Mécanique des fluides

Allée de tourbillons de Von Karman
en aval d'un cylindre à $Re = 140$ (lignes d'émission).

Allée de tourbillons de Von Karman
dans le sillage de l'île de Guadalupe (océan Pacifique).

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique

7. Ecoulements inertiels

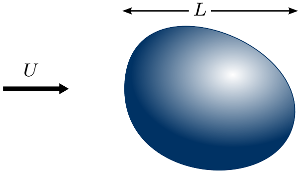
Définitions

On appelle écoulement inertiel tout écoulement pour lequel le mode de transport de la quantité de mouvement par advection est dominant par rapport au tranport par diffusion visqueuse (frottements).

Dans ces conditions, si U et L désignent les échelles caractéristiques de vitesse et de longueur de l'écoulement, le temps caractéristique d'advection de la quantité de mouvement $\tau_a = L/U$ est donc beaucoup plus court que le temps de diffusion $\tau_d = L^2/\nu$, soit :

$$\frac{\tau_d}{\tau_a} = \frac{L^2/\nu}{L/U} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad Re \equiv \frac{UL}{\nu} \gg 1 \tag{1}$$

où Re désigne le *nombre de Reynolds* :
les écoulements inertiels sont ainsi aussi appelés écoulements à grand nombre de Reynolds



Exemples

Ecoulements inertiels :

$$Re \equiv \frac{U\,L}{\nu} \gg 1$$

- Tache rouge de Jupiter :
  $U \sim 100$ m/s (360 km/h), $L \sim 15000$ km, $\nu \sim 15 \times 10^{-6}$ m^2/s (cf. air) $\Rightarrow$ $Re \sim 10^{14}$
- Cyclone :
  $U \sim 45$ m/s (170 km/h), $L \sim 100$ km, $\nu \sim 15 \times 10^{-6}$ m^2/s $\Rightarrow$ $Re \sim 3 \times 10^{11}$
- Avion :
  $U \sim 100$ m/s (360 km/h), $L \sim 15$ m, $\nu \sim 15\ 10^{-6}$ m^2/s $\Rightarrow$ $Re \sim 10^{8}$
- Bateau :
  $U \sim 10$ m/s (20 noeuds, 36 km/h), $L \sim 10$ m, $\nu \sim 10^{-6}$ m^2/s $\Rightarrow$ $Re \sim 10^{8}$
- Nageur :
  $U \sim 1$ m/s, $L \sim 2$ m, $\nu \sim 10^{-6}$ m^2/s $\Rightarrow$ $Re \sim 2 \times 10^{6}$
- Ballon de foot :
  $U \sim 30$ m/s (100 km/h), $L \sim 0.2$ m, $\nu \sim 15 \times 10^{-6}$ m^2/s $\Rightarrow$ $Re \sim 4 \times 10^{5}$
- Robinet :
  $U \sim 50$ cm/s, $L \sim 2$ cm, $\nu \sim 10^{-6}$ m^2/s $\Rightarrow$ $Re \sim 10^{4}$

Equation d'Euler

Considérons l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien homogène (masse volumique uniforme), dans le champ de pesanteur (par ex.).

L'écoulement vérifie donc l'équation de continuité $\operatorname{div}\vec{u} = 0$ et l'équation de Navier–Stokes :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \left(\overset{\Rightarrow}{grad}\,\vec{u}\right)\cdot\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{g\vec{r}ad}p + \vec{g} + \nu\,\Delta\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{g\vec{r}ad}\hat{p} + \nu\,\Delta\vec{u} \qquad (2)$$

où $\hat{p} \equiv p - \rho\vec{g}\cdot\vec{x} = p + \rho g z$ est la pression motrice (z désigne la direction verticale ascendante).

Le rapport des ordres de grandeur des termes d'inertie à gauche et du terme de diffusif de droite s'écrit

$$\text{[Démonstration]} \quad \longrightarrow \quad \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} = Re \gg 1 \qquad (3)$$

Le terme visqueux est donc négligeable devant le terme inertiel, d'où l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \left(\overset{\Rightarrow}{grad}\,\vec{u}\right)\cdot\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{g\vec{r}ad}\hat{p} \qquad (4)$$

Ecoulement de fluide parfait

L'équation d'Euler obtenue pour un écoulement inertiel peut être aussi interprétée comme l'équation du mouvement pour un fluide "théorique", idéalisé, parfaitement non visqueux, c'est-à-dire de viscosité nulle $\nu = 0$, appelé fluide parfait.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{\vec{grad}}\,\vec{u}\right) \cdot \vec{u} = -\dfrac{1}{\rho}\,\vec{\mathrm{grad}}\hat{p} + \nu\,\Delta\vec{u} \\ \nu = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{\vec{grad}}\,\vec{u}\right) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho}\,\vec{\mathrm{grad}}\hat{p}$$

