Mécanique des fluides

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique
david.fabre@imft.fr

0. Présentation et organisation du cours

Objectifs du cours

- ✓ Savoir analyser, décrire et caractériser les écoulements
- ✓ Connaître les phénomènes physiques de base impliqués dans les écoulements
- ✓ Maîtriser la modélisation de ces mécanismes et leur mise en équation :

  $\rightarrow$ Equation de Navier-Stokes
- ✓ Savoir identifier les mécanismes dominants et ceux qui sont négligeables

  $\rightarrow$ définition et exploitation des nombres sans dimension.
- ✓ Savoir simplifier les modèles en conséquence
- ✓ Connaitre les principales techniques de résolution mathématique de ces problèmes

  $\rightarrow$ Méthodes locales (résolution exacte de l'équations de NS dans des cas simples) et intégrales (utilisation d'équations-bilan).

Remarque : liste non exhaustive...

Description du module

Format :

- ✓ 12 Cours (12x2h) + 12 TD (12x2h) + 3 TPs expérimentaux (3x3h) + 1 TP numérique (3h).
- ✓ Structuration du cours : 1 chapitre = 1 thème par semaine
  avec 1 séance de TD associé (2h, la semaine d'après).
  (NB : 2 cours la première semaine !)
- ✓ Entre cours et TD : exercice complémentaire sur Moodle (travail personnel)
  Questionnaire Pédagogique Hebdomadaire (sur moodle)
- ✓ TP expérimentaux et numériques : obligatoires, cf. informations sur le tableau d'affichage

Intervenants :

- Cours : David FABRE (david.fabre@imft.fr)
- TD : Mokhtar ZAGZOULE, Frédéric MOULIN
- TP expérimentaux : Frédéric MOULIN
- TP numériques : David FABRE
- (Enseignants précédents : P. BRANCHER, P. LAURENS, S. SAINTLOS, F. CHARRU...)

Evaluation :

1. Première session : TP 25% (num 10%, expé 15 %), CC 30% (exam partiel 2h 25% + QPH 5%), CT 45 % (exam final 3h)
2. Seconde session : report de la note de TP (20%), examen terminal 2 (80%)

"Philosophie"

Mécanique des fluides = discipline scientifique dont la maîtrise passe par la pratique régulière et répétée des analyses et des techniques de modélisation et de résolution (exercices de TD, développements théoriques et démonstrations du cours)

→ travail personnel ! (rappel : 1h de présentiel = 1h de travail perso)

⇒ sur les 16 semaines du semestre = en moyenne 3h/semaine minimum (révisions incluses)

Méthodologie

Entre le cours et le TD : (NB : pas de rappel de cours en TD...)

1. relire le cours,
2. refaire les démonstrations,
3. refaire les exercices traités en cours,
4. travailler l'exercice complémentaire de la semaine.
5. répondre au questionnaire pédagogique hebdomadaire sur moodle !

Important : rien n'est complètement trivial, il faut se poser des questions → posez des questions !

Présupposé : il n'existe (presque) pas de question stupide en mécanique des fluides...

Informations

Quelques informations disponibles sur le tableau d'affichage du L3

Plus d'informations sur la page Moodle du cours : https ://moodle.univ-tlse3.fr/course/view.php ?id=1025

Plusieurs documents pédagogiques ou administratifs mis en ligne :

- Résumés de cours
- Compléments de cours (Formulaire,...)
- Enoncés de TD
- Exercices complémentaires (énoncés et corrigés)
- Questionnaire Pédagogique Hebdomadaire
- Enoncés et corrections d'autres exercices et problèmes
- Programmes informatiques
- Examens et corrigés
- [. . .]

