Mécanique des fluides

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique
david.fabre@imft.fr

2. Forces de pression dans un fluide – Hydrostatique

Sommaire

- Pression : définition et origine physique
- Loi de l'hydrostatique
- Efforts de pression sur une surface
- Poussée d'Archimède
- Equilibre des corps flottants
- Tension superficielle

Pression : définition(s)

Définitions :

- (Thermo :) Pression = variable intensive reliée aux échanges d'énergie mécaniques (liée au mouvement d'une frontière, et donc à la modification du volume)

$$p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = \rho^2 \left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_s$$

  (Définition théorique mais inutilisable avec les modèles de fluides les plus courants, pour lesquels $e = e(T)$...)
  Corollaire : à l'équilibre thermodynamique p est uniforme ; cf. cours thermo.

- (Mécanique) : Pression = force surfacique normale exercée par un fluide au repos sur une surface (frontière avec une paroi solide ou un autre domaine fluide).
  En considérant une surface élémentaire dS de normale $\vec{n}_{\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{S}}$, la force élémentaire exercée par le fluide vaut

$$d\vec{f}_{\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{S}} = p\vec{n}_{\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{S}} dS$$

- Lien entre les 2 définitions :
  Travail échangé (reçu par le fluide) au cours d'un déplacement $d\vec{X}$ de la surface élémentaire

$$\delta W = d\vec{f}_{\mathcal{S}\rightarrow\mathcal{F}} \cdot d\vec{X} = -pdV$$

Origine physique de la pression : cas des gaz

Dans un gaz la pression est une variation de *quantité de mouvement normale* liée aux collisions (sur une surface solide) ou aux particules traversant la surface (pour une surface entre deux domaines fluides adjacents).

Illustrations avec le programme kinetics.m

Pression = (densité) x (agitation thermique).
c.a.d. $p = \rho r T$ (loi des gaz parfaits)

(démo. a partir de la cinétique des gaz ; cf. Guyon, Hulin, Petit)

Origine physique de la pression : cas des liquides

Dans un liquide la pression est due aux liaisons (répulsives ou attractives) entre les molécules adjacentes.

La pression dans un liquide peut ainsi être négative (liaisons majoritairement attractives).
Cet état est métastable du point de vue thermo mais qui peut tout de même être observé dans la nature (sève dans les arbres de plus de 10m...)

NB : les liaisons sont très "raides" et il est difficile de faire varier la distance inter-molécule.
Ceci justifie que les liquides sont très peu compressibles.

Modèle "liquide incompressible, indilatable" : $\rho = \rho_0 = C_{te}$.
$\partial\rho/\partial p \approx 0 \rightarrow \rho$ et p sont découplés.
Dans ce modèle p devient une variable mécanique qui n'est plus reliée à la thermodynamique.

Application : statique des fluides

Loi de l'hydrostatique

Pour un fluide au repos dans un référentiel galiléen, soumis à un champ de force massique $\vec{g}$ constant (en général la gravité) :

$$\vec{\mathrm{grad}}\,p = \rho \vec{g}$$

Démonstration :
Equilibre des forces sur un volume élémentaire de fluide dV, de masse $dm = \rho\, dV$:

$$\sum d\vec{F}_{ext \to dV} = \vec{0}$$

Application *(exercices)* :

1/ Liquide incompressible de masse volumique uniforme ρ (océan)

$$p = p_0 - \rho g z$$

(Modèle plus précis incluant la thermocline, cf exercice 2.3)

2/ Gaz parfait (atmosphère d'une planète ou d'une étoile)
Modèle d'atmosphère isotherme :

$$p = p_0 e^{-\frac{gz}{rT_0}}$$

(Modèle d'atmosphère standard, cf. exercice 2.2).

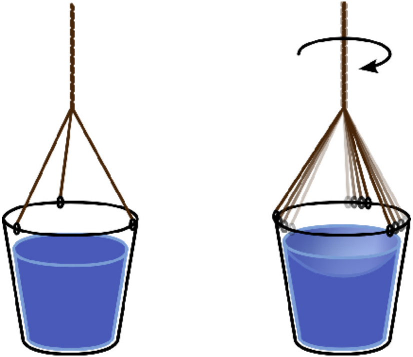
Statique des fluides en repère non galliléen

Cas d'un référentiel non galliléen

Pour un fluide "au repos" dans un référentiel non galliléen il faut ajouter les pseudo-forces d'inertie (accélération d'entrainement $\vec{a}_e$).

$$\vec{\mathrm{grad}}p = \rho \left(\vec{g} + \vec{a}_e\right)$$

Exemple d'un liquide dans un récipient cylindrique en rotation ("Seau de Newton") :



(Exercice classique)

Les surfaces de même pression (surfaces isobares) sont des paraboles

(y compris la surface libre en négligeant la tension superficielle).

