

Organisation du cours :

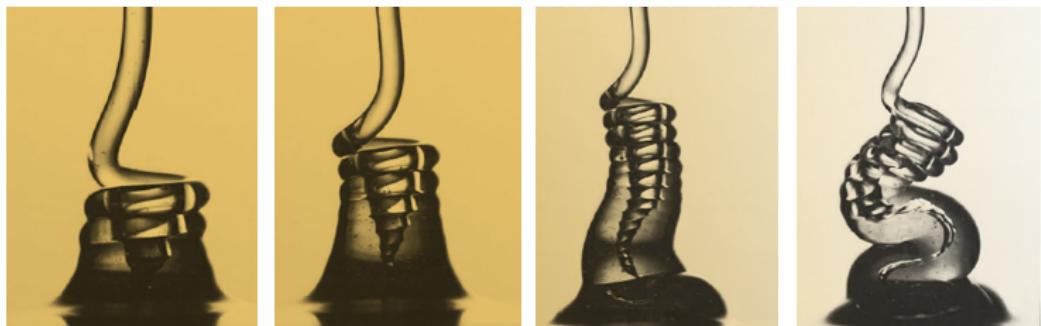
1. Introduction – Analyse dimensionnelle
2. Forces dans les fluides au repos – Hydrostatique
3. Forces dans les fluides en mouvement
4. Cinématique
5. Equations-bilan – Régimes d'écoulement
6. Ecoulements visqueux
7. Ecoulements inertIELS
8. Ecoulements potentiels et aérodynamique à haut Re
9. Ecoulements en conduite
10. Acoustique
11. Ecoulements compressibles
12. Ondes de choc



Mécanique des fluides

David FABRE

IMFT / UPS
Département de Mécanique



Enroulement d'un filet de miel. Patricia ERN © IMFT

6. Ecoulements visqueux

Définition

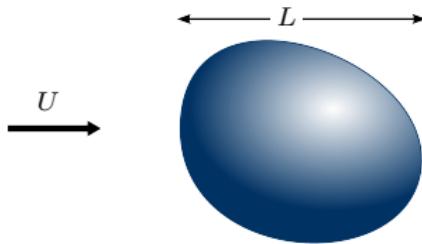
On appelle **écoulement visqueux** tout écoulement pour lequel le mode de transport de la quantité de mouvement par diffusion visqueuse est dominant par rapport au transport par advection.

Dans ces conditions, si U et L désignent les échelles caractéristiques de vitesse et de longueur de l'écoulement, le temps caractéristique de diffusion de la quantité de mouvement $\tau_d = L^2/\nu$ est donc beaucoup plus court que le temps d'advection $\tau_a = L/U$, soit :

$$\frac{\tau_d}{\tau_a} = \frac{L^2/\nu}{L/U} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad Re \equiv \frac{UL}{\nu} \ll 1 \quad (1)$$

où Re désigne le *nombre de Reynolds*.

Les écoulements visqueux sont donc aussi appelés **écoulements à faible nombre de Reynolds**



Exemples

Les écoulements à faible nombre de Reynolds peuvent correspondre à des écoulements

- très lents

Ex. glacier : $U \sim 1 \text{ m/jour} \sim 10^{-5} \text{ m/s}$; manteau terrestre : $U \sim 1 \text{ m/an} \sim 10^{-8} \text{ m/s}$

- de fluides très visqueux

Ex. polymères, pâtes, boues, lave : $\nu \sim 10^3 \text{ à } 10^6 \nu_{\text{eau}}$

- autour de corps très petits ou dans des géométries très confinées

Ex. bactéries, particules en suspension, milieux poreux : $L \sim 10^{-6} \text{ m à } 10^{-3} \text{ m}$

Equation de Stokes

Considérons l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien homogène (masse volumique uniforme), dans le champ de pesanteur (par ex.).

L'écoulement vérifie donc l'équation de continuité $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ et l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\operatorname{grad}}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\operatorname{grad}} p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\operatorname{grad}} \hat{p} + \nu \Delta \vec{u} \quad (2)$$

où $\hat{p} \equiv p - \rho \vec{g} \cdot \vec{x} = p + \rho g z$ est la **pression motrice** (z désigne la direction verticale ascendante).

Le rapport des ordres de grandeur des termes d'inertie à gauche et du terme de diffusif de droite s'écrit

$$[\text{Démonstration}] \rightarrow \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} = Re \ll 1 \quad (3)$$

Le terme inertiel est donc négligeable devant le terme visqueux, d'où l'**équation de Stokes** :

$$\vec{0} = -\frac{1}{\rho} \vec{\operatorname{grad}} \hat{p} + \nu \Delta \vec{u} \Rightarrow \vec{\operatorname{grad}} \hat{p} = \mu \Delta \vec{u} \quad (4)$$

où $\mu = \rho \nu$. Les écoulements visqueux sont donc aussi appelés **écoulements de Stokes**.



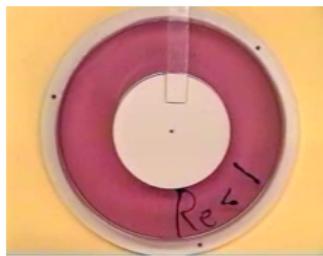
Propriétés

1. L'ordre de grandeur des fluctuations de pression est donné par

[Démonstration] $\longrightarrow [p']/L \sim \mu U/L^2$, soit $[p'] \sim \mu U/L$

Les fluctuations de pression sont donc complètement contrôlées par la viscosité.

2. Le terme instationnaire $\partial \vec{u} / \partial t$ est négligé et le temps t n'apparaît plus explicitement dans les équations : soit le problème est directement stationnaire, soit le temps est un simple paramètre du problème intervenant seulement dans les conditions aux limites par exemple (approximation quasi-stationnaire) \rightarrow **réversibilité temporelle** des écoulements de Stokes.



3. Le terme non linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{g}) \text{grad } \vec{u}$ de l'équation initiale de Navier-Stokes a disparu : l'équation de Stokes est une équation **linéaire**. \rightarrow **additivité des solutions** à conditions limites différentes.
4. Une autre conséquence est qu'à conditions aux limites données, l'équation de Stokes admet une **solution unique**, contrairement au cas général à Re quelconque, où la non linéarité des équations autorise l'existence simultanée de plusieurs écoulements solutions.

Solutions de l'équation de Stokes

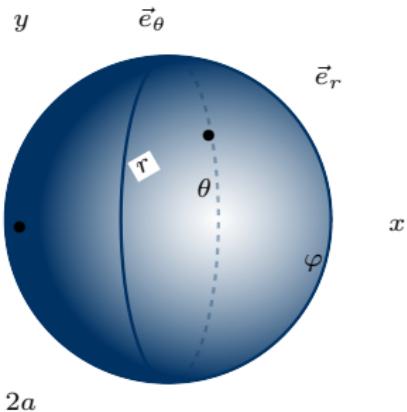
Bien que plus simple en principe à résoudre que l'équation non linéaire de Navier–Stokes, l'équation de Stokes reste en pratique délicate à résoudre techniquement, même pour des géométries simples d'écoulements.

Ecoulements externes : écoulement autour d'une sphère

Exemple d'écoulement visqueux autour d'un obstacle : Solution de Stokes dans le voisinage d'une sphère solide.

Cette solution est donnée par

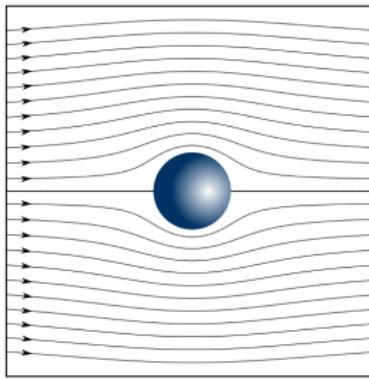
$$\begin{aligned} u_r &= U \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) & U, p_\infty \\ u_\theta &= -U \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \\ p &= p_\infty - \frac{3}{2} \mu U a \frac{\cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$



Exercice : Vérifier que cet écoulement est effectivement solution de l'équation de Stokes en coordonnées sphériques.

Ecoulements externes : écoulement autour d'une sphère

Lignes de courant :



Exercice : on en déduit la force exercée par l'écoulement sur la sphère (force de Stokes) :

$$\vec{F} \equiv \oint_{\text{sphère}} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_r \, dS = 6\pi\mu U a \vec{e}_x \quad (5)$$

Indication : en coordonnées sphériques les composantes nécessaires du tenseur des contraintes visqueuses sont

$$\tau_{rr} = 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right); \quad \tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

Ecoulements externes : cas général

Pour des obstacles de forme générale, d'échelle de longueur caractéristique donnée L , une estimation de l'ordre de grandeur de la force exercée par l'écoulement, avec des fluctuations de **pression** d'ordre

$$[p'] \sim \mu U / L$$

et des contraintes de **frottements visqueux** d'ordre

$$\tau \sim \mu U / L$$

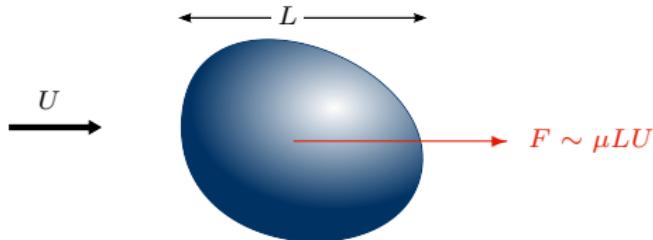
conduit à une résultante d'ordre

$$\mu U / L \times L^2$$

soit la force de Stokes générale

$$F \sim \mu U L$$

en cohérence avec les résultats exacts précédents.



Ecoulements autours d'obstacles

Outre la sphère, il existe très peu de cas où l'écoulement (et la force correspondante) ont des expressions analytiques.

Quelques exemples :

- Bulle sphérique de rayon a :

$$\vec{F} = 4\pi\mu U a \vec{e}_x$$

(géométrie identique à une sphère mais conditions limites en $r = a$ différentes !)