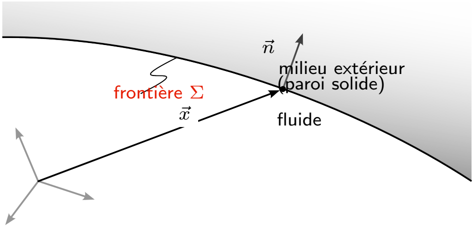
Les écoulements inertiels sont donc aussi aussi parfois appelés écoulements de fluide parfait, même si cette dénomination oublie que l'équation d'Euler n'est qu'une simplification de l'équation de Navier–Stokes dans la limite $Re \gg 1$ et que le fluide parfait n'existe pas (tous les fluides ayant une viscosité), a quelques exceptions exotiques près :
- Hélium liquide "superfluide" à $T < 4K$;
- Condensats de Bose-Einstein
- Plasmas de quarks et gluons (intérieur des étoiles à neutron...)

Propriétés de l'équation d'Euler

L'équation d'Euler n'est pas beaucoup plus facile à résoudre que celle de N-S, et pose quelques problèmes conceptuels...

- Dans certains cas elle n'a pas de solution unique (exemple : écoulements parallèles de la forme $u(y)$)
- Elle autorise des solutions discontinues (couches de cisaillement).

Mathématiquement l'équation d'Euler est d'ordre 1 en espace et nécessite donc des conditions limites moins contraignantes que l'équation de Navier-Stokes :



fluide réel (visqueux)	continuité de la vitesse (condition d'adhérence) $\vec{u}(\vec{x} \in \Sigma, t) = \vec{u}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t)$
fluide parfait (non visqueux)	continuité de la vitesse normale (condition de glissement ou non-pénétration) $\vec{u}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} = \vec{u}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n}$

Equation pour l'énergie cinétique

Repartons de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide homogène de masse volumique ρ soumis à une force extérieure volumique $\vec{f}$:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\overset{\Rightarrow}{grad}\, \vec{u} \right) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\mathrm{grad}} p + \vec{f} + \nu \Delta \vec{u}. \qquad (5)$$

En notant $\vec{\omega} = \vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{u})$ le champ de vorticité et $u^2 = ||\vec{u}||^2$, utilisons l'égalité mathématique (à vérifier en exercice)

$$\left(\overset{\Rightarrow}{grad}\, \vec{u} \right) \cdot \vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{\mathrm{grad}} u^2$$

En prenant le produit scalaire de l'eq. de Navier-Stokes avec $\vec{u}$, on obtient l'équation de bilan local pour l'énergie cinétique *massique* $e_k = \frac{1}{2} u^2$:

[Démonstration] $\longrightarrow$ $$\frac{de_k}{dt} = \frac{\partial e_k}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\mathrm{grad}}\,(e_k) = -\vec{u} \cdot \frac{\vec{\mathrm{grad}} p}{\rho} + \vec{f} \cdot \vec{u} + \rho \Pi_v \qquad (6)$$

où $\Pi_v = (1/\rho) \vec{div}(\overset{\Rightarrow}{\tau}) \cdot \vec{u}$ est la puissance massique des efforts visqueux.

Si $\vec{f} = -g \vec{e}_z$ et si le fluide est incompressible (ρ est uniforme), On peut réécrire ce bilan en introduisant l'énergie mécanique massique : $e_m \equiv p/\rho + gz + \frac{1}{2} u^2$:

[Démonstration] $\longrightarrow$ $$\frac{de_m}{dt} = \frac{\partial e_m}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\mathrm{grad}}\,(e_m) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \Pi_v \qquad (7)$$

Remarque : on peut décomposer Π_v en puissance extérieure et puissance intérieure
$\rho \Pi_v = \vec{div}(\overset{\Rightarrow}{\tau}) \cdot \vec{u} = \vec{div}(\overset{\Rightarrow}{\tau} \cdot \vec{u}) - \overset{\Rightarrow}{\tau} \cdot \overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{u})$ (cf. cours MMC)

Premier théorème de Bernoulli : conservation de l'énergie mécanique

On en déduit donc le Premier théorème de Bernoulli :

Hypothèses :
(a) fluide incompressible (ou écoulement isovolume),
(b) force volumique $\vec{g} = -g\vec{z}$ uniforme,
(c) écoulement stationnaire,
(d) " Fluide parfait" (ou plus rigoureusement forces visqueuses négligeables),
Alors la quantité $e_m \equiv p/\rho + gz + \frac{1}{2}u^2$ se conserve le long de chaque ligne de courant (ou trajectoire).

