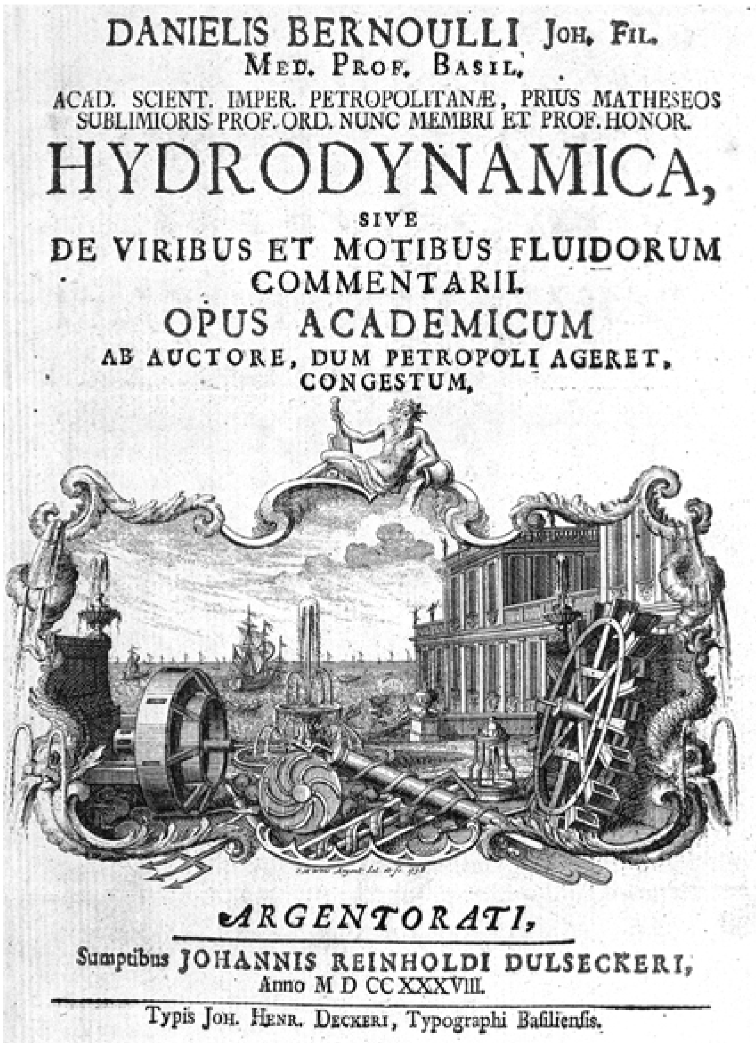
Université Toulouse 3 – Paul Sabatier
L3 Mécanique

Année universitaire 2017-2018
Mécanique des fluides

Exercices et problèmes – 1ère partie


DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS
SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM
COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET,
CONGESTUM.

ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CC XXXVIII.
Typis JOH. HENR. DECKERI, Typographi Basiliensis.

Equipe pédagogique :
D. Fabre, M. Zagzoule

Table des matières

1 Analyse dimensionnelle et similitude

1.1 Force de résistance à l'avancement d'un bateau de pêche

On cherche à déterminer la résistance à l'avancement d'un petit bateau de pêche naviguant dans de l'eau de mer à la vitesse nominale $U = 6m/s$ La longueur du navire est de $L = 10m$, et sa surface mouillée est de $S = 37,64m^2$.

1.1.1 Analyse dimensionnelle

1. Listez tous les paramètres physiques pertinents et indépendants ayant une influence sur la force de résistance.
2. En déduire que la résistance à l'avancement peut se mettre sous la forme suivante :

$$R_T = \frac{1}{2}\rho S U^2 \cdot C_T\left(\frac{UL}{\nu}, \frac{U}{\sqrt{gL}}\right)$$

3. Quels nombres adimensionnels classiques reconnaissez-vous là ? quelle est leur interprétation ?
4. Calculez la valeur de ces deux nombres dans le cas du bateau de pêche en condition réelles.

1.1.2 Etude de similitude

On cherche à déterminer la traînée à l'aide d'une expérience en bassin de traction (dans l'eau douce), à l'aide d'une maquette à l'échelle 1/10ème.

5. Est-il possible de faire une expérience en similitude totale (nombres de Froude et de Reynolds identiques dans l'expérience et le navire réel) ?
6. Quelle doit être la vitesse U_m de la maquette si l'on souhaite respecter la similitude de Reynolds ? Que vaut alors le nombre de Froude de l'expérience ? ce cas vous semble-t-il réaliste ?
7. Quelle doit être la vitesse U_m de la maquette si l'on souhaite respecter la similitude de Froude ? Que vaut alors le nombre de Reynolds Re_m de l'expérience ?

1.1.3 Similitude partielle sous l'hypothèse de Froude

Lorsque $Re \gg 10^5$ et $Fr \leq 0.4$, l'expérience montre que l'on peut faire l'hypothèse de Froude, qui consiste à supposer que la résistance à l'avancement se décompose en deux parties données par les expressions suivantes :

$$C_T(Re, Fr) = C_{f,0}(Re) + C_w(Fr)$$

où C_v est le coefficient de traînée visqueuse, estimé par la loi empirique de Hugues :

$$C_v(Re) = \frac{0.074}{(\log_{10} Re - 2)^2}$$

et $C_w(Fr)$ est la traînée de vagues, qui peut être mesuré en effectuant une expérience en similitude de Froude.

8. Pour une vitesse d'avance de la maquette correspondant à celle calculée à la question 7, on mesure sur la maquette une résistance à l'avancement $C_{T,m} = 1.267N$.
   En déduire la traînée totale exercée sur le navire réel C_T, puis la puissance qui doit être fournie par le moteur du bateau.

1.2 Force de traînée sur une automobile

On cherche à estimer la force de traînée D s'exerçant sur une automobile de longueur L et surface frontale S roulant à la vitesse V, à l'aide d'une expérience utilisant une maquette à échelle réduite dans un tunnel hydrodynamique.

1. Listez et discutez les paramètres physiques pertinents et indépendants dans ce problème.
2. En utilisant les principes de l'analyse dimensionnelle, montrez que la traînée s'exprime simplement sous la forme suivante :

$$D = \rho S V^2 C_x(Re), \quad \text{avec } Re = \frac{VL}{\nu}$$

3. Calculez la valeur du nombre de Reynolds, pour une automobile de longueur $L = 4m$ (et surface frontale $S = 1.74m^2$), roulant à la vitesse $V = 90km/h$.
4. Dans l'expérience, la maquette est à l'échelle 1/10 (c.a.d. $L_m = L/10$). La vitesse de l'eau dans le tunnel hydrodynamique est notée V_m.

   Quelle doit être la valeur de V_m pour assurer la similitude de Reynolds ?
5. Le tunnel hydrodynamique étant réglé à la vitesse V_m précédemment déterminée, on mesure à l'aide d'une balance de forces une traînée sur la maquette $D_m = 911N$. En déduire le C_x, puis la traînée D sur la voiture.
6. En déduire la puissance dissipée par les forces aérodynamiques, puis la puissance qui doit être fournie par le moteur, en supposant que le rendement énergétique global de celui-ci est $\eta = 20\%$.

1.3 Vitesse d'un animal volant

On cherche à estimer la vitesse V d'un animal volant (insecte, oiseau ou chauve-souris) en fonction de sa masse M.

