre et des vitesses d'écoulement de l'ordre du mètre par seconde, le fait de négliger les effets visqueux vous paraît-il justifié ?

7.3 Tube de pitot



Exercice complémentaire ; Correction disponible sur l'espace Moodle du cours de Mécanique des fluides de L2 (TD6, exercice 9).

Pour mesurer la vitesse U_0 de véhicules se déplaçant à grande vitesse dans l'air (masse volumique de l'air $\rho_a = 1.225 \text{ kg/m}^3$), on utilise généralement des sondes de Pitot. Dans le manomètre en U du tube de Pitot, on utilise un liquide de masse volumique connue, de l'eau par exemple ($\rho_e = 1000 \text{ kg.m}^3$). On prendra $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

La dénivellation indiquée dans le manomètre en U étant $h = 10 \text{ cm}$, calculer la vitesse U_0 .

8 Ecoulements Inertiels II : Ecoulements potentiels

8.0 Ecoulement autour d'un cylindre : effet Magnus

Correction détaillée sur moodle.

On étudie l'écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible de masse volumique uniforme ρ , défini par le potentiel des vitesses suivant, exprimé en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\Phi(r, \theta) = U_0 \cos \theta \left(r + \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (1)$$

Dans cet exercice on néglige la gravité.

1. Rappelez la définition et les conditions d'existence d'un écoulement potentiel.
2. Exprimez les composantes u_r, u_θ du champ de vitesse. Vérifiez que l'écoulement est bien à divergence nulle.
3. Que deviennent ces expressions sur le cercle de rayon a et à l'infini ($r \rightarrow \infty$) ?
Conclure que cet écoulement est solution des équations d'Euler stationnaire et représente l'écoulement autour d'un cylindre de rayon a .
4. Montrez que cet écoulement admet également une fonction de courant définie par

$$\psi(r, \theta) = U_0 \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r /.$$

Justifiez que les lignes de courant et les lignes isopotentielles forment des réseaux de courbes orthogonales.

5. Discutez, suivant la valeur de Γ , le nombre et la position des points d'arrêt sur la surface du cylindre (on suppose $\Gamma \leq 0$).
Représentez schématiquement la forme des lignes de courant pour différentes valeurs de Γ .
6. Exprimez le champ de pression $p(r, \theta)$ correspondant à cet écoulement.
Représentez graphiquement la loi de pression pariétale $p(r = a, \theta)$ en fonction de θ , pour plusieurs valeurs de Γ .
7. Calculez la force \vec{F} (par unité de longueur), exercée par le fluide sur le cylindre. Montrez que les composantes F_x et F_y de cette force vérifient $F_x = 0$ et $F_y = -\rho \Gamma U_0$.
8. Retrouvez ce résultat à partir d'un bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle judicieusement choisi.
9. On suppose que le cylindre tourne selon son axe, à la vitesse angulaire Ω (c'est à dire que son vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$). Donnez, en coordonnées axisymétriques, la vitesse d'un point situé sur la paroi du cylindre. Expliquez pourquoi l'approximation de fluide parfait ne permet pas de calculer Γ en fonction de Ω .
10. L'étude des effets visqueux à l'intérieur de la couche limite (*Moore, 1953, Journal of Fluid Mechanics*) permet de montrer que si le cylindre tourne très vite ($\Omega \gg U_0/a$), la circulation est reliée au taux de rotation par $\Gamma = 2\pi a^2 \Omega$. Donnez une interprétation physique de cette condition.
11. Montrer que dans ce cas $\vec{F} = 2\pi \rho a^2 \vec{U}_0 \wedge \vec{\Omega}$ (formule de Magnus).

8.1 Oscillations d'un pendule plongé dans un liquide

Un pendule de masse M attaché à une corde de longueur L est un exemple bien connu d'oscillateur harmonique. Si les interactions avec le fluide sont négligées (ou si le pendule oscille dans le vide) on montre classiquement que la fréquence d'oscillation est donnée par $T = 2\pi/\omega_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{g/L}$.

Dans le cas où le pendule oscille dans un liquide de masse volumique ρ , on observe que la fréquence est modifiée et donnée par la loi suivante :

$$\omega_0^2 = \frac{g(M - \rho V)}{L(M + \rho V C)} \quad (2)$$

où V est le volume du pendule et C un coefficient appelé "coefficient de masse ajoutée" qui dépend de sa forme (et vaut $C = 1/2$ pour une sphère et $C = 1$ pour un cylindre).

