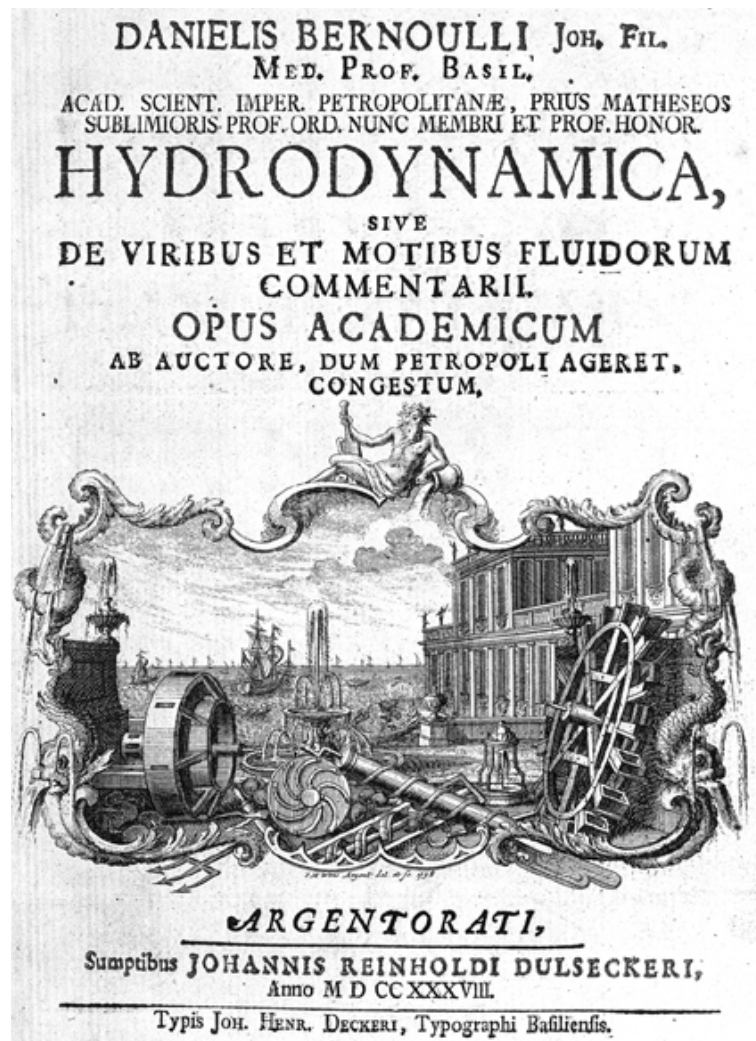


---

## Exercices et problèmes – 1ère partie

---



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Analyse dimensionnelle et similitude</b>	<b>2</b>
1.1	Vitesse d'un animal volant . . . . .	2
1.2	Puissance d'une hélice de bateau : étude par similitude . . . . .	2
1.3	Force de traînée sur une automobile . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Hydrostatique</b>	<b>4</b>
2.0	Forces de pression sur un barrage . . . . .	4
2.1	Modèle d'atmosphère normalisée . . . . .	4
2.2	La montgolfière . . . . .	4
2.3	Envasement d'une barge * . . . . .	4
2.4	Ascension capillaire (loi de Jurin) * . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Cinématique</b>	<b>6</b>
3.0	Ecoulements linéaires . . . . .	6
3.1	Tourbillon de vidange . . . . .	6
3.2	Écoulement instationnaire . . . . .	6
3.3	Écoulement stationnaire accéléré dans une conduite . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Ecoulements visqueux I</b>	<b>8</b>
4.0	Ecoulement de Poiseuille . . . . .	8
4.1	Ecoulement de dentifrice . . . . .	8
4.2	Rythmes cardiaques * . . . . .	8
4.3	Viscosimètre de Couette (d'après partiel 2008) * . . . . .	8
4.4	Ecoulement d'un film liquide d'épaisseur uniforme * . . . . .	9
4.5	Documentation : solutions exactes de l'équation de Navier–Stokes . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Ecoulements visqueux II</b>	<b>11</b>
5.0	Aéroglossage . . . . .	11
5.1	Coulée de lave . . . . .	11
5.2	Drainage d'un film liquide sur une paroi verticale * . . . . .	12
5.3	Drainage entre deux disques rapprochés (d'après examen 2004) * . . . . .	12
5.4	Adhésion de deux plaques immergées dans un fluide ** . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Exercices de synthèse</b>	<b>14</b>
6.1	Vitesse de gouttes et particules en chute libre (mars 2017) . . . . .	14
6.2	Ecoulement autour d'un cylindre en rotation (d'après partiel 2010) * . . . . .	14
6.3	Goutte-à-goutte (d'après examen 2005) * . . . . .	16
6.4	Amortisseur hydraulique (mars 2017) . . . . .	18
<b>A</b>	<b>Equations de Navier–Stokes</b>	<b>20</b>
A.1	Equations générales . . . . .	20
A.2	Coordonnées cartésiennes . . . . .	20
A.3	Coordonnées cylindriques . . . . .	20
A.4	Coordonnées sphériques . . . . .	22
<b>B</b>	<b>Quelques formules utiles d'analyse vectorielle et tensorielle</b>	<b>22</b>
B.1	Formules de dérivation d'un produit (généralisations de $(fg)' = f'g + fg'$ ) : . . . . .	22
B.2	Formules de dérivée seconde (généralisations de $(f')' = f''$ ) : . . . . .	22
B.3	Formules d'intégration (généralisations de $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ ) : . . . . .	22
<b>C</b>	<b>Quelques solutions exactes</b>	<b>23</b>

# 1 Analyse dimensionnelle et similitude

## 1.1 Vitesse d'un animal volant

On cherche à estimer la vitesse  $V$  d'un animal volant (insecte, oiseau ou chauve-souris) en fonction de sa masse  $M$ .

1. Listez les différents paramètres physiques intervenant dans le problème, et discutez leur pertinence. Montrez qu'il est légitime de supposer que la vitesse est donnée par une loi de la forme

$$V = \mathcal{F}(M, L, \rho, g, \nu).$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'air,  $g$  l'accélération de la gravité,  $L$  l'envergure de l'oiseau,  $M$  sa masse et  $\nu$  la viscosité cinématique de l'air.

2. Donnez les dimensions physiques de  $V$ ,  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $g$ ,  $L$  et  $M$ .
3. En appliquant les principes de l'analyse dimensionnelle, montrez que la loi de vitesse peut se mettre sous la forme :

$$V = \sqrt{gL} \mathcal{F}\left(\frac{M}{\rho L^3}, \frac{\nu}{\sqrt{gL^3}}\right).$$

4. Interprétez physiquement la quantité  $M/(\rho L^3)$ . Justifiez pourquoi on peut supposer en première approximation que cette quantité a la même valeur pour tous les animaux volants.
5. Quelle est l'interprétation physique du nombre sans dimensions  $Ga = \frac{\sqrt{gL^3}}{\nu}$  (parfois appelé nombre de Galilée) ?
6. Des considérations aérodynamiques permettent de montrer que dans la gamme  $Ga > 10^3$  la structure de l'écoulement est indépendante de la viscosité. Estimez le nombre de Galilée pour les différents animaux volants du tableau ci-dessous.
7. En déduire que la vitesse d'un animal volant est proportionnel à  $M^{1/6}$ .
8. Application : calculez le rapport  $V/M^{1/6}$  pour les différents animaux détaillés dans le tableau ci-dessous. Commentez les résultats

Animal	Poids	Vitesse	$V/M^{1/6}$
Guêpe	100mg	20km/h	
Colibri	2.5g	45km/h	
Hirondelle	17g	60km/h	
Aigle	6kg	160km/h	
Airbus A300	150T	855km/h	

9. En se basant sur l'analyse précédente, à combien estimez vous la vitesse d'une mouette de masse 400g ?

## 1.2 Puissance d'une hélice de bateau : étude par similitude

On cherche à dimensionner le propulseur à hélice d'une vedette hors-bord de longueur  $L = 20m$  afin de prédire la puissance nécessaire et de limiter l'effet néfaste de la cavitation. La vedette navigue dans une eau de viscosité cinématique  $\nu$ , masse volumique  $\rho$  et la pression atmosphérique est notée  $P_0$ .

Pour les applications numériques on utilisera les valeurs de référence suivantes :

$$L = 20m; g \equiv 10USI; \nu = 10^{-6}USI; \rho = 10^3USI;$$

### Analyse dimensionnelle

On cherche à estimer la puissance  $\mathcal{P}$  que doit fournir le moteur pour faire avancer le bateau à la vitesse  $U$ .

Après avoir listé les paramètres pertinents on cherche la puissance sous la forme fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{P} = f(L, U, \rho, \nu, g)$$

1. Commentez le choix de paramètres retenus. Quels paramètres ont été écartés et comment justifiez-vous cette omission ?

- Donnez la dimension physique de tous les paramètres, ainsi que celle de la puissance, en fonction de trois unités de base, notées  $M^*$ ,  $L^*$  et  $T^*$ .
- Par un choix judicieux des unités de base, montrer qu'on peut exprimer de la puissance adimensionnée en fonction de deux paramètres adimensionnels que vous préciserez.
- En architecture navale, les ingénieurs ont l'habitude d'exprimer la puissance selon la formule suivante :

$$\mathcal{P} = 1/2 \rho S U^3 C_p(Re, Fr)$$

où  $S$  est une surface mouillée (reliée à la longueur  $L$  par  $S = \beta L^2$  où  $\beta$  est un nombre sans dimension), et  $Re$  et  $Fr$  sont les nombres de Reynolds et de Froude dont l'expression est classique.

Commentez cette expression en la comparant à celle que vous avez obtenue à la question précédente.