1. Listez les différents paramètres physiques intervenant dans le problème, et discutez leur pertinence. Montrez qu'il est légitime de supposer que la vitesse est donnée par une loi de la forme

$$V = \mathcal{F}(M, L, \rho, g, \nu).$$

   où ρ est la masse volumique de l'air, g l'accélération de la gravité, L l'envergure de l'oiseau, M sa masse et ν la viscosité cinématique de l'air.
2. Donnez les dimensions physiques de V, ρ, ν, g, L et M.
3. En appliquant les principes de l'analyse dimensionnelle, montrez que la loi de vitesse peut se mettre sous la forme :

$$V = \sqrt{gL}\ \mathcal{F}\left(\frac{M}{\rho L^3}, \frac{\nu}{\sqrt{gL^3}}\right).$$

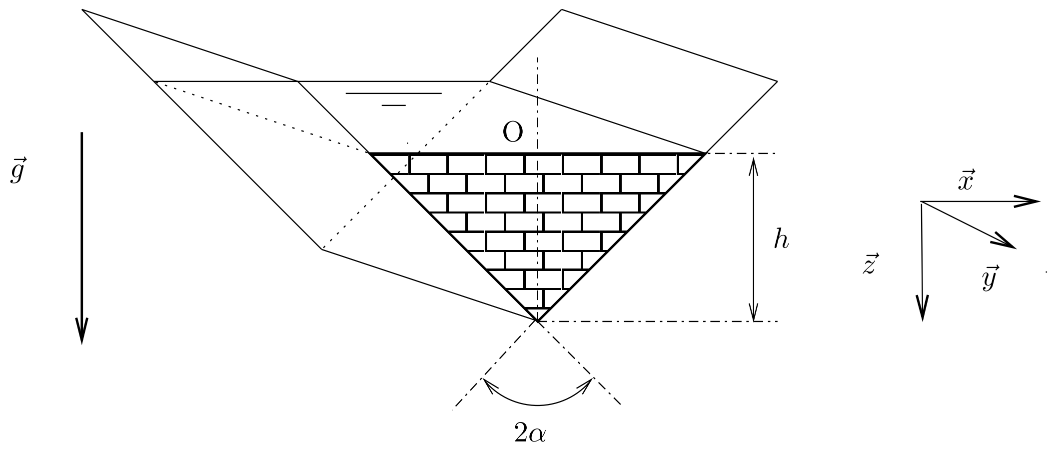
4. Interprétez physiquement la quantité $M/(\rho L^3)$. Justifiez pourquoi on peut supposer en première approximation que cette quantité a la même valeur pour tous les animaux volants.
5. Quelle est l'interprétation physique du nombre sans dimensions $Ga = \frac{\sqrt{gL^3}}{\nu}$ (parfois appelé nombre de Galilée) ?
6. Des considérations aérodynamiques permettent de montrer que dans la gamme $Ga > 10^3$ la structure de l'écoulement est indépendante de la viscosité. Estimez le nombre de Galilée pour les différents animaux volants du tableau ci-dessous.
7. En déduire que la vitesse d'un animal volant est proportionnel à $M^{1/6}$.
8. Application : calculez le rapport $V/M^{1/6}$ pour les différents animaux détaillés dans le tableau ci-dessous. Commentez les résultats

Animal	Poids	Vitesse	$V/M^{1/6}$
Guêpe	$100mg$	$20km/h$	
Colibri	$2.5g$	$45km/h$	
Hirondelle	$17g$	$60km/h$	
Aigle	$6kg$	$160km/h$	
Airbus A300	$150T$	$855km/h$	

9. En se basant sur l'analyse précédente, à combien estimez vous la vitesse d'une mouette de masse $400g$?

2 Hydrostatique

2.0 * Forces de pression sur un barrage



On considère un lac dans une vallée de section triangulaire, d'angle au sommet 2α. Le lac est fermé par un barrage de hauteur h. Le lac est rempli d'eau de densité constante ρ, et sa surface est à la pression atmosphérique P_a.

1. Donnez l'expression de la pression $P(z)$ régnant dans le lac, où z est l'altitude comptée par rapport à la base du barrage.
2. Calculez la résultante $\vec{R}$ des forces de pression exercées par l'eau et par l'air sur la surface du barrage.
3. Calculez le moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ des forces de pression par rapport au point O.
4. Donnez la position du centre de poussée F des forces de pression.

2.1 Modèle d'atmosphère normalisée

Le *modèle d'atmosphère normalisée* (`http://fr.wikipedia.org/wiki/Atmosphère_normalisée`) est un modèle adopté internationalement qui découpe l'atmosphère en sept couches successives dans lesquelles la température est donnée par une loi affine de la forme

$$T(z) = T_0(1 - \alpha z)$$

On considère ici uniquement la couche inférieure appelée troposphère ($0 < z < 11km$) dans laquelle les paramètres de cette loi sont $\alpha = 22.6 \cdot 10^{-6} m^{-1}$ et $T_0 = 288K$.

Donnez les loi $P(z)$ et $\rho(z)$ correspondantes, sachant que la pression au niveau du sol est $P_0 = 1013hPa$.

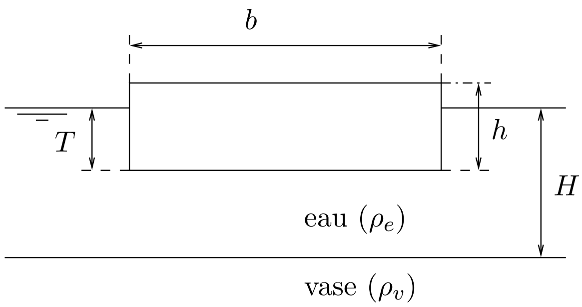
2.2 La montgolfière

On considère une montgolfière, constituée d'un ballon sphérique et de rayon $R = 8m$, ouvert à sa base par une ouverture de section négligeable, et d'une nacelle.

On souhaite déterminer la température à laquelle il faut chauffer le gaz intérieur pour pouvoir voler à l'altitude de $h = 1000m$.

1. En utilisant le modèle d'atmosphère standard, donnez la masse volumique ρ_{ext}, la température T_{ext} et la pression $P_{ext,h}$ caractérisant l'air à l'extérieur de la montgolfière à l'altitude $h = 1000m$ correspondant à la base du ballon.
2. Quelle erreur commet-on en supposant la masse volumique constante à l'échelle du ballon ? Montrez que dans cette approximation la pression peut être approximée par une loi affine de la forme $P_{ext}(z') \approx P_{ext,h} + az'$ où $z' = z - h_0$ est l'altitude comptée à partir de la base du ballon.
3. Le ballon est rempli d'air de masse volumique ρ_{int} supposée uniforme. Donnez la loi de pression $P_{int}(z')$ à l'intérieur du ballon.
4. Calculez la résultante des efforts exercés par l'air sur le ballon.
5. Retrouvez le résultat précédent à l'aide du théorème d'Archimède.
6. Application : calculez la valeur de ρ_{int} nécessaire pour maintenir la montgolfière en équilibre à l'altitude 1000m, considérant que sa masse totale est $m = 2500kg$. En déduire la température T_{int} mesurée à la base du ballon.

2.3 Envasement d'une barge



On considère une barge de section carrée, de largeur $b = 10m$ de hauteur $h = 1m$, et de masse $M = 75t$. La barge flotte dans de l'eau de densité $\rho_e = 1000kgm^{-3}$. A marrée haute la hauteur d'eau est $H > h$.

1. Calculez le tirant d'eau de la barge à marée haute.
2. A marée basse la hauteur d'eau est de $H = 25cm$, et la barge s'enfonce dans la vase, que l'on considère comme un fluide de masse volumique $\rho_v = 2\rho_e$. Calculez la profondeur d'envasement e.
3. Calculez l'allègement qu'il faudrait faire subir à la barge pour éviter son envasement.

2.4 $*$ Lois de pression et de température en fonction de la profondeur

On cherche à estimer les lois de pression $P(z)$ et de masse volumique $\rho(z)$ dans l'océan en fonction de la profondeur z. Les altitudes z sont comptées vers le bas à partir de la surface de l'océan, et la pression au niveau de la mer est $P_0 = 1,013Bars$.