L'explication de cette modification de la fréquence, ainsi que la prédiction du temps d'amortissement du pendule, on suscité des débats dans la communauté scientifique au milieu du 19ème siècle. C'est Stokes (encore lui...) qui a finalement résolu le problème en 1850. Dans ce problème on va présenter une approche simplifiée de ce travail.

A. Questions préliminaires

1. On suppose que l'écoulement peut être modélisé en deux parties : un écoulement extérieur potentiel et une couche limite dominée par les effets visqueux et d'épaisseur δ .

Rappelez les hypothèses (à vérifier a posteriori) permettant de justifier cette approximation.

2. Justifiez que la force exercée par l'écoulement sur la sphère est composée de 3 termes : (i) la résultante de pression (motrice) $\mathbf{F}_p = \iint -\hat{p} \mathbf{n} dS$ qui peut être déterminée en fonction de l'écoulement potentiel et non pesant, (ii) la poussée d'Archimède $-\rho V \mathbf{g}$, et (iii) l'effet du frottement visqueux \mathbf{F}_v dans les couches limites F_v .

B. Ecoulement potentiel autour d'une sphère en translation

La sphère se déplace à vitesse $\mathbf{U} = U(t)\mathbf{e}_x$ dans une direction e_x supposée fixe.

On note $\mathbf{u} = \mathbf{grad} \Phi$ le champ de vitesse de l'écoulement *dans le repère relatif en mouvement avec la sphère*.

On introduit des coordonnées cartésiennes x, y, z et des coordonnées sphériques r, θ, φ .

On rappelle les expressions en coordonnées sphériques des opérateurs gradient et Laplacien :

$$\mathbf{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

3. Donnez l'équation vérifiée par le potentiel ainsi que les conditions limites vérifiées par ce dernier sur la surface de la sphère ($r = a$) et loin de la sphère ($r \rightarrow \infty$).
4. On cherche une solution à variables séparées sous la forme :

$$\Psi(r, \theta) = f(r) \cos \theta$$

Donnez l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$.

5. En cherchant des solutions à cette équation sous forme de puissances de r , montrez que la solution est de la forme $f(r) = Ar + Br^{-2}$ où A et B sont des constantes à déterminer.
6. A partir des conditions limites vérifiées en $r = a$ et $r = \infty$ déterminez les constantes A et B .
7. En déduire que le champ de vitesse est donné par :

$$u_r(r, \theta) = -U(t) \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta$$

$$u_\theta(r, \theta) = U(t) \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta$$

Représentez schématiquement la structure de l'écoulement.

C. Champ de pression et force exercée sur la sphère due à l'écoulement potentiel

Dans cette partie on ne tient pas compte de la gravité et du frottement visqueux, on s'intéresse uniquement à la force exercée par la sphère associée à l'écoulement potentiel.

8. A partir des équations d'Euler dans le repère relatif en mouvement avec la sphère (*non galiléen*), démontrer une forme généralisée du second théorème de Bernoulli.
9. En déduire l'expression de la pression $p(a, \theta)$ exercée sur la surface du cylindre.
10. Montrez que la force exercée sur l'objet par l'écoulement vaut :

$$\mathbf{F}_p = -\rho V C \frac{dU}{dt} \mathbf{e}_x, \quad \text{avec } V = \frac{4\pi a^3}{3} \text{ et } C = \frac{1}{2}$$

11. Que vaut la force si la sphère se déplace à vitesse uniforme ? Commentez ce résultat.
12. Que vaut la force si la sphère se déplace de manière uniformément accélérée ? Interprétez physiquement le résultat et donnez une interprétation géométrique au coefficient C .

D. Application : oscillations d'un pendule

On considère maintenant le cas d'un pendule constitué d'une sphère de rayon a et masse m attaché à une ficelle de longueur L .

On note $\phi(t)$ l'angle d'inclinaison du pendule, et on introduit un repère $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ tel que la vitesse instantanée soit alignée avec l'axe x , c.a.d. : $\mathbf{U} = U(t)\mathbf{e}_x = Ld\phi/dt$.

On admettra qu'on peut négliger les termes d'accélération centrifuge et de Coriolis, et que l'écoulement autour de la sphère et la force associée sont les mêmes que ce qu'on a calculé dans les questions précédentes.

13. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la sphère, projeté selon l'axe \mathbf{e}_x , montrez que le mouvement est gouverné par l'équation différentielle suivante :

$$(m + \rho VC)L \frac{d^2\phi}{dt^2} = \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{e}_x + (m - \rho V)g\phi$$

14. Si les forces visqueuses sont négligeables, en déduire que le pendule oscille avec la période $T = 2\pi/\omega_0$ où ω_0 est donné plus haut par l'équation (2).
15. Application numérique : calculez la période pour un pendule de dimensions $L = 10\text{cm}$, $a = 1\text{cm}$, dans les cas suivants :
 - (i) Pendule en acier ($\rho_p = 7850$) dans l'eau ($\rho = 1000$)
 - (ii) Pendule en PVC ($\rho_p = 1400$) dans l'eau ($\rho = 1000$)
 - (iii) Pendule en verre ($\rho_p = 2500$) dans l'air ($\rho = 1.225$)

E. Estimation des effets visqueux

16. Estimez l'épaisseur de la couche limite δ dans les 3 cas précédents. L'hypothèse de couche limite est-elle effectivement justifiée a posteriori ?
17. Dans le cas d'une sphère oscillant à la pulsation ω_0 , le calcul des forces de frottement dans les couches limites (du à Stokes) conduit à :

$$\mathbf{F}_v = -\frac{9}{4} \frac{V}{a} \mu \frac{U(t)}{\sqrt{\frac{\nu}{\omega_0}}} \mathbf{e}_x$$

Justifiez la forme de cette expression (on ne demande pas de démontrer le facteur $9/4$!).

18. En supposant que l'effet des frottements visqueux est une petite correction par rapport au calcul précédent, montrez que l'on aboutit à une équation d'oscillateur harmonique amorti de la forme :

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\phi}{dt} + \omega_0^2 \phi = 0$$

19. Donnez la valeur du temps d'amortissement τ du pendule pour les cas (i), (ii) et (iii) définis plus haut.

8.2 Ascension d'une bulle parachute (d'après Davies & Taylor, 1950) *

L'expérience montre que les bulles de gaz de quelques centimètres de diamètre qui remontent dans un liquide ont une forme de parachute (fig. 2) : la partie avant de la bulle est sphérique et sa partie arrière est à peu près plate (calotte sphérique). G. I. Taylor a étudié expérimentalement la relation entre la vitesse d'ascension des bulles et le rayon de courbure de la partie avant. Dans ses expériences, des bulles d'air s'élèvent dans du nitrobenzène (de viscosité cinématique $\nu = 0.015 \text{ cm}^2/\text{s}$ et de masse volumique $\rho = 1.2 \text{ g/cm}^3$). Les rayons de courbures observés sont compris entre 2.4 et 4.8 cm, les vitesses d'ascension correspondantes entre 29 et 48 cm/s et les dimensions transverses $2R \sin \theta_m$ entre 2.8 et 6.2 cm.

1. Dans les expériences décrites ci-dessus, quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds pour l'écoulement de liquide ? Conclusions.
2. Évaluez le nombre de Bond. En déduire que la pression le long de la surface de la bulle peut être considérée comme constante.

(a)

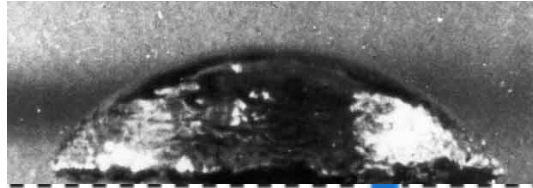


FIGURE 3 – Paramètres géométriques de l'écoulement autour d'une bulle.

3. A partir du théorème de Bernoulli, donner une relation entre l'altitude $z = R \cos \theta$ et la vitesse $|\vec{u}(R, \theta)|$ sur la surface de la bulle.
4. Taylor fait la remarque que l'écoulement du liquide autour du sommet de la calotte sphérique est peu différent de l'écoulement potentiel autour d'une sphère donné par

$$u_r(r, \theta) = -U \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad \text{et} \quad u_\theta(r, \theta) = U \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad \text{avec}$$

dans le référentiel où la bulle est immobile et où le liquide se déplace à la vitesse U loin de la bulle. En déduire que la vitesse de la bulle est donnée par :

$$U = \frac{2}{3} \sqrt{gR}$$

5. Confronter cette prédiction théorique aux valeurs obtenues expérimentalement.

FIG
sill

9 Ecoulements en conduite

9.1 Ecoulement dans une galerie

On considère l'écoulement dans une galerie horizontale d'aménagement hydroélectrique, de diamètre $D = 4$ m et de longueur $L = 16$ km, entre la base d'une retenue d'eau, située à la profondeur $H = 100$ m sous la surface libre, et un réservoir qu'on considérera, pour simplifier, à la pression atmosphérique. Il s'agit ici de déterminer quel est le phénomène qui détermine la vitesse moyenne U de l'écoulement dans la galerie : l'inertie du fluide dans la retenue, ou la dissipation visqueuse dans la galerie (coefficient de perte de charge Λ , la dissipation dans la retenue est négligeable).