On note aussi (formellement) :

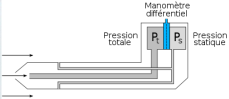
$$e_m = C(\vec{X_0}), \text{ où } \vec{X_0} \text{ est le "label" de chaque trajectoire lagrangienne.}$$

Remarques

- Dans le cas des gaz on néglige habituellement l'energie potentielle de gravité.
  Le théorème de Bernouilli s'écrit alors : $p + \frac{1}{2}\rho u^2 \equiv p_A = C^{te}$.
  p_A est appelée la pression de stagnation ou pression d'arrêt.
- Dans le cas des liquides, e_m est aussi courrament appelée la charge de l'écoulement.
- Si l'hypothèse (b) est remplacée par
  (b') : Forces volumiques conservatives $\vec{g} = -\vec{\mathrm{grad}}\,\mathcal{U}$,
  alors le théorème se généralise en : $p + \rho\mathcal{U} + \frac{1}{2}\rho u^2 = C(\vec{X_0})$.
- Il existe une généralisation si l'hypothèse (a) est remplacée par (a') : Fluide Barotrope, c.a.d. $\rho = \rho(P)$ (démo en exercice).

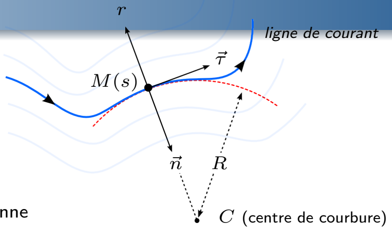
Application classiques de Bernoulli

1. Tube de Pitot (ou Antenne de Prandtl)



2. Effet Venturi (TP)
3. Loi de Torricelli (Exercice complémentaire)

Equations intrinsèques



Considérons l'écoulement *stationnaire* et *incompressible* d'un fluide dans le régime inertiel ($Re \gg 1$).
En notant s l'abscisse curviligne le long de la ligne de courant, R, $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ respectivement le rayon de courbure, la tangente et la normale localement à la ligne de courant (repère de Frenet), on montre :

1/ En projection sur la tangente $\vec{\tau}$, l'équation d'Euler donne

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho g z\right) = 0$$

On retrouve donc une démonstration alternative du théorème de Bernoulli vu précédemment.

2/ En projection sur la normale $\vec{n}$, l'équation d'Euler donne

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} = -\rho \frac{u^2}{R} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = \rho \frac{u^2}{R}$$

en notant r la coordonnée locale normale à la ligne de courant, pointant dans la direction *oppposée* au centre de courbure (cf. figure).

Corollaires :

- Dans des régions de l'écoulement où les lignes de courant sont rectilignes et parallèles ($R = \infty$), alors la pression motrice $\hat{p}$ est *constante perpendiculairement aux lignes de courant*.
- Dans des zones de l'écoulement où la vitesse est faible, $\hat{p}$ est **uniforme**.

Conséquence importante :
Dans les *zones de recirculation* courramment rencontrées dans le sillage d'objets non profilés, la pression (motrice) est uniforme et approximativement égale à la pression "loin de l'objet".

Théorèmes intégraux : motivation

Problème générique : calcul de la force exercée par un fluide $\mathcal{F}$ sur une structure de surface Σ.

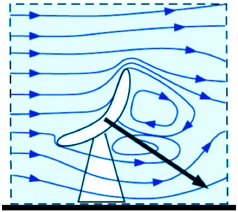
Méthode directe :

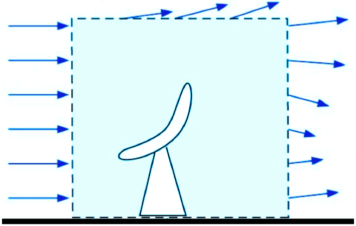
$$\vec{F}_{\mathcal{F}\to\Sigma} = \oint_{\Sigma} \left(-p\vec{n} + \overrightarrow{\overrightarrow{\tau}} \cdot \vec{n}\right) dS$$

Nécessite la connaissance du champ de pression et de contrainte visqueuse sur la surface... pas toujours possible !

Alternative ?

→ Bilan intégral de quantité de mouvement dans un volume de contrôle bien choisi. . .





Théorème d'Euler

Rappel (chapitre 5) :
Soit Ω un volume de contrôle (fixe) dans le fluide. On note $\partial\Omega$ la frontière du volume de contrôle Ω, et $\vec{n}$ sa normale sortante.