On donne les informations suivantes :

— La couche superficielle, qui s'étend jusqu'à environ 500 mètres de profondeur, est appelée thermocline. Dans cette couche la température varie entre $T = 25^oC$ (en surface) et $T = 1.5^oC$ (à la base de la thermocline). On suppose pour simplifier que la salinité est constante ($S = 35g/kg$).
  On supposera que dans la thermocline la compressibilité est négligeable, de sorte que la masse volumique dépend seulement de la température, et est donnée par la relation simplifiée suivante (issue de l'équation d'état officielle IES80, avec T en ^oC, ρ en kg/m^3) :

$$\rho = 1028.15 - 0.05403 \times T - 0.006762 \times T^2 + 7.955 \cdot 10^{-5} \times T^3 - 9.3152 \cdot 10^{-7} \times T^4 + 6.5363 \cdot 10^{-9} \times T^5.$$

— Dans les couches plus profondes, à cause de la compressibilité de l'eau de mer, la masse volumique et la température varient (faiblement) en fonction de la pression.
  On supposera que dans les couches profondes les coefficients thermodynamiques et thermoélastiques sont constants, et ont les valeurs suivantes :

$$\chi_s = 4.6 \cdot 10^{-10} Pa^{-1}; \quad \alpha_p = 8 \cdot 10^{-5} K^{-1}; \quad c_p = 4000 J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}.$$

1. Donnez la masse volumique en surface (ρ_0) et à la base de la thermocline (ρ_1). En déduire la loi de masse volumique $\rho(z)$ dans la thermocline, en supposant qu'elle varie linéairement avec la profondeur.
2. Déduisez-en la loi de pression $P(z)$ dans la thermocline. Donnez en particulier la pression P_1 à la base de la thermocline.
3. Dans les couches profondes, la masse volumique peut s'exprimer en bonne approximation par l'équation linéaire suivante :
$$\rho = \rho_1 \left(1 + \chi_s (P - P_1)\right).$$
Donnez les lois de pression $P(z)$ et de masse volumique dans les couches profondes de l'océan ($z > z_1$). Donnez une approximation polynômiale de ces lois sous la forme $P(z) = P_1 + a(z - z_1) + b(z - z_1)^2$, et $\rho(z) = \rho_1 + c(z - z_1)$.
4. Démontrez la relation suivante entre les coefficients thermodynamiques :
$$\epsilon_s = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s = \frac{\alpha_p}{\rho c_p}$$
5. Déduisez-en la loi de température $T(z)$ dans les couches profondes ($z > z_1$).
6. Application. La fosse océanique la plus profonde sur terre est située dans le Pacifique, au large de l'archipel des Mariannes, et atteint la profondeur $z = 11000m$. Donnez la pression (en bars), la masse volumique et la température reignant à cette profondeur.

3 Cinématique

3.0 Écoulement de déformation pure (exercice corrigé sur moodle)

On considère l'écoulement plan défini par le champ de vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u(x,y) & = & ax+by \\ v(x,y) & = & cx+dy \end{array} \right. \text{ où } a,b,c \text{ et } d \text{ sont des constantes.}$$

1. Donnez l'expression du tenseur des taux de déformation, de la divergence puis de la vorticité correspondant à cet écoulement.
2. Que vaut l'accélération ? celle-ci est-elle uniforme ?
3. Dans le cas $d=-a$, justifiez qu'on peut introduire une fonction de courant $\psi(x,y)$ pour décrire l'écoulement, et donnez son expression.
4. Déterminez les lignes de courant et les trajectoires (on vérifiera qu'il s'agit des mêmes courbes).
5. A l'aide du programme Matlab disponible sur moodle, tracez la structure de l'écoulement dans les cas suivants :
   (i) $b=1$, $a=c=d=0$.
   (i) $a=1$, $b=c=0$, $d=-1$.
   (i) $b=c=1$, $a=d=0$.
6. Justifiez pourquoi ces deux derniers cas définissent le même écoulement.

3.1 Tourbillon de vidange

On étudie un écoulement stationnaire, occupant un récipient cylindrique de rayon R_0 et de hauteur H.

Le champ de vitesse est donné en coordonnées cylindriques par $\vec{u} = u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_\theta + u_z\vec{e}_z$, avec les expressions suivantes :

$$\text{pour } r<a : \left\{ \begin{array}{lcl} u_r & = & -\dfrac{Dr}{2\pi a^2} \\ u_\theta & = & \dfrac{\Gamma r}{2\pi a^2} \\ u_z & = & \dfrac{Dz}{\pi a^2} \end{array} \right. \qquad \text{pour } r>a : \left\{ \begin{array}{lcl} u_r & = & -\dfrac{D}{2\pi r} \\ u_\theta & = & \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \\ u_z & = & 0 \end{array} \right.$$

Partie A : "Tourbillon de Rankine"

On considère tout d'abord l'écoulement plan correspondant à $D=0$, $\Gamma>0$.

1. Donnez l'expression du tenseur des gradients de vitesse dans chacune des deux régions de l'écoulement. En déduire la divergence, la vorticité $\vec{\omega}$ puis le tenseur des taux de déformations $\bar{\bar{D}}$.
2. Représentez schématiquement les déformations d'un volume élémentaire $dV = rd\theta drdz$ situé dans le coeur ($r<a$) puis dans la zone extérieure ($r>a$).
3. Après avoir justifié son existence, donnez l'expression de la fonction de courant ψ associée à cet écoulement. En déduire que les lignes de courant sont des cercles concentriques.
4. (question facultative) Reprendre l'étude à partir d'une description en coordonnées cartésiennes $u_x(x,y)\vec{e}_x + u_y(x,y)\vec{e}_y$.

Partie B : "Ecoulement de vidange non tournant"

On considère maintenant l'écoulement à symétrie de révolution correspondant à $D>0$, $\Gamma=0$.

5. Donnez l'expression du tenseur des gradients de vitesse. En déduire la divergence, la vorticité $\vec{\omega}$ puis le tenseur des taux de déformations $\vec{D}$.
6. Représentez schématiquement les déformations d'un volume élémentaire $dV = rd\theta drdz$ situé dans la zone extérieure ($r>a$) puis dans le coeur $r<a$).
7. Après avoir justifié son existence, donnez l'expression de la fonction de Stokes Ψ associée à cet écoulement. En déduire la géométrie des lignes de courant.
8. Calculez le flux volumique A travers la paroi latérale du cylindre ($r=R_0$) puis à travers le fond du récipient ($z=H$).

Partie C : "Tourbillon de vidange"

On considère maintenant le cas général : $D > 0$, $\Gamma > 0$.

9. Calculez la *trajectoire* (paramétrée sous la forme $[R(t); \theta(t); Z(t)]$) d'une particule fluide située initialement à la position $[R(0) = R_0, \theta(0) = \theta_0, Z(0) = Z_0]$. Montrez que celle-ci est donnée par :

$$\text{pour } t < t_c : \left\{ \begin{array}{lcl} R(t) & = & \sqrt{R_0^2 - \frac{Dt}{2\pi}} \\ \\ \theta(t) & = & \theta_0 - \dfrac{\Gamma}{D} \dfrac{ln\left(R_0^2 - Dt/(2\pi)\right)}{ln(R_0^2)}; \\ \\ Z(t) & = & Z_0 \end{array} \right. \qquad \text{pour } t > t_c : \left\{ \begin{array}{lcl} R(t) & = & a \exp\left(-\dfrac{D(t-t_c)}{2\pi}\right) \\ \\ \theta(t) & = & \theta_c + \dfrac{\Gamma}{2\pi}(t - t_c) \\ \\ Z(t) & = & Z_0 + Z_0 \exp\left(\dfrac{D(t-t_c)}{\pi}\right) \end{array} \right.$$

Avec :

$$t_c = \frac{2\pi(R_0^2 - a^2)}{D}; \qquad \theta_c = \theta_0 - \frac{\Gamma}{D}\frac{ln(a^2)}{ln(R_0^2)}.$$

10. Vérifiez que les projections dans un plan horizontal des trajectoires sont des spirales d'Archimède d'équation $r \equiv e^{-\alpha\theta}$ et donnez le "pas" de la spirale α en fonction de Γ et D.
11. Retrouvez ce résultat plus simplement en étudiant les *lignes de courant* de l'écoulement.
12. Représentez schématiquement la forme des trajectoires (ou des lignes de courant) de l'écoulement tridimensionnel.