1. Montrer que si la longueur de la galerie est supérieure à une longueur critique $L_c(D, \Lambda)$, la vitesse est déterminée par la perte de charge. Cette condition est-elle vérifiée ici ?
2. En considérant que le régime d'écoulement est "hydrauliquement rugueux" ($Re > 10^5$), condition que l'on vérifiera *a posteriori*, déterminer la vitesse de l'écoulement dans la galerie. On rappelle que dans le régime rugueux, le coefficient de perte de charge ne dépend plus du nombre de Reynolds, et est donné par la formule de Colebrook simplifiée (encore appelée formule de Karman-Prandtl ou de Karman-Nikuradse) :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2 \log_{10} \frac{3,71 D}{k},$$

où on prendra $k = 300$ mm pour la rugosité de la galerie.

3. La vitesse de l'écoulement est-elle peu sensible ou très sensible à la rugosité ? (On pourra évaluer la diminution relative de vitesse lorsque la rugosité est multipliée par 5, de 100 à 500 mm par exemple.)

9.2 Elargissement brusque

On s'intéresse dans cet exercice à l'écoulement dans une conduite au passage d'un élargissement brusque. L'écoulement dans la section S_1 en amont de l'élargissement a une vitesse u_1 et une pression p_1 supposées connues. On cherche à déterminer la vitesse u_2 et la pression p_2 au niveau d'une section S_2 en aval de l'élargissement (fig. 4a). On notera $s = S_1/S_2 < 1$, S_1 et S_2 correspondant aux aires des sections de part et d'autre de l'élargissement, supposées connues. On supposera que, bien que turbulent, l'écoulement est stationnaire en moyenne. Le fluide est homogène, de masse volumique ρ uniforme, et sans perte de généralité, on négligera la pesanteur. La paroi de la conduite est imperméable.

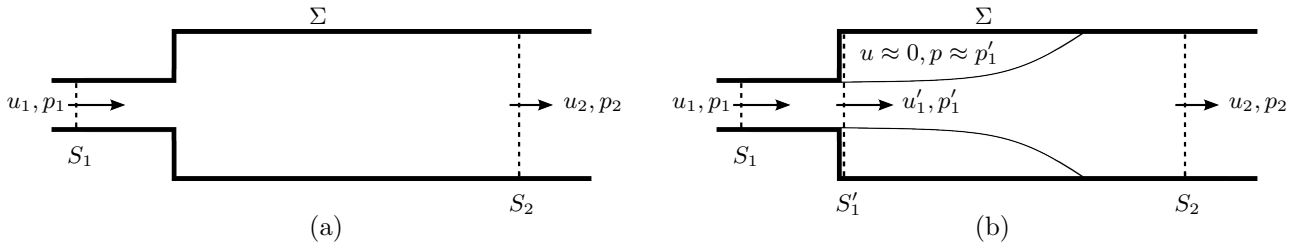


FIGURE 4 – Elargissement brusque dans une conduite : schéma global (a) et détail de l'écoulement décollé observé expérimentalement (b).

1. Déterminer u_2 en fonction de u_1 et s .
2. On néglige dans cette question les effets visqueux et les pertes de charge.
 - (a) Quelle quantité physique est conservée entre les sections S_1 et S_2 ?
 - (b) En déduire que $p_2 = p_1 + \rho u_1^2 f(s)$ où $f(s)$ est à déterminer.
 - (c) En écrivant le bilan intégral de quantité de mouvement dans le volume de contrôle délimité par la paroi Σ de la conduite et les sections S_1 et S_2 , montrer que la force exercée par l'écoulement sur la paroi Σ est de la forme $F = (S_1 - S_2) g(\rho, u_1, p_1, s)$ où g est une fonction à déterminer.
3. L'expérience montre que la pression p_2 prédite précédemment surestime la réalité et que les pertes de charges sont à prendre en compte impérativement après l'élargissement. En outre, on observe au niveau de l'élargissement un décollement de l'écoulement qui conduit à la formation d'une zone de recirculation dans laquelle la vitesse est négligeable (fig. 4b).

