# Mécanique des fluides

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique
david.fabre@imft.fr

Enroulement d'un filet de miel. Patricia ERN © IMFT

## 4. Viscosité et Rhéologie

## Sommaire

## Definitions

- En plus d'une force normale (pression, chap. 2), on constate qu'un fluide en mouvement peut exercer sur une surface $\mathcal{S}$ une force tangentielle.
- Commençons par caractériser cette force dans le cas simple d'un *écoulement plan parallèle* :

$$\vec{u} = u(y,t)\vec{e}_x$$

- **Définition :** On appelle Contrainte Visqueuse $\tau_{xy}$ la force tangentielle *Par unité de surface*, exercée dans la direction $x$ sur une facette d'orientation normale y, par le demi-espace $y^+$ sur le demi-espace $y^-$ .

$$d\vec{F}_{(y^+)\rightarrow(y^-)} = (-p\vec{e_y} + \tau_{xy}\vec{e_x})\, dS$$

- **Définition :** on appelle taux de cisaillement local la quantité $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}$
- **Définition :** (pour un écoulement plan parallèle) on appelle *Loi rhéologique* la loi reliant $\tau_{xy}$ à $\dot{\gamma}$.
- Remarque importante : tout comme la pression, la contrainte visqueuse s'exerce à la fois sur une paroi solide ou sur une surface (fictive) séparant le fluide en deux sous-domaines.

## Cas des gaz

Pour les gaz, on observe une loi rhéologique *linéaire* (ou Newtonienne).

$$\tau_{xy} = \mu\dot{\gamma}$$

$\mu =$ viscosité cinématique.

## Cas des gaz

Pour les gaz, on observe une loi rhéologique *linéaire* (ou Newtonienne).

$$\tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}$$

$\mu =$ viscosité cinématique.

Explication physique : Illustrations avec le programme KINETICS.M.
La contrainte visqueuse est due :

- (entre deux volumes fluides adjacents) *aux échanges de quantité de mouvement tangentielle due aux transferts de particules venant de régions de vitesse moyenne (au sens MMC) différentes.*
- (sur une surface solide) *aux variations de quantité de mouvement tangentielle dues aux collisions sur la paroi*

## Cas des gaz

Pour les gaz, on observe une loi rhéologique *linéaire* (ou Newtonienne).

$$\tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}$$

$\mu =$ viscosité cinématique.

Explication physique : Illustrations avec le programme KINETICS.M.
La contrainte visqueuse est due :

- (entre deux volumes fluides adjacents) *aux échanges de quantité de mouvement tangentielle due aux transferts de particules venant de régions de vitesse moyenne (au sens MMC) différentes.*
- (sur une surface solide) *aux variations de quantité de mouvement tangentielle dues aux collisions sur la paroi*

$=>$ Dans un gaz la viscosité augmente avec la température (cad avec l'agitation thermique).
(Loi de Sutherland : $\mu \approx \mu_0 (T/T_0)^{3/2}$)

## Cas des gaz

Pour les gaz, on observe une loi rhéologique *linéaire* (ou Newtonienne).

$$\tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}$$

$\mu =$ viscosité cinématique.

Explication physique : Illustrations avec le programme KINETICS.M.
La contrainte visqueuse est due :

- (entre deux volumes fluides adjacents) *aux échanges de quantité de mouvement tangentielle due aux transferts de particules venant de régions de vitesse moyenne (au sens MMC) différentes.*
- (sur une surface solide) *aux variations de quantité de mouvement tangentielle dues aux collisions sur la paroi*

=> Dans un gaz la viscosité augmente avec la température (cad avec l'agitation thermique).
(Loi de Sutherland : $\mu \approx \mu_0 (T/T_0)^{3/2}$)

Remarque sur les *conditions limites* :

Une paroi est elle-même constituée de particules en agitation thermique ... Après chaque collision les particules sont renvoyées dans des directions aléatoires. Pour une paroi fixe en $y = 0$ :

$$u_x(y = 0) = 0$$

Généralisation :

Pour une paroi de vitesse $U_{paroi}$ en $y = y_{paroi}$, $u(y_{paroi}) = U_{paroi}$.
On appelle cette condition une *condition limite d'adhérence* .

## Cas des liquides simples

Liquides "simples" = constitués de "petites molécules" (eau, huiles, métaux liquides, etc...)

On observe également une loi rhéologique linéaire : $\tau_{xy} = \mu\dot{\gamma}$ (loi Newtonienne).

Explication physique : pour mettre en mouvement les strates de fluide les unes par rapport aux autres, il faut briser des liaisons pour en recréer d'autres.

C'est d'autant plus facile que l'agitation thermique est importante

=> Dans un liquide (simple), la viscosité diminue avec la température !

(Loi de Suttner pour l'eau : $\mu = \mu_0 e^{-\alpha(T-T_0)}$ ).

## Cas des liquides simples

Liquides "simples" = constitués de "petites molécules" (eau, huiles, métaux liquides, etc...)

On observe également une loi rhéologique linéaire : $\tau_{xy} = \mu\dot{\gamma}$ (loi Newtonienne).

Explication physique : pour mettre en mouvement les strates de fluide les unes par rapport aux autres, il faut briser des liaisons pour en recréer d'autres.

C'est d'autant plus facile que l'agitation thermique est importante

=> Dans un liquide (simple), la viscosité diminue avec la température !

(Loi de Suttner pour l'eau : $\mu = \mu_0 e^{-\alpha(T-T_0)}$ ).

Remarque sur les *conditions limites* :
L'étude des interactions entre particules fluides et molécules constituant une paroi solide justifient également une *condition limite d'adhérence*

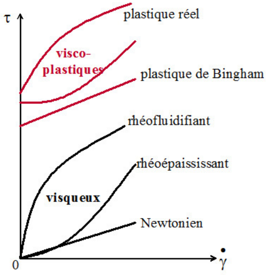
$$u(y_{paroi}) = U_{paroi}$$

# Cas des liquides "complexes"

Pour des liquides "complexes" (mélanges, suspensions, contenant des "grosses" molécules ou particules) on observe des comportements divers :

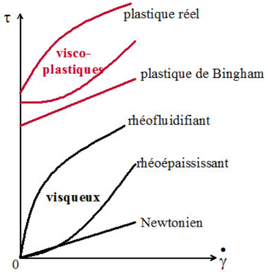
## Cas des liquides "complexes"

Pour des liquides "complexes" (mélanges, suspensions, contenant des "grosses" molécules ou particules) on observe des comportements divers :



## Cas des liquides "complexes"

Pour des liquides "complexes" (mélanges, suspensions, contenant des "grosses" molécules ou particules) on observe des comportements divers :




- Fluides rhéo-fluidifiants (shear-thinning) : la viscosité effective diminue avec le cisaillement.

  Exemples : shampooing, lessive, jus de fruits concentrés, encres d'imprimerie,...
- Fluides rhéo-épaississants (shear-thickenning) : la viscosité effective augmente avec le cisaillement.

  Exemples : maïzena, suspensions diluées de polymères, ...
- *Fluides à seuil* (ou solides visco-plastiques) : il faut exercer une contrainte minimale $\tau_c$ pour mettre le fluide en mouvement.

  Exemples : boues, mayonnaise, ketchup, dentifrice, cf. TD 4.1.