Le bilan intégral de quantité de mouvement pour le fluide contenu dans Ω est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho\vec{u}\,dV + \oint_{\partial\Omega} \rho\vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\;dS = \oint_{\partial\Omega} (-p\vec{n} + \overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}\cdot\vec{n})\,dS + \int_{\Omega} \rho\vec{f}\,dV \qquad (8)$$

Supposons que la frontière $\partial\Omega = \Sigma \cup \Gamma$ est composée de deux parties :

- Une surface Σ qui est la paroi d'un solide sur lequel le fluide exerce une force $\vec{F}$ que l'on cherche à déterminer

  (et sur laquelle la répartition de pression et de contrainte visqueuse ne sont pas connues).
- Une surface Γ sur laquelle on connait (ou bien on peut modéliser) le champ de pression et de vitesse, et sur laquelle les effets visqueux peuvent être négligés

Alors le bilan de quantité de mouvement prend la forme suivante, appelée *Théorème d'Euler* :

$$\vec{F} = -\oint_{\Gamma} [\rho\vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n}) + p\vec{n}]\;dS + \int_{\Omega} \rho\vec{f}\,dV \qquad (9)$$

Utilité : dans de nombreux cas il est possible de séparer Γ en plusieurs parties sur lesquelles p et $\vec{u}$ sont supposés uniformes.

Remarque : on peut aussi écrire l'intégrale surfacique sous la forme $-\oint_{\Gamma} \overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{D}}}\cdot\vec{n}\,dS$ où $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{D}}} = p\overrightarrow{\overrightarrow{1}} + \rho\vec{u}\otimes\vec{u}$ est le *tenseur dynalpie*.

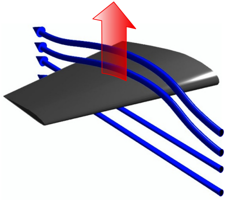
Théorème d'Euler : Exemples d'applications

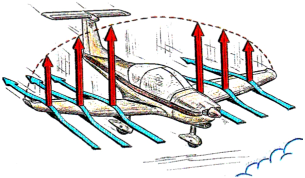
- Force exercée par l'écoulement dans une conduite coudée.
- Force exercée par l'écoulement dans une conduite avec rétrécissement ou élargissement.
- Jet impactant sur un auget (TP) ou sur une plaque (ex. 8.2)
- Détermination de la poussée d'un réacteur.
- (...)

Mécanique des fluides

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique





8. Ecoulements potentiels et Aérodynamique à haut Reynolds

Dynamique de la vorticité

En prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes on obtient l'équation de Helmholtz qui gouverne l'évolution de la vorticité $\vec{\omega} = r\vec{o}t(\vec{u})$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \left(gr\overset{\Rightarrow}{a}d\vec{\omega}\right)\cdot\vec{u} = \left(gr\overset{\Rightarrow}{a}d\vec{u}\right)\cdot\vec{\omega} + \nu\Delta\vec{\omega} \qquad \text{[Démonstration]} \qquad (10)$$

Interprétation : 3 modes d'évolution de la vorticité
Transport, Etirement , Diffusion
$\longrightarrow$ La viscosité peut également être interprétée comme un phénomène de diffusion de la vorticité.
Si $Re \gg 1$, la diffusion est négligeable, la vorticité est uniquement advectée et étirée.

Conséquence (Théorème de Laplace) :
Si $\vec{\omega} = \vec{0}$ initialement dans tout l'écoulement et si les forces visqueuses sont négligeables, alors $\vec{\omega}$ reste nulle.

Ce théorème justifie qu'en pratique de nombreux écoulements à grand nombre de Reynolds sont irrotationnels.

Ecoulements potentiels

Si $r\vec{o}t(\vec{u}) = \vec{0}$, alors il existe une fonction Φ appelée Potentiel des vitesses telle que :

$$\vec{u} = \vec{\mathrm{grad}}\Phi$$

Si, de plus, $div(\vec{u}) = 0$, alors le potentiel vérifie l'équation suivante :

$$\Delta\Phi = 0.$$

Dans ce cas le calcul d'un écoulement se ramène alors à la résolution d'une équation scalaire linéaire particulièrement simple !

Il existe des méthodes mathématiques puissantes pour résoudre cette équation dans un grand nombre de cas (cf. programme de Master).

Remarques :

- Φ est défini à une constante près, qui peut éventuellement dépendre du temps.
- Pour les écoulements bidimensionnels, la fonction potentiel Φ et la fonction de courant ψ introduite dans le chapitre cinématique jouent un rôle voisin.

