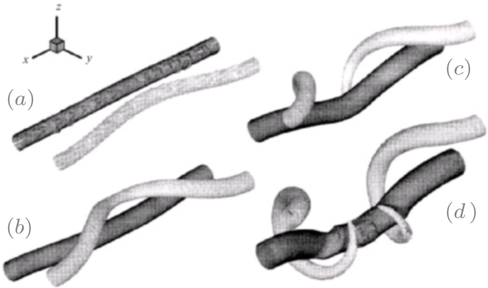
Mécanique des fluides

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique



Interaction entre deux tourbillons contrarotatifs

5. Equations-bilan et régimes d'écoulements

Sommaire

Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange pas avec l'extérieur $(\dot{F}_e = 0)$: ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur.
- On appelle **matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un système **fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** Ω un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un système **ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.

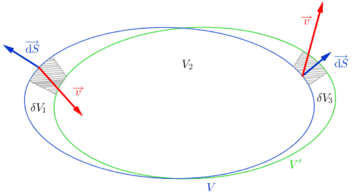
Volume de contrôle Ω

Théorème du transport (Rappel chap. 3)

Les équations de la physique (bilans de masse, de quantité de mouvement, d'énergie), s'écrivent naturellement en considérant un volume matériel $\mathcal{D}(t)$.

Le théorème de Transport permet de traduire ce bilan dans le cas (Eulérien) d'un volume de contrôle Ω.

Théorème :
Considérons un *domaine matériel* mobile $\mathcal{D}(t)$ coïncidant à l'instant t avec un *volume de contrôle* fixe Ω (bordé par un countour $\partial\Omega$).



La dérivée matérielle de la quantité intégrale $F(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} f dV$ s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} f dV = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} f\vec{u}\cdot\vec{n}\, dS$$

Remarque : ce théorème est une généralisation du théorème suivant pour un problème monodimensionnel :

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \left[\frac{db}{dt} f(b(t),t) - \frac{da}{dt} f(a(t),t)\right]$$

Bilan de masse : bilans intégraux

Quantité physique : **masse** M associée à la grandeur intensive ρ (**masse volumique**).

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné

$$M(t, \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t)\, dV$$

Pour ce système matériel, le principe de conservation de la masse $\dfrac{dM}{dt} = 0$ s'écrit :

- bilan intégral lagrangien pour le volume matériel $\mathcal{D}$ en suivant le fluide dans son mouvement

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t)\; dV = 0 \qquad (1)$$

- bilan intégral eulérien pour le volume de contrôle fixe Ω (système ouvert)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(\vec{x}, t)\; dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS \qquad (2)$$

[Démonstration] : théorème de transport avec $f = \rho$

Bilan de masse : bilans locaux

A partir des bilans intégraux précédents, on déduit les équations locales de bilan de masse :

- Bilan local eulérien

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\,\vec{u}\,) = 0 \tag{3}$$

[Démonstrations :]

- (i) A partir du bilan intégral Eulérien, à l'aide du théorème de la divergence
- (ii) Directement par un bilan sur un volume élémentaire

- Bilan local lagrangien, en suivant la particule fluide dans son mouvement

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \tag{4}$$

[Démonstrations :]

- (i) En utilisant la définition de la dérivée particulaire
- (ii) En variables lagrangiennes (cf. MMC)

Bilan de quantité de mouvement : bilans intégraux

Quantité physique : quantité de mouvement $\vec{Q}$ associée à la grandeur intensive $\rho\,\vec{u}$.

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné : $\vec{Q}(t,\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x},t)\,\vec{u}(\vec{x},t)\,dV$

Principe de conservation de la quantité de mouvement : $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}\,\to\,\mathcal{D}}$

- bilan intégral lagrangien pour le volume matériel $\mathcal{D}$ en suivant le fluide dans son mouvement

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} \rho\,\vec{u}\,dV = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho\vec{g}\,dV + \oint_{\partial\mathcal{D}(t)} \left(-p\vec{n} + \overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS \tag{5}$$

  où $\vec{g}$ désigne la gravité (ou toute force à distance par unité de masse).
  et où les forces surfaciques sont la pression (normale) et la contrainte visqueuse (représentée par le tenseur $\overline{\overline{\tau}}$). Ce bilan s'interprète simplement comme le principe fondamental de la dynamique appliqué au système matériel $\mathcal{D}$.