## Compléments : lois rhéologiques instationnaires

Pour certains fluides on observe de plus que la loi rhéologique ne dépend pas seulement des valeurs instantanées de $\tau_{xy}$ et $\dot{\gamma}$ mais aussi de la manière dont les contraintes et les déformations varient au cours du temps :

- Comportement thixotrope
  La viscosité "effective" diminue avec la durée d'imposition de la contrainte.
  Exemples : Terre agricole, boue, polymères, ...
- Comportement viscoélastique
  Contraintes exercées "rapidement" => Comportement de solide élastique
  Contraintes exercées "lentement" => Comportement de fluide visqueux.
  Exemples : Maïzena, pâte silicone, ...

## Loi rhéologique pour un fluide Newtonien (cas général)

Généralisation : $\tau_{xy}$ et $\dot{\gamma}$ se généralisent en introduisant les tenseurs $\overset{\Rightarrow}{\tau}$ et $\overset{\Rightarrow}{D}$.

## Loi rhéologique pour un fluide Newtonien (cas général)

Généralisation : $\tau_{xy}$ et $\dot{\gamma}$ se généralisent en introduisant les tenseurs $\overset{\Rightarrow}{\tau}$ et $\overset{\Rightarrow}{D}$.

On appelle *Loi rhéologique* la relation entre les tenseurs $\overset{\Rightarrow}{\tau}$ et $\overset{\Rightarrow}{D}$.

## Loi rhéologique pour un fluide Newtonien (cas général)

Généralisation : $\tau_{xy}$ et $\dot{\gamma}$ se généralisent en introduisant les tenseurs $\overset{\Rightarrow}{\tau}$ et $\overset{\Rightarrow}{D}$.

On appelle *Loi rhéologique* la relation entre les tenseurs $\overset{\Rightarrow}{\tau}$ et $\overset{\Rightarrow}{D}$.

On appelle **fluide newtonien** un fluide dont la loi rhéologique est linéaire.

## Loi rhéologique pour un fluide Newtonien (cas général)

Généralisation : $\tau_{xy}$ et $\dot{\gamma}$ se généralisent en introduisant les tenseurs $\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}$ et $\overrightarrow{\overrightarrow{D}}$.

On appelle *Loi rhéologique* la relation entre les tenseurs $\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}$ et $\overrightarrow{\overrightarrow{D}}$.

On appelle **fluide newtonien** un fluide dont la loi rhéologique est linéaire.

Les principes de la MMC (symétrie, objectivité, etc...) imposent qu'une loi rhéologique linéaire est nécessairement de la forme :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}} = 2\mu \, \overrightarrow{\overrightarrow{D'}} + \mu^* \mathrm{div}\,(\vec{u}) \overrightarrow{\overrightarrow{1}}$$

où $\mu$ désigne la viscosité dynamique du fluide, $\mu^*$ la viscosité volumique (habituellement négligée), $\overrightarrow{\overrightarrow{D'}}$ est le déviateur du tenseur des taux de déformations donnés par

$$\overrightarrow{\overrightarrow{D'}} = \overrightarrow{\overrightarrow{D}} - \frac{\mathrm{div}\,(\vec{u})}{3} \overrightarrow{\overrightarrow{1}}; \qquad \overrightarrow{\overrightarrow{D}} = \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\, \vec{u} + {}^t \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\, \vec{u} \right)$$

Dans le cas d'un écoulement isovolume ($\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$) on l'écrira sous la forme plus simple :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}} = 2\mu \, \overrightarrow{\overrightarrow{D}}$$

## Etablissement de l'équation

Considérons un écoulement *parallèle* , éventuellement instationnaire, d'un fluide *Newtonien*, *incompressible* décrit par son champ de vitesse

$$\vec{u} = u(y,t)\vec{e}_x$$

## Etablissement de l'équation

Considérons un écoulement *parallèle* , éventuellement instationnaire, d'un fluide *Newtonien*, *incompressible* décrit par son champ de vitesse

$$\vec{u} = u(y,t)\vec{e}_x$$

Par un bilan de quantité de mouvement sur un volume élémentaire de fluide (projeté dans la direction $x$), on obtient l'équation des films visqueux (parfois appelée Equation de Navier) :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g_x - \left[\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

## Etablissement de l'équation

Considérons un écoulement *parallèle* , éventuellement instationnaire, d'un fluide *Newtonien*, *incompressible* décrit par son champ de vitesse

$$\vec{u} = u(y,t)\vec{e}_x$$

Par un bilan de quantité de mouvement sur un volume élémentaire de fluide (projeté dans la direction $x$), on obtient l'équation des films visqueux (parfois appelée Equation de Navier) :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g_x - \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Remarques :

1. Autre forme possible de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g_x - \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

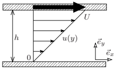
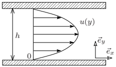
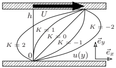
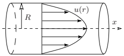
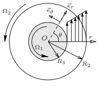
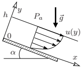
2. On peut justifier que le gradient de pression est nécessairement uniforme : $\left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right] = C_{te} = \frac{[P(L)-P(0)]}{L}$ [Démonstration :]

3. Conditions limites :

   - Sur une surface solide de vitesse $U_p$ :
     $u(y_p) = U_p$ (Condition d'adhérence.)
   - Sur une surface libre (liquide/gaz de masse volumique négligeable) :
     $\tau_{xy} = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (Condition de contrainte nulle).

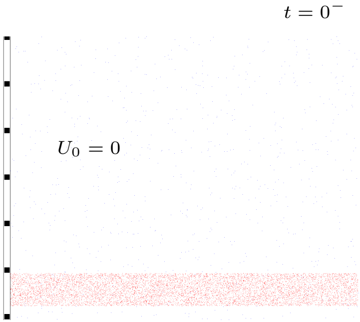
# Solutions classiques stationnaires (rappels L2)

**(Quelques) solutions exactes des équations de Navier-Stokes**

| Schéma | Hypothèses | Solution | Nom de l'écoulement |
|---|---|---|---|
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ <br> $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ | $\vec{u} = u(y)\,\vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{Uy}{h}$ <br> $p = C^{te}$ | Couette plan <br> sans gradient de pression <br> $(\partial p/\partial x = 0)$ |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ <br> $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ | $\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(y)\,\vec{e}_x$ <br> avec $u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} y(h-y)$ | Poiseuille plan |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ <br> $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ | $\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(y)\,\vec{e}_x$ <br> avec $u(y) = U\left[\frac{y}{h} - K\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right]$ <br> où $K = \frac{h^2}{2\mu U}\frac{dp}{dx}$ | Couette plan <br> avec gradient de pression <br> $(\partial p/\partial x \neq 0)$ <br> = "Couette-Poiseuille" |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ <br> $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$ | $\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(r)\,\vec{e}_x$ <br> avec $u(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left(R^2 - r^2\right)$ | Poiseuille cylindrique |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ <br> $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$ <br> $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ | $\vec{u} = v(r)\vec{e}_\theta$ avec $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$ <br> où $A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$ <br> et $B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)\, R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$ | Couette cylindrique <br> = "Couette-Taylor" |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ <br> $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ | $\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$ <br> avec $u(y) = \frac{g \sin\alpha}{2\nu} y(2h - y)$ <br> $p(y) = \rho g(h-y)\cos\alpha + P_a$ | Film tombant |

## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

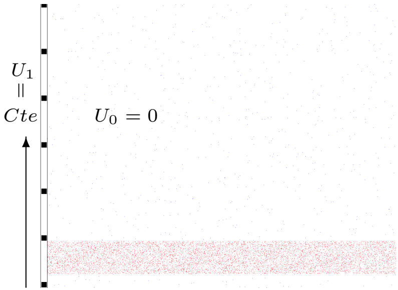
**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).



## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

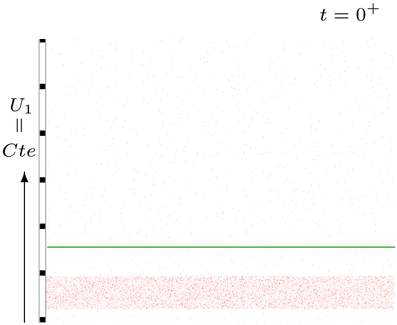
**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).

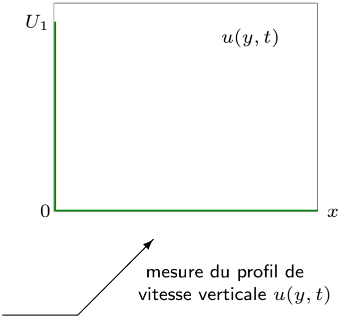
$t = 0^+$



## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

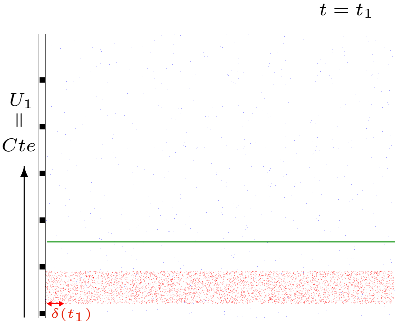
**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).

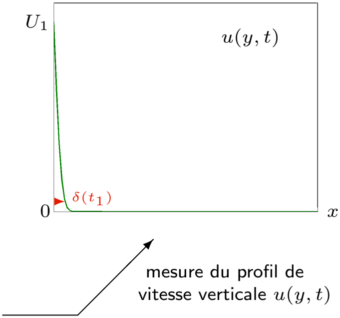


## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

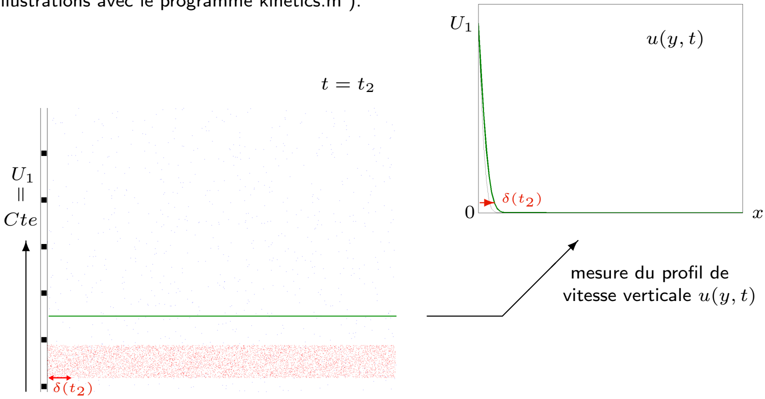
**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).



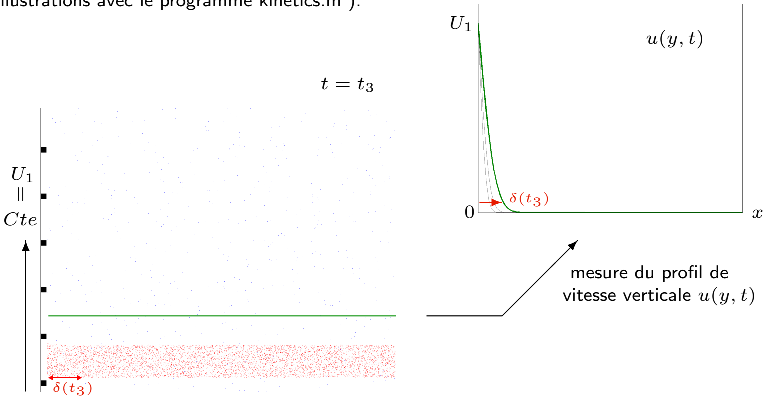
## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).



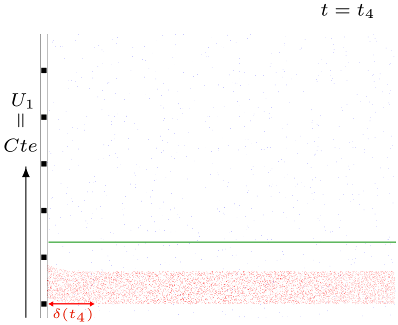
## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

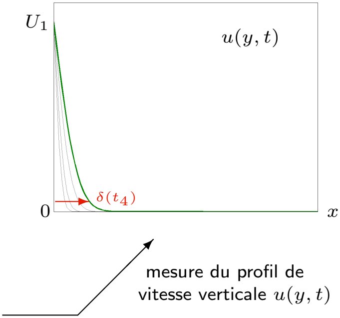
**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).



## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).

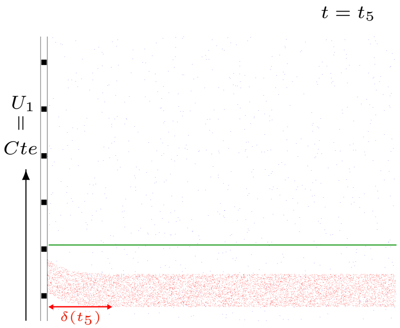


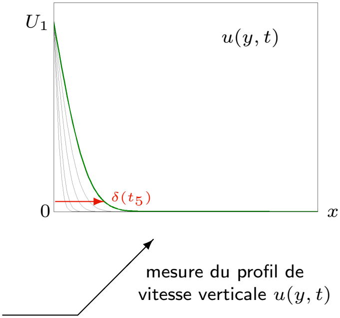




mesure du profil de vitesse verticale $u(y, t)$

# Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

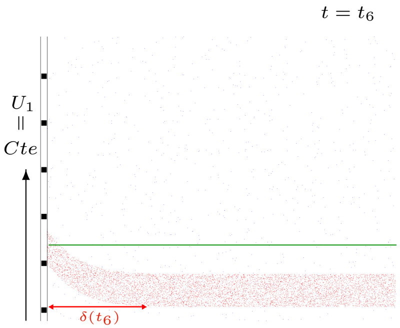
**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).

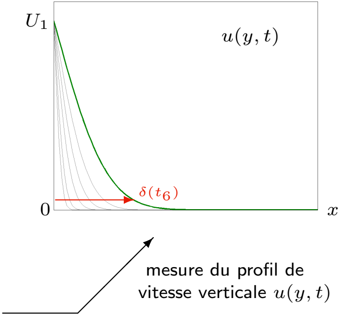


## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

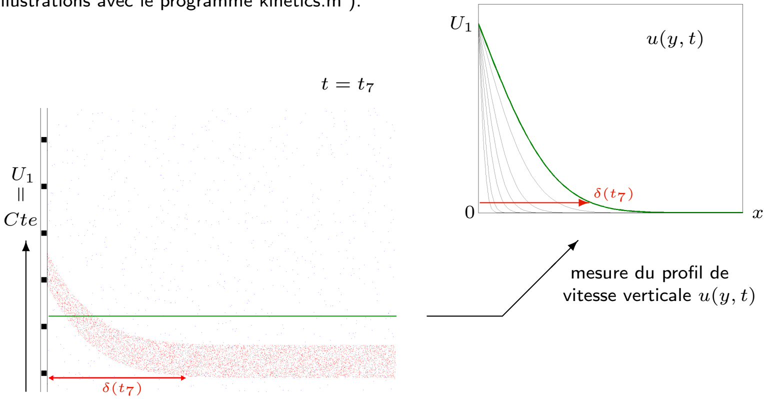
**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).