- Disque de rayon a et d'épaisseur nulle (axe aligné avec l'écoulement) :

$$\vec{F} = 16\mu U a \vec{e}_x$$

- Disque de rayon a et d'épaisseur nulle (axe perpendiculaire à l'écoulement) :

$$\vec{F} = \frac{32}{3}\mu U a \vec{e}_x$$

- Cylindre de rayon a et de longueur L (axe perpendiculaire à l'écoulement) :

$$\vec{F} \approx \mu U a \log\left(\frac{L}{a}\right) \vec{e}_x$$

Remarque : pour un cylindre de longueur infinie ($L/a \rightarrow \infty$)

Il n'existe pas de solution à l'équation de Stokes en 2 dimensions !

(Paradoxe de Stokes)



Ecoulements internes

Il n'existe pas de solution générale de Stokes dans des conduites ou canaux.

On peut cependant remarquer (exercice) que toute solution stationnaire de l'équation de Navier-Stokes vérifiant

$$(\vec{u} \cdot \text{grad})\vec{u} = \vec{0}$$

est automatiquement solution exacte de Stokes.

C'est en particulier (exercice) le cas des écoulements dits **parallèles**, de la forme

$$\vec{u} = u(y) \vec{e}_x \quad (\text{en géométrie cartésienne})$$

ou

$$\vec{u} = u(r) \vec{e}_x \quad (\text{en géométrie cylindrique})$$

On en déduit que les écoulements de Poiseuille plan et cylindrique, de film tombant, de Couette plan avec ou sans gradient de pression sont solutions exactes de l'équation de Stokes.

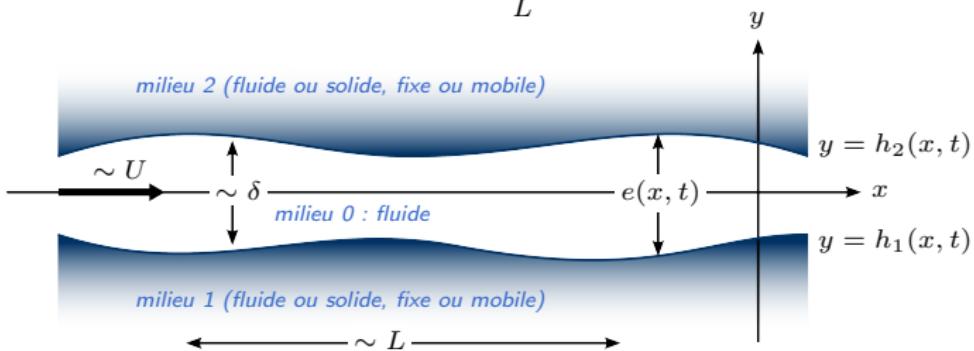
S'il n'existe pas de solution simple si l'écoulement n'est pas parallèle, on peut cependant chercher des solutions approchées dans le cas des écoulements **quasi-parallèles** (cf. section suivante).



Définition

On appellera **film mince** tout écoulement de fluide dont l'épaisseur caractéristique $|e(x, t)| \sim \delta$ est faible comparée à l'échelle caractéristique de variation longitudinale L :

$$\delta \ll L \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L} \ll 1$$



Dans ce cas, l'écoulement est dit **quasi-parallèle**.

Si U désigne une vitesse caractéristique de l'écoulement, alors on définit classiquement le nombre de Reynolds du film comme

$$Re = \frac{U\delta}{\nu}$$

où ν désigne la viscosité cinématique du fluide.

L'étude de la dynamique des films minces est l'objet de la **théorie de la lubrification**.

Équations de film mince

Hypothèses et équations de base :

Ecoulement plan, incompressible, de fluide homogène (ρ uniforme) et newtonien

$$\rightarrow \vec{u} = u(x, y, t) \mathbf{e}_x + v(x, y, t) \mathbf{e}_y$$

avec

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

et

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\operatorname{grad}}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\operatorname{grad}} p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\operatorname{grad}} \hat{p} + \nu \Delta \vec{u}$$

où $\hat{p} = p + \rho g z$ est la pression motrice.

D'où les équations scalaires suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$



Équations de film mince

Analyse dimensionnelle des équations :

Ordres de grandeurs :

$x = \mathcal{O}(L)$	$L :$	échelle caractéristique de longueur suivant x
$y = \mathcal{O}(\delta)$	$\delta :$ de longueur suivant y
$t = \mathcal{O}(\tau)$	$\tau :$ de temps
$u = \mathcal{O}(U)$	$U :$ de vitesse longitudinale
$v = \mathcal{O}(V)$	$V :$ de vitesse transversale
$\hat{p} = \mathcal{O}([p'])$	$[p'] :$ de (variation de) pression

Les échelles L, δ, U, τ sont imposées par les données du problème ; (si le problème est stationnaire $\tau = \infty$)

Les échelles V et $[p']$, ordres de grandeur non connus de vitesse normale et des variations de pression motrice, sont à déterminer par examen des équations en appliquant le principe de moindre dégénérescence (PMD) :

"on simplifie en gardant le maximum de termes possible"

Équations de film mince

Après simplification asymptotique :

[Démonstration]

- Eq. (6) $\Rightarrow V = \frac{\delta}{L} U = \varepsilon U$ (PMD)

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

- Eq. (7) $\Rightarrow [p'] = \mu U \frac{L}{\delta^2}$ (PMD)

Si $\frac{\delta^2 U}{\nu L} = \varepsilon Re \ll 1$, le terme d'advection est négligeable,

Si $\frac{\tau}{\tau_d} = \tau \frac{\nu}{L^2} \gg 1$, le terme de dérivée temporelle est négligeable,

d'où

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

- Finalement Eq. (8) se réduit à

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0, \quad \text{soit} \quad \hat{p} = \hat{p}(x, t) \quad (11)$$



Solution générale de film mince

On en déduit la solution générale :

[Démonstration]

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \hat{p} &= \hat{p}(x, t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(x, t)$$

$$\Rightarrow u(x, y, t) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(x, t) y^2 + A(x, t)y + B(x, t)$$

où $A(x, t)$ et $B(x, t)$ sont à déterminer à l'aide des conditions aux limites avec les milieux 1 et 2 en $y = h_1(x, t)$ et $y = h_2(x, t)$.

De plus :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2}(x, t) y^2 - \frac{\partial A}{\partial x}(x, t)y - \frac{\partial B}{\partial x}(x, t)$$

$$\Rightarrow v(x, y, t) = -\frac{1}{6\mu} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2}(x, t) y^3 - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x}(x, t) y^2 - \frac{\partial B}{\partial x}(x, t)y + C(x, t)$$

où $C(x, t)$ est à déterminer à l'aide des conditions aux limites.



Exemple d'application : écoulement entre deux cylindres

Considérons l'écoulement à travers l'étranglement entre deux cylindres de rayon R , longueur L , séparés par une distance $\delta \ll R$.

Dans ce cas :

$$e(x) = \delta + 2(R - \sqrt{R^2 - x^2})$$

Problème : déterminer la relation entre Q_m (débit massique) et ΔP (variation de pression à travers l'étranglement)

Solution (exercice) :

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - (e(x)/2)^2)$$

$$Q_m = \rho L \int_{-e(x)/2}^{+e(x)/2} u(x, y) dy = -\frac{\rho L}{12\mu} e(x)^3 \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\Delta P = \int_{-R}^{+R} \frac{\partial p}{\partial x} dx = -\frac{12\mu Q_m}{\rho L} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{e(x)^3} dx$$

L'intégrale peut être évaluée et a l'expression suivante :

$$\int_{-R}^{+R} \frac{1}{(\delta + 2R - 2\sqrt{R^2 - x^2})^3} dx \approx \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{R}{\delta^5}}$$

Finalement :

$$\Delta P = -\frac{9\pi}{2} \frac{\mu Q_m}{\rho L} \sqrt{\frac{R}{\delta^5}}$$



Mécanique des fluides



David FABRE

IMFT / UPS
Département de Mécanique

Allée de tourbillons de Von Karman
en aval d'un cylindre à $Re = 140$ (lignes d'émission).



Allée de tourbillons de Von Karman
dans le sillage de l'île de Guadalupe (océan Pacifique).

7. Ecoulements inertIELS

Définitions

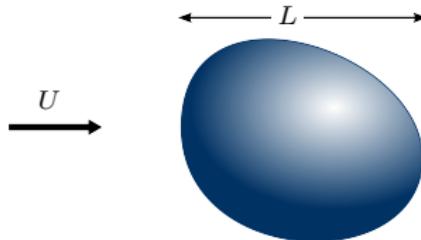
On appelle **écoulement inertiel** tout écoulement pour lequel le mode de transport de la quantité de mouvement par advection est dominant par rapport au transport par diffusion visqueuse (frottements).

Dans ces conditions, si U et L désignent les échelles caractéristiques de vitesse et de longueur de l'écoulement, le temps caractéristique d'advection de la quantité de mouvement $\tau_a = L/U$ est donc beaucoup plus court que le temps de diffusion $\tau_d = L^2/\nu$, soit :

$$\frac{\tau_d}{\tau_a} = \frac{L^2/\nu}{L/U} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad Re \equiv \frac{UL}{\nu} \gg 1 \quad (12)$$

où Re désigne le *nombre de Reynolds* :

les écoulements inertIELS sont ainsi aussi appelés **écoulements à grand nombre de Reynolds**



Exemples

Ecoulements inertiels :

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu} \gg 1$$

- Tache rouge de Jupiter :
 $U \sim 100 \text{ m/s}$ (360 km/h), $L \sim 15000 \text{ km}$, $\nu \sim 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (cf. air) $\Rightarrow Re \sim 10^{14}$
- Cyclone :
 $U \sim 45 \text{ m/s}$ (170 km/h), $L \sim 100 \text{ km}$, $\nu \sim 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Rightarrow Re \sim 3 \times 10^{11}$
- Avion :
 $U \sim 100 \text{ m/s}$ (360 km/h), $L \sim 15 \text{ m}$, $\nu \sim 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Rightarrow Re \sim 10^8$
- Bateau :
 $U \sim 10 \text{ m/s}$ (20 noeuds, 36 km/h), $L \sim 10 \text{ m}$, $\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Rightarrow Re \sim 10^8$
- Nageur :
 $U \sim 1 \text{ m/s}$, $L \sim 2 \text{ m}$, $\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Rightarrow Re \sim 2 \times 10^6$
- Ballon de foot :
 $U \sim 30 \text{ m/s}$ (100 km/h), $L \sim 0.2 \text{ m}$, $\nu \sim 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Rightarrow Re \sim 4 \times 10^5$
- Robinet :
 $U \sim 50 \text{ cm/s}$, $L \sim 2 \text{ cm}$, $\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Rightarrow Re \sim 10^4$



Equation d'Euler

Considérons l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien homogène (masse volumique uniforme), dans le champ de pesanteur (par ex.).