- bilan intégral eulérien pour le volume de contrôle fixe Ω (système ouvert)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho\,\vec{u}\,dV = \int_{\Omega} \rho\vec{g}\,dV + \oint_{\partial\Omega} \left(-p\vec{n} + \overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS - \oint_{\partial\Omega} \rho\,\vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS \tag{6}$$

[Démonstration] : théorème de transport avec $f = \rho\vec{u}$

Remarque : en présence d'interface traversant la frontière du volume considéré, il faut ajouter au membre de droite la contribution de la force de tension superficielle

$$\int_{\mathcal{L}} \gamma\vec{n}_{\mathcal{L}}\,dl$$

Bilan de quantité de mouvement : bilans locaux

- Bilan local eulérien ou "sous forme conservative"

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \vec{\mathrm{div}}\,(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})\right] = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \vec{\mathrm{div}}\,(\overline{\overline{\tau}}) \qquad (7)$$

[Démonstration] :
A partir du bilan intégral eulérien, à l'aide du théorème de la divergence.

- Bilan local lagrangien,

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \vec{\mathrm{div}}\,(\overline{\overline{\tau}}) \qquad (8)$$

[Démonstration] :
(i) A partir du bilan local eulérien (exercice),
(ii) Par un bilan des forces appliqué à un volume élémentaire dV.

- Autre écriture (pour un fluide Newtonien, en négligeant la viscosité en volume) :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{u})\cdot\vec{u}\right) = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \mu\left(\Delta\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,(\vec{u}))\right) \qquad (9)$$

Démo : exercice

Autres équations-bilan :

Le document **Formulaire de mécanique des fluides, annexe C** liste d'autres équations-bilans utiles en mécanique des fluides :

- bilan intégral d'énergie totale.
  (Egalement appelé premier principe en système ouvert).
- Bilan local d'énergie totale.
  (Se déduit du bilan intégral).

$$\rho \frac{d}{dt}\left(c_v T + \frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) = \rho\vec{g}\cdot\vec{u} - \vec{\mathrm{grad}}(p)\cdot\vec{u} + \mathrm{div}\,(\overline{\overline{\tau}})\cdot\vec{u} - \mathrm{div}\,(\vec{q}); \qquad \vec{q} = -\lambda\vec{\mathrm{grad}}(T) \tag{10}$$

  (cf. chapitres 11-12, écoulements compressibles de gaz parfaits)
- Bilan local d'énergie cinétique.
  (S'obtient à partir du bilan local de QDM en projetant sur $\vec{u}$).
  (cf. chap. 7, théorème de Bernoulli).
- bilan intégral d'énergie cinétique.
  (S'obtient à partir du bilan local, en intégrant sur un volume Ω).
  (cf chap. 9, perte de charge dans une conduite , et chap. 10, flux d'énergie acoustique).
- Bilans d'énergie interne
  (S'obtiennent en combinant les bilans d'énergie totale et d'énergie cinétique)
- Bilans d'entropie (second principe en système ouvert)
- (...)

Equations du mouvement d'un fluide

On peut donc maintenant résumer les équations régissant le mouvement d'un fluide dans le cas le plus général :

Bilan local de masse : $$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$$

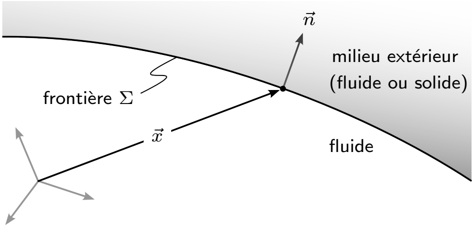
Bilan local de qdm : $$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \mu\Delta\vec{u} + \frac{\mu}{3}\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,(\vec{u}))$$

Bilan local d'énergie : $$\rho\frac{d}{dt}\left(c_v T + \frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) = \rho\vec{g}\cdot\vec{u} - \vec{\mathrm{grad}}(p)\cdot\vec{u} + \mathrm{div}\,(\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}})\cdot\vec{u} + \lambda\Delta T$$

Equation d'état : $p = \rho r T$ (gaz parfait) ou $\rho = \rho_0$ (liquide incompressible indilatable)

Conditions limites

A ces équations doivent être adjointes des conditions limites sur une frontière Σ (éventuellement mobile) séparant le fluide d'un milieu extérieur (solide ou fluide).



