

David FABRE

IMFT / UPS

Département de Mécanique



Tuyère de fusée V2 de la seconde guerre mondiale.

11. Ecoulements compressibles

11. Ecoulements compressibles

- Equations du mouvement d'un gaz compressible
 - Rappels de thermo et de cinétique des gaz
 - Nombre de Mach
 - Equations d'Euler compressible
 - Equation-bilan de l'énergie totale
 - Bilan d'entropie
 - Relations de Barré–St Venant
- Ecoulements compressibles monodimensionnels
 - Objectifs et hypothèses de modélisation
 - Equations-bilan
 - Relation de Hugoniot
 - Résolution finale

Cadre d'étude

Hypothèses de ce chapitre :

- Gaz parfait.
- Écoulement Inertiel ($Re \gg 1$) : frottement visqueux négligés
- Conduction thermique négligée ($Pe = \frac{UL}{\kappa} \gg 1$).
- Pas de restriction sur le nombre de Mach ($M = \mathcal{O}(1)$).
- Gravité négligeable.
- Écoulement stationnaire.

Rappels : Description "milieu" continu d'un gaz parfait

Considérons un volume V occupé par un nombre N très grand de molécules (identiques) de masse individuelle m_p , de vitesses individuelles \vec{v}_i .

Ordre de grandeur : $N = \mathcal{O}(\mathcal{N}_A)$; $\mathcal{N}_A = 6.22 \cdot 10^{26}$ nombre d'Avogadro.

Le grand nombre de particules conduit à la nécessité d'un traitement statistique. On définit ainsi successivement :

- La densité volumique de particules n^* (en particules/ m^3) et la masse volumique ρ (en kg/m^3) donnés par :

$$n^* = \frac{N}{V}; \quad \rho = n^* m_p = \frac{N m_p}{V}$$

- La "vitesse moyenne de l'assemblée de particules" (ou vitesse au sens de la MMC) :

$$\vec{u} = \langle \vec{v}_i \rangle \equiv \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \vec{v}_i \right)$$

- La vitesse quadratique moyenne v_q :

$$v_q^2 = \langle |\vec{v}_i - \vec{u}|^2 \rangle \equiv \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N ||\vec{v}_i - \vec{u}||^2 \right)$$

- En invoquant le théorème de l'équipartition de l'énergie, cette dernière quantité permet de définir la température cinétique T par :

$$\frac{m_p v_q^2}{2} = 3 \frac{k_B T}{2} \quad \text{où } k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ est la constante de Boltzmann.}$$

Rappels : Lois d'état

- Loi d'état "mécanique" définissant la pression p

Celle-ci s'obtient en comptabilisant la force exercée sur une paroi due aux collisions.

- Expression microscopique :

$$p = \frac{N}{V} \frac{m_p v_q^2}{3} = \frac{N k_b T}{V}$$

- Expression macroscopique :

$$p = \rho r T \quad \left(\text{où } r = \frac{k_B}{m_p} = \frac{R}{M} \right).$$

où $R = \mathcal{N}_A k_B$ est la constante des gaz parfaits et $M = \mathcal{N}_A m_p$ la masse molaire.

- Loi d'état "énergétique" définissant l'énergie interne massique e (ou une grandeur thermodynamique équivalente).

- Première forme : Celle-ci s'obtient en comptabilisant les énergies élémentaires microscopiques, et en invoquant le théorème d'équipartition de l'énergie.
Pour un gaz parfait diatomique :

$$e = \frac{1}{N m_p} \times 5N \times \frac{k_B T}{2} = \frac{5rT}{2} \quad \left(\equiv \frac{5}{2} v_q^2 \right)$$

- Deuxième forme faisant intervenir l'enthalpie massique $h = e + p/\rho$:

$$h = e + rT = \frac{7rT}{2} \quad \left(\equiv \frac{7}{2} v_q^2 \right)$$

- Dans le cas général d'un gaz défini par son indice adiabatique γ , ces relations se mettent sous la forme :

$$e = c_v T \text{ avec } c_v = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}; \quad h = c_p T \text{ avec } c_p = \frac{r}{\gamma - 1} \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right)$$

Rappels : Compressibilité et vitesse du son

A partir des lois d'état on définit le coefficient de compressibilité :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$$

Celui-ci permet de définir une échelle de vitesse caractéristique : la *vitesse du son*

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{1}{\rho \chi_S}$$

Pour un gaz parfait : $c^2 = \gamma p / \rho = \gamma r T$

- Lien avec la vitesse quadratique moyenne :

$$c^2 = \frac{\gamma}{3} v_q^2$$

- Lien avec l'énergie massique et l'enthalpie massique :

$$c^2 = \frac{\gamma e}{\gamma - 1}$$

$$c^2 = \frac{h}{\gamma - 1}$$

Nombre de Mach

On appelle **nombre de MACH** le rapport sans dimension

$$M = \frac{u}{c}$$

où u désigne la vitesse locale de l'écoulement

La valeur du nombre de Mach définit le type d'écoulement rencontré :