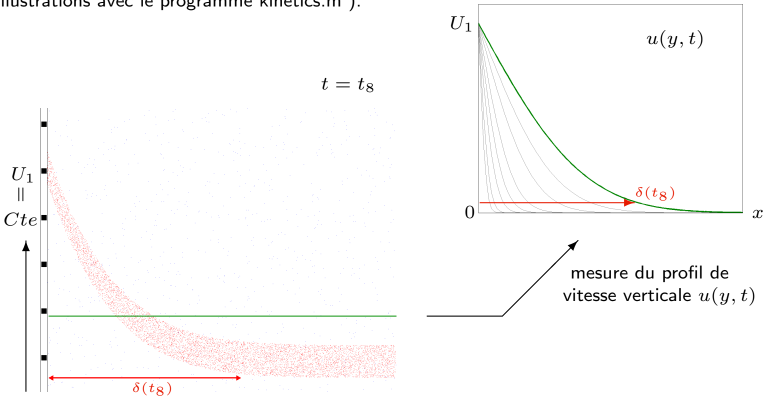
## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).



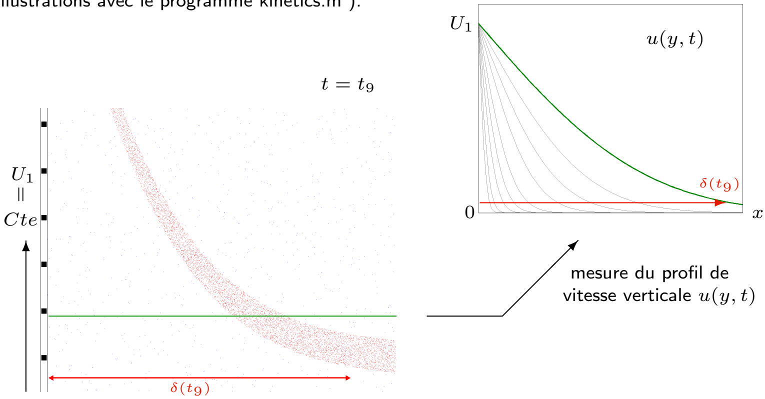
## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).



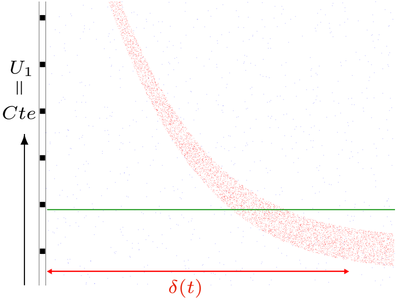
## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

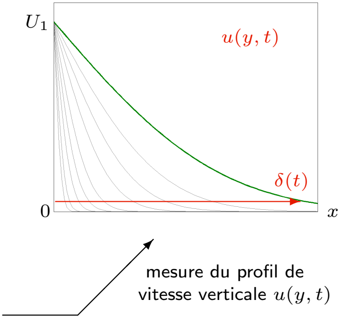
**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).



## Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

**1er Problème de Stokes :** à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante $U$.
(illustrations avec le programme kinetics.m ).




→ Objectifs : déterminer l'évolution du profil de vitesse verticale $u(y,t)$ et la loi de diffusion $\delta(t)$

## Etude Mathématique

- **Solution exacte :** cf. TD, exercice 4.0 (correction sur moodle).
- Etude par analyse dimensionnelle

  Cherchons à estimer $\delta(t)$ par analyse dimensionnelle (méthode du chapitre 1) :

  - Recherche des paramètres pertinents :

  $$\delta = \mathcal{F}(t, \nu, \rho, U)$$

  - Simplification issue de l'étude de la structure des équations : le problème est *linéaire* et la solution adimensionnelle $\bar{u} = u(y,t)/U$ ne dépend pas de $U$ !

  - Finalement on peut partir d'une relation de la forme :

  $$\delta = \mathcal{F}(t, \nu, \rho)$$

  Méthode du chapitre 1 : mise sous forme adimensionnelle avec $[T] = t, [L] = \sqrt{\nu t}$ (seule échelle de longueur du problème), $[M] = \rho[L]^{3/2}$.

  $=> \delta = \sqrt{\nu t} \times C_{te}$

  (Remarque : méthode plus générale, identification du *groupe de symétries* du problème ; cf. correction moodle).

$\delta(t) = \sqrt{\nu t}$ est appelée la *longueur de pénétration visqueuse* On retrouve cette échelle de longueur dans de nombreux problèmes instationnaires apparentés !

## 1er problème de Stokes : Remarques

Envisageons le problème d'une autre manière en posant la question différemment.

## 1er problème de Stokes : Remarques

Envisageons le problème d'une autre manière en posant la question différemment.

**Question :** A une distance $y = L$ de la paroi, a partir de quel instant $t$ le fluide se met-il en mouvement ?

## 1er problème de Stokes : Remarques

Envisageons le problème d'une autre manière en posant la question différemment.

**Question :** A une distance $y = L$ de la paroi, a partir de quel instant $t$ le fluide se met-il en mouvement ?

Réponse par analyse dimensionnelle :

$$t = \mathcal{F}(L, \nu, \rho, \cancel{U})$$

$$\rightarrow \qquad t_v = L^2/\nu \times C_{te}$$

## 1er problème de Stokes : Remarques

Envisageons le problème d'une autre manière en posant la question différemment.

**Question :** A une distance $y = L$ de la paroi, a partir de quel instant $t$ le fluide se met-il en mouvement ?

Réponse par analyse dimensionnelle :

$$t = \mathcal{F}(L, \nu, \rho, \cancel{U})$$

$$\rightarrow \qquad t_v = L^2/\nu \times C_{te}$$

La quantité $\tau_\nu = L^2/\nu$ est appelée le temps caractéristique de diffusion visqueuse.
On retrouve cette échelle de longueur dans de nombreux problèmes instationnaires apparentés !

## Second problème de Stokes

**Problème :** Ecoulement instationnaire établi engendré par une paroi oscillante $U(y=0) = Ucos(\omega t)$.

- Etude par analyse dimensionnelle :
  Estimons l'épaisseur caractéristique $\delta$ du fluide mis en mouvement :

  $$\delta = \mathcal{F}(\omega, \nu, \rho, \cancel{U})$$

  $=> \delta = \sqrt{\nu/\omega} \times C_{te}$
- **Solution exacte :** cf. TD, exercice 4.1

  $$u(y,t) = Ue^{-y/\delta}\cos(\omega t - y/\delta) \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

## Ecoulement pulsé en conduite (1)

Etudions l'écoulement d'un fluide soumis à un gradient de pression périodique, dans un canal horizontal ($g_x = 0$) d'épaisseur $h$ :
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = K\cos(\omega t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -K cos(\omega t) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

## Ecoulement pulsé en conduite (1)

Etudions l'écoulement d'un fluide soumis à un gradient de pression périodique, dans un canal horizontal ($g_x = 0$) d'épaisseur $h$ :
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = K\cos(\omega t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -K cos(\omega t) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Cherchons à simplifier le problème par *analyse dimensionnelle des équations* :
Posons $U =$ échelle caractéristique (ou jauge) de vitesse.
L'échelle de temps est $T = \omega^{-1}$, et l'échelle de longueur est (a priori) $h$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (equation :) | $\frac{\partial u}{\partial t}$ | $=$ | $-K cos(\omega t)$ | $+$ | $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ |
| (terme :) | $[I]$ | | $[P]$ | | $[V]$ |
| (Ordre de grandeur :) | $\frac{U}{T}$ | | $K$ | | $\nu \frac{U}{h^2}$ |

Le terme $[P]$ est nécessairement présent à l'ordre dominant. Comparons les termes $[V]$ et $[I]$ :

$$\frac{[I]}{[V]} = \frac{h^2 \omega}{\nu} = St$$

Ceci définit le Nombre de Stokes de l'écoulement.