- (a) Les pertes de charge restant négligeables entre S_1 et la section S'_1 juste après l'élargissement, calculer u'_1 et p'_1 .
- (b) Après l'élargissement, on ne peut plus négliger les pertes de charge. En considérant le volume de contrôle délimité par les sections dans le fluide S'_1 et S_2 et la portion de paroi entre ces deux sections, montrer que $p_2 = p_1 + \rho u_1^2 h(s)$, où $h(s)$ est à déterminer.
- (c) En déduire que les pertes de charge entre S'_1 et S_2 s'écrivent $\Delta = \rho u_1^2 \delta(s)$, où $\delta(s)$ est une fonction à déterminer.
- (d) Calculer la force exercée par l'écoulement sur la paroi Σ entre S_1 et S_2 .

9.3 Recherche d'un régime d'écoulement *

Déterminer le régime d'écoulement (laminaire, turbulent lisse ou turbulent rugueux) et le coefficient de perte de charge Λ d'un écoulement d'eau ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ à 15°C) dans les deux cas suivants :

1. Tube de verre de diamètre $D = 2 \text{ cm}$ et de rugosité $k = 0,2 \mu\text{m}$, débit $Q_v = 0,6 \text{ litre par seconde}$.
2. Tuyauterie de fonte de diamètre $D = 60 \text{ cm}$ et de rugosité $k = 0,3 \text{ mm}$, débit $Q_v = 0,85 \text{ m}^3/\text{s}$.

On rappelle qu'en écoulement turbulent, le coefficient de perte de charge est donné par la formule semi-empirique de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{k/D}{3,71} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\Lambda}} \right).$$

Une première estimation de Λ peut être obtenue en ne retenant que le terme dominant dans l'argument du logarithme, en considérant que Λ est très généralement compris entre 0,01 et 0,04. Une deuxième estimation peut être obtenue en insérant la première dans le logarithme, et ainsi de suite.

9.4 Ecoulement dans un oléoduc *

On considère un écoulement d'huile dans un oléoduc horizontal de diamètre $D = 10 \text{ cm}$ et de longueur $L = 10 \text{ km}$. Le débit d'huile est $Q_v = 50 \text{ m}^3/\text{heure}$, sa densité est $\rho = 950 \text{ kg/m}^3$ et de viscosité dynamique $\mu = 0,2 \text{ Pa.s}$.

1. L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ? Déterminer la perte de charge et le coefficient de perte de charge Λ .
2. Déterminer la puissance dissipée dans la conduite (on pourra utiliser le théorème de l'énergie cinétique).
3. Pour limiter l'épaisseur et donc le coût de la conduite, on désire que la pression ne dépasse nulle part 5 MPa . Quelle solution peut-on proposer ?

10 Acoustique

10.0 Transmission et réflexion

exercice préparatoire ; correction sur moodle

On étudie la transmission et la réflexion d'une onde sonore entre un milieu (1) de masse volumique ρ_1 et vitesse du son c_1 occupant le demi-espace $x < 0$ et un milieu (2) de masse volumique ρ_2 et vitesse du son c_2 occupant le demi-espace $x > 0$.

Une source sonore située dans le milieu (1) et loin de la surface produit une onde progressive monochromatique de la forme $p_+(x, t) = A \cos(\omega(t - x/c_1))$. Une partie de l'énergie de l'onde se réfléchit, et une partie est transmise.

1. Justifiez qu'il est légitime de chercher une solution de la forme

$$p'(x, t) = A \cos(\omega(t - x/c_1)) + B \cos(\omega(t + x/c_1)) \text{ pour } x < 0;$$

$$p'(x, t) = C \cos(\omega(t - x/c_2)) \text{ pour } x > 0.$$

2. Donnez la forme du champ de vitesse $u(x, t)$ correspondant.
3. En écrivant la continuité des vitesses et des pressions en $x = 0$, calculez le coefficient de réflexion en amplitude B/A et le coefficient de transmission en amplitude C/A .
4. En déduire que le coefficient de transmission en intensité acoustique vaut :

$$T_i = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$$

5. Application : calculez le coefficient de transmission entre l'eau et l'air.

10.1 Acoustique des instruments à vent

Les instruments à vent employés dans l'orchestre sont classiquement regroupés en famille des bois et cuivre selon le mode l'excitation du tuyau par le souffle du musicien (embouchure pour les cuivres, anches ou biseau pour les vents). Cette classification "historique" n'est pas très pertinente du point de vue de l'acoustique musicale. De ce point de vue, les propriétés essentielles sont :

- La forme du résonateur. De ce point de vue on distingue les instruments cylindriques (flûte, clarinette...), les instruments coniques (hautbois, saxophone, ...), et les instruments combinant une section cylindrique et une section conique (trompette, cor, trombone...).¹
- Le fait que le tuyau soit ouvert ou fermé en entrée et en sortie. On distingue les instruments ouverts-ouverts (flûte traversière, flûte à bec, tuyaux d'orgue), les instruments ouverts-fermés (flûtes de pan) et les instruments fermés-ouverts (tous les instruments à anche ou à embouchure pour lesquels le bec se comporte comme une extrémité fermée).