- $0 < M < 1$: écoulement **subsonique** (vitesse de l'écoulement $<$ vitesse du son)
- $M \rightarrow 0$: écoulement **incompressible**
- $M \approx 1$: écoulement **transonique**
- $M = 1$: écoulement **sonique**
- $M > 1$: écoulement **supersonique** (vitesse de l'écoulement $>$ vitesse du son)
- $M \gg 1$: écoulement **hypersonique**

Equations du mouvement pour un gaz compressible

Rappel des hypothèses :

- Gaz parfait.
- Écoulement Inertiel ($Re \gg 1$) : frottement visqueux négligés
- Conduction thermique négligée ($Pe = \frac{UL}{\kappa} \gg 1$).
- Pas de restriction sur le nombre de Mach ($M = \mathcal{O}(1)$).
- Gravité négligeable.
- Écoulement stationnaire.

Sous ces hypothèses les équations de la masse et de la quantité de mouvement sont les équations d'Euler compressibles stationnaires :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\rho \vec{u}) &= \rho \operatorname{div}(\vec{u}) + \vec{u} \cdot \vec{\operatorname{grad}}(\rho) = 0. \\ \rho \left[\vec{\operatorname{grad}}(\vec{u}) \cdot \vec{u} \right] &= -\vec{\operatorname{grad}}(p)\end{aligned}$$

Questions :

Peut-on utiliser Bernoulli pour relier p et $u = |\vec{u}|$?

\Rightarrow Non !

Peut-on pour autant trouver une relation générale reliant u et p (ou une autre quantité thermodynamique) le long de chaque ligne de courant ?

\Rightarrow Il faut travailler à partir du *bilan d'énergie totale* au lieu du bilan d'énergie cinétique....

Bilan d'énergie totale (1er principe)

Ecrivons un bilan d'énergie (premier principe) pour un volume *de contrôle* Ω (cf. Annexe A.4)

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) dV}_{\frac{dE}{dt}} = - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{E}^{(ech)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} -p \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{W}^{(p)}} \quad (36)$$

Remarques :

$\dot{Q} = 0$ car on néglige les échanges de chaleur (adiabatique) ;

$\dot{W}^{(p)} \equiv -P dV/dt$ si p est uniforme ($p \equiv P$) ;

On retrouve alors dans ce cas l'expression classique du travail de pression du cours de thermodynamique

En régime stationnaire, ce bilan devient :

$$\oint_{\partial\Omega} \rho \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (37)$$

Ce qui, à l'aide du théorème de la divergence et en utilisant l'équation-bilan de masse conduit à une équation-bilan sous la forme :

$$\rho \vec{u} \cdot \text{grad} \left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = 0.$$

Conclusion : l'enthalpie totale massique $h + \frac{|\vec{u}|^2}{2}$ est conservée le long de chaque ligne de courant.

Supposons que la ligne de courant passe par un *point de stagnation* (ou point d'arrêt) où la vitesse est nulle ($u = 0$) et où les variables thermodynamiques ont pour valeur les "conditions génératrices" $T_i, \rho_i, p_i; h_i; c_i$.

Alors la conservation de l'enthalpie totale (sur la ligne de courant considérée) peut se mettre sous les formes équivalentes suivantes :

- $h + \frac{u^2}{2} = h_i$

h_i est l'enthalpie génératrice (enthalpie d'un "point d'arrêt" de l'écoulement où $u = 0$).

- $c_p T + \frac{u^2}{2} = C_p T_i$

T_i est la température génératrice.

- $\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{c_i^2}{\gamma-1}$

$c_i = \sqrt{\gamma r T_i}$ est la vitesse du son correspondant aux conditions génératrices.

- $\frac{T}{T_i} = \frac{c^2}{c_i^2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}$

Cette dernière forme est appelée 1ère relation de Barré de St Venant.

Application : "tube de pitot thermique" permettant de mesurer (théoriquement) u à partir de T_i et T .
(en pratique difficile à mettre en oeuvre car il faudrait un matériau non conducteur de la chaleur).

Bilan d'entropie

Sous les hypothèses de ce chapitre formulées plus haut, on a négligé tous les phénomènes dissipatifs (irréversibles), à savoir le *frottement visqueux* et la *conduction thermique*.

Le bilan local d'entropie est donc :

$$\rho \frac{ds}{dt} = \rho \vec{u} \cdot \text{grad}(s) = 0.$$

(démonstration plus rigoureuse, cf. annexe A.6).

⇒ L'entropie massique s se conserve le long des lignes de courant.