L'écoulement vérifie donc l'équation de continuité $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ et l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\overset{\Rightarrow}{\operatorname{grad}} \vec{u}) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{g} \vec{r} \operatorname{ad} p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{g} \vec{r} \operatorname{ad} \hat{p} + \nu \Delta \vec{u} \quad (13)$$

où $\hat{p} \equiv p - \rho \vec{g} \cdot \vec{x} = p + \rho g z$ est la pression motrice (z désigne la direction verticale ascendante).

Le rapport des ordres de grandeur des termes d'inertie à gauche et du terme de diffusif de droite s'écrit

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} = Re \gg 1 \quad (14)$$

Le terme visqueux est donc négligeable devant le terme inertiel, d'où l'**équation d'Euler** :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\overset{\Rightarrow}{\operatorname{grad}} \vec{u}) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{g} \vec{r} \operatorname{ad} \hat{p} \quad (15)$$



Ecoulement de fluide parfait

L'équation d'Euler obtenue pour un écoulement inertiel peut être aussi interprétée comme l'équation du mouvement pour un fluide "théorique", idéalisé, parfaitement non visqueux, c'est-à-dire de viscosité nulle $\nu = 0$, appelé **fluide parfait**.

$$\left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{\operatorname{grad}} \vec{u}) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{g} \operatorname{rad} \hat{p} + \nu \Delta \vec{u} \right\}_{\nu=0} \Rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{\operatorname{grad}} \vec{u}) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{g} \operatorname{rad} \hat{p}$$

Les écoulements inertIELS sont donc aussi aussi parfois appelés **écoulements de fluide parfait**, même si cette dénomination oublie que l'équation d'Euler n'est qu'une simplification de l'équation de Navier-Stokes dans la limite $Re \gg 1$ et que le fluide parfait n'existe pas (tous les fluides ayant une viscosité), a quelques exceptions exotiques près :

- Hélium liquide "superfluide" à $T < 4K$;
- Condensats de Bose-Einstein
- Plasmas de quarks et gluons (intérieur des étoiles à neutron...)

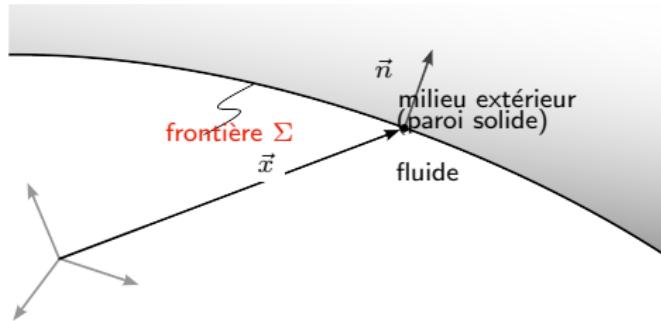


Propriétés de l'équation d'Euler

L'équation d'Euler n'est pas beaucoup plus facile à résoudre que celle de N-S, et pose quelques problèmes conceptuels...

- Dans certains cas elle n'a pas de solution unique (exemple : écoulements parallèles de la forme $u(y)$)
- Elle autorise des solutions discontinues (couches de cisaillement).

Mathématiquement l'équation d'Euler est d'ordre 1 en espace et nécessite donc des conditions limites moins contraignantes que l'équation de Navier-Stokes :



fluidé réel
(visqueux)

continuité de la vitesse (condition d'adhérence)
 $\vec{u}(\vec{x} \in \Sigma, t) = \vec{u}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t)$

fluidé parfait
(non visqueux)

continuité de la vitesse normale (condition de glissement ou non-pénétration)
 $\vec{u}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} = \vec{u}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n}$



Equation pour l'énergie cinétique

Repartons de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide homogène de masse volumique ρ soumis à une force extérieure volumique \vec{f} :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{grad} \vec{u}) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{g} \vec{rad} p + \vec{f} + \nu \Delta \vec{u}. \quad (16)$$

En notant $\vec{\omega} = \vec{rot}(\vec{u})$ le champ de vorticité et $u^2 = ||\vec{u}||^2$, utilisons l'égalité mathématique (à vérifier en exercice)

$$(\vec{grad} \vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{g} \vec{rad} u^2$$

En prenant le produit scalaire de l'éq. de Navier-Stokes avec \vec{u} , on obtient l'équation de bilan local pour l'énergie cinétique *massique* $e_k = \frac{1}{2} u^2$:

[Démonstration] $\rightarrow \frac{de_k}{dt} = \frac{\partial e_k}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{g} \vec{rad} (e_k) = -\vec{u} \cdot \frac{\vec{g} \vec{rad} p}{\rho} + \vec{f} \cdot \vec{u} + \rho \Pi_v \quad (17)$

où $\Pi_v = (1/\rho) \vec{div}(\vec{\tau}) \cdot \vec{u}$ est la puissance massique des efforts visqueux.

Si $\vec{f} = -g \vec{e}_z$ et si le fluide est incompressible (ρ est uniforme), On peut réécrire ce bilan en introduisant l'énergie mécanique massique : $e_m \equiv p/\rho + gz + \frac{1}{2} u^2$:

[Démonstration] $\rightarrow \frac{de_m}{dt} = \frac{\partial e_m}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{g} \vec{rad} (e_m) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \Pi_v \quad (18)$

Remarque : on peut décomposer Π_v en puissance extérieure et puissance intérieure
 $\rho \Pi_v = \vec{div}(\vec{\tau}) \cdot \vec{u} = \vec{div}(\vec{\tau} \cdot \vec{u}) - \vec{\tau} \cdot \vec{grad}(\vec{u}) \quad (\text{cf. cours MMC})$



Premier théorème de Bernoulli : conservation de l'énergie mécanique

On en déduit donc le **Premier théorème de Bernoulli** :

Hypothèses :

- (a) fluide incompressible (ou écoulement isovolume),
- (b) force volumique $\vec{g} = -g\vec{z}$ uniforme,
- (c) écoulement stationnaire,
- (d) " Fluide parfait" (ou plus rigoureusement forces visqueuses négligeables),

Alors la quantité $e_m \equiv p/\rho + gz + \frac{1}{2}u^2$ se conserve le long de chaque ligne de courant (ou trajectoire).

On note aussi (formellement) :

$$e_m = C(\vec{X}_0), \text{ où } \vec{X}_0 \text{ est le "label" de chaque trajectoire lagrangienne.}$$

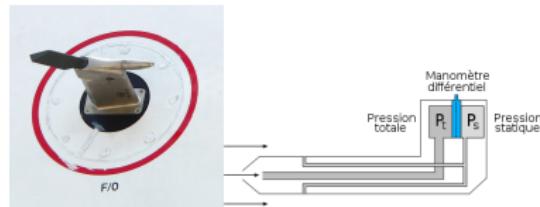
Remarques

- Dans le cas des gaz on néglige habituellement l'énergie potentielle de gravité.
Le théorème de Bernoulli s'écrit alors : $p + \frac{1}{2}\rho u^2 \equiv p_A = C^{te}$.
 p_A est appelée la pression de stagnation ou pression d'arrêt.
- Dans le cas des liquides, e_m est aussi couramment appelée la charge de l'écoulement.
- Si l'hypothèse (b) est remplacée par
(b') : Forces volumiques conservatives $\vec{g} = -g\vec{r}\text{ad}\mathcal{U}$,
alors le théorème se généralise en : $p + \rho\mathcal{U} + \frac{1}{2}\rho u^2 = C(\vec{X}_0)$.
- Il existe une généralisation si l'hypothèse (a) est remplacée par (a') : Fluide Barotrope, c.a.d. $\rho = \rho(P)$ (démo en exercice).



Application classiques de Bernoulli

1. Tube de Pitot (ou Antenne de Prandtl)



2. Effet Venturi (TP)
3. Loi de Torricelli (Exercice complémentaire)

Équations intrinsèques

Considérons l'écoulement *stationnaire* et *incompressible* d'un fluide dans le régime inertiel ($Re \gg 1$).

En notant s l'abscisse curviligne le long de la ligne de courant, R , \vec{r} et \vec{n} respectivement le rayon de courbure, la tangente et la normale localement à la ligne de courant (repère de Frenet), on montre :

1/ En projection sur la tangente \vec{r} , l'équation d'Euler donne

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z \right) = 0$$

On retrouve donc une démonstration alternative du théorème de Bernoulli vu précédemment.

2/ En projection sur la normale \vec{n} , l'équation d'Euler donne

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} = -\rho \frac{u^2}{R} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = \rho \frac{u^2}{R}$$

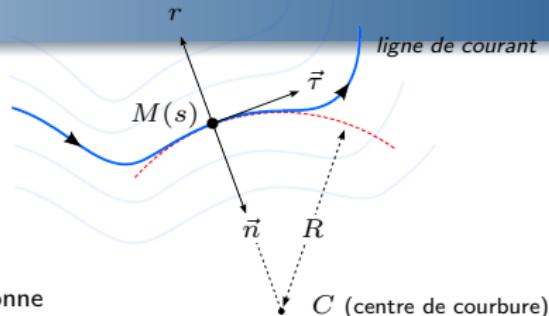
en notant r la coordonnée locale normale à la ligne de courant, pointant dans la direction opposée au centre de courbure (cf. figure).

Corollaires :

- Dans des régions de l'écoulement où les lignes de courant sont rectilignes et parallèles ($R = \infty$), alors la pression motrice \hat{p} est *constante perpendiculairement aux lignes de courant*.
- Dans des zones de l'écoulement où la vitesse est faible, \hat{p} est **uniforme**.

Conséquence importante :

Dans les *zones de recirculation* couramment rencontrées dans le sillage d'objets non profilés, la pression (motrice) est uniforme et approximativement égale à la pression "loin de l'objet".



Théorèmes intégraux : motivation

Problème générique : calcul de la force exercée par un fluide \mathcal{F} sur une structure de surface Σ .