Efforts de pression sur une surface

Soit une surface $\mathcal{S}$ (matérielle ou non) délimitant (partiellement ou totalement) un fluide F à l'équilibre. Soit M un point courant de $\mathcal{S}$ et $\vec{n}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}$ un vecteur normal orienté du fluide vers la surface ("entrant"). Les efforts exercés par F sur $\mathcal{S}$ (efforts hydrostatiques) sont données par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{F} \to \mathcal{S}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \\ \vec{M}_0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{c} \iint_{\mathcal{S}} p(M)\vec{n}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}} dS \\ \\ \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{AM} \times p(M)\vec{n}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}} dS \end{array} \right.$$

Remarques :
- Dans le cas d'une surface fermée, la convention est de noter $\vec{n}$ la normale sortante. Dans ce cas on peut utiliser les formules précédentes en écrivant $\vec{n}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}} = -\vec{n}$.
- On appelle "point d'application" un point C tel que $\vec{M}_C = 0$
(définition non rigoureuse car ce point n'est pas unique ; on peut choisir n"importe quel point situé sur la "droite d'action" du torseur).

Exercices classiques :
- Calculez la résultante des forces de pression sur un barrage rectangulaire vertical de hauteur H. Montrez que le point d'application est situé à une altitude $H/3$ par rapport au fond.
- Barrage triangulaire (exercice a préparer avant le TD, corrigé sur moodle).

Théorème d'Archimède

"Tout corps plongé entièrement dans un ou plusieurs fluides au repos, subit de la part du (des) fluide(s) une force verticale, dirigée vers le haut, égale en intensité au poids du volume de fluide déplacé, et qui s'applique au centre de gravité G_f du(des) fluide(s) déplacé(s)."

En termes plus précis, la poussée d'Archimède correspond au torseur suivant :

$$\{\mathcal{A}\} = {}_{G_f}\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{P}}_{\mathcal{A}} = -M_f \vec{g} \\ \\ \vec{\mathcal{M}}_{\mathcal{A},G_f} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Démonstrations : (i) physique ; (ii) mathématique.

Remarques :

- en général $G_f \neq G$ (G est le centre de gravité du corps considéré, et dépend de la répartition de masse à l'intérieur de celui-ci).
- Si le fluide déplacé a une masse volumique constante ρ_f, alors $M_f = \rho_f V$, et le point G_f correspond au centre géométrique C de l'objet.
- La somme de la force de gravité $M\vec{g}$ et de la poussée d'Archimède est parfois appelée "poids relatif" ou "force de flottabilité" (buoyancy) : $\vec{F} = (M - M_f)\vec{g}$.

Equilibre des corps flottants (1)

Cas d'un corps de masse m et volume V entièrement immergé dans un fluide homogène de masse volumique ρ_f (sous-marin ou montgolfière)

Recherchons les conditions d'équilibre sous l'effet de son poids $\{\mathcal{G}\}$ et de la poussée d'Archimède $\{\mathcal{A}\}$.

Equilibre des résultantes : $m = \rho_f V$.
$\rightarrow$ Conséquence : le véhicule doit pouvoir contrôler sa masse en fonction du milieu environnant !

Equilibre des moments : $\overrightarrow{CG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$.
$\rightarrow$ Conséquence : C et G doivent être alignés verticalement
(position stable si G est en dessous de C).

Equilibre des corps flottants (2)

Cas d'un corps de masse m partiellement immergé dans un liquide homogène de masse volumique ρ_f (bateau)

Equilibre des résultantes : $m = \rho_f V_0$ où V_0 est le "volume de carène" (volume de la partie immergée)

$\rightarrow$ Conséquence : l'équilibre reste possible si m varie.

