
Exercices et problèmes – 1ère partie

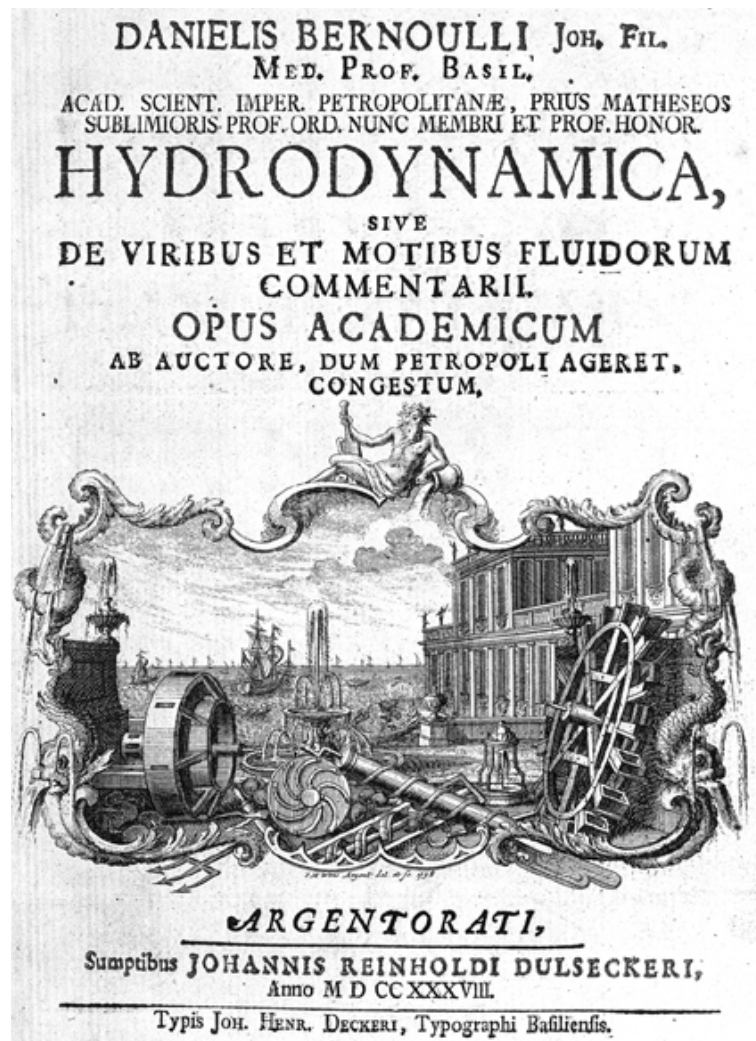


Table des matières

5	Ecoulements visqueux II : problèmes instationnaires	2
5.0	Premier problème de Stokes	2
5.1	Ecoulement au voisinage d'une paroi oscillante (second problème de Stokes)	2
5.2	Rythmes cardiaques (TP numérique)	2
6	Ecoulements visqueux III : écoulements rampants	3
6.1	Coulée de lave	3
6.2	Drainage d'un film liquide sur une paroi verticale [*]	3
6.3	Drainage entre deux disques rapprochés (d'après examen 2004) [*]	4
6.4	Vitesse de gouttes et particules en chute libre (partiel 2017)	6
6.5	Amortisseur hydraulique (partiel 2017)	6
6.6	Ecoulement autour d'un cylindre en rotation (d'après partiel 2010) [*]	7
A	Propriétés physiques des fluides les plus courants	10
A.0.1	ANNEXE : Equation d'état de l'eau de mer (IES80)	10
B	Tableau des principaux nombres sans dimensions	11
C	Equations-bilan sous forme locale et intégrale	12
C.1	Bilan de masse	12
C.2	Bilan de quantité de mouvement	12
C.3	Bilan d'énergie cinétique	12
C.4	Bilan d'énergie (1er principe)	13
C.5	Bilan d'énergie interne	13
C.6	Bilan d'entropie	13
D	Opérateurs différentiels et équations de Navier-Stokes incompressibles dans les principaux systèmes de coordonnée	14
D.1	Coordonnées cartésiennes (x, y, z)	14
D.2	Coordonnées cylindriques (r, θ, z)	15
D.3	Coordonnées sphériques (R, Θ, ϕ)	16
E	Quelques formules d'analyse vectorielle et tensorielle	17
E.1	Formules de dérivation d'un produit (généralisations de $(fg)' = f'g + fg'$) :	17
E.2	Formules de dérivée seconde (généralisations de $(f')' = f''$) :	17
E.3	Formules d'intégration (généralisations de $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$) :	17
F	Quelques solutions exactes	18

5 Ecoulements visqueux II : problèmes instationnaires

5.0 Premier problème de Stokes

(exercice préparatoire, correction sur moodle)

5.1 Ecoulement au voisinage d'une paroi oscillante (second problème de Stokes)

On considère un fluide de viscosité cinématique ν occupant un demi-espace limité par une plaque plane animée d'un mouvement oscillant sinusoïdal $U \cos \omega t$, parallèlement à elle-même ("deuxième problème de Stokes"). Retrouvez la loi $u(y, t)$ décrivant la structure de l'écoulement (cf. tableau "solutions exactes" en Annexe).

Déduisez-en la contrainte visqueuse exercée par le fluide sur la paroi, et montrez que celle-ci est donnée par la loi suivante :

$$\tau_p = -\frac{\mu U \sqrt{2}}{\delta} \cos(\omega t - \pi/4)$$

Que vaut la vorticité dans l'écoulement ? montrez que la vorticité à la paroi est directement reliée à la contrainte pariétale.

5.2 Rythmes cardiaques (TP numérique)

Outre une différence de pression moyenne, le cœur qui bat impose une variation périodique du gradient de pression ce qui conduit à un écoulement pulsé dans les vaisseaux sanguins. L'objectif de cet exercice est de caractériser ce type d'écoulement en particulier dans les limites des basses fréquences (organisme au repos) et hautes fréquences (activité cardiaque intense).