  On montre que les courbes isopotentielles ($\Phi = C^{te}$) et les lignes de courant ($\psi = C^{te}$) forment des reseaux de courbes orthogonales.

Ecoulements potentiels : propriétés

Propriétés :

- Les écoulements potentiels vérifient $\Delta\vec{u} = 0$ [Démonstration].

  Ils sont donc solutions des équations d'Euler quelque soit la viscosité et donc le nombre de Reynolds !

- Réversibilité en temps : si $\vec{u} = \vec{\mathrm{grad}}(\Phi)$ est solution, alors $-\vec{u} = \vec{\mathrm{grad}}(-\Phi)$ l'est également.

- Additivité des solutions : si $\vec{u}_1 = \vec{\mathrm{grad}}\Phi_1$ et $\vec{u}_2 = \vec{\mathrm{grad}}\Phi_2$ sont deux écoulements potentiels alors $\vec{u} = \vec{\mathrm{grad}}(\Phi_1 + \Phi_2)$ l'est également.

  Remarque importante : non-additivité des pressions !

  $(p \neq p_1 + p_2)$

Limitation : On montre qu'un écoulement potentiel stationnaire autour d'un obstacle génère une force de traînée nulle sur celui-ci ! (Paradoxe de d'Alembert).

En revanche l'écoulement potentiel autour d'un objet bidimensionnel (par exemple un profil d'aile) peut conduire à une force de portance non nulle.

Second théorème de Bernouilli pour les écoulements potentiels

Sous les hypothèses suivantes :

(a) Ecoulement incompressible,
(b) Champ de gravité uniforme,
(e) Ecoulement potentiel (c.a.d. irrotationnel),

La quantité $p + \rho g z + \rho |\vec{u}|^2/2 + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ est *uniforme* dans tout l'écoulement. [Démonstration]

On note aussi (formellement) :

$$\frac{p}{\rho} + gz + |\vec{u}|^2/2 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C^{te}(t)$$

Cette version du théorème permet de calculer très facilement la pression (et donc les forces exercées sur un obstacle) dans un écoulement potentiel.

Remarques :

- Si l'écoulement est stationnaire, alors la C^{te} est habituellement déterminée en fonction des conditions à l'infini.
- Dans le cas instationnaire, la $C^{te}(t)$ peut être choisie arbitrairement à zéro (le potentiel est lui aussi défini à une $C^{te}(t)$ près).

Exemple 1 : cylindre

Exemple important : **Ecoulement potentiel autour d'un cylindre**.
(Exercice 8.0, a traiter en exercice préparatoire)

Considérons l'écoulement stationnaire, bidimensionnel autour d'un cylindre de rayon a dans un fluide de masse volumique ρ (on néglige la gravité, ou on travaille avec la pression motrice).

Deux solutions élémentaires :

- Solution symétrique $\Phi_s = x\left(1 + \frac{a^2}{x^2+y^2}\right) \equiv \left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$
- Solution antisymétrique $\Phi_a = arctan(y/x) \equiv \theta$
- La superposition des deux, c.a.d. $\Phi = U\Phi_s + \frac{\Gamma}{2\pi}\Phi_a$, est également solution.

Montrer que la force exercée sur le cylindre par cet écoulement (par unité de longueur dans la direction transverse) est dans la direction y et a pour intensité

$$F_y = - \quad \rho \Gamma U$$

Démonstrations :
(i) Calcul direct : par calcul de la pression $p(r,\theta)$ puis intégration sur la surface.
(ii) Calcul indirect : par bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle judicieusement choisi.

Remarque : ce résultat est généralisable quelque soit la forme de l'obstacle !
Théorème de Kutta-Joukowski

Exemple 2

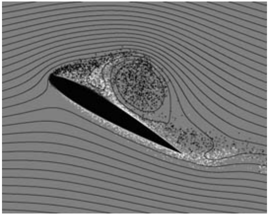
Exemple 2 :

Oscillations dans un tube en U de longueur L et section S.

http ://ressources.unisciel.fr/mecaflux/co/Chap5_Exo2.html

Exercice :
Montrez que si les oscillations sont de faible amplitudes, la période d'oscillation est $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$

Ecoulement autour d'un obstacle à haut Re : modélisation

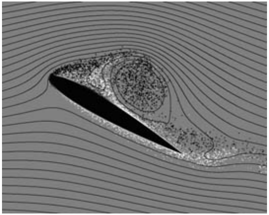


A grand Reynolds ($Re \gtrsim 10^3$), l'écoulement autour d'un obstacle se décompose en général en plusieurs domaines :

- Loin de l'obstacle : écoulement inertiel et irrotationnel (Potentiel).
  La pression peut être déterminée à l'aide de Bernouilli.
- zones décollées : écoulement inertiel mais rotationnel.
  (Bernoulli inutilisable ; en général la pression est quasi-uniforme dans ces zones).
- En proche paroi : Couches limites d'épaisseur $\delta \ll L$ à l'intérieur desquelles l'effet de la viscosité est dominant.
- Sillage : viscosité dominante.

