Exercice complémentaire 2 : premier problème de Stokes[1]

1 Position du problème

On s'intéresse au phénomène de diffusion de la quantité de mouvement dans un milieu fluide visqueux semi-infini, initialement au repos et limité en $x = 0$ par une paroi qui est mise en mouvement à vitesse constante U_1 à partir de $t = 0$ (fig. 1). Les portions de fluide en contact avec la paroi sont entraînées verticalement à la vitesse U_1 à cause de la condition d'adhérence, et les frottements visqueux conduisent les couches voisines à se mettre progressivement en mouvement vers le haut. Le profil de vitesse verticale $v(x, t)$ évolue alors au cours du temps suivant une loi typique de diffusion instationnaire dont la dérivation est l'objet de cet exercice.

Ce phénomène a été modélisé et mis en équation en cours. L'application du principe de conservation de la quantité de mouvement (c'est-à-dire du principe fondamental de la dynamique) pour un volume élémentaire de fluide et le choix d'une loi de comportement de type fluide newtonien conduisent à l'équation suivante pour la vitesse verticale du fluide, en l'absence de la pesanteur et pour une pression supposée uniforme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{1}$$

où ν désigne la viscosité cinématique du fluide (m^2/s). A cette équation d'évolution s'ajoutent la condition limite $v(x = 0, t) = U_1$ pour $t > 0$ et la condition initiale $v(x, t = 0) = 0$ pour $x > 0$.

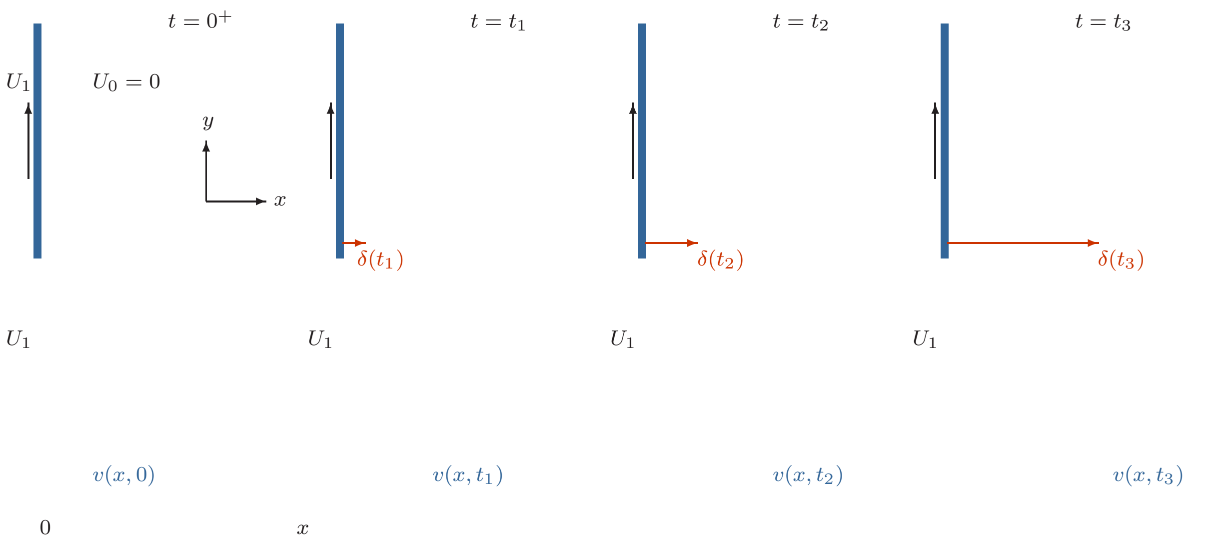

Figure 1 – *Entraînement vertical de fluide par diffusion visqueuse (frottements) horizontale : évolution de la position des particules fluides (haut) et du profil de vitesse verticale (bas). $\delta(t)$ désigne la longueur de pénétration du phénomène.*

2 Méthode

L'équation (1) appartient à la famille des équations linéaires de diffusion instationnaire, pour lesquelles il existe plusieurs techniques de résolution mathématique. Dans le cas présent où il n'y a pas de longueur imposée par le problème (le milieu est semi-infini) il est possible de rechercher une solution dite *auto-semblable*, ou *auto-similaire*, dont la forme générale peut être trouvée par le biais d'une méthode issue de la théorie des groupes d'invariance des systèmes d'équations. On se bornera dans cette partie à appliquer cette technique sans la justifier.

