

David FABRE

IMFT / UPS

Département de Mécanique



Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894) tenant dans ses mains le résonateur acoustique qui porte son nom, photographié ci-contre.

## 10. Acoustique

## 10. Acoustique

- Equations de l'acoustique
  - Cadre de la modélisation
  - Equation de la quantité de mouvement
  - Equation de la masse
  - Compressibilité et vitesse du son
  - Equation de Helmholtz
- Ondes planes
  - Solution générale
  - Réflexions sur une extrémité ouverte ou fermée
  - Ondes progressives monochromatiques
  - Ondes stationnaires
- Energie et intensité acoustiques
  - Equation de l'énergie cinétique
  - Equation de l'énergie acoustique
- Réflexion et transmission sur une discontinuité
- Ondes sphériques

## Cadre de la modélisation

### Cadre :

état de base : fluide au repos

$$\vec{u}_0 = \vec{0}$$

et grandeurs thermodynamiques uniformes (pas de variation spatiale)

$$p = p_0, \quad T = T_0, \quad \rho = \rho_0$$

Gravité négligée (ou alors on pose  $\hat{p}_0 = p_0 + \rho_0 g z$ )

### Objectif :

déterminer l'évolution de perturbations de cet état de base :

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}'(\vec{x}, t), \quad p = p_0 + p'(\vec{x}, t), \quad T = T_0 + T'(\vec{x}, t), \quad \rho = \rho_0 + \rho'(\vec{x}, t)$$

### Hypothèses :

on supposera ces perturbations "petites" (ou infinitésimales), d'ordre  $\varepsilon \ll 1$

$$\frac{p'}{p_0}, \quad \frac{T'}{T_0}, \quad \frac{\rho'}{\rho_0}, \quad \frac{\vec{u}'}{c_0} \sim \varepsilon \ll 1$$

Remarque : la seule échelle de vitesse est  $c_0 = 1/\sqrt{\rho_0 \chi_s}$ .

Echelle de temps associée :  $\tau_{ac} = L/c_0$

## Conservation de la quantité de mouvement : Analyse dimensionnelle

Equation locale de bilan de quantité de mouvement (cf. chapitre 5) :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\substack{[I] \\ \frac{\rho_0 [u']}{\tau_{ac}}}} + \underbrace{\rho (\vec{grad} \vec{u}) \cdot \vec{u}}_{\substack{[A] \\ \frac{\rho_0 [u']^2}{L}}} = \underbrace{-\vec{grad} p'}_{\substack{[P] \\ \frac{[p']}{L}}} + \underbrace{\mu (\Delta \vec{u} - \vec{grad}(\text{div}(\vec{u})/3))}_{\substack{[V] \\ \frac{\mu [u']}{L^2}}} \quad (22)$$

Régime Acoustique : le terme dominant est [I].

- $\frac{[A]}{[I]} \ll 1 \iff \frac{[u']}{c_0} = Ma \ll 1$
- $\frac{[V]}{[I]} \ll 1 \iff \frac{c_0 L}{\nu} = Ma/Re \equiv Kn \ll 1$
- Le PMD permet de déterminer la jauge de pression  $[p']$  :  $\frac{[P]}{[I]} \approx 1 \iff [p'] = \rho_0 [u'] c_0$ .

Sous ces hypothèses l'équation-bilan de QdM se simplifie alors en :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = -\vec{grad} p'$$

## Conservation de la masse : analyse dimensionnelle

Equation locale de bilan de masse (cf. chapitre 5) :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\substack{[I] \\ \frac{[\rho']}{\tau_{ac}}}} + \underbrace{\vec{u} \cdot \text{grad}(\rho)}_{\substack{[A] \\ \frac{[\rho']}{L}[\vec{u}']}} + \underbrace{\rho \text{div}(\vec{u})}_{\substack{[D] \\ \frac{\rho_0}{L}[\vec{u}']}} = 0 \quad (23)$$

Régime Acoustique : le terme dominant est [I].

- $\frac{[A]}{[I]} \ll 1 \iff \frac{[\vec{u}']}{c_0} = Ma \ll 1$
- PMD :  $\frac{[D]}{[I]} \approx 1 \implies \frac{[\rho']}{\rho_0} = \frac{[\vec{u}']}{c_0}$ .

L'équation linéarisée en perturbation s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{u}' = 0 \quad (24)$$

## Compressibilité : évolution thermodynamique

Equation-bilan de l'énergie interne (cf. chap 5 et annexe A.5)

$$\rho \frac{de}{dt} = \vec{\tau} : \vec{\text{grad}}(\vec{u}) + p \text{div}(\vec{u}) - \text{div}(\vec{q}) \quad (25)$$

Les termes de dissipation visqueuse et de conduction thermique ( $\vec{q} = -\kappa \vec{\text{grad}} T$ ) sont négligeables sous les conditions suivantes :

$$- \frac{\mu [u']^2}{L^2} \ll \frac{\rho_0 [e']}{\tau_{ac}} \iff Re/Ma \gg 1$$

$$- \frac{\kappa [T']}{L^2} \ll \frac{\rho_0 [e']}{\tau_{ac}} \iff Pe/Ma \gg 1$$

(Nb de Péclet  $Pe = \frac{[u'] L \rho c_p}{\kappa}$ )

En utilisant l'eq. de la masse, l'eq. de l'énergie interne s'écrit alors :

$$\frac{de}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

dans laquelle on reconnait :  $T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0$ .