# Ecoulement pulsé en conduite (2)

- Si $St \ll 1$ alors $[I] \ll [V]$, a l'ordre dominant on peut négliger $[I]$ et ne garder que $[V]$ et $[P]$.

  $$0 = -K cos(\omega t) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

  => Solution : $u(y,t) \approx -K\cos(\omega t)\left(1 - y^2/h^2\right)$ "ecoulement de Poiseuille quasi-statique".

- Si $St \gg 1$ alors $[V] \gg [I]$, a l'ordre dominant on peut négliger $[V]$ et ne garder que $[I]$ et $[P]$.

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = -K cos(\omega t)$$

  => Solution : $u(y,t) \approx -\frac{K}{\omega}\sin\omega t$
  Remarque : cette solution ne vérifie pas la condition limite d'adhérence... en réalité il se forme une "couche limite de Stokes" d'épaisseur $\delta$ (cf. problème précédent).

- Si $St = \mathcal{O}(1)$, pas de simplification possible, il faut garder $[V]$ et $[I]$.
  => Solution possible par voie analytique mais compliquée... (cf. TP numérique).

## Remarques Complémentaires

1. En dérivant l'équation des films plans par rapport à $y$ et en notant que $\omega_z = \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} - \frac{\partial u}{\partial y}$ , on peut montrer que la vorticité est elle-aussi gouvernée par une équation de diffusion :

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}$$

   La viscosité peut donc également être interprétée comme un *mécanisme de diffusion de la vorticité*.

2. On note qu'il n'y a *pas de terme source* dans cette équation. Le seul terme de production de vorticité vient de la condition limite sur une paroi. En effet la vorticité est directement reliée à la contrainte visqueuse exercée sur un paroi : $\tau_{xy} = (-\mu/2)\omega_z$

   **Conséquence :** Dans un écoulement plan parallèle de la vorticité est créée par le frottement sur les parois, puis diffuse dans le volume (on généralisera ce résultat au chapitre 8).

3. Il existe enfin une analogie entre la *diffusion de quantité de mouvement* (viscosité) et la diffusion de la chaleur (conduction thermique). en effet les équations ont la même forme !

   Equation de la conduction thermique 1D ($\theta = \theta(x,t)$) (cf. cours de transferts thermiques) :

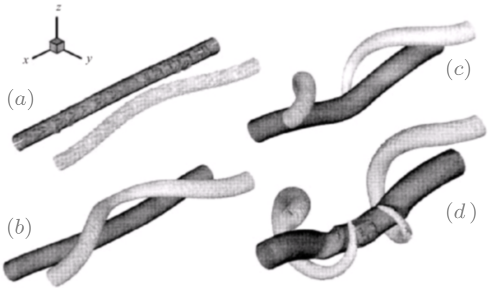
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sigma}{\rho c_p} + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

   $\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ Diffusivité thermique, même dimension physique que $\nu$ ! ( $[\kappa] = L^2 T^{-1}$).

# Mécanique des fluides

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique




*Interaction entre deux tourbillons contrarotatifs*



## 5. Equations-bilan et régimes d'écoulements

## Sommaire

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$ : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$ : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.

Volume matériel $\mathcal{D}(t)$

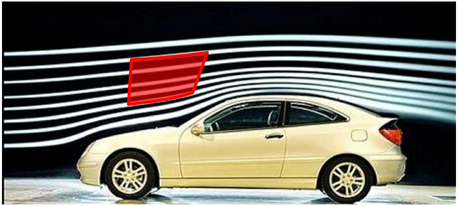
## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$ : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.

Volume matériel $\mathcal{D}(t)$

## Les différents types de systèmes

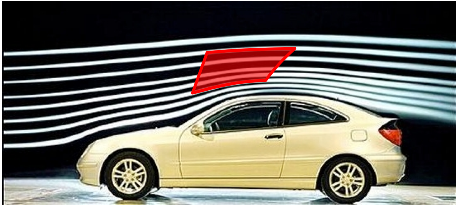
- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$ : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.



Volume matériel $\mathcal{D}(t)$

## Les différents types de systèmes

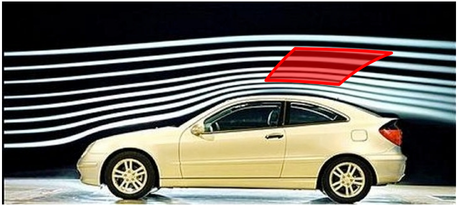
- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.



Volume matériel $\mathcal{D}(t)$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$ : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.



Volume matériel $\mathcal{D}(t)$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$ : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.

Volume matériel $\mathcal{D}(t)$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.

Volume matériel $\mathcal{D}(t)$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$ : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$ : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.

Volume de contrôle $\Omega$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$ : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.

Volume de contrôle $\Omega$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.

Volume de contrôle $\Omega$

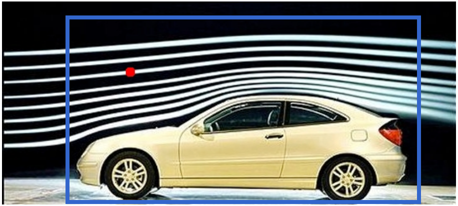
## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.

Volume de contrôle $\Omega$

## Les différents types de systèmes

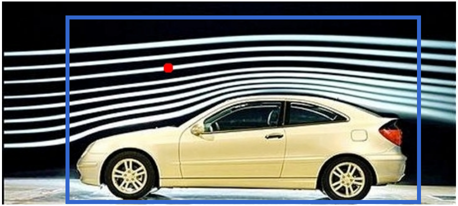
- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.



Volume de contrôle $\Omega$

## Les différents types de systèmes

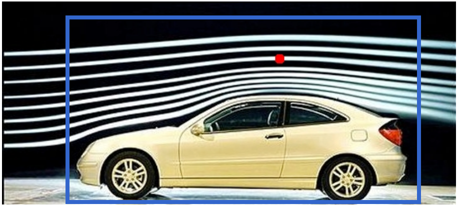
- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.



Volume de contrôle $\Omega$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.



Volume de contrôle $\Omega$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.

Volume de contrôle $\Omega$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$ : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.

Volume de contrôle $\Omega$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.

Volume de contrôle $\Omega$

## Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur ($\dot{F}_e = 0$) : ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** $\Omega$ un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.

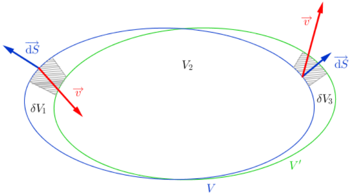
Volume de contrôle $\Omega$

## Théorème du transport (Rappel chap. 3)

Les équations de la physique (bilans de masse, de quantité de mouvement, d'énergie), s'écrivent naturellement en considérant un volume matériel $\mathcal{D}(t)$.

Le théorème de Transport permet de traduire ce bilan dans le cas (Eulérien) d'un volume de contrôle $\Omega$.

**Théorème :**
Considérons un *domaine matériel* mobile $\mathcal{D}(t)$ coïncidant à l'instant $t$ avec un *volume de contrôle* fixe $\Omega$ (bordé par un countour $\partial\Omega$).




