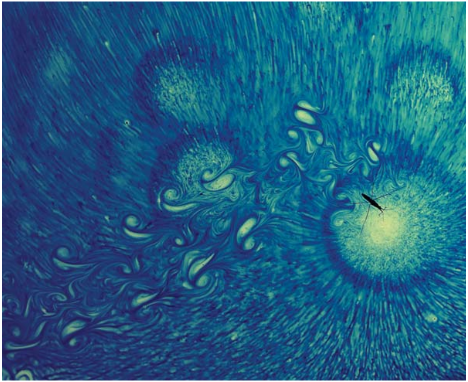
Mécanique des fluides



David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique

Dipôles tourbillonnaires générés par une araignée d'eau (gerris) se déplaçant à la surface de l'eau

3. Cinématique des fluides

Sommaire

Description lagrangienne : définition

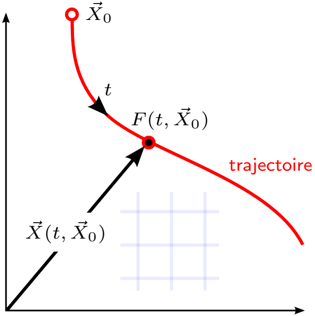
On décrit l'écoulement d'un fluide par la donnée,

à chaque instant t et pour toutes les positions $\vec{X}_0$

des particules fluides à l'instant initial t_0 :

- de la trajectoire $\vec{X}(t; \vec{X}_0)$ de toutes les particules fluides,
- de l'évolution de la grandeur physique $F(t; \vec{X}_0)$ attachée à la particule fluide,
  et donc transportée par elle,

  où $F(t; \vec{X}_0)$ peut désigner la masse volumique, la quantité de mouvement ou encore la température de la particule $\vec{X}_0$.



"On suit la matière dans son mouvement"

Rappel : la vitesse de la particule fluide est donnée par $\dot{\vec{X}}(t; \vec{X}_0) \equiv \frac{d}{dt}\vec{X}(t; \vec{X}_0)$

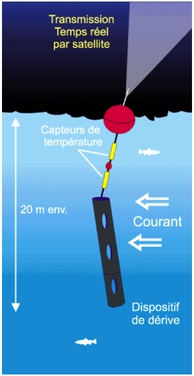
et son accélération par $\ddot{\vec{X}}(t; \vec{X}_0) \equiv \frac{d^2}{dt^2}\vec{X}(t; \vec{X}_0)$

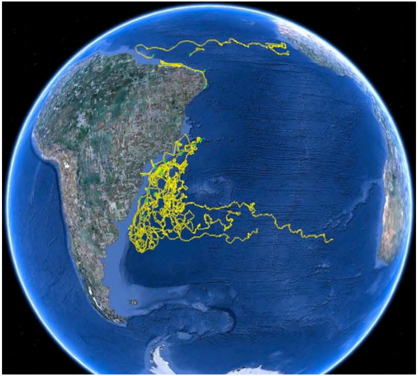
(NB : ici $\vec{X}_0$ est à considérer comme un 'label', pas comme une variable ; $\vec{X}(t; \vec{X}_0)$ et $F(t; \vec{X}_0)$ sont des fonctions d'une seule variable t).

Description lagrangienne : exemple

Bouée dérivante :
mesure de la température de surface de la mer,
de la pression atmosphérique et des courants de surface.

Principe : en dérivant avec le courant, la bouée suit toujours les mêmes particules fluides (celles qui l'entourent) → description lagrangienne



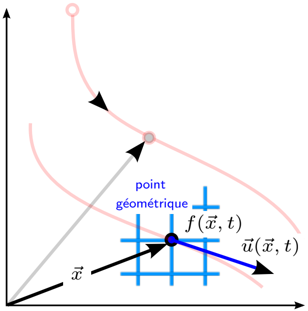


La trajectoire des bouées est suivie par le système de positionnement Argos.

