Mécanique des fluides

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique
david.fabre@imft.fr

Enroulement d'un filet de miel. Patricia ERN © IMFT

4. Viscosité et Rhéologie

Sommaire

Definitions

- En plus d'une force normale (pression, chap. 2), on constate qu'un fluide en mouvement peut exercer sur une surface $\mathcal{S}$ une force tangentielle.
- Commençons par caractériser cette force dans le cas simple d'un *écoulement plan parallèle* :

$$\vec{u} = u(y,t)\vec{e}_x$$

- **Définition :** On appelle Contrainte Visqueuse τ_{xy} la force tangentielle *Par unité de surface*, exercée dans la direction x sur une facette d'orientation normale y, par le demi-espace y^+ sur le demi-espace y^- .

$$d\vec{F}_{(y^+)\rightarrow(y^-)} = \left(-p\vec{e_y} + \tau_{xy}\vec{e_x}\right) dS$$

- **Définition :** on appelle taux de cisaillement local la quantité $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}$
- **Définition :** (pour un écoulement plan parallèle) on appelle *Loi rhéologique* la loi reliant τ_{xy} à $\dot{\gamma}$.
- Remarque importante : tout comme la pression, la contrainte visqueuse s'exerce à la fois sur une paroi solide ou sur une surface (fictive) séparant le fluide en deux sous-domaines.

Cas des gaz

Pour les gaz, on observe une loi rhéologique *linéaire* (ou Newtonienne).

$$\tau_{xy} = \mu\dot{\gamma}$$

$\mu =$ viscosité cinématique.

Explication physique : Illustrations avec le programme KINETICS.M.
La contrainte visqueuse est due :

- (entre deux volumes fluides adjacents) *aux échanges de quantité de mouvement tangentielle due aux transferts de particules venant de régions de vitesse moyenne (au sens MMC) différentes.*
- (sur une surface solide) *aux variations de quantité de mouvement tangentielle dues aux collisions sur la paroi*

=> Dans un gaz la viscosité augmente avec la température (cad avec l'agitation thermique).
(Loi de Sutherland : $\mu \approx \mu_0 (T/T_0)^{3/2}$)

Remarque sur les *conditions limites* :

Une paroi est elle-même constituée de particules en agitation thermique ... Après chaque collision les particules sont renvoyées dans des directions aléatoires. Pour une paroi fixe en $y = 0$:

$$u_x(y = 0) = 0$$

Généralisation :

Pour une paroi de vitesse U_{paroi} en $y = y_{paroi}$, $u(y_{paroi}) = U_{paroi}$.
On appelle cette condition une *condition limite d'adhérence* .

Cas des liquides simples

Liquides "simples" = constitués de "petites molécules" (eau, huiles, métaux liquides, etc...)

On observe également une loi rhéologique linéaire : $\tau_{xy} = \mu\dot{\gamma}$ (loi Newtonienne).

Explication physique : pour mettre en mouvement les strates de fluide les unes par rapport aux autres, il faut briser des liaisons pour en recréer d'autres.

C'est d'autant plus facile que l'agitation thermique est importante

=> Dans un liquide (simple), la viscosité diminue avec la température !

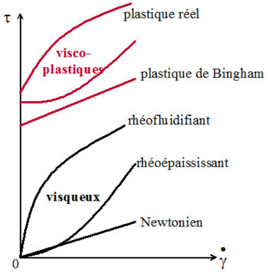
(Loi de Suttner pour l'eau : $\mu = \mu_0 e^{-\alpha(T-T_0)}$).