- Pour la vitesse nominale  $U = 20m/s$ , donnez la valeur de  $Re, Fr$ .

### Essais en tunnel hydrodynamique, prédiction de la puissance

On dispose d'un bassin d'essais, dans lequel on fait fonctionner une maquette parfaitement conforme à l'échelle 1/40ème de la vedette.

On note  $L_m = 0.5m$  la taille de la maquette,  $S_m = \beta L_m^2$  sa surface mouillée, et  $U_m$  sa vitesse.

On notera  $Re_m, Fr_m$  les nombres de Reynolds et de Froude relatifs à la maquette, et  $\mathcal{P}_m$  la puissance mesurée sur l'hélice de celle-ci.

Les caractéristiques du fluide sont identiques entre l'expérience et la réalité :

$$g_m = g, \rho_m = \rho, \nu_m = \nu.$$

- Justifiez que la puissance de la maquette a une expression de la forme

$$\mathcal{P}_m = 1/2 \rho S_m U_m^3 C_p(Re_m, Fr_m)$$

où la fonction  $C_p$  est la même que pour le bateau à l'échelle réelle.

- Est-il possible de choisir la vitesse  $U_m$  de manière à assurer une similitude parfaite ( $Re = Re_m$  et  $Fr = Fr_m$ ) ?
- On souhaite faire l'essai en respectant une similitude de Froude ( $Fr = Fr_m$ ). Quelle doit être la vitesse  $U_m$  de la maquette ?
- Dans les conditions de l'expérience qu'on vient de décrire, on mesure une puissance sur la maquette de  $\mathcal{P}_m = 3,5W$ . En supposant que l'expérience est représentative, et que le coefficient  $C_p$  a la même valeur dans l'expérience et dans le cas réel, en déduire une estimation de la valeur de la puissance  $\mathcal{P}$  sur le bateau.

### 1.3 Force de traînée sur une automobile

On cherche à estimer la force de traînée  $D$  s'exerçant sur une automobile de longueur  $L$  et surface frontale  $S$  roulant à la vitesse  $V$ , à l'aide d'une expérience utilisant une maquette à échelle réduite dans un tunnel hydrodynamique.

- Listez et discutez les paramètres physiques pertinents dans ce problème.
- En utilisant les principes de l'analyse dimensionnelle, montrez que la traînée s'exprime simplement sous la forme suivante :

$$D = \rho S V^2 C_x(Re), \quad \text{avec } Re = \frac{VL}{\nu}$$

- Calculez la valeur du nombre de Reynolds, pour une automobile de longueur  $L = 4m$  (et surface frontale  $S = 1.74m^2$ ), roulant à la vitesse  $V = 90km/h$ .
- Dans l'expérience, la maquette est à l'échelle 1/10 (c.a.d.  $L_m = L/10$ ). La vitesse de l'eau dans le tunnel hydrodynamique est notée  $V_m$ .  
Quelle doit être la valeur de  $V_m$  pour assurer la similitude de Reynolds ?
- Le tunnel hydrodynamique étant réglé à la vitesse  $V_m$  précédemment déterminée, on mesure à l'aide d'une balance de forces une traînée sur la maquette  $D_m = 911N$ . En déduire le  $C_x$ , puis la traînée  $D$  sur la voiture.

- En déduire la puissance aérodynamique  $DV$  puis la puissance qui doit être fournie par le moteur, en supposant que le rendement énergétique global de celui-ci est  $\eta = 20\%$ .

## 2 Hydrostatique

### 2.0 Forces de pression sur un barrage

*Exercice préparatoire, correction détaillée sur moodle*

On considère un lac dans une vallée de section triangulaire, d'angle au sommet  $2\alpha$ . Le lac est fermé par un barrage de hauteur  $h$ . Le lac est rempli d'eau de densité constante  $\rho$ , et sa surface est à la pression atmosphérique  $P_a$ .

On choisit comme origine du repère le point  $O$  correspondant au point le plus bas du barrage (sommet inférieur du triangle).

1. Donnez l'expression de la pression  $P(z)$  régnant dans le lac, en fonction de la profondeur.
2. Calculez la résultante  $\vec{R}$  des forces de pression (exercées par l'eau et par l'air) sur la surface du barrage.
3. Calculez le moment  $\vec{M}_O$  des forces de pression par rapport au point  $O$ .
4. Donnez la position du centre de poussée des forces de pression.

### 2.1 Modèle d'atmosphère normalisée

Le modèle d'atmosphère normalisée ( [http://fr.wikipedia.org/wiki/Atmosphère\\_normalisée](http://fr.wikipedia.org/wiki/Atmosphère_normalisée) ) est un modèle adopté internationalement qui découpe l'atmosphère en sept couches successives dans lesquelles la température est donnée par une loi affine de la forme

$$T(z) = T_0(1 - \alpha z)$$

On considère ici uniquement la couche inférieure appelée troposphère ( $0 < z < 11km$ ) dans laquelle les paramètres de cette loi sont  $\alpha = 22.6 \cdot 10^{-6}m^{-1}$  et  $T_0 = 288K$ .

Donnez les loi  $P(z)$  et  $\rho(z)$  correspondantes, sachant que la pression au niveau du sol est  $P_0 = 1013hPa$ .

### 2.2 La montgolfière

On considère une montgolfière, constituée d'un ballon sphérique et de rayon  $R = 8m$ , ouvert à sa base par une ouverture de section négligeable, et d'une nacelle.

On souhaite déterminer la température à laquelle il faut chauffer le gaz intérieur pour pouvoir voler à l'altitude de  $h = 1000m$ .

1. En utilisant le modèle d'atmosphère standard, donnez la masse volumique  $\rho_{ext}$ , la température  $T_{ext}$  et la pression  $P_{ext,h}$  caractérisant l'air à l'extérieur de la montgolfière à l'altitude  $h = 1000m$  correspondant à la base du ballon.
2. Quelle erreur commet-on en supposant la masse volumique constante à l'échelle du ballon ? Montrez que dans cette approximation la pression peut être approximée par une loi affine de la forme  $P_{ext}(z') \approx P_{ext,h} + \alpha z'$  où  $z' = z - h_0$  est l'altitude comptée à partir de la base du ballon.
3. Le ballon est rempli d'air de masse volumique  $\rho_{int}$  supposée uniforme. Donnez la loi de pression  $P_{int}(z')$  à l'intérieur du ballon.
4. Calculez la résultante des efforts exercés par l'air sur le ballon.
5. Retrouvez le résultat précédent à l'aide du théorème d'Archimède.
6. Application : calculez la valeur de  $\rho_{int}$  nécessaire pour maintenir la montgolfière en équilibre à l'altitude 1000m, considérant que sa masse totale est  $m = 2500kg$ . En déduire la température  $T_{int}$  mesurée à la base du ballon.

### 2.3 Envasement d'une barge \*

On considère une barge de section carrée, de largeur  $b = 10m$  de hauteur  $h = 1m$ , et de masse  $M = 75t$ . La barge flotte dans de l'eau de densité  $\rho_e = 1000kgm^{-3}$ .

1. Calculez le tirant d'eau (c'est-à-dire la hauteur de la partie située sous l'eau) de la barge à marée haute.
2. A marée basse la hauteur d'eau est de  $H = 25cm$ , et la barge s'enfonce dans la vase, que l'on considère comme un fluide de masse volumique  $\rho_v = 2\rho_e$ . Calculez la profondeur d'envasement  $e$ .

## 2.4 Ascension capillaire (loi de Jurin) \*

A quelle hauteur monte une colonne de liquide dans un tube de petit diamètre (fig. 1)? On écrira que cette hauteur résulte d'un équilibre gravité-capillarité.

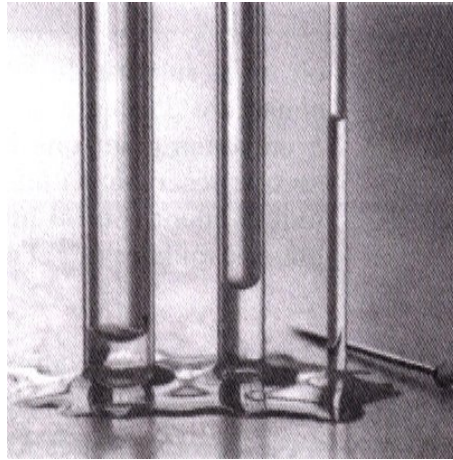


FIGURE 1 – *Ascension capillaire dans des tubes de diamètres différents.*

La sève brute des arbres (sève montante, constituée d'eau et de sels minéraux pompés dans le sol par les racines) est tirée des racines vers les feuilles essentiellement par l'évaporation de l'eau par les stomates (pores) des feuilles. A l'intérieur d'une feuille, la sève forme un ménisque entre les cellules végétales, dont le rayon de courbure est voisin de  $1\mu\text{m}$ . En admettant que la pression à la base du tronc des arbres est égale à la pression atmosphérique, déterminer la hauteur maximale à laquelle la sève peut monter. Cette hauteur est-elle en accord avec la hauteur des arbres?

### 3 Cinématique

#### 3.0 Écoulements linéaires

(Exercice préparatoire ; correction détaillée sur moodle)

On considère les écoulement bidimensionnels définis par  $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$  avec :

$$\begin{cases} u(x, y) &= ax + by \\ v(x, y) &= cx + dy \end{cases},$$

1. Donnez l'expression du tenseur des taux de déformation, de la divergence, puis de la vorticité correspondant à cet écoulement.
2. Que vaut l'accélération ? celle-ci est-elle uniforme ?
3. Dans le cas  $d = -a$ , définir la fonction de courant permettant de décrire l'écoulement.
4. déterminer les lignes de courant et les trajectoires (on vérifiera qu'il s'agit des mêmes courbes).
5. A l'aide de Matlab, tracez la structure de l'écoulement dans les cas suivants :
  - (i)  $b = 1, \quad a = c = d = 0$  ;
  - (ii)  $a = 1, \quad b = c = 0, \quad d = -1$  ;
  - (iii)  $a = d = 0, \quad b = c = 1$  ;
 Justifiez pourquoi ces deux derniers cas définissent le même écoulement.

