Exercice complémentaire chapitre Cinématique : écoulements linéaires (correction)

1 Introduction

1. $\operatorname{div} \vec{u} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = a + d$
2. Si $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ alors par définition il existe une fonction courant $\psi(x, y)$ vérifiant :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u(x, y) = ax + by \tag{1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v(x, y) = -cx + ay \tag{2}$$

En intégrant la première équation par rapport à y (à x fixé) on obtient :

$$\psi(x, y) = by^2/2 + axy + F(x)$$

où $F(x)$ est une "constante d'intégration" (par rapport à y) qui est dans le cas général une fonction de x. En dérivant cette deuxième expression et en identifiant avec la relation précédente :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ay + F'(x) = ay - cx$$

On en déduit $F(x) = -cx^2/2 + cte$. Soit au final :
$\boxed{\psi = -cx^2/2 + by^2/2 + axy + C^{te}}$

3. Si $d\vec{x} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y$ désigne un déplacement élémentaire le long d'une ligne de courant, alors par définition des lignes de courant (qui sont les lignes de champ du champ de vitesse, et donc tangentes en tout point à la vitesse locale) :

le long de la ligne de courant $d\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow v\,dx - u\,dy = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\,dx - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = 0.$

Comme la variation élémentaire de ψ s'écrit $d\psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\,dy$, on en déduit que $d\psi = 0$

c'est-à-dire $\boxed{\psi(x, y) = Cte \text{ le long de la ligne de courant}}$

4. Considérons une ligne $[A_1A_2]$ quelconque reliant deux lignes de courant définies par $\psi(x, y) = C_1$ et $\psi(x, y) = C_2$ (fig. 1a).

Par définition, le débit à l'instant t passant à travers cette ligne est donné par $q = \displaystyle\int_{A_1}^{A_2} \vec{u} \cdot \vec{n}\,dl$

où $\vec{n}$ est la normale locale et où dl désigne le déplacement élémentaire le long de la ligne $[A_1A_2]$.

Le déplacement dl a pour projection dx et dy suivant les directions x et y (fig. 1b), et on en déduit que la normale $\vec{n}$, vecteur unitaire ($||\vec{n}|| = 1$) et normal au déplacement élémentaire ($n_x\,dx + n_y\,dy = 0$), s'écrit :

.... $\vec{n} = \dfrac{dy}{dl}\,\vec{e}_x - \dfrac{dx}{dl}\,\vec{e}_y$, avec $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

On a donc $\vec{n}\,dl = dy\,\vec{e}_x - dx\,\vec{e}_y$, et .... $\vec{u} \cdot \vec{n}\,dl = u\,dy - v\,dx = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\,dx = d\psi$

le débit s'écrit alors $q = \displaystyle\int_{A_1}^{A_2} \vec{u} \cdot \vec{n}\,dl = \int_{A_1}^{A_2} d\psi = \psi(A_2) - \psi(A_1)$, c'est-à-dire $\boxed{q = C_2 - C_1}$