Sur les lignes de courant on pourra donc utiliser les relations de Laplace :

$$T\rho^{1-\gamma} = \text{Cte} \quad \text{et} \quad p\rho^{-\gamma} = \text{Cte}$$

Relations de Barré–St Venant

La conservation de l'enthalpie totale et les conditions d'écoulement isentropique permettent alors de déterminer les conditions de l'écoulement en tout point en fonction du nombre de Mach local et des conditions génératrices.

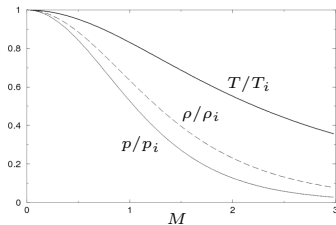
Ce sont les **Relations de Barré de St-Venant** :

$$\begin{aligned}
 \text{[Démonstration]} \quad \rightarrow \quad \frac{T}{T_i} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}; \quad \frac{\rho}{\rho_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\
 \frac{p}{p_i} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}; \quad u = M \sqrt{\gamma r T_i} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1/2}
 \end{aligned}$$

Remarques :

tous les rapports T/T_i , ρ/ρ_i et p/p_i sont des fonctions décroissantes du nombre de Mach M .

u est par contre une fonction croissante du nombre de Mach M .



Exercice : Montrez que dans la limite $M \ll 1$ la troisième relation de Barré–St Venant est

équivalente à l'équation de Bernoulli :

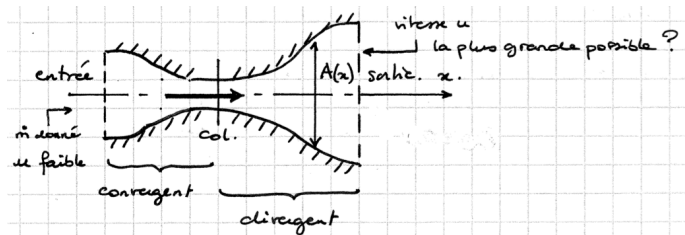
$$\frac{p - p_i}{\rho} = -\frac{u^2}{2}$$

Écoulements compressibles monodimensionnels : Objectifs

- Application aux écoulements en conduite, en particulier pour justifier la séquence

convergent \rightarrow col \rightarrow divergent

employée pour les tuyères pour maximiser la poussée du réacteur



- ✓ Mise en équation : modélisation dans le cadre de l'approximation unidimensionnelle

Modélisation : cadre

Hypothèses de travail : Aux hypothèses générales de ce chapitre :

- Gaz parfait.
- Écoulement Inertiel ($Re \gg 1$) : frottement visqueux négligés
- Conduction thermique négligée ($Pe = \frac{UL}{k} \gg 1$).
- Pas de restriction sur le nombre de Mach ($M = \mathcal{O}(1)$).
- Gravité négligeable.
- Écoulement stationnaire.

On rajoute l'hypothèse supplémentaire

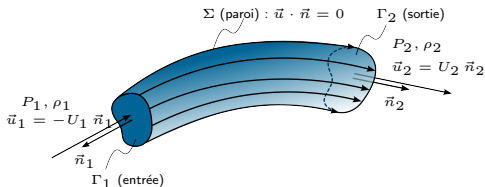
- ✓ Écoulement monodimensionnel :

$$\begin{aligned}\vec{u}(x, y, z, t) &\approx u(x) \vec{e}_x \\ \rho(x, y, z, t) &\approx \rho(x), \quad p(x, y, z, t) \approx p(x), \quad T(x, y, z, t) \approx T(x), \dots\end{aligned}$$

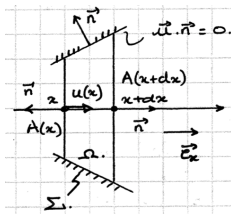
Equations-bilans sous l'hypothèse monodimensionnelle : principe

On a besoin d'écrire les équations-bilan de masse, quantité de mouvement et énergie :

- Sur une section de conduite d'aire d'entrée A_1 et d'aire de sortie A_2 ;



- Sur une section élémentaire de longueur dx .



Bilan de masse

Bilan intégral de masse :

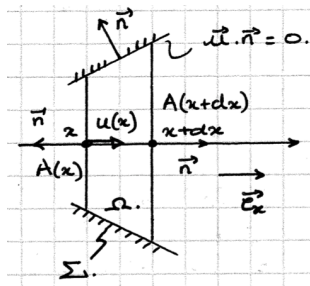
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

Soit, sous l'hypothèse monodimensionnelle :

$$\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

Ce qui s'écrit aussi sous forme différentielle :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (38)$$



Bilan de quantité de mouvement

Bilan intégral de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dV + \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} [\rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p \vec{n}] dS = - \oint_{\Sigma} p \vec{n} dS$$

Ce qui s'écrit aussi :