Pré-requis et références bibliographiques

Pré-requis :

- Cours de Mécanique des milieux continus (MMC) du premier semestre
- Cours de Thermodynamique du premier semestre
- Notions de mécanique du point, des solides rigides et des systèmes.
- Outils mathématiques : analyse, algèbre linéaire, géométrie différentielle, équations différentielles, intégrales multiples, . . .
- Premières notions de mécanique des fluides ; Cours L2 (M. Marcoux).
  Nombreux documents sur moodle :
  `https://moodle.univ-tlse3.fr/course/view.php?id=1797`

Modules "compagnons" du second semestre :

- Transferts thermiques
- Mécanique des solides

Références :

Guyon, Hulin & Petit : *Hydrodynamique physique*. CNRS éditions, 2001.

Chassaing : *Mécanique des fluides : éléments d'un premier parcours*. Editions Cépaduès, 2000.

Candel : *Mécanique des fluides*. Dunod, 2005 (3e édition).

Darrozès & François : *Mécanique des fluides*. Editions de l'ENSTA, 1998.

Plan du cours

1. Introduction – Analyse dimensionnelle
2. Hydrostatique – Forces dans les fluides au repos
3. Cinématique – Description du mouvement d'un fluide.
4. Viscosité – Forces dans les fluides en mouvement
5. Equations de la mécanique des fluides – régimes d'écoulement
6. Ecoulements visqueux

   $\rightarrow$ partiel

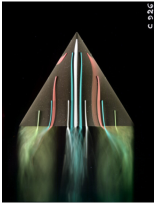
7. Ecoulements inertiels
8. Ecoulements potentiels
9. Ecoulements en conduite
10. Acoustique
11. Ecoulements compressibles
12. Ondes de choc

    $\rightarrow$ examen terminal

Mécanique des fluides

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique



Lignes d'émission dans le sillage
d'une maquette d'avion de type "aile delta"

Ecoulement dans le sillage
d'une maquette d'automobile

Images : expériences en tunnel hydrodynamique, H. Werlé (ONERA)

1. Introduction – Analyse dimensionnelle

Sommaire

Le millieu fluide : définition . . .

Point de vue du thermodynamicien :

Pour un corps pur on appelle phases fluides les deux états fondamentaux suivants :

- gaz (vapeur) : $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{CO_2}$, He, etc.
- liquide : $\mathrm{H_2O}$, métaux liquides (Hg à température ambiante, Zn pour $T > 450^o C$, Fe liquide comme dans le noyau liquide de la Terre, ...)
- Plus deux états qui ne sont pas des phases bien définies :
  $\rightarrow$ Fluides supercritiques.
  $\rightarrow$ Plasmas (gaz composé d'ions et d'électrons) : haute atmosphère, étoiles (estimation : 99% de la matière de l'Univers)

Point de vue du mécanicien :

Fluide = tout matériau susceptible de s'écouler ; cad de se déformer continument sous l'effet de forces extérieures.
De ce point de vue un fluide être un mélange de corps purs (fluides ou non) :

- mélange de gaz (ex. air : mélange oxygène et azote principalement)
- mélange de liquides miscibles (pastis = eau+alcool,...) ou solutions (eau de mer, perrier...)
- Mélanges de liquides non miscibles (ex. eau et huile, vinaigrette)
- Suspensions (lait, etc...)
- Collection de corps célestes (anneaux de saturne, galaxies,...)

Hypothèse des milieux continus

Point de vue microscopique (échelle microscopique ℓ) :
Description individuelle du mouvement des particules (masse m_i, vitesse $\vec{v}_i(t)$).

Point de vue macroscopique (échelle macroscopique L) :
Description globale par des "champs continus" $\rho(\vec{x},t)$, $\vec{u}(\vec{x},t)$, ...