3.2 Écoulement instationnaire

On considère un écoulement bidimensionnel dont la vitesse est donnée sous forme eulérienne par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_x(x,y,t) & = & U_0 \cos\omega t, \\ u_y(x,y,t) & = & U_0 \sin\omega t. \end{array} \right.$$

1. Donnez la forme des lignes de courant en un instant t donné. Représentez le champ de vitesse pour 4 instants correspondant à $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, et $t = 3T/4$, où $T = 2\pi/\omega$ est la période du cycle.
2. On note $\vec{X}(t; \vec{x}_0, t_0)$ la position lagrangienne, à l'instant t, de la particule fluide qui était située à la position $\vec{x}_0$ à l'instant t_0.
   Calculez les composantes de $\vec{X}(t; \vec{x}_0, t_0)$, notées $X(t; x_0, y_0, t_0)$ et $Y(t; x_0, y_0, t_0)$, où x_0 et y_0 sont les composantes de $\vec{x}_0$.
3. Quelle est la forme des trajectoires ? Représentez la trajectoire de 4 particules, correspondant respectivement à $(x_0, y_0, t_0) = (0, 0, 0)$; $(0, 0, T/4)$; $(0, 0, T/2)$; et $(0, 0, 3T/4)$.
4. Quelle est la forme des lignes d'émission ? Représentez la ligne d'émission correspondant au point d'émission $\vec{x}_0 = \vec{0}$, en quatre instants, correspondant à $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, et $t = 3T/4$.

3.3 Écoulement stationnaire accéléré dans une conduite

On étudie l'écoulement dans une conduite rectiligne de section constante S. L'écoulement est monodirectionnel et stationnaire, et on pose $\vec{u}(\vec{x}, t) = U(x)\vec{e}_x$. L'écoulement subit une accélération dans la portion de conduite située entre $x = 0$ et $x = L$. De part et d'autre de cette zone l'écoulement est uniforme. De manière plus précise, on suppose que le champ de vitesse est donné par la définition (eulérienne) suivante :

$$U(x) = \left\{ \begin{array}{ll} U_0 & \text{pour } x < 0; \\ U_0 + \alpha x & \text{pour } 0 < x < L; \\ U_1 & \text{pour } x > L, \text{ avec } U_1 = U_0 + \alpha L. \end{array} \right.$$

Cet écoulement modélise (très simplement) l'écoulement dans un turboréacteur.

1. Calculez la divergence du champ de vitesse.
2. On note $X(t)$ la position lagrangienne de la particule fluide située à l'origine du repère à $t_0 = 0$. Calculez $X(t)$.
3. Calculez la vitesse lagrangienne $U(t)$ et l'accélération lagrangienne $A(t)$ de cette particule fluide.

4. Exprimez l'accélération en variables euleriennes. Montrez qu'on a bien $A = \partial U/\partial t + U\partial U/\partial x$.
5. Donnez l'expression du débit massique à travers la conduite. En écrivant que ce dernier est constant, en déduire la loi eulerienne de masse volumique, $\rho(x)$.
6. Donnez la loi lagrangienne de masse volumique, $\rho(t)$, de la particule fluide considérée prédédemment.
7. Calculez la dérivée particulaire de la masse volumique, $d\rho/dt$. Vérifiez que l'on a bien $d\rho/dt + \rho div(\vec{u}) = 0$.

3.4 Descriptions lagrangienne et eulérienne *(Partiel 2004)*

On considère l'écoulement suivant donné sous forme *lagrangienne* :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X(t) & = & bt + X_0 \\ Y(t) & = & \frac{a}{\omega}\sin(\omega t) + Y_0 \end{array} \right. \quad \text{où } a,\ b \text{ et } \omega \text{ sont des constantes.}$$

1. Donner l'équation des trajectoires $Y(X)$.
2. Donner la signification physique de X_0 et Y_0.
3. Calculer l'accélération lagrangienne $\vec{a}_L$.
4. Donner la description eulérienne de ce mouvement. Calculer le terme convectif. En déduire l'accélération eulérienne $\vec{a}_E$. Comparer avec $\vec{a}_L$.
5. Ce mouvement est-il stationnaire ? isovolume ? irrotationnel ?
6. Déterminer l'équation des lignes de courant. On en précisera la forme géométrique.
7. Tracer les trajectoires correspondant aux trois conditions initiales : $X_0 = 0$ et $Y_0 = -1, 0$ et 1.
8. Tracer sur le même graphe les lignes de courant pour $y_0 = -1, 0$ et 1 aux instants $t = 0, 0.5$ et 1 seconde. On prendra $b = 1$ m.s^{-1}, $a = 2\pi$ m.s^{-1} et $\omega = 2\pi$ rad.s^{-1}.

3.5 Écoulement instationnaire

On considère l'écoulement plan *instationnaire* défini par $u = 1$ et $v = t$.

1. Vérifier que l'écoulement est incompressible.
2. Déterminer :
   - les lignes de courant,
   - les trajectoires,
   - les lignes d'émission.

4 Ecoulements visqueux I : Rhéologie et écoulements stationnaires parallèles

4.0 Ecoulement de Poiseuille

(exercice préparatoire, correction sur moodle)

4.1 Ecoulement de dentifrice

Le dentifrice est un exemple de "fluide à seuil" qui ne s'écoule que si la contrainte de cisaillement est supérieure à un seuil τ_c. Considérons donc un tube cylindrique de longueur L rempli de dentifrice, et soumis à une différence de pression $p_e - p_s$.

1. Déterminer le profil de la contrainte de cisaillement dans le tube.
2. A partir de quelle différence de pression le dentifrice s'écoule-t-il ?
3. Etablir l'expression du champ des vitesses, et représenter ce champ.
4. Etablir l'expression du débit en fonction du gradient de pression.

4.2 Film de peinture (Partiel 2018)

On considère un liquide de masse volumique ρ uniforme qui s'écoule sous la forme d'un film d'épaisseur uniforme h sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale. On introduit un repère (x, y) où la direction x est alignée avec le plan incliné et y est la direction perpendiculaire.