Description eulérienne : définition

On décrit l'écoulement d'un fluide par la donnée, à chaque instant t et en tout point géométrique donné $\vec{x}$ de l'espace :

- du champ de vitesse $\vec{u}(\vec{x}, t)$, où la vitesse locale $\vec{u}(\vec{x}, t)$ est définie comme la *vitesse de la particule fluide passant en $\vec{x}$ à l'instant t*,
- du champ $f(\vec{x}, t)$ défini en tout point $\vec{x}$ comme la valeur de la grandeur physique associée à f attachée à la particule fluide passant en $\vec{x}$ à l'instant t, où $f(\vec{x}, t)$ peut désigner la masse volumique, la quantité de mouvement ou encore la température mesurée en $\vec{x}$ à l'instant t.



Les quantités $\vec{u}(\vec{x}, t)$ et $f(\vec{x}, t)$ définissent des champs, dits eulériens, respectivement de vitesse et, par exemple, de masse volumique $\rho(\vec{x}, t)$, de concentration $n_i(\vec{x}, t)$ ou de température $T(\vec{x}, t)$.

"On ne suit pas la matière dans son mouvement"

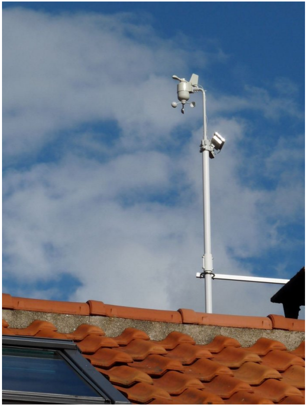
Description eulérienne : exemple

Anémomètre fixe
avec mesure de la qualité de l'air

on mesure la vitesse et la concentration
en polluants de particules fluides différentes
au cours du temps :

on ne suit pas la matière dans son mouvement

$\rightarrow$ description eulérienne



Relations entre descriptions lagrangienne et eulérienne

Si $\vec{X}_0$ désigne la particule fluide située en $\vec{x}$ à l'instant t

$$\vec{X}(t;\vec{X}_0) = \vec{x}$$

alors, par définition :

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \dot{\vec{X}}\left(t;\vec{X}_0\right) \quad \text{(vitesse de la particule } \vec{X}_0\text{)} \tag{1}$$

$$f(\vec{x},t) = F\left(t;\vec{X}_0\right) \quad \text{(par ex., température de la particule } \vec{X}_0\text{)} \tag{2}$$

$\rightarrow$ On peut ainsi passer d'une formulation à l'autre à l'aide de ces relations.

cf. exercice du sablier en TD

Choix du formalisme

- La description **lagrangienne** est en générale privilégiée en mécanique des solides, principalement intéressée par les déformations et les déplacements courts ou faibles (pas d'écoulement $\Rightarrow$ les particules solides restent dans le domaine d'étude)

- Au contraire la mécanique des fluides s'intéresse aux fluides en écoulement (taux de déformations et taux de déplacement = vitesse des particules fluides) : les particules fluides sont susceptibles de traverser le domaine d'étude pour en sortir.

Il est donc difficile de suivre la matière dans son mouvement, et on privilégiera alors une description **eulérienne**.

Champ scalaire : rappel mathématique

En notant $\vec{x} = (x, y, z)$ le vecteur position et $d\vec{x} = (dx, dy, dz)$ le déplacement élémentaire, alors tout champ scalaire $f(\vec{x})$ accepte le développement limité suivant :

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + d\vec{x}) &= f(x + dx, y + dy, z + dz) \\ &= f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\, dz + \ldots \end{aligned}$$

Soit :

$$f(\vec{x} + d\vec{x}) \approx f(\vec{x}) + \vec{\mathrm{grad}}\, f \cdot d\vec{x}$$

Par extension on en déduit que pour tout champ $f(\vec{x}, t)$:

$$f(\vec{x} + d\vec{x}, t + dt) \approx f(\vec{x}, t) + \vec{\mathrm{grad}}\, f \cdot d\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x}, t)\, dt$$