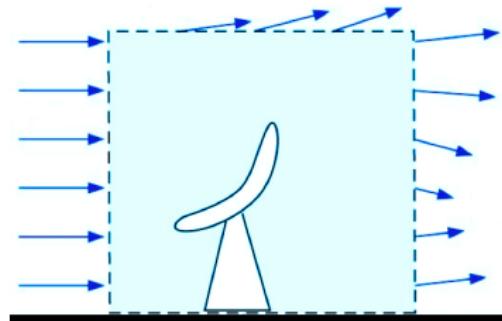
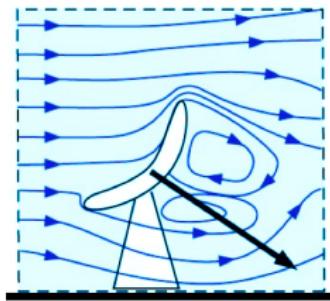
Méthode directe :

$$\vec{F}_{\mathcal{F} \rightarrow \Sigma} = \oint_{\Sigma} (-p\vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS$$

Nécessite la connaissance du champ de pression et de contrainte visqueuse sur la surface...
pas toujours possible !

Alternative ?

→ Bilan intégral de quantité de mouvement dans un volume de contrôle
bien choisi...



Théorème d'Euler

Rappel (chapitre 5) :

Soit Ω un volume de contrôle (fixe) dans le fluide. On note $\partial\Omega$ la frontière du volume de contrôle Ω , et \vec{n} sa normale sortante.

Le bilan intégral de quantité de mouvement pour le fluide contenu dans Ω est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} \, dV + \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dS = \oint_{\partial\Omega} (-p \vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) \, dS + \int_{\Omega} \rho \vec{f} \, dV \quad (19)$$

Supposons que la frontière $\partial\Omega = \Sigma \cup \Gamma$ est composée de deux parties :

- Une surface Σ qui est la paroi d'un solide sur lequel le fluide exerce une force \vec{F} que l'on cherche à déterminer
(et sur laquelle la répartition de pression et de contrainte visqueuse ne sont pas connues).
- Une surface Γ sur laquelle on connaît (ou bien on peut modéliser) le champ de pression et de vitesse, et sur laquelle les effets visqueux peuvent être négligés

Alors le bilan de quantité de mouvement prend la forme suivante, appelée *Théorème d'Euler* :

$$\vec{F} = - \oint_{\Gamma} [\rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p \vec{n}] \, dS + \int_{\Omega} \rho \vec{f} \, dV \quad (20)$$

Utilité : dans de nombreux cas il est possible de séparer Γ en plusieurs parties sur lesquelles p et \vec{u} sont supposés uniformes.

Remarque : on peut aussi écrire l'intégrale surfacique sous la forme $-\oint_{\Gamma} \vec{\mathcal{D}} \cdot \vec{n} \, dS$ où $\vec{\mathcal{D}} = p \vec{I} + \rho \vec{u} \otimes \vec{u}$ est le *tenseur dynalpie*.



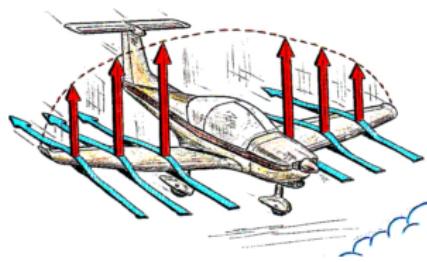
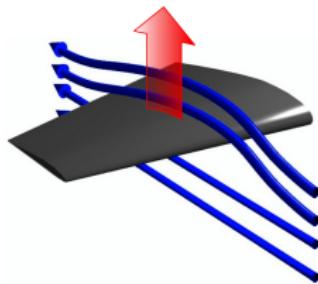
Théorème d'Euler : Exemples d'applications

- Force exercée par l'écoulement dans une conduite coudée.
- Force exercée par l'écoulement dans une conduite avec rétrécissement ou élargissement.
- Jet impactant sur un auget (TP) ou sur une plaque (ex. 8.2)
- Détermination de la poussée d'un réacteur.
- (...)

Mécanique des fluides

David FABRE

IMFT / UPS
Département de Mécanique



8. Ecoulements potentiels et Aérodynamique à haut Reynolds



Dynamique de la vorticité

En prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes on obtient l'équation de Helmholtz qui gouverne l'évolution de la vorticité $\vec{\omega} = \vec{rot}(\vec{u})$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{grad}\vec{\omega}) \cdot \vec{u} = (\vec{grad}\vec{u}) \cdot \vec{\omega} + \nu \Delta \vec{\omega} \quad [\text{Démonstration}] \quad (21)$$

Interprétation : 3 modes d'évolution de la vorticité

Transport, Etirement , Diffusion

→ La viscosité peut également être interprétée comme un phénomène de **diffusion de la vorticité**. Si $Re \gg 1$, la diffusion est négligeable, la vorticité est uniquement advectée et étirée.

Conséquence (**Théorème de Laplace**) :

Si $\vec{\omega} = \vec{0}$ initialement dans tout l'écoulement et si les forces visqueuses sont négligeables, alors $\vec{\omega}$ reste nulle.

Ce théorème justifie qu'en pratique de nombreux écoulements à grand nombre de Reynolds sont irrotationnels.



Ecoulements potentiels

Si $\vec{rot}(\vec{u}) = \vec{0}$, alors il existe une fonction Φ appelée **Potentiel des vitesses** telle que :

$$\vec{u} = \vec{\text{grad}}\Phi$$

Si, de plus, $div(\vec{u}) = 0$, alors le potentiel vérifie l'équation suivante :

$$\Delta\Phi = 0.$$

Dans ce cas le calcul d'un écoulement se ramène alors à la résolution d'une équation scalaire linéaire particulièrement simple !

Il existe des méthodes mathématiques puissantes pour résoudre cette équation dans un grand nombre de cas (cf. programme de Master).

Remarques :

- Φ est défini à une constante près, qui peut éventuellement dépendre du temps.
- L'hypothèse d'écoulement potentiel est une *hypothèse mathématique, contrairement à l'hypothèse de régime d'écoulement inertiel qui est une hypothèse physique ! (En général les écoulements inertiels sont potentiels "loin des obstacles", mais il existe des contre-exemples !)*



Ecoulements potentiels : propriétés

Propriétés :

- Les écoulements potentiels vérifient $\Delta \vec{u} = 0$ [Démonstration].
Ils sont donc solutions des équations d'Euler quelque soit la viscosité et donc le nombre de Reynolds !
- Réversibilité en temps : si $\vec{u} = \vec{\text{grad}}(\Phi)$ est solution, alors $-\vec{u} = \vec{\text{grad}}(-\Phi)$ l'est également.
- Additivité des solutions : si $\vec{u}_1 = \vec{\text{grad}}\Phi_1$ et $\vec{u}_2 = \vec{\text{grad}}\Phi_2$ sont deux écoulements potentiels alors $\vec{u} = \vec{\text{grad}}(\Phi_1 + \Phi_2)$ l'est également.

Remarque importante : non-additivité des pressions !

$$(p \neq p_1 + p_2)$$

Limitation : On montre qu'un écoulement potentiel stationnaire autour d'un obstacle génère une force de traînée nulle sur celui-ci ! (Paradoxe de d'Alembert).

En revanche l'écoulement potentiel autour d'un objet bidimensionnel (par exemple un profil d'aile) peut conduire à une force de portance non nulle.



Potentiels des vitesses et fonction de courant

Pour les écoulements bidimensionnels, le **potentiel des vitesses** Φ et la **fonction de courant** Ψ jouent des rôles voisins.

$$\vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \exists \Phi \text{ t.q. } \vec{u} = \vec{\text{grad}} \Phi$$

Si de plus $\text{div}(\vec{u}) = 0$, $\rightarrow \Delta \Phi = 0$.

$$\text{div}(\vec{u}) = 0 \quad \rightarrow \quad \exists \Psi \text{ t.q. } \vec{u} = \vec{\text{rot}}(\Psi \vec{e}_z)$$

Si de plus $\vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{0}$, $\rightarrow \Delta \Psi = 0$.

Pour les écoulements irrotationnels et incompressibles, on peut utiliser les 2. Dans ce cas les lignes iso-potentielles ($\Phi = Cte$) et les lignes de courant ($\Psi = Cte$) forment deux réseaux de courbes orthogonales.

On peut de plus combiner ces deux outils en un unique potentiel complexe défini par $f(x, y) = \Psi(x, y) + i\psi(x, y)$, qui a des propriétés mathématiques très utiles (cf. programme de M1).



Second théorème de Bernouilli pour les écoulements potentiels

Sous les hypothèses suivantes :

- (a) Ecoulement incompressible,
- (b) Champ de gravité uniforme,
- (c) Ecoulement potentiel (c.a.d. irrotationnel),

La quantité $p + \rho gz + \rho |\vec{u}|^2/2 + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ est *uniforme* dans tout l'écoulement. [Démonstration]

On note aussi (formellement) :

$$\frac{p}{\rho} + gz + |\vec{u}|^2/2 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C^{te}(t)$$

Cette version du théorème permet de calculer très facilement la pression (et donc les forces exercées sur un obstacle) dans un écoulement potentiel, si l'on connaît la valeur de la pression en **un** point du domaine (choisi par exemple "loin des obstacles" ou "sur une surface libre").

Remarques :

- Si l'écoulement est stationnaire, alors la C^{te} est habituellement déterminée en fonction des conditions à l'infini.
- Dans le cas instationnaire, la $C^{te}(t)$ peut être choisie arbitrairement à zéro (le potentiel est lui aussi défini à une $C^{te}(t)$ près).



Exemple 1 : cylindre

Exemple important : **Ecoulement potentiel autour d'un cylindre.**

(Exercice 8.0, à traiter en exercice préparatoire)

Considérons l'écoulement stationnaire, bidimensionnel autour d'un cylindre de rayon a dans un fluide de masse volumique ρ (on néglige la gravité, ou on travaille avec la pression motrice).

Deux solutions élémentaires :

- Solution symétrique $\Phi_s = x \left(1 + \frac{a^2}{x^2+y^2} \right) \equiv \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta$
- Solution antisymétrique $\Phi_a = \arctan(y/x) \equiv \theta$
- La superposition des deux, c.a.d. $\Phi = U\Phi_s + \frac{\Gamma}{2\pi}\Phi_a$, est également solution.

