Mécanique des fluides

Osborne REYNOLDS
(1842 – 1912)
Tableau de J. Collierde (1904)

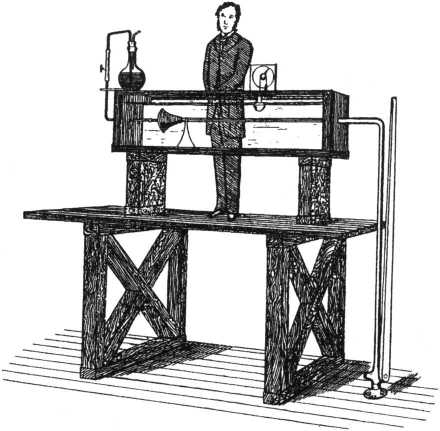
David Fabre

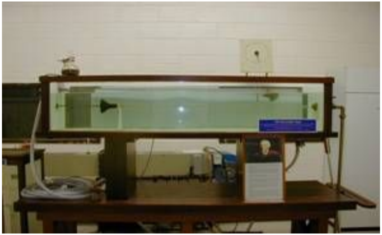
IMFT / UPS
Département de Mécanique

9. Ecoulements en conduite

Sommaire

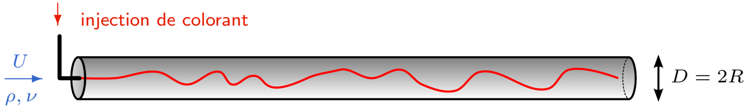
Expérience de Reynolds (1883)





Banc expérimental utilisé par Reynolds, exposé à l'Université de Manchester (UK)

Principe de l'expérience



($U = \dot{m}/(\rho \pi R^2)$ vitesse moyenne ou vitesse débitante, déduite du débit-masse $\dot{m}$)

Un unique *paramètre sans dimension* :

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi \mu D} \qquad \text{(nombre de Reynolds)}$$

Constat de O. Reynolds :

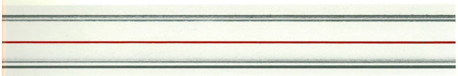
Les expériences effectuées pour différentes valeurs de U, D, ρ et ν montrent que les écoulements observés sont similaires si le nombre de Reynolds est le même.

Ce nombre sans dimension joue ainsi le rôle de paramètre de contrôle, qui permet de déterminer le régime d'écoulement observé.

Observations expérimentales

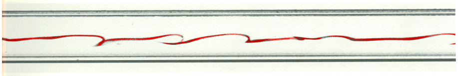
Reynolds observe schématiquement trois régimes distincts : visualisations

$Re \lesssim 2000$: régime laminaire



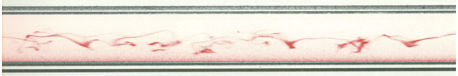
écoulement stationnaire, axisymétrique, établi, 1D (écoulement de Poiseuille)

$2000 \lesssim Re \lesssim 4000$: régime de transition



écoulement instationnaire, 3D par intermittence, sinon relaminarisation

$4000 \lesssim Re$: régime turbulent



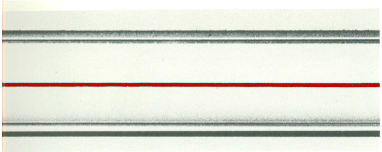
écoulement très instationnaire, fortement 3D, "chaotique" petits et gros tourbillons

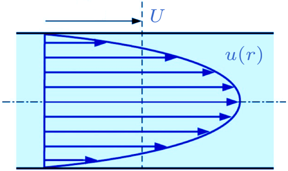
Régime laminaire $Re \lesssim 2000$

Pour $Re \lesssim 2000$, Reynolds observe le régime dit laminaire pour lequel l'écoulement est stationnaire, axisymétrique, établi, 1D : l'expérience montre qu'il s'agit de l'écoulement de Poiseuille, dont le champ de vitesse est donné par

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$U = \frac{u_{max}}{2} = \frac{R^2}{8\mu}\left|\frac{dp}{dx}\right|$$



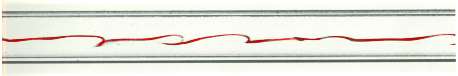


Le profil de vitesse parabolique correspondant à l'écoulement de Poiseuille est une solution exacte de l'équation de Navier–Stokes quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds.