Variation temporelle d'une quantité scalaire transportée par une particule fluide

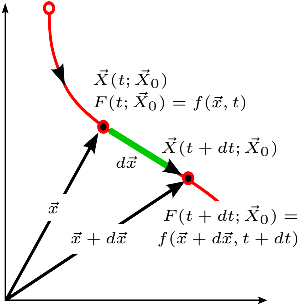
Soit $\vec{X}_0$ la particule fluide située en $\vec{x}$ à l'instant t :

$$\vec{X}(t; \vec{X}_0) = \vec{x}$$

Comment calculer la variation temporelle de F :

$$\dot{F}(t; \vec{X}_0) = \lim_{dt \to 0} \frac{F(t+dt; \vec{X}_0) - F(t; \vec{X}_0)}{dt}$$

en fonction des champs eulériens $f(\vec{x}, t)$ et $\vec{u}(\vec{x}, t)$?



[Démonstration. . .] $\longrightarrow$ $\dot{F}(t, \vec{X}_0) = \lim_{dt \to 0} \frac{F(t+dt; \vec{X}_0) - F(t; \vec{X}_0)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\mathrm{grad}} f$

Dérivée particulaire d'un champ scalaire

Définition :

On appelle dérivée particulaire (ou dérivée matérielle) du champ eulérien $f(\vec{x}, t)$ la quantité

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\mathrm{grad}}\, f \cdot \vec{u}$$

Remarque : la dérivée particulaire est parfois aussi notée $\dfrac{Df}{Dt}$.

Interprétation physique :

Cette dérivée s'interprète comme le taux de variation temporelle de la grandeur physique associée au champ f lorsque l'on suit dans son mouvement la particule fluide transportant cette quantité passant en $\vec{x}$ à l'instant t :

$$\frac{df}{dt}(\vec{x}, t) = \dot{F}(t; \vec{X}_0) \quad \text{avec } \vec{X}(t; \vec{X}_0) = \vec{x}$$

Accélération d'une particule fluide

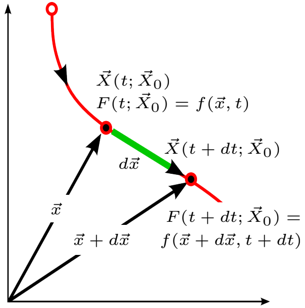
Soit $\vec{X}_0$ la particule fluide située en $\vec{x}$ à l'instant t :

$$\vec{X}(t; \vec{X}_0) = \vec{x}$$

Comment calculer l'accélération cette particule fluide :

$$\vec{a}(t, \vec{X}_0) = \lim_{dt \to 0} \frac{\dot{\vec{X}}(t + dt; \vec{X}_0) - \dot{\vec{X}}(t; \vec{X}_0)}{dt}$$

en fonction du champ eulérien de vitesse $\vec{u}(\vec{x}, t)$?



[Démonstration...] $\longrightarrow$ $\vec{a}(t, \vec{X}_0) = \lim_{dt \to 0} \frac{\dot{\vec{X}}(t + dt; \vec{X}_0) - \dot{\vec{X}}(t; \vec{X}_0)}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\vec{\mathrm{grad}}}(\vec{u}) \cdot \vec{u}$

Remarque : autre notation possible

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\, \vec{u}$$

$(\vec{u} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\, \vec{u}$: Notation "pré-MMC" a interpréter "composante par composante", mais qui ne marche qu'en coordonnées cartésiennes !
(cf. formulaire, annexe C pour l'expression de $\vec{\vec{\mathrm{grad}}}(\vec{u}$ et de l'accélération en coordonnés cylindriques et sphériques).