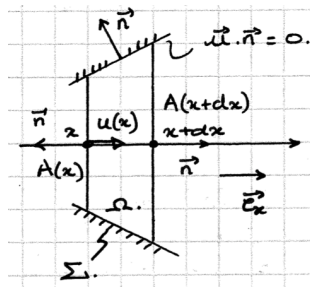
$$(\rho_2 u_2^2 + p_2) A_2 - (\rho_1 u_1^2 + p_1) A_1 = \int_1^2 p(x) \frac{dA}{dx} dx$$

Dans la limite $dx \rightarrow 0$, on obtient donc :

$$\dot{m} du + A dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho u A du + A dp = 0$$

soit encore :

$$\rho u du + dp = 0 \quad (39)$$



Bilan d'énergie

Comme vu précédemment, la conservation de l'énergie totale, se met sous la forme (en considérant une ligne de courant traversant les sections 1 et 2) :

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Ou encore :

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Sous forme différentielle, ceci se met également sous la forme

$$dh + u du = 0$$

Ou encore :

$$c_p dT + u du = 0.$$

Récapitulatif

Le système d'équations qui régit les écoulements compressibles 1D stationnaires et isentropiques de gaz parfait est le suivant :

$$p = \rho r T \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (40)$$

$$\rho u A = \dot{m} = Cte \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (41)$$

$$\rho u du + dp = 0 \quad (42)$$

$$\mathcal{H} = h + \frac{1}{2}u^2 = c_p T + \frac{1}{2}u^2 = \mathcal{H}_i = Cte \quad \text{ou} \quad c_p dT + u du = 0 \quad (43)$$

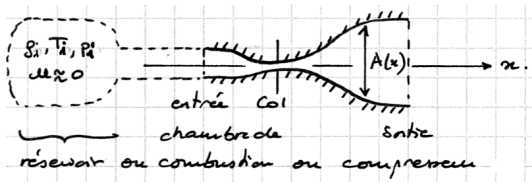
Le problème est a priori bien posé : il est décrit par 4 équations différentielles pour les 4 inconnues cinématique $u(x)$ et thermodynamiques $\rho(x)$, $p(x)$ et $T(x)$, qui dépendent de paramètres géométriques comme la loi de section $A(x)$ et de paramètres physiques tels le débit massique \dot{m} , et les **conditions génératrices**.

Conditions génératrices

Définition :

on appelle conditions ou grandeurs **génératrices** les valeurs prises par les grandeurs thermodynamiques, notées ρ_i , p_i , T_i , au niveau d'un **point d'arrêt**, réel ou fictif, c'est-à-dire à l'endroit où la vitesse de l'écoulement est nulle.

Les grandeurs génératrices sont aussi appelées **grandeurs d'arrêt**.



Ces grandeurs sont en général connues ou fixées par les conditions opérationnelles (pression et température dans la chambre de combustion ou dans le compresseur en amont de la tuyère par exemple).

Relation de Hugoniot

Le système d'équations (4-7) permet de dériver la relation de **Hugoniot** reliant les variations de vitesse dans une conduite de section variable $A(x)$:

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \frac{du}{u} = -\frac{1}{1-M^2} \frac{dA}{A}$$

On montre de même pour l'évolution de la pression :

$$[\text{exercice}] \longrightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A}$$

Conséquences :

- Pour un écoulement subsonique :
 Dans une section **convergente** ($A \searrow$), alors $u \nearrow$ et $p \searrow$ (effet Venturi classique).
 Dans une section **divergente** ($A \nearrow$), alors $u \searrow$ et $p \nearrow$.
- Si l'écoulement est supersonique c'est l'inverse !
 Dans une section **convergente** ($A \searrow$), alors $u \searrow$ et $p \nearrow$
 Dans une section **divergente** ($A \nearrow$), alors $u \nearrow$ et $p \searrow$.
- Pour accélérer l'écoulement tout le long de la tuyère il faut donc que celle-ci présente un **col** correspondant à un minimum de la section A_c . On a alors nécessairement **$M = 1$ au col**.

Si ces conditions sont réunies on dit que **la tuyère est amorcée**.

On va voir que dans ce cas le débit de masse \dot{m} est imposé par la **dimension du col** A_c et par les **conditions génératrices**.

Résolution finale

On peut maintenant déduire le débit de masse à partir des relations de Barré de St-Venant appliquées au col ($M = 1$) :

$$\dot{m} = \rho_c u_c A_c = \beta \rho_i \sqrt{\gamma r T_i} A_c \quad \text{avec } \beta = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \approx 0.5787$$

Pour pouvoir déterminer les conditions en tout point de la tuyère il reste maintenant à déterminer la relation entre A et M . En écrivant $\dot{m} = \rho(M) u(M) A = \rho_c u_c A_c$ on trouve [\[exercice\]](#) :

$$\frac{A}{A_c} = \frac{\beta}{M} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Remarque : pour $A/A_c > 1$ cette relation donne deux valeurs possibles de M , une subsonique (appliquable avant le col) et une supersonique (appliquable après le col).

