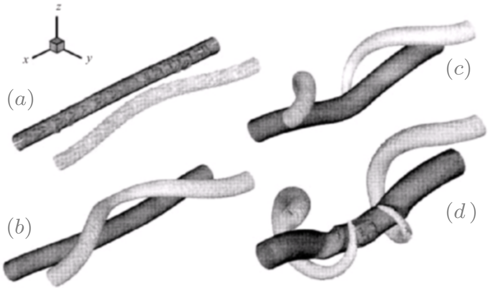
Mécanique des fluides

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique



Interaction entre deux tourbillons contrarotatifs

5. Equations-bilan et régimes d'écoulements

Sommaire

Les différents types de systèmes

- On appelle **système isolé** tout système qui n'échange *ni matière, ni quantité de mouvement, ni travail, ni chaleur* avec l'extérieur
- On appelle **volume matériel** $\mathcal{D}(t)$ un volume constitué des mêmes particules fluides, suivi au cours du temps. C'est donc un concept Lagrangien et l'équivalent d'un**système fermé**, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais qui peut cependant échanger de la quantité de mouvement, du travail ou de la chaleur.
- On appelle **volume de contrôle** Ω un volume fixe dont la frontière peut être traversée par de la matière entrante et sortante. Il s'agit donc d'un concept Eulerien équivalent à un **système ouvert** qui peut échanger matière, quantité de mouvement, travail et chaleur avec l'extérieur.

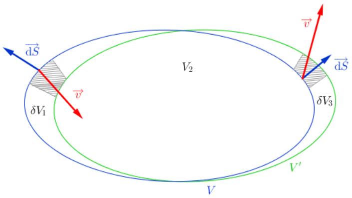
Volume de contrôle Ω

Théorème du transport (Rappel chap. 3)

Les équations de la physique (bilans de masse, de quantité de mouvement, d'énergie), s'écrivent naturellement en considérant un **volume matériel** $\mathcal{D}(t)$.

Le théorème de Transport permet de traduire ce bilan dans le cas (Eulérien) d'un **volume de contrôle** Ω.

Théorème :
Considérons un *domaine matériel* mobile $\mathcal{D}(t)$ coïncidant à l'instant t avec un *volume de contrôle* fixe Ω (bordé par un countour $\partial\Omega$).



La dérivée matérielle de la quantité intégrale $F(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} f dV$ s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} f dV = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} f \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS$$

Remarque : ce théorème est une généralisation du théorème suivant pour un problème monodimensionnel :

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \left[\frac{db}{dt} f(b(t),t) - \frac{da}{dt} f(a(t),t)\right]$$

Bilan de masse : bilans intégraux

Quantité physique : **masse** M associée à la grandeur intensive ρ (**masse volumique**).

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné

$$M(t, \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t)\, dV$$

Pour ce système matériel, le principe de conservation de la masse $\frac{dM}{dt} = 0$ s'écrit :

- Pour le volume matériel $\mathcal{D}(t)$ en suivant le fluide dans son mouvement :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x}, t)\ dV = 0 \tag{1}$$

- Pour le volume de contrôle fixe Ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(\vec{x}, t)\ dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS \tag{2}$$

[Démonstration] : théorème de transport avec $f = \rho$

Bilan de masse : bilans locaux

A partir des bilans intégraux précédents, on déduit les équations locales de bilan de masse :

- Première forme ("bilan local eulerien" ou forme conservative) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\,\vec{u}\,) = 0 \qquad (3)$$

[Démonstrations :]

- (i) A partir du bilan intégral Eulérien, à l'aide du théorème de la divergence
- (ii) Directement par un bilan sur un volume élémentaire

- Seconde forme ("bilan local lagrangien")

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \qquad (4)$$

[Démonstrations :]

- (i) A partir du précédent utilisant la définition de la dérivée particulaire
- (ii) En variables lagrangiennes (cf. MMC)

Bilan intégral de quantité de mouvement

Quantité physique : quantité de mouvement $\vec{Q}$ associée à la grandeur intensive $(\rho\,\vec{u})$.

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné : $\vec{Q}(t,\mathcal{D}) = \displaystyle\int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{x},t)\,\vec{u}(\vec{x},t)\,dV$

Principe de conservation de la quantité de mouvement : $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}\,\rightarrow\,\mathcal{D}}$

- pour le volume matériel $\mathcal{D}(t)$ en suivant le fluide dans son mouvement ("bilan intégral lagrangien")

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} \rho\,\vec{u}\,dV = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho\vec{g}\,dV + \oint_{\partial\mathcal{D}(t)} \left(-p\vec{n} + \overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS \qquad (5)$$

  où $\vec{g}$ désigne la gravité (ou toute force à distance par unité de masse). et où les forces surfaciques sont la pression (normale) et la contrainte visqueuse (représentée par le tenseur $\overline{\overline{\tau}}$).