Généralisation : dérivée particulaire d'un champ vectoriel

Définition :

On appelle dérivée particulaire (ou dérivée matérielle) du champ eulérien vectoriel $\vec{f}(\vec{x},t)$ la quantité

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \vec{\vec{\mathrm{grad}}}\left(\vec{f}\right) \cdot \vec{u} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\mathrm{grad}}\right) \vec{f}$$

Interprétation physique :

Cette dérivée s'interprète comme le taux de variation temporelle de la grandeur physique associée au champ vectoriel $\vec{f}$ lorsque l'on suit dans son mouvement la particule fluide transportant cette quantité passant en $\vec{x}$ à l'instant t :

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(\vec{x},t) = \dot{\vec{F}}(t,\vec{X}_0) \quad \text{où } \vec{X}(t,\vec{X}_0) = \vec{x}$$

Exemples :

$\vec{F}(t,\vec{X}_0)$ peut représenter la vitesse de la particule fluide, sa quantité de mouvement ou son vecteur rotation instantanée.

Flux d'une quantité à travers une surface (rappel)

Soit une quantité f (Eulérienne) transportée par un écoulement de vitesse $\vec{u}$.

- En considérant une surface $\mathcal{S}$ séparant deux domaines (1) et (2),

  on définit le *Flux* de f à travers la surface (orientée de 1 vers 2) :

$$\Phi_{f,(\mathcal{S},1\to 2)} = \int_{\mathcal{S}} f\vec{u}\cdot\vec{n}_{1\to 2}\,dS$$

  Démonstration (...)

- Exemple : flux volumique ($f = 1$) :

$$\Phi_1 = \int_{\mathcal{S}} \vec{u}\cdot\vec{n}_{1\to 2}\,dS$$

- Pour une surface fermée de normale *sortante* $\vec{n}$, on définit le flux *sortant* :

$$\Phi_f = \oint_{\mathcal{S}} f\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$$

- **Généralisation :** pour une quantité vectorielle $\vec{f}$:

$$\vec{\Phi}_{\vec{f},(\mathcal{S},1\to 2)} = \int_{\mathcal{S}} \vec{f}\,(\vec{u}\cdot\vec{n}_{1\to 2})\,dS = \int_{\mathcal{S}} \left(\vec{f}\otimes\vec{u}\right)\cdot\vec{n}_{1\to 2}\,dS$$

- De même pour une surface fermée , on définit le flux *sortant* :

$$\vec{\Phi}_{\vec{f}} = \oint_{\mathcal{S}} \vec{f}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS = \oint_{\mathcal{S}} \left(\vec{f}\otimes\vec{u}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

Théorème du transport

Considérons un *domaine matériel* mobile $\mathcal{D}(t)$ coïncidant à l'instant t avec un *volume de contrôle* fixe Ω (bordé par un countour $\partial\Omega$).
Le *théorème de transport* permet d'écrire la dérivée matérielle de la quantité intégrale $F(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} f dV$ de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} f dV = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} f \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS$$

$\longrightarrow \displaystyle\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}\, dV$ correspond à la variation temporelle de la quantité f dans le volume Ω.

$\longrightarrow \displaystyle\oint_{\partial\Omega} f\vec{u}\cdot\vec{n}\, dS$ correspond au flux de la quantité f à travers la frontière de Ω.

Application : posons $f = 1$. On obtient : $\displaystyle\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \oint_{\partial\Omega} \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \int_{\Omega} \mathrm{div}\,(\vec{u})\, dV$

La divergence du champ de vitesse s'interprète donc comme le taux de dilatation volumique de l'écoulement.
Si $\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$ on parle d'écoulement isovolume. On parle aussi d' "écoulement incompressible" ; mais c'est un abus de language !
(la compressibilité est une propriété du fluide, pas de l'écoulement).
Un gaz (compressible) tout comme un liquide (souvent modélisé comme incompressible) peuvent s'écouler de manière iso-volume... (cf. chapitre 5).