Remarques :
Pour $Re \gtrsim 10^4$ le sillage et les les zones de recirculation deviennent en général turbulentes.
Pour $Re \gtrsim 10^6$ les couches limites deviennent également turbulentes.

Ecoulement autour d'un obstacle à haut Re : Calcul des forces



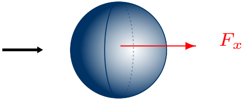
$$\vec{F} = \int_S (-p\vec{n} + \overrightarrow{\overrightarrow{\tau}} \cdot \vec{n}) dS$$

On montre que la force exercée par le fluide sur l'objet peut être décomposée en 3 termes :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\hat{p}} + \vec{F}_{\mathcal{A}} + \vec{F}_v$$

- $\vec{F}_{\hat{p}} = -\int_S \hat{p}\vec{n} dS$ est la force due à la pression "motrice" et peut être calculée a partir de la solution "extérieure" inertielle et "en négligeant la gravité".
- $\vec{F}_{\mathcal{A}}$ est la poussée d'Archimède qui contient l'effet de la gravité.
- $\vec{F}_v = \int_S \overrightarrow{\overrightarrow{\tau}} \cdot \vec{n} dS$ peut être calculée a partir de la solution "intérieure" dans la couche limite.

Ecoulement autour d'une sphère : résultats théoriques



Il existe une solution exacte dans deux cas :

- Régime de Stokes ($Re \ll 1$) : (cf. Chap. 6).

  Force associée : $F_x = 6\pi\mu a U$

  c'est à dire : $C_x = \frac{24}{Re}$

- Solution potentielle (cf. TD).

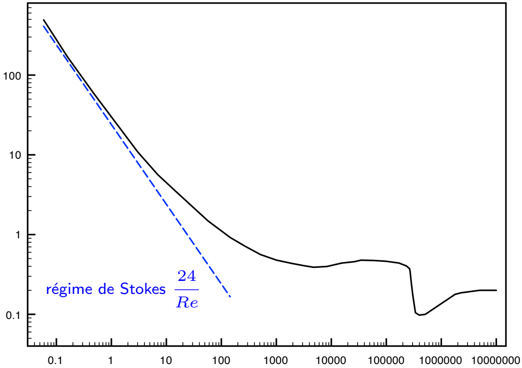
  $\Phi(r,\theta) = U\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right)\cos\theta$

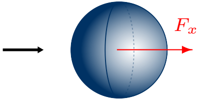
  Force correspondante : $\vec{F} = \vec{0}$ (Paradoxe de d'Alembert).

Obstacle non profilé : la sphère

Coefficient de traînée

$$C_d = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2\, S}$$



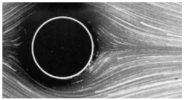


$S = \pi R^2$: surface projetée ;

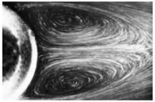
U : vitesse incidente

Nombre de Reynolds $Re = \frac{U\,D}{\nu}$

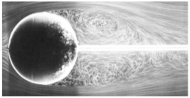
①



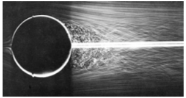
②



③



④



Illustrations : http://phylam.org/physique/resumes/resume-reynolds.pdf

Ecoulement autour d'une sphère en mouvement oscillant

Exercice (TD 9.1) :
Considérons une sphère de rayon a oscillante à la pulsation ω :

$$\vec{U} = U_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$$

On montre que sous les deux hypothèses :

- Oscillation de faible amplitude ($U_0/\omega \ll a$),
- Période d'oscillation rapide par rapport au temps de diffusion visqueuse ($\omega^{-1} \ll \tau_v = a^2/\nu$),

Alors :

- Les effets visqueux restent confinés à une couche limite d'épaisseur $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$.
- A l'extérieur de la couche limite l'écoulement est potentiel et contribue à une force $\vec{F}_p$:

  $$\vec{F}_p = -\rho V C \frac{d\vec{U}}{dt}$$

  où V est le volume de la sphère et $C = 1/2$.