En général, cet écoulement se déstabilise pour $Re \sim 2000$, au delà une autre solution de l'équation de Navier–Stokes, plus compliquée, dont on ne connaît pas l'expression mathématique...
Cependant, si le niveau des perturbations en entrée est très faible, et si le tube est très lisse, cet écoulement peut être observé juqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^5 !
(pour $Re > 2000$ La solution laminaire est donc métastable...)

Régime de transition $2000 \lesssim Re \lesssim 4000$

Pour les nombres de Reynolds intermédiaires, compris entre 2000 et 4000 environ, on observe un régime dit transitoire ou de transition : instationnaire et 3D par intermittence, avec phase de relaminarisation.



Ce régime est le plus complexe à décrire et à comprendre : il fait l'objet de nombreuses recherches actuelles, aussi bien par le biais de campagnes expérimentales que de simulations numériques et d'analyses théoriques.

Ainsi, si le niveau des perturbations en entrée est très faible, et si le tube est très lisse, cet écoulement peut être observé jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^5 !
Les concepts adaptés à l'étude de ce régime de transition proviennent de

- ✓ la théorie des instabilités hydrodynamiques
- ✓ la théorie des systèmes dynamiques non linéaires
- ✓ la théorie des bifurcations
- ✓ [. . .]

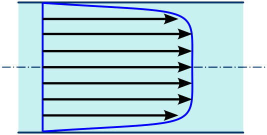
Régime turbulent $4000 \lesssim Re$

Pour les grands nombres de Reynolds, l'écoulement devient turbulent et rentre dans un régime fortement instationnaire, complètement 3D, présentant une structure spatiale très compliquée avec petits et grands tourbillons, et un comportement temporel "chaotique".

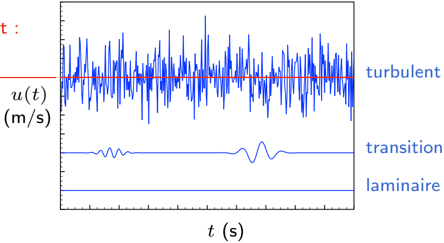
Paradoxalement, ce régime n'est pas le plus compliqué à modéliser si l'on accepte de se restreindre aux grandeurs moyennes de l'écoulement (approche statistique).

Mesure de vitesse en un point de l'écoulement :

vitesse moyenne locale $< u >$

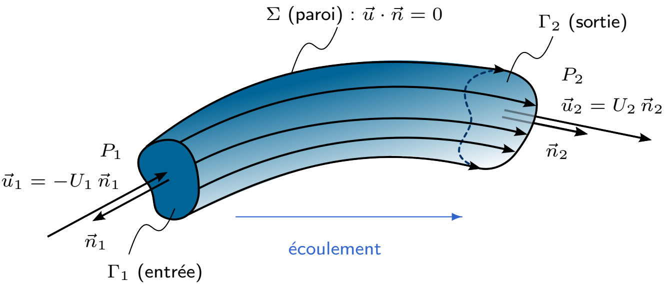


Profil de vitesse moyenne (quasi uniforme)



Volume de contrôle

Hypothèses de base : fluide homogène et newtonien, écoulement incompressible.
Pour appliquer les bilans intégraux dans la configuration d'une conduite de paroi fixe et imperméable, considérons le volume de contrôle fixe Ω associé au tube de courant délimité par la paroi de la conduite :



La frontière du volume de contrôle fixe Ω est donc donnée par :

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Sigma$$

où S_1 et S_2 désignent respectivement les sections d'entrée et de sortie, et S_L correspond à la surface latérale associée à la paroi.

On rappelle que $\vec{n}$ désigne la normale sortante à la frontière du volume de contrôle.

Application des bilans intégraux

Hypothèses de base : fluide homogène et newtonien, écoulement incompressible.

1. le débit de matière est conservé :
   En terme de débit-masse : $\dot{m} = \rho U_1 S_1 = \rho U_2 S_2$
   En terme de débit-volume : $Q = U_1 S_1 = U_2 S_2$
   Ici $U = \langle u \rangle$ est la vitesse normale moyenne dans les sections d'entrée et de sortie.
   ($\langle \cdot \rangle$ est l'opérateur de moyenne sur la section en en temps (dans le cas turbulent).)
2. la force exercée par l'écoulement sur la conduite est donnée par

   [Démonstration] $\longrightarrow$ $\vec{F} = -(P_1 + \rho U_1^2) S_1 \vec{n}_1 - (P_2 + \rho U_2^2) S_2 \vec{n}_2 + M\vec{g}$

   où M désigne la masse de fluide contenue dans la portion de conduite entre S_1 et S_2,
   Application : force exercée sur un tube coudé (exo complémentaire Moodle)