L'évolution est donc isentropique.

On peut alors relier les variations de pression et de masse volumique par :

$$\frac{p'}{\rho'} \approx \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \frac{1}{\rho \chi_s} = c_0^2.$$

**Rappel :**  $\kappa_s = 1/\gamma p_0$  pour un gaz parfait.

On en déduit  $c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \gamma r T_0$

## Vitesse du son

Rappels : les propriétés thermodynamiques permettent de définir une échelle de vitesse, appelée vitesse du son, définie par

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \kappa_s}}$$

où  $\rho_0$  désigne la masse volumique ambiante du fluide, supposée uniforme, et  $\kappa_s$  correspond au coefficient de compressibilité isentropique du fluide dans les conditions thermodynamiques ambiantes.

**Dans l'air :**

en supposant que l'air est un gaz parfait obéissant à la loi de Boyle–Mariotte  $p_0 = \rho_0 r T_0$ , où  $r = 287 \text{ J/kg/K}$  désigne la constante spécifique de l'air

$$\kappa_s = \frac{1}{\gamma p_0} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma r T_0}$$

soit, à  $T_0 = 20^\circ\text{C} = 293\text{K}$ ,  $c \sim 340 \text{ m/s}$

**Dans l'eau :**

$\kappa_s \sim 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  et  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$  :  $c = 1/\sqrt{\rho_0 \kappa_s} \sim 1400 \text{ m/s}$

## Equation de Helmholtz

Les équations du modèle mis en place précédemment s'écrivent donc, pour les perturbations en vitesse  $\vec{u}'$ , en pression  $p'$  et masse volumique  $\rho'$  :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u}' = 0 \quad (26)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = \vec{0} \quad (27)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (28)$$

Par combinaison linéaire de ces trois équations, on montre que les perturbations vérifient l'équation de l'acoustique linéaire

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p' = 0 \quad (\text{équation de HELMHOLTZ}) \quad (29)$$



## Ondes planes : solutions

On peut rechercher des solutions générales de l'équation de Helmholtz sous la forme d'ondes, appelées ondes acoustiques. On se restreint ici à l'étude des ondes **planes**, solutions de la forme

$$\vec{u} = u'(x, t) \vec{e}_x, \quad p'(x, t).$$

Dans ce cas l'équation de Helmholtz s'écrit sous la forme suivante (également appelée Equation de d'Alembert) :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad (30)$$

On remarque que cette équation peut se factoriser sous la forme :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) p' = 0$$

Ou encore

$$-c_0^2 \frac{\partial}{\partial x_+} \frac{\partial}{\partial x_-} p' = 0 \quad \text{avec le changement de variable } x_+ = x - ct \text{ et } x_- = x + ct.$$

(En effet  $\frac{\partial}{\partial x_+} = \frac{dx}{dx_+} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dt}{dx_+} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t}$  ; de même pour  $\frac{\partial}{\partial x_-}$  ).

On en déduit qu'une solution générale peut se mettre sous la forme :

$$p'(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

On montre alors que la vitesse associée est donnée par :

$$u'(x, t) = (\rho_0 c_0)^{-1} [f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)]$$

Interprétation : ces deux termes correspondent à des ondes planes se propageant en direction positive et négative.

## Ondes planes : réflexion sur une extrémité fermée ou ouverte

Etudions la propagation d'une onde plane dans un tube de section constante occupant la région ( $x < 0$ ).

$$p'(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

$$u'(x, t) = (\rho_0 c_0)^{-1} [f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)]$$

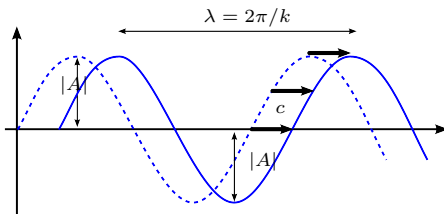
Dans ce cas le terme  $f$  correspond à une *onde incidente* provenant du coté  $x < 0$  et se propageant dans la direction positive. Le terme  $g$  correspond à l'*onde réfléchie* générée à la position  $x = 0$  et se propageant dans la direction négative.

- Si le tuyau est fermé à son extrémité  $x = 0$ , la condition  $u'(x = 0, t)$  conduit à la conclusion que **L'onde se réfléchit en gardant le même signe**.  
Démonstration :  $u'(x = 0, t) = (\rho_0 c_0)^{-1} [f(-c_0 t) - g(+c_0 t)] = 0$ . Donc  $g(s) = +f(-s)$ .
- Si le tuyau est *idéalement ouvert* à son extrémité, la condition  $p'(x = 0, t) = 0$  conduit à la conclusion que **L'onde se réfléchit en changeant de signe**.  
Démonstration :  $p'(x = 0, t) = [f(-c_0 t) + g(+c_0 t)] = 0$ . Donc  $g(s) = -f(-s)$ .
- Remarque : dans le cas d'un tuyau ouvert, une modélisation plus fine aboutit à  $p'(x = \Delta, t) = 0$ , où  $\Delta$  est une "correction de longueur" qui vaut approximativement  $\Delta \approx 0.81D$  où  $D$  est le diamètre du tuyau. L'onde se réfléchit donc (en changeant de signe) à la position  $x = \Delta$ .