A. La Flûte

On modélise une flûte traversière par un cylindre de longueur L et de rayon a , supposé ouvert à ses deux extrémités.

1. Rappelez l'équation de Helmholtz gouvernant la pression acoustique $p'(x, t)$, et la relation entre la pression acoustique et le débit massique $q(x, t)$.
2. Donnez les conditions limites est vérifiées par p' et q en $x = 0$ et $x = L$, en supposant qu'aux deux extrémités la pression est égale à la pression atmosphérique (hypothèse d'extrémité *idéalement ouverte*).
3. On cherche la solution sous la forme de mode propre (ou onde stationnaire) de la forme $p'(x, t) = P(x) \cos(\omega t + \phi)$. A partir de l'équation de Helmholtz, donnez les valeurs des fréquences et tracez la forme des trois premiers modes propres. A quelles positions sont les noeuds de pression et de débit associés à ces modes ?
4. On considère le mode fondamental (de fréquence la plus basse). Montrez que la structure du mode peut s'écrire sous la forme de deux ondes progressives se propageant en direction opposées. Par un raisonnement simple retrouvez la valeur de la fréquence fondamentale.

1. Ajoutons que la présence d'un pavillon n'est pas essentielle à la modélisation acoustique, et qu'il existe aussi des instruments à résonateur globulaire (ocarina) fonctionnant selon le principe du résonateur de Helmholtz

5. Application : calculez la fréquence fondamentale (théorique) d'une flûte traversière de longueur 66cm et d'une clarinette de même longueur.
6. Une modélisation plus poussée de l'écoulement au voisinage des extrémités montre que les noeuds de pression sont en réalité situés à une distance $\Delta = 0.85a$ de chacune des extrémités. Calculez, en pourcentage (puis en demi-tons) la modification de fréquence due à cette correction.

B. La clarinette

On modélise une clarinette par un cylindre de longueur L et de rayon a , supposé ouvert à la sortie mais fermé à l'entrée.

1. Donnez, dans ce cas, les conditions limites est vérifiées par p' et q en $x = 0$ et $x = L$.
2. En cherchant de nouveau la solution sous la forme de mode propre, donnez les valeurs des fréquences et tracez la forme des trois premiers modes propres. A quelles positions sont les noeuds de pression et de débit associés à ces modes ?
3. Comparez la fréquence fondamentale d'une clarinette à celle d'une flûte. Que constate-t-on ?

C. Le hautbois

Un hautbois peut être modélisé par un tuyau conique de longueur L , rayon en sortie a (ce qui correspond à un angle d'ouverture $\alpha = \tan^{-1}(a/L)$), supposé ouvert en sortie et (forcément) fermé en entrée (car terminé par une pointe d'épaisseur nulle...)

1. Justifiez que la pression doit être cherchée sous la forme $p'(r, t)$ où r est le rayon en coordonnée sphérique.
2. Donnez l'expression de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques.
3. On cherche de nouveau la solution sous la forme de modes propres. Montrez que ceux-ci sont de la forme $p'(r, t) = A \sin(\omega r/c)/r \cos(\omega t)$. Quelles sont les fréquences des modes propres ?
4. Tracez, pour les 3 premiers modes, la forme de la pression $p'(x, t)$ et du débit acoustique $q(r, t)$ correspondant.
5. Comparez la fréquence fondamentale d'un hautbois de longueur L à celles d'une flûte et d'une clarinette de même longueur. Que constate-t-on ?

D. Le trombone*

Un trombone peut être modélisé comme un cylindre de longueur L_2 et de rayon a , fermé en entrée, raccordé à un cône de même longueur L_1 et de rayon final $R = 5a$, ouvert en sortie (on ne tient pas compte du pavillon).

1. Donnez l'angle α du cône et la position théorique de la pointe de celui-ci. (on note x_1 la distance entre la pointe et le raccord entre les deux parties du tuyau).
2. On suppose que dans la section cylindrique la solution prend la forme d'une onde plane ($p' = P(x) \cos \omega t$) et que dans la section conique elle prend la forme d'une onde sphérique ($p' = Q(r)/r \cos \omega t$). En supposant que la pression et le débit acoustique sont continus au raccord entre les deux sections du tuyau, montrez que les fréquences des modes propres sont solutions de l'équation suivante :

$$\tan(kL_2) - \cot(kL_1) - \frac{1}{kx_1} = 0.$$

E. Discussion

1. Comparez la fréquence fondamentale d'un hautbois de longueur L à celles d'une flûte et d'une clarinette de même longueur. Que constate-t-on ?
2. Pour des raisons musicales, un instrument de musique a un son harmonieux si les fréquences des modes supérieurs (les partiels) sont multiples de la fréquence du mode fondamental. Cette relation est-elle vérifiée par les instruments considérés dans cet exercice ?