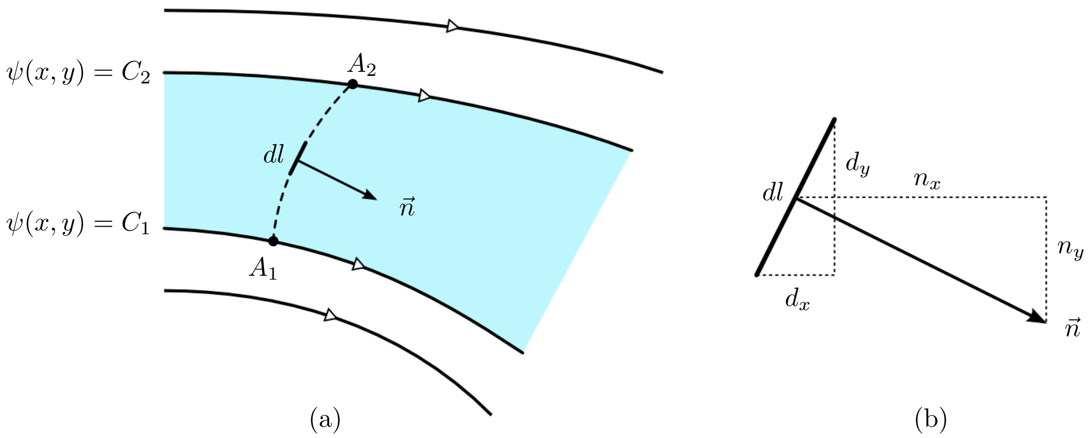


FIGURE 1 – *Schéma relatif au calcul du débit entre deux lignes de courant (a). Zoom sur le déplacement élémentaire dl (b).*

2 Ecoulements linéaires

1. $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \boxed{by}$ et $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \boxed{cx}$

2. $\operatorname{div} \vec{u} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}(by) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-bx) = \boxed{0}$

3. $\vec{a} = \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot \vec{\text{grad}})\,\vec{u}$

   c'est-à-dire .... $a_x = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = bcx$ et $a_y = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -bcy$

   D'où .... $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = acx\,\vec{e}_x + ac\,\vec{e}_y = ac\,(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$

   En introduisant les coordonnées polaires, on remarque que $x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y = r\,(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y) = r\,\vec{e}_r(\theta)$, où $\vec{e}_r(\theta) = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$ est le vecteur radial du repérage polaire (ou cylindrique).

   En conclusion, la dérivée particulaire est purement radiale : .... $\boxed{\dfrac{d\vec{u}}{dt} = ac\,r\,\vec{e}_r(\theta)}$

   Dans le cas où les coefficients a et c dépendent du temps, les composantes de la dérivée particulaire s'écrivent alors :

   $a_x = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dot{b}y + acx$ et $a_y = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dot{c}x + acy$
   où le point désigne la dérivée par rapport au temps.

   On a donc $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \left(\dot{b}y + acx\right)\,\vec{e}_x + (\dot{c}x + acy)\,\vec{e}_y = \boxed{ac\,r\,\vec{e}_r(\theta) + 2\left(\dot{b}y\,\vec{e}_x + \dot{c}x\,\vec{e}_y\right)}$

4. Le tenseur des gradients des vitesse a pour composantes $G_{ij} = u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ (cf. cours de MMC), avec $u = by$, $v = cx$ et $u_z = 0$:

$$\vec{\vec{G}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial u_z}{\partial x} & \dfrac{\partial u_z}{\partial y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$ et $u_z = 0$ dans le cas présent d'un écoulement plan, la dernière colonne et la dernière ligne du tenseur sont nécessairement nulles. On peut donc se restreindre à un tenseur représenté par la matrice 2×2 constituée des deux premières lignes et colonnes du tenseur complet :

.... $\boxed{\vec{\vec{G}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}}$

5. En notant $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ le vecteur position, on remarque que $\vec{u} = \vec{\vec{G}} \cdot \vec{x}$. Le champ de vitesse est donc une fonction linéaire de la position d'où la dénomination d' $\boxed{\text{écoulement linéaire}}$
6. Par définition, le tenseur des taux de déformation est $\vec{\vec{D}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\vec{G}} + {}^t\vec{\vec{G}}\right)$ où ^{t} désigne la transposée :

$\vec{\vec{D}} = \dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix}\right]$ .... $\boxed{\vec{\vec{D}} = \begin{pmatrix} 0 & (b+c)/2 \\ (b+c)/2 & 0 \end{pmatrix}}$

Le tenseur des taux de déformation est donc nul pour $\boxed{b = -c}$

7. Par définition, le tenseur des taux de rotation est $\vec{\vec{R}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\vec{G}} - {}^t\vec{\vec{G}}\right)$ où ^{t} désigne la transposée :

$\vec{\vec{R}} = \dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix}\right]$ ....