Considérons un écoulement plan entre deux plaques planes distantes de $2h$ généré par un gradient de pression sinusoïdal à pulsation ω fixée :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = K \cos \omega t.$$

1. Dans l'hypothèse d'un écoulement plan parallèle, montrer que la vitesse horizontale $u(y, t)$ vérifie l'équation

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{[I]} = \underbrace{-K \cos \omega t}_{[P]} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{[V]} \quad (1)$$

2. Comparer l'ordre de grandeur des termes $[I]$ et $[V]$ dans l'équation précédente. Montrez que le rapport de ces deux termes fait apparaître le nombre de Stokes (ou nombre de Womersley) $St = \frac{\omega h^2}{\nu}$.
3. Dans l'hypothèse $St \ll 1$, justifiez que l'écoulement correspond à chaque instant à l'écoulement de Poiseuille plan (régime quasi-statique).
4. Dans l'hypothèse $St \gg 1$, l'analyse des ordres de grandeur suggère qu'on peut dans une première approximation négliger le terme visqueux. Quelle est alors la solution du problème ? celle-ci est-elle valide dans la totalité du domaine ?
5. Toujours dans le cas $St \gg 1$, justifiez qu'il existe une *couche limite* dans laquelle le terme visqueux ne peut être négligé. Quelle est l'épaisseur de cette couche limite ?
6. * Dans le cas général ($St = \mathcal{O}(1)$), montrez que la solution du problème peut se mettre sous la forme suivante :

$$u(y, t) = \text{Re} \{ U(y) e^{i\omega t} \}.$$

Avec

$$U(y) = \frac{iK}{\rho\omega} \left\{ 1 - \frac{\cosh[y(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}]}{\cosh[h(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}]} \right\} \quad (2)$$

Indication : on utilisera la méthode de la variable complexe comme dans le cas de l'exercice précédent pour aboutir à une équation différentielle d'ordre 2 pour $U(y)$ que l'on résoudra en tenant compte des conditions aux limites du problème.

7. * Etudiez le comportement de l'expression précédente dans les limites $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$, et montrez que l'on retrouve bien les prédictions obtenues précédents dans les cas respectifs $St \ll 1$ et $St \gg 1$.

6 Ecoulements visqueux III : écoulements rampants

6.1 Coulée de lave

On considère une coulée de lave le long d'une pente d'angle α par rapport à l'horizontale (fig. 1a). Cet écoulement de lave est de faible épaisseur par rapport à sa longueur, et prend la forme d'un film mince dont la surface libre est donnée par $y = h(x, t)$, où y est la direction perpendiculaire à la pente de direction x . Sous l'effet de la pesanteur, la coulée s'étale en s'écoulant, entre les points d'abscisses $x = 0$ et $x = X(t)$, ce dernier correspondant au front de la coulée. L'objectif est ici de déterminer la loi de propagation du front de la coulée.

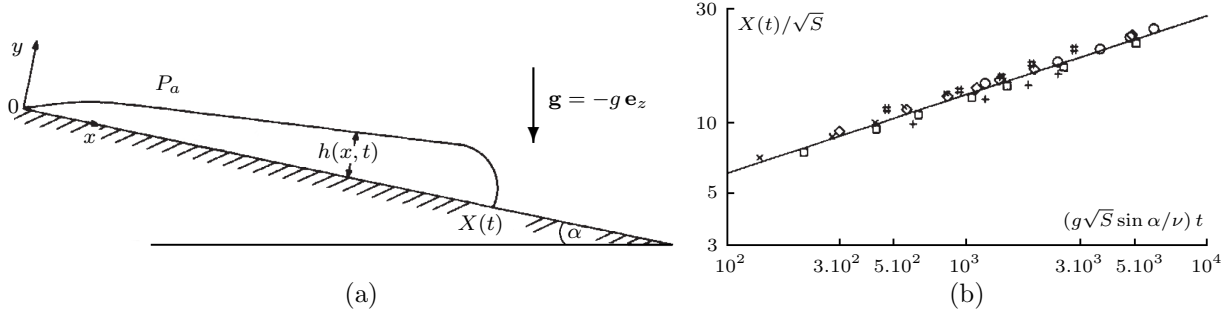


FIGURE 1 – (a) : schéma de la coulée de lave. (b) : comparaison entre expérience (symboles) et prédiction théorique (droite de pente 1/3 en échelle logarithmique). D'après Huppert (*Nature* **300**, 427–429, 1982).

On supposera en première approximation que la lave est constituée d'un fluide homogène, de masse volumique ρ uniforme, et newtonien, de viscosité cinématique ν . Dans l'hypothèse d'un écoulement incompressible, il est possible d'utiliser dans cette configuration les équations de film mince pour la vitesse $\mathbf{u} = u(x, y, t)\mathbf{e}_x + v(x, y, t)\mathbf{e}_y$ et la pression motrice $\hat{p} = p - \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ au point \mathbf{x} de coordonnées (x, y) :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}, \quad (2) \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0, \quad (3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{où } \mu = \rho\nu \text{ désigne la viscosité dynamique.}$$

1. Montrer que la pression motrice s'écrit $\hat{p} = p(x, y, t) + \rho g(y \cos \alpha - x \sin \alpha)$.
2. En écrivant la continuité de la pression à l'interface $y = h(x, t)$, déduire de l'équation (2) que la pression au sein de la coulée a pour expression $p(x, y, t) = P_a + \rho g \cos \alpha [h(x, t) - y]$ où P_a désigne la pression atmosphérique. En déduire la pression motrice \hat{p} .
3. Dans l'hypothèse de film mince, on peut supposer que $|\partial h / \partial x| \ll \tan \alpha$ pour $\alpha > 0$. Montrer alors que $\partial \hat{p} / \partial x = -\rho g \sin \alpha$ en première approximation.
4. Dans ces conditions, résoudre l'équation (1) et montrer que $u(x, y, t) = -g \sin \alpha y^2 / 2\nu + Ay + B$ où A et B sont deux fonctions de x et t à déterminer d'après les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = h(x, t)$. On négligera les frottements de l'air sur la coulée de lave.
5. Calculer le débit volumique le long de la coulée de lave : $q(x, t) = \int_0^{h(x, t)} u(x, y, t) dy$.
6. Montrer que la conservation de la masse implique que $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$. On pourra admettre ce résultat.
7. Déduire des questions précédentes que $h(x, t)$ vérifie l'équation : $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g \sin \alpha}{\nu} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$.
8. Aux temps longs, on peut rechercher une solution, dite *autosimilaire*, de la forme $h(x, t) = h_0 \sqrt{x/t}$ où h_0 est à déterminer en injectant ce type de solution dans l'équation pour h .
9. Le volume de cette coulée de lave étant fixé, $S = \int_0^{X(t)} h(x, t) dx$ est une constante du problème.

En déduire que la loi de propagation du front de lave s'écrit $X(t) = \sqrt{S} (t/\tau)^{1/3}$ où τ est un temps caractéristique à déterminer en fonction des paramètres du problème (cf. fig. 1b).

(d'après partiel 2011)

6.2 Drainage d'un film liquide sur une paroi verticale *

Un plan rigide mouillé par un mince film liquide d'épaisseur uniforme est dressé verticalement ; le liquide est alors drainé vers le bas par la gravité.

1. Montrer que l'épaisseur h à la distance x du bord supérieur de la plaque satisfait l'équation approchée

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{h^2}{h_0^2} \frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

où $V = \rho g h_0^2 / \mu$.