Utilisation pratique :

Pour résoudre un problème on pourra utiliser les **tables d'écoulements compressibles isentropiques** donnant P/P_i , ρ/ρ_i , T/T_i , A/A_c en fonction de M .

Exercice

Exercice d'application (Chassaing, p. 249)

Un réservoir contient de l'air sec à une pression $P_i = 10\text{Bars}$, et une température de $T_i = 300\text{K}$. Cet air s'écoule à travers une tuyère de section au col $A_c = 755\text{mm}^2$ et de section de sortie $A_s = 1272\text{mm}^2$.

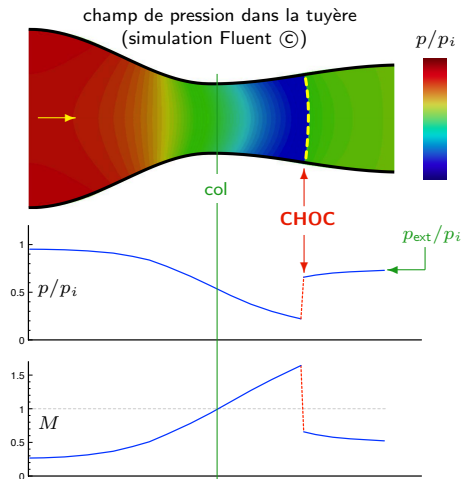
Calculez : (a) les conditions (pression, température, masse volumique et vitesse) au col, (b) le débit-masse, et (c) les conditions en sortie.

(d) mêmes questions pour une section de sortie $A_s = 1980\text{mm}^2$. Les conditions de sortie sont-elles compatibles avec une sortie à l'air libre dans une atmosphère standard ?

Régime discontinu d'une tuyère amorcée

Remarque : l'hypothèse d'écoulement isentropique amorcé dans une tuyère impose une pression p_s en sortie de la tuyère ($A = A_s$).

Que se passe-t-il si $p_s < p_{ext}$?



Si la pression en sortie de tuyère n'est pas adaptée à la pression extérieure

→ existence d'un choc d'adaptation dans le divergent

→ après le choc, l'écoulement redevient subsonique et décélère (cf. relation d'Hugoniot)

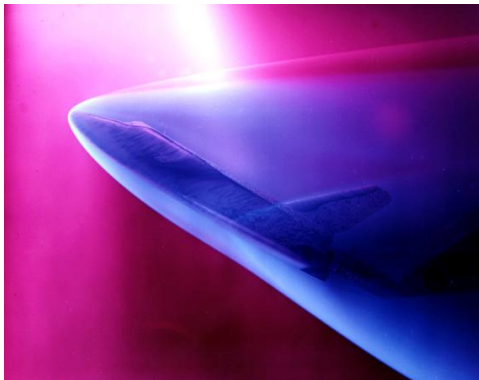
Ce régime de fonctionnement est donc à éviter puisqu'il ne permet pas d'accélérer continûment l'écoulement jusqu'en sortie de tuyère.

Il n'est alors pas possible d'obtenir une poussée optimale.

David FABRE

IMFT / UPS

Département de Mécanique



Onde de choc à l'avant
de la Navette Spatiale
lors de la rentrée dans
l'atmosphère.
Expérience en soufflerie
supersonique.

12. Ondes de choc

13. Ondes de choc

- Introduction
 - Contexte et motivations
 - Phénoménologie – Observations
- Equations de bilan à travers un choc droit
 - Modélisation
 - Application des principes de conservation
- Relations de saut à travers le choc droit
 - Rapports aval/amont
 - Saut des grandeurs génératrices
 - Saut d'entropie

Contexte et motivations

Cadre des chapitres précédents (10 et 11) :

limité aux variations lentes et isentropiques des grandeurs thermodynamiques p , ρ , T , ...
et de la vitesse \vec{u}

Mais...

Observations expérimentales :

les écoulements compressibles à grande vitesse peuvent subir des variations extrêmement brusques de leurs caractéristiques

✓ par ex. décélération des particules fluides de l'ordre de 10^9 m/s^2

sur des distances très faibles

✓ par ex. de l'ordre de $10^{-7} \text{ m} = 0.1 \text{ } \mu\text{m} \sim$ libre parcours moyen de molécules de gaz

→ Notion de choc

Ondes acoustiques, effet Doppler et mur du son

Déplacement à vitesse u d'un corps dans l'air \rightarrow génération d'ondes de pression de célérité c

$$\begin{array}{l} u \ll c \\ (M \ll 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} u < c \\ (M < 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} u = c \\ (M = 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} u > c \\ (M > 1) \end{array}$$