3. Le bilan d'énergie mécanique entre les sections d'entrée S_1 et de sortie S_2 s'écrit :

   [Démonstration] $\longrightarrow$ $\dot{m}\,(\bar{e}_{m2} - \bar{e}_{m1}) = \mathcal{P}_{visq,int}$

   où :
   1/ $\bar{e}_m \equiv p + \rho g z + \dfrac{\alpha}{2}\rho U^2$ correspond à l'énergie mécanique (volumique) moyenne dans la section concernée ;
   2/ $\alpha = \dfrac{\langle u^3 \rangle}{\langle u \rangle^3}$ est un facteur de forme qui vaut 1 pour un écoulement turbulent (profil quasi-uniforme) et 2 pour un écoulement de Poiseuille (démo en exo).
   3/ $\mathcal{P}_{visq,int} = -\int_\Omega \overset{\Rightarrow}{\tau} : \overset{\Rightarrow}{D}\, dV = -2\mu \int_\Omega \overset{\Rightarrow}{D} : \overset{\Rightarrow}{D}\, dV \leq 0$ est la Puissance intérieure des forces visqueuses.
   NB cette loi peut s'interpréter comme une généralisation du (1er) théorème de Bernoulli.

Notion de pertes de charge

Définition : la quantité

$$\begin{aligned}
\Delta_1^2 &= \bar{e}_{m_1} - \bar{e}_{m_2} \\
&= (p_1 + \rho g z_1 + \frac{\alpha}{2}\rho U_1^2) - (p_2 + \rho g z_2 + \frac{\alpha}{2}\rho U_2^2) \\
&= \hat{p_1} - \hat{p_2} \quad (\text{ si } S = Cte)
\end{aligned}$$

est appelée perte de charge entre les sections 1 et 2.

On a vu la formule explicite :

$$\Delta_1^2 = \frac{2\mu \int_\Omega \overset{\Rightarrow}{D} : \overset{\Rightarrow}{D}\, dV}{\dot{m}}$$

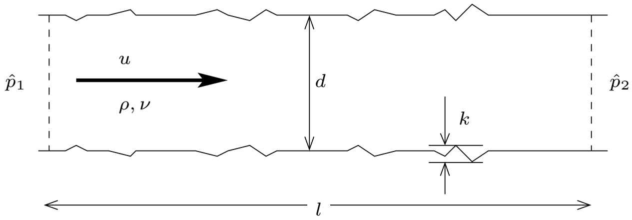
Cette formule n'est cependant pas utilisable directement (sauf dans le cas laminaire).

Dans le cas général on a recours à l'analyse dimensionnelle et a des lois approchées issues d'expériences modèles.

On distingue :
- Pertes de charges régulières (proportionnelles à la longueur L du tuyau)
- Pertes de charges singulières (dues à des "accidents" localisés).

Pertes de charge régulières

On appelle pertes de charge régulières (ou *linéaires*) la diminution d'énergie mécanique entre deux sections d'une conduite, à parois éventuellement rugueuses, de *section uniforme*.



Ecoulement dans une conduite rugueuse de section uniforme.
k *correspond à la taille moyenne des rugosités.*

Une estimation par analyse dimensionnelle montre que les pertes de charge régulières ont pour expression [Démonstration :]

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{2}\,\rho\, U^2\, \frac{L}{D}\ \lambda(\varepsilon, Re) \qquad (22)$$

où l'on définit $Re = UD/\nu$ et la rugosité relative de la paroi $\varepsilon = k/D$.
$\lambda(\varepsilon, Re)$ est par construction sans dimension et est appelé coefficient de perte de charge régulières.

Coefficient de pertes de charge

- Cas laminaire :
  Dans ce cas la solution de Poiseuille permet de calculer explicitement la perte de charge et conduit à : $\lambda = 64/Re$ [Exercice MMC]
  On peut retrouver l'ordre de grandeur de ce résultat par analyse dimensionnelle [Démo]

- Cas turbulent "régime très rugueux" :
  Si $\varepsilon > 1\%$ et $Re > 10^5$, on observe que la perte de charge est indépendante de Re et donné par la formule approchée (Karman–Nikuradse)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon}{3.71}\right) \tag{23}$$

  Paradoxe : λ ne dépend plus de Re donc $\mathcal{P}_{visq,int}$ ne dépend plus de μ???
  Explication : la dissipation est turbulente.

