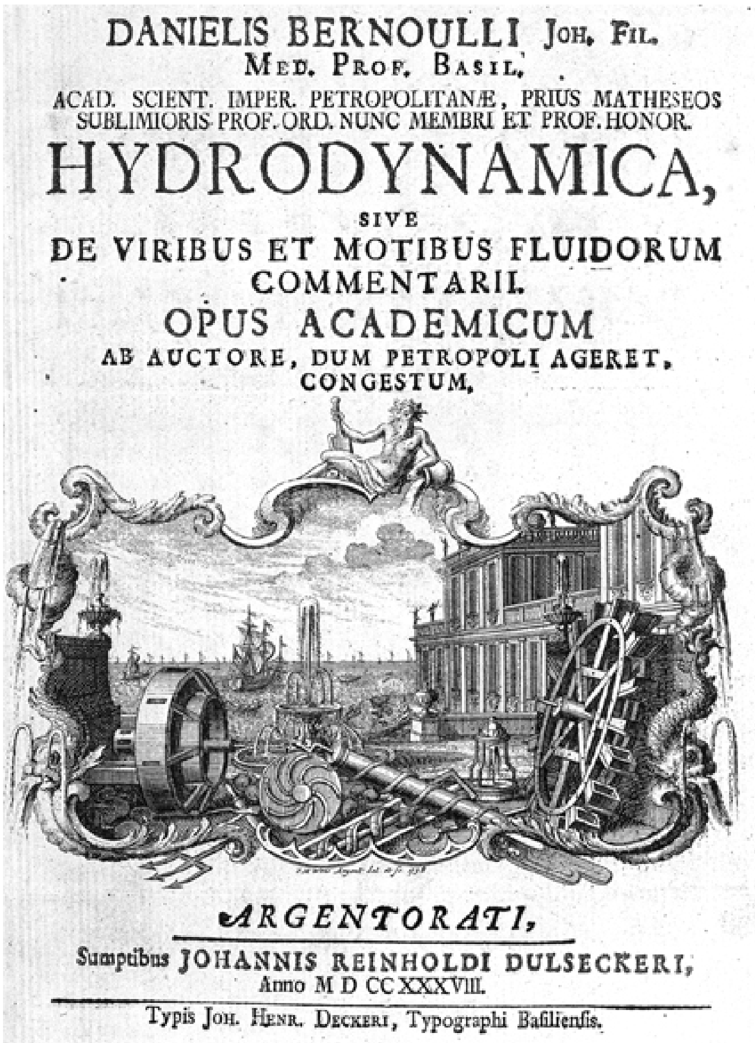
# Formulaire de mécanique des fluides



DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.

ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CC XXXVIII.
Typis JOH. HENR. DECKERI, Typographi Basiliensis.

*Equipe pédagogique :*
*D. Fabre, F. Moulin, M. Zagzoule*

# Table des matières

# A Propriétés physiques des fluides les plus courants

## A.1 Valeurs de référence pour l'eau et l'air

(pour $T = 20^oC$ ; $P = 10^5 Pa = 1 atm$)

| | Air | Eau pure | Eau de mer |
|---|---|---|---|
| Masse volumique | $\rho = 1.205 kg/m^3$ | $997,05 kg/m^3$ | $\rho = 1027 kg/m^3$ |
| Viscosité cin. | $\nu = 1.5e-6 m^2/s$ | $\nu = 1.002 \cdot 10^{-6} m/s^2$ | $\nu = 1.13910^{-6} m/s^2$ |
| Viscosité dyn. | $\mu = 1.81 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$ | $\mu = 0.999 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$ | |
| compressibilité | $\chi_s = 1.4 atm^{-1}$ | $\chi_s = 4.9 \cdot 10^{-5} Atm^{-1}$ | |
| dilatabilité | $\alpha = 3.4 \cdot 10{-}3K^{-1}$ | $\alpha = 1.5 \cdot 10{-}4K^{-1}$ | |
| vitesse du son | $c = 334 m/s$ | $c = 1500 m/s$ | |

## A.2 Equation d'état et loi d'état énergétique de l'air

$P = \rho r T; \qquad c = \sqrt{\gamma r T}.$
$e = c_v T; \qquad h = c_p T; \qquad c_v = \frac{r}{\gamma - 1}; \qquad c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$
$r = 287 J/K/kg; \qquad \gamma = 1.405.$

## A.3 Equation d'état de l'eau de mer (IES80)

La relation d'état IES80 permet de calculer $\rho$ ($kg/m^3$) en fonction de $T$ (température en en $^oC$), $S$ (salinité en $g/kg$), et $P$ (pression en $Bars$).

Elle est précise (en toute rigueur) pour $-2^oC < T < 40^oC$, $0 < S < 40 g/kg$, $0 < P < 1500 Bars$.

$$\rho(T, S, P) = \rho_0(T, S) \Big/ \left(1 - \frac{P}{K(T, S, P)}\right),$$

avec :

$$\begin{aligned}
\rho_0(T, S) \quad = \quad & 999.842594 + 6.793952 \cdot 10^{-2} \times T - 9.09529 \cdot 10^{-3} \times T^2 + 1.001685 \cdot 10^{-4} \times T^3 - 1.120083 \cdot 10^{-6} \times T^4 \\
+ \quad & 6.536332 \cdot 10^{-9} \times T^5 + 8.24493 \cdot 10^{-1} \times S - 4.0899 \cdot 10^{-3} \times TS + 7.6438 \cdot 10^{-5} \times T^2 S \\
- \quad & 8.2467 \cdot 10^{-7} \times T^3 S + 5.3875 \cdot 10^{-9} \times T^4 S - 5.72466 \cdot 10^{-3} \times S^{1.5} + 1.0227 \cdot 10^{-4} \times TS^{1.5} \\
- \quad & 1.6546 \cdot 10^{-6} \times T^2 S^{1.5} + 4.8314 \cdot 10^{-4} \times S^2,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
K(T, S, P) \quad = \quad & 19652.21 + 148.4206 \times T - 2.327105 \times T^2 + 1.360447 \cdot 10^{-2} \times T^3 - 5.155288 \cdot 10^{-5} \times T^4 \\
+ \quad & 3.239908 \times P + 1.43713 \cdot 10^{-3} \times TP + 1.16092 \cdot 10^{-4} \times T^2 P - 5.77905 \cdot 10^{-7} \times T^3 P \\
+ \quad & 8.50935 \cdot 10^{-5} \times P^2 - 6.12293 \cdot 10^{-6} \times TP^2 + 5.2787 \cdot 10^{-8} \times T^2 P^2 \\
+ \quad & 54.6746 \times S - 0.603459 \times TS + 1.09987 \cdot 10^{-2} \times T^2 S \\
- \quad & 6.1670 \cdot 10^{-5} \times T^3 S + 7.944 \cdot 10^{-2} \times S^{1.5} + 1.6483 \cdot 10^{-2} \times TS^{1.5} - 5.3009 \cdot 10^{-4} \times T^2 S^{1.5} \\
+ \quad & 2.2838 \cdot 10^{-3} \times PS - 1.0981 \cdot 10^{-5} \times TPS - 1.6078 \cdot 10^{-6} \times T^2 PS \\
+ \quad & 1.91075 \cdot 10^{-4} \times PS^{1.5} - 9.9348 \cdot 10^{-7} \times P^2 S + 2.0816 \cdot 10^{-8} \times TP^2 S \\
+ \quad & 9.1697 \cdot 10^{-10} \times T^2 P^2 S.
\end{aligned}$$

## A.4 Viscosité de l'eau et de l'air en fonction de la température

**Cas de l'air** :

Loi (expérimentale) de Sutherland :

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}$$

avec les paramètres :

$$\mu_0 = 1.716 \times 10^{-5} P.s, \quad T_0 = 273.15 K, \quad S = 110.4 K$$

**Cas de l'eau pure** :

Loi (expérimentale) de Vogel :

$$\mu(T) = \mu_0 e^{\frac{B}{T - C}}$$

avec les paramètres :

$$\mu_0 = 0.0243 Pa \cdot s, \quad B = 578.919 K, \quad C = 137.54 K$$

# B Tableau des principaux nombres sans dimensions

On note ici $U$, $L$ les échelles de vitesse et de longueur du problème, et (pour les problèmes instationnaires) $T$ l'échelle de temps (période) et $f = 1/T$ la fréquence associée.