Remarque sur les *conditions limites* :
L'étude des interactions entre particules fluides et molécules constituant une paroi solide justifient également une *condition limite d'adhérence*

$$u(y_{paroi}) = U_{paroi}$$

Cas des liquides "complexes"

Pour des liquides "complexes" (mélanges, suspensions, contenant des "grosses" molécules ou particules) on observe des comportements divers :



- Fluides rhéo-fluidifiants (shear-thinning) : la viscosité effective diminue avec le cisaillement.
  Exemples : shampooing, lessive, jus de fruits concentrés, encres d'imprimerie,...
- Fluides rhéo-épaississants (shear-thickenning) : la viscosité effective augmente avec le cisaillement.
  Exemples : maïzena, suspensions diluées de polymères, ...
- *Fluides à seuil* (ou solides visco-plastiques) : il faut exercer une contrainte minimale τ_c pour mettre le fluide en mouvement.
  Exemples : boues, mayonnaise, ketchup, dentifrice, cf. TD 4.1.

Compléments : lois rhéologiques instationnaires

Pour certains fluides on observe de plus que la loi rhéologique ne dépend pas seulement des valeurs instantanées de τ_{xy} et $\dot{\gamma}$ mais aussi de la manière dont les contraintes et les déformations varient au cours du temps :

- Comportement thixotrope
  La viscosité "effective" diminue avec la durée d'imposition de la contrainte.
  Exemples : Terre agricole, boue, polymères, ...
- Comportement viscoélastique
  Contraintes exercées "rapidement" => Comportement de solide élastique
  Contraintes exercées "lentement" => Comportement de fluide visqueux.
  Exemples : Maïzena, pâte silicone, ...

Loi rhéologique pour un fluide Newtonien (cas général)

Généralisation : τ_{xy} et $\dot{\gamma}$ se généralisent en introduisant les tenseurs $\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}}$ et $\overrightarrow{\overrightarrow{D}}$.

On appelle *Loi rhéologique* la relation entre les tenseurs τ et $\overrightarrow{\overrightarrow{D}}$.

On appelle **fluide newtonien** un fluide dont la loi rhéologique est linéaire.

Les principes de la MMC (symétrie, objectivité, etc...) imposent qu'une loi rhéologique linéaire est nécessairement de la forme :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}} = 2\mu\, \overrightarrow{\overrightarrow{D}}' + \mu^* \mathrm{div}\,(\vec{u}) \overrightarrow{\overrightarrow{1}}$$

où μ désigne la viscosité dynamique du fluide, μ^* la viscosité volumique (habituellement négligée), $\overrightarrow{\overrightarrow{D}}'$ est le déviateur du tenseur des taux de déformations donnés par

$$\overrightarrow{\overrightarrow{D}}' = \overrightarrow{\overrightarrow{D}} - \frac{\mathrm{div}\,(\vec{u})}{3} \overrightarrow{\overrightarrow{1}}; \qquad \overrightarrow{\overrightarrow{D}} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\, \vec{u} + {}^t\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\, \vec{u} \right)$$

Dans le cas d'un écoulement isovolume $(\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0)$ on l'écrira sous la forme plus simple :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\tau}} = 2\mu\, \overrightarrow{\overrightarrow{D}}$$

Etablissement de l'équation

Considérons un écoulement *parallèle* , éventuellement instationnaire, d'un fluide *Newtonien*, *incompressible* décrit par son champ de vitesse

$$\vec{u} = u(y,t)\vec{e}_x$$

Par un bilan de quantité de mouvement sur un volume élémentaire de fluide (projeté dans la direction x), on obtient l'équation des films visqueux (parfois appelée Equation de Navier) :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g_x - \left[\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Remarques :

1. Autre forme possible de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g_x - \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

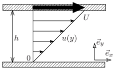
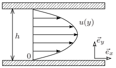
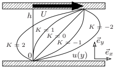
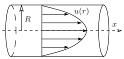
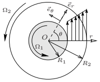
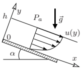
2. On peut justifier que le gradient de pression est nécessairement uniforme : $\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right] = C_{te} = \frac{[P(L)-P(0)]}{L}$ [Démonstration :]

3. Conditions limites :

   - Sur une surface solide de vitesse U_p :
     $u(y_p) = U_p$ (Condition d'adhérence.)
   - Sur une surface libre (liquide/gaz de masse volumique négligeable) :
     $\tau_{xy} = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (Condition de contrainte nulle).