$\boxed{\vec{\vec{R}} = \begin{pmatrix} 0 & (b-c)/2 \\ (c-b)/2 & 0 \end{pmatrix}}$

Le tenseur des taux de rotation est donc nul pour $\boxed{c = b}$

8. En s'inspirant de la décomposition canonique du tenseur des gradients de vitesse, on peut essayer d'écrire la fonction de courant en faisant apparaître à part une composante de déformation pure (associée au facteur $c + b$ nul si pas de déformation) et une composante de rotation pure (associée au facteur $c + b$ nul si pas de rotation) :

.... $\boxed{\psi(x,y) = \underbrace{\frac{c+b}{2}\left(x^2+y^2\right)}_{\textit{rotation}} - \underbrace{\frac{c-b}{2}\left(x^2-y^2\right)}_{\textit{déformation}}}$

9. Par définition, le vecteur tourbillon (le vecteur rotation instantané local du fluide) est donné par

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{u}\,) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\[2ex] v \\[2ex] u_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\[2ex] 0 \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

car $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$ et $u_z = 0$ dans le cas présent d'un écoulement plan,

d'où $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{e}_z$ .... $\boxed{\vec{\Omega} = (b-c)/2\,\vec{e}_z}$

On remarque que ce champ est constant en espace : il s'agit donc d'un champ *uniforme*. Toutes les particules fluides ont la même vitesse angulaire, c'est-à-dire la même vitesse de rotation sur elles-mêmes.

La vorticité est par définition $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$ .... $\boxed{\vec{\omega} = (b-c)\,\vec{e}_z}$

On remarque comme précédemment que le champ de vorticité est uniforme.

10. On commence par exprimer les anciennes coordonnées (x, y) en fonction des nouvelles :

   .... $x = -x' \cos\theta + y' \sin\theta$; $y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$;

   On utilise cette expression pour exprimer u et v en fonction de x' et y', puis on utilise cette expression pour exprimer u' et u'_y. Ce qui amène à :

   .... $$\left\{ \begin{array}{lcllcl} u' & = & (b-c)/2y' & + & (c+d)/2 \left(2\cos\theta\sin\theta x' + [\cos^2\theta - \sin^2\theta]y'\right) \\ v' & = & (c-b)/2x' & + & (b-x)/2 \left(-2\cos\theta\sin\theta x' + [\cos^2\theta - \sin^2\theta]y'\right) \end{array} \right.$$

   On en déduit les tenseurs recherchés :

   .... $$\boxed{\vec{\vec{R}}_{(x'y')} = (b+c)/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

   .... $$\boxed{\vec{\vec{D}}_{(x'y')} = (b-c)/2 \begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}}$$

   Remarque : on pourrait obtenir directement ces résultats en utilisant la formule de MMC de changement de repère d'un tenseur :

   ..... $\vec{\vec{G}}_{(x'y')} = \vec{\vec{\Theta}}^{-1} \vec{\vec{G}} \vec{\vec{\Theta}}$ où $\vec{\vec{\Theta}}$ est la matrice de changement de base : $\vec{\vec{\Theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

11. On remarque que le tenseur des taux de rotation est invariant par changement de base.

    On remarque que pour la valeur $\theta = \pi/2$ le tenseur devient diagonal : $\vec{\vec{D}}_{x'y'} = (b+c)/2 \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$

    Ce choix de base correspond aux *axes propres* du tenseur

3 Tracés graphiques et cas particuliers

1. Le programme `Ecoulements2D.m` est disponible sur la page Moodle du cours.

2. Cas $c = 0$

   (a) Lignes de courant $\psi(x, y) = Cte \Leftrightarrow by^2/2 = Cte \Leftrightarrow y = Cte$: les lignes de courant sont donc des $\boxed{\text{droites horizontales}}$ (cf. fig. 2a).

   La trajectoire $\vec{X}(t) = X(t)\,\vec{e}_x + Y(t)\,\vec{e}_y$ d'une particule fluide est donnée par $\dot{\vec{X}} = \vec{u}(\vec{X})$, soit $\dot{X} = bY$ et $\dot{Y} = 0$. On en déduit que $Y(t) = Cte = Y_0$, et $X(t) = bY_0\,t + X_0$: les trajectoires sont donc aussi des $\boxed{\text{droites horizontales}}$.