| Nom | Définition | Signification | Autre interprétation | Utilité |
|---|---|---|---|---|
| Knudsen | $Kn = \frac{\ell}{L}$ | $\frac{\text{échelle microscopique}}{\text{échelle macroscopique}}$ | | Validité de la MMC |
| Reynolds | $Re = \frac{UL}{\nu}$ | $\frac{\text{Convection}}{\text{Frottement visqueux}}$ | $\frac{\text{Temps caractéristique de convection}}{\text{Temps caractéristique de diffusion}}$ | Général |
| Mach | $Ma = \frac{U}{c}$ | $\frac{\text{Convection}}{\text{Compressibilité}}$ | $\frac{\text{Vitesse de l'écoulement}}{\text{vitesse du son}}$ | Aérodynamique |
| Froude | $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$ | $\left(\frac{\text{accélération de l'écoulement}}{\text{accélération de gravité}}\right)^{1/2}$ | $\frac{\text{Vitesse de l'écoulement}}{\text{Vitesse des ondes de gravité}}$ | Hydrodynamique, écoulements à surface libre |
| Bond (ou Eötvös) | $Bo = \frac{L}{\sqrt{\gamma/\rho g}}$ | $\frac{\text{Pesanteur}}{\text{Capillarité}}$ | $\frac{\text{Echelle de longueur du problème}}{\text{Longueur capillaire}}$ | Phénomènes capillaires |
| Stokes (ou Womerseley) | $St = \frac{L^2}{\nu T} = \frac{fL^2}{\nu}$ | $\frac{\text{Instationarité}}{\text{Frottement visqueux}}$ | $\left(\frac{\text{Echelle de longueur du problème}}{\text{Longueur de diffusion visqueuse}}\right)^2$ | Ecoulements visqueux instationnaires |
| Strouhal | $Sr = \frac{fL}{U} = \frac{L}{UT}$ | $\frac{\text{Instationarité}}{\text{Convection}}$ | $\frac{\text{Temps caractéristique de convection}}{\text{Période de lâcher tourbillonnaire}}$ | Ecoulements inertiels instationnaires |
| Helmholtz | $H = \frac{L}{cT} = \frac{fL}{c}$ | $\frac{\text{Echelle de longueur du problème}}{\text{longueur d'onde acoustique}}$ | $\frac{\text{fréquence caractéristique}}{\text{fréquence acoustique}}$ | Acoustique |

# C Equations-bilans sous formes locales et intégrales

Dans cette annexe on résume les équations-bilan de la mécanique des fluides sous forme *locale* (équations différentielles gouvernant l'évolution temporelle des quantités locales) puis sous forme *intégrale* en considérant un volume de contrôle *Fixe* noté $\Omega$ de frontière $\partial\Omega$. On considère ici le cas général d'un fluide soumis à une force *massique* $\vec{g}$ (en général la pesanteur). On ne fait pas d'hypothèse sur le caractère compressible ou incompressible. La loi de comportement est dans le cas général (compressible) la loi de Stokes $\vec{\vec{\tau}} = 2\mu\vec{\vec{D}}'$ avec $\vec{\vec{D}}' = (\vec{\vec{D}} - \mathrm{div}\,(\vec{u})\vec{\vec{I}}/3)$, qui se réduit à la loi de Newton $\vec{\vec{\tau}} = 2\mu\vec{\vec{D}}$ dans le cas incompressible. On suppose la viscosité $\mu$ constante, ainsi que la conductivité thermique $k$.

Il existe de nombreuses variantes de ces équations-bilan, on liste ici les plus utiles. Un grand nombre d'autres formes sont données dans le livre *Mécanique des Fluides, Candel (Dunod).*

## C.1 Bilan de masse

**Forme locale 1 (non conservative) :** $$\frac{d\rho}{dt} + \rho\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \qquad (1)$$

**Forme locale 2 (conservative) :** $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{u}) = 0 \qquad (2)$$

**Forme intégrale :** $$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho dV = -\oint_{\partial\Omega} \rho\vec{u}\cdot\vec{n}dS \qquad (3)$$

## C.2 Bilan de quantité de mouvement

**Forme locale 1 (non conservative) :** $$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\vec{g} - \vec{grad}\,p + \mu\Delta\vec{u} + \frac{\mu}{3}\vec{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} \qquad (4)$$

**Forme locale 2 (conservative) :** $$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{u}\otimes\vec{u}) = \rho\vec{g} - \vec{grad}\,p + \mathrm{div}\,\vec{\vec{\tau}} \qquad (5)$$

**Forme intégrale**

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\,\vec{u}\,dV = -\oint_{\partial\Omega}\rho\,\vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS + \oint_{\partial\Omega}\left(-p\vec{n} + \vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS + \int_\Omega \rho\vec{g}\,dV \quad \left[+\oint_{\mathcal{L}}\gamma\vec{n}_{\mathcal{L}}\,d\ell\right] \qquad (6)$$

(Le dernier terme entre crochets est à prendre en compte si le volume de contrôle $\Omega$ est traversé par une *surface libre* $\mathcal{S}$ ; dans ce cas $\mathcal{L} = \partial\Omega\cap\mathcal{S}$ et $\vec{n}_{\mathcal{L}}$ est le vecteur unitaire contenu dans le plan $\mathcal{S}$ et perpendiculaire à $\mathcal{L}$)

## C.3 Bilan d'énergie cinétique

**Forme locale 1** $$\rho\frac{d}{dt}\frac{|\vec{u}|^2}{2} = \rho\vec{g}\cdot\vec{u} - \vec{grad}\,p\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\mathrm{div}\,(\vec{\vec{\tau}}) \qquad (7)$$

**Forme locale 2** Sous les hypothèses suivantes :
- — Le champ de force massique $\vec{g}$ est conservatif, c.a.d. $\vec{g} = -\vec{grad}\,\mathcal{U}$ (en général $\mathcal{U} = gz$),
- — L'écoulement est barotrope ($\rho = \rho(p)$, ce qui permet de définir la fonction $\mathcal{P} = \int\frac{dp}{\rho}$) [1] ;

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \rho\vec{u}\cdot\vec{grad}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + \mathcal{P}\right) = \vec{u}\cdot\vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{\tau}}) \qquad (8)$$

(on reconnait comme cas particulier le premier théorème de Bernoulli).

**Forme intégrale (cas $\vec{g}$ conservatif)**

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + \rho\mathcal{U}\right)dV}_{\frac{dE_m}{dt}} = \underbrace{-\oint_{\partial\Omega}\left(\frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + \rho\mathcal{U}\right)\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{E}_m^{(ech)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega}\vec{u}\cdot(-p\vec{n})\,dS}_{\dot{W}^{(p,ext)}} + \underbrace{\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,(\vec{u})\,dV}_{\dot{W}^{(p,int)}} + \underbrace{\int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{\tau}})\,dV}_{\dot{W}^{(v)}} \qquad (9)$$

où $\dot{W}^{(v)}$ est la puissance des forces visqueuses, et $\dot{E}_m^{(ech)}$ le flux convectif d'énergie mécanique.

1. Cette notion englobe fluide incompressible (avec $\mathcal{P} = p/\rho_0$) ainsi que le gaz parfait en évolution isotherme (avec $\mathcal{P} = rT_0\log p$) ou isentropique (avec $\mathcal{P} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$)

## C.4 Bilan d'énergie (1er principe)

Dans ce paragraphe $e$ est l'énergie interne *volumique*, $h = e + p/\rho$ est l'enthalpie volumique [2], $\mathcal{E}_{\mathcal{D}(t)}$ est l'énergie du *volume matériel* $\mathcal{D}(t)$ coïncidant avec $\Omega$ à l'instant $t$, $\mathcal{H}$ est l'enthalpie totale du domaine *fixe* $\Omega$ , $\vec{q}$ est le flux de chaleur conductif [3], $\dot{W}^{(g,p,v,ext)}$ sont les puissances mécaniques *extérieures* des forces de gravité, pression et frottement visqueux, $\dot{Q}$ la puissance thermique, et $\dot{\mathcal{E}}^{(ech)}$ le flux convectif d'énergie.

**Forme intégrale 1 (1er principe en système fermé)**

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\left(e+\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right)\,dV + \oint_{\partial\Omega}\rho\left(e+\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right)\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{\frac{d\mathcal{E}_{\mathcal{D}(t)}}{dt}} = \underbrace{\int_\Omega \rho\vec{g}\cdot\vec{u}\,dV}_{\dot{W}^{(g,ext)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} -p\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{W}^{(p,ext)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega}\vec{u}\cdot\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{W}^{(v,ext)}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega}\vec{q}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{Q}} \quad (10)$$

**Forme intégrale 2 (1er principe en système ouvert ; $\vec{g}$ supposé conservatif)**

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\left(h+\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\mathcal{U}\right)\,dV}_{\frac{d\mathcal{H}}{dt}} = \underbrace{-\oint_{\partial\Omega}\rho\left(h+\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\mathcal{U}\right)\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{\mathcal{H}}^{(ech)}} + \underbrace{\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}\,dV}_{\text{"}V\frac{dP}{dt}\text{"}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega}\vec{u}\cdot\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{W}^{(v,ext)}} \underbrace{-\oint_{\partial\Omega}\vec{q}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{Q}} \quad (11)$$

Remarque : si le volume de contrôle $\Omega$ contient une surface intérieure $\partial\Omega_i$ mobile, il convient d'ajouter

$$\dot{W}^{(utile)} = \int_{\partial\Omega_i}\vec{u}\cdot\left(-p\vec{n}\cdot\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{n}\right)\,dS$$

**Forme locale 1 :** $$\rho\frac{d}{dt}\left(e+\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) = -\rho\vec{g}\cdot\vec{u} - \vec{grad}\,(p\vec{u}) + \mathrm{div}\,(\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{u}) - \mathrm{div}\,(\vec{q}) \quad (12)$$

**Forme locale 2 :** $$\rho\frac{d}{dt}\left(h+\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\mathcal{U}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{u}) - \mathrm{div}\,(\vec{q}) \quad (13)$$

## C.5 Bilan d'énergie interne

Le bilan local s'obtient en combinant les deux précédents, et en utilisant les identités $\vec{u}\cdot\mathrm{div}\,(\vec{\vec{\tau}}) = \mathrm{div}\,(\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{u}) - \vec{\vec{\tau}} : \vec{\vec{grad}}(\vec{u})$ et $p\mathrm{div}\,(\vec{u}) = \mathrm{div}\,(p\vec{u}) - \vec{grad}\,(p)\cdot\vec{u}$ ce qui permet de faire apparaître les *puissances mécaniques intérieures* $\dot{W}^{(v,int)}$ et $\dot{W}^{(p,int)}$ ($\dot{W}^{(v,int)}$ est négatif, ce qui signifie que ce terme contribue positivement au bilan d'énergie interne et donc négativement au bilan d'énergie cinétique).