Dans cet exercice on repartira de l'équation de Cauchy écrite sous la forme suivante :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{g} - gr\vec{a}dp + d\vec{i}v(\bar{\bar{\tau}})$$

1. Sous des hypothèses que vous préciserez, montrez que l'équation de Cauchy peut se ramener à l'équation suivante :
$$0 = \rho g \sin\theta + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$
2. Après avoir précisé la condition limite vérifiée par la contrainte en $y = h$, établir la loi $\tau_{xy}(y)$ donnant la contrainte visqueuse dans le film.
3. En déduire que la contrainte est maximale (en module) à la base du film et vaut :
$$\tau_{xy}(y = 0) = -\rho g h \sin\theta$$
Donnez une interprétation simple de cette expression.
4. Dans le cas d'un fluide Newtonien, justifiez que la loi de vitesse $u(y)$ correspond à un polynôme d'ordre 2, et tracez la forme du profil $u(y)$ correspondant (on ne demande pas la résolution mathématique complète du problème).
Dans la suite on considère le cas d'un fluide non Newtonien obéissant à la loi de Bingham :
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} 0 & (|\tau_{xy}| < \tau_c) \\ \frac{1}{\mu}(\tau_{xy} - \tau_c) & (\tau_{xy} > \tau_c) \\ \frac{1}{\mu}(\tau_{xy} + \tau_c) & (\tau_{xy} < -\tau_c) \end{cases}$$
5. Tracez la forme de la loi rhéologique (τ_{xy} en fonction de $\dot{\gamma} = \partial u/\partial y$) et comparez au cas d'un fluide Newtonien. Justifiez la désignation de "fluide à seuil" utilisée pour décrire ce type de fluide.
6. Montrez qu'il existe une épaisseur critique h_c telle que si $h < h_c$ le film ne coule pas. Exprimez h_c en fonction de ρ, g, θ et τ_c.
7. Dans le cas où $h > h_c$ tracez la forme attendue pour le profil de vitesse $u(y)$ (on ne demande pas une résolution mathématique complète du problème).
8. Application : On considère une peinture acrylique, décrite comme un fluide de Bingham avec les caractéristiques suivantes : $\tau_c = 1Pa$; $\rho = 850kg/m^3$; $\mu = 10^{-2}Pa{\cdot}s$. Donnez l'épaisseur maximale h_c d'une couche de peinture sur une paroi verticale permettant d'éviter tout risque de coulure.

5 Ecoulements visqueux II : problèmes instationnaires

5.0 Premier problème de Stokes

(exercice préparatoire, correction sur moodle)

5.1 Ecoulement au voisinage d'une paroi oscillante (second problème de Stokes)

On considère un fluide de viscosité cinématique ν occupant un demi-espace limité par une plaque plane animée d'un mouvement oscillant sinusoïdal $U \cos \omega t$, parallèlement à elle-même ("deuxième problème de Stokes"). Retrouvez la loi $u(y,t)$ décrivant la structure de l'écoulement (cf. tableau "solutions exactes" en Annexe).

Déduisez-en la contrainte visqueuse exercée par le fluide sur la paroi, et montrez que celle-ci est donnée par la loi suivante :

$$\tau_p = -\frac{\mu U \sqrt{2}}{\delta} \cos(\omega t - \pi/4)$$

Que vaut la vorticité dans l'écoulement ? montrez que la vorticité à la paroi est directement reliée à la contrainte pariétale.

5.2 Rythmes cardiaques (TP numérique)

Outre une différence de pression moyenne, le cœur qui bat impose une variation périodique du gradient de pression ce qui conduit à un écoulement pulsé dans les vaisseaux sanguins. L'objectif de cet exercice est de caractériser ce type d'écoulement en particulier dans les limites des basses fréquences (organisme au repos) et hautes fréquences (activité cardiaque intense).

Considérons un écoulement plan entre deux plaques planes distantes de $2h$ généré par un gradient de pression sinusoïdal à pulsation ω fixée :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = K \cos \omega t.$$

1. Dans l'hypothèse d'un écoulement plan parallèle, montrer que la vitesse horizontale $u(y,t)$ vérifie l'équation

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{[I]} = \underbrace{-K \cos \omega t}_{[P]} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{[V]} \tag{1}$$

2. Comparer l'ordre de grandeur des termes $[I]$ et $[V]$ dans l'équation précédente. Montrez que le rapport de ces deux termes fait apparaître le nombre de Stokes (ou nombre de Womersley) $St = \frac{\omega h^2}{\nu}$.
3. Dans l'hypothèse $St \ll 1$, justifiez que l'écoulement correspond à chaque instant à l'écoulement de Poiseuille plan (régime quasi-statique).
4. Dans l'hypothèse $St \gg 1$, l'analyse des ordres de grandeur suggère qu'on peut dans une première approximation négliger le terme visqueux. Quelle est alors la solution du problème ? celle-ci est-elle valide dans la totalité du domaine ?
5. Toujours dans le cas $St \gg 1$, justifiez qu'il existe une *couche limite* dans laquelle le terme visqueux ne peut être négligé. Quelle est l'épaisseur de cette couche limite ?
6. * Dans le cas général ($St = \mathcal{O}(1)$, montrez que la solution du problème peut se mettre sous la forme suivante :

$$u(y,t) = Re\left\{ U(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \right\}.$$

   Avec

$$\underline{U}(y) = \frac{iK}{\rho\omega} \left\{ 1 - \frac{\cosh[y(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}]}{\cosh[h(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}]} \right\} \tag{2}$$

   Indication : on utilisera la méthode de la variable complexe comme dans le cas de l'exercice précédent pour aboutir à une équation différentielle d'ordre 2 pour $U(y)$ que l'on résoudra en tenant compte des conditions aux limites du problème.
7. * Etudiez le comportement de l'expression précédente dans les limitrs $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$, et montrez que l'on retrouve bien les prédictions obtenues précédents dans les cas respectifs $St \ll 1$ et $St \gg 1$.

6 Ecoulements visqueux III : écoulements rampants

6.0 Amortisseur hydraulique (partiel 2017 ; correction sur moodle)

On considère un amortisseur constitué d'un piston de rayon $R = 20$ mm et de longueur $L = 20$ mm coulissant dans un cylindre de rayon $R + a$, avec $a = 0.1$ mm. Ce cylindre est rempli d'une huile de viscosité dynamique $\mu = 0.1$Pa.s.
On veut déterminer la relation entre la force F appliquée sur le piston et sa vitesse V par rapport au cylindre. Le fluide dans les deux chambres supérieure et inférieure au piston sera considéré au repos. L'écoulement,dans l'interstice (le jeu) entre les parois latérales du piston et du cylindre, est visqueux (newtonien), stationnaire et établi . Il sera approximé *localement* par l'écoulement établi entre deux plaques planes distantes de a, de longueur L, de largeur $2\pi R$ (périmètre *déroulé*). On considérera que les pressions p_i et p_a dans les chambres inférieure et supérieure sont uniformes, et que la contribution hydrostatique, d'ordre $\rho g L$, est négligeable devant $p_i - p_a$.

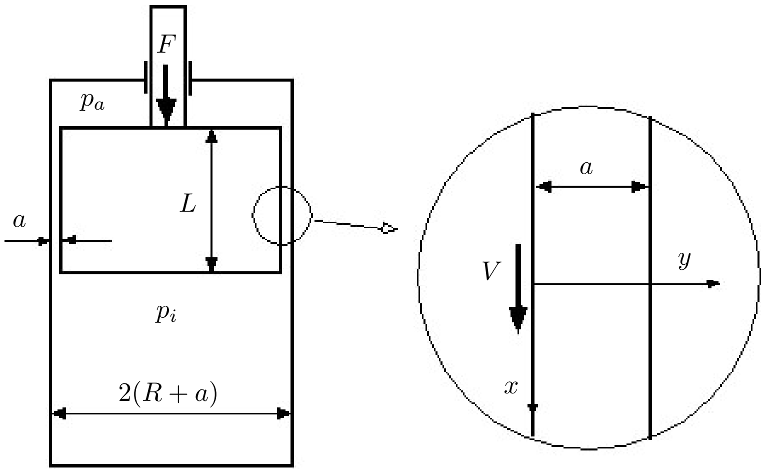


Figure 1 – Schéma de l'amortisseur hydraulique.