## Ondes progressives monochromatiques

Def. On appelle *Onde plane progressive monochromatique* une solution de la forme suivante :

$$p'(x, t) = \text{Re}(A e^{i(kx - \omega t)}) \equiv |A| \cos(kx - \omega t + \varphi_A)$$



- $A = |A|e^{i\varphi_A}$  : amplitude (en pression)
- $k = 2\pi/\lambda$  : nombre d'onde (en rad/m)
- $\lambda = 2\pi/k$  : longueur d'onde
- $\omega = 2\pi/T$  : pulsation (en rad/s)
- $f = 1/T = \omega/2\pi$  : fréquence (en Hz)
- $T = 2\pi/\omega$  : période (en s)
- $c = \omega/k$  : vitesse de phase (ou célérité)

Illustration multimédia :

[http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/travelling\\_sine\\_wave.htm](http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/travelling_sine_wave.htm)

En injectant cette forme de solution dans l'éq. de Helmholtz, on obtient directement :  $c = c_0$ .  
La célérité des ondes acoustiques est donc la même pour toutes les longueurs d'ondes (et toutes les fréquences).

Les ondes acoustiques sont dites **non dispersives** : les sons graves se propagent donc à la même vitesse que les sons aigus...

Remarque : la situation est différente pour les ondes de surface (vagues) qui sont dispersives, les ondes de grande longueur d'onde se propagent plus vite que les ondes de petite longueur d'onde (cf programme M1).

## Solution d'onde stationnaire harmonique

En superposant deux ondes planes de même amplitude  $A$  et de direction opposées, on obtient une solution appelée *onde stationnaire* :

$$p'(x, t) = A (\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)) = 2A \cos kx \cos \omega t$$

$$u'(x, t) = (\rho_0 c_0)^{-1} A (\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)) = 2\rho_0 c_0 A \sin kx \sin \omega t$$

Cette situation se rencontre en particulier dans les instruments de musique (cf. TD).

Illustration multimédia :

<http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/strings.html>

## Equation de l'énergie cinétique

Considérons a nouveau le bilan local d'énergie cinétique (cf. annexe A.3)

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{|\vec{u}|^2}{2} = -\vec{g} \text{rad} p \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \text{div}(\vec{\tau}) \quad (31)$$

Sous les hypothèses de l'acoustique linéaire, celui-ci peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{u'^2}{2} \right) = -\text{div}(p' \vec{u}') + p' \text{div}(\vec{u}') \quad (32)$$

- Le premier terme correspond aux taux de variation de l'énergie cinétique volumique  $e_c$ .
- Le deuxième terme s'interprète comme la *puissance extérieure des forces de pression* par unité de volume
- Le troisième correspond à *puissance intérieure des efforts des forces de pression* par unité de volume.

En utilisant l'équation de la masse ce terme peut s'écrire

$$p' \text{div}(\vec{u}') = -\frac{p'}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} p' \frac{\partial p'}{\partial t} = -\frac{\partial e_p}{\partial t}$$

où  $e_p = \frac{p'^2}{2\rho_0 c_0^2}$  désigne une énergie potentielle associée à la pression acoustique.

## Equation de l'énergie acoustique

En introduisant l'énergie acoustique par unité de volume

$$e_a = e_c + e_p = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 + \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} p'^2$$

et le vecteur intensité acoustique

$$\vec{I} = p' \vec{u}'$$

l'équation pour l'énergie cinétique s'écrit alors

$$\frac{\partial e_a}{\partial t} = -\text{div}(\vec{I})$$

Cas d'une onde plane :

Sachant que pour une onde plane  $u' = \pm \frac{p'}{\rho_0 c_0}$ , alors  $e_c = e_p$  (équipartition de l'énergie), et donc

$$e_a = \rho_0 u'^2 = \frac{p'^2}{\rho c_0^2}$$

D'autre part pour une onde plane dans la direction  $x$  on a :

$$\vec{I} = p' \vec{u}' = \pm \frac{p'^2}{\rho_0 c_0} \vec{e}_x = \pm e_a c_0 \vec{e}_x$$

Interprétation : dans une onde plane, l'énergie se propage à la vitesse  $c_0$

## Réflexion et transmission sur une discontinuité

Exercice complémentaire (correction sur moodle)

On étudie la propagation d'ondes dans un milieu présentant une discontinuité :

$$(x < 0) : \quad \rho_0 = \rho_1; c_0 = c_1; \quad (x > 0) : \quad \rho_0 = \rho_2; c_0 = c_2$$

On suppose que le champ de pression est donné par une loi de la forme suivante :

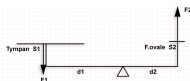
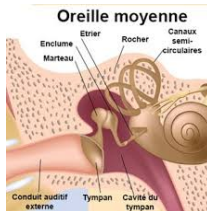
$$p'(x, t) = \begin{cases} Ae^{i(k_1 x - \omega t)} + Be^{i(-k_1 x - \omega t)} & (\text{pour } x < 0) \\ Ce^{i(k_2 x - \omega t)} & (\text{pour } x > 0) \end{cases} \quad (33)$$

Montrez que les coefficients de réflexion et de transmission (en intensité acoustique) sont donnés par :

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left( \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \right)^2, \quad T = \frac{|C|^2 / \rho_2 c_2}{|A|^2 / \rho_1 c_1} = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}. \quad (34)$$

Application numérique : entre l'eau et l'air  $T = 0.001 \equiv -30\text{db}$ . Très mauvais !