**Forme locale :** $$\rho\frac{de}{dt} = \vec{\vec{\tau}} : \vec{\vec{grad}}(\vec{u}) + p\mathrm{div}\,(\vec{u}) - \mathrm{div}\,(\vec{q}) \quad (14)$$

**Forme intégrale :** $$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho e\,dV}_{\frac{dE}{dt}} = \underbrace{-\oint_{\partial\Omega}\rho e\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{E}^{(ech)}} \underbrace{-\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,(\vec{u})\,dV}_{\left(-\dot{W}^{(p,int)}\right)} + \underbrace{\int_\Omega \vec{\vec{\tau}} : \vec{\vec{grad}}(\vec{u})\,dV}_{\left(-\dot{W}^{(v,int)}\right)} \underbrace{-\oint_{\partial\Omega}\vec{q}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{Q}}$$

## C.6 Bilan d'entropie

Le bilan local d'entropie volumique $s$ s'obtient a partir de celui de l'énergie interne : $de = Tds - pd(1/\rho)$.

**Forme locale :** $$\rho\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{\vec{\tau}} : \vec{\vec{grad}}(\vec{u})}{T} - \frac{\mathrm{div}\,(\vec{q})}{T} = \frac{2\mu\vec{\vec{D}}' : \vec{\vec{D}}'}{T} + k\frac{\vec{grad}\,T\cdot\vec{grad}\,T}{T^2} - \mathrm{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) \quad (15)$$

**Forme intégrale (second principe en système ouvert)**

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho s\,dV}_{\frac{dS}{dt}} = \underbrace{-\oint_{\partial\Omega}\rho s\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{S}^{(ech)}} + \underbrace{\int_\Omega\left(\frac{2\mu}{T}\left[tr(\vec{\vec{D}}'^2)\right] + \frac{k}{T^2}|\vec{grad}\,T|^2\right)dV}_{\dot{S}^{(cree)}} \underbrace{-\oint_{\partial\Omega}\frac{\vec{q}}{T}\cdot\vec{n}\,dS}_{\dot{S}^{(recu)}} \quad (16)$$

2. $e = c_v T$ et $h = c_p T$ pour un gaz parfait
3. Donné en général par la loi de Fourier $\vec{q} = -k\vec{grad}\,T$

# D Opérateurs différentiels et équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible de fluide Newtonien dans les principaux systèmes de coordonnées

## D.1 Coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$

**Opérateurs différentiels**

$$\mathrm{div}\,(\vec{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\vec{rot}\,\vec{u} = \begin{cases} \omega_x = \dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\[2ex] \omega_y = \dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \\[2ex] \omega_z = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \end{cases} \qquad \vec{grad} f = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**Tenseur gradient des vitesses**

$$\overset{\Rightarrow}{grad}\,(\vec{u}) = \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{\partial u_x}{\partial y} & \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial x} & \dfrac{\partial u_z}{\partial y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad \text{Notation indicielle :} \quad \left[\overset{\Rightarrow}{grad}(\vec{u})\right]_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

**Tenseur des contraintes**

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} & \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} & \sigma_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} & \sigma_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

**Equations de Navier-Stokes (écoulement incompressible)**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

**Fonction de courant $\psi$** pour un écoulement incompressible plan ($\vec{u} = u_x(x,y)\vec{e_x} + u_y(x,y)\vec{e_y}$)

$$\vec{u} = \vec{rot}\,(\psi(x,y)\vec{e_z}), \qquad \text{c.a.d :} \quad \begin{cases} u_x = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \\ u_y = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases} \tag{17}$$

## D.2 Coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$

**Opérateurs différentiels**

$$\text{div}\,(\vec{u}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\vec{rot}\,\vec{u} = \begin{cases} \omega_r = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathrm{u}_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial \mathrm{u}_\theta}{\partial z}\right) \\[2ex] \omega_\theta = \left(\dfrac{\partial \mathrm{u}_r}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{u}_z}{\partial r}\right) \\[2ex] \omega_z = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{u}_\theta) - \dfrac{\partial \mathrm{u}_r}{\partial \theta}\right) \end{cases} \qquad \vec{grad} f = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\vec{\vec{grad}}\,(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

d'où on peut tirer le tenseur des taux de déformation par symétrisation : $\vec{\vec{D}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{\nabla}}\vec{u} + [\vec{\vec{\nabla}}\vec{u}]^T\right)$, ainsi que le tenseur des contraintes visqueuses : $\vec{\vec{\tau}} = 2\mu\vec{\vec{D}}$

**Equations de Navier-Stokes (écoulement incompressible)**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} &= g_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right] \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= g_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} \\ &+ \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] \end{aligned}$$

**Fonction de courant $\psi$** pour un écoulement incompressible plan exprimé en coordonnées polaires : $(\vec{u} = u_r(r,\theta)\vec{e_r} + u_\theta(r,\theta)\vec{e_\theta})$

$$\vec{u} = \vec{rot}\,(\psi(r,\theta)\vec{e_z}), \quad \text{c.a.d :} \quad \begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\[2ex] u_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases} \tag{18}$$

**Fonction de Stokes $\Psi$** pour un écoulement à symétrie de révolution $(\vec{u} = u_r(r,z)\vec{e_r} + u_z(r,z)\vec{e_z})$

$$\begin{cases} u_r = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial z}, \\[2ex] u_z = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial r}. \end{cases} \tag{19}$$

## D.3 Coordonnées sphériques $(R, \Theta, \phi)$ (ou $(r, \theta, \varphi)$ si pas d'ambigüité)

**Opérateurs différentiels**

$$\mathrm{div}\,(\vec{u}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{u_\theta}{r}$$

$$\vec{rot}\,\vec{u} = \begin{cases} \omega_r = \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{u}_\varphi \sin\theta) - \dfrac{\partial \mathrm{u}_\theta}{\partial\varphi}\right) \\ \\ \omega_\theta = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \mathrm{u}_r}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{u}_\varphi) \\ \\ \omega_\varphi = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{u}_\theta) - \dfrac{\partial \mathrm{u}_r}{\partial\theta}\right) \end{cases} \qquad \vec{grad}\,f = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta} \\ \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi} \end{cases}$$

$$\Delta f = div\left(\vec{\nabla} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

**Gradient des vitesses et tenseur des contraintes**

$$\vec{\vec{grad}}\,(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - u_\theta\right) & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - u_\varphi\right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_r\right) & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} - \frac{1}{\tan\theta}u_\varphi\right) \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta} & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{\tan\theta}u_\theta + u_r\right) \end{bmatrix}$$

d'où on peut tirer le tenseur des taux de déformation par symétrisation : $\vec{\vec{D}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{\nabla}}\vec{u} + [\vec{\vec{\nabla}}\vec{u}]^T\right)$, ainsi que le tenseur des contraintes visqueuses : $\vec{\vec{\tau}} = 2\mu\vec{\vec{D}}$

**Equation de Navier-Stokes (écoulement incompressible) :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{u_\varphi}{sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - u_\theta^2 - u_\varphi^2\right] &= g_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\Delta_r\vec{u}; \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_\varphi}{sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + u_\theta u_\varphi - \frac{u_\varphi^2}{tan\theta} + u_\varphi\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} + \frac{u_r u_\theta}{r}\right] &= g_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\Delta_\theta\vec{u}; \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\varphi \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[u_\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta} + \frac{u_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_\theta u_r - \frac{u_\theta u_\varphi}{tan\theta}\right] &= g_\varphi - \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\Delta_\varphi\vec{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_r\vec{u} &= \Delta u_r - \frac{2}{r^2}\left[u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_\theta}{tan\theta} + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right] \\ \Delta_\theta\vec{u} &= \Delta u_\theta + \frac{1}{r^2}\left[2\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{1}{sin^2\theta}u_\theta - \frac{2cos^2\theta}{tan\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right] \\ \Delta_\varphi\vec{u} &= \Delta u_\varphi + \frac{1}{r^2}\left[u_\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta} + \frac{u_\varphi}{sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} + u_r u_\varphi + \frac{u_\theta u_\varphi}{tan\theta}\right] \end{aligned}$$