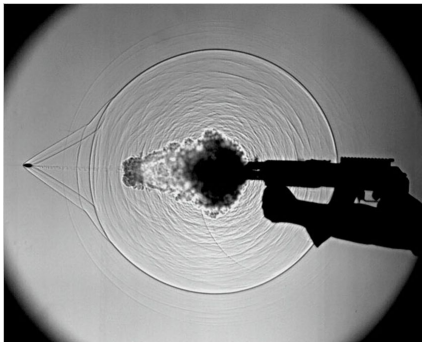
quasi-incompressible

subsonique
[effet Doppler]

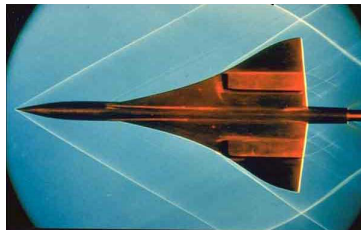
sonique

supersonique

Ondes de choc : vol supersonique



Tir de fusil d'assaut (AK-47)

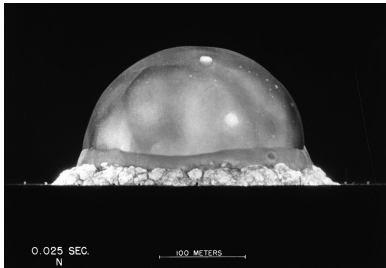


Maquette du Concorde
en soufflerie supersonique

Ondes de choc : Super-Sonic Car (SSC)



Ondes de choc : explosions

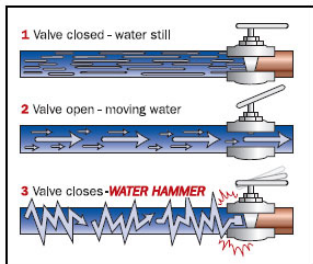


The expanding fireball and shockwave of the Trinity explosion, seen .025 seconds after detonation on July 16, 1945. (U.S. Department of Defense)

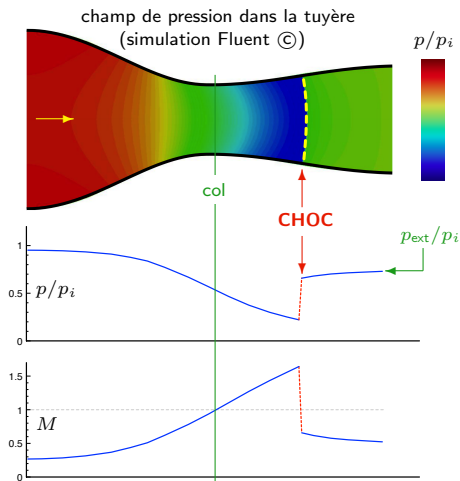


The USS Iowa is firing shells from its cannon that travel about twice the speed of sound. While the shells themselves will likely produce their own shock waves as they travel through the air, it is the shock wave caused by the explosion of the cannons that is visible on the water.

Onde de choc dans les liquides : coup de bélier



Régime discontinu d'une tuyère amorcée



Si la pression en sortie de tuyère n'est pas adaptée à la pression extérieure

→ existence d'un choc d'adaptation dans le divergent

→ après le choc, l'écoulement redevient subsonique et décélère (cf. relation d'Hugoniot)

Ce régime de fonctionnement est donc à éviter puisqu'il ne permet pas d'accélérer continûment l'écoulement jusqu'en sortie de tuyère.

Il n'est alors pas possible d'obtenir une poussée optimale.

Modélisation

Principe :

On s'intéresse aux variations des grandeurs physiques à travers l'onde de choc :

→ on peut ignorer la structure détaillée de l'onde de choc qui sera alors considérée comme une **surface de discontinuité** des grandeurs physiques u , ρ , p , T , ...

On se restreint au cas du choc droit : plan et perpendiculaire à l'écoulement

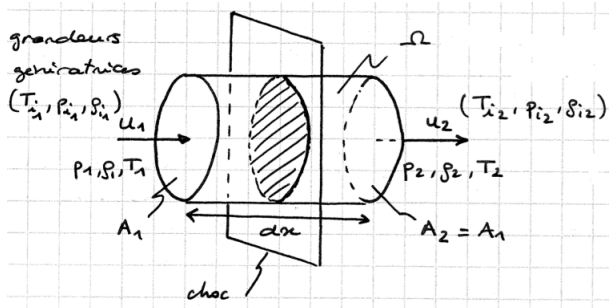
→ choc oblique ou courbe : cf. master

Hypothèses :

- choc droit stationnaire fixe, adiabatique
- gaz parfait (non conducteur de la chaleur, non visqueux)
- écoulement stationnaire
- forces de volume négligeables
- pas de réaction chimique

Volume de contrôle

Soit le volume de contrôle fixe infinitésimal Ω , de normale sortante \vec{n} , suivant :



On notera par l'indice 1 toute quantité physique *juste avant le choc* (amont), et par l'indice 2 toute quantité physique *juste après le choc* (aval).