2. Montrer qu'à l'instant t après le début du drainage

$$h = h_0 \sqrt{x/Vt} \quad \text{pour} \quad x \leq Vt, \quad h = h_0 \quad \text{pour} \quad x \geq Vt.$$

6.3 Drainage entre deux disques rapprochés (d'après examen 2004) *

Deux disques circulaires plans de rayon $R = 5$ cm sont disposés parallèlement (fig. 2) l'un au-dessus de l'autre. Dans l'espace entre les disques se trouve une huile de viscosité dynamique $\mu = 6.26$ Pa s et de masse volumique $\rho = 1230$ kg/m³. On considère que l'épaisseur de fluide h entre les deux disques reste très petite devant le rayon R : $h \ll R$. L'épaisseur h_0 à l'instant initial ($t = 0$) est égale à $h_0 = 0,5$ cm. La pression à l'extérieur des disques correspond à la pression atmosphérique P_a .

On exerce une force $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_z$ sur le disque supérieur afin de chasser latéralement le fluide. Cette force impose au disque supérieur une vitesse $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_z$, le disque inférieur restant fixe.

Dans un premier temps, on se propose de déterminer l'intensité $F(t)$ de la force qu'il faut exercer pour maintenir *constante* la vitesse $U = 0,5$ mm/s du disque supérieur. On s'attachera ensuite à décrire en détail l'écoulement entre les deux disques.

La couche de fluide étant mince et le problème axisymétrique, on considère que la pression ne dépend ni de z ni de l'angle azimutal θ , soit $p = p(r, t)$, et on cherche un champ de vitesse s'écrivant : $\mathbf{u} = u_r(r, z, t)\mathbf{e}_r + u_z(r, z, t)\mathbf{e}_z$.

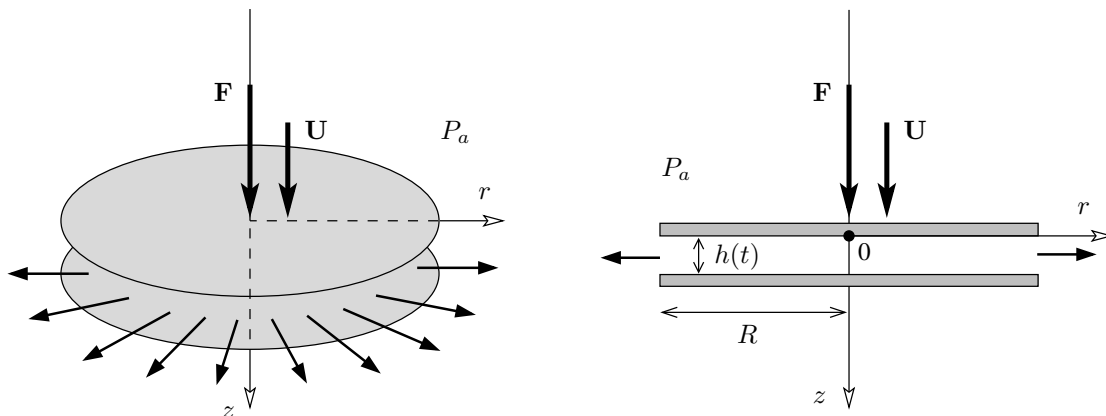


FIGURE 2 – Ecoulement visqueux entre deux disques.

Les relations ci-dessous donnent, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , la composante radiale de l'équation du mouvement (3) et l'équation d'incompressibilité (4) :

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right], \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

1. (a) En choisissant U , R et $[T] = R/U$ respectivement comme échelles caractéristiques de vitesse, de longueur et de temps, calculer la valeur du nombre de Reynolds et du nombre de Stokes pour cet écoulement. Commenter.
- (b) Montrer que l'équation du mouvement peut se simplifier sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right]. \quad (5)$$

- (c) On cherche à simplifier davantage l'équation ci-dessus. En choisissant comme échelles de longueur h suivant z , et R suivant r , pour estimer l'ordre de grandeur des dérivées partielles, et

sur la base de l'hypothèse simplificatrice $h \ll R$, simplifier le terme de droite de l'équation (5). A l'aide des conditions aux limites (adhérence aux parois), en déduire l'expression de la vitesse radiale u_r en fonction du gradient radial de pression :

$$u_r(r, z, t) = \frac{1}{2\mu} z[z - h(t)] \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (6)$$

2. (a) En injectant cette expression dans l'équation d'incompressibilité (4), déterminer $u_z(r, z, t)$ en fonction de μ , h , $\partial p/\partial r$ et $\partial^2 p/\partial r^2$.
- (b) A l'aide des conditions aux limites sur u_z en $z = 0$ et $z = h(t)$, en déduire l'équation différentielle que doit vérifier p .
- (c) Montrer alors que la pression au sein du fluide a pour expression :

$$p(r, t) = P_a + \frac{3\mu U}{h(t)^3} (R^2 - r^2). \quad (7)$$

3. (a) Déterminer le module F de la force pressante nécessaire pour maintenir la vitesse U .
- (b) Donner l'expression de $h(t)$ en fonction de U et h_0 .
- (c) Tracer et commenter la courbe $F(t)$.
- (d) Sachant que le disque supérieur schématise le piston d'un vérin qui admet pour pression maximale $P_m = 10^7$ Pa, déterminer l'épaisseur minimale h_m de fluide que l'on ne peut éliminer en maintenant la vitesse U , et le temps t_m nécessaire pour effectuer cette vidange partielle de l'interdisque. Faire l'application numérique.
4. (a) Connaissant dorénavant le champ de pression (7) dans l'écoulement, déterminer complètement la vitesse radiale u_r en tout point (r, z) de l'interdisque.
- (b) Tracer la courbe donnant le profil de vitesse u_r en fonction de la variable sans dimension z/h pour différentes valeurs du temps t ($0 \leq t \leq t_m$).
- (c) Etablir l'expression de la composante axiale de la vitesse, $u_z(r, z, t)$.
- (d) Déterminer la tangente de l'angle (β) que fait le vecteur vitesse du fluide avec le plan horizontal. En déduire schématiquement l'allure des lignes de courant dans l'interdisque.
5. (a) Déterminer le débit volumique de fluide s'écoulant *radialement* vers l'extérieur des deux disques. Discuter le résultat obtenu.
- (b) Déterminer le débit volumique de fluide s'écoulant à travers une section normale à l'axe des disques (autrement dit, *horizontale*). Tracer ce débit en fonction de z/h et commenter.