**Fonction de Stokes $\Psi$** pour un écoulement à symétrie de révolution décrit en coordonnées sphériques $(\vec{u} = u_R(R,\Theta)\vec{e_R} + u_\Theta(R,\Theta)\vec{e_\Theta})$

$$\begin{cases} u_R = -\dfrac{1}{R^2\sin\Theta}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\Theta}, \\ \\ u_\Theta = \dfrac{1}{R\sin\Theta}\dfrac{\partial\Psi}{\partial R}. \end{cases} \tag{20}$$

# E Quelques formules d'analyse vectorielle et tensorielle

## E.1 Formules de dérivation d'un produit (généralisations de $(fg)' = f'g + fg'$) :

$$\vec{grad}\,(fg) = f\vec{grad}\,g + g\vec{grad}\,f$$

$$\vec{grad}\,(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{\vec{grad}}(\vec{A})\cdot\vec{B} + \vec{\vec{grad}}(\vec{B})\cdot\vec{A} + \vec{A}\wedge\vec{rot}\,\vec{B} + \vec{B}\wedge\vec{rot}\,\vec{A}$$

$$\mathrm{div}\,(f\vec{A}) = f\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{grad}\,(f)\cdot\vec{A}$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\,\vec{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\vec{rot}\,\vec{B}$$

$$\vec{rot}\,(f\vec{A}) = f\,\vec{rot}\,\vec{A} + \vec{A}\wedge\vec{grad}\,(f)$$

$$\vec{rot}\,(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{\vec{grad}}(\vec{A})\cdot\vec{B} - \vec{\vec{grad}}(\vec{B})\cdot\vec{A} + \vec{A}\,\mathrm{div}\,(\vec{B}) - \vec{B}\,\mathrm{div}\,(\vec{A})$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{A}\otimes\vec{B}) = \mathrm{div}\,(\vec{A})\,\vec{B} + \vec{\vec{grad}}(\vec{B})\cdot\vec{A}$$

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{grad}\right)\vec{u} = \left(\vec{\vec{grad}}\,\vec{u}\right)\cdot\vec{u} = \vec{grad}\,(||\vec{u}||^2/2) + \vec{rot}\,\vec{u}\wedge\vec{u}$$

## E.2 Formules de dérivée seconde (généralisations de $(f')' = f''$) :

$$\mathrm{div}\,(\vec{grad}\,f) = \Delta f$$

$$\vec{rot}\,(\vec{grad}\,f) = \vec{0}$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{rot}\,\vec{A}) = 0$$

$$\vec{rot}\,(\vec{rot}\,\vec{A}) = \vec{grad}\;(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

$$\vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{grad}}\vec{A}) = \Delta\vec{A}$$

$$\vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{grad}}\vec{A} +^t \vec{\vec{grad}}\vec{A}) = \Delta\vec{A} + \vec{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{A})$$

## E.3 Formules d'intégration (généralisations de $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$) :

Pour un volume $\Omega$ de frontière $\Sigma$, en utilisant la convention de la normale sortante

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,(\vec{A})dV = \oint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}dS$$

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{div}}\,(\vec{\vec{A}})dV = \oint_\Sigma \vec{\vec{A}}\cdot\vec{n}dS$$

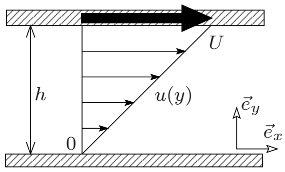
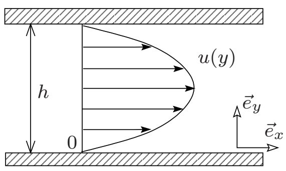
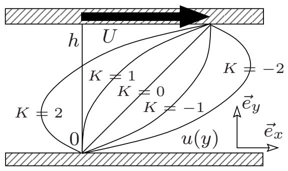
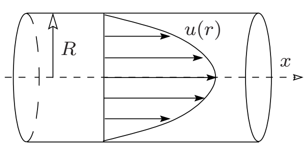
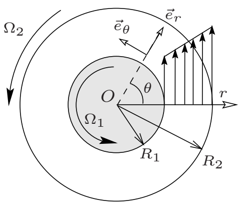
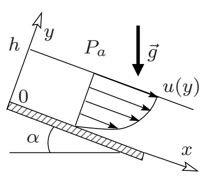
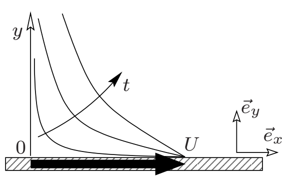
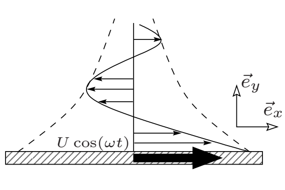
$$\int_\Omega \vec{grad}\,(f)dV = \oint_\Sigma f\vec{n}dS$$

$$\int_\Omega \vec{rot}\,(\vec{A})dV = \oint_\Sigma \vec{A}\wedge\vec{n}dS$$

Pour une surface ouverte $\Sigma$ (associée à un vecteur normal $\vec{n}$) bordée par un contour $\Gamma$ (associé à un vecteur tangent $\vec{t}$) orienté positivement :

$$\int_\Sigma \vec{rot}\,(\vec{A})\cdot\vec{n}dS = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{t}d\ell$$

## F — (Quelques) solutions exactes des équations de Navier-Stokes

| Schéma | Hypothèses | Solution | Nom de l'écoulement |
|---|---|---|---|
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$<br>$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ | $\vec{u} = u(y)\,\vec{e}_x \quad \text{avec} \quad u(y) = \frac{Uy}{h}$<br>$p = C^{te}$ | Couette plan<br>sans gradient de pression<br>$(\partial p/\partial x = 0)$ |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$<br>$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ | $\frac{dp}{dx} = C^{te} \quad \text{et} \quad \vec{u} = u(y)\,\vec{e}_x$<br>$\text{avec} \quad u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} y(h-y)$ | Poiseuille plan |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$<br>$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ | $\frac{dp}{dx} = C^{te} \quad \text{et} \quad \vec{u} = u(y)\,\vec{e}_x$<br>$\text{avec} \quad u(y) = U\left[\frac{y}{h} - K\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right]$<br>$\text{où} \quad K = \frac{h^2}{2\mu U}\frac{dp}{dx}$ | Couette plan<br>avec gradient de pression<br>$(\partial p/\partial x \neq 0)$<br>= "Couette-Poiseuille" |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$<br>$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$ | $\frac{dp}{dx} = C^{te} \quad \text{et} \quad \vec{u} = u(r)\,\vec{e}_x$<br>$\text{avec} \quad u(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left(R^2 - r^2\right)$ | Poiseuille cylindrique |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$<br>$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$<br>$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ | $\vec{u} = v(r)\vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad v(r) = Ar + \frac{B}{r}$<br>$\text{où} \quad A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$<br>$\text{et} \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)\, R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$ | Couette cylindrique<br>= "Couette-Taylor" |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$<br>$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$ | $\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$<br>$\text{avec} \quad u(y) = \frac{g \sin\alpha}{2\nu} y(2h-y)$<br>$p(y) = \rho g(h-y)\cos\alpha + P_a$ | Film tombant |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$<br>$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ | $\vec{u} = u(y,t)\vec{e}_x$<br>$\text{avec} \quad u(y,t) = U\left[1 - \text{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu\, t}}\right)\right]$<br>$\tau_p = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=0} = -\rho U\sqrt{\frac{\nu}{\pi t}}$ | Premier problème<br>de Stokes |
|   | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$<br>$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ | $\vec{u} = u(y,t)\vec{e}_x$<br>$u(y,t) = Ue^{-y/\delta}\cos(\omega t - \frac{y}{\delta}); \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$<br>$\tau_p = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=0} = -\frac{\mu U\sqrt{2}}{\delta}\cos(\omega t - \pi/4)$ | Second problème<br>de Stokes |

# G Pertes de charges et Diagramme de Moody

$$\Delta P = \frac{\rho U^2 L}{D} \lambda(Re, \epsilon)$$

$$Re = \frac{UD}{\nu}, \quad \epsilon = \frac{k}{D}$$

**Régime laminaire** ($Re \leq 2000$) :

Pour $Re < 2000$ on peut utiliser la formule de Poiseuille :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