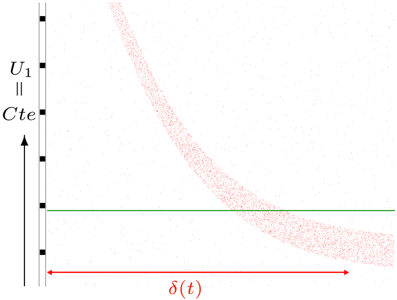
Solutions classiques stationnaires (rappels L2)

(Quelques) solutions exactes des équations de Navier-Stokes

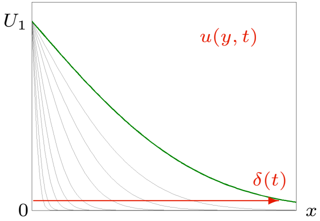
Schéma	Hypothèses	Solution	Nom de l'écoulement
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\vec{u} = u(y)\,\vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{Uy}{h}$ $p = C^{te}$	Couette plan sans gradient de pression $(\partial p/\partial x = 0)$
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(y)\,\vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y(h-y)$	Poiseuille plan
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(y)\,\vec{e}_x$ avec $u(y) = U\left[\frac{y}{h} - K\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right]$ où $K = \frac{h^2}{2\mu U}\frac{dp}{dx}$	Couette plan avec gradient de pression $(\partial p/\partial x \neq 0)$ = "Couette-Poiseuille"
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$	$\frac{dp}{dx} = C^{te}$ et $\vec{u} = u(r)\,\vec{e}_x$ avec $u(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left(R^2 - r^2\right)$	Poiseuille cylindrique
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\vec{u} = v(r)\vec{e}_\theta$ avec $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$ où $A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$ et $B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)\, R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$	Couette cylindrique = "Couette-Taylor"
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0}$	$\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$ avec $u(y) = \frac{g\sin\alpha}{2\nu}y(2h-y)$ $p(y) = \rho g(h-y)\cos\alpha + P_a$	Film tombant

Problème : plaque en translation dans un fluide visqueux

1er Problème de Stokes : à $t = 0$, l'écoulement est au repos ; pour $t > 0$ la paroi $(y = 0)$ est mise en mouvement à la vitesse constante U.
(illustrations avec le programme kinetics.m).



mesure du profil de vitesse verticale $u(y, t)$



→ Objectifs : déterminer l'évolution du profil de vitesse verticale $u(y, t)$ et la loi de diffusion $\delta(t)$

Etude Mathématique

- **Solution exacte :** cf. TD, exercice 4.0 (correction sur moodle).
- Etude par analyse dimensionnelle

  Cherchons à estimer $\delta(t)$ par analyse dimensionnelle (méthode du chapitre 1) :

  - Recherche des paramètres pertinents :

  $$\delta = \mathcal{F}(t, \nu, \rho, U)$$

  - Simplification issue de l'étude de la structure des équations : le problème est *linéaire* et la solution adimensionnelle $\bar{u} = u(y,t)/U$ ne dépend pas de U !

  - Finalement on peut partir d'une relation de la forme :

  $$\delta = \mathcal{F}(t, \nu, \rho)$$

  Méthode du chapitre 1 : mise sous forme adimensionnelle avec $[T] = t, [L] = \sqrt{\nu t}$ (seule échelle de longueur du problème), $[M] = \rho[L]^{3/2}$.

  $=> \delta = \sqrt{\nu t} \times C_{te}$

  (Remarque : méthode plus générale, identification du *groupe de symétries* du problème ; cf. correction moodle).

$\delta(t) = \sqrt{\nu t}$ est appelée la *longueur de pénétration visqueuse* On retrouve cette échelle de longueur dans de nombreux problèmes instationnaires apparentés !