* Exercices de synthèses et annales d'examens

6.4 Vitesse de gouttes et particules en chute libre (partiel 2017)

On considère une particule sphérique de rayon a , masse volumique ρ_p qui se déplace verticalement à vitesse constante sous l'effet de la gravité g dans un fluide de viscosité dynamique μ et masse volumique ρ_f . On cherche à estimer la vitesse U de celle-ci.

1. Question de cours : qu'appelle-t-on Régime de Stokes ? Sous quelles hypothèses est-on dans ce régime ? Quelles sont les principales propriétés des écoulements de Stokes ?
2. Dans le régime de Stokes la résolution exacte du problème permet de montrer que la force de traînée F_x exercée sur une particule sphérique est $F_x = 6\pi\mu aU$.

Par un raisonnement dimensionnel, justifiez la forme de cette expression (on ne demande pas de démontrer le facteur 6π).

3. Par un bilan des forces exercées sur la particule (traînée, poids et poussée d'Archimède), déterminez la vitesse de la particule prédite par cette formule.

Application numérique dans les 4 cas suivants :

(a) Gouttelette de brouillard ($a = 10\mu m$, $\rho_p = 1000 kg/m^3$) en chute dans de l'air ($\rho_f = 1.225 kg/m^3$, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} m^2/s$).

(b) Bulle d'air ($a = 0.1 mm$, $\rho_p = 1 g/cm^3$) dans de l'eau douce ($\rho_p = 1 kg/\ell$, $\nu = 10^{-6} m^2/s$).

(c) bille d'acier ($a = 1 cm$, $\rho = 8.15 g/cm^3$) dans du miel ($\rho = 1.42 g/cm^3$, $\mu = 10 Pa \cdot s$)

(d) ballon de foot de rayon $a = 11 cm$ et masse $m = 425 g$ en chute dans de l'air ($\rho_f = 1.225 kg/m^3$, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} m^2/s$).

4. Calculez le nombre de Reynolds dans les cas (a), (b), (c) et (d), et justifiez a posteriori si l'on est bien dans le régime de Stokes. Dans le cas contraire pensez-vous que la vitesse réelle est plus ou moins élevée que le calcul précédent ?
5. Dans le régime inertiel ($Re > 1000$), la formule de Stokes donnée à la question 2 peut être remplacée par une loi empirique de la forme : $F_x = \frac{C_x}{2} \rho \pi a^2 U^2$ où C_x est un coefficient (sans dimensions) qui vaut approximativement 0.5.

Justifiez par un raisonnement dimensionnel la forme de cette expression (on ne demande pas le calcul exact du C_x !)

6. Cette formule permet-elle de prédire une valeur plus réaliste de la vitesse pour un (ou plusieurs) des cas (a – d) discutés précédemment ?
7. Dans les cas (a) et (b) Justifiez que la gouttelette et la bulle gardent bien une forme sphérique au cours de leur mouvement.

On donne la valeur de la tension de surface : $\gamma = 0.07 N/m$.

6.5 Amortisseur hydraulique (partiel 2017)

On considère un amortisseur constitué d'un piston de rayon $R = 20$ mm et de longueur $L = 20$ mm couissant dans un cylindre de rayon $R + a$, avec $a = 0.1$ mm. Ce cylindre est rempli d'une huile de viscosité dynamique $\mu = 0.1 Pa \cdot s$.

On veut déterminer la relation entre la force F appliquée sur le piston et sa vitesse V par rapport au cylindre. Le fluide dans les deux chambres supérieure et inférieure au piston sera considéré au repos. L'écoulement, dans l'interstice (le jeu) entre les parois latérales du piston et du cylindre, est visqueux (newtonien), stationnaire et établi. Il sera approximé *localement* par l'écoulement établi entre deux plaques planes distantes de a , de longueur L , de largeur $2\pi R$ (périmètre *déroulé*). On considérera que les pressions p_i et p_a dans les chambres inférieure et supérieure sont uniformes, et que la contribution hydrostatique, d'ordre $\rho g L$, est négligeable devant $p_i - p_a$.

1. On cherche une solution « plane » $u = u(y)$ avec $y = r - R$ pour la vitesse axiale dans l'interstice entre le piston et le cylindre. Expliquer succinctement pourquoi on peut négliger localement les effets de courbure sur le profil de vitesse et approximer u par $u(y)$ (au lieu de $u(r, \theta, x)$!)
2. Montrer que dans le jeu (interstice) entre le piston et le cylindre l'écoulement est gouverné par le système différentiel

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Qu'en déduit-on sur la pression et son gradient suivant x ?

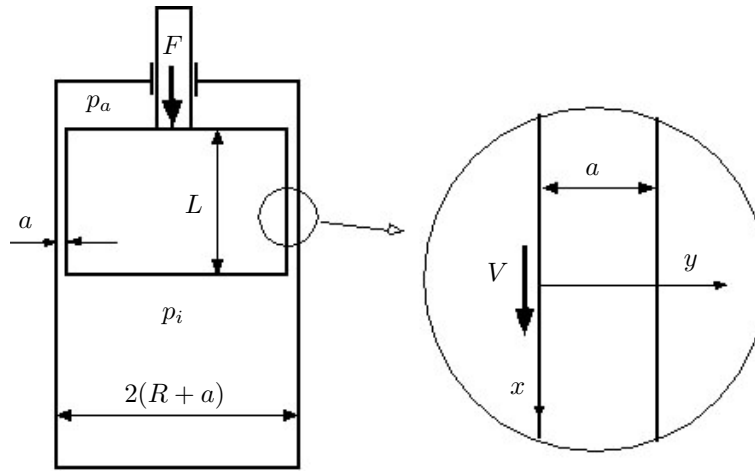


FIGURE 3 – Schéma de l'amortisseur hydraulique.

3. Établir l'expression du profil de vitesse $u(y)$ et montrer qu'il correspond à la somme d'un écoulement de Poiseuille proportionnel à $-\partial p/\partial x$ et d'un écoulement de Couette proportionnel à V .
4. Calculez le débit volumique à travers l'interstice. On distinguera la contribution Q_p associée à l'écoulement de Poiseuille et la contribution Q_c associée à l'écoulement de Couette.
5. Montrer que le débit volumique chassé par le piston est égal à $Q = \pi R^2 V$.
6. En déduire que le gradient de pression est donné (à l'ordre dominant) par $(p_i - p_a)/L = 6\mu RV/a^3$.

On justifiera au passage que le débit associé à l'écoulement de Couette est négligeable devant celui associé à l'écoulement de Poiseuille.

7. Montrez que la force exercée sur le piston se compose de trois termes, notés respectivement F_p (résultante des efforts de pression), $F_{v,c}$ (résultante des contraintes visqueuses associées à l'écoulement de Couette), et $F_{v,p}$ (résultante des contraintes visqueuses associées à l'écoulement de Poiseuille).

