Exercice complémentaire 10 :
Réflexion/transmission d'une onde acoustique ;
Application au fonctionnement de l'oreille moyenne
Eléments de correction

1 Description d'une onde acoustique monodimensionnelle

1. (Voir notes de cours)
2. Cette forme d'onde s'écrit aussi, en posant $A = |A|e^{i\varphi_A}$:

$$p'(x,t) = |A|\cos(kx - \omega t + \varphi_A))$$

k est le nombre d'onde relié à la longeur d'onde par $k = 2\pi/\lambda$; ω est la pulsation reliée à la période par $\omega = 2\pi/T$; φ_A est la phase de l'onde qui peut être choisie arbitrairement à zéro (en définissant convenablement l'origine des temps).
Les dérivées seconde en temps et en espace s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\omega^2 |A|\cos(kx - \omega t + \varphi_A)); \qquad \nabla^2 p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = -k^2|A|\cos(kx - \omega t + \varphi_A)).$$

En reportant dans l'équation des ondes et en simplifiant on obtient :

$$\omega^2 = c_0^2 k^2$$

si $k > 0$ et $\omega > 0$ on a donc $\omega = c_0 k$. C'est la "relation de dispersion".
On peut remarquer en outre que cette forme d'onde se met sous la forme :

$$p'(x,t) = |A|\cos(k(x - c_0 t) + \varphi_A) = f(x - c_0 t)$$

C'est donc bien une onde progressive se propageant à la vitesse $+c_0$.
3. En reportant (par exemple) dans l'équation de la quantité de mouvement, on a :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{k|A|}{\rho_0}\sin(kx - \omega t + \varphi_A))$$

En intégrant par rapport au temps on a :

$$\partial u' = +\frac{k|A|}{\rho_0 \omega}\cos(kx - \omega t + \varphi_A) = \frac{p'}{\rho_0 c_0}.$$

(la constante d'intégration est ici prise égale à zéro car la moyenne en temps de u', qui est par définition une perturbation de vitesse par rapport à un état au repos, est nulle).
Remarque : on peut aussi procéder de même a partir de l'équation de la masse ce qui conduit à la même relation.
4. D'après le cours :

$$e_{ac} = \frac{|p'|}{2\rho c_0^2} + \frac{\rho_0 |u'|}{2} = \frac{|A|^2\cos^2(kx - \omega t + \varphi_A))}{2\rho_0 c_0^2} + \frac{|A|^2\cos^2(kx - \omega t + \varphi_A)}{2\rho_0 c_0^2} = \frac{|A|^2\cos^2(kx - \omega t + \varphi_A)}{\rho_0 c_0^2};$$

$$\vec{I} = p'\vec{u}' = p'u'\vec{e}_x = \frac{|A|^2\cos^2(kx - \omega t + \varphi_A)}{\rho_0 c_0}\vec{e}_x = c_0 e_{ac}\vec{e}_x.$$

5. En notant que $\overline{\cos^2(kx - \omega t + \varphi_A)} = 1/2$, on obtient directement le résultat demandé :

$$\overline{e_{ac}} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c_0^2}; \qquad \overline{I_x} = c_0 \overline{e_{ac}}$$

où I_x dénote l'intensité acoustique algébrique dans la direction x (projection du vecteur intensité acoustique dans la direction $\vec{e}_x$).

6. On peut partir d'une expression sous la forme

$$p'(x,t) = Be^{i(-kx-\omega t)} = |B|\cos(-kx - \omega t + \varphi_B) = |B|\cos(-k(x + c_0 t) + \varphi_B)$$

qui est bien de la forme $p'(x,t) = g(x + c_0 t)$. Dans ce cas la perturbation de vitesse associée est

$$u'(x,t) = -\frac{|B|\cos(-k(x + c_0 t) + \varphi_B)}{\rho_0 c_0} = -\frac{p'(x,t)}{\rho_0 c_0}.$$