#### 3.1 Tourbillon de vidange

On considère un écoulement permanent, occupant un récipient cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ .

Le champ de vitesse est donné en coordonnées axisymétriques par  $\vec{u} = u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_\theta + u_z\vec{e}_z$ , avec les expressions suivantes :

$$\begin{cases} u_r &= -\frac{D}{2\pi r} \\ u_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ u_z &= 0 \end{cases} \quad \text{pour } r > a,$$

$$\begin{cases} u_r &= -\frac{Dr}{2\pi a^2} \\ u_\theta &= \frac{\Gamma r}{2\pi a^2} \\ u_z &= \frac{Dz}{\pi a^2} \end{cases} \quad \text{pour } r < a.$$

1. Vérifiez que le champ de vitesse est à divergence nulle.
2. Le champ de vitesse est-il continu pour  $r = a$  ?
3. Calculez le rotationnel du champ de vitesse.
4. Donnez la forme des lignes de courant. Montrez que leurs projections dans le plan horizontal sont des spirales d'Archimède.
5. Calculez le débit volumique à travers la paroi latérale,  $r = R$ , et à travers le fond du récipient,  $z = H$ . Conclusions.

#### 3.2 Écoulement instationnaire

On considère un écoulement bidimensionnel dont la vitesse est donnée sous forme eulérienne par :

$$\begin{cases} u_x(x, y, t) &= U_0 \cos \omega t, \\ u_y(x, y, t) &= U_0 \sin \omega t. \end{cases}$$

1. Donnez la forme des lignes de courant en un instant  $t$  donné. Représentez le champ de vitesse pour 4 instants correspondant à  $t = 0, t = T/4, t = T/2$ , et  $t = 3T/4$ , où  $T = 2\pi/\omega$  est la période du cycle.

- On note  $\vec{X}(t; \vec{x}_0, t_0)$  la position lagrangienne, à l'instant  $t$ , de la particule fluide qui était située à la position  $\vec{x}_0$  à l'instant  $t_0$ .  
Calculez les composantes de  $\vec{X}(t; \vec{x}_0, t_0)$ , notées  $X(t; x_0, y_0, t_0)$  et  $Y(t; x_0, y_0, t_0)$ , où  $x_0$  et  $y_0$  sont les composantes de  $\vec{x}_0$ .
- Quelle est la forme des trajectoires? Représentez la trajectoire de 4 particules, correspondant respectivement à  $(x_0, y_0, t_0) = (0, 0, 0)$ ;  $(0, 0, T/4)$ ;  $(0, 0, T/2)$ ; et  $(0, 0, 3T/4)$ .
- Quelle est la forme des lignes d'émission? Représentez la ligne d'émission correspondant au point d'émission  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ , en quatre instants, correspondant à  $t = 0$ ,  $t = T/4$ ,  $t = T/2$ , et  $t = 3T/4$ .

### 3.3 Écoulement stationnaire accéléré dans une conduite

On étudie l'écoulement dans une conduite rectiligne de section constante  $S$ . L'écoulement est mono-directionnel et stationnaire, et on pose  $\vec{u}(\vec{x}, t) = U(x)\vec{e}_x$ . L'écoulement subit une accélération dans la portion de conduite située entre  $x = 0$  et  $x = L$ . De part et d'autre de cette zone l'écoulement est uniforme. De manière plus précise, on suppose que le champ de vitesse est donné par la définition (eulérienne) suivante :

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & \text{pour } x < 0; \\ U_0 + \alpha x & \text{pour } 0 < x < L; \\ U_1 & \text{pour } x > L, \text{ avec } U_1 = U_0 + \alpha L. \end{cases}$$

Cet écoulement modélise (très simplement) l'écoulement dans un turboréacteur.

- Calculez la divergence du champ de vitesse.
- On note  $X(t)$  la position lagrangienne de la particule fluide située à l'origine du repère à  $t_0 = 0$ . Calculez  $X(t)$ .
- Calculez la vitesse lagrangienne  $U(t)$  et l'accélération lagrangienne  $A(t)$  de cette particule fluide.
- Exprimez l'accélération en variables eulériennes. Montrez qu'on a bien  $A = \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x$ .
- Donnez l'expression du débit massique à travers la conduite. En écrivant que ce dernier est constant, en déduire la loi eulérienne de masse volumique,  $\rho(x)$ .
- Donnez la loi lagrangienne de masse volumique,  $\rho(t)$ , de la particule fluide considérée précédemment.
- Calculez la dérivée particulaire de la masse volumique,  $d\rho/dt$ . Vérifiez que l'on a bien  $d\rho/dt + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ .



## 4 Ecoulements visqueux I

### 4.0 Ecoulement de Poiseuille

(Exercice préparatoire ; correction détaillée sur moodle)

### 4.1 Ecoulement de dentifrice

Le dentifrice est un exemple de "fluide à seuil" qui ne s'écoule que si la contrainte de cisaillement est supérieure à un seuil  $\tau_c$ . Considérons donc un tube cylindrique de longueur  $L$  rempli de dentifrice, et soumis à une différence de pression  $p_e - p_s$ .

1. Déterminer le profil de la contrainte de cisaillement dans le tube.
2. A partir de quelle différence de pression le dentifrice s'écoule-t-il ?
3. Etablir l'expression du champ des vitesses, et représenter ce champ.
4. Etablir l'expression du débit en fonction du gradient de pression.

### 4.2 Rythmes cardiaques \*

Outre une différence de pression moyenne (cf ex. ??), le cœur qui bat impose une variation périodique du gradient de pression ce qui conduit à un écoulement pulsé dans les vaisseaux sanguins. L'objectif de cet exercice est de caractériser ce type d'écoulement en particulier dans les limites des basses fréquences (organisme au repos) et hautes fréquences (activité cardiaque intense).

Considérons un écoulement plan entre deux plaques planes distantes de  $2h$  généré par un gradient de pression sinusoïdal à pulsation  $\omega$  fixée :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = K \cos \omega t.$$

Dans l'hypothèse d'un écoulement plan parallèle, montrer que la vitesse horizontale  $u(y, t)$  vérifie l'équation

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -K \cos \omega t + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

Comme pour le problème analogue ?? traité précédemment, la méthode de résolution d'une telle équation consiste à chercher une solution sous la forme  $u(y, t) = \text{Re} \{ U(y) e^{i\omega t} \}$ . En injectant ce type de solution dans l'équation (1), déterminer l'expression du profil de vitesse instationnaire. Quelle est la forme de ce profil pour les basses fréquences ? Même question pour les hautes fréquences.

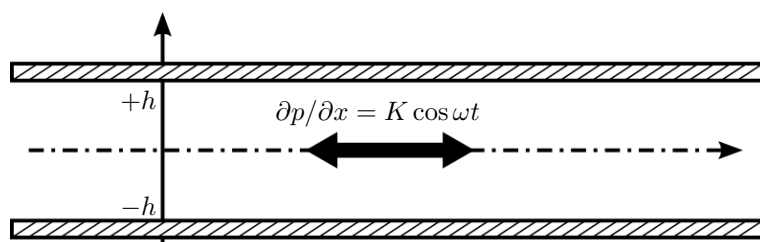


FIGURE 2 – Ecoulement pulsé en canal plan.

### 4.3 Viscosimètre de Couette (d'après partiel 2008) \*

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux placé entre deux cylindres concentriques d'axe vertical  $Oz$ , de hauteur  $L$  et de rayons  $R_2 > R_1$ . Le cylindre intérieur tourne à vitesse angulaire  $\Omega$  (rad/s) constante, le cylindre extérieur étant immobile (fig. 3). On négligera l'influence de la pesanteur.

1. Justifier brièvement pourquoi il est a priori légitime de rechercher une solution d'écoulement de la forme  $\mathbf{u} = u(r) \mathbf{e}_\theta$ , où  $\mathbf{e}_\theta$  désigne le vecteur unitaire azimutal des coordonnées cylindriques.
2. Donner l'expression des conditions aux limites à imposer pour  $u(r)$  en fonction de  $R_1$  et  $\Omega$ .
3. Vérifier qu'il s'agit d'un écoulement incompressible (cf annexe).
4. Injecter ce type de solution dans les équations de Navier-Stokes :
  - (a) montrer que la pression ne dépend pas de  $z$ ,

- (b) en analysant la composante azimutale des équations de Navier–Stokes, montrer que la pression ne dépend pas de  $\theta$ ,
  - (c) en déduire l'équation vérifiée par  $u$  et la résoudre en utilisant les conditions aux limites (chercher la solution sous la forme  $r^n$  puis déterminer les valeurs de  $n$  admissibles pour montrer que la solution générale est de la forme  $Ar + B/r$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes à déterminer en fonction des données du problème),
  - (d) déterminer ensuite à une constante près le champ de pression  $p(r)$  en fonction de  $A$ ,  $B$  et  $\rho$ .
5. Donner l'expression du tenseur des contraintes visqueuses  $\vec{\tau}$  en fonction de  $\mu$ ,  $A$  et  $B$ .
  6. Déterminer le vecteur contrainte exercé sur la paroi du cylindre intérieur en fonction de  $\mu$ ,  $B$ ,  $R_1$  et  $P_1$ , la pression en  $r = R_1$ .
  7. En déduire le moment par rapport à l'axe du cylindre de la force élémentaire exercée par le fluide sur la paroi du cylindre intérieur.
  8. En écrivant la conservation du moment cinétique en  $O$  pour le cylindre intérieur, en déduire le couple moteur  $\mathcal{C}$  qu'il faut exercer sur ce cylindre pour maintenir sa vitesse de rotation constante.  
*Remarque :* dans le cas d'une configuration stationnaire, la conservation du moment cinétique se réduit à la nullité de la somme des moments des forces et des couples exercés sur le système étudié.
  9. En déduire une technique de mesure de la viscosité du fluide (*viscosimètre de Couette*). On donnera l'expression de la viscosité en fonction du couple  $\mathcal{C}$  et de la vitesse angulaire  $\Omega$ .