- Pour le volume de contrôle fixe Ω ("bilan intégral eulérien")

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho\,\vec{u}\,dV = \int_{\Omega} \rho\vec{g}\,dV + \oint_{\partial\Omega} \left(-p\vec{n} + \overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS - \oint_{\partial\Omega} \rho\,\vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS \qquad (6)$$

[Démonstration] : théorème de transport avec $f = \rho\vec{u}$

Remarque : en présence d'interface traversant la frontière du volume considéré, il faut ajouter au membre de droite la contribution de la force de tension superficielle :

$$\int_{\mathcal{L}} \gamma\vec{n}_{\mathcal{L}}\,dl$$

(cf. chap. 2 et formulaire, section C2).

Bilan local de quantité de mouvement

- Forme 1 ("forme conservative" ou "bilan local eulerien") :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \vec{\mathrm{div}}\,(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})\right] = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{\tau}}) \tag{7}$$

[Démonstration] :
A partir du bilan intégral eulérien, à l'aide du théorème de la divergence.

- Forme 2 ("Bilan local lagrangien") :

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{\tau}}) \tag{8}$$

[Démonstration] :
(i) A partir du bilan local eulerien (exercice),
(ii) Par un bilan des forces appliqué à un volume élémentaire dV.

- Forme 3 (pour un fluide Newtonien ou un gaz Stokesien) :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{u})\cdot\vec{u}\right) = \rho\vec{g} - \vec{\mathrm{grad}}p + \mu\left(\Delta\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,(\vec{u}))\right) \tag{9}$$

Démo : exercice

Bilans intégraux d'énergie totale

Quantité physique : Energie totale $\mathcal{E}$ associée à la densité volumique $\rho(e + |\vec{u}|^2/2)$ où e est l'énergie interne massique et $|\vec{u}|^2/2$ l'énergie cinétique massique.

Pour un volume matériel $\mathcal{D}(t)$ donné : $\mathcal{E}(t, \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(e + |\vec{u}|^2/2)\, dV$

- En écrivant un bilan d'énergie pour le volume matériel $\mathcal{D}(t)$, on obtient le "Premier principe de la thermodynamique en système fermé" :

$$\frac{d\mathcal{E}_{\mathcal{D}(t)}}{dt} = \underbrace{\int_{\Omega} \rho\vec{g}\cdot\vec{u}\; dV}_{\dot{W}^{(g,ext)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} -p\vec{u}\cdot\vec{n}\; dS}_{\dot{W}^{(p,ext)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{u}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}\cdot\vec{n}\; dS}_{\dot{W}^{(v,ext)}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{q}\cdot\vec{n}\; dS}_{\dot{Q}}$$

  où $\vec{q}$ désigne le flux conductif de chaleur, en général donné par la loi de Fourrier : $\vec{q} = -k\nabla T$.

- Pour le volume de contrôle fixe Ω on obtient le "Premier principe en système ouvert" :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho\left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U}\right) dV}_{\frac{d\mathcal{H}}{dt}} = \underbrace{-\oint_{\partial\Omega} \rho\left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U}\right)\vec{u}\cdot\vec{n}\; dS}_{\dot{\mathcal{H}}^{(ech)}}$$

$$+ \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t}\, dV}_{"V\frac{dP}{dt}"} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{u}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}\cdot\vec{n}\; dS}_{\dot{W}^{(v,ext)}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{q}\cdot\vec{n}\; dS}_{\dot{Q}} \qquad (11)$$

  En introduisant $h = e + p/\rho$ l'enthalpie massique et $\mathcal{U} = -\int g d\vec{x}$ le potentiel

Bilans locaux d'énergie totale

Les bilans locaux s'obtiennent a partir des bilans intégraux en invoquant de nouveau le théorème de la divergence. Il existe un grand nombre de formes de ces relations, on retiendra les deux suivantes :

Forme locale 1 :

$$\rho \frac{d}{dt}\left(e + \frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) = -\rho\vec{g}\cdot\vec{u} - \vec{\mathrm{grad}}(p\vec{u}) + \mathrm{div}\,(\overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{u}) - \mathrm{div}\,(\vec{q}) \tag{10}$$