La densité d'énergie moyenne et le flux d'énergie moyen sont alors :

$$\overline{e_{ac}} = \frac{|B|^2}{2\rho_0 c_0^2}; \qquad \overline{I_x} = -c_0 \overline{e_{ac}}$$

2 Réflexion/transmission d'une onde acoustique

8.
$$p'(x,t) = \begin{cases} Ae^{i(k_1 x - \omega t)} + Be^{i(-k_1 x - \omega t)} & (\text{ pour } x < 0) \\ Ce^{i(k_2 x - \omega t)} & (\text{ pour } x > 0) \end{cases} \qquad (1)$$

Du coté $x < 0$ on a la superposition d'une onde simple d'amplitude A se propageant à la vitesse $+k_1/\omega$ *(onde incidente)* et d'une onde simple d'amplitude B se propageant à la vitesse $-k_1/\omega$ *(onde réfléchie)*. Du coté $x > 0$ on a reconnait une onde simple d'amplitude B se propageant à la vitesse $+k_2/\omega$ *(onde transmise)* .

9. On peut noter tout d'abord que la pulsation ω est la même pour les 3 ondes considérées. Normal car on étudie un problème en régime harmonique en temps. La vitesse des ondes étant différente dans les 2 milieux, les nombre d'ondes sont donnés par $k_1 = \omega/c_1$ et $k_2 = /\omega/c_2$.
Application numérique avec les données du problème :

$$k_1 = 8.13 rad/m; \quad k_2 = 1.843 rad/m; \quad \lambda_1 = 0.773 m; \quad \lambda_2 = 3.4 m$$

10. En reprenant la démarche de la première partie et en l'adaptant à la situation considérée ici, on aboutit à :

$$u'(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\rho_1 c_1}\left(Ae^{i(k_1 x - \omega t)} - Be^{i(-k_1 x - \omega t)}\right) & (\text{ pour } x < 0) \\ \frac{1}{\rho_2 c_2}\left(Ce^{i(k_2 x - \omega t)}\right) & (\text{ pour } x > 0) \end{cases} \qquad (2)$$

11. Sous les hypothèses du milieu continu (satisfaites dans le cadre dans le cadre de l'acoustique linéaire), la pression et la vitesse sont des champs continus (et dérivables). On en déduit : [1]

$$p'(0-,t) = p'(0_+,t) \implies Ae^{-i\omega t} + Be^{-i\omega t} = Ce^{-i\omega t} \qquad (3)$$

$$u'(0-,t) = u'(0_+,t) \implies \frac{1}{\rho_1 c_1}\left(Ae^{-i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right) = \frac{C}{c_2 \rho_2} e^{-i\omega t} \qquad (4)$$

En simplifiant par $e^{-i\omega t}$ on arrive donc à un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} A + B = C, \\ \dfrac{A - B}{\rho_1 c_1} = \dfrac{C}{\rho_2 c_2}. \end{cases} \qquad (5)$$

12. La résolution de ce système conduit directement au résultat attendu :

$$r = \frac{B}{A} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}, \qquad (6)$$

$$t = \frac{C}{A} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}, \qquad (7)$$

1. En toute rigueur, il faut tenir compte du fait que l'interface entre les deux milieux oscille autour de sa position moyenne. En notant $X'(t)$ le déplacement (lagrangien) de cette interface, celui-ci est relié à la vitesse par $dX'/dt = u'(X',t)$. Il faudrait donc écrire la condition de raccord pour la pression sous la forme $p'(X'_-,t) = p'(X'_+,t)$. On peut faire un développement limité sous la forme $p'(0_-,t) + X'\left(\partial p'/\partial x\right)_{x=0_-} + ... == p'(0_+,t) + X'\left(\partial p'/\partial x\right)_{x=0_+} + ...$ Cependant les déplacements étant supposés faibles, on peut négliger dans ce développement tous les termes proportionnels à X' (et d'ordre plus élevé), ce qui finalement aboutit à écrire la continuité de la pression en $x = 0$. De même pour la vitesse.