La dérivée matérielle de la quantité intégrale $F(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} f dV$ s'écrit alors :

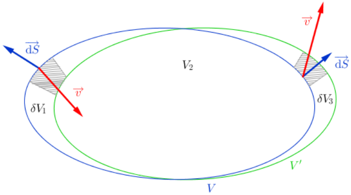
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} f dV = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} f\vec{u}\cdot\vec{n}\, dS$$

## Théorème du transport (Rappel chap. 3)

Les équations de la physique (bilans de masse, de quantité de mouvement, d'énergie), s'écrivent naturellement en considérant un volume matériel $\mathcal{D}(t)$.

Le théorème de Transport permet de traduire ce bilan dans le cas (Eulérien) d'un volume de contrôle $\Omega$.

**Théorème :**
Considérons un *domaine matériel* mobile $\mathcal{D}(t)$ coïncidant à l'instant $t$ avec un *volume de contrôle* fixe $\Omega$ (bordé par un countour $\partial\Omega$).




La dérivée matérielle de la quantité intégrale $F(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} f dV$ s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} f dV = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} f \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS$$

*Remarque :* ce théorème est une généralisation du théorème suivant pour un problème monodimensionnel :

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \left[\frac{db}{dt} f(b(t),t) - \frac{da}{dt} f(a(t),t)\right]$$

Démonstration :

## Bilan de masse : bilans intégraux

Quantité physique : **masse** $M$ associée à la grandeur intensive $\rho$ (**masse volumique**).

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné

$$M(t, \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t)\, dV$$

## Bilan de masse : bilans intégraux

Quantité physique : **masse** $M$ associée à la grandeur intensive $\rho$ (**masse volumique**).

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné

$$M(t, \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t)\, dV$$

Pour ce système matériel, le principe de conservation de la masse $\dfrac{dM}{dt} = 0$ s'écrit :

- bilan intégral lagrangien pour le volume matériel $\mathcal{D}$ en suivant le fluide dans son mouvement

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t)\, dV = 0 \qquad (1)$$

## Bilan de masse : bilans intégraux

Quantité physique : **masse** $M$ associée à la grandeur intensive $\rho$ (**masse volumique**).

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné

$$M(t, \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t)\, dV$$

Pour ce système matériel, le principe de conservation de la masse $\dfrac{dM}{dt} = 0$ s'écrit :

- bilan intégral lagrangien pour le volume matériel $\mathcal{D}$ en suivant le fluide dans son mouvement

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t)\ dV = 0 \qquad (1)$$

- bilan intégral eulérien pour le volume de contrôle fixe $\Omega$ (système ouvert)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(\vec{x}, t)\ dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS \qquad (2)$$

[Démonstration] : théorème de transport avec $f = \rho$

## Bilan de masse : bilans intégraux

Quantité physique : **masse** $M$ associée à la grandeur intensive $\rho$ (**masse volumique**).

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné

$$M(t,\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x},t)\,dV$$

Pour ce système matériel, le principe de conservation de la masse $\dfrac{dM}{dt} = 0$ s'écrit :

- bilan intégral lagrangien pour le volume matériel $\mathcal{D}$ en suivant le fluide dans son mouvement

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x},t)\;dV = 0 \qquad (1)$$

- bilan intégral eulérien pour le volume de contrôle fixe $\Omega$ (système ouvert)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho(\vec{x},t)\;dV = -\oint_{\partial\Omega} \rho\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS \qquad (2)$$

[Démonstration] : théorème de transport avec $f = \rho$

## Bilan de masse : bilans locaux

A partir des bilans intégraux précédents, on déduit les équations locales de bilan de masse :

- Bilan local eulérien

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\,\vec{u}\;) = 0 \tag{3}$$

## Bilan de masse : bilans locaux

A partir des bilans intégraux précédents, on déduit les équations locales de bilan de masse :

- Bilan local eulérien

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\,\vec{u}\,) = 0 \tag{3}$$

[Démonstrations :]

- $(i)$ A partir du bilan intégral Eulérien, à l'aide du théorème de la divergence
- $(ii)$ Directement par un bilan sur un volume élémentaire

## Bilan de masse : bilans locaux

A partir des bilans intégraux précédents, on déduit les équations locales de bilan de masse :

- Bilan local eulérien

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\,\vec{u}\,) = 0 \tag{3}$$

[Démonstrations :]

  - $(i)$ A partir du bilan intégral Eulérien, à l'aide du théorème de la divergence
  - $(ii)$ Directement par un bilan sur un volume élémentaire

- Bilan local lagrangien, en suivant la particule fluide dans son mouvement

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \tag{4}$$

## Bilan de masse : bilans locaux

A partir des bilans intégraux précédents, on déduit les équations locales de bilan de masse :

- Bilan local eulérien

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\,\vec{u}\,) = 0 \tag{3}$$

[Démonstrations :]

- $(i)$ A partir du bilan intégral Eulérien, à l'aide du théorème de la divergence
- $(ii)$ Directement par un bilan sur un volume élémentaire

- Bilan local lagrangien, en suivant la particule fluide dans son mouvement

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \tag{4}$$

[Démonstrations :]

- $(i)$ En utilisant la définition de la dérivée particulaire
- $(ii)$ En variables lagrangiennes (cf. MMC)

## Bilan de quantité de mouvement : bilans intégraux

Quantité physique : quantité de mouvement $\vec{Q}$ associée à la grandeur intensive $\rho\,\vec{u}$.

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné : $\vec{Q}(t, \mathcal{D}) = \displaystyle\int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t)\, \vec{u}(\vec{x}, t)\, dV$

## Bilan de quantité de mouvement : bilans intégraux

Quantité physique : quantité de mouvement $\vec{Q}$ associée à la grandeur intensive $\rho\,\vec{u}$.

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné : $\vec{Q}(t,\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x},t)\,\vec{u}(\vec{x},t)\,dV$

Principe de conservation de la quantité de mouvement : $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext} \to \mathcal{D}}$

- bilan intégral lagrangien pour le volume matériel $\mathcal{D}$ en suivant le fluide dans son mouvement

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} \rho\,\vec{u}\,dV = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho\vec{g}\,dV + \oint_{\partial\mathcal{D}(t)} \left(-p\vec{n} + \overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS \qquad (5)$$

où $\vec{g}$ désigne la gravité (ou toute force à distance par unité de masse).

et où les forces surfaciques sont la pression (normale) et la contrainte visqueuse (représentée par le tenseur $\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}$). Ce bilan s'interprète simplement comme le principe fondamental de la dynamique appliqué au système matériel $\mathcal{D}$.

## Bilan de quantité de mouvement : bilans intégraux

Quantité physique : quantité de mouvement $\vec{Q}$ associée à la grandeur intensive $\rho\,\vec{u}$.

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné : $\vec{Q}(t,\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x},t)\,\vec{u}(\vec{x},t)\,dV$

Principe de conservation de la quantité de mouvement : $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}\,\to\,\mathcal{D}}$

- bilan intégral lagrangien pour le volume matériel $\mathcal{D}$ en suivant le fluide dans son mouvement

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} \rho\,\vec{u}\,dV = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho\vec{g}\,dV + \oint_{\partial\mathcal{D}(t)} \left(-p\vec{n} + \overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS \qquad (5)$$

  où $\vec{g}$ désigne la gravité (ou toute force à distance par unité de masse).

  et où les forces surfaciques sont la pression (normale) et la contrainte visqueuse (représentée par le tenseur $\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}$). Ce bilan s'interprète simplement comme le principe fondamental de la dynamique appliqué au système matériel $\mathcal{D}$.