Pour en savoir plus : *Acoustics of musical instruments*, N. H. Fletcher & T. D. Rossing.

10.2 Résonateur de Helmholtz*

En soufflant dans une bouteille, on peut lui faire émettre un son. Or la fréquence de ce son est beaucoup plus basse que ce que donne le calcul simple qui considère que le fond et l'ouverture de la bouteille sont respectivement un nœud et un ventre de vitesse. Ainsi, un frontignan (75 centilitres) émet un son voisin du la_1 d'un piano, soit 110 Hz (essayez!), alors que considérer que la longueur de la bouteille correspond à $\lambda/4$ donne environ 420 Hz. Le problème général est celui de la fréquence de résonance d'une cavité percée d'un trou.

Helmholtz a résolu le problème en considérant que l'air dans la cavité (la bouteille) se comporte comme un ressort sans masse, auquel est suspendue une masse d'air cylindrique oscillant rigidement au voisinage du trou (dans le goulot). Montrer que la fréquence de résonance est alors donnée par $\omega^2 = c^2 \pi r^2 / (V_0 l)$, où c est la vitesse du son, V_0 est le volume de la cavité, et l et r la longueur et le rayon de la masse oscillante. Ce modèle donne-t-il le bon résultat pour un frontignan ($V_0 = 750 \text{ cm}^3$, $r = 1 \text{ cm}$, $l = 9 \text{ cm}$)? (Pour être précis, il faut prendre en compte une longueur effective de la masse oscillante, somme de la longueur l_g du goulot et de la correction de Rayleigh, égale à $0,6 r$, à chaque extrémité du goulot. Une autre complication, plus difficile à prendre en compte, provient du fait qu'un frontignan n'est pas exactement constitué de deux cylindres.)

Le modèle de Helmholtz peut être justifié par un bilan de masse dans la cavité (où la masse volumique peut être supposée uniforme puisque la longueur de la cavité est petite devant la longueur d'onde), et par un bilan de quantité de mouvement dans le goulot (où la vitesse peut être supposée uniforme pour la même raison). Montrer que ces deux équations donnent l'équation d'un oscillateur harmonique pour les variations de masse volumique dans la cavité, dont la pulsation propre est donnée par l'équation ci-dessus.

11 Écoulements compressibles

11.1 Limite de l'hypothèse incompressible

Un tube de Pitot double est placé sur l'axe d'une canalisation de 10 cm de diamètre contenant de l'air en écoulement. Le manomètre différentiel en U du tube de Pitot est rempli de mercure de masse volumique $\rho_{Hg} = 13\,600 \text{ kg.m}^{-3}$.

1. Quel est le débit d'air obtenu dans l'hypothèse d'un écoulement incompressible sachant que la dénivellation Δh du mercure est de 10 mm ?
2. En considérant que les effets de compressibilité peuvent être négligés pour des fluctuations de masse volumique de l'air ρ inférieures à 1%, jusqu'à quel nombre de Mach l'écoulement peut être considéré comme incompressible ? Quelle est alors l'erreur commise sur l'évaluation de la vitesse ?

11.2 Vol subsonique

Un avion vole à un nombre de Mach de 0.95 à une altitude où la pression atmosphérique est égale à 0.223 bar et où la masse volumique de l'air est $\rho = 0.349 \text{ kg.m}^{-3}$. On suppose que l'air se comporte comme un fluide parfait et que les filets fluides sont thermiquement isolés.

1. Calculer la vitesse de l'avion en km/h.
2. Calculer la pression et la température au point d'arrêt sur le bord d'attaque de l'aile.

11.3 Écoulement isentropique

Dans un turbo-réacteur, les gaz entrent dans la tuyère à la vitesse de 275 m.s^{-1} et à une température de 741°C . Leur vitesse de sortie est de 564 m.s^{-1} . En supposant le fluide parfait et l'écoulement isentropique, calculer

1. la température de sortie des gaz,
2. le nombre de Mach dans les conditions d'éjection des gaz.

On assimilera les gaz à de l'air pur ($C_p = 1000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$).