La transmission peut être augmentée avec un dispositif mécanique "adaptateur d'impédance" dont un très bel exemple est constitué par les osselets de l'oreille moyenne.



## Ondes sphériques

Considérons des ondes décrites en coordonnées sphériques sous la forme  $p' = p'(r, t)$  ;  
 $\vec{u}' = u(r, t)\vec{e}_r$ .

En utilisant l'expression de l'opérateur Laplacien en coordonnées sphériques, l'équation de Helmholtz s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 p' \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp') \quad (35)$$

La solution générale peut s'écrire sous la forme :

$$p'(r, t) = \frac{f(r - c_0 t)}{r} + \frac{f(r + c_0 t)}{r}$$

On reconnaît une onde divergente et une onde convergente.



## Ondes sphérique : étude de l'onde divergente

Considérons la solution d'onde sphérique divergente définie par

$$p'(r, t) = \frac{f(r - c_0 t)}{r}.$$

A partir des équations du mouvement on montre que le champ de vitesse associé est donné par  $\vec{u}' = u'(r, t)\vec{e}_r$  avec :

$$u'(r, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( \frac{f(r - ct)}{r} - \frac{F(r - ct)}{r^2} \right) \quad \text{où } F(r') = \int f(r') dr'.$$

Le premier terme est dominant en champ lointain. En ne retenant que ce terme, l'énergie acoustique volumique et l'intensité acoustique sont données par :

$$\overline{e_{ac}} = \frac{\rho u'^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho_0 c_0^2} = \frac{\overline{f(r - ct)^2}}{\rho_0 c_0^2} \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{I} = \overline{p' u'} = c_0 \overline{e_{ac}} \vec{e}_r$$

On constate que l'intensité acoustique (flux surfacique d'énergie acoustique) décroît en  $r^{-2}$ .  
(le flux total  $\int_S \vec{I} \cdot \vec{n} dS$  sur une sphère  $S$  de rayon  $r$  est constant, logique !)

## Réflexion sur la pointe d'un tuyau conique

Considérons une situation correspondant à une onde divergente monochromatique d'amplitude  $A$  et une onde convergente monochromatique d'amplitude  $B$  :

$$p'(r, t) = \frac{Be^{i(kr+\omega t)}}{r} + \frac{Ae^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

La pression  $p'(r, t)$  doit rester finie en  $r = 0$ .

Ceci conduit à la condition  $A = -B$ .

Conclusion : dans un tuyau conique, une onde (décrite en coordonnées sphériques) se réfléchit sur la pointe (fermée) en gardant changeant de signe !

Conséquence : un tuyau conique (hautbois) a une fréquence fondamentale deux fois plus haute que celle d'un tuyau cylindrique fermé (clarinette).

Le hautbois sonne donc une octave plus haut que la clarinette !

## Illustrations multimedia

### Ondes progressive (impulsion)

[http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves\\_superposition\\_reflection.htm#travelling](http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves_superposition_reflection.htm#travelling)

### Onde progressive sinusoidale

[http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/travelling\\_sine\\_wave.htm](http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/travelling_sine_wave.htm)

### Reflexion sur une discontinuité (ondes sur une corde)

[http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves\\_superposition\\_reflection.htm#densities](http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/waves_superposition_reflection.htm#densities)

### Flutes et clarinettes

<http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/flutes.v.clarinets.html>

### Un bon point de départ pour en savoir plus :

[http://www.editions.polytechnique.fr/files/pdf/EXT\\_0840\\_2.pdf](http://www.editions.polytechnique.fr/files/pdf/EXT_0840_2.pdf)

David FABRE

IMFT / UPS

Département de Mécanique



Tuyère de fusée V2 de la seconde guerre mondiale.

## 11. Ecoulements compressibles

## 12. Ecoulements compressibles

- Equations du mouvement d'un gaz compressible
  - Rappels de thermo et de cinétique des gaz
  - Nombre de Mach
  - Equations d'Euler compressible
  - Equation-bilan de l'énergie totale
  - Bilan d'entropie
  - Relations de Barré–St Venant
- Ecoulements compressibles monodimensionnels
  - Objectifs et hypothèses de modélisation
  - Equations-bilan
  - Relation de Hugoniot
  - Résolution finale

## Cadre d'étude

Hypothèses de ce chapitre :

- Gaz parfait.
- Écoulement Inertiel ( $Re \gg 1$ ) : frottement visqueux négligés
- Conduction thermique négligée ( $Pe = \frac{UL}{\kappa} \gg 1$ ).
- Pas de restriction sur le nombre de Mach ( $M = \mathcal{O}(1)$ ).
- Gravité négligeable.
- Écoulement stationnaire.

## Rappels : Description "milieu" continu d'un gaz parfait

Considérons un volume  $V$  occupé par un nombre  $N$  très grand de molécules (identiques) de masse individuelle  $m_p$ , de vitesses individuelles  $\vec{v}_i$ .

Ordre de grandeur :  $N = \mathcal{O}(\mathcal{N}_A)$  ;  $\mathcal{N}_A = 6.22 \cdot 10^{26}$  nombre d'Avogadro.