Conditions limites

- Condition limite cinématique.

$$\vec{u}(\vec{x} \in \Sigma, t) = \vec{u}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t)$$

Condition souvent simplifiée dans le cas ou la frontière Σ une paroi fixe sous la forme suivante :

$$\vec{u} = \vec{0}$$

- Condition limite dynamique

$$\vec{\vec{\sigma}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} - \vec{\vec{\sigma}}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} = \gamma K \qquad (K = \text{courbure de la surface, cf. chap. 2})$$

Condition souvent simplifiée dans le cas ou Σ est une surface libre plane (d'altitude $y = cte$) sous la forme suivante :

$\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n} = -p_{ext}\vec{n}$

c.a.d. $p - \tau_{yy} = p_{ext}$ et $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$

- Condition limite thermique

$$\vec{q} = \vec{q}_{ext}$$

Condition souvent simplifiée sous l'une des deux formes suivantes :

$\vec{q} = \vec{0}$ (paroi adiabatique) ou $T = T_{ext}$ (paroi isotherme).

NB : les deux premières conditions limites généralisent celles vues au chapitre 4 pour les écoulements plans parallèles.

Simplifications (cas des liquides)

Dans le cas des liquides incompressibles, indilatables ($\rho = \rho_0$)

1. L'équation-bilan de masse se simplifie en $\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$.

   => L'écoulement est iso-volume (on dit aussi "écoulement incompressible", par abus de language).

2. Les problèmes dynamique et thermique sont découplés (aucun terme ne dépend de T dans l'équation-bilan de QDM).

   => Si l'on ne s'intéresse qu'au champ de vitesse et aux forces générées sur les obstacles, on peut oublier l'équation de la température !

   => en revanche si l'on s'intéresse aux transferts thermiques, il faut d'abord résoudre le problème dynamique avant de résoudre le problème thermique... (cf. cours de transferts thermiques, chapitre "convection").

Conclusion : Pour les liquides incompressibles (chapitres 6 à 9) on retiendra les équations sous la forme suivante ("Equations de Navier-Stokes incompressibles") :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \\ \rho_0 \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \rho_0 \vec{g} - \mathrm{g\vec{r}ad}p + \mu \Delta \vec{u} \end{array} \right.$$

Simplifications (cas des liquides)

3 Simplification sur la pression :
Les termes de gravité et de gradient de pression peuvent se regrouper en introduisant la *pression motrice*

$$\hat{p} = p - \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x} \quad (= p + \rho_0 g z \text{ si la gravité est selon } -z)$$

=> L'eq. de NS se réécrit alors :

$$\rho_0 \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\text{grad}}\hat{p} + \mu \Delta \vec{u}$$

Conséquences :

- L'écoulement d'un *fluide pesant* est *cinématiquement équivalent* à celui d'un fluide non pesant ($\vec{g} = \vec{0}$)
- La force exercée par un fluide *pesant* sur une surface Ω de frontière $\mathcal{S}$ peut être évaluée ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathcal{FS}} &= -\oint_{\mathcal{S}} p\vec{n}dS \\ &= -\oint_{\mathcal{S}} \hat{p}\vec{n}dS + \int_{\Omega} \vec{\text{grad}}(\rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x})dV \\ &= -\oint_{\mathcal{S}} \hat{p}\vec{n}dS - \rho_0 \vec{g} V \end{aligned} \tag{11}$$

- Interprétation : la force exercée sur un obstacle *entièrement immergé* se compose de deux termes : une *force hydrodynamique* qui peut être déduite de la solution du problème *non pesant*, et une force hydrostatique qui n'est autre que la poussée d'Archimède !
- Conséquence : la force horizontale sur un sous-marin (ou un avion en vol subsonique comme on le verra plus tard) ne dépend pas de g !

Analyse dimensionnelle de l'eq. de QDM

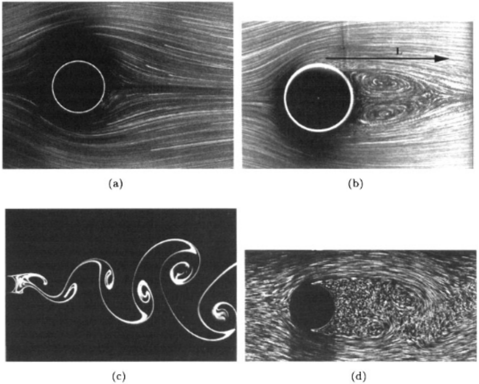
(a finir)
=> Nombre de Reynolds

Analyse dimensionnelle de l'eq. de masse

(a finir)
=> Nombre de Mach

Régimes d'écoulements autour d'un cylindre

Illustration de l'importance du nombre de Reynolds :
Régimes d'écoulement autour d'un cylindre



(a) $Re \approx 1$: écoulement stationnaire symétrique (régime de Stokes, cf. chap. 5).
(b) $Re = 26$: écoulement stationnaire avec zone de décollement.
(c) $Re = 200$: écoulement instationnaire, apparition d'une allée de tourbillons.
(d) $Re = 10^5$: écoulement turbulent.