Montrer que la force exercée sur le cylindre par cet écoulement (par unité de longueur dans la direction transverse) est dans la direction y et a pour intensité

$$F_y = -\rho \Gamma U$$

Démonstrations :

- (i) Calcul direct : par calcul de la pression $p(r, \theta)$ puis intégration sur la surface.
- (ii) Calcul indirect : par bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle judicieusement choisi.

Remarque : ce résultat est généralisable quelque soit la forme de l'obstacle !

Théorème de Kutta-Joukowski



Exemple 2

Exemple 2 :

Oscillations dans un tube en U de longueur L et section S .

http://ressources.unisciel.fr/mecaflux/co/Chap5_Exo2.html

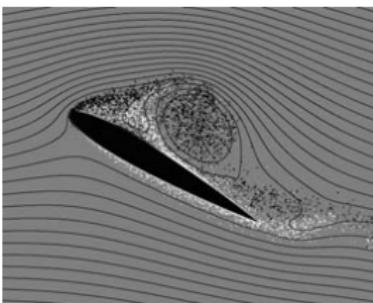
Exercice :

Montrez que si les oscillations sont de faible amplitudes, la période d'oscillation est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$$



Ecoulement autour d'un obstacle à haut Re : modélisation



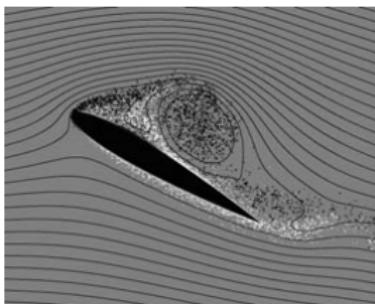
A grand Reynolds ($Re \gtrsim 10^3$), l'écoulement autour d'un obstacle se décompose en général en plusieurs domaines :

- Loin de l'obstacle : écoulement inertiel et irrotationnel (Potentiel).
La pression peut être déterminée à l'aide de Bernouilli.
- zones décollées : écoulement inertiel mais rotationnel.
(Bernoulli inutilisable ; en général la pression est quasi-uniforme dans ces zones).
- En proche paroi : Couches limites d'épaisseur $\delta \ll L$ à l'intérieur desquelles l'effet de la viscosité est dominant.
- Sillage : viscosité dominante.

Remarques :

Pour $Re \gtrsim 10^4$ le sillage et les zones de recirculation deviennent en général turbulentes.
Pour $Re \gtrsim 10^6$ les couches limites deviennent également turbulentes.

Ecoulement autour d'un obstacle à haut Re : Calcul des forces



$$\vec{F} = \int_S (-p\vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n})dS$$

On montre que (dans un fluide non pesant) la force exercée par le fluide sur l'objet peut être décomposée en 2 termes :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\hat{p}} + \vec{F}_v$$

- $\vec{F}_{\hat{p}} = - \int_S \hat{p} \vec{n} dS$ est la force due à la pression "motrice" et peut être calculée a partir de la solution "extérieure" inertielle,
- $\vec{F}_v = \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS$ peut être calculée a partir de la solution "intérieure" dans la couche limite.

Remarque :

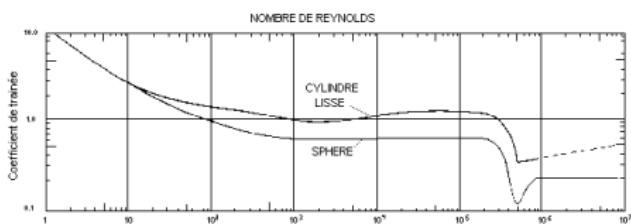
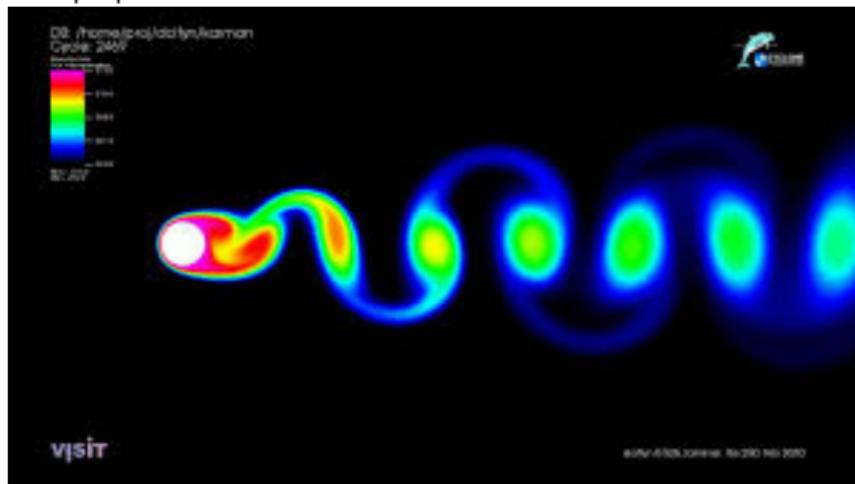
Dans un fluide pesant, il convient d'ajouter un troisième terme est la poussée d'Archimède \vec{F}_A . qui contient l'effet de la gravité (démo : en introduisant la pression motrice \hat{p} ; cf. chapitre 5).

Ecoulement autour d'un cylindre : résultats théoriques

- Régime de Stokes ($Re = 0$) : Il n'existe pas de solution des équations de Stokes bidimensionnelles autour d'un cylindre ! (Paradoxe de Stokes)
- Cas des faibles nombres Reynolds : $F_x = \frac{1}{2}\rho S C_x U^2$ avec :
 $C_x = \mathcal{O}(Re^{-1} \log Re)$
- Cas potentiel (cf. TD exercice préparatoire)
Il existe une solution potentielle NON UNIQUE.
 $F_x = 0$ (paradoxe de d'Alembert).

Ecoulement "réel" autour d'un cylindre : cas non tournant

Exemple pour $Re = 200$:



Ecoulement "réel" autour d'un cylindre : cas tournant

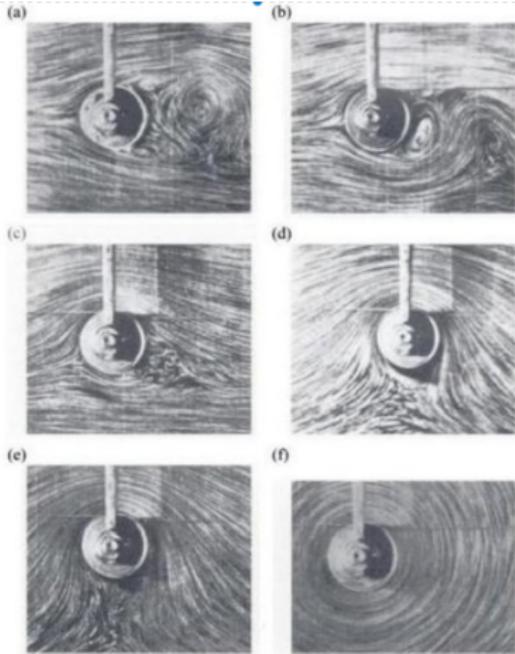
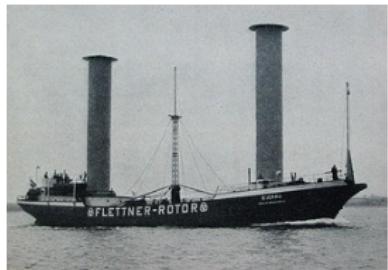


FIGURE 2.22 – Visualisations de l'écoulement d'eau autour d'un cylindre en rotation à $Re = 10^4$, Prandtl (1961)[139] ; (a), $\alpha = 0$; (b), $\alpha = 1$; (c), $\alpha = 2$; (d), $\alpha = 4$; (e), $\alpha = 6$; (f), $\alpha = \infty$

Application : turbovoile ou rotor "Flettner"

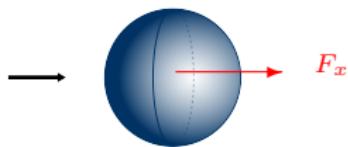


a) Buckau ou Baden-Baden



b) Alcyone

Ecoulement autour d'une sphère : résultats théoriques



Il existe une solution exacte dans deux cas :

- Régime de Stokes ($Re \ll 1$) : (cf. Chap. 6).

Force associée : $F_x = 6\pi\mu a U$

c'est à dire : $C_x = \frac{24}{Re}$

- Solution potentielle (cf. TD).

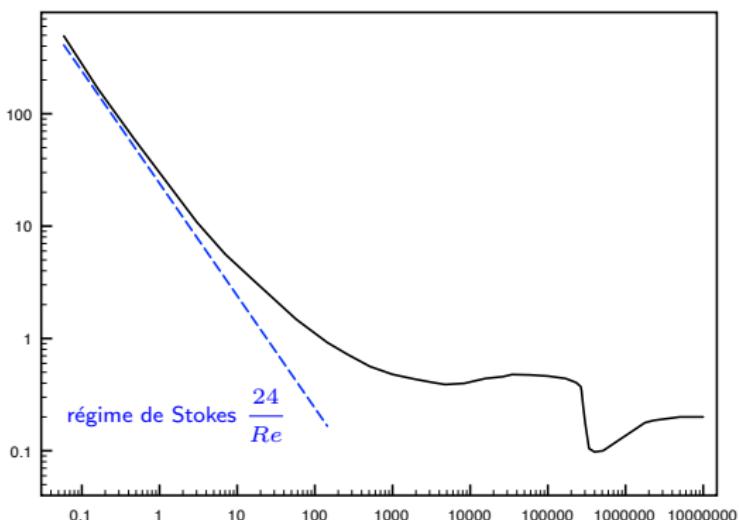
$$\Phi(r, \theta) = U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta$$

Force correspondante : $\vec{F} = \vec{0}$ (Paradoxe de d'Alembert).