Ce point de vue est justifié s'il existe un volume élémentaire représentatif (VER) de dimension L_{VER}, suffisamment grand pour pouvoir faire des statistiques, suffisamment petit pour pouvoir supposer la distribution de particules comme localement homogène.

$$\ell \ll L_{VER} \ll L \quad \longleftrightarrow \quad K_n = \frac{\ell}{L} \ll 1 \quad \text{(Nombre de Knudssen)}$$

Sous cette hypothèse on peut définir les champs de masse volumique, vitesse, énergie interne massique et température :

$$\rho = \frac{1}{VER} \sum_{i \in VER} m_i,$$

$$\vec{u} = \frac{1}{N} \sum_{i \in VER} \vec{v}_i,$$

$$e = \frac{1}{VER} \left(\sum_{i \in VER} \frac{m_i |\vec{v_i} - \vec{u}|^2}{2} \text{ (+ autres formes d'énergie micro.)} \right),$$

$$T = \frac{m_p v_q^2}{3k_b} \text{ avec } v_q^2 = \frac{1}{N} \sum_{i \in VER} \frac{|\vec{v_i} - \vec{u}|^2}{2} \quad \text{(vitesse quadratique moyenne)}$$

(pour des particules de masse identique $m_i = m_p$; $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} m^2 kg s^{-2} K^{-1}$ constante de Boltzmann)
Remarque : dans un gaz $\ell =$ libre parcours moyen $\approx 100nm$; dans un liquide $\ell =$ distance intermoléculaire $\approx 0.1nm$

Rappels de thermo

A l'échelle du VER, la matière est localement homogène, on peut donc faire l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local et utiliser les lois d'état thermodynamiques :

(a) "Equation d'état mécanique"

Formalisme thermo : $\mathcal{F}(P, T, V, N) = 0$ ($P =$ Pression, cf. chapitre 2)

En mécanique des fluides on utilise généralement cette équation sous la forme $\rho = \rho(P, T)$.

Rappels de thermo : compressibilité et dilatabilité.

Echelle de vitesse caractérisant la compressibilité : $c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$

Modèles simples :

- Gaz parfait $\rho = \frac{P}{rT}$; $\quad c = \sqrt{\gamma r T}$
- Liquide incompressible : $\rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0))$; $\quad c = \infty$
- Liquide incompressible, indilatable : $\rho = \rho_0; c = \infty$

(b) "Loi d'état énergétique"

Formalisme thermo : $E = E(S, V, N)$ (autres choix possibles, transformations de Legendre, etc...)

En mécanique des fluides, on l'utilise généralement sous la forme $e = e(T, P)$ ou $h = h(T, P)$

($h = e + P/\rho$ enthalpie massique). Modèles simples :

- Gaz parfaits mono et diatomique : $e = \frac{3rT}{2}; e = \frac{5rT}{2}$
- Liquide : $e = e_0 + c_v(T - T_0)$

Lois de comportement

En plus des lois d'état thermodynamique, il est nécessaire de se donner des lois de comportement :

(*a*) Loi de comportement mécanique :
Loi reliant les efforts internes aux déformations du matériau.
Formalisme MMC : $\overset{\Rightarrow}{\tau} = \mathcal{F}(\overset{\Rightarrow}{D})$ (cf. cours MMC et Chapitre 4.)
Modèle classique : fluide Newtonien
$\overset{\Rightarrow}{\tau} = 2\mu\overset{\Rightarrow}{D}$
μ : Viscosité dynamique. $[\mu] = Pa.s$.
(autre définition possible : ν : Viscosité cinématique. $[\nu] = m^2/s$.)

(*b*) Loi de comportement thermique :
Loi reliant $\vec{q}$ (flux de chaleur) à la distribution de T.
Modèle classique : loi de Fourrier $\vec{q} = -\lambda \mathrm{gr\vec{a}d} T$ (cf. cours transferts thermique).

Synthèse

$$\underbrace{\text{Lois d'état}}_{\text{(chap. 2)}} + \underbrace{\text{Lois de comportement}}_{\text{(chap. 4)}} + \underbrace{\text{Elements de cinématique}}_{\text{(chap. 3)}} \rightarrow \underbrace{\text{Equations de Navier-Stokes}}_{\text{(chap. 5)}}$$

Navier-Stokes : EDP non linéaires, structure mathématique compliquée.
(l'existence de solutions à cette équation dans le cas général est un problème à 1 million de dollars !)