Forme locale 2 :

$$\rho \frac{d}{dt}\left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{u}) - \mathrm{div}\,(\vec{q}) \tag{11}$$

(cf. cours de transferts thermiques et Chapitre 10)

Autres équations-bilan :

Le document **Formulaire de mécanique des fluides, annexe C** liste d'autres équations-bilans utiles en mécanique des fluides :

- Bilan local d'énergie cinétique.
  (S'obtient à partir du bilan local de QDM en projetant sur $\vec{u}$).
  (cf. chap. 7, théorème de Bernoulli).
- bilan intégral d'énergie cinétique.
  (S'obtient à partir du bilan local, en intégrant sur un volume Ω).
  (cf chap. 9, perte de charge dans une conduite , et chap. 10, flux d'énergie acoustique).
- Bilans d'énergie interne massique e
  (S'obtiennent en combinant les bilans d'énergie totale et d'énergie cinétique)
- Bilans d'entropie massique s
  Le bilan local (Formulaire, sec. C.6, Eq. 15) S'obtient en a partir du précédent avec l'identité $de = Tds - pd(\rho^{-1})$.
  En intégrant sur un volume Ω on obtient le bilan intégral :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho s \, dV}_{\frac{dS}{dt}} = \underbrace{-\oint_{\partial\Omega} \rho s \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS}_{\dot{S}(ech)} + \underbrace{\int_\Omega \left(\frac{2\mu}{T}\left[tr(\overrightarrow{\overrightarrow{D}}'^2)\right] + \frac{k}{T^2}|\vec{\mathrm{grad}}T|^2\right) dV}_{\dot{S}(cree)} \underbrace{- \oint_{\partial\Omega} \frac{\vec{q}}{T}\cdot\vec{n}\, dS}_{\dot{S}(recu)} \quad (12)$$

On reconnait le second principe en système ouvert. Le formalisme MMC permet donc d'obtenir une formule pour l'entropie créée, qui est bien positive (si $\mu > 0$ et $k > 0$).

Equations du mouvement d'un fluide

On peut donc maintenant résumer les équations régissant le mouvement d'un fluide dans le cas le plus général :

Bilan local de masse ou "Equation de continuité" : $\frac{d\rho}{dt} + \rho \, \mathrm{div} \, \vec{u} = 0$

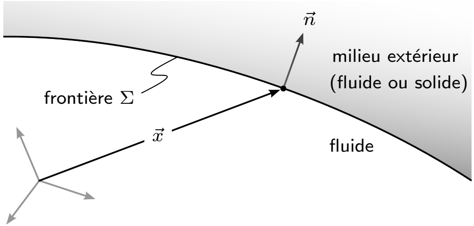
Bilan local de qdm ou "Equation de Navier-Stokes" $\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\mathrm{grad}} p + \mu \Delta \vec{u} \quad \left(+ \frac{\mu}{3} \vec{\mathrm{grad}} (\mathrm{div} \, (\vec{u})) \right)$

Bilan local d'énergie : $\rho \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = \rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \vec{\mathrm{grad}}(p) \cdot \vec{u} + \mathrm{div} \, (\overline{\overline{\tau}}) \cdot \vec{u} + \lambda \Delta T$

Equation d'état : $p = \rho r T$ (gaz parfait) ou $\rho = \rho_0$ (liquide incompressible indilatable)

Conditions limites

A ces équations doivent être adjointes des conditions limites sur une frontière Σ (éventuellement mobile) séparant le fluide d'un milieu extérieur (solide ou fluide).



Conditions limites

- Condition limite cinématique.

$$\vec{u}(\vec{x} \in \Sigma, t) = \vec{u}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t)$$

Condition souvent simplifiée dans le cas ou la frontière Σ une paroi fixe sous la forme suivante :

$$\vec{u} = \vec{0}$$

- Condition limite dynamique

$$\vec{\vec{\sigma}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} - \vec{\vec{\sigma}}_{\text{ext}}(\vec{x} \in \Sigma, t) \cdot \vec{n} = \gamma K \qquad (K = \text{courbure de la surface, cf. chap. 2})$$

Condition souvent simplifiée dans le cas ou Σ est une surface libre plane (d'altitude $y = cte$) sous la forme suivante :
$\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n} = -p_{ext}\vec{n}$
c.a.d. $p - \tau_{yy} = p_{ext}$ et $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$

- Condition limite thermique

$$\vec{q}(\vec{x} \in \Sigma, t) = \vec{q}_{ext}(\vec{x} \in \Sigma, t)$$

Condition souvent simplifiée sous l'une des deux formes suivantes :
$\vec{q} = \vec{0}$ (paroi adiabatique) ou $T = T_{ext}$ (paroi isotherme).