Obstacle non profilé : la sphère

Coefficient de traînée

$$C_d = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 S}$$

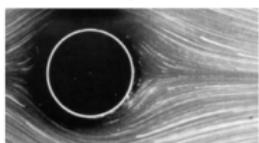


$S = \pi R^2$: surface projetée ;

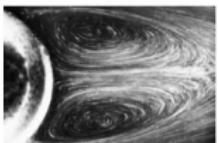
U : vitesse incidente

$$\text{Nombre de Reynolds} \quad Re = \frac{UD}{\nu}$$

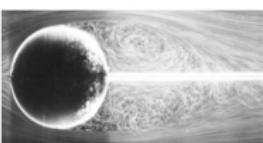
①



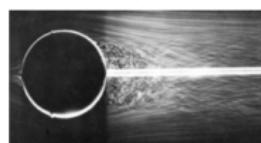
②



③



④



Ecoulement autour d'une sphère en mouvement oscillant

Exercice (TD 9.1) :

Considérons une sphère de rayon a oscillante à la pulsation ω :

$$\vec{U} = U_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

On montre que sous les deux hypothèses :

- Oscillation de faible amplitude ($U_0/\omega \ll a$),
- Période d'oscillation rapide par rapport au temps de diffusion visqueuse ($\omega^{-1} \ll \tau_v = a^2/\nu$),

Alors :

- Les effets visqueux restent confinés à une couche limite d'épaisseur $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$.
- A l'extérieur de la couche limite l'écoulement est potentiel et contribue à une force \vec{F}_p :

$$\vec{F}_p = -\rho V C \frac{d\vec{U}}{dt}$$

où V est le volume de la sphère et $C = 1/2$.

Interprétation : c'est la force à fournir pour accélérer une "masse ajoutée" à la sphère correspondant à un volume $V/2$ de fluide.

- Par analogie avec le second problème de Stokes (cf. TD 2) la force de frottement est

$$\vec{F}_v \approx -\frac{\mu a^2}{\delta} \vec{U}$$



Ecoulement autour d'un profil d'aile

On montre (cf. programme de master) que si l'angle d'incidence n'est pas trop élevé, l'écoulement peut être décomposé en deux parties :

- Solution extérieure potentielle.

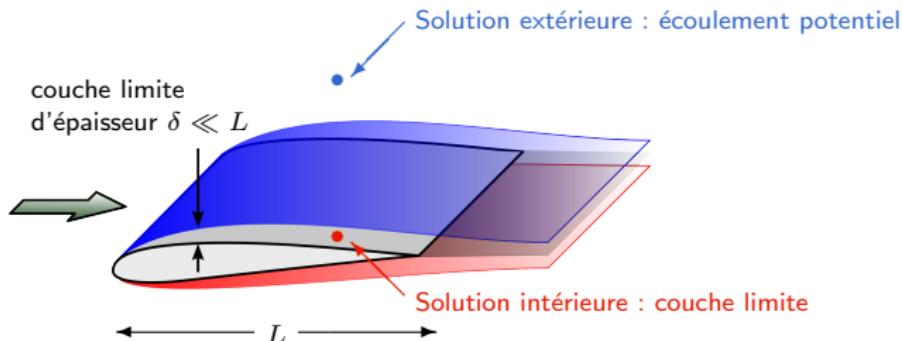
Peut être calculé à partir de la **théorie des profils portants**.

→ permet de calculer la portance F_y .

- Solution intérieure visqueuse.

Peut être calculée à partir de la **théorie de la couche limite de Prandtl**.

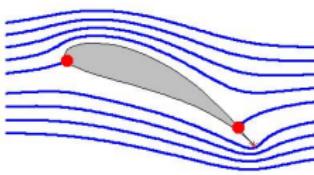
→ permet de calculer la traînée F_x



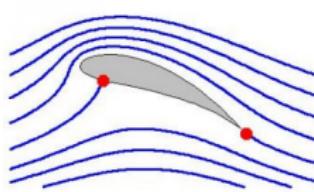
Notions sur la théorie des profils portants

Il existe des méthodes mathématiques puissantes pour calculer l'écoulement potentiel autour d'un objet 2D de forme quelconque (potentiel complexe, transformation conforme, ...)

La solution n'est pas unique mais définie à une constante Γ près (la circulation). La "bonne" valeur de Γ est celle qui conduit à un écoulement régulier au bord de fuite : condition de Kutta.



Solution avec $\Gamma = 0$
Condition de Kutta non vérifiée



Solution avec $\Gamma \neq 0$
Condition de Kutta vérifiée

On montre que :

- Pour un profil symétrique $\Gamma = -\pi U L \alpha \rightarrow C_y = 2\pi\alpha$
- Pour un profil cambré $\Gamma = -\pi U L(\alpha - \alpha_0) \rightarrow C_y = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$

Notions sur la théorie de Prandtl

La **théorie de Prandtl (1905)** permet de décrire l'écoulement dans la couche limite en proche paroi. (cf. programme de master) :

- Si $Re < 10^5$ la couche limite est laminaire et est donnée par la solution de Blasius :

$$\delta(x) \approx \sqrt{\nu x / U}$$

Justification : analogie avec le problème de la couche limite temporelle sur une plaque infinie (premier problème de Stokes) pour lequel $\delta(t) = \sqrt{\nu t}$ (cf. chap. 2).

Dans ce cas la contrainte visqueuse est donnée par : $\tau_{xy}(x) = \mu \partial u / \partial y \approx \mu U / \delta(x)$

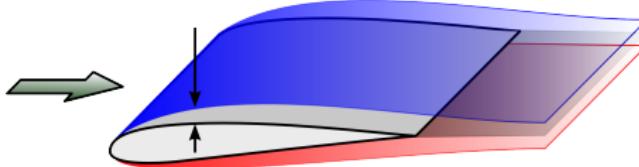
et la force de frottement totale (linéaire) vaut :

$$F_v = \int \tau_{xy}(x) dx \approx \mu U \int_0^L (\nu x / U)^{-1/2} dx = \rho U^2 L Re^{-1/2}$$

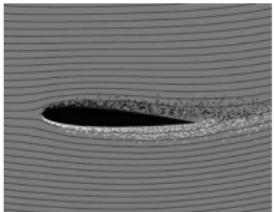
- Si $Re > 5 \cdot 10^5$ la couche limite est turbulente.

On utilise alors des lois empiriques pour estimer l'épaisseur des couches limites et la force de frottement. Par exemple :

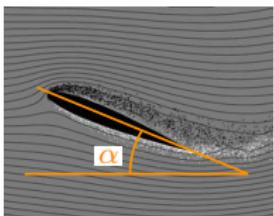
$$\delta(x) \approx 0.35x (Ux/\nu)^{-1/5}; \quad F_v \approx \rho LU^2 (\log_{10}(Re) - 2)^{-2}$$



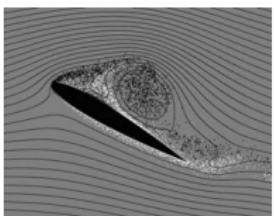
Ecoulement autour d'un profil d'aile : cas des fortes incidences



incidence faible



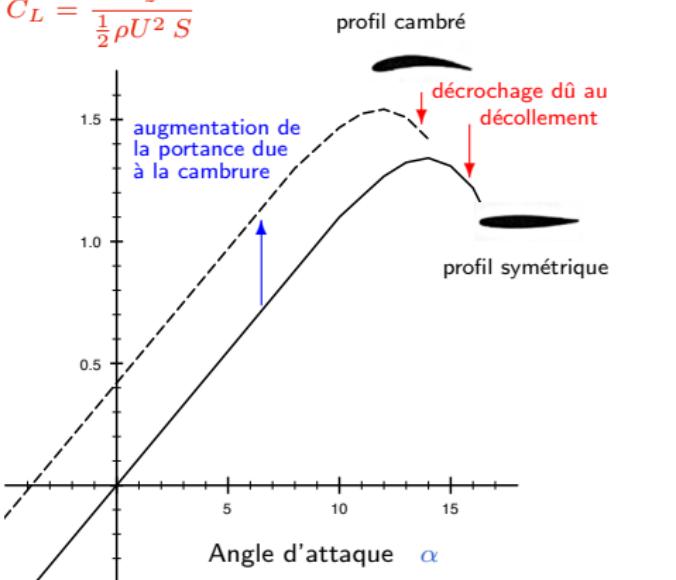
incidence modérée



incidence forte

Coefficient de portance

$$C_L = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho U^2 S}$$



S : surface de l'aile, U : vitesse incidente



Mécanique des fluides



David FABRE
IMFT / UPS
Département de Mécanique

Osborne REYNOLDS
(1842 – 1912)
Tableau de J. Collierde (1904)

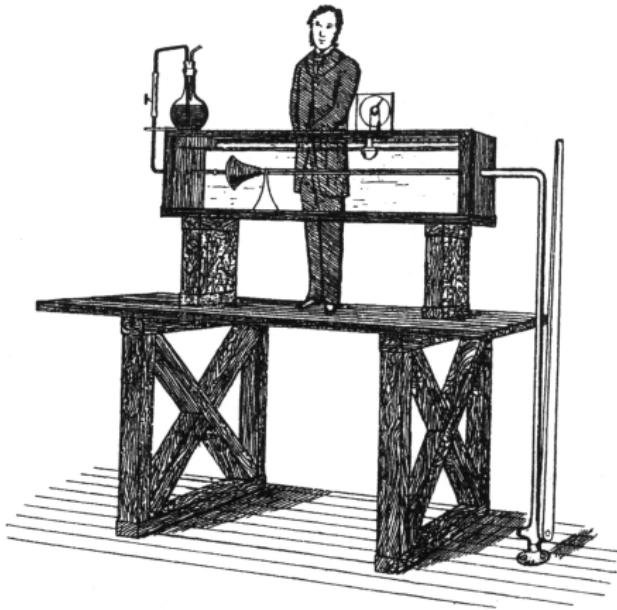
9. Ecoulements en conduite



10. Ecoulements en conduite

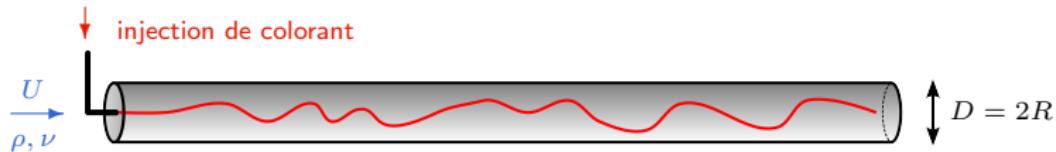
- Phénoménologie – Observations
 - Expérience de Reynolds
 - Régime laminaire
 - Régime de transition
 - Régime turbulent
- Modélisation et application des bilans intégraux
 - Volume de contrôle
 - Application des bilans intégraux
- Pertes de charge
 - Notion de pertes de charge
 - Pertes de charge régulières
 - Pertes de charge singulières

Expérience de Reynolds (1883)



Banc expérimental utilisé par Reynolds,
exposé à l'Université de Manchester (UK)

Principe de l'expérience



$(U = \dot{m}/(\rho\pi R^2)$ vitesse moyenne ou vitesse débitante, déduite du débit-masse \dot{m})

Un unique *paramètre sans dimension* :

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi\mu D} \quad (\text{nombre de Reynolds})$$

Constat de O. Reynolds :

Les expériences effectuées pour différentes valeurs de U , D , ρ et ν montrent que les écoulements observés sont **similaires si le nombre de Reynolds est le même.**

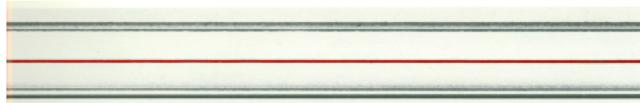
Ce nombre sans dimension joue ainsi le rôle de **paramètre de contrôle**, qui permet de déterminer le régime d'écoulement observé.

