Exercice complémentaire 4 : écoulement de Poiseuille

On considère l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien homogène de masse volumique ρ dans une conduite de section circulaire de rayon R et de grande longueur L suivant l'axe Oz (fig. 1). Le fluide dans la conduite est mis en écoulement sous l'action d'une différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite. Sans perte de généralité on supposera $P_1 > P_2$, et on notera $G = (P_1 - P_2)/L$ le gradient de pression entre l'entrée et la sortie. On négligera les forces massiques (dont la pesanteur). On notera ν et $\mu = \rho\nu$ les viscosités cinématique et dynamique. La géométrie du problème conduit naturellement à travailler dans un repérage cylindrique (r, θ, z).

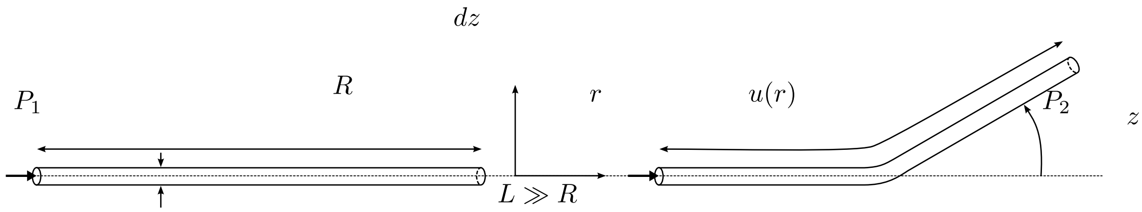

Figure 1 – *Ecoulement laminaire en conduite cylindrique.*

1 Recherche d'une solution particulière

Les équations de la mécanique des fluides étant non linéaires, il existe potentiellement plusieurs solutions d'écoulements pour une même configuration géométrique et opérationnelle (mêmes conditions limites). La plupart de ces solutions ne sont pas accessibles par le calcul analytique et sont même difficiles à calculer numériquement sur ordinateur. En particulier les solutions instationnaires et tridimensionnelles d'écoulements en conduite restent un sujet actuel d'étude pour les ingénieurs et les chercheurs.

Dans ce contexte, l'objectif ici n'est pas de trouver toutes les solutions d'écoulements, mais de déterminer parmi celles-ci la solution la plus simple qui, tout en respectant bien sûr les conditions physiques du problème (c'est une "vraie" solution *exacte* du problème) permet une résolution analytique.

1. Justifier en quelques mots pourquoi il est légitime de rechercher a priori une solution :
   a) ne dépendant pas du temps (écoulement *permanent* ou *stationnaire*) $\vec{u} = \vec{u}(r, \theta, z)$,
   b) ne dépendant pas de z (écoulement *établi*) $\vec{u} = \vec{u}(r, \theta)$,
   c) ni de θ (écoulement *axisymétrique*) $\vec{u} = \vec{u}(r)$,
   d) et correspondant à un écoulement purement axial (écoulement *unidirectionnel*)
   $$\vec{u} = u(r)\,\vec{e}_z \tag{1}$$
2. Vérifier que ce type de solution correspond bien à un écoulement incompressible [1].
3. Exprimer le tenseur des contraintes [1] $\vec{\vec{\sigma}}$ pour cette solution d'écoulement particulière.

2 Mise en équation

Il s'agit dans cette partie de mettre en équation l'écoulement en conduite dans le cadre des données et des hypothèses du problème.

1. Une première méthode consiste simplement à injecter dans l'équation de Navier-Stokes incompressible [1] le type de solution particulière (1) identifiée dans la section précédente.
   a) Montrer que la pression ne dépend ni de r ni de θ : $p = p(z)$.
   b) Montrer que le gradient de pression dp/dz est constant le long de la conduite et donner sa valeur en fonction des données du problème.