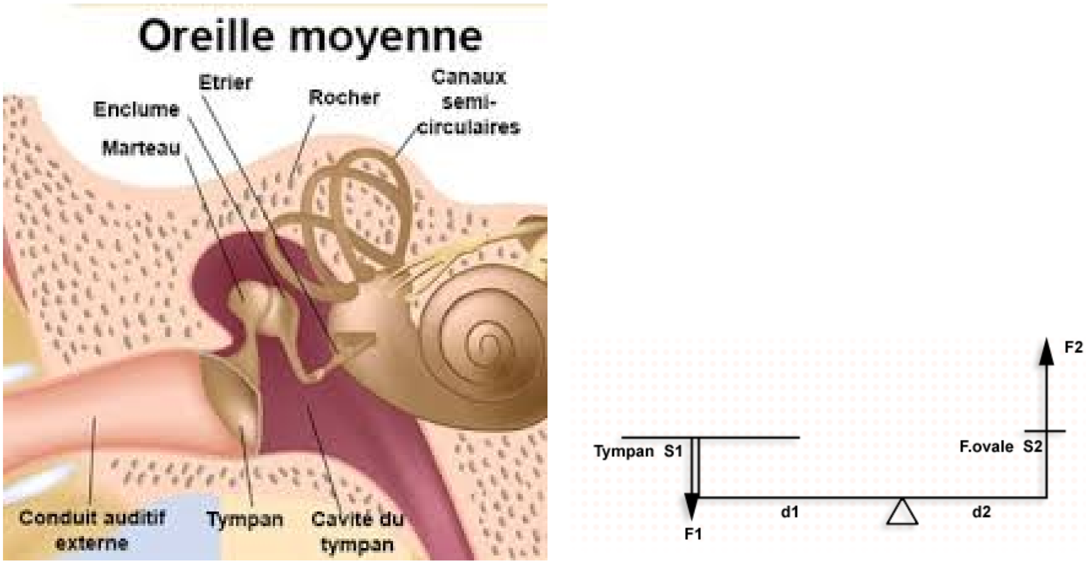

FIGURE 1 – (a) physiologie de l'oreille et (b) Modèle mécanique simplifié des osselets de l'oreille moyenne.

13. D'après le cours et les résultats de la première partie, les flux d'énergie moyens $\overline{I}_x$ associés aux ondes incidente, réfléchie et transmise ont pour expression :

$$\overline{I}_{x,A} = +\frac{|A|^2}{\rho_1 c_1}; \quad \overline{I}_{x,B} = -\frac{|B|^2}{\rho_1 c_1}; \quad \overline{I}_{x,C} = +\frac{|C|^2}{\rho_2 c_2}.$$

On en déduit :

$$R = \left|\frac{\overline{I}_{x,B}}{\overline{I}_{x,A}}\right| = \left(\frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}\right)^2, \tag{8}$$

$$T = \left|\frac{\overline{I}_{x,C}}{\overline{I}_{x,A}}\right| = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}. \tag{9}$$

On a bien $T + R = 1$, ce qui traduit la conservation de l'énergie : le flux d'énergie incident est égal à la somme du flux transmis et du flux réfléchi.

14. Application numérique : on trouve $r = -0.9994$, $R = 0.9989$, $t = 1.9994$, $T = 0.0011$. On peut remarquer que r est proche de -1 qui correspond au coefficient de réflexion sur un mur rigide (cf cours). t est proche de 2, il y a donc transmission d'une onde d'amplitude a peu près double de l'amplitude incidente, par contre le flux d'énergie associé (mesuré par T) est très faible. Mesuré en décibels, on a :

$$T_{db} = 10\log_{10}(T) \approx -29.54db.$$

3 Application au fonctionnement de l'oreille moyenne

Appelons $\mathcal{S}$ le système mécanique constitué par les osselets, comme schématisé sur la figure. Notons O le point pivot (supposé fixe), M_1 le point situé au centre du tympan, M_2 le point situé au centre de la fenêtre ovale. On introduit une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y; \vec{e}_z$ tel que la direction x est perpendiculaire aux surfaces du tympan et de la fenêtre ovale (direction verticale sur la figure), et la direction y est alignée avec les leviers (direction horizontale sur la figure).