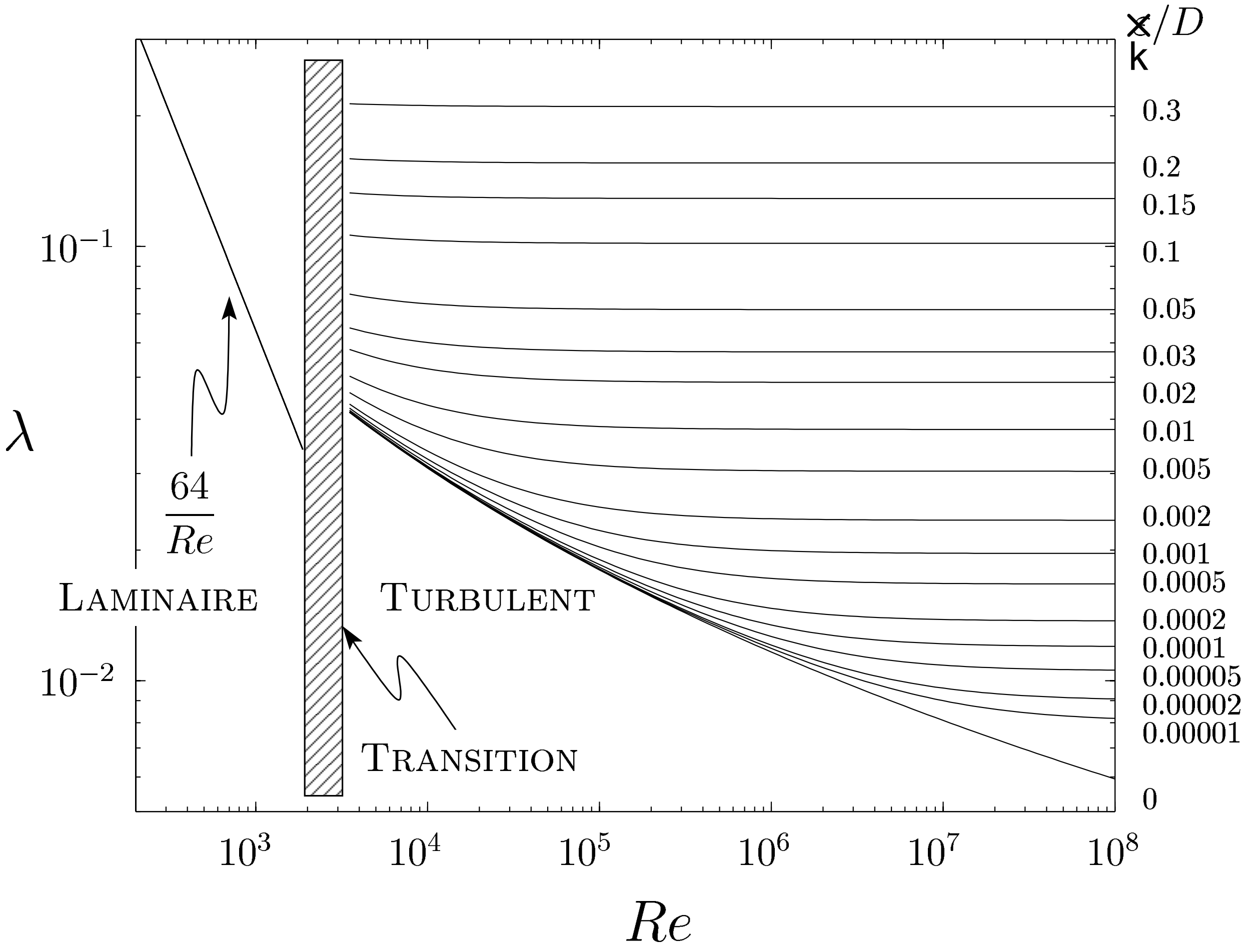
**Régime turbulent** ($Re \geq 2000$) :

Pour $\varepsilon < 0.01\%$ et $Re < 10^5$ on peut utiliser la formule de Blasius :

$$\lambda = 0.316\, Re^{-1/4} \tag{21}$$

Pour $Re > 4000$ et $\epsilon$ quelconque, on utilise généralement la formule de Colebrook (semi-explicite) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71} \right) \tag{22}$$



# Ecoulement compressible isentropique de gaz parfait

**Notations:**

| | | |
|---|---|---|
| $M$ | : | Nombre de Mach |
| $U$ | : | Vitesse |
| $P$ | : | Pression |
| $\rho$ | : | Masse volumique |
| $T$ | : | Température absolue |
| $A$ | : | Aire d'une section droite |
| $P_i$ | : | Pression d'arrêt isentropique |
| $\rho_i$ | : | Masse volumique d'arrêt isentropique |
| $T_i$ | : | Température d'arrêt isentropique |
| $A_c$ | : | Aire de la section droite au col de la tuyère |

**Relations de St-Venant :**

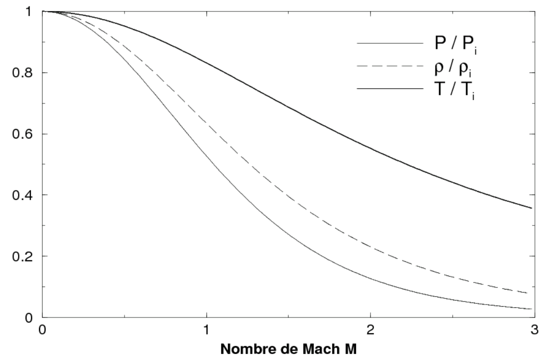
$$\frac{T}{T_i} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1} \quad (1)$$

$$\frac{P}{P_i} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \quad (2)$$

$$\frac{\rho}{\rho_i} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \quad (3)$$

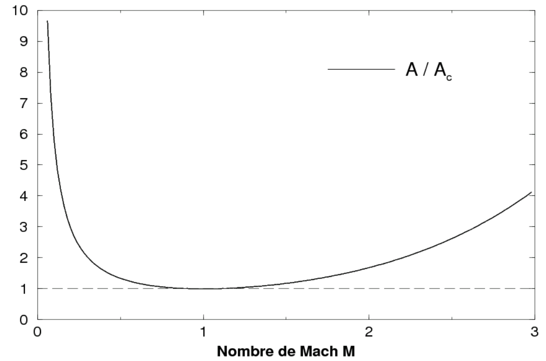
$$\text{Si } M_c = 1 : \frac{A}{A_c} = \frac{1}{M}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (4)$$

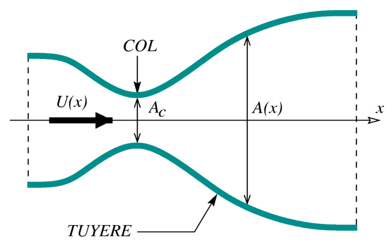
$$U = \left\{\frac{2\gamma r}{\gamma-1}T_i\left[1-\left(\frac{P}{P_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\right\}^{1/2} \quad (5)$$