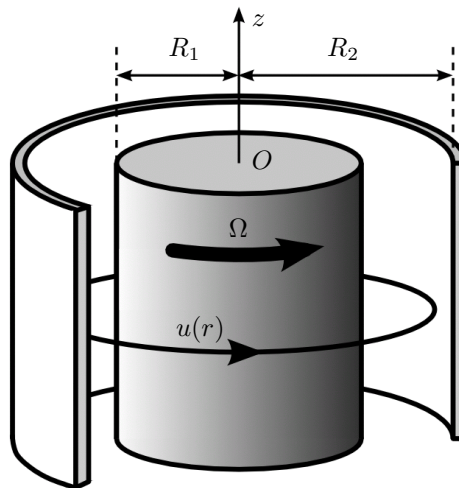


FIGURE 3 – Écoulement de Couette entre cylindres concentriques.

10. **Question subsidiaire :** on peut retrouver la solution de Couette cylindrique (question 4c) par une méthode plus directe :
  - (a) écrire la conservation du moment cinétique en  $O$  de la couronne de fluide comprise entre  $r$  et  $r + dr$  et en déduire une équation pour les contraintes tangentielles  $\tau_{r\theta}(r)$  (cf la remarque de la question 8).
  - (b) Déterminer alors le profil des contraintes tangentielles  $\tau_{r\theta}(r)$ .
  - (c) En remarquant qu'un fluide en rotation solide ne subit pas de déformation, donner une interprétation physique de l'expression des contraintes tangentielles  $\tau_{r\theta} = \partial u / \partial r - u/r$ .
  - (d) Retrouver ensuite l'équation pour la vitesse  $u$  obtenue à la question 4c.

*Remarque :* la solution théorique de Couette est effectivement observée dans les expériences. Cependant cet écoulement devient instable lorsque le cylindre intérieur possède une vitesse de rotation supérieure à une valeur critique. L'écoulement solution décrit dans ce problème devient alors instable et c'est une autre solution des équations de Navier–Stokes qui est observée, sous la forme de tourbillons contra-rotatifs annulaires dits de Taylor–Couette (fig. 4a). Pour des vitesses de rotation encore plus élevées une instabilité secondaire se manifeste par des oscillations des tourbillons de Taylor–Couette (fig. 4b).

#### 4.4 Écoulement d'un film liquide d'épaisseur uniforme \*

On considère un film liquide d'épaisseur uniforme s'écoulant sur un plan incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale. Soit  $q$  le débit-volume imposé par unité de largeur.

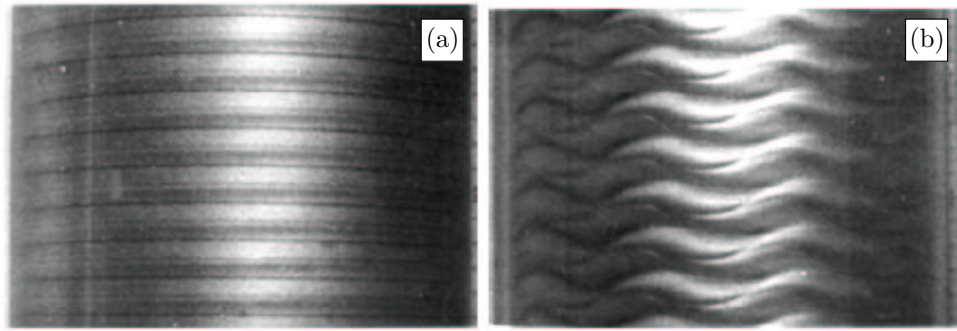


FIGURE 4 – *Instabilité de Taylor–Couette (a) et instabilité secondaire (b).*

1. Déterminer le profil des vitesses  $u(y)$  en fonction de l'épaisseur  $h$ .
2. Déterminer l'épaisseur  $h$  du film en fonction du débit  $q$ , ainsi que la vitesse maximale  $u_{max}$  et la vitesse moyenne  $U$ .

On définit le nombre de Reynolds du film par  $Re = \rho u_{max} h / \mu$  et une analyse de stabilité linéaire du film uniforme montre que l'écoulement est stable si

$$Re < Re_c = \frac{5}{4 \tan \theta}$$

(au-delà une petite perturbation est amplifiée et des vagues apparaissent).

3. Quel est le débit maximal d'un film stable sur un plan incliné de 30 degrés ? Un film vertical peut-il être stable ?
4. Une qualité essentielle d'une bonne peinture est qu'une fois appliquée sur son support, elle "ne coule pas". Ceci peut être réalisé si la peinture n'est pas un fluide newtonien, et ne s'écoule que si la contrainte de cisaillement est supérieure à un seuil. Si le seuil d'écoulement est  $\tau_c = 1$  Pa, quelle est l'épaisseur maximale d'une couche de peinture ne coulant pas sur un mur vertical ?

#### 4.5 Documentation : solutions exactes de l'équation de Navier–Stokes

Vous trouverez en fin de document (page 23) un tableau recensant quelques solutions exactes de l'équation de Navier–Stokes.

## 5 Ecoulements visqueux II

### 5.0 Aéroglissage

(Exercice préparatoire ; correction détaillée sur moodle)

### 5.1 Coulée de lave

On considère une coulée de lave le long d'une pente d'angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (fig. 5a). Cet écoulement de lave est de faible épaisseur par rapport à sa longueur, et prend la forme d'un film mince dont la surface libre est donnée par  $y = h(x, t)$ , où  $y$  est la direction perpendiculaire à la pente de direction  $x$ . Sous l'effet de la pesanteur, la coulée s'étale en s'écoulant, entre les points d'abscisses  $x = 0$  et  $x = X(t)$ , ce dernier correspondant au front de la coulée. L'objectif est ici de déterminer la loi de propagation du front de la coulée.

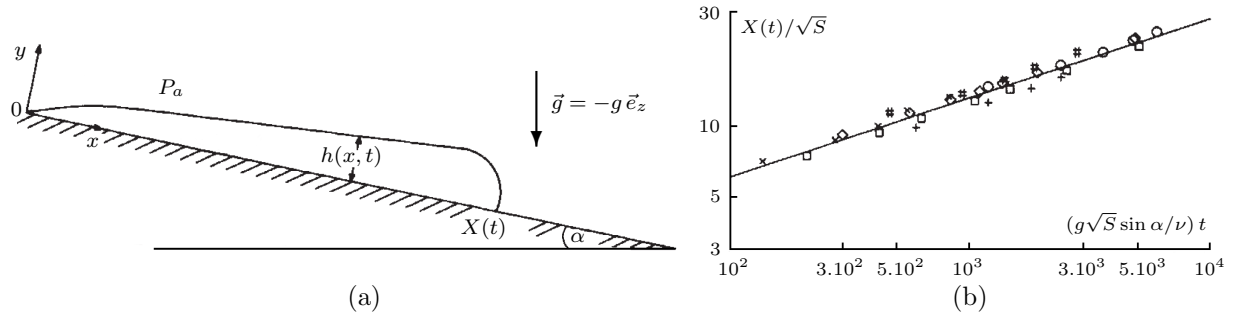


FIGURE 5 – (a) : schéma de la coulée de lave. (b) : comparaison entre expérience (symboles) et prédiction théorique (droite de pente 1/3 en échelle logarithmique). D'après Huppert (*Nature* **300**, 427–429, 1982).

On supposera en première approximation que la lave est constituée d'un fluide homogène, de masse volumique  $\rho$  uniforme, et newtonien, de viscosité cinématique  $\nu$ . Dans l'hypothèse d'un écoulement incompressible, il est possible d'utiliser dans cette configuration les équations de film mince pour la vitesse  $\vec{u} = u(x, y, t) \vec{e}_x + v(x, y, t) \vec{e}_y$  et la pression motrice  $\hat{p} = p - \rho \vec{g} \cdot \vec{x}$  au point  $\vec{x}$  de coordonnées  $(x, y)$  :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}, \quad (2) \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0, \quad (3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{où } \mu = \rho \nu \text{ désigne la viscosité dynamique.}$$

1. Montrer que la pression motrice s'écrit  $\hat{p} = p(x, y, t) + \rho g(y \cos \alpha - x \sin \alpha)$ .
2. En écrivant la continuité de la pression à l'interface  $y = h(x, t)$ , déduire de l'équation (2) que la pression au sein de la coulée a pour expression  $p(x, y, t) = P_a + \rho g \cos \alpha [h(x, t) - y]$  où  $P_a$  désigne la pression atmosphérique. En déduire la pression motrice  $\hat{p}$ .
3. Dans l'hypothèse de film mince, on peut supposer que  $|\partial h / \partial x| \ll \tan \alpha$  pour  $\alpha > 0$ . Montrer alors que  $\partial \hat{p} / \partial x = -\rho g \sin \alpha$  en première approximation.
4. Dans ces conditions, résoudre l'équation (1) et montrer que  $u(x, y, t) = -g \sin \alpha y^2 / 2\nu + Ay + B$  où  $A$  et  $B$  sont deux fonctions de  $x$  et  $t$  à déterminer d'après les conditions aux limites en  $y = 0$  et  $y = h(x, t)$ . On négligera les frottements de l'air sur la coulée de lave.
5. Calculer le débit volumique le long de la coulée de lave :  $q(x, t) = \int_0^{h(x, t)} u(x, y, t) dy$ .
6. Montrer que la conservation de la masse implique que  $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$ . On pourra admettre ce résultat.
7. Déduire des questions précédentes que  $h(x, t)$  vérifie l'équation :  $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g \sin \alpha}{\nu} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ .
8. Aux temps longs, on peut rechercher une solution, dite *autosimilaire*, de la forme  $h(x, t) = h_0 \sqrt{x/t}$  où  $h_0$  est à déterminer en injectant ce type de solution dans l'équation pour  $h$ .
9. Le volume de cette coulée de lave étant fixé,  $S = \int_0^{X(t)} h(x, t) dx$  est une constante du problème.