Décomposition du tenseur des gradients de vitesse

On définit le tenseur des gradients de vitesse par

$$\vec{u}(\vec{x}+d\vec{x},t)=\vec{u}(\vec{x},t)+\vec{\vec{\mathrm{grad}}}(\vec{u})\cdot d\vec{x}+\mathcal{O}\left(||d\vec{x}||^2\right)$$

où $\vec{\vec{\mathrm{grad}}}(\vec{u})=\vec{\vec{G}}$ est un tenseur d'ordre 2, de composantes

$$G_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=u_{i,j}$$

Décomposition canonique du tenseur des gradients de vitesse :

$$\vec{\vec{\mathrm{grad}}}(\vec{u})=\underbrace{\frac{1}{2}\left[\vec{\vec{\mathrm{grad}}}(\vec{u})+{}^t\vec{\vec{\mathrm{grad}}}(\vec{u})\right]}_{\substack{\vec{\vec{D}}\text{ symétrique}\\ \left({}^t\vec{\vec{D}}=\vec{\vec{D}}\right)}}+\underbrace{\frac{1}{2}\left[\vec{\vec{\mathrm{grad}}}(\vec{u})-{}^t\vec{\vec{\mathrm{grad}}}(\vec{u})\right]}_{\substack{\vec{\vec{R}}\text{ antisymétrique}\\ \left({}^t\vec{\vec{R}}=-\vec{\vec{R}}\right)}}$$

avec

$$\vec{\vec{D}}:\quad D_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=D_{ji}\qquad\rightarrow$$ tenseur des taux de déformation

$$\vec{\vec{R}}:\quad R_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i})=-R_{ji}\qquad\rightarrow$$ tenseur des taux de rotation

Ce qui se cache derrière les gradients de vitesse ...

Le tenseur des taux de rotation $\vec{\vec{R}}$ est antisymétrique, et peut sans perte de généralité s'écrire sous la forme

$$\vec{\vec{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

où l'on remarque que $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) = \dfrac{1}{2}\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{u})$.

On a alors

$$\vec{\vec{R}} \cdot d\vec{x} = \vec{\Omega} \wedge d\vec{x}$$

et $\vec{\Omega}$ s'interprète donc comme la vitesse angulaire locale du fluide, c'est-à-dire comme le vecteur rotation instantanée de la particule fluide.

$\vec{\Omega}$ est parfois appelé vecteur tourbillon, car il permet de d'identifier la présence de structures tourbillonnaires (tourbillons et nappes tourbillonnaires).

On préfère souvent au vecteur tourbillon la notion de vorticité $\vec{\omega}$, définie comme le rotationnel du champ de vitesse :

$$\vec{\omega} = \vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{u})$$

On en déduit que la vorticité correspond donc au double de la vitesse angulaire locale du fluide.

L'étude du champ de vorticité $\vec{\omega}$ et des structures tourbillonnaires est l'objet de la dynamique tourbillonnaire, domaine d'étude transversal de la mécanique des fluides dont les fondations ont été posées dans la seconde moitié du 19ème siècle par Helmholtz et Kelvin notamment.

Ce qui se cache derrière les gradients de vitesse (suite) ...

La trace de $\overset{\Rightarrow}{D}$ est égale à la divergence du champ de vitesse, et on a montré qu'elle s'interprète comme le taux de variation du volume élémentaire $\mathcal{V}$ de la particule fluide :

$$\mathrm{tr}(\overset{\Rightarrow}{D}) = \mathrm{div}\,\vec{u} = \frac{1}{\mathcal{V}}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}$$

Il s'agit donc du taux de dilation (ou d'expansion) volumique local de l'écoulement.
Le tenseur des taux de déformation $\overset{\Rightarrow}{D}$ peut alors se décomposer en une partie sphérique $\overset{\Rightarrow}{S}$ et une partie à trace nulle $\overset{\Rightarrow}{N}$ appelée *déviateur :*

$$\overset{\Rightarrow}{D} = \overset{\Rightarrow}{S} + \overset{\Rightarrow}{D}'$$

Avec :