Bilans de masse et de quantité de mouvement

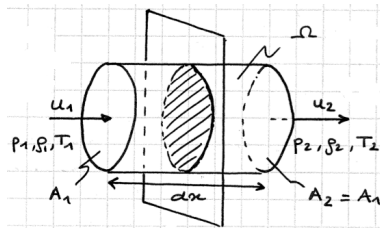
Bilan intégral de masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow 0 = \rho_1 u_1 A_1 - \rho_2 u_2 A_2$$

D'où

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (44)$$



Bilan intégral de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS - \oint_{\partial\Omega} p \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow 0 = \rho_1 u_1^2 A_1 - \rho_2 u_2^2 A_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

D'où

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (45)$$

Bilan d'énergie

Bilan intégral d'énergie :

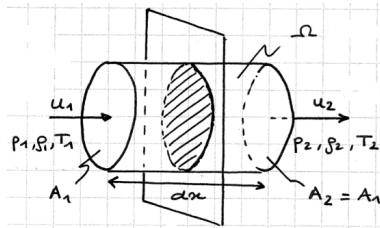
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) dV \\
 &= - \oint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS \\
 &\quad + \mathcal{P}_{m,ext} + \mathcal{P}_{th,ext} \\
 \Rightarrow \oint_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS &= 0 \quad (\text{chap. 11}) \\
 \Rightarrow \rho_1 u_1 A_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) - \rho_2 u_2 A_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

Or $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ et $A_1 = A_2 \Rightarrow e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} = e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2}$

avec enthalpie spécifique $h = e + p/\rho = C_p T$:

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (46)$$

Remarque : enthalpie totale $H = h + u^2/2 \Rightarrow H_1 = H_2$
 donc l'enthalpie totale est conservée à la traversée du choc !

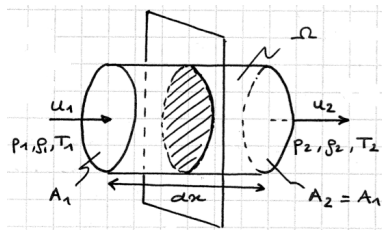


Bilan d'entropie

Choc = siège de phénomènes irréversibles
(visqueux et thermiques)

Le second principe impose donc :

$$s_2 > s_1 \quad (47)$$



Rapports aval/amont (1)

Objectif : déterminer $\frac{u_2}{u_1}(M_1)$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1)$, $\frac{p_2}{p_1}(M_1)$, $\frac{T_2}{T_1}(M_1)$

→ Equation pour l'énergie (3) :

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

avec

$$C_p T + \frac{u^2}{2} = C_p T \left(1 + \frac{u^2}{2C_p T} \right) = C_p T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{\gamma r T} \right) = C_p T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

car $\gamma r T = c^2$ et $C_p = \gamma r / (\gamma - 1)$, d'où :

$$C_p T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = C_p T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)$$

On en déduit la première relation de saut :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} \quad (48)$$

Rapports aval/amont (2)

Objectif : déterminer $\frac{u_2}{u_1}(M_1)$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1)$, $\frac{p_2}{p_1}(M_1)$, $\frac{T_2}{T_1}(M_1)$

→ Equation pour la quantité de mouvement (2) :

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

avec

$$p + \rho u^2 = p \left(1 + \frac{\rho}{p} u^2 \right) = p \left(1 + \gamma \frac{\rho}{\gamma p} u^2 \right) = p \left(1 + \gamma M^2 \right)$$

car $\gamma p / \rho = c^2$, d'où :

$$p_1 \left(1 + \gamma M_1^2 \right) = p_2 \left(1 + \gamma M_2^2 \right)$$

On en déduit la deuxième relation de saut :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (49)$$

Rapports aval/amont (3)

Objectif : déterminer $\frac{u_2}{u_1}(M_1)$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1)$, $\frac{p_2}{p_1}(M_1)$, $\frac{T_2}{T_1}(M_1)$

→ Equation pour la masse (1) :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

d'où

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1 c_1}{M_2 c_2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

car $c = \sqrt{\gamma r T}$: on en déduit les troisième et quatrième relations de saut :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}} \quad (50)$$

Reste à déterminer M_2 en fonction de $M_1 \dots$

Rapports aval/amont (4)

Objectif : déterminer $\frac{u_2}{u_1}(M_1)$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1)$, $\frac{p_2}{p_1}(M_1)$, $\frac{T_2}{T_1}(M_1)$

→ Equation d'état du gaz parfait :

$$p = \rho r T \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 r T_2}{\rho_1 r T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

D'où, d'après les relations de saut précédentes :

$$\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}} \times \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}}$$

En élevant au carré :

$$\left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 = \frac{M_1^2}{M_2^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)$$

= simple polynôme du second degré en $X = M_2^2$, avec une racine évidente $X = M_1^2$.