1. Les expressions de l'équation de Navier-Stokes incompressible et du tenseur des contraintes en repérage cylindrique sont disponibles en annexe du fascicule de TD.

c) En déduire que l'équation à résoudre pour le champ de vitesse est

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{Gr}{\mu} \tag{2}$$

2. Question subsidiaire : une autre méthode consiste à dériver l'équation pour u à partir d'un bilan de quantité de mouvement. Il n'est en effet pas nécessaire d'avoir écrit les équations de Navier-Stokes dans le cas général pour l'appliquer dans ce cas particulier : il suffit de remonter au bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle élémentaire et de l'écrire dans le cas particulier (1).

   a) Au préalable, justifier en quelques mots pourquoi la pression ne dépend que de z a priori.

   b) En écrivant le bilan de quantité de mouvement *suivant* z pour le volume de contrôle de rayon r et de longueur infinitésimale dz (fig. 1), montrer que

   $$\tau(r) = -\frac{Gr}{2}$$

   où $\tau(r) = \tau_{rz}(r)$ désigne la composante rz du tenseur des contraintes visqueuses.

   c) Dans l'hypothèse d'un fluide newtonien, en déduire l'équation différentielle à satisfaire pour u.

3 Résolution et applications

La résolution de l'équation (2) issue de la modélisation requiert la prise en compte des conditions aux limites. On supposera que la paroi de la conduite est fixe et imperméable, et qu'il y a *adhérence* à la paroi. Par conséquent $\vec{u} = \vec{0}$ en $r = R$. D'autre part, la réalité physique interdit d'avoir des vitesses infinies, et on supposera donc que la vitesse sur l'axe $r = 0$ est finie.

1. Dans ces conditions, déterminer la vitesse $u(r)$ et tracer le profil de vitesse associé. L'écoulement correspondant à cette solution[2] est appelé *écoulement de Poiseuille*. Cette solution d'écoulement est effectivement observée dans les conduites pour des nombres de Reynolds $Re = UD/\nu$ inférieurs à 2000 environ ($D = 2R$ désigne le diamètre de la conduite).

2. Calculer le débit massique $\dot{m}$ passant dans la conduite puis en déduire le débit volumique q et la vitesse moyenne U, aussi appelée *vitesse débitante*. Comparer à la vitesse maximale U_{max}.

   Remarque : l'expression du débit volumique en fonction du gradient de pression trouvée précédemment constitue la *loi de Poiseuille* ou de *Hagen-Poiseuille*. Cette "loi" a été établie par Jean-Louis Marie Poiseuille, médecin et physicien français qui s'intéressait notamment à la circulation du sang dans les vaisseaux. Une particularité réside dans la loi d'échelle du débit en fonction du rayon R : le débit est en effet proportionnel au rayon à la puissance 4, ce qui conduit à une dépendance très forte du débit vis-à-vis du rayon de la conduite, comme cela sera illustré en TD. Ainsi une conduite soumise à un gradient de pression donné, pour un fluide de viscosité donnée, dont le rayon est multiplié par 2 voit son débit multiplié par $2^4 = 16$!

   Questions subsidiaires :

3. Déterminer l'expression de la contrainte visqueuse $\tau(r)$ et discuter de son signe. Où l'intensité de cette contrainte est-elle maximale ?

4. En déduire la force exercée par l'écoulement sur la conduite de longueur L.

5. Déterminer la dissipation d'énergie cinétique dans la conduite de longueur L.

6. La chute de pression dans la conduite correspond à une diminution de l'énergie mécanique du fluide à cause des frottements visqueux. On parle alors de perte de charge régulière et on définit le coefficient de perte de charge par

   $$\lambda = \frac{D}{L} \times \frac{P_1 - P_2}{\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{3}$$

   Vérifier que ce coefficient est sans dimension, et déterminer son expression en fonction du nombre de Reynolds dans le cas de l'écoulement de Poiseuille.

Références :

Poiseuille J.-M. L. (1844) Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres.

2. Voir l'article sur Wikipedia : `fr.wikipedia.org/wiki/Ecoulement_de_Poiseuille`