En déduire que la loi de propagation du front de lave s'écrit  $X(t) = \sqrt{S} (t/\tau)^{1/3}$  où  $\tau$  est un temps caractéristique à déterminer en fonction des paramètres du problème (cf. fig. 5b).

(d'après partiel 2011)

## 5.2 Drainage d'un film liquide sur une paroi verticale \*

Un plan rigide mouillé par un mince film liquide d'épaisseur uniforme est dressé verticalement ; le liquide est alors drainé vers le bas par la gravité.

1. Montrer que l'épaisseur  $h$  à la distance  $x$  du bord supérieur de la plaque satisfait l'équation approchée

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{h^2}{h_0^2} \frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

où  $V = \rho g h_0^2 / \mu$ .

2. Montrer qu'à l'instant  $t$  après le début du drainage

$$h = h_0 \sqrt{x/Vt} \quad \text{pour} \quad x \leq Vt, \quad h = h_0 \quad \text{pour} \quad x \geq Vt.$$

## 5.3 Drainage entre deux disques rapprochés (d'après examen 2004) \*

Deux disques circulaires plans de rayon  $R = 5$  cm sont disposés parallèlement (fig. 6) l'un au-dessus de l'autre. Dans l'espace entre les disques se trouve une huile de viscosité dynamique  $\mu = 6.26$  Pa s et de masse volumique  $\rho = 1230$  kg/m<sup>3</sup>. On considère que l'épaisseur de fluide  $h$  entre les deux disques reste très petite devant le rayon  $R$  :  $h \ll R$ . L'épaisseur  $h_0$  à l'instant initial ( $t = 0$ ) est égale à  $h_0 = 0,5$  cm. La pression à l'extérieur des disques correspond à la pression atmosphérique  $P_a$ .

On exerce une force  $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_z$  sur le disque supérieur afin de chasser latéralement le fluide. Cette force impose au disque supérieur une vitesse  $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_z$ , le disque inférieur restant fixe.

Dans un premier temps, on se propose de déterminer l'intensité  $F(t)$  de la force qu'il faut exercer pour maintenir *constante* la vitesse  $U = 0,5$  mm/s du disque supérieur. On s'attachera ensuite à décrire en détail l'écoulement entre les deux disques.

La couche de fluide étant mince et le problème axisymétrique, on considère que la pression ne dépend ni de  $z$  ni de l'angle azimutal  $\theta$ , soit  $p = p(r, t)$ , et on cherche un champ de vitesse s'écrivant :  $\mathbf{u} = u_r(r, z, t)\mathbf{e}_r + u_z(r, z, t)\mathbf{e}_z$ .

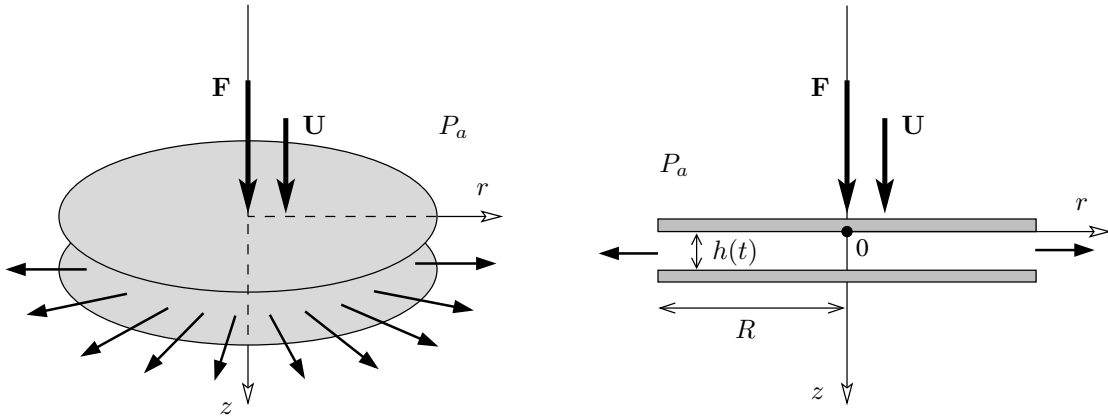


FIGURE 6 – Ecoulement visqueux entre deux disques.

Les relations ci-dessous donnent, en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , la composante radiale de l'équation du mouvement (2) et l'équation d'incompressibilité (3) :

$$\rho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right], \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

1. (a) En choisissant  $U$  et  $R$  respectivement comme échelles caractéristiques de vitesse et de longueur, calculer la valeur du nombre de Reynolds pour cet écoulement. Commenter.  
(b) Montrer que l'équation du mouvement peut se simplifier sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right]. \quad (4)$$

- (c) On cherche à simplifier davantage l'équation ci-dessus. En choisissant comme échelles de longueur  $h$  suivant  $z$ , et  $R$  suivant  $r$ , pour estimer l'ordre de grandeur des dérivées partielles, et sur la base de l'hypothèse simplificatrice  $h \ll R$ , simplifier le terme de droite de l'équation (4). A l'aide des conditions aux limites (adhérence aux parois), en déduire l'expression de la vitesse radiale  $u_r$  en fonction du gradient radial de pression.
2. On admet pour la vitesse radiale l'expression suivante :

$$u_r(r, z, t) = \frac{1}{2\mu} z[z - h(t)] \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (5)$$

- (a) En injectant cette expression dans l'équation d'incompressibilité (3), déterminer  $u_z(r, z, t)$  en fonction de  $\mu$ ,  $h$ ,  $\partial p / \partial r$  et  $\partial^2 p / \partial r^2$ .
- (b) A l'aide des conditions aux limites sur  $u_z$  en  $z = 0$  et  $z = h(t)$ , en déduire l'équation différentielle que doit vérifier  $p$ .
- (c) Montrer alors que la pression au sein du fluide a pour expression :

$$p(r, t) = P_a + \frac{3\mu U}{h(t)^3} (R^2 - r^2). \quad (6)$$

3. (a) Déterminer le module  $F$  de la force pressante nécessaire pour maintenir la vitesse  $U$ .
- (b) Donner l'expression de  $h(t)$  en fonction de  $U$  et  $h_0$ .
- (c) Tracer et commenter la courbe  $F(t)$ .
- (d) Sachant que le disque supérieur schématise le piston d'un vérin qui admet pour pression maximale  $P_m = 10^7$  Pa, déterminer l'épaisseur minimale  $h_m$  de fluide que l'on ne peut éliminer en maintenant la vitesse  $U$ , et le temps  $t_m$  nécessaire pour effectuer cette vidange partielle de l'interdisque. Faire l'application numérique.
4. (a) Connaissant dorénavant le champ de pression (6) dans l'écoulement, déterminer complètement la vitesse radiale  $u_r$  en tout point  $(r, z)$  de l'interdisque.
- (b) Tracer la courbe donnant le profil de vitesse  $u_r$  en fonction de la variable sans dimension  $z/h$  pour différentes valeurs du temps  $t$  ( $0 \leq t \leq t_m$ ).
- (c) Etablir l'expression de la composante axiale de la vitesse,  $u_z(r, z, t)$ .
- (d) Déterminer la tangente de l'angle ( $\beta$ ) que fait le vecteur vitesse du fluide avec le plan horizontal. En déduire schématiquement l'allure des lignes de courant dans l'interdisque.
5. (a) Déterminer le débit volumique de fluide s'écoulant *radialement* vers l'extérieur des deux disques. Discuter le résultat obtenu.
- (b) Déterminer le débit volumique de fluide s'écoulant à travers une section normale à l'axe des disques (autrement dit, *horizontale*). Tracer ce débit en fonction de  $z/h$  et commenter.

## 5.4 Adhésion de deux plaques immergées dans un fluide \*\*

On considère deux disques circulaires immergées dans un fluide, séparées par un film mince d'épaisseur  $h(t)$ . Déterminer, dans l'approximation quasi-statique, la vitesse de séparation des deux disques pour une force de séparation  $F$  donnée. Vérifier que l'approximation quasi-statique est justifiée.

## 6 Exercices de synthèse

### 6.1 Goutte-à-goutte (d'après examen 2005) \*

On considère un système de goutte-à-goutte vertical tel que présenté sur la figure 8(a) : une poche en plastique déformable permet de maintenir la réserve de liquide en entrée du dispositif à la pression atmosphérique  $P_{\text{atm}}$  tout au long de la vidange. Le liquide s'écoule sous l'effet de la gravité dans un tube capillaire vertical, de rayon  $a$  et de longueur  $L$ , et débouche dans l'air à la pression atmosphérique, en formant des gouttes qui se détachent périodiquement.