  Interprétation : c'est la force a fournir pour accélérer une "masse ajoutée" à la sphère correspondant à un volume $V/2$ de fluide.
- Par analogie avec le second problème de Stokes (cf. TD 2) la force de frottement est

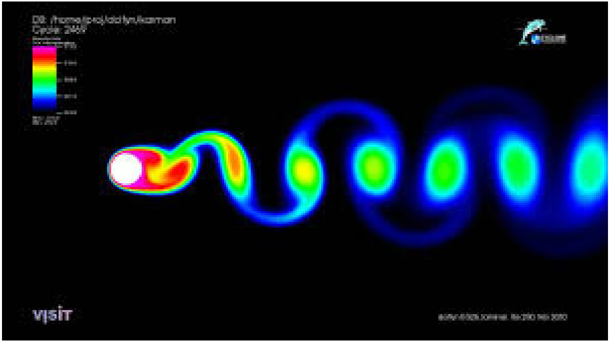
  $$\vec{F}_v \approx -\frac{\mu a^2}{\delta}\vec{U}$$

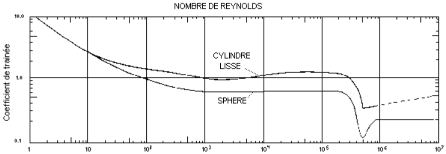
Ecoulement autour d'un cylindre : résultats théoriques

- Régime de Stokes ($Re = 0$) : Il n'existe pas de solution des équations de Stokes bidimensionnelles autour d'un cylindre ! (Paradoxe de Stokes)
- Cas des faibles nombres Reynolds : $F_x = \frac{1}{2}\rho S C_x U^2$ avec :
  $C_x = \mathcal{O}\left(Re^{-1}\log Re\right)$
- Cas potentiel (cf. TD exercice préparatoire)
  Il existe une solution potentielle NON UNIQUE.
  $F_x = 0$ (paradoxe de d'Alembert).

Ecoulement "réel" autour d'un cylindre : cas non tournant

Exemple pour Re = 200 :





Ecoulement "réel" autour d'un cylindre : cas tournant

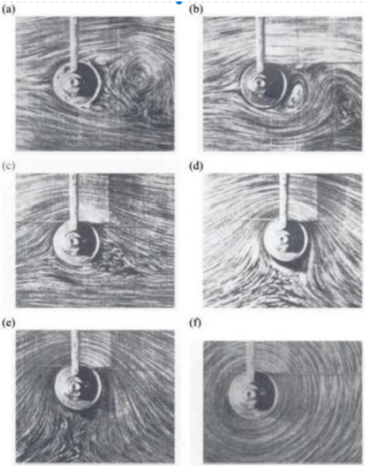
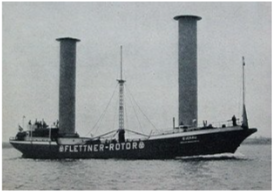


FIGURE 2.22 – Visualisations de l'écoulement d'eau autour d'un cylindre en rotation à $Re = 10^4$, Prandtl (1961)[139] ; (a), $\alpha = 0$; (b), $\alpha = 1$; (c), $\alpha = 2$; (d), $\alpha = 4$; (e), $\alpha = 6$; (f), $\alpha = \infty$

Application : turbovoile ou rotor "Fletner"



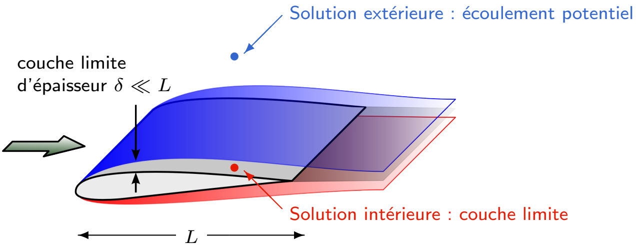
a) Buckau ou Baden-Baden

b) Alcyone

Ecoulement autour d'un profil d'aile

On montre (cf. programme de master) que si l'angle d'incidence n'est pas trop élevé, l'écoulement peut être décomposé en deux parties :

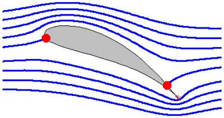
- Solution extérieure potentielle.
  Peut être calculé à partir de la théorie des profils portants.
  $\rightarrow$ permet de calculer la portance F_y.
- Solution intérieure visqueuse.
  Peut être calculée a partir de la théorie de la couche limite de Prandtl.
  $\rightarrow$ permet de calculer la traînée F_x



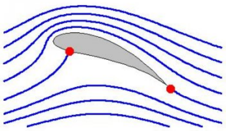
Notions sur la théorie des profils portants

Il existe des méthodes mathématiques puissantes pour calculer l'écoulement potentiel autour d'un objet 2D de forme quelconque (potentiel complexe, transformation conforme, ...)