Le grand nombre de particules conduit à la nécessité d'un traitement statistique. On définit ainsi successivement :

- La densité volumique de particules  $n^*$  (en particules/ $m^3$ ) et la masse volumique  $\rho$  (en  $kg/m^3$ ) donnés par :

$$n^* = \frac{N}{V}; \quad \rho = n^* m_p = \frac{N m_p}{V}$$

- La "vitesse moyenne de l'assemblée de particules" (ou vitesse au sens de la MMC) :

$$\vec{u} = \langle \vec{v}_i \rangle \equiv \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \right)$$

- La vitesse quadratique moyenne  $v_q$  :

$$v_q^2 = \langle |\vec{v}_i - \vec{u}|^2 \rangle \equiv \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N ||\vec{v}_i - \vec{u}||^2 \right)$$

- En invoquant le théorème de l'équipartition de l'énergie, cette dernière quantité permet de définir la température cinétique  $T$  par :

$$\frac{m_p v_q^2}{2} = 3 \frac{k_B T}{2} \quad \text{où } k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ est la constante de Boltzmann.}$$

## Rappels : Lois d'état

- Loi d'état "mécanique" définissant la pression  $p$

Celle-ci s'obtient en comptabilisant la force exercée sur une paroi due aux collisions.

- Expression microscopique :

$$p = \frac{N}{V} \frac{m_p v_q^2}{3} = \frac{N k_B T}{V}$$

- Expression macroscopique :

$$p = \rho r T \quad \left( \text{où } r = \frac{k_B}{m_p} = \frac{R}{M} \right).$$

où  $R = \mathcal{N}_A k_B$  est la constante des gaz parfaits et  $M = \mathcal{N}_A m_p$  la masse molaire.

- Loi d'état "énergétique" définissant l'énergie interne massique  $e$  (ou une grandeur thermodynamique équivalente).

- Première forme : Celle-ci s'obtient en comptabilisant les énergies élémentaires microscopiques, et en invoquant le théorème d'équipartition de l'énergie.  
Pour un gaz parfait diatomique :

$$e = \frac{1}{N m_p} \times 5N \times \frac{k_B T}{2} = \frac{5rT}{2} \quad \left( \equiv \frac{5}{2} v_q^2 \right)$$

- Deuxième forme faisant intervenir l'enthalpie massique  $h = e + p/\rho$  :

$$h = e + rT = \frac{7rT}{2} \quad \left( \equiv \frac{7}{2} v_q^2 \right)$$

- Dans le cas général d'un gaz défini par son indice adiabatique  $\gamma$ , ces relations se mettent sous la forme :

$$e = c_v T \text{ avec } c_v = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}; \quad h = c_p T \text{ avec } c_p = \frac{r}{\gamma - 1} \quad \left( \gamma = \frac{c_p}{c_v} \right)$$



## Rappels : Compressibilité et vitesse du son

A partir des lois d'état on définit le coefficient de compressibilité :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$$

Celui-ci permet de définir une échelle de vitesse caractéristique : la *vitesse du son*

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{1}{\rho \chi_S}$$

Pour un gaz parfait :  $c^2 = \gamma p / \rho = \gamma r T$

- Lien avec la vitesse quadratique moyenne :

$$c^2 = \frac{\gamma}{3} v_q^2$$

- Lien avec l'énergie massique et l'enthalpie massique :

$$c^2 = \frac{\gamma e}{\gamma - 1}$$

$$c^2 = \frac{h}{\gamma - 1}$$

## Nombre de Mach

On appelle **nombre de MACH** le rapport sans dimension

$$M = \frac{u}{c}$$

où  $u$  désigne la vitesse locale de l'écoulement

La valeur du nombre de Mach définit le type d'écoulement rencontré :

- $0 < M < 1$  : écoulement **subsonique** (vitesse de l'écoulement  $<$  vitesse du son)
- $M \rightarrow 0$  : écoulement **incompressible**
- $M \approx 1$  : écoulement **transonique**
- $M = 1$  : écoulement **sonique**
- $M > 1$  : écoulement **supersonique** (vitesse de l'écoulement  $>$  vitesse du son)
- $M \gg 1$  : écoulement **hypersonique**

## Equations du mouvement pour un gaz compressible

Rappel des hypothèses :

- Gaz parfait.
- Écoulement Inertiel ( $Re \gg 1$ ) : frottement visqueux négligés
- Conduction thermique négligée ( $Pe = \frac{UL}{\kappa} \gg 1$ ).
- Pas de restriction sur le nombre de Mach ( $M = \mathcal{O}(1)$ ).
- Gravité négligeable.
- Écoulement stationnaire.

Sous ces hypothèses les équations de la masse et de la quantité de mouvement sont les équations d'Euler compressibles stationnaires :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\rho \vec{u}) &= \rho \operatorname{div}(\vec{u}) + \vec{u} \cdot \vec{\operatorname{grad}}(\rho) = 0. \\ \rho \left[ \vec{\operatorname{grad}}(\vec{u}) \cdot \vec{u} \right] &= -\vec{\operatorname{grad}}(p)\end{aligned}$$

Questions :

Peut-on utiliser Bernoulli pour relier  $p$  et  $u = |\vec{u}|$  ?

$\Rightarrow$  Non !

Peut-on pour autant trouver une relation générale reliant  $u$  et  $p$  (ou une autre quantité thermodynamique) le long de chaque ligne de courant ?