Exprimez F_p , $F_{v,c}$ et $F_{v,p}$ en fonction des données du problème.

8. Comparez l'ordre de grandeur de ces trois forces, et montrez qu'à l'ordre dominant la force totale a pour expression $F = 6\pi\mu V \frac{R^3}{a^3}$.
9. Application : Quelle force faut-il appliquer pour imprimer une vitesse de 1cm/s au piston ? L'écoulement est-il laminaire ?

6.6 Écoulement autour d'un cylindre en rotation (d'après partiel 2010) *

On considère un cylindre solide de rayon R et de grande longueur L suivant son axe Oz , vertical. Ce cylindre baigne dans un liquide de masse volumique ρ et de viscosités cinématique ν et dynamique μ .

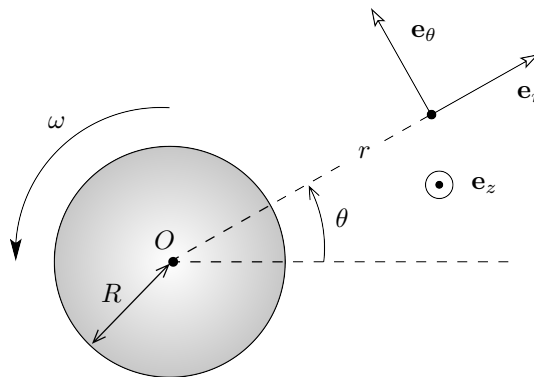


FIGURE 4 – Cylindre en rotation

Le cylindre est relié à un moteur qui, mis en route à $t = 0$, lui impose une vitesse angulaire constante ω (rad/s) autour de son axe Oz (fig. 4).

1. Expliquer en quelques mots pourquoi et comment le liquide initialement au repos va se mettre en mouvement. On précisera en particulier le mode de transport de la quantité de mouvement impliqué. Imaginer les lignes de courant de l'écoulement ainsi généré (faire un dessin).
2. Après un régime transitoire de mise en mouvement du liquide, l'écoulement tend à devenir stationnaire dans le voisinage du cylindre. Quel pourrait être une première approximation de l'ordre de grandeur de la durée τ du régime transitoire ?

On s'intéresse dorénavant au régime quasi permanent aux temps longs $t \gg \tau$. On rappelle que les équations d'un écoulement incompressible plan en coordonnées polaires $\mathbf{u} = u(r, \theta, t) \mathbf{e}_r + v(r, \theta, t) \mathbf{e}_\theta$ s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (10)$$

3. Justifier brièvement pourquoi il est a priori légitime de rechercher une solution d'écoulement purement azimutal et axisymétrique, de la forme $\mathbf{u} = v(r) \mathbf{e}_\theta$.
4. En injectant ce type de solution dans les équations du mouvement, montrer dans un premier temps que le champ de pression ne dépend que de r .
5. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $v(r)$ en prenant en compte les conditions aux limites d'adhérence à la paroi imperméable du cylindre en rotation et de décroissance du champ de vitesse loin du cylindre.
6. Montrer qu'il s'agit d'un écoulement irrotationnel. On rappelle que le rotationnel en cylindriques pour un champ bidimensionnel $\mathbf{F} = F_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + F_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta$ se réduit à

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z$$

7. Calculer le champ de pression $p(r)$. On notera P_0 la pression loin du cylindre.

Bien que le terme visqueux $\nu \Delta \mathbf{u}$ soit nul pour cet écoulement, ce n'est pas le cas pour les contraintes visqueuses au sein du fluide. On rappelle que le tenseur des contraintes en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial r} \right), \sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)$$

8. Calculer le tenseur $\vec{\tau}$ des contraintes visqueuses.
9. Déterminer la force élémentaire $d\mathbf{f}$ exercée par le fluide sur un élément de surface dS de la paroi du cylindre.
10. Donner l'expression du moment en O , noté $d\mathbf{M}_O$, de cette force élémentaire puis du moment résultant en O , noté \mathbf{M}_O , de la force de frottement exercée par le fluide sur toute la surface du cylindre.
11. En déduire le couple \mathbf{C} que devrait imposer le moteur au cylindre pour maintenir la rotation à vitesse angulaire ω constante. Quelle est la puissance dissipée \mathcal{P} ?

Questions complémentaires : Le liquide dans lequel est plongé le cylindre possède une surface libre avec l'air extérieur à pression atmosphérique P_{atm} . Au repos (cylindre immobile) cette surface se trouve à l'altitude $z = h_0$. On cherche ici à prédire comment la mise en mouvement du cylindre va déformer cette surface libre. Le champ de vitesse déterminé précédemment n'est pas modifié et conserve la même expression $v(r)$. Ce n'est pas le cas pour le champ de pression, qu'il faut recalculer en notant que la dépendance de la pression suivant la verticale est maintenant affectée par la prise en compte de la pesanteur :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

12. Reprendre la question 7 pour calculer le champ de pression $p(r, z)$ dans le liquide.

13. En négligeant les effets de tension de surface, déterminer la forme de la surface libre $z = h(r)$. Tracer qualitativement la forme de surface libre.

On cherche pour finir à déterminer l'influence d'un cylindre extérieur sur le couple à imposer au cylindre principal pour le maintenir à vitesse angulaire constante ω . On considère donc que le liquide est confiné entre le cylindre principal de rayon R et un second cylindre *immobile* de rayon $R^* > R$.

14. Reprendre les questions 3 à 5 pour calculer le champ de vitesse $v^*(r)$.
15. Calculer la contrainte visqueuse exercée par le liquide sur la paroi du cylindre principal et en déduire que le moment résultant en O par unité de longueur du frottement visqueux sur le cylindre est de la forme

$$\mathbf{M}_O^* = -4\pi\mu^*\omega R^2 \mathbf{e}_z$$

où μ^* est une fonction de μ , r et R^* à déterminer.

16. Comparer le couple qu'il faut imposer ici pour maintenir une vitesse angulaire ω constante par rapport au cas précédent où le second cylindre est absent.

A Propriétés physiques des fluides les plus courants

(Valeurs de référence pour $T = 20^\circ C$; $P = 10^5 Pa = 1 atm$)

	Air	Eau pure	Eau de mer
Masse volumique	$\rho = 1.205 kg/m^3$	$1000 kg/m^3$	$1027 kg/m^3$
Viscosité cin.	$\nu = 1.5e-6 m^2/s$	$\nu = 1.188 \cdot 10^{-6} m/s^2$	$\nu = 1.13910^{-6} m/s^2$
Viscosité dyn.	$\mu = 1.81 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$	$\mu = 1.188 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$	
compressibilité	$\chi_s = 1.4 atm^{-1}$	$\chi_s = 4.9 \cdot 10^{-5} Atm^{-1}$	
dilatabilité	$\alpha = 3.4 \cdot 10^{-3} K^{-1}$	$\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4} K^{-1}$	
vitesse du son	$c = 334 m/s$	$c = 1500 m/s$	

A.0.1 ANNEXE : Equation d'état de l'eau de mer (IES80)

La relation d'état IES80 permet de calculer ρ (kg/m^3) en fonction de T (température en $^\circ C$), S (salinité en g/kg), et P (pression en $Bars$).