   (b) L'accélération des particules fluides est donnée par la dérivée particulaire calculée dans

   la question 3 de la section précédente : $\vec{a} = acr\,\vec{e}_r = \boxed{\vec{0}}$ dans le cas présent $a = 0$.

   Ce résultat se retrouve en considérant la trajectoire des particules calculées précédemment :

   $\vec{X} = (bY_0\,t + X_0)\,\vec{e}_x + Y_0\,\vec{e}_y$, d'où l'accélération $\vec{a} = \ddot{\vec{X}} = \vec{0}$.

   (c) Dans le cas $c = 0$, les tenseurs des taux de déformation et des taux de rotation ont pour

   expression : $\vec{\vec{D}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\vec{R}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

   L'écoulement est donc caractérisé par un taux de déformation b qui a la $\boxed{\text{même intensité}}$ que

   le taux de rotation (ou vitesse angulaire $\vec{\Omega} = -b\,\vec{e}_z$).

   Il s'agit d'un écoulement dit de *cisaillement simple*, aussi appelé parfois *écoulement de Couette*, dont le profil de vitesse est représentée sur la figure 3. On obtient ce type d'écoulement par exemple entre deux plaques parallèle en translation horizontale à des vitesses différentes.

3. Cas $c/b = -1 \Leftrightarrow b = -c$

   (a) Lignes de courant $\psi(x,y) = Cte \Leftrightarrow b(x^2/2 + y^2) = Cte \Leftrightarrow x^2 + y^2 = Cte$:

   les lignes de courant sont donc des $\boxed{\text{cercles concentriques}}$ (cf. fig. 2b).

   La trajectoire $\vec{X}(t) = X(t)\,\vec{e}_x + Y(t)\,\vec{e}_y$ d'une particule fluide est donnée par $\dot{\vec{X}} = \vec{u}(\vec{X})$,

   soit $\dot{X} = bY$ (i) et $\dot{Y} = -bX$ (ii).

   En multipliant la première équation (i) par X .... $X\dot{X} = \frac{1}{2}\dot{\widehat{X^2}} = bXY$

   En multipliant la seconde équation (ii) par Y .... $Y\dot{Y} = \frac{1}{2}\dot{\widehat{Y^2}} = bXY$

   La somme des deux donne .... $\dot{\widehat{X^2 + Y^2}} = 0$

   On en déduit que $X^2 + Y^2 = Cte$: les trajectoires sont des $\boxed{\text{cercles concentriques}}$

   (b) L'accélération des particules fluides est donnée par la dérivée particulaire calculée dans

   la question 3 de la section précédente : $\vec{a} = bcr\,\vec{e}_r = \boxed{-4b^2r\,\vec{e}_r}$ dans le cas présent $c- = b$.

   Comme $-b^2r < 0$, on en déduit que l'accélération est centripète (dirigée vers l'origine).

   (c) Dans le cas $c = -b$, les tenseurs des taux de déformation et des taux de rotation ont pour

   expression : $\vec{\vec{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\vec{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2a & 0 \end{pmatrix}$.

   L'écoulement est donc caratérisé par un taux de déformation nul : il s'agit d'un écoulement de *rotation pure*, à vitesse angulaire $\vec{\Omega} = -2a\,\vec{e}_z$ (fig. 2b). On obtient ce type d'écoulement par exemple dans un réservoir cylindrique en rotation, ou encore dans le cœur des tourbillons.

4. Cas $c/b = 1 \Leftrightarrow c = b$

   (a) Lignes de courant $\psi(x,y) = Cte \Leftrightarrow b(x^2 - y^2) = Cte \Leftrightarrow x^2 - y^2 = Cte$:

   les lignes de courant sont donc des $\boxed{\text{hyperboles équilatères}}$ (cf. fig. 2c).

   La trajectoire $\vec{X}(t) = X(t)\,\vec{e}_x + Y(t)\,\vec{e}_y$ d'une particule fluide est donnée par $\dot{\vec{X}} = \vec{u}(\vec{X})$,

   soit $\dot{X} = cY$ (i) et $\dot{Y} = cX$ (ii).