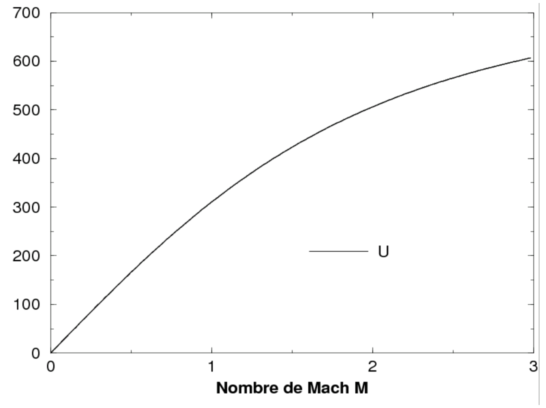



Ecoulement isentropique
$p/\rho^\gamma = Cte$
de gaz parfait $p = \rho r T$

Données numériques:
$\gamma = 1.405,\ T_i = 288K$



| $M$ | $P/P_i$ | $\rho/\rho_i$ | $T/T_i$ | $A/A_c$ | $U^\star$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | inf | 0.00 |
| 0.02 | 0.9997 | 0.9998 | 0.9999 | 28.9262 | 6.81 |
| 0.04 | 0.9989 | 0.9992 | 0.9997 | 14.4735 | 13.63 |
| 0.06 | 0.9975 | 0.9982 | 0.9993 | 9.6606 | 20.44 |
| 0.08 | 0.9955 | 0.9968 | 0.9987 | 7.2577 | 27.25 |
| 0.10 | 0.9930 | 0.9950 | 0.9980 | 5.8187 | 34.04 |
| 0.12 | 0.9899 | 0.9928 | 0.9971 | 4.8617 | 40.83 |
| 0.14 | 0.9864 | 0.9903 | 0.9960 | 4.1802 | 47.61 |
| 0.16 | 0.9822 | 0.9873 | 0.9948 | 3.6708 | 54.38 |
| 0.18 | 0.9776 | 0.9840 | 0.9935 | 3.2762 | 61.14 |
| 0.20 | 0.9724 | 0.9803 | 0.9920 | 2.9620 | 67.88 |
| 0.22 | 0.9667 | 0.9762 | 0.9903 | 2.7063 | 74.61 |
| 0.24 | 0.9606 | 0.9718 | 0.9885 | 2.4944 | 81.31 |
| 0.26 | 0.9539 | 0.9670 | 0.9865 | 2.3162 | 88.00 |
| 0.28 | 0.9468 | 0.9619 | 0.9844 | 2.1646 | 94.67 |
| 0.30 | 0.9393 | 0.9564 | 0.9821 | 2.0342 | 101.32 |
| 0.32 | 0.9313 | 0.9506 | 0.9797 | 1.9210 | 107.94 |
| 0.34 | 0.9229 | 0.9445 | 0.9771 | 1.8221 | 114.53 |
| 0.36 | 0.9141 | 0.9380 | 0.9744 | 1.7351 | 121.10 |
| 0.38 | 0.9049 | 0.9313 | 0.9716 | 1.6581 | 127.64 |
| 0.40 | 0.8953 | 0.9243 | 0.9686 | 1.5895 | 134.16 |
| 0.42 | 0.8854 | 0.9170 | 0.9655 | 1.5284 | 140.64 |
| 0.44 | 0.8751 | 0.9094 | 0.9623 | 1.4735 | 147.09 |
| 0.46 | 0.8645 | 0.9016 | 0.9589 | 1.4242 | 153.51 |
| 0.48 | 0.8537 | 0.8935 | 0.9554 | 1.3797 | 159.89 |
| 0.50 | 0.8425 | 0.8852 | 0.9518 | 1.3395 | 166.23 |
| 0.52 | 0.8312 | 0.8767 | 0.9481 | 1.3030 | 172.55 |
| 0.54 | 0.8195 | 0.8679 | 0.9442 | 1.2700 | 178.82 |
| 0.56 | 0.8077 | 0.8590 | 0.9403 | 1.2400 | 185.05 |
| 0.58 | 0.7956 | 0.8498 | 0.9362 | 1.2127 | 191.25 |
| 0.60 | 0.7834 | 0.8405 | 0.9321 | 1.1880 | 197.40 |
| 0.62 | 0.7710 | 0.8310 | 0.9278 | 1.1654 | 203.51 |
| 0.64 | 0.7585 | 0.8214 | 0.9234 | 1.1449 | 209.58 |
| 0.66 | 0.7458 | 0.8116 | 0.9189 | 1.1264 | 215.61 |
| 0.68 | 0.7331 | 0.8017 | 0.9144 | 1.1095 | 221.59 |
| 0.70 | 0.7202 | 0.7917 | 0.9097 | 1.0942 | 227.53 |
| 0.72 | 0.7073 | 0.7815 | 0.9050 | 1.0804 | 233.42 |
| 0.74 | 0.6943 | 0.7713 | 0.9002 | 1.0680 | 239.26 |
| 0.76 | 0.6813 | 0.7610 | 0.8953 | 1.0569 | 245.06 |
| 0.78 | 0.6683 | 0.7506 | 0.8903 | 1.0470 | 250.81 |
| 0.80 | 0.6552 | 0.7402 | 0.8853 | 1.0382 | 256.51 |
| 0.82 | 0.6422 | 0.7296 | 0.8802 | 1.0304 | 262.16 |
| 0.84 | 0.6292 | 0.7191 | 0.8750 | 1.0237 | 267.76 |
| 0.86 | 0.6162 | 0.7085 | 0.8697 | 1.0178 | 273.32 |
| 0.88 | 0.6033 | 0.6979 | 0.8644 | 1.0129 | 278.82 |
| 0.90 | 0.5904 | 0.6873 | 0.8591 | 1.0088 | 284.27 |
| 0.92 | 0.5776 | 0.6766 | 0.8537 | 1.0056 | 289.68 |
| 0.94 | 0.5649 | 0.6660 | 0.8482 | 1.0031 | 295.03 |
| 0.96 | 0.5523 | 0.6554 | 0.8427 | 1.0014 | 300.32 |
| 0.98 | 0.5398 | 0.6448 | 0.8372 | 1.0003 | 305.57 |

| $M$ | $P/P_i$ | $\rho/\rho_i$ | $T/T_i$ | $A/A_c$ | $U^\star$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 0.5274 | 0.6342 | 0.8316 | 1.0000 | 310.77 |
| 1.02 | 0.5152 | 0.6237 | 0.8260 | 1.0003 | 315.91 |
| 1.04 | 0.5031 | 0.6132 | 0.8203 | 1.0013 | 321.00 |
| 1.06 | 0.4911 | 0.6028 | 0.8146 | 1.0029 | 326.04 |
| 1.08 | 0.4792 | 0.5924 | 0.8089 | 1.0051 | 331.02 |
| 1.10 | 0.4675 | 0.5821 | 0.8032 | 1.0079 | 335.95 |
| 1.12 | 0.4560 | 0.5718 | 0.7974 | 1.0113 | 340.83 |
| 1.14 | 0.4446 | 0.5617 | 0.7917 | 1.0152 | 345.66 |
| 1.16 | 0.4335 | 0.5516 | 0.7859 | 1.0197 | 350.43 |
| 1.18 | 0.4224 | 0.5416 | 0.7801 | 1.0248 | 355.16 |
| 1.20 | 0.4116 | 0.5316 | 0.7742 | 1.0304 | 359.83 |
| 1.22 | 0.4010 | 0.5218 | 0.7684 | 1.0365 | 364.44 |
| 1.24 | 0.3905 | 0.5121 | 0.7626 | 1.0431 | 369.01 |
| 1.26 | 0.3802 | 0.5024 | 0.7567 | 1.0503 | 373.52 |
| 1.28 | 0.3701 | 0.4929 | 0.7509 | 1.0579 | 377.98 |
| 1.30 | 0.3602 | 0.4835 | 0.7450 | 1.0661 | 382.39 |
| 1.32 | 0.3505 | 0.4742 | 0.7392 | 1.0748 | 386.75 |
| 1.34 | 0.3410 | 0.4650 | 0.7333 | 1.0840 | 391.05 |
| 1.36 | 0.3317 | 0.4559 | 0.7275 | 1.0937 | 395.31 |
| 1.38 | 0.3225 | 0.4469 | 0.7217 | 1.1039 | 399.51 |
| 1.40 | 0.3136 | 0.4381 | 0.7159 | 1.1146 | 403.66 |
| 1.42 | 0.3049 | 0.4294 | 0.7101 | 1.1258 | 407.77 |
| 1.44 | 0.2963 | 0.4208 | 0.7043 | 1.1374 | 411.82 |
| 1.46 | 0.2880 | 0.4123 | 0.6985 | 1.1496 | 415.82 |
| 1.48 | 0.2798 | 0.4040 | 0.6927 | 1.1623 | 419.78 |
| 1.50 | 0.2719 | 0.3957 | 0.6870 | 1.1756 | 423.68 |
| 1.52 | 0.2641 | 0.3876 | 0.6813 | 1.1893 | 427.54 |
| 1.54 | 0.2565 | 0.3797 | 0.6756 | 1.2035 | 431.35 |
| 1.56 | 0.2491 | 0.3718 | 0.6699 | 1.2182 | 435.11 |
| 1.58 | 0.2419 | 0.3641 | 0.6642 | 1.2335 | 438.82 |
| 1.60 | 0.2348 | 0.3566 | 0.6586 | 1.2493 | 442.49 |
| 1.62 | 0.2280 | 0.3491 | 0.6530 | 1.2656 | 446.11 |
| 1.64 | 0.2213 | 0.3418 | 0.6474 | 1.2824 | 449.68 |
| 1.66 | 0.2148 | 0.3346 | 0.6418 | 1.2998 | 453.21 |
| 1.68 | 0.2084 | 0.3275 | 0.6363 | 1.3177 | 456.69 |
| 1.70 | 0.2022 | 0.3206 | 0.6308 | 1.3362 | 460.13 |
| 1.72 | 0.1962 | 0.3138 | 0.6254 | 1.3552 | 463.52 |
| 1.74 | 0.1904 | 0.3071 | 0.6199 | 1.3748 | 466.87 |
| 1.76 | 0.1847 | 0.3005 | 0.6145 | 1.3949 | 470.17 |
| 1.78 | 0.1791 | 0.2941 | 0.6092 | 1.4156 | 473.44 |
| 1.80 | 0.1738 | 0.2878 | 0.6038 | 1.4369 | 476.66 |
| 1.82 | 0.1685 | 0.2816 | 0.5985 | 1.4588 | 479.83 |
| 1.84 | 0.1634 | 0.2755 | 0.5933 | 1.4813 | 482.97 |
| 1.86 | 0.1585 | 0.2695 | 0.5880 | 1.5044 | 486.06 |
| 1.88 | 0.1537 | 0.2637 | 0.5828 | 1.5281 | 489.11 |
| 1.90 | 0.1490 | 0.2580 | 0.5777 | 1.5524 | 492.13 |
| 1.92 | 0.1445 | 0.2524 | 0.5726 | 1.5774 | 495.10 |
| 1.94 | 0.1401 | 0.2469 | 0.5675 | 1.6030 | 498.03 |
| 1.96 | 0.1358 | 0.2415 | 0.5625 | 1.6292 | 500.93 |
| 1.98 | 0.1317 | 0.2362 | 0.5575 | 1.6561 | 503.78 |