Méthodes de résolution :
- Résolution exacte possible dans des cas très limités.
- Résolution numérique (M1 - M2 ; TP numérique)
- Résolution *approchée* souvent possible, guidée par l'*analyse dimensionnelle* qui permet de simplifier les équations en ne gardant que les termes les plus importants.

L'analyse dimensionnelle permet, par ailleurs, sans même écrire les équations, de "dégrossir" un problème en identifiant les paramètres importants.

Analyse dimensionnelle

Théorème "Π" (ou Théorème De Vashy -Buckingham) :

Soit une quantité physique Y dépendant de n paramètres physiques X_i ($i = 1$ à n).

$$Y = \mathcal{F}(X_1, X_2, X_n)$$

Le fait que Y dépend des variables X_i est vrai indépendamment des unités physiques choisies pour exprimer ces quantités. En notant $[Y]$ l'unité de Y, et $[X_i]$ l'unité de X_i :

$$\frac{Y}{[Y]} = \bar{\mathcal{F}}(\frac{X_1}{[X_1]}, \frac{X_2}{[X_2]}, \dots \frac{X_n}{[X_n]})$$

Alors un choix judicieux d'unités "'intrinsèques" au problème permet de montrer que la quantité adimensionnelle $\frac{Y}{[Y]}$ ne dépend que de $n - n_p$ paramètres adimensionnels, où n_p en le nombre d'unités fondamentales apparaissant dans les dimensions physiques du problème (en général en mécanique $n_p = 3$: Longueur Temps, Masse).

Remarques (importantes) :

- Souvent des constatations expérimentales et/ou des considérations géométriques et/ou l'étude de la structure des équations permettent de réduire encore plus le nombre de paramètres ou de préciser la dépendance vis-à-vis de ceux-ci.
- Si un paramètre sans dimensions est soit très petit, soit très grand, il arrive souvent que la relation devienne indépendante de ce paramètre (mais ce n'est pas une règle générale ! Il faut toujours rester guidé par l'expérience.)

(Exemples)

Exemple 1 : Période d'un pendule

(Pendule de longueur L, masse m, position angulaire initiale θ_0)

- Loi recherchée en fonction des paramètres physiques supposés pertinents :
$$T = \mathcal{F}(L, m, g, \theta_0)$$
- Mise sous forme adimensionnelle de la relation :
$$\frac{T}{[T]} = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{L}{[L]}, \frac{m}{[m]}, \frac{g}{[L]\cdot[T]^{-2}}, \frac{\theta_0}{1}\right)$$
- Choix des unités "intrinsèques" au problème :
$$[L] = L, \quad [m] = m, \quad [T] = \sqrt{L/g}$$
Ce qui conduit à :
$$\frac{T}{\sqrt{L/g}} = \overline{\mathcal{F}}(1, 1, 1, \theta_0) \quad \text{soit } T = \sqrt{\frac{L}{g}} f(\theta_0)$$
- Simplification :
Lorsque $\theta_0 \ll 1$ la période ne dépend plus de θ_0 (Constatation expérimentale, justifié également par l'étude des équations)
$$\longrightarrow T = \sqrt{\frac{L}{g}} \times C_{te}$$
- Remarque : la solution exacte du problème (exercice niveau L1) est $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Le résultat prédit par analyse dimensionnelle est bien de cette forme (mais ne donne pas la valeur de la constante).