1. On cherche une solution « plane » $u = u(y)$ avec $y = r - R$ pour la vitesse axiale dans l'interstice entre le piston et le cylindre. Expliquer succinctement pourquoi on peut négliger localement les effets de courbure sur le profil de vitesse et approximer u par $u(y)$ (au lieu de $u(r, \theta, x)$!)
2. Montrer que dans le jeu (interstice) entre le piston et le cylindre l'écoulement est gouverné par le système différentiel
$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$
Qu'en déduit-on sur la pression et son gradient suivant x ?
3. Établir l'expression du profil de vitesse $u(y)$ et montrer qu'il correspond à la somme d'un écoulement de Poiseuille proportionnel à $-\partial p/\partial x$ et d'un écoulement de Couette proportionnel à V.
4. Calculez le débit volumique à travers l'interstice. On distinguera la contribution Q_p associée à l'écoulement de Poiseuille et la contribution Q_c associée à l'écoulement de Couette.
5. Montrer que le débit volumique chassé par le piston est égal à $Q = \pi R^2 V$.
6. En déduire que le gradient de pression est donné (à l'ordre dominant) par $(p_i - p_a)/L = 6\mu RV/a^3$
.
On justifiera au passage que le débit associé à l'écoulement de Couette est négligeable devant celui associé à l'écoulement de Poiseuille.
7. Montrez que la force exercée sur le piston se compose de trois termes, notés respectivement F_P (résultante des efforts de pression), $F_{v,c}$ (résultante des contraintes visqueuses associées à l'écoulement de Couette), et $F_{v,p}$ (résultante des contraintes visqueuses associées à l'écoulement de Poiseuille).
Exprimez $F_p, F_{v,c}$ et $F_{v,p}$ en fonction des données du problème.
8. Comparez l'ordre de grandeur de ces trois forces, et montrez qu'à l'ordre dominant la force totale a pour expression $F = 6\pi\mu V \frac{R^3}{a^3}$.

9. Application : Quelle force faut-il appliquer pour imprimer une vitesse de $1cm/s$ au piston ? L'écoulement est-il laminaire ?

6.1 Drainage entre deux disques rapprochés (d'après examen 2004) *

Deux disques circulaires plans de rayon $R = 5$ cm sont disposés parallèlement (fig. 2) l'un au-dessus de l'autre. Dans l'espace entre les disques se trouve une huile de viscosité dynamique $\mu = 6.26$ Pa s et de masse volumique $\rho = 1230$ kg/m^3. On considère que l'épaisseur de fluide h entre les deux disques reste très petite devant le rayon R : $h \ll R$. L'épaisseur h_0 à l'instant initial ($t = 0$) est égale à $h_0 = 0,5$ cm. La pression à l'extérieur des disques correspond à la pression atmosphérique P_a.

On exerce une force $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_z$ sur le disque supérieur afin de chasser latéralement le fluide. Cette force impose au disque supérieur une vitesse $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_z$, le disque inférieur restant fixe.

Dans un premier temps, on se propose de déterminer l'intensité $F(t)$ de la force qu'il faut exercer pour maintenir *constante* la vitesse $U = 0,5$ mm/s du disque supérieur. On s'attachera ensuite à décrire en détail l'écoulement entre les deux disques.

La couche de fluide étant mince et le problème axisymétrique, on considère que la pression ne dépend ni de z ni de l'angle azimutal θ, soit $p = p(r,t)$, et on cherche un champ de vitesse s'écrivant : $\mathbf{u} = u_r(r,z,t)\mathbf{e}_r + u_z(r,z,t)\mathbf{e}_z$.

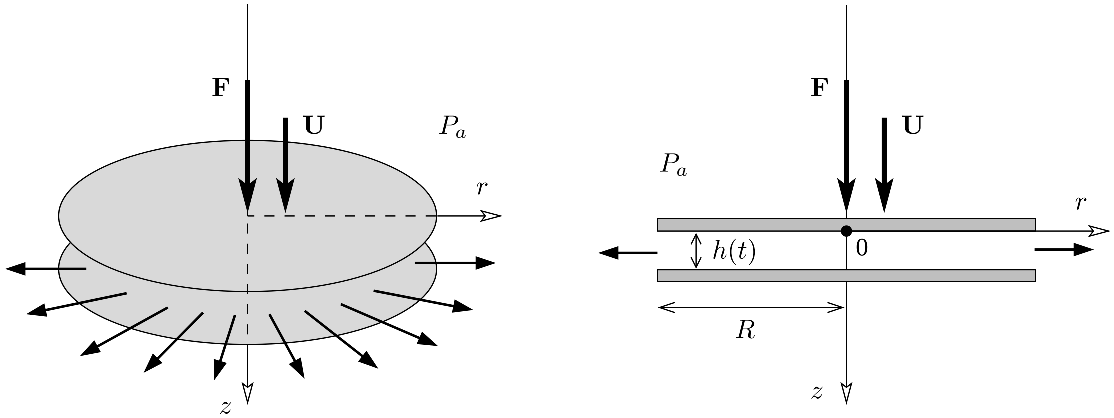


FIGURE 2 – *Ecoulement visqueux entre deux disques.*

Les relations ci-dessous donnent, en coordonnées cylindriques (r,θ,z), la composante radiale de l'équation du mouvement (3) et l'équation d'incompressibilité (4) :

$$\rho\left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right], \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

1. (a) En choisissant U, R et $[T] = R/U$ respectivement comme échelles caractéristiques de vitesse, de longueur et de temps, calculer la valeur du nombre de Reynolds et du nombre de Stokes pour cet écoulement. Commenter.

   (b) Montrer que l'équation du mouvement peut se simplifier sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right]. \tag{5}$$

   (c) On cherche à simplifier davantage l'équation ci-dessus. En choisissant comme échelles de longueur h suivant z, et R suivant r, pour estimer l'ordre de grandeur des dérivées partielles, et sur la base de l'hypothèse simplificatrice $h \ll R$, simplifier le terme de droite de l'équation (5). A l'aide des conditions aux limites (adhérence aux parois), en déduire l'expression de la vitesse radiale u_r en fonction du gradient radial de pression :

$$u_r(r,z,t) = \frac{1}{2\mu}z[z - h(t)]\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{6}$$

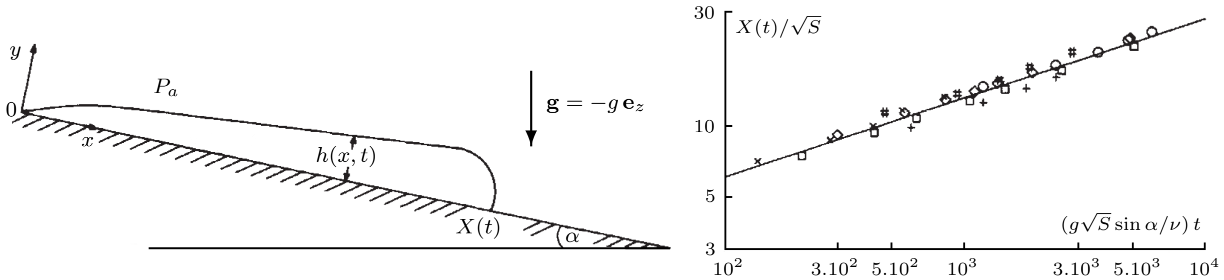
2. (a) En injectant cette expression dans l'équation d'incompressibilité (4), déterminer $u_z(r,z,t)$ en fonction de μ, h, $\partial p/\partial r$ et $\partial^2 p/\partial r^2$.
   (b) A l'aide des conditions aux limites sur u_z en $z=0$ et $z=h(t)$, en déduire l'équation différentielle que doit vérifier p.
   (c) Montrer alors que la pression au sein du fluide a pour expression :