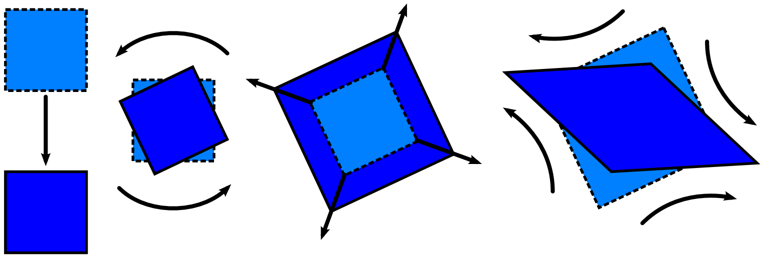
$$\overset{\Rightarrow}{S} = \frac{\mathrm{div}\,(\vec{u})}{d}\overset{\Rightarrow}{1}; \qquad \overset{\Rightarrow}{D}' = \overset{\Rightarrow}{D} - \overset{\Rightarrow}{S} \qquad (d = \text{ 2 ou 3 ; nombre de dimensions spatiales}).$$

Le déviateur correspond à un étirement pur.

Remarque : si $\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$ (écoulement isovolume), on a $\overset{\Rightarrow}{D} = \overset{\Rightarrow}{D}'$.

En résumé : évolution d'un élément de fluide

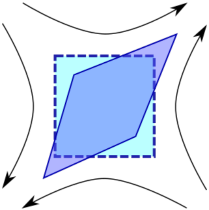
$$\vec{u}(\vec{x}+d\vec{x},t) = \overbrace{\underbrace{\vec{u}(\vec{x},t)}_{\text{translation en bloc}} + \underbrace{\vec{\Omega}\wedge d\vec{x}}_{\text{rotation en bloc}}}^{\text{mouvement rigidifiant}} + \overbrace{\underbrace{\overrightarrow{\overrightarrow{S}}\cdot d\vec{x}}_{\text{dilatation pure}} + \underbrace{\overrightarrow{\overrightarrow{D}}'\cdot d\vec{x}}_{\text{étirement pur}}}^{\text{déformation } \overrightarrow{\overrightarrow{D}}\cdot d\vec{x}}$$



Remarques sur le tenseur des taux de déformations . . .

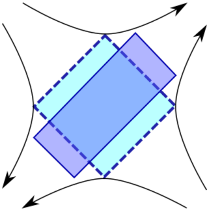
Le tenseur $\overrightarrow{\overrightarrow{D}}$ (et son déviateur $\overrightarrow{\overrightarrow{D}}'$) n'est en général pas diagonal. Cependant on montre (MMC) qu'il existe une base, appelée base des directions propres de la matrice correspondante, dans laquelle le tenseur est diagonal.

Exemples en 2D : (Exercice complémentaire)



Dans une base impropre

$$\overrightarrow{\overrightarrow{D}}' \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



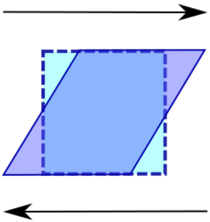
Dans la base propre

$$\overrightarrow{\overrightarrow{D}}' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : cisaillement simple . . .

Le cisaillement simple est une déformation définie par le tenseur (2D) suivant :

$$\overset{\Rightarrow}{D} = \overset{\Rightarrow}{D}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



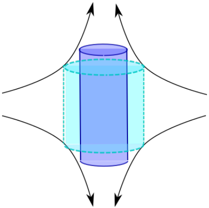
On montre (Exercice complémentaire) Que cet écoulement n'est pas une déformation pure mais la superposition d'une rotation pure et d'un étirement pur.

Remarques sur le tenseur des taux de déformations . . .