L'objectif de cette étude est de prédire le régime de fonctionnement de ce système, d'une part en détaillant l'écoulement dans le capillaire, puis en caractérisant la formation et le détachement des gouttes d'autre part. Le liquide utilisé a des caractéristiques physiques proches de celles de l'eau : masse volumique  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ , viscosité dynamique  $\mu = 10^{-3} \text{ kg/m/s}$ . On prendra pour l'accélération de la pesanteur  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

1. Quelle est la valeur numérique de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide ?
2. Sachant que le rayon typique du capillaire est de l'ordre du millimètre et que les débits attendus sont inférieurs au millilitre par seconde, justifiez que l'écoulement dans le capillaire est a priori laminaire. Vous exprimerez le nombre de Reynolds  $Re$  en fonction du débit volumique  $q$ , de la viscosité cinématique  $\nu$  et du rayon  $a$ .
3. En considérant un bilan de quantité de mouvement pour le fluide contenu dans le volume de contrôle élémentaire de rayon  $r$  et de longueur  $dz$  (fig. 8b) et en justifiant l'hypothèse d'un écoulement stationnaire, montrez que la contrainte tangentielle dans le liquide s'écoulant dans le capillaire est donnée par :

$$\tau(r) = \frac{1}{2} \rho g r \quad (7)$$

En particulier, vous démontrerez au passage que la pression dans le capillaire peut être considérée comme constante  $p(z) = P_{\text{atm}}$ , en justifiant que pour un tube de longueur  $L$  de l'ordre du mètre, le saut de pression au niveau de la goutte en extrémité de capillaire est effectivement négligeable.

4. En déduire la valeur maximale de la contrainte tangentielle  $\tau_{\text{max}}$  : où s'applique-t-elle ? Calculez alors la force de frottement  $F$  exercée par le liquide sur toute la longueur du capillaire.
5. On suppose dans cette question uniquement que le liquide considéré est un fluide à seuil de contrainte seuil  $\tau_c = 0.5 \text{ Pa}$ . Comment qualifie-t-on un tel fluide et quel rayon minimal  $a_c$  le capillaire doit-il avoir pour que le liquide puisse s'écouler ? Calculez la valeur numérique de  $a_c$ . En considérant le cas particulier  $a = 2a_c$ , tracez qualitativement (sans le calculer) le profil de vitesse de l'écoulement dans le capillaire. Comment appelle-t-on ce type d'écoulement ?

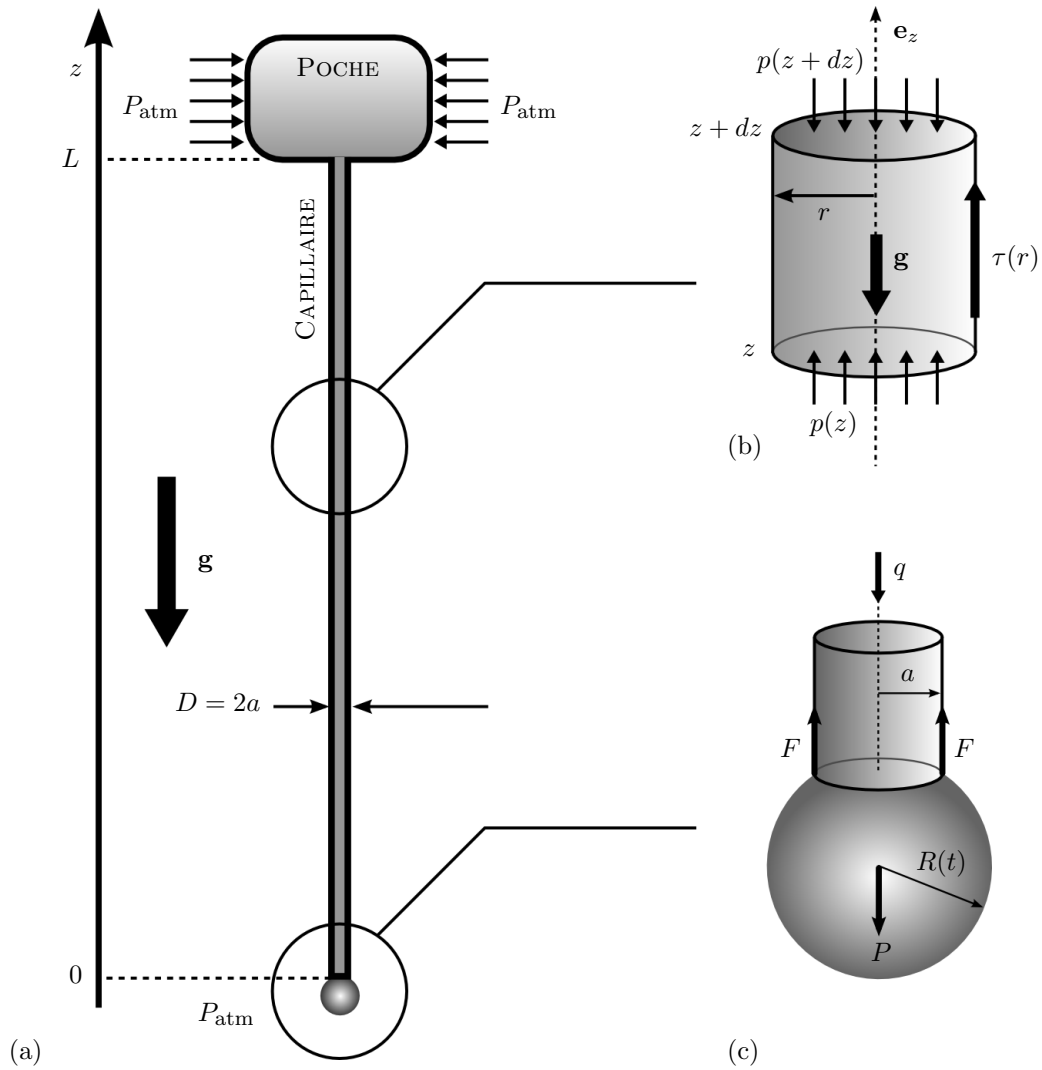


FIGURE 7 – Schéma descriptif d'un goutte-à-goutte (a). Zoom sur un volume de contrôle dans le capillaire (b). Zoom sur la formation d'une goutte en sortie de capillaire (c).

6. On considère à partir de maintenant que le liquide est en fait un fluide newtonien.
  - (a) Quelle est la valeur de la contrainte seuil  $\tau_c$  pour ce genre de fluide ?
  - (b) En supposant que  $L \gg a$ , justifiez en quelques points pourquoi on peut a priori chercher une solution d'écoulement dans le capillaire de la forme  $\mathbf{u} = u(r) \mathbf{e}_z$ .
  - (c) Pour ce fluide newtonien, rappelez la relation qui lie la contrainte tangentielle  $\tau(r)$  au cisaillement  $\partial u / \partial r$ . Quelle est l'origine de cette relation et quel nom donne-t-on à ce genre de loi ?
  - (d) Déterminez et tracez le profil de vitesse  $u(r)$ .
  - (e) En déduire l'expression littérale de la vitesse maximale  $u_{\max}$ , de la vitesse moyenne  $\bar{u}$  et du débit volumique  $q$  en fonction de  $g$ ,  $a$  et  $\nu$ . Faites l'application numérique pour  $a = 0.5$  mm.
  - (f) Donnez alors l'expression littérale du nombre de Reynolds  $Re$  en fonction de  $a$ ,  $g$  et  $\nu$  uniquement, et vérifiez que l'écoulement est bien laminaire pour  $a = 0.5$  mm.
7. En sortie de capillaire ( $z = 0$ ), le liquide débouche dans l'air à pression atmosphérique en formant une goutte pendante qui grossit avant de se détacher une fois atteinte une taille critique, et ce de façon périodique au cours du temps. On considérera que la tension superficielle du liquide avec l'air est celle de l'eau ( $\gamma = 0.07$  Pa m).
  - (a) Rappelez la définition du nombre de Bond  $Bo$  et son interprétation physique. Même question pour la longueur capillaire  $l_c$ . Donnez sa valeur en millimètres pour le cas étudié ici.
  - (b) En supposant que le rayon  $a$  du capillaire est a priori inférieur au millimètre, proposez alors une amorce de justification, en quelques mots, de la formation de goutte en sortie du capillaire.



8. On souhaite maintenant prédire le rayon  $R_c$  de la goutte lorsqu'elle se détache du capillaire. Pour cela une première estimation peut être obtenue en assimilant à chaque instant la goutte à une sphère de rayon  $R(t)$  qui croît au cours du temps : la goutte se détachera dès que son poids  $P$  sera plus important que la force de tension superficielle  $F$  qui la maintient attachée au capillaire (fig. 8).
  - (a) Donnez l'expression de  $F$  en fonction de  $a$  et  $\gamma$ , puis de  $P$  en fonction de  $R$ ,  $\rho$  et  $g$ .
  - (b) En déduire la taille  $R_c$  de la goutte lorsqu'elle se détache, en fonction de  $a$ ,  $\rho$ ,  $g$  et  $\gamma$  puis en fonction de  $a$  et  $l_c$  uniquement. Faites l'application numérique pour  $a = 0.5$  mm.
9. Pour finir, on souhaite prédire la fréquence de détachement des gouttes. Pour cela il faut connaître la loi d'évolution temporelle du rayon de la goutte  $R(t)$ .
  - (a) En notant que le débit volumique dans le capillaire  $q$ , supposé connu et constant, alimente en continu la goutte en bout de tube, montrez que :

$$\frac{dv}{dt} = q, \quad \text{où } v = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ désigne le volume instantané de la goutte} \quad (8)$$

- (b) En supposant le volume de la goutte considérée nul à l'instant  $t = 0$ , calculez alors  $R(t)$  en fonction de  $q$  et  $t$ . Vous montrerez en particulier que le rayon de la goutte varie comme  $t^{1/3}$ .
- (c) En déduire le temps de détachement  $t_d$  de la goutte en fonction de  $q$ ,  $a$  et  $l_c$ . Même question pour la fréquence de détachement  $f_d$ . Faites l'application numérique avec les données du problème.