$$p(r,t) = P_a + \frac{3\mu U}{h(t)^3}(R^2 - r^2). \tag{7}$$

3. (a) Déterminer le module F de la force pressante nécessaire pour maintenir la vitesse U.
   (b) Donner l'expression de $h(t)$ en fonction de U et h_0.
   (c) Tracer et commenter la courbe $F(t)$.
   (d) Sachant que le disque supérieur schématise le piston d'un vérin qui admet pour pression maximale $P_m = 10^7$ Pa, déterminer l'épaisseur minimale h_m de fluide que l'on ne peut éliminer en maintenant la vitesse U, et le temps t_m nécessaire pour effectuer cette vidange partielle de l'interdisque. Faire l'application numérique.
4. (a) Connaissant dorénavant le champ de pression (7) dans l'écoulement, déterminer complètement la vitesse radiale u_r en tout point $(r,\ z)$ de l'interdisque.
   (b) Tracer la courbe donnant le profil de vitesse u_r en fonction de la variable sans dimension z/h pour différentes valeurs du temps t $(0 \le t \le t_m)$.
   (c) Etablir l'expression de la composante axiale de la vitesse, $u_z(r,z,t)$.
   (d) Déterminer la tangente de l'angle (β) que fait le vecteur vitesse du fluide avec le plan horizontal. En déduire schématiquement l'allure des lignes de courant dans l'interdisque.
5. (a) Déterminer le débit volumique de fluide s'écoulant *radialement* vers l'extérieur des deux disques. Discuter le résultat obtenu.
   (b) Déterminer le débit volumique de fluide s'écoulant à travers une section normale à l'axe des disques (autrement dit, *horizontale*). Tracer ce débit en fonction de z/h et commenter.

6.2 Coulée de lave

On considère une coulée de lave le long d'une pente d'angle α par rapport à l'horizontale (fig. 3a). Cet écoulement de lave est de faible épaisseur par rapport à sa longueur, et prend la forme d'un film mince dont la surface libre est donnée par $y = h(x,t)$, où y est la direction perpendiculaire à la pente de direction x. Sous l'effet de la pesanteur, la coulée s'étale en s'écoulant, entre les points d'abscisses $x = 0$ et $x = X(t)$, ce dernier correspondant au front de la coulée. L'objectif est ici de déterminer la loi de propagation du front de la coulée.



(a) (b)

FIGURE 3 – *(a) : schéma de la coulée de lave. (b) : comparaison entre expérience (symboles) et prédiction théorique (droite de pente 1/3 en échelle logarithmique). D'après Huppert (Nature* ***300****, 427–429, 1982).*

On supposera en première approximation que la lave est constituée d'un fluide homogène, de masse volumique ρ uniforme, et newtonien, de viscosité cinématique ν. Dans l'hypothèse d'un écoulement incompressible, il est possible d'utiliser dans cette configuration les équations de film mince pour la vitesse $\mathbf{u} = u(x,y,t)\,\mathbf{e}_x + v(x,y,t)\,\mathbf{e}_y$ et la pression motrice $\hat{p} = p - \rho\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}$ au point $\mathbf{x}$ de coordonnées (x,y) :

$$(1)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}, \qquad (2)\quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0, \qquad (3)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{où } \mu = \rho\nu \text{ désigne la viscosité dynamique.}$$

1. Montrer que la pression motrice s'écrit $\hat{p} = p(x,y,t) + \rho g(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$.

2. En écrivant la continuité de la pression à l'interface $y = h(x,t)$, déduire de l'équation (2) que la pression au sein de la coulée a pour expression $p(x,y,t) = P_a + \rho g \cos\alpha\,[h(x,t) - y]$ où P_a désigne la pression atmosphérique. En déduire la pression motrice $\hat{p}$.
3. Dans l'hypothèse de film mince, on peut supposer que $|\partial h/\partial x| \ll \tan\alpha$ pour $\alpha > 0$. Montrer alors que $\partial\hat{p}/\partial x = -\rho g \sin\alpha$ en première approximation.
4. Dans ces conditions, résoudre l'équation (1) et montrer que $u(x,y,t) = -g\sin\alpha\; y^2/2\nu + Ay + B$ où A et B sont deux fonctions de x et t à déterminer d'après les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = h(x,t)$. On négligera les frottements de l'air sur la coulée de lave.
5. Calculer le débit volumique le long de la coulée de lave : $q(x,t) = \displaystyle\int_0^{h(x,t)} u(x,y,t)\,dy$.
6. Montrer que la conservation de la masse implique que $\dfrac{\partial h}{\partial t} = -\dfrac{\partial q}{\partial x}$. On pourra admettre ce résultat.
7. Déduire des questions précédentes que $h(x,t)$ vérifie l'équation : $\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{g\sin\alpha}{\nu} h^2 \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0$.
8. Aux temps longs, on peut rechercher une solution, dite *autosimilaire*, de la forme $h(x,t) = h_0\sqrt{x/t}$ où h_0 est à déterminer en injectant ce type de solution dans l'équation pour h.
9. Le volume de cette coulée de lave étant fixé, $S = \displaystyle\int_0^{X(t)} h(x,t)\,dx$ est une constante du problème.

   En déduire que la loi de propagation du front de lave s'écrit $X(t) = \sqrt{S}\;(t/\tau)^{1/3}$ où τ est un temps caractéristique à déterminer en fonction des paramètres du problème (cf. fig. 3b).

(d'après partiel 2011)

6.3 Drainage d'un film liquide sur une paroi verticale ⋆

Un plan rigide mouillé par un mince film liquide d'épaisseur uniforme est dressé verticalement ; le liquide est alors drainé vers le bas par la gravité.

1. Montrer que l'épaisseur h à la distance x du bord supérieur de la plaque satisfait l'équation approchée
$$\frac{\partial h}{\partial t} + V\frac{h^2}{h_0^2}\frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$
où $V = \rho g h_0^2/\mu$.
2. Montrer qu'à l'instant t après le début du drainage
$$h = h_0\sqrt{x/Vt} \quad \text{pour} \quad x \le Vt, \qquad h = h_0 \quad \text{pour} \quad x \ge Vt.$$

A Exercices de synthèses et annales d'examens

A.1 Vitesse de gouttes et particules en chute libre (partiel 2017)

On considère une particule sphérique $\mathcal{S}$ de rayon a, volume $V = 4\pi a^3/3$ et masse volumique ρ_p qui se déplace verticalement sous l'effet de la gravité g dans un fluide $\mathcal{F}$ de viscosité dynamique μ et masse volumique ρ_f supposée uniforme.

On cherche à estimer la vitesse finale U de celle-ci ainsi que le temps caractéristique $[T] = \tau$ au bout duquel cette vitesse est atteinte en supposant qu'elle est lâchée à vitesse initiale nulle à l'instant $t = 0$.

1. Ecrire les équations de Navier-Stokes sous une forme faisant intervenir la pression motrice $\hat{p} = p + \rho_f g z$. Quelle est l'interprétation ce cette quantité ?
2. Donnez l'expression générale, sous forme d'une intégrale, de la force exercée par le fluide sur la surface de la sphère, puis montrez que celle-ci peut se décomposer sous la forme suivante :

$$\vec{F}_{\mathcal{F}->\mathcal{S}} = \vec{F}_A + \vec{F}_h \text{ avec } \vec{F}_A = -\rho_f g V \vec{e}_z \text{ et } \vec{F}_h = \int_{\mathcal{S}} (-\hat{p}\vec{n} + \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{n})\, dS$$

   Quelle est l'interprétation respective des deux termes $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_h$?
3. Donnez l'ordre de grandeur des 4 différents termes de l'équation de Navier-Stokes écrite à la question 1. (On notera $[\hat{p}]$ l'ordre de grandeur des variations de pression motrice au sein du fluide).
4. En comparant l'ordre de grandeur du terme visqueux et du terme convectif, donnez la condition, faisant intervenir un nombre sans dimension classique, pour laquelle ce second terme peut être négligé.