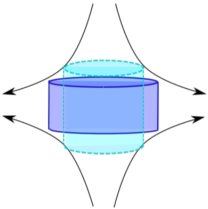
Exemples en 3D : (Exercice) Pour un écoulement isovolume 3D, dans la base propre on peut écrire

$$\overset{\Rightarrow}{D} = \overset{\Rightarrow}{D'} = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0.$$

Cas particulier : si $D_{xx} = D_{yy} = E$, (et donc $D_{zz} = -2E$) le tenseur est à symétrie cylindrique.



si $E < 0$:
Etirement monoaxial



si $E > 0$:
Etirement biaxial

Trajectoires

Une trajectoire est le chemin suivi par une particule fluide donnée $\vec{X}_0$ au cours du temps :

$$\mathcal{T}(\vec{X}_0) = \{\vec{X}(t, \vec{X}_0) \ / \ \dot{\vec{X}} = \vec{u}(\vec{X}, t)\}$$

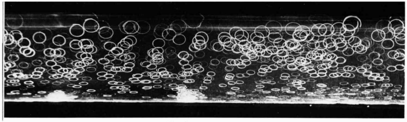
où $\dot{\vec{X}}$ désigne la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\vec{X}$ et $\vec{u}(\vec{x}, t)$ correspond au champ eulérien des vitesses au point géométrique $\vec{x}$ à l'instant t.

[Exemple]

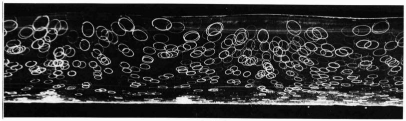
La visualisation expérimentale des trajectoires s'effectue par la prise d'une photo à temps de pose long de l'écoulement ensemencé de particules réfléchissantes. Les trajectoires sont alors matérialisées par les traînées lumineuses correspondant à l'impression sur la pellicule (ou les capteurs électroniques) de la lumière réfléchie par les particules au cours de leur déplacement.

Trajectoires : exemple

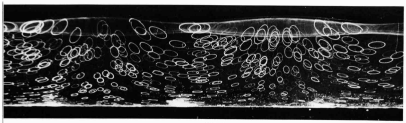
Trajectoire des particules fluide dans un canal à houle avec réflexion :



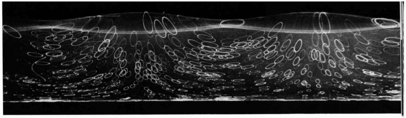
No reflection: pure progressive waves



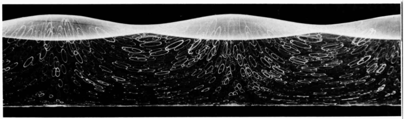
24% reflection



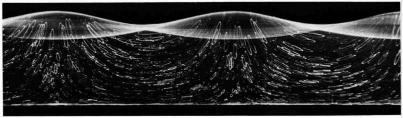
38% reflection



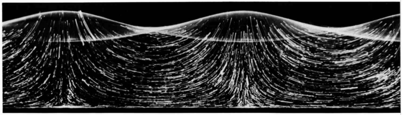
53% reflection



71% reflection



85% reflection



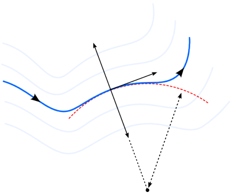
100% reflection: pure standing waves

Lignes de courant

Les lignes de courant correspondent aux lignes de champ du champ eulérien des vecteurs vitesse $\vec{u}(\vec{x},t)$. Ce sont les courbes tangentes en chaque point au vecteur vitesse à un instant donné t :

$$\mathcal{L}(t) = \{\vec{x} \; / \; d\vec{x} \times \vec{u}(\vec{x},t) = \vec{0}\}$$

où $\vec{dx}$ désigne le déplacement élémentaire le long de la ligne de courant considérée.



La visualisation expérimentale des lignes de courant s'effectue par la prise d'une photo à temps de pose court de l'écoulement ensemencé de particules réfléchissantes. Les lignes de courant peuvent alors se déduire des courts segments de traînée lumineuse laissée par les particules sur le cliché.

Définitions :
Une surface de courant est l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un même contour fermé.
Un tube de courant est le volume délimité par une surface de courant.