NB : les deux premières conditions limites généralisent celles vues au chapitre 4 pour les écoulements plans parallèles.

Simplifications (cas des liquides)

Dans le cas des liquides incompressibles, indilatables ($\rho = \rho_0$)

1. L'équation-bilan de masse se simplifie en $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$. => L'écoulement est iso-volume (on dit aussi "écoulement incompressible", par abus de language).
2. Les problèmes dynamique et thermique sont découplés (aucun terme ne dépend de T dans l'équation-bilan de QDM). => Si l'on ne s'intéresse qu'au champ de vitesse et aux forces générées sur les obstacles, on peut oublier l'équation de la température ! => en revanche si l'on s'intéresse aux transferts thermiques, il faut d'abord résoudre le problème dynamique avant de résoudre le problème thermique... (cf. cours de transferts thermiques, chapitre "convection").

Conclusion : Pour les liquides incompressibles (chapitres 6 à 9) on retiendra les équations sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \rho_0 \vec{g} - \vec{\mathrm{grad}} p + \mu \Delta \vec{u} & \text{("Equation de Navier-Stokes incompressible")} \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{("Equation de continuité")} \\ (\text{ + Cond. Lim.}) \end{cases}$$

Simplifications (cas des liquides)

3 Simplification sur la pression :

Les termes de gravité et de gradient de pression peuvent se regrouper en introduisant la *pression motrice*

$$\hat{p} = p - \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x} \quad (= p + \rho_0 g z \text{ si la gravité est selon } - z)$$

$=>$ L'eq. de NS se réécrit alors : $\rho_0 \dfrac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\mathrm{grad}}\hat{p} + \mu \Delta \vec{u}$

Conséquences :

- L'écoulement d'un *fluide pesant* est *cinématiquement équivalent* à celui d'un fluide non pesant ($\vec{g} = \vec{0}$)
- La force exercée par un fluide *pesant* $\mathcal{F}$ sur une surface Ω de frontière $\mathcal{S}$ peut être évaluée ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathcal{F}\to\Omega} &= -\oint_{\mathcal{S}} p\vec{n}dS \\ &= -\oint_{\mathcal{S}} \hat{p}\vec{n}dS - \rho_0 \vec{g} V \end{aligned}$$

Interprétation : la force exercée sur un obstacle *entièrement immergé* se compose de deux termes : une *force hydrodynamique* qui peut être déduite de la solution du problème *non pesant*, et une force hydrostatique qui n'est autre que la poussée d'Archimède !

Corollaire : la force horizontale sur un sous-marin (ou un avion en vol subsonique comme on le verra plus tard) ne dépend pas de g ! (cf. chapitre 1).

4 La force exercée sur un objet entièrement immergé est indépendante de la référence de pression [Démonstration :]

Analyse dimensionnelle de l'equation de Navier-Stokes

En considérant toujours le cas d'un liquide incompressible (non pesant), cherchons à estimer l'*ordre de grandeur* des termes de l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement autour d'un obstacle.

Ordres de grandeurs :

$(x, y, z) = \mathcal{O}(L)$	L :	.... échelle caractéristique de longueur	(fixée par la géométrie)
$t = \mathcal{O}(T)$	T :	.... de temps	(fixé ou inconnu) [1]
$\lvert\vec{u}\rvert = \mathcal{O}(U)$	U :	échelle caractéristique (ou *jauge*) de vitesse	(fixé par les cond. lim.) [2]
$p = \mathcal{O}(p_0)$	p_0 :	.... échelle caractéristique de pression	(fixé)
$p' = (p - p_0) = \mathcal{O}(\delta p)$	δp :	.... jauge des variations de pression	(inconnu) [2]

$$\begin{array}{lccccccc} & \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} & + & \overrightarrow{\overrightarrow{grad}}(\vec{u}) \cdot \vec{u} & = & -\frac{1}{\rho}\vec{\mathrm{grad}}p & + & \nu \Delta \vec{u} \\ & [I] & & [C] & & [P] & & [V] \\ \text{(Ordre de grandeur :)} & \frac{U}{T} & & \frac{U^2}{L} & & \frac{\delta p}{\rho_0 L} & & \nu \frac{U}{L^2} \end{array}$$