Observations expérimentales

Reynolds observe schématiquement trois régimes distincts :

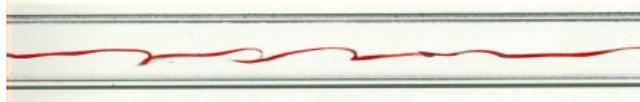
[visualisations](#)

$Re \lesssim 2000$: régime laminaire



écoulement stationnaire,
axisymétrique, établi, 1D
(écoulement de Poiseuille)

$2000 \lesssim Re \lesssim 4000$: régime de transition



écoulement instationnaire,
3D par intermittence,
sinon relaminarisation

$4000 \lesssim Re$: régime turbulent



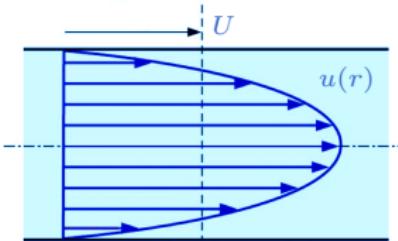
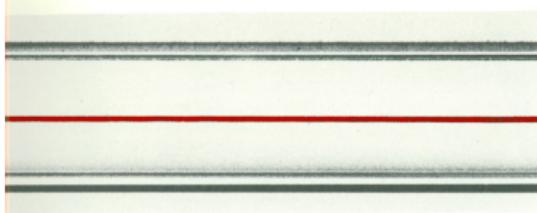
écoulement très instationnaire,
fortement 3D, "chaotique"
petits et gros tourbillons

Régime laminaire $Re \lesssim 2000$

Pour $Re \lesssim 2000$, Reynolds observe le régime dit **laminaire** pour lequel l'écoulement est stationnaire, axisymétrique, établi, 1D : l'expérience montre qu'il s'agit de l'écoulement de **Poiseuille**, dont le champ de vitesse est donné par

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$U = \frac{u_{max}}{2} = \frac{R^2}{8\mu} \left|\frac{dp}{dx}\right|$$



Le profil de vitesse parabolique correspondant à l'écoulement de Poiseuille est **une solution exacte** de l'équation de Navier–Stokes quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds.

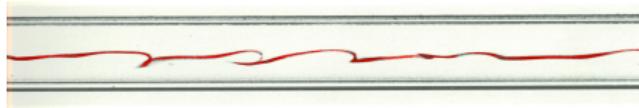
En général, cet écoulement se déstabilise pour $Re \sim 2000$, au delà **une autre solution** de l'équation de Navier–Stokes, plus compliquée, dont on ne connaît pas l'expression mathématique...

Cependant, si le niveau des perturbations en entrée est très faible, et si le tube est très lisse, cet écoulement peut être observé jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^5 !
(pour $Re > 2000$ La solution laminare est donc **métastable**...)



Régime de transition $2000 \lesssim Re \lesssim 4000$

Pour les nombres de Reynolds intermédiaires, compris entre 2000 et 4000 environ, on observe un régime dit **transitoire** ou de transition : instationnaire et 3D par intermittence, avec phase de relaminarisation.



Ce régime est le plus complexe à décrire et à comprendre : il fait l'objet de nombreuses recherches actuelles, aussi bien par le biais de **campagnes expérimentales** que de **simulations numériques** et **d'analyses théoriques**.

Ainsi, si le niveau des perturbations en entrée est très faible, et si le tube est très lisse, cet écoulement peut être observé jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^5 !

Les concepts adaptés à l'étude de ce régime de transition proviennent de

- ✓ la théorie des instabilités hydrodynamiques
- ✓ la théorie des systèmes dynamiques non linéaires
- ✓ la théorie des bifurcations
- ✓ [...]

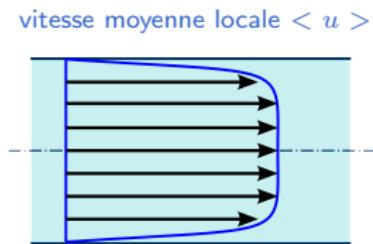
Régime turbulent $4000 \lesssim Re$

Pour les grands nombres de Reynolds, l'écoulement devient **turbulent** et rentre dans un régime fortement instationnaire, complètement 3D, présentant une structure spatiale très compliquée avec petits et grands tourbillons, et un comportement temporel "chaotique".

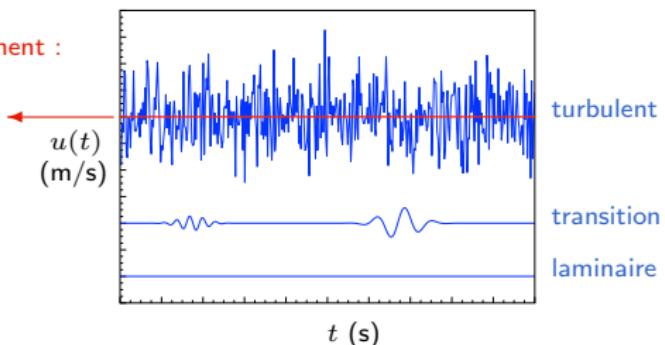


Paradoxalement, ce régime n'est pas le plus compliqué à modéliser si l'on accepte de se restreindre aux **grandes moyennes** de l'écoulement (**approche statistique**).

Mesure de vitesse en un point de l'écoulement :



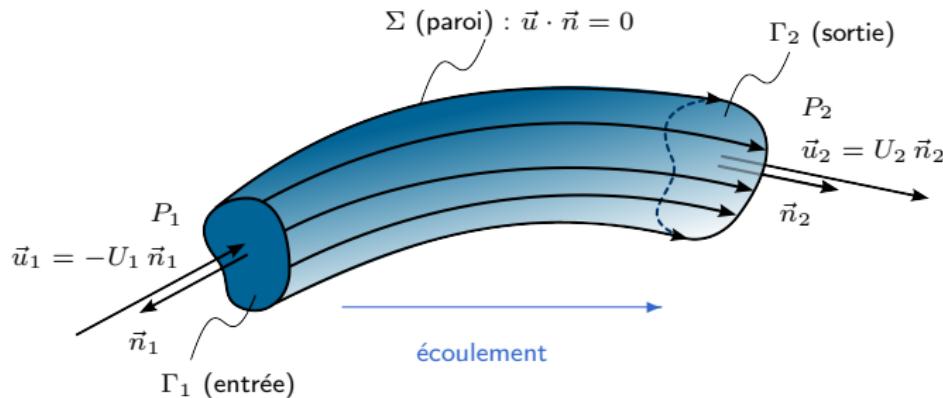
Profil de vitesse moyenne (quasi uniforme)



Volume de contrôle

Hypothèses de base : fluide homogène et newtonien, écoulement incompressible.

Pour appliquer les bilans intégraux dans la configuration d'une conduite de paroi fixe et imperméable, considérons le volume de contrôle fixe Ω associé au tube de courant délimité par la paroi de la conduite :



La frontière du volume de contrôle fixe Ω est donc donnée par :

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Sigma$$

où S_1 et S_2 désignent respectivement les sections d'entrée et de sortie, et S_L correspond à la surface latérale associée à la paroi.

On rappelle que \vec{n} désigne la normale sortante à la frontière du volume de contrôle.

Application des bilans intégraux

Hypothèses de base : fluide homogène et newtonien, écoulement incompressible.

- le **débit de matière** est conservé :

En terme de débit-masse : $\dot{m} = \rho U_1 S_1 = \rho U_2 S_2$

En terme de débit-volume : $Q = U_1 S_1 = U_2 S_2$

Ici $U = \langle u \rangle$ est la vitesse normale moyenne dans les sections d'entrée et de sortie.

($\langle \cdot \rangle$ est l'opérateur de moyenne sur la section en temps (dans le cas turbulent).)

- la **force exercée par l'écoulement sur la conduite** est donnée par

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \vec{F} = -(P_1 + \rho U_1^2) S_1 \vec{n}_1 - (P_2 + \rho U_2^2) S_2 \vec{n}_2 + M \vec{g}$$

où M désigne la masse de fluide contenue dans la portion de conduite entre S_1 et S_2 ,

Application : force exercée sur un tube coudé (exo complémentaire Moodle)

- Le **bilan d'énergie mécanique** entre les sections d'entrée S_1 et de sortie S_2 s'écrit :

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \dot{m} (\bar{e}_{m2} - \bar{e}_{m1}) = \mathcal{P}_{visq,int}$$

où :

1/ $\bar{e}_m \equiv p + \rho g z + \frac{\alpha}{2} \rho U^2$ correspond à l'énergie mécanique (volumique) moyenne dans la section concernée ;

2/ $\alpha = \frac{\langle u^3 \rangle}{\langle u \rangle^3}$ est un facteur de forme qui vaut 1 pour un écoulement turbulent (profil quasi-uniforme) et 2 pour un écoulement de Poiseuille (démo en exo).