## 6.2 Vitesse de gouttes et particules en chute libre (mars 2017)

On considère une particule sphérique de rayon  $a$ , masse volumique  $\rho_p$  qui se déplace verticalement à vitesse constante sous l'effet de la gravité  $g$  dans un fluide de viscosité dynamique  $\mu$  et masse volumique  $\rho_f$ . On cherche à estimer la vitesse  $U$  de celle-ci.

1. Question de cours : qu'appelle-t-on Régime de Stokes ? Sous quelles hypothèses est-on dans ce régime ? Quelles sont les principales propriétés des écoulements de Stokes ?
2. Dans le régime de Stokes la résolution exacte du problème permet de montrer que la force de traînée  $F_x$  exercée sur une particule sphérique est  $F_x = 6\pi\mu aU$ .  
Par un raisonnement dimensionnel, justifiez la forme de cette expression (on ne demande pas de démontrer le facteur  $6\pi$ ).
3. Par un bilan des forces exercées sur la particule (traînée, poids et poussée d'Archimède), déterminez la vitesse de la particule prédite par cette formule.  
Application numérique dans les 4 cas suivants :
  - (a) Gouttelette de brouillard ( $a = 10\mu\text{m}$ ,  $\rho_p = 1000\text{kg/m}^3$ ) en chute dans de l'air ( $\rho_f = 1.225\text{kg/m}^3$ ,  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ ).
  - (b) Bulle d'air ( $a = 0.1\text{mm}$ ,  $\rho_p = 1\text{g/cm}^3$ ) dans de l'eau douce ( $\rho_p = 1\text{kg}/\ell$ ,  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ ).
  - (c) bille d'acier ( $a = 1\text{cm}$ ,  $\rho = 8.15\text{g/cm}^3$ ) dans du miel ( $\rho = 1.42\text{g/cm}^3$ ,  $\mu = 10\text{Pa} \cdot \text{s}$ ).
  - (d) ballon de foot de rayon  $a = 11\text{cm}$  et masse  $m = 425\text{g}$  en chute dans de l'air ( $\rho_f = 1.225\text{kg/m}^3$ ,  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ ).
4. Calculez le nombre de Reynolds dans les cas (a), (b), (c) et (d), et justifiez a posteriori si l'on est bien dans le régime de Stokes. Dans le cas contraire pensez-vous que la vitesse réelle est plus ou moins élevée que le calcul précédent ?
5. Dans le régime inertiel ( $Re > 1000$ ), la formule de Stokes donnée à la question 2 peut être remplacée par une loi empirique de la forme :  $F_x = \frac{C_x}{2}\rho\pi a^2 U^2$  où  $C_x$  est un coefficient (sans dimensions) qui vaut approximativement 0.5.  
Justifiez par un raisonnement dimensionnel la forme de cette expression (on ne demande pas le calcul exact du  $C_x$  !)
6. Cette formule permet-elle de prédire une valeur plus réaliste de la vitesse pour un (ou plusieurs) des cas (a – d) discutés précédemment ?
7. Dans les cas (a) et (b) Justifiez que la gouttelette et la bulle gardent bien une forme sphérique au cours de leur mouvement.  
On donne la valeur de la tension de surface :  $\gamma = 0.07\text{N/m}$ .

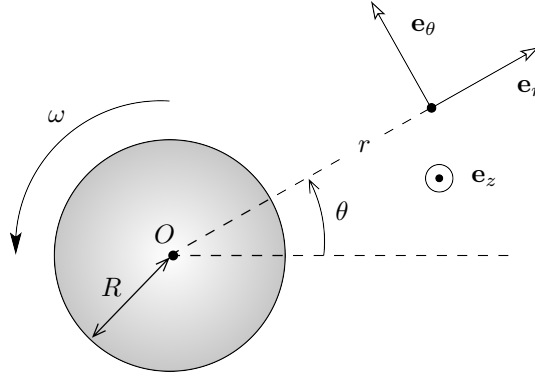


FIGURE 8 – Cylindre en rotation

### 6.3 Écoulement autour d'un cylindre en rotation (d'après partiel 2010) \*

On considère un cylindre solide de rayon  $R$  et de grande longueur  $L$  suivant son axe  $Oz$ , vertical. Ce cylindre baigne dans un liquide de masse volumique  $\rho$  et de viscosités cinématique  $\nu$  et dynamique  $\mu$ .

Le cylindre est relié à un moteur qui, mis en route à  $t = 0$ , lui impose une vitesse angulaire constante  $\omega$  (rad/s) autour de son axe  $Oz$  (fig. 7).

1. Expliquer en quelques mots pourquoi et comment le liquide initialement au repos va se mettre en mouvement. On précisera en particulier le mode de transport de la quantité de mouvement impliqué. Imaginer les lignes de courant de l'écoulement ainsi généré (faire un dessin).
2. Après un régime transitoire de mise en mouvement du liquide, l'écoulement tend à devenir stationnaire dans le voisinage du cylindre. Quel pourrait être une première approximation de l'ordre de grandeur de la durée  $\tau$  du régime transitoire ?

On s'intéresse dorénavant au régime quasi permanent aux temps longs  $t \gg \tau$ . On rappelle que les équations d'un écoulement incompressible plan en coordonnées polaires  $\mathbf{u} = u(r, \theta, t) \mathbf{e}_r + v(r, \theta, t) \mathbf{e}_\theta$  s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (11)$$

3. Justifier brièvement pourquoi il est a priori légitime de rechercher une solution d'écoulement purement azimutal et axisymétrique, de la forme  $\mathbf{u} = v(r) \mathbf{e}_\theta$ .
4. En injectant ce type de solution dans les équations du mouvement, montrer dans un premier temps que le champ de pression ne dépend que de  $r$ .
5. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par  $v(r)$  en prenant en compte les conditions aux limites d'adhérence à la paroi imperméable du cylindre en rotation et de décroissance du champ de vitesse loin du cylindre.
6. Montrer qu'il s'agit d'un écoulement irrotationnel. On rappelle que le rotationnel en cylindriques pour un champ bidimensionnel  $\mathbf{F} = F_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + F_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta$  se réduit à

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z$$

7. Calculer le champ de pression  $p(r)$ . On notera  $P_0$  la pression loin du cylindre.

Bien que le terme visqueux  $\nu \Delta \mathbf{u}$  soit nul pour cet écoulement, ce n'est pas le cas pour les contraintes visqueuses au sein du fluide. On rappelle que le tenseur des contraintes en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)$$

8. Calculer le tenseur  $\vec{\tau}$  des contraintes visqueuses.

9. Déterminer la force élémentaire  $d\mathbf{f}$  exercée par le fluide sur un élément de surface  $dS$  de la paroi du cylindre.
10. Donner l'expression du moment en  $O$ , noté  $d\mathbf{M}_O$ , de cette force élémentaire puis du moment résultant en  $O$ , noté  $\mathbf{M}_O$ , de la force de frottement exercée par le fluide sur toute la surface du cylindre.
11. En déduire le couple  $\mathbf{C}$  que devrait imposer le moteur au cylindre pour maintenir la rotation à vitesse angulaire  $\omega$  constante. Quelle est la puissance dissipée  $\mathcal{P}$  ?

**Questions complémentaires :** Le liquide dans lequel est plongé le cylindre possède une surface libre avec l'air extérieur à pression atmosphérique  $P_{atm}$ . Au repos (cylindre immobile) cette surface se trouve à l'altitude  $z = h_0$ . On cherche ici à prédire comment la mise en mouvement du cylindre va déformer cette surface libre. Le champ de vitesse déterminé précédemment n'est pas modifié et conserve la même expression  $v(r)$ . Ce n'est pas le cas pour le champ de pression, qu'il faut recalculer en notant que la dépendance de la pression suivant la verticale est maintenant affectée par la prise en compte de la pesanteur :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

12. Reprendre la question 7 pour calculer le champ de pression  $p(r, z)$  dans le liquide.
13. En négligeant les effets de tension de surface, déterminer la forme de la surface libre  $z = h(r)$ . Tracer qualitativement la forme de surface libre.

On cherche pour finir à déterminer l'influence d'un cylindre extérieur sur le couple à imposer au cylindre principal pour le maintenir à vitesse angulaire constante  $\omega$ . On considère donc que le liquide est confiné entre le cylindre principal de rayon  $R$  et un second cylindre *immobile* de rayon  $R^* > R$ .

14. Reprendre les questions 3 à 5 pour calculer le champ de vitesse  $v^*(r)$ .
15. Calculer la contrainte visqueuse exercée par le liquide sur la paroi du cylindre principal et en déduire que le moment résultant en  $O$  par unité de longueur du frottement visqueux sur le cylindre est de la forme

$$\mathbf{M}_O^* = -4\pi\mu^*\omega R^2 \mathbf{e}_z$$

où  $\mu^*$  est une fonction de  $\mu$ ,  $r$  et  $R^*$  à déterminer.

16. Comparer le couple qu'il faut imposer ici pour maintenir une vitesse angulaire  $\omega$  constante par rapport au cas précédent où le second cylindre est absent.

## 6.4 Amortisseur hydraulique (mars 2017)

On considère un amortisseur constitué d'un piston de rayon  $R = 20$  mm et de longueur  $L = 20$  mm coulissant dans un cylindre de rayon  $R + a$ , avec  $a = 0.1$  mm. Ce cylindre est rempli d'une huile de viscosité dynamique  $\mu = 0.1$  Pa.s.