En comparant l'ordre de grandeur des différents termes on peut faire apparaitre les nombres sans dimension suivants (2 nombres indépendants parmi ces 3) :

- $\frac{[C]}{[V]} = \frac{UL}{\nu} = Re$ Nombre de Reynolds
- $\frac{[I]}{[V]} = \frac{L^2}{\nu T} = St$ Nombre de Stokes[2]
- $\frac{[I]}{[C]} = \frac{L}{UT} = Sr$ Nombre de Strouhal[2]

Le calcul de ces nombres permet d'identifier le terme dominant. Les jauges inconnues (δp et éventuellement T) sont ensuite déduites en invoquant le *principe de moindre dégénérescence (PMD)* .

1. non pertinent si l'écoulement est stationnaire
2. Rem : pour le écoulements externes, U est fixé par les cond. limites et δp est inconnu ; pour les écoulements internes c'est souvent l'inverse ; cf. chap. 4

Analyse dimensionnelle de l'equation de Navier-Stokes

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} & + & \overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{u} & = & -\frac{1}{\rho}\vec{\text{grad}}p & + & \vec{g} & + & \nu\Delta\vec{u} \\
 & [I] & & [C] & & [P] & & & & [V] \\
\text{(Ordre de grandeur :)} & \frac{U}{T} & & \frac{U^2}{L} & & \frac{\delta p}{\rho_0 L} & & & & \nu\frac{U}{L^2}
\end{array}$$

Premier cas : $[C]$ est dominant (c.a.d. $Re = [C]/[V] \gg 1$)

On parle alors de Régime inertiel (cf. chapitres 7 et 8).

Dans ce cas :

- $[V]$ peut être négligé [3].
- La jauge de pression est déterminée par le terme inertiel : $[P] = [C]$, c.a.d. $\delta p = \rho U^2$.
- si l'écoulement est instationnaire et T est inconnu : $[I] = [C]$, c.a.d. $T = L/U$.

L'équation de Navier-Stokes se simplifie alors ainsi :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\text{grad}}p + \rho\vec{g}$$

C'est l'Equation d'Euler.

3. sauf dans les *couches limites* au voisinage des parois ; cf. chap. 4 et 8

Analyse dimensionnelle de l'eq. de QDM

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} & + & \overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{u} & = & -\frac{1}{\rho} \vec{\mathrm{grad}} p & + & \vec{g} & + & \nu \Delta \vec{u} \\
 & [I] & & [C] & & [P] & & & & [V] \\
\text{(Ordre de grandeur :)} & \frac{U}{T} & & \frac{U^2}{L} & & \frac{\delta p}{\rho_0 L} & & & & \nu \frac{U}{L^2}
\end{array}$$

Second cas : $[V]$ est dominant (c.a.d. $Re = [C]/[V] \ll 1$)

On parle alors de Régime visqueux (cf. chapitre 6).

Dans ce cas :

- $[C]$ peut être négligé.
- La jauge de pression est déterminée par le terme inertiel : $[P] = [V]$, c.a.d. $\delta p = \rho \nu U/L$.
- si l'écoulement est instationnaire et T est inconnu : $[I] = [V]$, c.a.d. $T = L^2/\nu \equiv \tau_v$.

L'équation de Navier-Stokes se simplifie alors ainsi :

$$-\vec{\mathrm{grad}} p + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{u} = \vec{0} \quad (+\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t})$$

C'est l'Equation de Stokes.

Analyse dimensionnelle de l'eq. de QDM

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
 & \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} & + & \overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{u} & = & -\frac{1}{\rho}\vec{\text{grad}}p & + & \vec{g} & + & \nu \Delta \vec{u} \\
 & [I] & & [C] & & [P] & & & & [V] \\
\text{(Ordre de grandeur :)} & \frac{U}{T} & & \frac{U^2}{L} & & \frac{\delta p}{\rho_0 L} & & & & \nu \frac{U}{L^2}
\end{array}
$$

Troisième cas : $[I]$ est dominant (c.a.d. $Sr = [I]/[C] \gg 1$ et $St = [I]/[V] \gg 1$)

On parle alors de Régime acoustique (cf. chapitre 10).