11.4 Régimes isentropiques dans une tuyère

On considère dans ce problème l'écoulement isentropique d'un gaz parfait dans une tuyère intercalée entre un réservoir à air comprimé et l'atmosphère à pression $P_a = 1 \text{ atm}$. On assimilera le gaz à de l'air pur ($\gamma = 1.405$, $r = 287 \text{ J/kg/K}$). La section de sortie a un diamètre $D_s = 5 \text{ cm}$.

Régime 1 :

Dans ce régime, la vitesse du gaz au niveau du col de la tuyère est $u_c = 250 \text{ m/s}$. La température dans le réservoir est $T_i = 300 \text{ K}$.

1. Calculer la température au col T_c puis le nombre de Mach au col M_c .
2. En déduire la nature (subsonique, supersonique ou sonique) de l'écoulement dans le convergent, au col et dans le divergent.
3. Par continuité, la température en sortie de la tuyère est égale à la température extérieure ambiante $T_s = T_a = 296 \text{ K}$. Calculer le nombre de Mach M_s dans la section de sortie.
4. De la même façon, la pression en sortie de tuyère P_s correspond à la pression atmosphérique P_a . En déduire la pression génératrice P_i dans le réservoir puis la masse volumique génératrice ρ_i .
5. Calculer la vitesse en sortie u_s et la masse volumique en sortie ρ_s puis en déduire le débit massique \dot{m} de la tuyère.

Régime 2 :

Dans cette partie, la pression P_i dans le réservoir est augmentée jusqu'à ce que le nombre de Mach en sortie atteigne $M_s = 1.5$. Pour ce régime, on observe ni onde de choc ni onde de détente : la tuyère est dite *adaptée*.

6. Déterminer la nature (subsonique, supersonique ou sonique) de l'écoulement dans le convergent, au col et dans le divergent.

7. Les conditions thermodynamiques en sortie de tuyère sont les mêmes que dans les questions 3 et 4. En déduire la pression génératrice P_i et la température génératrice T_i régnant dans le réservoir à air comprimé.
8. Calculer la température au col T_c .
9. Calculer le diamètre de la section au col D_c .
10. Calculer le débit massique \dot{m} pour ce régime de fonctionnement de la tuyère.

12 Ondes de choc

12.1 Tube de Pitot en écoulement supersonique

On considère un écoulement supersonique uniforme dont on cherche à mesurer les caractéristiques (vitesse u_1 , nombre de Mach M_1 , pression p_1 , pression génératrice p_{i1}) à l'aide d'un tube de Pitot double.

1. Décrire qualitativement l'écoulement dans le voisinage du tube de Pitot.
2. Déterminer l'expression du nombre de Mach M_2 au niveau du tube de Pitot en fonction des pressions p_2 et p_{i2} mesurées par le tube de Pitot.
3. En déduire M_1 .
4. Déterminer p_1 et p_{i1} .
5. Expliquer comment il serait possible de prédire la vitesse u_1 de l'écoulement incident.

12.2 Régime d'écoulement discontinu dans une tuyère

On considère un écoulement dans une tuyère caractérisé par la présence d'une onde de choc. On souhaite décrire ce régime particulier de fonctionnement de la tuyère.

1. Préciser dans quelle partie de la tuyère se trouve cette onde de choc. Peut-il exister une autre onde de choc dans la tuyère ?
2. Donner le nombre de Mach au col M_c .
3. Tracer pour un tel régime l'allure de la vitesse, de la pression et du nombre de Mach le long de la tuyère.
4. Que devient l'onde de choc lorsque la pression en sortie p_s diminue ?
5. Déterminer en fonction des conditions génératrices en amont la plage de pression p_s correspondant à ce régime d'écoulement discontinu dans la tuyère.

12.3 Onde de choc dans une tuyère

Une tuyère convergente-divergente est alimentée avec de l'air à pression génératrice p_i de 3 bars et une température T_i de 600 K. Cette tuyère a une section d'entrée A_e de 5 cm² dans laquelle la vitesse u_e a pour valeur 146 m.s⁻¹. On constate lors du fonctionnement la présence d'une onde de choc dans la section A_{choc} d'aire 2.53 cm². L'objectif de cet exercice est d'utiliser les relations isentropiques et de saut afin de déterminer certaines caractéristiques de l'écoulement étudié.

1. Calculer la pression p_c , la température T_c et la masse volumique ρ_c au col ainsi que le débit massique \dot{m} de la tuyère.
2. Calculer les pressions p_1 et p_2 et les températures T_1 et T_2 immédiatement en amont et en aval de l'onde de choc.
3. Calculer la pression p_s et la température T_s dans la section de sortie A_s d'aire 2.70 cm².