| $M$ | $P/P_i$ | $\rho/\rho_i$ | $T/T_i$ | $A/A_c$ | $U^\star$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.00 | 0.1277 | 0.2311 | 0.5525 | 1.6837 | 506.60 |
| 2.02 | 0.1238 | 0.2260 | 0.5476 | 1.7120 | 509.38 |
| 2.04 | 0.1200 | 0.2211 | 0.5427 | 1.7409 | 512.12 |
| 2.06 | 0.1163 | 0.2162 | 0.5378 | 1.7705 | 514.83 |
| 2.08 | 0.1127 | 0.2115 | 0.5330 | 1.8009 | 517.50 |
| 2.10 | 0.1093 | 0.2069 | 0.5283 | 1.8319 | 520.14 |
| 2.12 | 0.1059 | 0.2023 | 0.5235 | 1.8637 | 522.73 |
| 2.14 | 0.1027 | 0.1979 | 0.5188 | 1.8963 | 525.30 |
| 2.16 | 0.0995 | 0.1935 | 0.5142 | 1.9296 | 527.83 |
| 2.18 | 0.0965 | 0.1893 | 0.5096 | 1.9636 | 530.33 |
| 2.20 | 0.0935 | 0.1851 | 0.5050 | 1.9985 | 532.79 |
| 2.22 | 0.0906 | 0.1810 | 0.5005 | 2.0341 | 535.22 |
| 2.24 | 0.0878 | 0.1771 | 0.4960 | 2.0705 | 537.61 |
| 2.26 | 0.0851 | 0.1732 | 0.4916 | 2.1078 | 539.98 |
| 2.28 | 0.0825 | 0.1694 | 0.4872 | 2.1459 | 542.31 |
| 2.30 | 0.0800 | 0.1657 | 0.4828 | 2.1848 | 544.61 |
| 2.32 | 0.0775 | 0.1620 | 0.4785 | 2.2246 | 546.89 |
| 2.34 | 0.0751 | 0.1585 | 0.4742 | 2.2652 | 549.13 |
| 2.36 | 0.0728 | 0.1550 | 0.4700 | 2.3068 | 551.34 |
| 2.38 | 0.0706 | 0.1516 | 0.4658 | 2.3492 | 553.52 |
| 2.40 | 0.0684 | 0.1483 | 0.4616 | 2.3925 | 555.67 |
| 2.42 | 0.0663 | 0.1450 | 0.4575 | 2.4368 | 557.79 |
| 2.44 | 0.0643 | 0.1418 | 0.4534 | 2.4820 | 559.89 |
| 2.46 | 0.0623 | 0.1387 | 0.4493 | 2.5282 | 561.95 |
| 2.48 | 0.0604 | 0.1357 | 0.4453 | 2.5753 | 563.99 |
| 2.50 | 0.0586 | 0.1327 | 0.4414 | 2.6235 | 566.01 |
| 2.52 | 0.0568 | 0.1298 | 0.4375 | 2.6726 | 567.99 |
| 2.54 | 0.0551 | 0.1270 | 0.4336 | 2.7228 | 569.95 |
| 2.56 | 0.0534 | 0.1242 | 0.4297 | 2.7740 | 571.88 |
| 2.58 | 0.0518 | 0.1215 | 0.4259 | 2.8262 | 573.79 |
| 2.60 | 0.0502 | 0.1189 | 0.4221 | 2.8795 | 575.67 |
| 2.62 | 0.0487 | 0.1163 | 0.4184 | 2.9339 | 577.53 |
| 2.64 | 0.0472 | 0.1138 | 0.4147 | 2.9894 | 579.36 |
| 2.66 | 0.0458 | 0.1113 | 0.4110 | 3.0461 | 581.17 |
| 2.68 | 0.0444 | 0.1089 | 0.4074 | 3.1038 | 582.95 |
| 2.70 | 0.0430 | 0.1066 | 0.4038 | 3.1628 | 584.71 |
| 2.72 | 0.0417 | 0.1043 | 0.4003 | 3.2229 | 586.45 |
| 2.74 | 0.0405 | 0.1020 | 0.3968 | 3.2842 | 588.17 |
| 2.76 | 0.0393 | 0.0998 | 0.3933 | 3.3467 | 589.86 |
| 2.78 | 0.0381 | 0.0977 | 0.3899 | 3.4104 | 591.53 |
| 2.80 | 0.0369 | 0.0956 | 0.3865 | 3.4754 | 593.18 |
| 2.82 | 0.0358 | 0.0936 | 0.3831 | 3.5417 | 594.80 |
| 2.84 | 0.0348 | 0.0916 | 0.3798 | 3.6092 | 596.41 |
| 2.86 | 0.0337 | 0.0896 | 0.3765 | 3.6781 | 597.99 |
| 2.88 | 0.0327 | 0.0877 | 0.3732 | 3.7483 | 599.56 |
| 2.90 | 0.0318 | 0.0858 | 0.3700 | 3.8198 | 601.10 |
| 2.92 | 0.0308 | 0.0840 | 0.3668 | 3.8927 | 602.63 |
| 2.94 | 0.0299 | 0.0822 | 0.3636 | 3.9670 | 604.13 |
| 2.96 | 0.0290 | 0.0805 | 0.3605 | 4.0427 | 605.61 |
| 2.98 | 0.0282 | 0.0788 | 0.3574 | 4.1198 | 607.08 |

$^\star$ *dans le cas où* $T_i = 288\ K$

## Relations de saut à travers un choc droit

**Indices:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | : | Quantités juste avant l'onde de choc (amont) |
| 2 | : | Quantités juste après l'onde de choc (aval) |
| $i,1$ | : | Quantités d'arrêt isentropiques en amont de l'onde de choc |
| $i,2$ | : | Quantités d'arrêt isentropiques en aval de l'onde de choc |

**Relations de saut:**

$$M_2^2 = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2+1-\gamma} \tag{1}$$

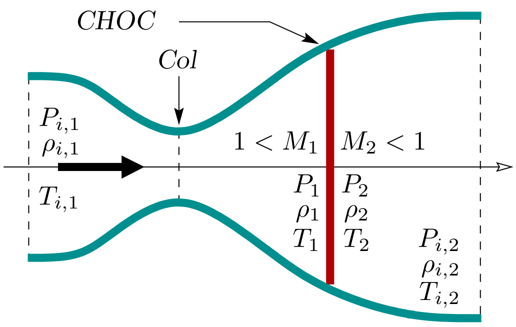
$$\frac{P_2}{P_1} = 1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2-1\right) \tag{2}$$

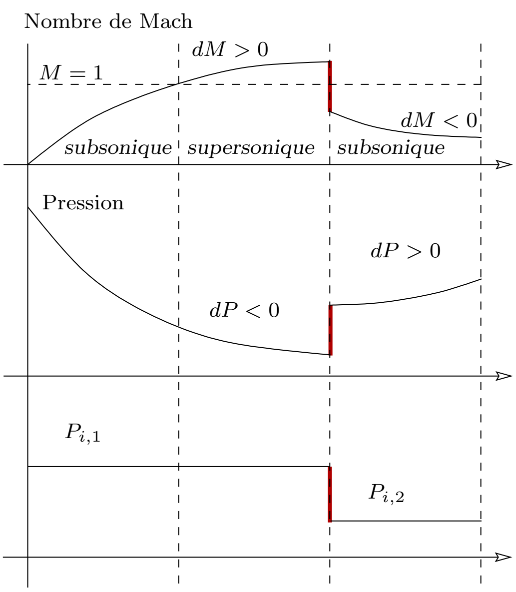
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \tag{3}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(2\gamma M_1^2+1-\gamma\right)\,\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)^2M_1^2} \tag{4}$$

$$T_{i,2} = T_{i,1} \tag{5}$$

$$\frac{P_{i,2}}{P_{i,1}} = \frac{\rho_{i,2}}{\rho_{i,1}} = \left\{\frac{(\gamma+1)^{\gamma+1}M_1^{2\gamma}}{(2\gamma M_1^2+1-\gamma)\left[2+(\gamma-1)M_1^2\right]^{\gamma}}\right\}^{\dfrac{1}{\gamma-1}} \tag{6}$$