16. Le solide a un mouvement de corps rigide avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}$. Les vitesses des points M_1 et M_2 s'en déduisent par (avec les notations classiques de mécanique des solides) :

$$\vec{V}_{M_1 \in \mathcal{S}} = \vec{\Omega} \wedge O\vec{M}_1; \quad \vec{V}_{M_2 \in \mathcal{S}} = \vec{\Omega} \wedge O\vec{M}_2.$$

En notant u_1 et u_2 les valeurs algébriques des vitesses des points M_1 et M_2 (comptées dans la direction x), Ω_z le taux de rotation, et d_1, d_2 les bras de leviers, ces relations conduisent à $u_1 = \Omega_z d_1$ et $u_2 = \Omega_z d_2$, d'où l'on déduit en supprimant l'inconnue Ω_z :

$$\frac{u_1}{d_1} = \frac{u_2}{d_2}. \tag{10}$$

17. En notant $\mathbf{M}$ la matrice d'inertie du solide $\mathcal{S}$, le théorème du moment dynamique s'écrit : $\mathbf{M} \cdot d\vec{\Omega}/dt = O\vec{M}_1 \wedge \vec{F_1} + O\vec{M}_2 \wedge \vec{F_2}$ avec $\vec{F_1} = p_1 S_1 \vec{e_x}$ et $\vec{F_2} = -p_2 S_2 \vec{e_x}$ les forces exercées sur chacune des surfaces. Si l'on néglige l'inertie, l'équilibre des moments conduit donc à :

$$d_1 S_1 p_1 = d_2 S_2 p_2. \tag{11}$$

18. On reprend donc l'étude de la partie précédente en remplaçant u_1 par $u'(0_-, t)$, u_2 par $u'(0_+, t)$, p_1 par $p'(0_-, t)$ et p_2 par $p'(0_+, t)$. On considère deux nouveau une onde incidente A, une onde réfléchie B et une onde transmise C. On aboutit à un sytème de deux inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{1}{\rho_1 c_1 d_1}(A - B) & = & \dfrac{1}{\rho_2 c_2 d_2} C, \\ d_1 S_1 (A + B) & = & d_2 S_2 C \end{array} \right. \tag{12}$$

La résolution conduit à :

$$t = \frac{C}{A} = \frac{2 S_1 \rho_2 c_2 d_1 d_2}{\rho_1 c_1 S_1 d_1^2 + \rho_2 c_2 S_2 d_2^2}$$

Pour en déduire le coefficient de transmission en énergie, il faut prendre garde au fait que le flux d'énergie $\mathcal{P}$ (puissance acoustique, en W) est égal à l'intensité acoustique $\overline{I}_x$ (puissance acoustique surfacique en W/m^2) multiplié par la section des conduits correspondants. Ce qui conduit, pour l'onde incidente et l'onde transmise, aux formules suivantes :

$$\mathcal{P}_A = S_1 \overline{I}_{x,A} = \frac{S_1}{\rho_1 c_1} |A|^2; \quad \mathcal{P}_C = S_2 \overline{I}_{x,C} = \frac{S_2}{\rho_2 c_2} |C|^2.$$

On en déduit finalement :

$$T = \frac{\mathcal{P}_C}{\mathcal{P}_A} = \frac{4 \rho_1 c_1 S_1 d_1^2 \rho_2 c_2 S_2 d_2^2}{(\rho_1 c_1 S_1 d_1^2 + \rho_2 c_2 S_2 d_2^2)^2}$$

L'application numérique donne alors $T = 0.0368$, soit $T_{dB} = -14.3 dB$. Par rapport à la transmission directe (partie 2) la chaîne d'osselets permet donc de gagner environ $15 dB$!