- bilan intégral eulérien pour le volume de contrôle fixe $\Omega$ (système ouvert)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho\,\vec{u}\,dV = \int_{\Omega} \rho\vec{g}\,dV + \oint_{\partial\Omega} \left(-p\vec{n} + \overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS - \oint_{\partial\Omega} \rho\,\vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS \qquad (6)$$

[Démonstration] : théorème de transport avec $f = \rho\vec{u}$

## Bilan de quantité de mouvement : bilans intégraux

Quantité physique : quantité de mouvement $\vec{Q}$ associée à la grandeur intensive $\rho\,\vec{u}$.

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné : $\vec{Q}(t,\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x},t)\,\vec{u}(\vec{x},t)\,dV$

Principe de conservation de la quantité de mouvement : $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext} \to \mathcal{D}}$

- bilan intégral lagrangien pour le volume matériel $\mathcal{D}$ en suivant le fluide dans son mouvement

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} \rho\,\vec{u}\,dV = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho\vec{g}\,dV + \oint_{\partial\mathcal{D}(t)} \left(-p\vec{n} + \overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS \qquad (5)$$

  où $\vec{g}$ désigne la gravité (ou toute force à distance par unité de masse).

  et où les forces surfaciques sont la pression (normale) et la contrainte visqueuse (représentée par le tenseur $\overline{\overline{\tau}}$). Ce bilan s'interprète simplement comme le principe fondamental de la dynamique appliqué au système matériel $\mathcal{D}$.

- bilan intégral eulérien pour le volume de contrôle fixe $\Omega$ (système ouvert)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho\,\vec{u}\,dV = \int_{\Omega} \rho\vec{g}\,dV + \oint_{\partial\Omega} \left(-p\vec{n} + \overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS - \oint_{\partial\Omega} \rho\,\vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS \qquad (6)$$

[Démonstration] : théorème de transport avec $f = \rho\vec{u}$

Remarque : en présence d'interface traversant la frontière du volume considéré, il faut ajouter au membre de droite la contribution de la force de tension superficielle

$$\int_{\mathcal{L}} \gamma\vec{n}_{\mathcal{L}}\,dl$$

## Bilan de quantité de mouvement : bilans locaux

## Bilan de quantité de mouvement : bilans locaux

- Bilan local eulérien ou "sous forme conservative"

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \vec{\mathrm{div}}\,(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})\right] = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{\tau}}) \tag{7}$$

## Bilan de quantité de mouvement : bilans locaux

- Bilan local eulérien ou "sous forme conservative"

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \vec{\mathrm{div}}\,(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})\right] = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{\tau}}) \qquad (7)$$

[Démonstration] :
A partir du bilan intégral eulérien, à l'aide du théorème de la divergence.

## Bilan de quantité de mouvement : bilans locaux

- Bilan local eulérien ou "sous forme conservative"

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \mathrm{d\vec{i}v}\,(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})\right] = \rho\vec{g} - \mathrm{gr\vec{a}d}p + \mathrm{d\vec{i}v}\,(\vec{\vec{\tau}}) \tag{7}$$

[Démonstration] :
A partir du bilan intégral eulérien, à l'aide du théorème de la divergence.

- Bilan local lagrangien,

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{g} - \mathrm{gr\vec{a}d}p + \mathrm{d\vec{i}v}\,(\vec{\vec{\tau}}) \tag{8}$$

## Bilan de quantité de mouvement : bilans locaux

- Bilan local eulérien ou "sous forme conservative"

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \mathrm{d\vec{i}v}\,(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})\right] = \rho\vec{g} - \mathrm{gr\vec{a}d}p + \mathrm{d\vec{i}v}\,(\vec{\vec{\tau}}) \tag{7}$$

[Démonstration] :
A partir du bilan intégral eulérien, à l'aide du théorème de la divergence.

- Bilan local lagrangien,

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{g} - \mathrm{gr\vec{a}d}p + \mathrm{d\vec{i}v}\,(\vec{\vec{\tau}}) \tag{8}$$

[Démonstration] :
$(i)$ A partir du bilan local eulérien (exercice),
$(ii)$ Par un bilan des forces appliqué à un volume élémentaire $dV$.

## Bilan de quantité de mouvement : bilans locaux

- Bilan local eulérien ou "sous forme conservative"

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \vec{\mathrm{div}}\,(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})\right] = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{\tau}}) \tag{7}$$

[Démonstration] :
A partir du bilan intégral eulérien, à l'aide du théorème de la divergence.

- Bilan local lagrangien,

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{\tau}}) \tag{8}$$

[Démonstration] :
$(i)$ A partir du bilan local eulérien (exercice),
$(ii)$ Par un bilan des forces appliqué à un volume élémentaire $dV$.

- Autre écriture (pour un fluide Newtonien, en négligeant la viscosité en volume) :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{u})\cdot\vec{u}\right) = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \mu\left(\Delta\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,(\vec{u}))\right) \tag{9}$$

Démo : exercice

## Autres équations-bilan :

Le document **Formulaire de mécanique des fluides, annexe C** liste d'autres équations-bilans utiles en mécanique des fluides :

- bilan intégral d'énergie totale.
  (Egalement appelé premier principe en système ouvert).
- Bilan local d'énergie totale.
  (Se déduit du bilan intégral).

$$\rho \frac{d}{dt}\left(c_v T + \frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) = \rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \vec{\mathrm{grad}}(p) \cdot \vec{u} + \mathrm{div}\,(\overline{\overline{\tau}}) \cdot \vec{u} - \mathrm{div}\,(\vec{q}); \qquad \vec{q} = -\lambda \vec{\mathrm{grad}}(T) \tag{10}$$

  (cf. chapitres 11-12, écoulements compressibles de gaz parfaits)
- Bilan local d'énergie cinétique.
  (S'obtient à partir du bilan local de QDM en projetant sur $\vec{u}$).
  (cf. chap. 7, théorème de Bernoulli).
- bilan intégral d'énergie cinétique.
  (S'obtient à partir du bilan local, en intégrant sur un volume $\Omega$).
  (cf chap. 9, perte de charge dans une conduite , et chap. 10, flux d'énergie acoustique).
- Bilans d'énergie interne
  (S'obtiennent en combinant les bilans d'énergie totale et d'énergie cinétique)
- Bilans d'entropie (second principe en système ouvert)
- (...)

## Equations du mouvement d'un fluide

On peut donc maintenant résumer les équations régissant le mouvement d'un fluide dans le cas le plus général :

## Equations du mouvement d'un fluide

On peut donc maintenant résumer les équations régissant le mouvement d'un fluide dans le cas le plus général :

Bilan local de masse : $$\frac{d\rho}{dt} + \rho \,\mathrm{div}\, \vec{u} = 0$$

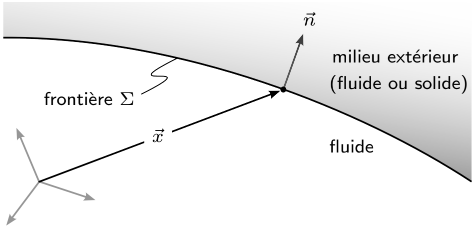
Bilan local de qdm : $$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\mathrm{grad}} p + \mu \Delta \vec{u} + \frac{\mu}{3} \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,(\vec{u}))$$

Bilan local d'énergie : $$\rho \frac{d}{dt}\left(c_v T + \frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) = \rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \vec{\mathrm{grad}}(p) \cdot \vec{u} + \mathrm{div}\,(\vec{\vec{\tau}}) \cdot \vec{u} + \lambda \Delta T$$

Equation d'état : $p = \rho r T$ (gaz parfait) ou $\rho = \rho_0$ (liquide incompressible indilatable)

## Conditions limites

A ces équations doivent être adjointes des conditions limites sur une frontière $\Sigma$ (éventuellement mobile) séparant le fluide d'un milieu extérieur (solide ou fluide).