Elle est précise (en toute rigueur) pour $-2^\circ C < T < 40^\circ C$, $0 < S < 40 g/kg$, $0 < P < 1500 Bars$.

$$\rho(T, S, P) = \rho_0(T, S) \left/ \left(1 - \frac{P}{K(T, S, P)} \right) \right.,$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho_0(T, S) &= 999.842594 + 6.793952 \cdot 10^{-2} \times T - 9.09529 \cdot 10^{-3} \times T^2 + 1.001685 \cdot 10^{-4} \times T^3 - 1.120083 \cdot 10^{-6} \times T^4 \\ &+ 6.536332 \cdot 10^{-9} \times T^5 + 8.24493 \cdot 10^{-1} \times S - 4.0899 \cdot 10^{-3} \times TS + 7.6438 \cdot 10^{-5} \times T^2 S \\ &- 8.2467 \cdot 10^{-7} \times T^3 S + 5.3875 \cdot 10^{-9} \times T^4 S - 5.72466 \cdot 10^{-3} \times S^{1.5} + 1.0227 \cdot 10^{-4} \times TS^{1.5} \\ &- 1.6546 \cdot 10^{-6} \times T^2 S^{1.5} + 4.8314 \cdot 10^{-4} \times S^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K(T, S, P) &= 19652.21 + 148.4206 \times T - 2.327105 \times T^2 + 1.360447 \cdot 10^{-2} \times T^3 - 5.155288 \cdot 10^{-5} \times T^4 \\ &+ 3.239908 \times P + 1.43713 \cdot 10^{-3} \times TP + 1.16092 \cdot 10^{-4} \times T^2 P - 5.77905 \cdot 10^{-7} \times T^3 P \\ &+ 8.50935 \cdot 10^{-5} \times P^2 - 6.12293 \cdot 10^{-6} \times TP^2 + 5.2787 \cdot 10^{-8} \times T^2 P^2 \\ &+ 54.6746 \times S - 0.603459 \times TS + 1.09987 \cdot 10^{-2} \times T^2 S \\ &- 6.1670 \cdot 10^{-5} \times T^3 S + 7.944 \cdot 10^{-2} \times S^{1.5} + 1.6483 \cdot 10^{-2} \times TS^{1.5} - 5.3009 \cdot 10^{-4} \times T^2 S^{1.5} \\ &+ 2.2838 \cdot 10^{-3} \times PS - 1.0981 \cdot 10^{-5} \times TPS - 1.6078 \cdot 10^{-6} \times T^2 PS \\ &+ 1.91075 \cdot 10^{-4} \times PS^{1.5} - 9.9348 \cdot 10^{-7} \times P^2 S + 2.0816 \cdot 10^{-8} \times TP^2 S \\ &+ 9.1697 \cdot 10^{-10} \times T^2 P^2 S. \end{aligned}$$

B Tableau des principaux nombres sans dimensions

On note ici U , L les échelles de vitesse et de longueur du problème, et (pour les problèmes instationnaires) T l'échelle de temps imposée par les conditions limites.

Nom	Définition	Signification	Utilité
Knudsen	$Kn = \frac{\ell}{L}$	$\frac{\text{échelle microscopique}}{\text{échelle macroscopique}}$	Validité de la MMC
Reynolds	$Re = \frac{UL}{\nu}$	$\frac{\text{effets d'inertie}}{\text{effets visqueux}}$	Général
Mach	$Ma = \frac{U}{c}$	$\frac{\text{Vitesse de l'écoulement}}{\text{vitesse du son}}$	Aérodynamique
Froude	$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$	$\frac{\text{accélération dans l'écoulement}}{\text{accélération de pesanteur}}$	Hydrodynamique, écoulements à surface libre
Bond (ou Eötvös)	$Bo = \frac{L}{\sqrt{\gamma/\rho g}}$	$\frac{\text{Effets de pesanteur}}{\text{Effets capillaires}}$	Phénomènes capillaires
Stokes (ou Womersley)	$St = \frac{L^2}{\nu T}$	$\frac{\text{Effets instationnaires}}{\text{Effets visqueux}}$	Ecoulements visqueux instationnaires
Strouhal	$Sr = \frac{L}{UT}$	$\frac{\text{Effets instationnaires}}{\text{Effets inertiels}}$	Ecoulements inertiels instationnaires
Helmholtz	$H = \frac{L}{cT}$	$\frac{\text{Longueur caractéristique}}{\text{longueur d'onde acoustique}}$	Acoustique

C Equations-bilan sous forme locale et intégrale

Dans cette annexe on résume les équations-bilan de la mécanique des fluides sous forme *locale* (équations différentielles gouvernant l'évolution temporelle des quantités locales) puis sous forme *intégrale* en considérant un volume de contrôle *Fixe* noté Ω de frontière $\partial\Omega$.

On considère ici le cas général d'un fluide Newtonien soumis à une force *massique* \vec{f} (en général la pesanteur). On ne fait pas d'hypothèse sur le caractère compressible ou incompressible. En revanche on suppose la viscosité μ constante (ainsi que la conductivité thermique k), et on néglige la viscosité en volume μ'' .

Il existe de nombreuses variantes de ces équations-bilan, on liste ici les plus utiles. Un grand nombre d'autres formes sont données dans le livre *Mécanique des Fluides, Candel (Dunod)*.