   On supposera dans la suite cette condition satisfaite.
5. A l'aide du principe de moindre dégénérescence, donnez l'ordre de grandeur de la jauge de pression $[\hat{p}]$ et de l'échelle de temps $[T]$. Quelle échelle de temps caractéristique reconnait-on dans cette dernière expression ?
6. Justifiez que l'ordre de grandeur du terme $\vec{F}_h$ vaut :

$$[F_h] \approx \mu a U$$

   Que peut-on dire des contributions respectives de la pression motrice et de la contrainte visqueuse ?
7. La résolution exacte des équations de Stokes autour d'une sphère permet de montrer le résultat suivant, que l'on admettra dans la suite :

$$|\vec{F}_h| = 6\pi\mu a U.$$

   Par un bilan des forces exercées sur la particule (son poids et la force exercée par le fluide exprimée selon la décomposition de la question 2), déterminez la vitesse de la particule prédite par cette formule dans les 4 cas suivants :

   (a) Gouttelette de brouillard ($a = 10\mu m$, $\rho_p = 1000 kg/m^3$) en chute dans de l'air ($\rho_f = 1.225 kg/m^3, \nu = 1.5 \cdot 10^{-5} m^2/s$).

   (b) bille d'acier ($a = 1cm$, $\rho = 8.15 g/cm^3$) dans du miel ($\rho = 1.42 g/cm^3, \mu = 10 Pa \cdot s$)
8. Calculez le nombre de Reynolds dans les cas (a), (b), (c) et (d). L'hypothèse faite à la question 4 est-elle justifiée ? Dans le cas contraire pensez-vous que la vitesse réelle est plus ou moins élevée que le calcul précédent ?

A.2 Ecoulement autour d'un cylindre en rotation (d'après partiel 2010) *

On considère un cylindre solide de rayon R et de grande longueur L suivant son axe Oz, vertical. Ce cylindre baigne dans un liquide de masse volumique ρ et de viscosités cinématique ν et dynamique μ.

Le cylindre est relié à un moteur qui, mis en route à $t = 0$, lui impose une vitesse angulaire constante ω (rad/s) autour de son axe Oz (fig. 4).

1. Expliquer en quelques mots pourquoi et comment le liquide initialement au repos va se mettre en mouvement. On précisera en particulier le mode de transport de la quantité de mouvement impliqué. Imaginer les lignes de courant de l'écoulement ainsi généré (faire un dessin).
2. Après un régime transitoire de mise en mouvement du liquide, l'écoulement tend à devenir stationnaire dans le voisinage du cylindre. Quel pourrait être une première approximation de l'ordre de grandeur de la durée τ du régime transitoire ?

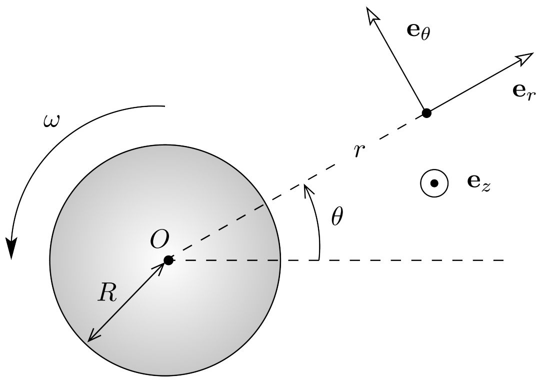


FIGURE 4 – Cylindre en rotation

On s'intéresse dorénavant au régime quasi permanent aux temps longs $t \gg \tau$. On rappelle que les équations d'un écoulement incompressible plan en coordonnées polaires $\mathbf{u} = u(r,\theta,t)\,\mathbf{e}_r + v(r,\theta,t)\,\mathbf{e}_\theta$ s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right] \tag{8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right] \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \tag{10}$$

3. Justifier brièvement pourquoi il est a priori légitime de rechercher une solution d'écoulement purement azimutal et axisymétrique, de la forme $\mathbf{u} = v(r)\,\mathbf{e}_\theta$.
4. En injectant ce type de solution dans les équations du mouvement, montrer dans un premier temps que le champ de pression ne dépend que de r.
5. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $v(r)$ en prenant en compte les conditions aux limites d'adhérence à la paroi imperméable du cylindre en rotation et de décroissance du champ de vitesse loin du cylindre.
6. Montrer qu'il s'agit d'un écoulement irrotationnel. On rappelle que le rotationnel en cylindriques pour un champ bidimensionnel $\mathbf{F} = F_r(r,\theta)\,\mathbf{e}_r + F_\theta(r,\theta)\,\mathbf{e}_\theta$ se réduit à
$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_z$$
7. Calculer le champ de pression $p(r)$. On notera P_0 la pression loin du cylindre.

Bien que le terme visqueux $\nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}$ soit nul pour cet écoulement, ce n'est pas le cas pour les contraintes visqueuses au sein du fluide. On rappelle que le tenseur des contraintes en coordonnées polaires s'écrit :

$$\overset{\Rightarrow}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r},\ \sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial r}\right),\ \sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)$$

8. Calculer le tenseur $\overset{\Rightarrow}{\tau}$ des contraintes *visqueuses*.
9. Déterminer la force élémentaire $d\mathbf{f}$ exercée par le fluide sur un élément de surface dS de la paroi du cylindre.
10. Donner l'expression du moment en O, noté $d\mathbf{M}_O$, de cette force élémentaire puis du moment *résultant* en O, noté $\mathbf{M}_O$, de la force de frottement exercée par le fluide sur toute la surface du cylindre.
11. En déduire le couple $\mathbf{C}$ que devrait imposer le moteur au cylindre pour maintenir la rotation à vitesse angulaire ω constante. Quelle est la puissance dissipée $\mathcal{P}$?

Questions complémentaires : Le liquide dans lequel est plongé le cylindre possède une surface libre avec l'air extérieur à pression atmosphérique P_{atm}. Au repos (cylindre immobile) cette surface se trouve à l'altitude $z = h_0$. On cherche ici à prédire comment la mise en mouvement du cylindre va déformer cette surface libre. Le champ de vitesse déterminé précédemment n'est pas modifié et conserve la même expression $v(r)$. Ce n'est pas le cas pour le champ de pression, qu'il faut recalculer en notant que la dépendance de la pression suivant la verticale est maintenant affectée par la prise en compte de la pesanteur :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

12. Reprendre la question 7 pour calculer le champ de pression $p(r, z)$ dans le liquide.
13. En négligeant les effets de tension de surface, déterminer la forme de la surface libre $z = h(r)$. Tracer qualitativement la forme de surface libre.

On cherche pour finir à déterminer l'influence d'un cylindre extérieur sur le couple à imposer au cylindre principal pour le maintenir à vitesse angulaire constante ω. On considère donc que le liquide est confiné entre le cylindre principal de rayon R et un second cylindre *immobile* de rayon $R^\star > R$.

14. Reprendre les questions 3 à 5 pour calculer le champ de vitesse $v^\star(r)$.
15. Calculer la contrainte visqueuse exercée par le liquide sur la paroi du cylindre principal et en déduire que le moment résultant en O par unité de longueur du frottement visqueux sur le cylindre est de la forme

$$\mathbf{M}_O^\star = -4\pi\mu^\star\omega R^2\,\mathbf{e}_z$$

où $\mu^\star$ est une fonction de μ, r et $R^\star$ à déterminer.

16. Comparer le couple qu'il faut imposer ici pour maintenir une vitesse angulaire ω constante par rapport au cas précédent où le second cylindre est absent.