$\Rightarrow$  Il faut travailler à partir du *bilan d'énergie totale* au lieu du bilan d'énergie cinétique....

## Bilan d'énergie totale (1er principe)

Ecrivons un bilan d'énergie (premier principe) pour un volume *de contrôle*  $\Omega$  (cf. Annexe A.4)

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left( e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) dV}_{\frac{dE}{dt}} = - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \rho \left( e + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{E}^{(ech)}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} -p \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{W}^{(p)}} \quad (36)$$

Remarques :

$\dot{Q} = 0$  car on néglige les échanges de chaleur (adiabatique) ;

$\dot{W}^{(p)} \equiv -P dV/dt$  si  $p$  est uniforme ( $p \equiv P$ ) ;

On retrouve alors dans ce cas l'expression classique du travail de pression du cours de thermodynamique

En régime stationnaire, ce bilan devient :

$$\oint_{\partial\Omega} \rho \left( h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (37)$$

Ce qui, à l'aide du théorème de la divergence et en utilisant l'équation-bilan de masse conduit à une équation-bilan sous la forme :

$$\rho \vec{u} \cdot \text{grad} \left( h + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = 0.$$

Conclusion : l'enthalpie totale massique  $h + \frac{|\vec{u}|^2}{2}$  est conservée le long de chaque ligne de courant.

Supposons que la ligne de courant passe par un *point de stagnation* (ou point d'arrêt) où la vitesse est nulle ( $u = 0$ ) et où les variables thermodynamiques ont pour valeur les "conditions génératrices"  $T_i, \rho_i, p_i; h_i; c_i$ .

Alors la conservation de l'enthalpie totale (sur la ligne de courant considérée) peut se mettre sous les formes équivalentes suivantes :

- $h + \frac{u^2}{2} = h_i$

$h_i$  est l'enthalpie génératrice (enthalpie d'un "point d'arrêt" de l'écoulement où  $u = 0$ ).

- $c_p T + \frac{u^2}{2} = C_p T_i$

$T_i$  est la température génératrice.

- $\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{c_i^2}{\gamma-1}$

$c_i = \sqrt{\gamma r T_i}$  est la vitesse du son correspondant aux conditions génératrices.

- $\frac{T}{T_i} = \frac{c^2}{c_i^2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}$

Cette dernière forme est appelée 1ère relation de Barré de St Venant.

Application : "tube de pitot thermique" permettant de mesurer (théoriquement)  $u$  à partir de  $T_i$  et  $T$ .

(en pratique difficile à mettre en oeuvre car il faudrait un matériau non conducteur de la chaleur).

## Bilan d'entropie

Sous les hypothèses de ce chapitre formulées plus haut, on a négligé tous les phénomènes dissipatifs (irréversibles), à savoir le *frottement visqueux* et la *conduction thermique*.

Le bilan local d'entropie est donc :

$$\rho \frac{ds}{dt} = \rho \vec{u} \cdot \text{grad}(s) = 0.$$

(démonstration plus rigoureuse, cf. annexe A.6).

⇒ L'entropie massique  $s$  se conserve le long des lignes de courant.

Sur les lignes de courant on pourra donc utiliser les relations de Laplace :

$$T \rho^{1-\gamma} = \text{Cte} \quad \text{et} \quad p \rho^{-\gamma} = \text{Cte}$$

## Relations de Barré–St Venant

La conservation de l'enthalpie totale et les conditions d'écoulement isentropique permettent alors de déterminer les conditions de l'écoulement en tout point en fonction du nombre de Mach local et des conditions génératrices.

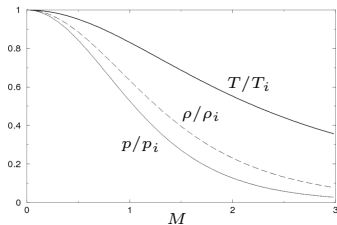
Ce sont les **Relations de Barré de St-Venant** :

$$\begin{aligned}
 \text{[Démonstration]} \quad \rightarrow \quad \frac{T}{T_i} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}; \quad \frac{\rho}{\rho_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\
 \frac{p}{p_i} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}; \quad u = M \sqrt{\gamma r T_i} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1/2}
 \end{aligned}$$

### Remarques :

tous les rapports  $T/T_i$ ,  $\rho/\rho_i$  et  $p/p_i$  sont des fonctions décroissantes du nombre de Mach  $M$ .

$u$  est par contre une fonction croissante du nombre de Mach  $M$ .