   En multipliant la première équation (i) par X .... $X\dot{X} = \frac{1}{2}\dot{\widehat{X^2}} = cXY$

   En multipliant la seconde équation (ii) par Y .... $Y\dot{Y} = \frac{1}{2}\dot{\widehat{Y^2}} = cXY$

   La différence des deux donne .... $\dot{\widehat{X^2 - Y^2}} = 0$

   On en déduit que $X^2 - Y^2 = Cte$: les trajectoires sont des $\boxed{\text{hyperboles équilatères}}$

   (b) L'accélération des particules fluides est donnée par la dérivée particulaire calculée dans

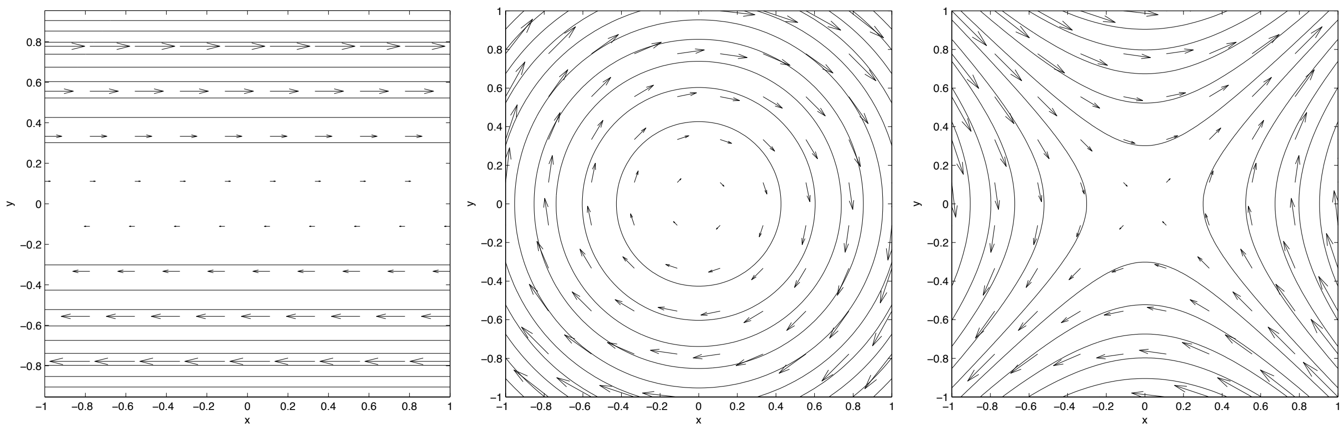
   la question 3 de la section précédente : $\vec{a} = bcr\,\vec{e}_r = \boxed{b^2r\,\vec{e}_r}$ dans le cas présent $b = -a$.

   Comme $b^2r > 0$, on en déduit que l'accélération est centrifuge.

   (c) Dans le cas $b = c$, les tenseurs des taux de déformation et des taux de rotation ont pour

   expression : $\vec{\vec{D}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\vec{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   L'écoulement est donc caratérisé par un taux de rotation nul : c'est un exemple d'écoulement *irrotationnel*, ou *potentiel*. Plus précisément il s'agit ici d'un écoulement *déformation pure* (fig. 2c).



(a) (b) (c)

FIGURE 2 – *Lignes de courant et vecteurs vitesse de l'écoulement de cisaillement simple $c = 0$ (a), de rotation pure $b = -c$ (b) et de déformation pure $b = c$ (c).*

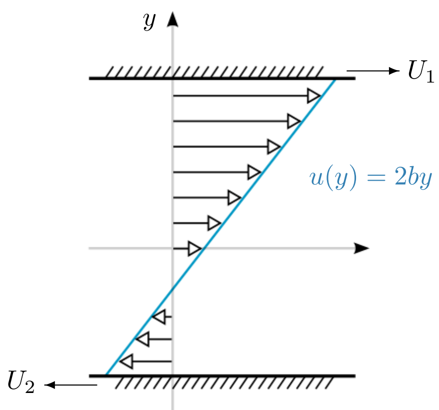


FIGURE 3 – *Ecoulement de Couette entre deux plaques.*