On en déduit :

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma} \quad (51)$$

Rapports aval/amont (5)

Objectif : déterminer $\frac{u_2}{u_1}(M_1)$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1)$, $\frac{p_2}{p_1}(M_1)$, $\frac{T_2}{T_1}(M_1)$

En remplaçant

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}$$

dans les équations de saut obtenues précédemment, on obtient :

$$\frac{T_2}{T_1}(M_1) = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} (2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma) \quad (52)$$

$$\frac{p_2}{p_1}(M_1) = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad (53)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1) = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} = \frac{u_1}{u_2}(M_1) \quad (54)$$

Saut des grandeurs génératrices (1)

Objectif : déterminer $\frac{\rho_{i2}}{\rho_{i1}}(M_1)$, $\frac{p_{i2}}{p_{i1}}(M_1)$, $\frac{T_{i2}}{T_{i1}}(M_1)$

→ Equation pour l'énergie (3) :

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

avec, de chaque côté du choc,

$$C_p T + \frac{u^2}{2} = C_p T_i$$

d'où

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_{i1} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} = C_p T_{i2}$$

On en déduit :

$$T_{i2} = T_{i1} \quad (55)$$

Saut des grandeurs génératrices (2)

Objectif : déterminer $\frac{\rho_{i2}}{\rho_{i1}}(M_1)$, $\frac{p_{i2}}{p_{i1}}(M_1)$, $\frac{T_{i2}}{T_{i1}}(M_1)$

→ Equation d'état du gaz parfait :

$$p = \rho r T \Rightarrow \frac{p_{i2}}{p_{i1}} = \frac{\rho_{i2} r T_{i2}}{\rho_{i1} r T_{i1}} = \frac{\rho_{i2}}{\rho_{i1}}$$

car $T_{i2} = T_{i1}$.

On a par ailleurs :

$$\frac{p_{i2}}{p_{i1}} = \frac{p_{i2}}{p_2} \times \frac{p_2}{p_1} \times \frac{p_1}{p_{i1}}$$

où les rapports $p_2/p_{i2}(M_2)$ et $p_1/p_{i1}(M_1)$ sont donnés par les relations isentropiques de St-Venant du chapitre 11, et $p_2/p_1(M_1)$ correspond à la relation de saut (10) déterminée précédemment.

On en déduit :

$$\frac{p_{i2}}{p_{i1}} = \frac{\rho_{i2}}{\rho_{i1}} = \left\{ \frac{(\gamma + 1)^{\gamma+1} M_1^{2\gamma}}{(2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma) [2 + (\gamma - 1) M_1^2]^\gamma} \right\}^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (56)$$

Saut d'entropie

Le **second principe** impose $\Delta s = s_2 - s_1 > 0$ à travers l'onde de choc : quelle conséquence ?

Rappel : (cf. chapitre 11)

$$de = C_v dT = Tds - pdv = Tds - pd(1/\rho) \quad \Rightarrow \quad ds = C_v \left(\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} \right)$$

d'où

$$s = C_v \ln \left(p \rho^{-\gamma} \right) \quad \text{et} \quad \Delta s = C_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right]$$

Le second principe s'écrit donc

$$\Delta s(M_1) = C_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1}(M_1) \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}(M_1) \right)^\gamma \right] > 0$$

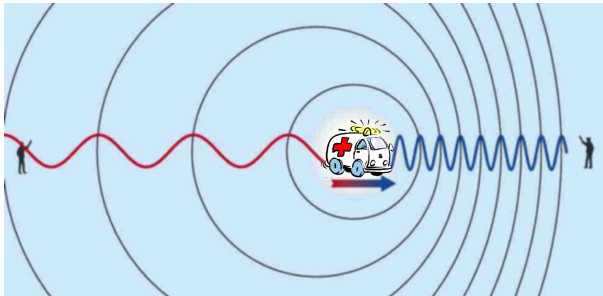
L'étude de la fonction $\Delta s(M_1)$ montre que : $\Delta s(M_1) > 0 \Leftrightarrow M_1 > 1$, et on en déduit alors que $M_2 < 1$, d'après la relation (8).

Conséquence :

Le second principe impose donc qu'un choc ne peut exister que si l'écoulement est supersonique ($M_1 > 1$). De plus, à travers le choc droit, l'écoulement redevient subsonique ($M_2 < 1$), avec une augmentation de pression, de masse volumique et de température (cf. relations 9 à 11).

Effet Doppler

- ✓ Effet Doppler = décalage en fréquence dû au mouvement de la source :



- véhicule qui approche : longueur d'onde λ raccourcie
→ haute fréquence $f = c/\lambda \rightarrow$ son aigu
- véhicule qui s'éloigne : longueur d'onde λ rallongée
→ basse fréquence $f = c/\lambda \rightarrow$ son grave