## Conditions limites

- Condition limite cinématique.

$$\vec{u}(\vec{x} \in \Sigma, t) = \vec{u}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t)$$

Condition souvent simplifiée dans le cas ou la frontière $\Sigma$ une paroi fixe sous la forme suivante :

$$\vec{u} = \vec{0}$$

- Condition limite dynamique

$$\vec{\vec{\sigma}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} - \vec{\vec{\sigma}}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} = \gamma K \qquad (\ K = \text{courbure de la surface, cf. chap. 2})$$

Condition souvent simplifiée dans le cas ou $\Sigma$ est une surface libre plane (d'altitude $y = cte$) sous la forme suivante :

$\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n} = -p_{ext}\vec{n}$

c.a.d. $p - \tau_{yy} = p_{ext}$ et $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$

- Condition limite thermique

$$\vec{q} = \vec{q}_{ext}$$

Condition souvent simplifiée sous l'une des deux formes suivantes :

$\vec{q} = \vec{0}$ ( paroi adiabatique ) ou $T = T_{ext}$ (paroi isotherme).

## Conditions limites

- Condition limite cinématique.

$$\vec{u}(\vec{x} \in \Sigma, t) = \vec{u}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t)$$

Condition souvent simplifiée dans le cas ou la frontière $\Sigma$ une paroi fixe sous la forme suivante :

$$\vec{u} = \vec{0}$$

- Condition limite dynamique

$$\vec{\vec{\sigma}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} - \vec{\vec{\sigma}}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} = \gamma K \qquad (\ K = \text{courbure de la surface, cf. chap. 2})$$

Condition souvent simplifiée dans le cas ou $\Sigma$ est une surface libre plane (d'altitude $y = cte$) sous la forme suivante :
$\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n} = -p_{ext}\vec{n}$
c.a.d. $p - \tau_{yy} = p_{ext}$ et $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$

- Condition limite thermique

$$\vec{q} = \vec{q}_{ext}$$

Condition souvent simplifiée sous l'une des deux formes suivantes :
$\vec{q} = \vec{0}$ ( paroi adiabatique ) ou $T = T_{ext}$ (paroi isotherme).

NB : les deux premières conditions limites généralisent celles vues au chapitre 4 pour les écoulements plans parallèles.

## Simplifications (cas des liquides)

Dans le cas des liquides incompressibles, indilatables ($\rho = \rho_0$)

1. L'équation-bilan de masse se simplifie en $\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$ .

   $=>$ L'écoulement est iso-volume (on dit aussi "écoulement incompressible", par abus de language).

2. Les problèmes dynamique et thermique sont découplés (aucun terme ne dépend de $T$ dans l'équation-bilan de QDM).

   $=>$ Si l'on ne s'intéresse qu'au champ de vitesse et aux forces générées sur les obstacles, on peut oublier l'équation de la température !

   $=>$ en revanche si l'on s'intéresse aux transferts thermiques, il faut d'abord résoudre le problème dynamique avant de résoudre le problème thermique... (cf. cours de transferts thermiques, chapitre "convection").

## Simplifications (cas des liquides)

Dans le cas des liquides incompressibles, indilatables ($\rho = \rho_0$)

1. L'équation-bilan de masse se simplifie en $\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$ .

   $=>$ L'écoulement est iso-volume (on dit aussi "écoulement incompressible", par abus de language).

2. Les problèmes dynamique et thermique sont découplés (aucun terme ne dépend de $T$ dans l'équation-bilan de QDM).

   $=>$ Si l'on ne s'intéresse qu'au champ de vitesse et aux forces générées sur les obstacles, on peut oublier l'équation de la température !

   $=>$ en revanche si l'on s'intéresse aux transferts thermiques, il faut d'abord résoudre le problème dynamique avant de résoudre le problème thermique... (cf. cours de transferts thermiques, chapitre "convection").

**Conclusion :** Pour les liquides incompressibles (chapitres 6 à 9) on retiendra les équations sous la forme suivante ("Equations de Navier-Stokes incompressibles") :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \\ \rho_0 \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \rho_0 \vec{g} - \vec{\mathrm{grad}} p + \mu \Delta \vec{u} \end{array} \right.$$

## Simplifications (cas des liquides)

3 Simplification sur la pression :
Les termes de gravité et de gradient de pression peuvent se regrouper en introduisant la *pression motrice*

$$\hat{p} = p - \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x} \quad (= p + \rho_0 g z \text{ si la gravité est selon } -z)$$

=> L'eq. de NS se réécrit alors :

$$\rho_0 \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\mathrm{grad}} \hat{p} + \mu \Delta \vec{u}$$

Conséquences :

- L'écoulement d'un *fluide pesant* est *cinématiquement équivalent* à celui d'un fluide non pesant ($\vec{g} = \vec{0}$)
- La force exercée par un fluide *pesant* $\mathcal{F}$ sur une surface $\Omega$ de frontière $\mathcal{S}$ peut être évaluée ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathcal{F} \longrightarrow \Omega} &= -\oint_{\mathcal{S}} p \vec{n} dS \\ &= -\oint_{\mathcal{S}} \hat{p} \vec{n} dS + \int_{\Omega} \vec{\mathrm{grad}}(\rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x}) dV \\ &= -\oint_{\mathcal{S}} \hat{p} \vec{n} dS - \rho_0 \vec{g} V \end{aligned}$$

- Interprétation : la force exercée sur un obstacle *entièrement immergé* se compose de deux termes : une *force hydrodynamique* qui peut être déduite de la solution du problème *non pesant*, et une force hydrostatique qui n'est autre que la poussée d'Archimède !
- Conséquence : la force horizontale sur un sous-marin (ou un avion en vol subsonique comme on le verra plus tard) ne dépend pas de $g$ !

## Analyse dimensionnelle de l'eq. de QDM

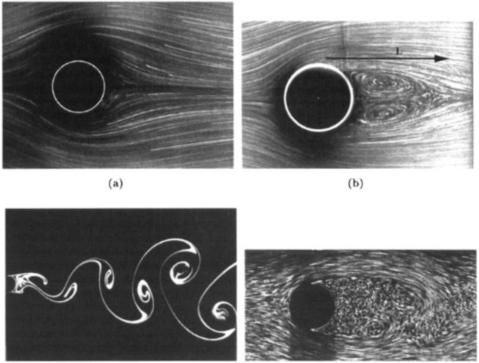
(a finir)
=> Nombre de Reynolds

## Analyse dimensionnelle de l'eq. de masse

(a finir)
=> Nombre de Mach

## Régimes d'écoulements autour d'un cylindre

Illustration de l'importance du nombre de Reynolds :
**Régimes d'écoulement autour d'un cylindre**




(a) (b) (c) (d)

- $(a)$ $Re \approx 1$ : écoulement stationnaire symétrique (régime de Stokes, cf. chap. 5).
- $(b)$ $Re = 26$ : écoulement stationnaire avec zone de décollement.
- $(c)$ $Re = 200$ : écoulement instationnaire, apparition d'une allée de tourbillons.
- $(d)$ $Re = 10^5$ : écoulement turbulent.