Exemple 2 : Flexion d'une poutre pesante

(Poutre de longueur L, épaisseur e, largeur b, masse m, module d'young E, coef. de Poisson ν)

- Loi recherchée en fonction des paramètres physiques supposés pertinents :

$$\delta = \mathcal{F}(L, e, b, m, g, E, \nu)$$

- Mise sous forme adimensionnelle de la relation :

$$\frac{\delta}{[L]} = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{L}{[L]}, \frac{e}{[L]}, \frac{b}{[L]}, \frac{m}{[m]}, \frac{g}{[L]\cdot[T]^{-2}}, \frac{E}{[m][L]^{-1}[T]^{-2}]}\right)$$

- Choix des unités "intrinsèques" au problème :

$$[L] = L, \quad [m] = m, \quad [T] = \sqrt{L/g}$$

Ce qui conduit à :

$$\frac{\delta}{L} = \overline{\mathcal{F}}\left(1, \frac{e}{L}, \frac{b}{L}, 1, 1, \frac{EL^2}{mg}, \nu\right) \quad \text{soit } \delta = Lf\left(\frac{e}{L}, \frac{b}{L}, \frac{EL^2}{mg}, \nu\right)$$

- Simplifications :
  - δ ne dépend pas de b (considération géométrique).
  - δ ne dépend pas de ν (constatation expérimentale ; justifié également par l'étude des équations).
  - δ est proportionnel à m (constatation expérimentale ; justifié également par l'étude des équations).

$$\longrightarrow \delta = f(e/L) \times \frac{mg}{EL}$$

- Remarque : la solution exacte du problème (cf. cours Méca solides) est $\delta = \frac{3mgL^3}{2Ee^4}$ qui est bien de la forme attendue.

Utilisation pratique

Méthode pratique pour appliquer la méthode d'analyse dimensionnelle :

- Listez les paramètres physiques *pertinents* et *indépendants*
- Listez la dimension physique de toutes les quantités intervenant dans le problème.
- Ecrire la relation fonctionnelle sous forme adimensionnelle.
- Faire le choix "judicieux" des unités, et en déduire les paramètres adimensionnels du problème.

Remarque : le choix peut être plus ou moins "judicieux", des choix différents amènent à des jeux de paramètres différents, tous équivalents.

Le "bon" choix (guidé par l'expérience) est celui qui fait apparaître les nombres adimensionnels "classiques" (Reynolds, Mach, Froude, Bond, ...).

=> document "Formulaire", Tableau A "Nombres sans dimensions"

Application : forces sur un véhicule

Considérons un objet de dimension L placé dans un écoulement uniforme de vitesse U (ou de manière équivalente un objet se déplaçant à la vitesse U dans un fluide au repos).

On cherche à estimer les composantes F_x et F_z de la force exercée par le fluide sur l'objet.

Listons les paramètres physiques pertinents et indépendants :

$$F_x = \mathcal{F}(U, L, P_0, \rho_0, \nu, g, \mathcal{G}_i)$$

P_0, ρ_0, ν valeurs "de référence" des propriétés du fluide ;
g accélération du champ de pesanteur ;
$\mathcal{G}_i$ paramètre(s) géométrique(s) sans dimension (exemple : angle d'incidence, rapport de forme, ...)

Par application du théorème "Π" :

$$\frac{F_x}{\rho_0 L^2 U^2} = \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{UL}{\nu}, \frac{U}{\sqrt{gL}}, \frac{P_0}{\rho_0 U^2}, \mathcal{G}_i\right)$$

On reconnait les nombres sans dimension : $Re = \frac{UL}{\nu}$, $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$

Par convention on introduit une "surface de référence" $S \approx L^2$, et on pose donc

$$F_x = \frac{1}{2}\rho_0 S U^2 C_x(Re, Fr, P_0/\rho U^2, \mathcal{G}_i)$$

De même pour F_z :

$$F_z = \frac{1}{2}\rho_0 S U^2 C_z(Re, Fr, P_0/\rho U^2, \mathcal{G}_i)$$

Cas d'un liquide homogène (bateau, sous-marin)

Un liquide est incompressible pour des raisons thermodynamiques.
Supposons donc que la masse volumique homogène et vaut $\rho = \rho_0$.

- Première simplification :

  L'étude de la structure des équations montre que P_0 n'intervient pas dans le problème.
  $\rightarrow [C_x, C_z]$ ne dépendent pas de $P_0/\rho_0 U^2$.