C.1 Bilan de masse

$$\text{Forme locale 1 (non conservative) : } \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (11)$$

$$\text{Forme locale 2 (conservative) : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (12)$$

$$\text{Forme intégrale : } \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (13)$$

C.2 Bilan de quantité de mouvement

$$\text{Forme locale 1 (non conservative) : } \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \mathbf{grad} p + \mu \Delta \vec{u} + \frac{\mu}{3} \mathbf{grad} \operatorname{div} \vec{u} \quad (14)$$

$$\text{Forme locale 2 (conservative) : } \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho \vec{f} - \mathbf{grad} p + \operatorname{div} \bar{\tau} \quad (15)$$

Forme intégrale

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + \oint_{\partial\Omega} (-p \vec{n} + \bar{\tau} \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega} \rho \vec{f} dV \left[+ \oint_{\mathcal{L}} \gamma \vec{t} d\ell \right] \quad (16)$$

(Le dernier terme entre crochets est à prendre en compte si le volume de contrôle Ω est traversé par une *surface libre* \mathcal{S} ; dans ce cas $\mathcal{L} = \partial\Omega \cap \mathcal{S}$ et \vec{t} est le vecteur unitaire contenu dans le plan \mathcal{S} et perpendiculaire à \mathcal{L})

C.3 Bilan d'énergie cinétique

Forme locale 1

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{|\vec{u}|^2}{2} = -\rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \mathbf{grad} p \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \operatorname{div}(\bar{\tau}) \quad (17)$$

Forme locale 2 Sous les hypothèses suivantes :

- Le champ de force massique \vec{f} est conservatif, c.a.d. $\vec{f} = -\mathbf{grad} \mathcal{U}$ (en général $\mathcal{U} = gz$),
- Le fluide est barotrope (c.a.d. $p = p(\rho)$)¹;

Dans ce cas on peut définir la fonction $\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho}$, ce qui conduit à la formule suivante :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \rho \vec{u} \cdot \mathbf{grad} \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + \mathcal{P} \right) = \vec{u} \cdot \operatorname{div}(\bar{\tau}) = \operatorname{div}(\vec{u} \cdot \bar{\tau}) - \bar{D} : \bar{\tau} \quad (18)$$

(on reconnaît comme cas particulier le premier théorème de Bernoulli).

Forme intégrale

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} dV = - \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \rho \mathcal{U} \right) \cdot \vec{u} dS + \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\vec{u}) dV + \oint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \bar{\tau} \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} \bar{D} : \bar{\tau} dV \quad (19)$$

1. Cette notion englobe fluide incompressible pour lequel $\mathcal{P} = p/\rho$ ainsi que le gaz parfait en évolution isotherme ou isentropique

C.4 Bilan d'énergie (1er principe)

Dans ce paragraphe e est l'énergie interne *massique*², $h = e + p/\rho$ est l'enthalpie massique³, H est l'enthalpie totale, et \vec{q} est le flux de chaleur conductif⁴

Forme intégrale 1

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) dV}_{\frac{dE}{dt}} = \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{E}^{(ech)}} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dV}_{\dot{W}^{(f)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} -p \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{W}^{(p)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{W}^{(v)}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{Q}} \quad (20)$$

Forme intégrale 2 (1er principe en système ouvert)

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} \right) dV}_{\frac{dH}{dt}} = \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \rho \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{H}^{(ech)}} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} dV}_{\frac{dP}{dt}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{W}^{(v)}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{Q}} \quad (21)$$

Remarque : si le volume de contrôle Ω contient une surface intérieure $\partial\Omega_i$ mobile, il convient d'ajouter

$$W^{(utile)} = \int_{\partial\Omega_i} \vec{u} \cdot (-p \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\text{Forme locale 1 :} \quad \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = -\rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \mathbf{grad}(p) \cdot \vec{u} + \text{div}(\vec{\tau}) \cdot \vec{u} - \text{div}(\vec{q}) \quad (22)$$

$$\text{Forme locale 2 :} \quad \rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\vec{\tau}) \cdot \vec{u} - \text{div}(\vec{q}) \quad (23)$$

C.5 Bilan d'énergie interne

Celui-ci s'obtient en combinant les deux précédents, et en écrivant la puissance des forces visqueuses comme la somme d'une puissance externe et d'une puissance interne : $\vec{u} \cdot \text{div}(\vec{\tau}) = \text{div}(\vec{\tau} \cdot \vec{u}) - \vec{\tau} : \mathbf{grad}(\vec{u})$.

Forme locale

$$\rho \frac{de}{dt} = \vec{\tau} : \mathbf{grad}(\vec{u}) + p \text{div}(\vec{u}) - \text{div}(\vec{q}) \quad (24)$$

Forme intégrale

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho e dV = - \int_{\Omega} p \text{div}(\vec{u}) dV + \int_{\Omega} \vec{\tau} : \mathbf{grad}(\vec{u}) dV - \oint_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS \quad (25)$$

C.6 Bilan d'entropie

S'obtient à partir du bilan d'énergie interne en posant $de = Tds - pd(1/\rho)$:

$$\text{Forme locale :} \quad \rho \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{\tau} : \mathbf{grad}(\vec{u})}{T} - \frac{\text{div}(\vec{q})}{T} \quad (26)$$

Forme intégrale (second principe en système ouvert)

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho s dV}_{\frac{dS}{dt}} = \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \rho s \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{S}^{(ech)}} + \underbrace{\int_{\Omega} \left(\frac{\vec{\tau} : \mathbf{grad}(\vec{u})}{T} + \vec{q} \cdot \frac{\mathbf{grad}(T)}{T^2} \right) dV}_{\dot{S}^{(cree)}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{S}^{(recu)}} \quad (27)$$

2. $e = c_v T$ pour un gaz parfait

3. $h = c_p T$ pour un gaz parfait

4. Donné en général par la loi de Fourier $\vec{q} = -k \mathbf{grad} T$

D Opérateurs différentiels et équations de Navier-Stokes incompressibles dans les principaux systèmes de coordonnées

D.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

Divergence

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Vorticité

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \begin{cases} \omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{cases}$$

Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} & \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} & \sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} & \sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Equations de Navier-Stokes (écoulement incompressible)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Fonction de courant ψ pour un écoulement incompressible plan ($\vec{u} = u_x(x, y)\vec{e}_x + u_y(x, y)\vec{e}_y$)

$$\vec{u} = \operatorname{rot}(\psi(x, y)\vec{e}_z), \quad \text{c.a.d :} \quad \begin{cases} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases} \quad (28)$$

D.2 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Opérateurs différentiels

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \operatorname{rot} \vec{u} = \begin{cases} \omega_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ \omega_\theta = \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \omega_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{cases}$$

$$\vec{\operatorname{grad}} f = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\vec{\operatorname{grad}}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \otimes \vec{u} = \overline{\overline{\nabla u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Equations de Navier-Stokes (écoulement incompressible)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} &= \frac{1}{\rho} f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= \frac{1}{\rho} f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ &+ \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Fonction de courant ψ pour un écoulement incompressible plan exprimé en coordonnées polaires :
 $(\vec{u} = u_r(r, \theta) \vec{e}_r + u_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta)$

$$\vec{u} = \operatorname{rot}(\psi(r, \theta) \vec{e}_z), \quad \text{c.a.d :} \quad \begin{cases} u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ u_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases} \quad (29)$$

Fonction de Stokes Ψ pour un écoulement à symétrie de révolution

$$(\vec{u} = u_r(r, z) \vec{e}_r + u_z(r, z) \vec{e}_z)$$

$$\begin{cases} u_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ u_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \end{cases} \quad (30)$$