Dans ce cas :

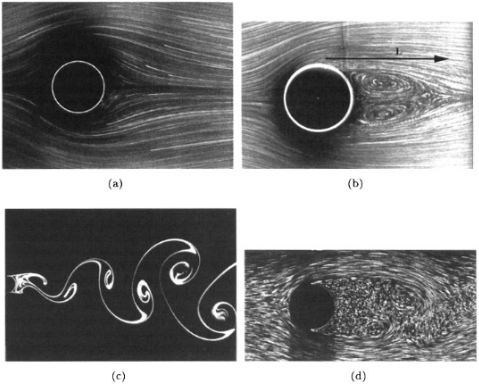
- $[V]$ et $[C]$ peuvent être négligés.
- La jauge de pression est déterminée par le terme instationnaire : $[P] = [I]$, c.a.d. $\delta p = \rho U L / T$.

L'équation de Navier-Stokes se simplifie alors ainsi :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\vec{\text{grad}}p$$

Régimes d'écoulements autour d'un cylindre

Illustration de l'importance du nombre de Reynolds :
Régimes d'écoulement autour d'un cylindre



(a) $Re \approx 1$: écoulement stationnaire symétrique (régime de Stokes, cf. chap. 5).
(b) $Re = 26$: écoulement stationnaire avec zone de décollement.
(c) $Re = 200$: écoulement instationnaire, apparition d'une allée de tourbillons.
(d) $Re = 10^5$: écoulement turbulent.

Analyse dimensionnelle de l'eq. de masse

Considérons maintenant le cas des écoulements de *gaz parfaits* et cherchons à estimer l'*ordre de grandeur* des termes de l'équation de continuité.

Ordres de grandeurs :

$(x, y, z) = \mathcal{O}(L)$	L :	.... échelle caractéristique de longueur	(fixée par la géométrie)
$t = \mathcal{O}(T)$	T :	.... de temps	(fixé ou inconnu)
$\lvert\vec{u}\rvert = \mathcal{O}(U)$	U :	échelle caractéristique (ou *jauge*) de vitesse	(fixé par les cond. lim.)
$\rho = \mathcal{O}(\rho_0)$	p_0 :	échelle caractéristique de masse volumique	(fixé)
$\rho' = (\rho - \rho_0) = \mathcal{O}(\delta p)$	δp :	.. jauge des variations de masse volumique	(inconnu)
$\mathrm{div}\,(\vec{u}) = \mathcal{O}(D)$	D :	.... jauge de la divergence	(inconnu)[4]

$$\begin{array}{lccccc} & \dfrac{\partial \rho}{\partial t} & + & \vec{u}\cdot \vec{grad}\rho & + & \rho \mathrm{div}\,(\vec{u}) \\ & [I] & & [C] & & [D] \\ \text{(Ordre de grandeur :)} & \frac{\delta\rho}{T} & & \frac{U\,\delta\rho}{L} & & \rho_0 D \end{array}$$

Hypothèses supplémentaires :

- Ecoulement adiabatique : $\delta p/\delta\rho \approx (\partial p/\partial\rho)_s = c_0^2 \quad \rightarrow \delta\rho = \frac{1}{c_0^2}\delta p$

- Régime inertiel : $\delta p = \rho_0 U^2 \quad \rightarrow \frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{U^2}{c_0^2} = M^2$ Nombre de Mach

- Oublions le terme $[I]$ qui n'est dominant que dans le régime acoustique (cf. chapitre 10).

le PMD indique alors que $[D] = [C]$

$\longrightarrow \quad D = M^2 U/L.$

4. N'écrivons pas trop vite $D = U/L$ car les 3 termes apparaissant dans la divergence peuvent se compenser !

Analyse dimensionnelle de l'eq. de masse

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \dfrac{\partial \rho}{\partial t} & + & \vec{u} \cdot \vec{grad} \rho & + & \rho \mathrm{div}\,(\vec{u}) \\
 & [I] & & [C] & & [D] \\
\text{(Ordre de grandeur :)} & \frac{\delta \rho}{T} & & \frac{U\,\delta \rho}{L} & & \rho_0 D
\end{array}
$$

$$D = M^2 U/L$$

Deux régimes possibles :

Premier cas : Si $M \ll 1$, alors l'équation de continuité se simplifie en $\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$.

Dans ce cas, un gaz parfait (*fluide compressible*) s'écoule de manière isovolume.

On parle de Régime d'écoulement incompressible.

$=>$ On peut de nouveau utiliser l'équation de Navier-Stokes incompressible et toutes les discussions des deux paragraphes précédents (simplifications, régimes d'écoulement) restent valables !

Second cas : Si $M = \mathcal{O}(1)$ (a fortiori si $M \gg 1$), alors l'équation de continuité ne se simplifie pas.

On parle de Régime d'écoulement compressible (cf. chapitres 11-12).