1. Ce problème est aussi appelé *problème de Rayleigh*.

1. La solution générale peut s'ecrire formellement comme une relation $\mathcal{F}$ entre toutes les variables et paramètres du problème : le quintuplet $\{v, x, t, \nu, U_1\}$ est solution de l'équation (1) et des conditions limites et initiales associées si et seulement si $\mathcal{F}(v, x, t, \nu, U_1) = 0$.
   En appliquant dans l'équation (1) et les conditions limites et initiales associées le changement de variable $v = Av^*$, $x = Bx^*$, $t = Ct^*$, $\nu = D\nu^*$ et $U_1 = EU_1^*$, déterminer les relations que doivent satisfaire les facteurs multiplicatifs A, B, C, D et E afin que $\{v^*, x^*, t^*, \nu^*, U_1^*\}$ soit aussi solution.
2. Les facteurs qui vérifient les deux relations trouvées précédemment décrivent ce que l'on appelle le groupe d'invariance multiplicatif du système. Le théorème mathématique sur les groupes d'invariance nous assure que dans ce cas le quintuplet $\{Av, Bx, Ct, D\nu, EU_1\}$ est aussi solution, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(Av, Bx, Ct, D\nu, EU_1) = 0$.
   En choisissant A, B, C, D et E de manière judicieuse, montrer que la solution formelle peut s'écrire $\mathcal{F}(v/U_1, x/\sqrt{\nu t}, 1, 1, 1) = 0$, c'est-à-dire qu'il existe une relation qui lie v/U_1 et $x/\sqrt{\nu t}$, ou encore que $v/U_1 = f(x/\sqrt{\nu t})$.

En conclusion cette technique mathématique montre que l'on peut chercher une solution de la forme

$$v(x,t) = U_1\, f(x/\sqrt{\nu t}) = U_1\, f(\eta), \tag{2}$$

où $\eta = x/\sqrt{\nu t}$ est appelée *variable de similitude* du problème.

3 Résolution

1. Question préliminaire : calculer $\dfrac{\partial \eta}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$ puis $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$.
2. En injectant le changement de variables (2) dans l'équation (1) et dans les conditions limites et initiales associées, montrer que le problème à résoudre s'écrit

   $$f''(\eta) + \frac{1}{2}\eta\, f'(\eta) = 0, \quad \text{avec } f(0) = 1 \text{ et } f(\eta \to \infty) = 0. \tag{3}$$

   où le prime $'$ désigne la dérivée par rapport à la variable η.
3. Résoudre l'équation pour $g(\eta) = f'(\eta)$ puis montrer que $f(\eta) = 1 - \mathrm{erf}\left(\dfrac{\eta}{2}\right) = \mathrm{erfc}\left(\dfrac{\eta}{2}\right)$
   où les fonctions erreur erf et erreur complémentaire erfc sont définies par

   $$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^{*2}}\, dx^*, \quad \text{et} \quad \mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x).$$

   Ces deux fonctions sont tracées sur la figure 2. On remarquera que $\mathrm{erf}(0) = 0$ et $\mathrm{erf}(x \to +\infty) = 1$.
4. En déduire l'expression de la solution $v(x,t)$ et tracer sous Matlab le profil de vitesse adimensionné $v(x,t)/U_1$ pour différents instants t (on prendra $\nu = 10^{-3}$ m^2/s).
5. Cette expression fait apparaître la quantité $\delta(t) = \sqrt{\nu t}$: vérifier qu'il s'agit d'une échelle de longueur. Cette échelle caractéristique des problèmes de diffusion est appelée *longueur ou profondeur de pénétration*, et fournit une *loi d'échelle* permettant d'estimer la distance sur laquelle le phénomène de diffusion est actif (cf. fig. 1).
6. Question subsidiaire : déterminer l'expression du frottement pariétal $\vec{\tau}_p(t)$, c'est-à-dire la contrainte à la paroi. On notera μ la viscosité dynamique du fluide (Pa.s).

$y = \mathrm{erf}(x)$
$y = \mathrm{erfc}(x)$

y

x

FIGURE 2 – *Fonctions erreur* erf *et erreur complémentaire* erfc.