D.3 Coordonnées sphériques (R, Θ, ϕ)

Écoulement incompressible

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{u_\theta}{r}$$

Equation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\theta^2 - u_\varphi^2 \right] &= \frac{1}{\rho} f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \Delta_r \vec{u}; \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + u_\theta u_\varphi - \frac{u_\varphi^2}{\tan \theta} + u_\varphi \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right] &= \frac{1}{\rho} f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \Delta_\theta \vec{u}; \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[u_\theta \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\theta u_r - \frac{u_\theta u_\varphi}{\tan \theta} \right] &= \frac{1}{\rho} f_\varphi - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \Delta_\varphi \vec{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_r \vec{u} &= \Delta u_r - \frac{2}{r^2} \left[u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{\tan \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\ \Delta_\theta \vec{u} &= \Delta u_\theta + \frac{1}{r^2} \left[2 \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} u_\theta - \frac{2 \cos^2 \theta}{\tan \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\ \Delta_\varphi \vec{u} &= \Delta u_\varphi + \frac{1}{r^2} \left[u_\theta \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + u_r u_\varphi + \frac{u_\theta u_\varphi}{\tan \theta} \right] \end{aligned}$$

Où le laplacien scalaire est :

$$\Delta f = \text{div}(\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

où on notera que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

Gradient des vitesses et tenseur des contraintes

$$\vec{grad}(\vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{v}) = \overline{\overline{\nabla v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\tan \theta} v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tan \theta} v_\theta + v_r \right) \end{bmatrix}$$

d'où on peut tirer le tenseur des taux de déformation par symétrisation : $\bar{\bar{d}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\nabla v}} + \overline{\overline{\nabla v}}^T \right)$, ainsi que la vorticité en prenant la partie antisymétrique.

Fonction de Stokes Ψ pour un écoulement à symétrie de révolution

$$(\vec{u} = u_R(R, \Theta) \vec{e}_R + u_\Theta(R, \Theta) \vec{e}_\Theta)$$

$$\begin{cases} u_r &= -\frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}, \\ u_z &= \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial \Psi}{\partial R}. \end{cases} \quad (31)$$

E Quelques formules d'analyse vectorielle et tensorielle

E.1 Formules de dérivation d'un produit (généralisations de $(fg)' = f'g + fg'$) :

$$\mathbf{grad}(fg) = f\mathbf{grad}g + g\mathbf{grad}f$$

$$\mathbf{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \overline{\mathbf{grad}}(\vec{A}) \cdot \vec{B} + \overline{\mathbf{grad}}(\vec{B}) \cdot \vec{A} + \vec{A} \wedge \mathbf{rot} \vec{B} + \vec{B} \wedge \mathbf{rot} \vec{A}$$

$$\operatorname{div}(f\vec{A}) = f\operatorname{div} \vec{A} + \mathbf{grad}(f) \cdot \vec{A}$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \mathbf{rot} \vec{A} - \vec{A} \mathbf{rot} \vec{B}$$

$$\mathbf{rot}(f\vec{A}) = f\mathbf{rot} \vec{A} + \vec{A} \wedge \mathbf{rot}(f)$$

$$\mathbf{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \overline{\mathbf{grad}}(\vec{A}) \cdot \vec{B} - \overline{\mathbf{grad}}(\vec{B}) \cdot \vec{A} + \vec{A} \operatorname{div}(\vec{B}) - \vec{B} \operatorname{div}(\vec{A})$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \otimes \vec{B}) = \operatorname{div}(\vec{A}) \vec{B} + \overline{\mathbf{grad}}(\vec{B}) \cdot \vec{A}$$

$$(\vec{u} \cdot \mathbf{grad}) \vec{u} = \left(\overline{\mathbf{grad}} \vec{u} \right) \cdot \vec{u} = \mathbf{grad}(|\vec{u}|^2/2) + \mathbf{rot} \vec{u} \wedge \vec{u}$$

E.2 Formules de dérivée seconde (généralisations de $(f')' = f''$) :

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad} f) = \Delta f$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} f) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{rot} \vec{A}) = 0$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \vec{A}) = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\vec{\operatorname{div}}(\overline{\mathbf{grad}} \vec{A}) = \Delta \vec{A}$$

$$\vec{\operatorname{div}}(\overline{\mathbf{grad}} \vec{A} + {}^t \overline{\mathbf{grad}} \vec{A}) = \Delta \vec{A} + \mathbf{grad}(\operatorname{div} \vec{A})$$

E.3 Formules d'intégration (généralisations de $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$) :

Pour un volume Ω de frontière Σ , en utilisant la convention de la normale sortante

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{A})dV = \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n}dS$$

$$\int_{\Omega} \vec{\operatorname{div}}(\vec{A})dV = \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n}dS$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{grad} f dV = \oint_{\Sigma} f \vec{n}dS$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot}(\vec{A})dV = \oint_{\Sigma} \vec{A} \wedge \vec{n}dS$$

F (Quelques) solutions exactes des équations de Navier-Stokes			
Schéma	Hypothèses	Solution	Nom de l'écoulement
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\vec{u} = u(y) \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad u(y) = \frac{Uy}{h}$ $p = C^{te}$	Couette plan sans gradient de pression ($\partial p / \partial x = 0$)
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te} \quad \text{et} \quad \vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ $\text{avec} \quad u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h-y)$	Poiseuille plan
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te} \quad \text{et} \quad \vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ $\text{avec} \quad u(y) = U \left[\frac{y}{h} - K \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \right]$ $\text{où} \quad K = \frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx}$	Couette plan avec gradient de pression ($\partial p / \partial x \neq 0$) = "Couette-Poiseuille"
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te} \quad \text{et} \quad \vec{u} = u(r) \vec{e}_x$ $\text{avec} \quad u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)$	Poiseuille cylindrique
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = v(r) \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad v(r) = Ar + \frac{B}{r}$ $\text{où} \quad A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$ $\text{et} \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$	Couette cylindrique = "Couette-Taylor"
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ $\text{avec} \quad u(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} y(2h - y)$ $p(y) = \rho g(h - y) \cos \alpha + P_a$	Film tombant
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = u(y, t) \vec{e}_x$ $\text{avec} \quad u(y, t) = U \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]$ $\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right _{x=0} = -\rho U \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}}$	Premier problème de Stokes
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = u(y, t) \vec{e}_x$ $u(y, t) = U e^{-y/\delta} \cos(\omega t - \frac{y}{\delta}); \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ $\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right _{x=0} = -\frac{\mu U \sqrt{2}}{\delta} \cos(\omega t - \pi/4)$	Second problème de Stokes