Equilibre des moments :

$$\sum \vec{M} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OC_\phi} \wedge \vec{\mathcal{P}}_{\vec{A}} = \overrightarrow{C_\phi G} \wedge m\vec{g}$$

Subtilité : lorsque l'inclinaison (gîte) ϕ varie, le centre de carène C_ϕ se déplace !

On peut montrer qu'il existe un point *fixe* M appelé *Métacentre de roulis* tel que $\vec{\mathcal{M}}_{\mathcal{A},M} = \vec{0} \quad \forall\phi$ (dans la limite $\phi \ll 1$).

(cad. la droite d'action de la poussée d'Archimède passe par M $\forall\phi$)

Soit :

$$\sum \vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{MG} \wedge m\vec{g} \quad \forall\phi \quad \text{(dans la limite } \phi \ll 1)$$

La position de M est donné par la formule de Bouguier :
$C_0M = \frac{Lb^3}{12V_0}$
(pour une carène prismatique, de longueur L et largeur à la flottaison b ; C_0 étant le centre de carène de la position de référence $\phi = 0$).

$\rightarrow$ Conséquence : la position $\phi = 0$ est stable si G **est en dessous de** M**.**

Tension superficielle : mise en évidence expérimentale

Expériences avec un film de savon :

https://www.math.hmc.edu/ jacobsen/demolab/soapfilm.html

Origami capillaire :

https://www.youtube.com/watch?v=n51Vi3rv_kA
https ://www.google.com/imgres ?imgurl=http

Tension superficielle : modélisation physique

Forces linéiques : la tension de surface

Si le volume de fluide Ω est traversé par une interface entre deux fluides non miscibles (fluide 1 et fluide 2), le fluide contenu dans Ω est soumis à une force de tension le long de la ligne $\mathcal{L}$ intersection de la frontière de Ω avec l'interface :

$$d\vec{F}_{\mathcal{L}\to\Omega} = \gamma \, dl \, \vec{n}_{\mathcal{L}}$$

où dl : longueur élémentaire le long de $\mathcal{L}$

et $\vec{n}_{\mathcal{L}}$: vecteur unitaire tangent à l'interface et $\perp$ à $\mathcal{L}$

Le coefficient de tension de surface γ correspond à une force par unité de longueur (N/m) ou de manière équivalente à une énergie par unité de surface (J/m^2).

Sa valeur est une propriété physique de l'ensemble (fluide 1/ fluide 2) (ex. $\gamma = 0.07$ N/m pour une interface eau/air)

Loi de Laplace (rappels L2)

On montre que la tension de surface conduit à un saut de pression de part et d'autre de l'interface :

$$p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{\mathcal{R}} = \gamma \left(\frac{1}{\mathcal{R}'} + \frac{1}{\mathcal{R}''} \right)$$

où $\mathcal{R}$: rayon de courbure local de l'interface (centre de courbure dans le fluide 1)

$\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$: rayons de courbure principaux en 3D (cf. cours de géométrie différentielle)

Angle de contact (rappels L2)

Au niveau de la ligne triple (fluide 1 / fluide 2 / paroi solide), on constate que l'angle de contact θ est fixé : $\theta = \theta_E$

θ_E est une propriété physique de l'ensemble (fluide 1 / fluide 2 / paroi solide).

Si $\theta_E < \pi/2$ on parle de surface hydrophile (exemple : eau/air/verre).

Si $\theta_E > \pi/2$ on parle de surface hydrophobe (exemple : eau/air/téflon).

Compétition entre capillarité et pesanteur

Echelle de longueur capillaire :

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

($\ell_c = 2.7mm$ Pour l'interface air/eau en gravité terrestre.)

Nombre de **Bond** :

$$\mathrm{Bo} = \left(\frac{L}{\ell_c}\right)^2 = \frac{\rho g L^2}{\gamma}$$

où L désigne l'échelle de longueur caractéristique du phénomène étudié (par ex. le diamètre du verre de whisky du Capitaine Haddock...)

Interprétation physique :

- Si $\mathrm{Bo} \gg 1$: pesanteur dominante (surface libre plane, horizontale).
- Si $\mathrm{Bo} \ll 1$: capillarité dominante (surface libre sphérique).
- Si $\mathrm{Bo} = \mathcal{O}(1)$: forces de gravité et capillarité comparables (surface libre solution d'un problème difficile...).