Lignes d'émission

Une ligne d'émission correspond à l'ensemble des positions occupées à un instant donné t par toutes les particules fluides qui sont passées auparavant (à un instant antérieur $\tau < t$) au même point géométrique $\vec{X}_0$:

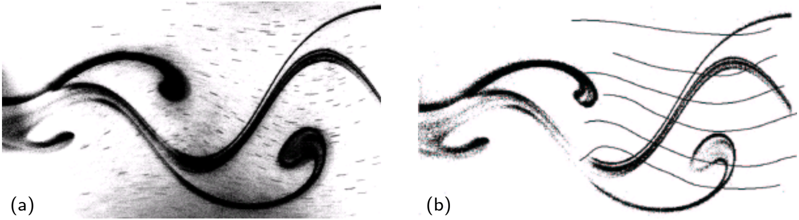
$$\mathcal{E}(t) = \{\vec{X}(t, \vec{X}_0) \ / \ \exists \tau \in [0, t], \vec{X}(\tau, \vec{X}_0) = \vec{X}_0\}$$

La visualisation expérimentale d'une ligne d'émission s'effectue par la prise d'une photo à l'instant t d'un filet de colorant émis en continu dans le fluide au point $\vec{X}_0$.

A titre d'exemple le panache de fumée d'une cigarette correspond à la ligne d'émission provenant du bout incandescent.

Exemple

Ecoulement instationnaire derrière un cylindre



(Le fluide va de gauche à droite et le cylindre se trouve à gauche juste en dehors de l'image)

(a) Visualisation des lignes d'émission et du déplacement des particules pendant le temps de pose.
(b) Reconstruction de quelques lignes de courant.

D'après le cours *Hydrodynamique Physique* de Marc Fermigier (ESPCI, 2002).

Propriété

Exercice (MMC) :

pour un écoulement stationnaire, on montre que ces trois familles de courbes (trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission) sont confondues.

Fonction de courant (écoulement 2D incompressible)

Considérons un écoulement bidimensionnel de la forme $\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y$.

Théorème :
Si $div(\vec{u}) = 0$, alors il existe une fonction $\psi(x, y)$ telle que

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,, \qquad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

Propriétés :

- ψ est constante le long des lignes de courant. [Démo]
- Le flux volumique a travers un *tube de courant* bordé par deux lignes de courant d'équation $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$ (et traversé par une surface transverse $\mathcal{S}$ vaut :

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = |\psi_2 - \psi_1|$$

  NB : $[\psi] = m^2s^{-1}$, l'expression précédente définit donc un flux volumique *par unité de largeur dans la direction transverse*.
- On peut aussi écrire $\vec{u} = rot(\psi\vec{e}_z)$.
- $\vec{\omega} = rot(\vec{u}) = -\Delta\psi\vec{e}_z$.
- Si l'écoulement est décrit en *coordonnées polaires* par $\vec{u} = u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_\theta$:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,, \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Fonction de Stokes (écoulement incompressible à symétrie de révolution)

Considérons un écoulement a *symétrie de révolution* de la forme $\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_z \vec{e}_z$.

Théorème :
Si $div(\vec{u}) = 0$, alors il existe une fonction $\Psi(x, y)$ telle que

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

Propriétés :

- Ψ est constante le long des surfaces de courant. [Démo]
- Le flux volumique a travers un *tube de courant* bordé par deux surfacez de courant d'équation $\Psi = \Psi_1$ et $\Psi = \Psi_2$ (et traversé par une surface transverse $\mathcal{S}$ vaut :

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = |\Psi_2 - \Psi_1|$$

  NB : $[\Psi] = m^3 s^{-1}$, l'expression précédente définit donc bien un flux volumique.
- Si l'écoulement est décrit en *coordonnées sphériques* par $\vec{u} = u_R \vec{e}_R + u_\Theta \vec{e}_\Theta$:

$$u_R = -\frac{1}{R^2 \sin\Theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}, \qquad u_\Theta = \frac{1}{R\sin\Theta}\frac{\partial \Psi}{\partial R}. \tag{3}$$