| $M_1$ | $M_2$ | $P_2/P_1$ | $\rho_2/\rho_1$ | $T_2/T_1$ | $P_{i,2}/P_{i,1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.00000 |
| 1.02 | 0.981 | 1.0472 | 1.0334 | 1.0134 | 0.99999 |
| 1.04 | 0.962 | 1.0953 | 1.0669 | 1.0266 | 0.99992 |
| 1.06 | 0.944 | 1.1444 | 1.1007 | 1.0397 | 0.99975 |
| 1.08 | 0.928 | 1.1944 | 1.1346 | 1.0527 | 0.99943 |
| 1.10 | 0.912 | 1.2454 | 1.1687 | 1.0656 | 0.99893 |
| 1.12 | 0.897 | 1.2972 | 1.2029 | 1.0785 | 0.99822 |
| 1.14 | 0.882 | 1.3501 | 1.2372 | 1.0912 | 0.99726 |
| 1.16 | 0.868 | 1.4038 | 1.2716 | 1.1040 | 0.99606 |
| 1.18 | 0.855 | 1.4585 | 1.3061 | 1.1167 | 0.99458 |
| 1.20 | 0.842 | 1.5141 | 1.3407 | 1.1294 | 0.99281 |
| 1.22 | 0.830 | 1.5706 | 1.3753 | 1.1420 | 0.99075 |
| 1.24 | 0.818 | 1.6281 | 1.4100 | 1.1547 | 0.98838 |
| 1.26 | 0.807 | 1.6866 | 1.4446 | 1.1674 | 0.98570 |
| 1.28 | 0.796 | 1.7459 | 1.4794 | 1.1802 | 0.98271 |
| 1.30 | 0.786 | 1.8062 | 1.5141 | 1.1929 | 0.97941 |
| 1.32 | 0.776 | 1.8674 | 1.5488 | 1.2057 | 0.97580 |
| 1.34 | 0.767 | 1.9296 | 1.5835 | 1.2186 | 0.97188 |
| 1.36 | 0.757 | 1.9927 | 1.6181 | 1.2315 | 0.96765 |
| 1.38 | 0.749 | 2.0567 | 1.6527 | 1.2445 | 0.96311 |
| 1.40 | 0.740 | 2.1217 | 1.6872 | 1.2575 | 0.95829 |
| 1.42 | 0.732 | 2.1876 | 1.7217 | 1.2706 | 0.95317 |
| 1.44 | 0.724 | 2.2544 | 1.7561 | 1.2837 | 0.94777 |
| 1.46 | 0.716 | 2.3222 | 1.7904 | 1.2970 | 0.94210 |
| 1.48 | 0.709 | 2.3909 | 1.8246 | 1.3103 | 0.93616 |
| 1.50 | 0.701 | 2.4605 | 1.8587 | 1.3237 | 0.92996 |
| 1.52 | 0.694 | 2.5311 | 1.8927 | 1.3373 | 0.92352 |
| 1.54 | 0.688 | 2.6026 | 1.9266 | 1.3509 | 0.91684 |
| 1.56 | 0.681 | 2.6750 | 1.9603 | 1.3646 | 0.90993 |
| 1.58 | 0.675 | 2.7484 | 1.9939 | 1.3784 | 0.90281 |
| 1.60 | 0.669 | 2.8227 | 2.0274 | 1.3923 | 0.89549 |
| 1.62 | 0.663 | 2.8979 | 2.0607 | 1.4063 | 0.88797 |
| 1.64 | 0.657 | 2.9741 | 2.0938 | 1.4204 | 0.88026 |
| 1.66 | 0.652 | 3.0512 | 2.1268 | 1.4346 | 0.87238 |
| 1.68 | 0.646 | 3.1293 | 2.1596 | 1.4490 | 0.86434 |
| 1.70 | 0.641 | 3.2083 | 2.1923 | 1.4635 | 0.85615 |
| 1.72 | 0.636 | 3.2882 | 2.2247 | 1.4780 | 0.84781 |
| 1.74 | 0.631 | 3.3690 | 2.2570 | 1.4927 | 0.83935 |
| 1.76 | 0.626 | 3.4508 | 2.2890 | 1.5075 | 0.83076 |
| 1.78 | 0.622 | 3.5336 | 2.3209 | 1.5225 | 0.82206 |
| 1.80 | 0.617 | 3.6172 | 2.3526 | 1.5376 | 0.81327 |
| 1.82 | 0.613 | 3.7018 | 2.3840 | 1.5527 | 0.80438 |
| 1.84 | 0.608 | 3.7873 | 2.4153 | 1.5681 | 0.79541 |
| 1.86 | 0.604 | 3.8738 | 2.4463 | 1.5835 | 0.78637 |
| 1.88 | 0.600 | 3.9612 | 2.4772 | 1.5991 | 0.77727 |
| 1.90 | 0.596 | 4.0495 | 2.5078 | 1.6148 | 0.76811 |
| 1.92 | 0.592 | 4.1388 | 2.5382 | 1.6306 | 0.75891 |
| 1.94 | 0.589 | 4.2290 | 2.5683 | 1.6466 | 0.74967 |
| 1.96 | 0.585 | 4.3201 | 2.5983 | 1.6627 | 0.74040 |
| 1.98 | 0.581 | 4.4122 | 2.6280 | 1.6789 | 0.73111 |

| $M_1$ | $M_2$ | $P_2/P_1$ | $\rho_2/\rho_1$ | $T_2/T_1$ | $P_{i,2}/P_{i,1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.00 | 0.578 | 4.5052 | 2.6575 | 1.6953 | 0.72181 |
| 2.02 | 0.575 | 4.5991 | 2.6867 | 1.7118 | 0.71250 |
| 2.04 | 0.571 | 4.6940 | 2.7157 | 1.7285 | 0.70319 |
| 2.06 | 0.568 | 4.7898 | 2.7445 | 1.7452 | 0.69389 |
| 2.08 | 0.565 | 4.8866 | 2.7730 | 1.7622 | 0.68460 |
| 2.10 | 0.562 | 4.9842 | 2.8013 | 1.7792 | 0.67532 |
| 2.12 | 0.559 | 5.0829 | 2.8294 | 1.7964 | 0.66607 |
| 2.14 | 0.556 | 5.1824 | 2.8572 | 1.8138 | 0.65686 |
| 2.16 | 0.553 | 5.2829 | 2.8848 | 1.8313 | 0.64767 |
| 2.18 | 0.551 | 5.3843 | 2.9122 | 1.8489 | 0.63853 |
| 2.20 | 0.548 | 5.4867 | 2.9393 | 1.8667 | 0.62943 |
| 2.22 | 0.545 | 5.5899 | 2.9662 | 1.8846 | 0.62038 |
| 2.24 | 0.543 | 5.6942 | 2.9928 | 1.9026 | 0.61139 |
| 2.26 | 0.540 | 5.7993 | 3.0192 | 1.9208 | 0.60245 |
| 2.28 | 0.538 | 5.9054 | 3.0453 | 1.9392 | 0.59357 |
| 2.30 | 0.535 | 6.0124 | 3.0712 | 1.9577 | 0.58476 |
| 2.32 | 0.533 | 6.1204 | 3.0969 | 1.9763 | 0.57601 |
| 2.34 | 0.531 | 6.2293 | 3.1223 | 1.9951 | 0.56734 |
| 2.36 | 0.528 | 6.3391 | 3.1475 | 2.0140 | 0.55873 |
| 2.38 | 0.526 | 6.4499 | 3.1725 | 2.0331 | 0.55021 |
| 2.40 | 0.524 | 6.5616 | 3.1972 | 2.0523 | 0.54176 |
| 2.42 | 0.522 | 6.6742 | 3.2217 | 2.0717 | 0.53339 |
| 2.44 | 0.520 | 6.7878 | 3.2459 | 2.0912 | 0.52511 |
| 2.46 | 0.518 | 6.9023 | 3.2699 | 2.1108 | 0.51691 |
| 2.48 | 0.516 | 7.0177 | 3.2937 | 2.1307 | 0.50879 |
| 2.50 | 0.514 | 7.1341 | 3.3172 | 2.1506 | 0.50077 |
| 2.52 | 0.512 | 7.2514 | 3.3406 | 2.1707 | 0.49283 |
| 2.54 | 0.510 | 7.3696 | 3.3636 | 2.1910 | 0.48498 |
| 2.56 | 0.508 | 7.4888 | 3.3865 | 2.2114 | 0.47723 |
| 2.58 | 0.507 | 7.6089 | 3.4091 | 2.2319 | 0.46957 |
| 2.60 | 0.505 | 7.7300 | 3.4315 | 2.2526 | 0.46200 |
| 2.62 | 0.503 | 7.8520 | 3.4537 | 2.2735 | 0.45452 |
| 2.64 | 0.501 | 7.9749 | 3.4756 | 2.2945 | 0.44714 |
| 2.66 | 0.500 | 8.0987 | 3.4974 | 2.3157 | 0.43985 |
| 2.68 | 0.498 | 8.2235 | 3.5189 | 2.3370 | 0.43266 |
| 2.70 | 0.497 | 8.3492 | 3.5402 | 2.3584 | 0.42556 |
| 2.72 | 0.495 | 8.4759 | 3.5612 | 2.3800 | 0.41856 |
| 2.74 | 0.494 | 8.6035 | 3.5821 | 2.4018 | 0.41166 |
| 2.76 | 0.492 | 8.7320 | 3.6027 | 2.4237 | 0.40485 |
| 2.78 | 0.491 | 8.8615 | 3.6232 | 2.4458 | 0.39814 |
| 2.80 | 0.489 | 8.9918 | 3.6434 | 2.4680 | 0.39152 |
| 2.82 | 0.488 | 9.1232 | 3.6634 | 2.4904 | 0.38499 |
| 2.84 | 0.486 | 9.2554 | 3.6832 | 2.5129 | 0.37857 |
| 2.86 | 0.485 | 9.3886 | 3.7028 | 2.5356 | 0.37223 |
| 2.88 | 0.484 | 9.5228 | 3.7222 | 2.5584 | 0.36599 |
| 2.90 | 0.482 | 9.6578 | 3.7414 | 2.5814 | 0.35985 |
| 2.92 | 0.481 | 9.7938 | 3.7604 | 2.6045 | 0.35380 |
| 2.94 | 0.480 | 9.9308 | 3.7792 | 2.6278 | 0.34784 |
| 2.96 | 0.479 | 10.0686 | 3.7978 | 2.6512 | 0.34197 |
| 2.98 | 0.477 | 10.2075 | 3.8162 | 2.6748 | 0.33619 |