Ecoulements linéaires (exercice préparatoire chapitre cinématique)

1 Introduction

Définition :

Considérons un écoulement plan $\vec{u} = u(x,y,t)\,\vec{e}_x + v(x,y,t)\,\vec{e}_y$ Défini par :

$$u(x,y) = ax + by \quad (1)$$
$$v(x,y) = cx + dy \quad (2)$$

Propriétés :

1. A quelle condition cet écoulement est-il a divergence nulle ? (on dit aussi écoulement isovolume, ou par abus de language écoulement incompressible).
2. Justifiez que dans ce cas on peut introduire une fonction de courant $\psi(x,y)$, et donnez son expression.
3. Montrer que les lignes de courant de l'écoulement sont les courbes le long desquelles la fonction de courant est constante, définies par $\psi(x,y) = Cte$.
4. Question subsidiaire : montrer que le débit est conservé entre deux lignes de courants. Plus précisément, si l'on considère deux lignes de courant définies par $\psi(x,y) = C_1$ et $\psi(x,y) = C_2$, alors le débit qui passe entre ces deux lignes de courant est donné par $q = C_2 - C_1$.

2 Ecoulements linéaires

On considère dans cet exercice les écoulements plans stationnaires définis par la fonction de courant

$$\psi(x,y) = -cx^2/2 + by^2/2 \quad (3)$$

où b et c sont deux paramètres constants qui définissent la nature de l'écoulement considéré.

1. Calculer en fonction de b et c le champ de vitesse correspondant à la fonction de courant donnée par l'expression (3).
2. Vérifier à nouveau qu'il s'agit bien d'un écoulement incompressible.
3. Déterminer la dérivée particulaire du champ de vitesse obtenu. Comment est modifiée cette dérivée particulaire si on considère des coefficients dépendants du temps $c(t)$ et $b(t)$?
4. Donner l'expression du tenseur des gradients de vitesse $\vec{\vec{G}}$. On justifiera qu'on pourra se restreindre à un tenseur représenté par une matrice 2×2.
5. Justifier alors l'appellation d'écoulement *linéaire* associée à cette famille particulière de fonction de courant.
6. Déterminer le tenseur des taux de déformation $\vec{\vec{D}}$. A quelle condition ce tenseur est nul ?
7. Déterminer le tenseur des taux de rotation $\vec{\vec{R}}$. A quelle condition ce tenseur est nul ?
8. Déduire des deux dernières questions une décomposition canonique de la fonction de courant ψ.
9. Calculer le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ et le champ de vorticité $\vec{\omega}$ de l'écoulement.
10. On effectue maintenant un changement de repère en faisant tourner les axes d'un angle θ. On pose donc :
    $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$; $y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$; $u'_x = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta$; $u'_y = -u_x\sin\theta + u_y\cos\theta$.
    Calculez le tenseur du gradient des vitesses, ainsi que ses composantes symétrique et antisymétrique, dans ces nouveaux axes (on notera $\vec{\vec{G}}_{(x'y')} = \vec{\vec{D}}_{(x'y')} + \vec{\vec{R}}_{(x'y')}$).
11. Que remarque-t-on pour la partie antisymétrique (tenseur des taux de rotation) ?
12. Pour la partie symétrique (tenseur des taux de déformation), montrez qu'il existe un changement de variable rendant le tenseur diagonal. Interprétez.

3 Ecoulements linéaires : cas particuliers

1. Ecrire un programme Matlab qui trace les lignes de courant pour n'importe quelle valeur de c et b choisies par l'utilisateur.
2. On considère le cas particulier $c = 0$.
   (a) déterminer les lignes de courant et les trajectoires (on vérifiera qu'il s'agit des mêmes courbes),
   (b) déterminer l'accélération des particules fluides.
   (c) commenter la forme des tenseurs des taux de déformation et des taux de rotation dans ce cas.
3. Mêmes questions dans le cas $c/b = 1$ (on pourra éventuellement prendre $b = 1$ sans perte de généralité). Tracer les lignes de courant avec Matlab et l'accélération des particules fluides en quelques points particuliers.
4. Mêmes questions dans le cas $c/b = -1$.
5. Question subsidiaire : reprendre le programme Matlab précédent afin qu'il calcule l'évolution d'un élément matériel carré initialement centré en un point (x_0, y_0) et de côté L choisis par l'utilisateur.