1er problème de Stokes : Remarques

Envisageons le problème d'une autre manière en posant la question différemment.

Question : A une distance $y = L$ de la paroi, a partir de quel instant t le fluide se met-il en mouvement ?

Réponse par analyse dimensionnelle :

$$t = \mathcal{F}(L, \nu, \rho, \cancel{U})$$

$$\rightarrow \qquad t_v = L^2/\nu \times C_{te}$$

La quantité $\tau_\nu = L^2/\nu$ est appelée le temps caractéristique de diffusion visqueuse.
On retrouve cette échelle de longueur dans de nombreux problèmes instationnaires apparentés !

Second problème de Stokes

Problème : Ecoulement instationnaire établi engendré par une paroi oscillante $U(y = 0) = Ucos(\omega t)$.

- Etude par analyse dimensionnelle :
  Estimons l'épaisseur caractéristique δ du fluide mis en mouvement :

$$\delta = \mathcal{F}(\omega, \nu, \rho, \cancel{U})$$

  $=> \delta = \sqrt{\nu/\omega} \times C_{te}$

- **Solution exacte :** cf. TD, exercice 4.1

$$u(y,t) = Ue^{-y/\delta}\cos(\omega t - y/\delta) \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

Ecoulement pulsé en conduite (1)

Etudions l'écoulement d'un fluide soumis à un gradient de pression périodique, dans un canal horizontal ($g_x = 0$) d'épaisseur h :
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = K\cos(\omega t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -K cos(\omega t) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Cherchons à simplifier le problème par *analyse dimensionnelle des équations* :
Posons $U =$ échelle caractéristique (ou jauge) de vitesse.
L'échelle de temps est $T = \omega^{-1}$, et l'échelle de longueur est (a priori) h.

(equation :)	$\frac{\partial u}{\partial t}$	$=$	$-K cos(\omega t)$	$+$	$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
(terme :)	$[I]$		$[P]$		$[V]$
(Ordre de grandeur :)	$\frac{U}{T}$		K		$\nu \frac{U}{h^2}$

Le terme $[P]$ est nécessairement présent à l'ordre dominant. Comparons les termes $[V]$ et $[I]$:

$$\frac{[I]}{[V]} = \frac{h^2\omega}{\nu} = St$$

Ceci définit le Nombre de Stokes de l'écoulement.

Ecoulement pulsé en conduite (2)

- Si $St \ll 1$ alors $[I] \ll [V]$, a l'ordre dominant on peut négliger $[I]$ et ne garder que $[V]$ et $[P]$.

$$0 = -K cos(\omega t) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

=> Solution : $u(y,t) \approx -K \cos(\omega t) \left(1 - y^2/h^2\right)$ "ecoulement de Poiseuille quasi-statique".

- Si $St \gg 1$ alors $[V] \gg [I]$, a l'ordre dominant on peut négliger $[V]$ et ne garder que $[I]$ et $[P]$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -K cos(\omega t)$$

=> Solution : $u(y,t) \approx -\frac{K}{\omega} \sin \omega t$
Remarque : cette solution ne vérifie pas la condition limite d'adhérence... en réalité il se forme une "couche limite de Stokes" d'épaisseur δ (cf. problème précédent).

- Si $St = \mathcal{O}(1)$, pas de simplification possible, il faut garder $[V]$ et $[I]$.
=> Solution possible par voie analytique mais compliquée... (cf. TP numérique).

Analogie : diffusion de la quantité de mouvement et de la chaleur

Remarque : Il existe une analogie entre la *diffusion de quantité de mouvement* (viscosité) et la diffusion de la chaleur (conduction thermique). en effet les équations ont la même forme !

Equation de la conduction thermique 1D ($\theta = \theta(x,t)$) (cf. cours de transferts thermiques) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sigma}{\rho c_p} + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ Diffusivité thermique, même dimension physique que ν ! ($[\kappa] = L^2 T^{-1}$).