On veut déterminer la relation entre la force  $F$  appliquée sur le piston et sa vitesse  $V$  par rapport au cylindre. Le fluide dans les deux chambres supérieure et inférieure au piston sera considéré au repos. L'écoulement, dans l'interstice (le jeu) entre les parois latérales du piston et du cylindre, est visqueux (newtonien), stationnaire et établi. Il sera approximé *localement* par l'écoulement établi entre deux plaques planes distantes de  $a$ , de longueur  $L$ , de largeur  $2\pi R$  (périmètre *déroulé*). On considérera que les pressions  $p_i$  et  $p_a$  dans les chambres inférieure et supérieure sont uniformes, et que la contribution hydrostatique, d'ordre  $\rho g L$ , est négligeable devant  $p_i - p_a$ .

1. On cherche une solution « plane »  $u = u(y)$  avec  $y = r - R$  pour la vitesse axiale dans l'interstice entre le piston et le cylindre. Expliquer succinctement pourquoi on peut négliger localement les effets de courbure sur le profil de vitesse et approximer  $u$  par  $u(y)$  (au lieu de  $u(r, \theta, x)$  !)
2. Montrer que dans le jeu (interstice) entre le piston et le cylindre l'écoulement est gouverné par le système différentiel

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Qu'en déduit-on sur la pression et son gradient suivant  $x$  ?

3. Établir l'expression du profil de vitesse  $u(y)$  et montrer qu'il correspond à la somme d'un écoulement de Poiseuille proportionnel à  $-\partial p / \partial x$  et d'un écoulement de Couette proportionnel à  $V$ .

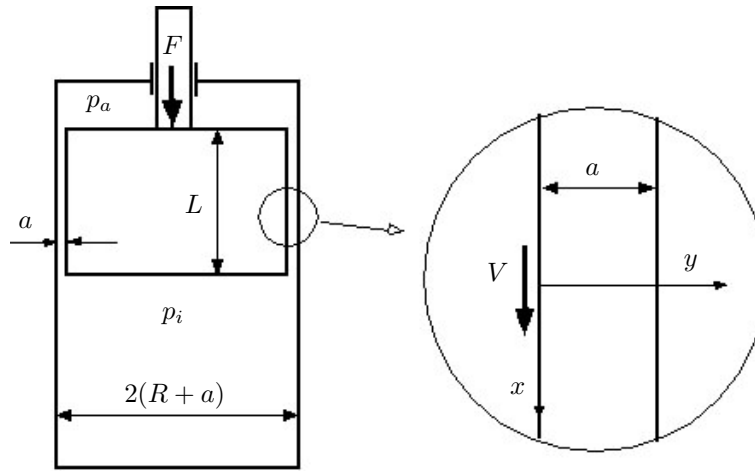


FIGURE 9 – Schéma de l'amortisseur hydraulique.

4. Calculez le débit volumique à travers l'interstice. On distinguera la contribution  $Q_p$  associée à l'écoulement de Poiseuille et la contribution  $Q_c$  associée à l'écoulement de Couette.
5. Montrer que le débit volumique chassé par le piston est égal à  $Q = \pi R^2 V$ .
6. En déduire que le gradient de pression est donné (à l'ordre dominant) par  $(p_i - p_a)/L = 6\mu RV/a^3$ .

On justifiera au passage que le débit associé à l'écoulement de Couette est négligeable devant celui associé à l'écoulement de Poiseuille.

7. Montrez que la force exercée sur le piston se compose de trois termes, notés respectivement  $F_P$  (résultante des efforts de pression),  $F_{v,c}$  (résultante des contraintes visqueuses associées à l'écoulement de Couette), et  $F_{v,p}$  (résultante des contraintes visqueuses associées à l'écoulement de Poiseuille).

Exprimez  $F_P$ ,  $F_{v,c}$  et  $F_{v,p}$  en fonction des données du problème.

8. Comparez l'ordre de grandeur de ces trois forces, et montrez qu'à l'ordre dominant la force totale a pour expression  $F = 6\pi\mu V \frac{R^3}{a^3}$ .
9. Application : Quelle force faut-il appliquer pour imprimer une vitesse de  $1\text{ cm/s}$  au piston ? L'écoulement est-il laminaire ?

## A Equations de Navier–Stokes

### A.1 Equations générales

On considère ici l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien, de viscosité cinématique  $\nu = \mu/\rho$ , soumis à la force volumique  $\vec{f}$ .

**Equations de Navier-Stokes**

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} = \frac{1}{\rho} \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{u}$$

**Écoulement incompressible**

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

**Tenseur des contraintes**

$$\sigma = -p \mathbf{1} + \tau \quad \text{avec} \quad \tau = 2\mu \mathbf{D} = \mu (\text{grad } \vec{u} + \text{grad } \vec{u})$$

### A.2 Coordonnées cartésiennes

**Equations de Navier-Stokes**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

**Écoulement incompressible**

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

**Tenseur des contraintes**

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} & \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} & \sigma_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} & \sigma_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

### A.3 Coordonnées cylindriques

### Equations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} &= \frac{1}{\rho} f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\
&+ \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \\
\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= \frac{1}{\rho} f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
&+ \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\
\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\
&+ \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]
\end{aligned}$$

### Ecoulement incompressible

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

### Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & \sigma_{r\theta} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\
\sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \sigma_{\theta z} &= \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\
\sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} & \sigma_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

---

## A.4 Coordonnées sphériques

---

## B Quelques formules utiles d'analyse vectorielle et tensorielle

### B.1 Formules de dérivation d'un produit (généralisations de $(fg)' = f'g + fg'$ ) :

$$\text{grad}(fg) = f\text{grad}g + g\text{grad}f$$

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{\text{grad}}(\vec{A}) \cdot \vec{B} + \vec{\text{grad}}(\vec{B}) \cdot \vec{A} + \vec{A} \wedge \text{r\^ot}(\vec{B}) + \vec{B} \wedge \text{r\^ot}(\vec{A})$$

$$\text{div}(f\vec{A}) = f\text{div}\vec{A} + \text{grad}(f) \cdot \vec{A}$$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \text{r\^ot}(\vec{A}) - \vec{A} \text{r\^ot}(\vec{B})$$

$$\text{r\^ot}(f\vec{A}) = f \text{r\^ot}(\vec{A}) + \vec{A} \wedge \text{r\^ot}(f)$$

$$\text{div}(\vec{A} \otimes \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\vec{A}) \cdot \vec{A} + \vec{A} \text{div}\vec{A}$$

$$\text{r\^ot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{\text{grad}}(\vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{\text{grad}}(\vec{B}) \cdot \vec{A} + \vec{A} \text{div}(\vec{B}) - \vec{B} \text{div}(\vec{A})$$

$$(\vec{u} \cdot \text{grad})\vec{u} = \left(\vec{\text{grad}}\vec{u}\right) \cdot \vec{u} = \text{grad}(|\vec{u}|^2/2) + \text{r\^ot}(\vec{u}) \wedge \vec{u}$$

### B.2 Formules de dérivée seconde (généralisations de $(f')' = f''$ ) :

$$\text{div}(\text{grad}f) = \Delta f$$

$$\text{r\^ot}(\text{grad}f) = \vec{0}$$

$$\text{div}(\text{r\^ot}(\vec{A})) = 0$$

$$\text{r\^ot}(\text{r\^ot}(\vec{A})) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

$$\vec{\text{div}}(\vec{\text{grad}}\vec{A}) = \Delta\vec{A}$$

$$\vec{\text{div}}(\vec{\text{grad}}\vec{A} + {}^t\vec{\text{grad}}\vec{A}) = \Delta\vec{A} + \text{grad}(\text{div}\vec{A})$$

### B.3 Formules d'intégration (généralisations de $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ ) :

Pour un volume  $\Omega$  de frontière  $\Sigma$ , en utilisant la convention de la normale sortante

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{A})dV = \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n}dS$$

$$\int_{\Omega} \vec{\text{div}}(\vec{\vec{A}})dV = \oint_{\Sigma} \vec{\vec{A}} \cdot \vec{n}dS$$

$$\int_{\Omega} \text{grad}f dV = \oint_{\Sigma} f\vec{n}dS$$

$$\int_{\Omega} \text{r\^ot}(\vec{A})dV = \oint_{\Sigma} \vec{A} \wedge \vec{n}dS$$

## C Quelques solutions exactes

(Quelques) solutions exactes des équations de Navier-Stokes			
Schéma	Caractéristiques	Solution	Nom de l'écoulement
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{Uy}{h}$ $p = C^{te}$	Couette plan sans gradient de pression ( $\partial p / \partial x = 0$ )
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h-y)$	Poiseuille plan
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ avec $u(y) = U \left[ \frac{y}{h} - K \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right]$ où $K = \frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx}$	Couette plan avec gradient de pression ( $\partial p / \partial x \neq 0$ ) = "Couette-Poiseuille"
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(r) \vec{e}_x$ avec $u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)$	Poiseuille cylindrique
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = v(r) \vec{e}_\theta$ avec $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$ où $A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$ et $B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$	Couette cylindrique = "Couette-Taylor"
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\vec{u} = u(y) \vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} y(2h-y)$ $p(y) = \rho g(h-y) \cos \alpha + P_a$	Film tombant
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = u(y, t) \vec{e}_x$ avec $u(y, t) = U \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]$ $p = C^{te}$	Premier problème de Stokes
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = u(y, t) \vec{e}_x$ avec $u(y, t) = U e^{-y/\delta} \cos(\omega t - \frac{y}{\delta})$ où $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ et $p = C^{te}$	Second problème de Stokes