**Exercice :** Montrez que dans la limite  $M \ll 1$  la troisième relation de Barré–St Venant est

équivalente à l'équation de Bernoulli :

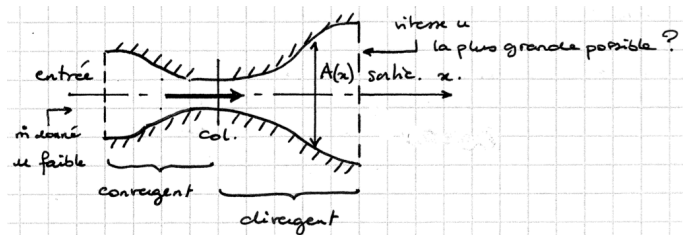
$$\frac{p - p_i}{\rho} = -\frac{u^2}{2}$$

## Écoulements compressibles monodimensionnels : Objectifs

- Application aux écoulements en conduite, en particulier pour justifier la séquence

convergent  $\rightarrow$  col  $\rightarrow$  divergent

employée pour les tuyères pour maximiser la poussée du réacteur



- ✓ Mise en équation : modélisation dans le cadre de l'approximation unidimensionnelle



## Modélisation : cadre

**Hypothèses de travail :** Aux hypothèses générales de ce chapitre :

- Gaz parfait.
- Écoulement Inertiel ( $Re \gg 1$ ) : frottement visqueux négligés
- Conduction thermique négligée ( $Pe = \frac{UL}{k} \gg 1$ ).
- Pas de restriction sur le nombre de Mach ( $M = \mathcal{O}(1)$ ).
- Gravité négligeable.
- Écoulement stationnaire.

On rajoute l'hypothèse supplémentaire

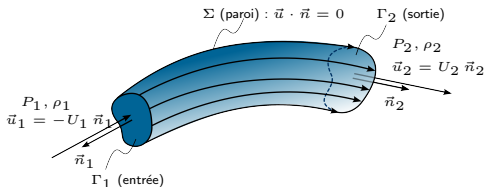
- ✓ Écoulement monodimensionnel :

$$\begin{aligned}\vec{u}(x, y, z, t) &\approx u(x) \vec{e}_x \\ \rho(x, y, z, t) &\approx \rho(x), \quad p(x, y, z, t) \approx p(x), \quad T(x, y, z, t) \approx T(x), \dots\end{aligned}$$

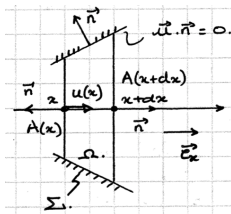
## Equations-bilans sous l'hypothèse monodimensionnelle : principe

On a besoin d'écrire les équations-bilan de masse, quantité de mouvement et énergie :

- Sur une section de conduite d'aire d'entrée  $A_1$  et d'aire de sortie  $A_2$  ;



- Sur une section élémentaire de longueur  $dx$ .



# Bilan de masse

Bilan intégral de masse :

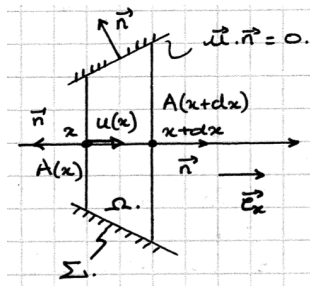
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

Soit, sous l'hypothèse monodimensionnelle :

$$\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

Ce qui s'écrit aussi sous forme différentielle :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (38)$$



# Bilan de quantité de mouvement

Bilan intégral de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dV + \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} [\rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p \vec{n}] dS = - \oint_{\Sigma} p \vec{n} dS$$

Ce qui s'écrit aussi :

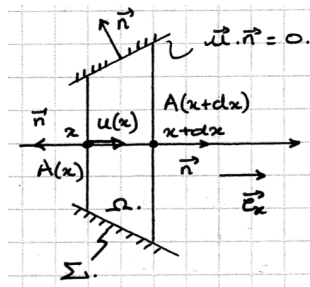
$$(\rho_2 u_2^2 + p_2) A_2 - (\rho_1 u_1^2 + p_1) A_1 = \int_1^2 p(x) \frac{dA}{dx} dx$$

Dans la limite  $dx \rightarrow 0$ , on obtient donc :

$$\dot{m} du + A dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho u A du + A dp = 0$$

soit encore :

$$\rho u du + dp = 0 \quad (39)$$



## Bilan d'énergie

Comme vu précédemment, la conservation de l'énergie totale, se met sous la forme (en considérant une ligne de courant traversant les sections 1 et 2) :

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Ou encore :

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Sous forme différentielle, ceci se met également sous la forme

$$dh + u du = 0$$

Ou encore :

$$c_p dT + u du = 0.$$

## Récapitulatif

Le système d'équations qui régit les écoulements compressibles 1D stationnaires et isentropiques de gaz parfait est le suivant :

$$p = \rho r T \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (40)$$

$$\rho u A = \dot{m} = Cte \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (41)$$

$$\rho u du + dp = 0 \quad (42)$$

$$\mathcal{H} = h + \frac{1}{2}u^2 = c_p T + \frac{1}{2}u^2 = \mathcal{H}_i = Cte \quad \text{ou} \quad c_p dT + u du = 0 \quad (43)$$

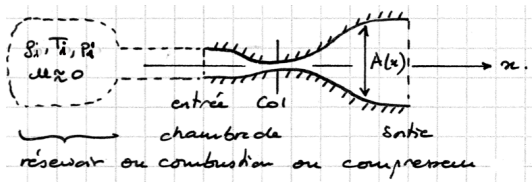
Le problème est a priori bien posé : il est décrit par 4 équations différentielles pour les 4 inconnues cinématique  $u(x)$  et thermodynamiques  $\rho(x)$ ,  $p(x)$  et  $T(x)$ , qui dépendent de paramètres géométriques comme la loi de section  $A(x)$  et de paramètres physiques tels le débit massique  $\dot{m}$ , et les **conditions génératrices**.