- Cas turbulent, régime "hydroadynamiquement lisse" :
  Pour $\varepsilon < 0.01\%$ et $Re < 10^5$ on peut utiliser la formule de Blasius

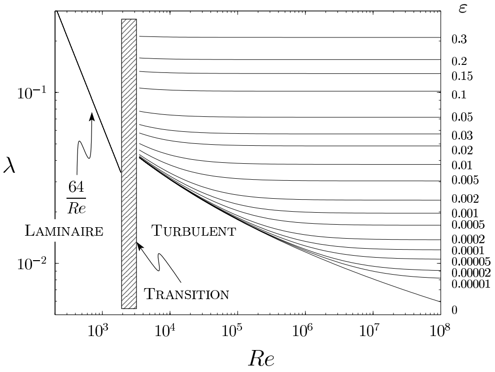
$$\lambda = 0.316\, Re^{-1/4} \tag{24}$$

- Cas turbulent, cas général
  Pour $Re > 4000$ et ϵ quelconque, on utilise généralement la formule de Colebrook (semi-explicite) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71}\right) \tag{25}$$

Toutes ces formules sont tabulées dans le diagramme de Moody :

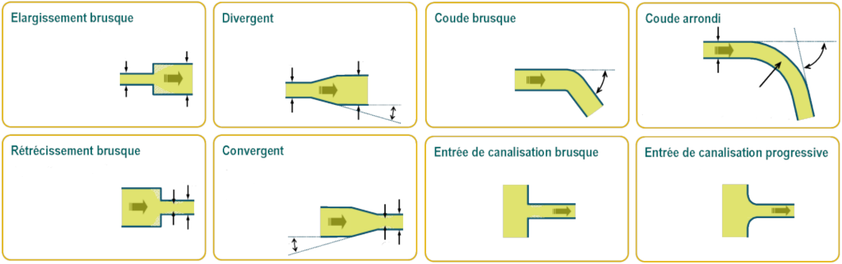
Diagramme de Moody



Le coefficient de pertes de charge régulières λ est donné en fonction du nombre de Reynolds Re pour différentes rugosités relatives ε dans le diagramme de Moody qui est obtenu par résolution numérique de la formule implicite de Colebrook.

Pertes de charge singulières

On appelle pertes de charges singulières la diminution d'énergie mécanique entre deux sections d'une conduite de part et d'autre d'une singularité, c'est-à-dire d'une variation *brusque* de la géométrie de la conduite : rétrécissement ou élargissement brusque, changement de direction (coude) ou présence d'un obstacle. En effet cette variation brusque des conditions d'écoulement s'accompagne généralement d'une augmentation du brassage du fluide à grand nombre de Reynolds et donc des frottements visqueux.

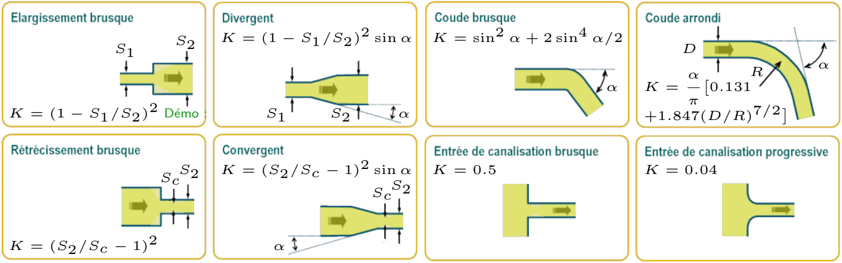


Pertes de charge singulières

Une estimation par analyse dimensionnelle montre que les pertes de charge singulières s'écrivent

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{2}\,\rho\,u_1^2\;K \qquad (26)$$

où u_1 est la vitesse moyenne en amont de la singularité et K désigne le coefficient de pertes de charge singulières.
On observe que pour $Re \gtrsim 10^4$ ce coefficient ne dépend pas de Re.
Les valeurs de K sont données par des formules empiriques ou semi-empiriques en fonction du type de singularité concernée.



Quelques éléments de plomberie standard :
Raccord rectiligne $K = 0.04$; Valve "globe" ouverte $K = 6.4$; valve demi-fermée $K = 9.5$;
Coude 90^o standard $K = 0.75$; coude à grand rayon $K = 0.45$;
Raccord en T $K = 0.4$ (ligne→ligne) / $K = 1.3$ (ligne→branche) / $K = 1.5$ (branche→ligne)....

Applications

Applications :

Exemple 1 : dimensionnement d'un chauffe-eau solaire.

Exemple 2 : canalisation en pente.