3/ $\mathcal{P}_{visq,int} = - \int_{\Omega} \vec{\tau} : \vec{D} dV = -2\mu \int_{\Omega} \vec{D} : \vec{D} dV \leq 0$ est la Puissance intérieure des forces visqueuses.

NB cette loi peut s'interpréter comme une généralisation du (1er) théorème de Bernoulli.



Notion de pertes de charge

Définition : la quantité

$$\begin{aligned}\Delta_1^2 &= \bar{e}_{m_1} - \bar{e}_{m_2} \\ &= (p_1 + \rho g z_1 + \frac{\alpha}{2} \rho U_1^2) - (p_2 + \rho g z_2 + \frac{\alpha}{2} \rho U_2^2) \\ &= \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \quad (\text{si } S = \text{Cte})\end{aligned}$$

est appelée perte de charge entre les sections 1 et 2.

On a vu la formule explicite :

$$\Delta_1^2 = \frac{2\mu \int_{\Omega} \vec{D} : \vec{D} dV}{\dot{m}}$$

Cette formule n'est cependant pas utilisable directement (sauf dans le cas laminaire).

Dans le cas général on a recours à l'**analyse dimensionnelle** et a des lois approchées issues d'expériences modèles.

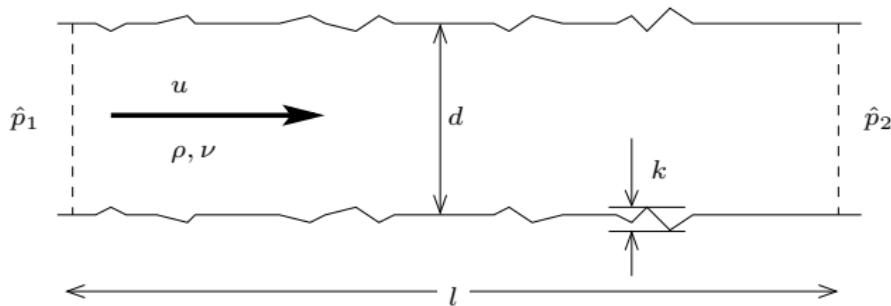
On distingue :

- Pertes de charges régulières (proportionnelles à la longueur L du tuyau)
- Pertes de charges singulières (dues à des "accidents" localisés).



Pertes de charge régulières

On appelle **pertes de charge régulières** (ou *linéaires*) la diminution d'énergie mécanique entre deux sections d'une conduite, à parois éventuellement rugueuses, de *section uniforme*.



*Ecoulement dans une conduite rugueuse de section uniforme.
k correspond à la taille moyenne des rugosités.*

Une estimation par analyse dimensionnelle montre que les pertes de charge régulières ont pour expression [Démonstration :]

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{L}{D} \lambda(\varepsilon, Re) \quad (22)$$

où l'on définit $Re = UD/\nu$ et la rugosité relative de la paroi $\varepsilon = k/D$.

$\lambda(\varepsilon, Re)$ est par construction sans dimension et est appelé **coefficient de perte de charge régulières**.

Coefficient de pertes de charge

- Cas laminaire :

Dans ce cas la solution de Poiseuille permet de calculer explicitement la perte de charge et conduit à : $\lambda = 64/Re$ [Exercice MMC]

On peut retrouver l'ordre de grandeur de ce résultat par analyse dimensionnelle [Démonstration]

- Cas turbulent "régime très rugueux" :

Si $\epsilon > 1\%$ et $Re > 10^5$, on observe que la perte de charge est indépendante de Re et donné par la formule approchée (Karman–Nikuradse)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3.71} \right) \quad (23)$$

Paradoxe : λ ne dépend plus de Re donc $\mathcal{P}_{visq,int}$ ne dépend plus de μ ???

Explication : la dissipation est turbulente.

- Cas turbulent, régime "hydrodynamiquement lisse" :

Pour $\epsilon < 0.01\%$ et $Re < 10^5$ on peut utiliser la formule de Blasius

$$\lambda = 0.316 Re^{-1/4} \quad (24)$$

- Cas turbulent, cas général

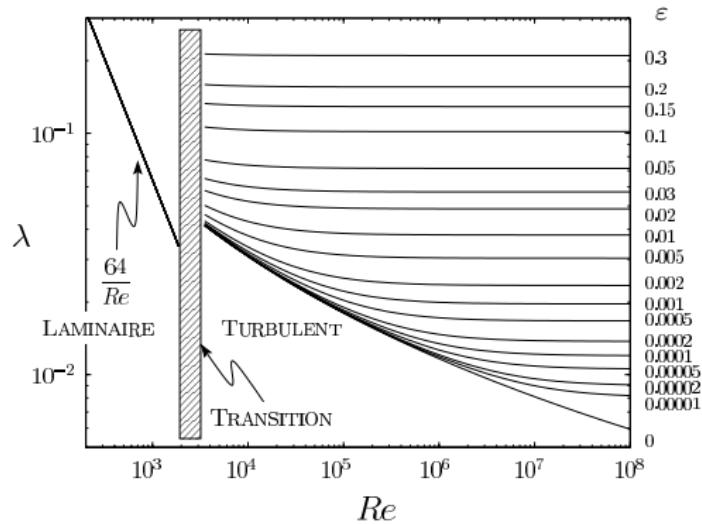
Pour $Re > 4000$ et ϵ quelconque, on utilise généralement la formule de Colebrook (semi-explicite) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3.71} \right) \quad (25)$$

Toutes ces formules sont tabulées dans le diagramme de Moody :



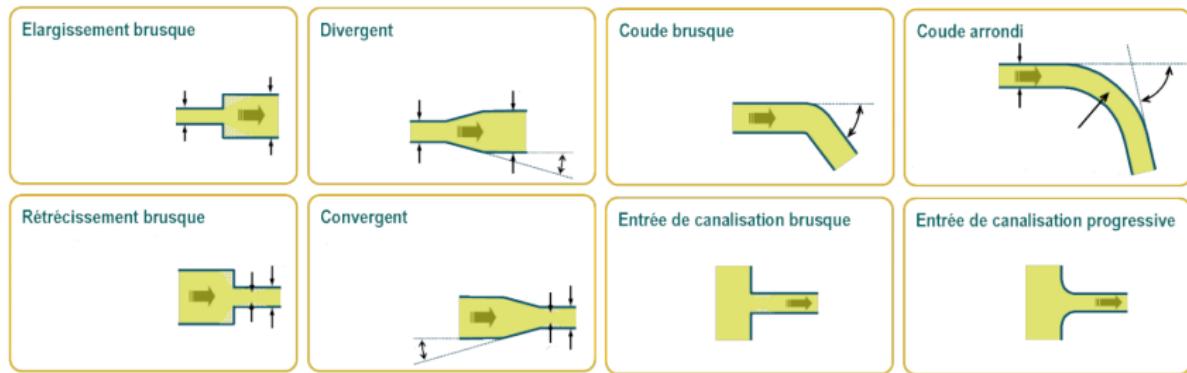
Diagramme de Moody



Le coefficient de pertes de charge régulières λ est donné en fonction du nombre de Reynolds Re pour différentes rugosités relatives ε dans le **diagramme de Moody** qui est obtenu par résolution numérique de la formule implicite de Colebrook.

Pertes de charge singulières

On appelle **pertes de charges singulières** la diminution d'énergie mécanique entre deux sections d'une conduite de part et d'autre d'une **singularité**, c'est-à-dire d'une variation *brusque* de la géométrie de la conduite : rétrécissement ou élargissement brusque, changement de direction (coude) ou présence d'un obstacle. En effet cette variation brusque des conditions d'écoulement s'accompagne généralement d'une augmentation du brassage du fluide à grand nombre de Reynolds et donc des frottements visqueux.



Pertes de charge singulières

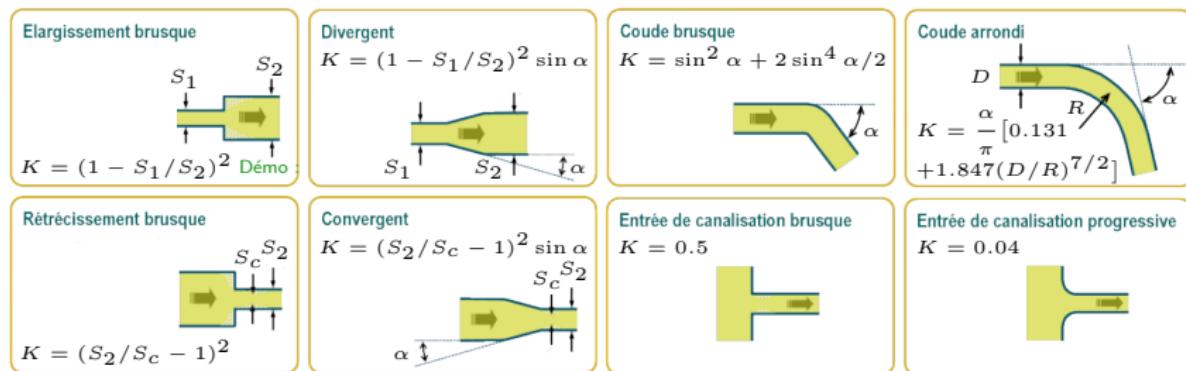
Une estimation par analyse dimensionnelle montre que les pertes de charge singulières s'écrivent

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{2} \rho u_1^2 K \quad (26)$$

où u_1 est la vitesse moyenne en amont de la singularité et K désigne le coefficient de pertes de charge singulières.

On observe que pour $Re \gtrsim 10^4$ ce coefficient ne dépend pas de Re .

Les valeurs de K sont données par des formules empiriques ou semi-empiriques en fonction du type de singularité concernée.



Quelques éléments de plomberie standard :

Raccord rectiligne $K = 0.04$; Valve "globe" ouverte $K = 6.4$; valve demi-fermée $K = 9.5$;

Coude 90° standard $K = 0.75$; coude à grand rayon $K = 0.45$;

Raccord en T $K = 0.4$ (ligne → ligne) / $K = 1.3$ (ligne → branche) / $K = 1.5$ (branche → ligne)....



Applications

Applications :

Exemple 1 : dimensionnement d'un chauffe-eau solaire.

Exemple 2 : canalisation en pente.