## Conditions génératrices

### Définition :

on appelle conditions ou grandeurs **génératrices** les valeurs prises par les grandeurs thermodynamiques, notées  $\rho_i$ ,  $p_i$ ,  $T_i$ , au niveau d'un **point d'arrêt**, réel ou fictif, c'est-à-dire à l'endroit où la vitesse de l'écoulement est nulle.

Les grandeurs génératrices sont aussi appelées **grandeurs d'arrêt**.



Ces grandeurs sont en général connues ou fixées par les conditions opérationnelles (pression et température dans la chambre de combustion ou dans le compresseur en amont de la tuyère par exemple).

## Relation de Hugoniot

Le système d'équations (4-7) permet de dériver la relation de **Hugoniot** reliant les variations de vitesse dans une conduite de section variable  $A(x)$  :

$$[\text{Démonstration}] \longrightarrow \frac{du}{u} = -\frac{1}{1-M^2} \frac{dA}{A}$$

On montre de même pour l'évolution de la pression :

$$[\text{exercice}] \longrightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A}$$

### Conséquences :

- Pour un écoulement subsonique :  
 Dans une section **convergente** ( $A \searrow$ ), alors  $u \nearrow$  et  $p \searrow$  (effet Venturi classique).  
 Dans une section divergente ( $A \nearrow$ ), alors  $u \searrow$  et  $p \nearrow$ .
- Si l'écoulement est supersonique c'est l'inverse !  
 Dans une section convergente ( $A \searrow$ ), alors  $u \searrow$  et  $p \nearrow$   
 Dans une section **divergente** ( $A \nearrow$ ), alors  $u \nearrow$  et  $p \searrow$ .
- Pour accélérer l'écoulement tout le long de la tuyère il faut donc que celle-ci présente un **col** correspondant à un minimum de la section  $A_c$ . On a alors nécessairement  **$M = 1$  au col**.

Si ces conditions sont réunies on dit que **la tuyère est amorcée**.

On va voir que dans ce cas le débit de masse  $\dot{m}$  est imposé par la **dimension du col**  $A_c$  et par les **conditions génératrices**.



## Résolution finale

On peut maintenant déduire le débit de masse à partir des relations de Barré de St-Venant appliquées au col ( $M = 1$ ) :

$$\dot{m} = \rho_c u_c A_c = \beta \rho_i \sqrt{\gamma r T_i} A_c \quad \text{avec } \beta = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \approx 0.5787$$

Pour pouvoir déterminer les conditions en tout point de la tuyère il reste maintenant à déterminer la relation entre  $A$  et  $M$ . En écrivant  $\dot{m} = \rho(M) u(M) A = \rho_c u_c A_c$  on trouve [exercice] :

$$\frac{A}{A_c} = \frac{\beta}{M} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Remarque : pour  $A/A_c > 1$  cette relation donne deux valeurs possibles de  $M$ , une subsonique (appliquable avant le col) et une supersonique (appliquable après le col).

Utilisation pratique :

Pour résoudre un problème on pourra utiliser les **tables d'écoulements compressibles isentropiques** donnant  $P/P_i$ ,  $\rho/\rho_i$ ,  $T/T_i$ ,  $A/A_c$  en fonction de  $M$ .

## Exercice

### Exercice d'application (Chassaing, p. 249)

Un réservoir contient de l'air sec à une pression  $P_i = 10\text{Bars}$ , et une température de  $T_i = 300\text{K}$ . Cet air s'écoule à travers une tuyère de section au col  $A_c = 755\text{mm}^2$  et de section de sortie  $A_s = 1272\text{mm}^2$ .

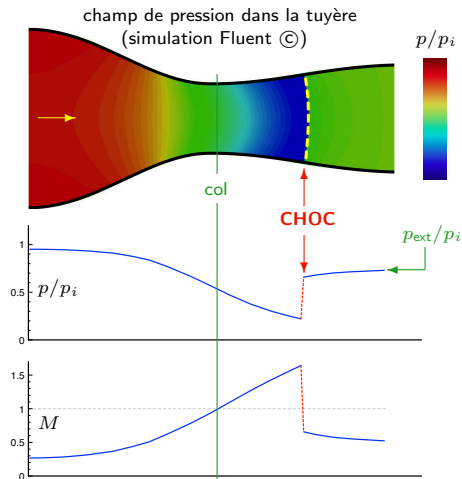
Calculez : (a) les conditions (pression, température, masse volumique et vitesse) au col, (b) le débit-masse, et (c) les conditions en sortie.

(d) mêmes questions pour une section de sortie  $A_s = 1980\text{mm}^2$ . Les conditions de sortie sont-elles compatibles avec une sortie à l'air libre dans une atmosphère standard ?

## Régime discontinu d'une tuyère amorcée

Remarque : l'hypothèse d'écoulement isentropique amorcé dans une tuyère impose une pression  $p_s$  en sortie de la tuyère ( $A = A_s$ ).

Que se passe-t-il si  $p_s < p_{ext}$  ?



Si la pression en sortie de tuyère n'est pas adaptée à la pression extérieure

→ existence d'un choc d'adaptation dans le divergent

→ après le choc, l'écoulement redevient subsonique et décélère (cf. relation d'Hugoniot)

Ce régime de fonctionnement est donc à éviter puisqu'il ne permet pas d'accélérer continûment l'écoulement jusqu'en sortie de tuyère.

Il n'est alors pas possible d'obtenir une poussée optimale.