La solution n'est pas unique mais définie à une constante Γ près (la circulation). La "bonne" valeur de Γ est celle qui conduit à un écoulement régulier au bord de fuite : condition de Kutta.



Solution avec $\Gamma = 0$
Condition de Kutta non vérifiée



Solution avec $\Gamma \neq 0$
Condition de Kutta vérifiée

On montre que :

- Pour un profil symétrique $\Gamma = -\pi U L \alpha \quad \rightarrow \quad C_y = 2\pi\alpha$
- Pour un profil cambré $\Gamma = -\pi U L(\alpha - \alpha_0) \quad \rightarrow \quad C_y = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$

Notions sur la théorie de Prandlt

- Si $Re < 10^5$ la couche limite est laminaire et est donnée par la solution de Blasius :

  $$\delta(x) \approx \sqrt{\nu x / U}$$

  Justification : analogie avec le problème de la couche limite temporelle sur une plaque infinie (premier problème de Stokes) pour lequel $\delta(t) = \sqrt{\nu t}$ (cf. chap. 2).

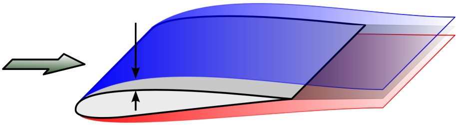
  Dans ce cas la contrainte visqueuse est donnée par : $\tau_{xy}(x) = \mu \partial u / \partial y \approx \mu U / \delta(x)$

  et la force de frottement totale (linéique) vaut :
  $F_v = \int \tau_{xy}(x) dx \approx \mu U \int_0^L (\nu x / U)^{-1/2} dx = \rho U^2 L Re^{-1/2}$

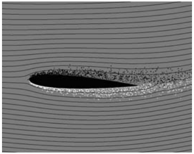
- Si $Re > 5 \cdot 10^5$ la couche limite est turbulente.

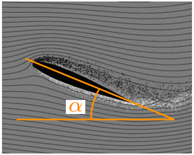
  On utilise alors des lois empiriques pour estimer l'épaisseur des couches limites et la force de frottement. Par exemple :

  $$\delta(x) \approx 0.35 x \left(U x / \nu \right)^{-1/5} ; \qquad F_v \approx \rho L U^2 \left(\log_{10}(Re) - 2 \right)^{-2}$$

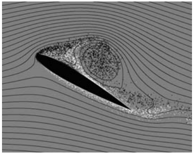


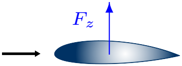
Ecoulement autour d'un profil d'aile : cas des fortes incidences


incidence faible



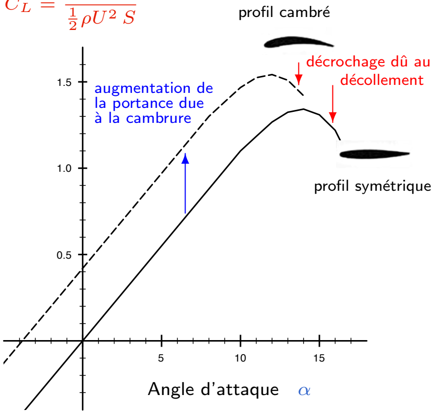
incidence modérée


incidence forte



Coefficient de portance

$$C_L = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho U^2\, S}$$



S : surface de l'aile, U : vitesse incidente

Notion de couche limite

La théorie de Prandtl (1905) permet de décrire l'écoulement dans la couche limite en proche paroi.

On montre (cf. programme de master) :

- que la pression ne varie pas dans l'épaisseur de la couche limite : $\dfrac{\partial p}{\partial n} = 0$ (où n désigne la direction normale à la paroi)
- que l'épaisseur de la couche limite à pour ordre de grandeur : $\delta = \dfrac{L}{\sqrt{Re}}$, où $Re = UL/\nu$

On retrouve bien $\delta \ll L$ pour $Re \gg 1$: l'approximation d'écoulement inertiel (ou de fluide parfait) est donc valable sur un domaine qui coïncide quasiment avec l'intégralité du volume de fluide.

Intérêt pratique en aérodynamique (par ex.) : on calcule l'écoulement autour d'une géométrie d'aile en fluide parfait et la pression calculée ainsi sur l'aile est correcte puisqu'elle ne varie pas à la traversée de la couche limite.