- Seconde simplification :

  Si l'objet n'est pas a proximité d'une surface libre (cas d'un sous-marin), on montre que la force se décompose en deux parties :

  Une composante hydrodynamique qui est solution du problème fluide "non pesant"

  Une composante hydrostatique qui n'est autre que la poussée d'Archimède.

  [Démonstration : chapitre 5]

Remarque :
Cette seconde simplification n'est pas valable dans le cas d'un objet traversant une surface libre (cas des bateaux)

Pour un bateau la force de traînée est de la forme :

$$F_x = \frac{1}{2}\rho_0 S U^2 C_x(Re, Fr, \mathcal{G}_i)$$

Dans la plupart des cas l'effet de Fr est dominant (traînée de vagues).

Cas d'un gaz (avion, automobile)

Pour un gaz (compressible) :

- L'effet de la gravité est en général négligé.
- Le paramètre $P_0/\rho_0 U^2$ est directement relié au *Nombre de Mach* Ma :

$$Ma^2 = \frac{U^2}{c^2} \quad \text{avec } c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{1}{P_0 \chi_s} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$$

Les forces sur un objet en mouvement dans un gaz (par ex. un avion) sont donc données par :

$$F_x = \frac{1}{2}\rho_0 S U^2 C_x(Re, Ma, \mathcal{G}_i)$$

$$F_z = \frac{1}{2}\rho_0 S U^2 C_z(Re, Ma, \mathcal{G}_i)$$

On justifiera plus tard que :

- c est la vitesse des ondes acoustiques (chapitre 10).
- si $Ma < 0.3$ la structure de l'écoulement (et les forces induites) ne dépend pas du nombre de Mach. L'écoulement d'un gaz (compressible) est dans ce cas identique à celui d'un liquide incompresssible. (on parle alors d'écoulement incompressible ; cf. chap. 5 et 11)

Conséquence : dans le "régime d'écoulement incompressible" les forces sur un avion (ou sur une automobile) sont de la forme

$$[F_x, F_z] = \frac{1}{2}\rho_0 S U^2 [C_x(Re, \mathcal{G}_i), C_z(Re, \mathcal{G}_i)]$$

Lois de similitude

Problème pratique pour un ingénieur :
Pour un véhicule de longueur L, vitesse U, dans un fluide et un environnement de caractéristiques (ρ_0, P_0, ν, g), estimez la force de traînée F_x (et/ou la portance F_z).

Méthode expérimentale : On dispose d'une maquette à l'échelle réduite L_m, vitesse U_m, *Géométriquement similaire* (c.a.d. les paramètres $\mathcal{G}_i$ sont les mêmes que pour le véhicule). On effectue une expérience dans un environnement de caractéristiques $(\rho_m, P_m, \nu_m, g_m)$.

On mesure une force $F_{x,m}$ sur la maquette.

Comment en déduire la force F_x sur le véhicule à échelle réelle ? ? ?

Principe de similitude : Si les paramètres sans dimensions sont les mêmes dans les conditions réelles et celles de l'expérience (conditions de *similitude*), alors le coefficient de force sans dimension C_x prend la même valeur !

Exemples d'application :

- Cas d'une automobile : Un seul paramètre Re.
  On peut donc être en similitude exacte. (N.B. le fluide dans l'expérience peut être différent de l'air...)
- Cas d'un avion : Deux paramètres Re, Ma.
  Impossibilité d'être en similitude exacte (a moins de faire varier fortement la température...)
- Cas d'un bateau : Deux paramètres Re, Fr.
  Impossibilité d'être en similitude exacte (a moins de faire l'expérience sur une autre planète...)

Dans les deux derniers cas, en pratique, on se met en *similitude partielle* en privilégiant le paramètre le plus important (respectivement Ma et Fr), et on corrige l'effet du nombre de Re par des méthodes semi-empiriques issues de la modélisation des effets visqueux.