Licence de Mécanique, Université Paul Sabatier, 2019

TP numérique de Mécanique des Fluides

Inspiré du TD: "Rythmes cardiaques"

L'objectif de ce TP est d'approximer numériquement un écoulement induit entre deux plans par un gradient de pression oscillant. Ce type de problème peut modéliser la manière dont les battements du cœur induisent un écoulement pulsé dans les vaisseaux sanguins. En effet ces battements imposent une variation périodique du gradient de pression imposé entre deux sections transverses des vaisseaux. L'objectif de cet exercice est de caractériser ce type d'écoulement en particulier dans les limites des basses fréquences (organisme au repos) et hautes fréquences (activité cardiaque intense).

1 Présentation du problème et solution analytique

Considérons un modèle d'écoulement plan entre deux plaques planes distantes de $2h$, généré par un gradient de pression sinusoïdal à pulsation ω fixée :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = K\cos\omega t.$$

Ici K correspond à l'amplitude du gradient de pression imposé (renormalisé par la masse volumique).

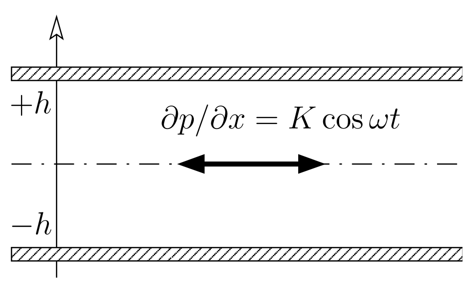

Figure 1: Écoulement pulsé en conduite.

Dans l'hypothèse d'un écoulement plan parallèle, et d'une vitesse u nulle sur les parois inférieure et supérieure, la vitesse horizontale $u(y,t)$ vérifie l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -K\cos\omega t + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

associé aux conditions limites

$$u(\pm h, t) = 0.$$

Sous l'hypothèse d'un *régime établi*, le problème admet une solution théorique qui sera notée $u_{th}(y,t)$. Le forçage étant de la forme $\cos\omega t$ on peut rechercher la solution sous la forme

$u_{th}(y,t) = u_c(y)\cos\omega t + u_s(y)\sin(\omega t)$. Il est cependant plus efficace d'utiliser la méthode de la variable complexe en posant

$$u_{th}(y,t) = Re\left\{\underline{U}(y)e^{i\omega t}\right\}$$

où $\underline{U}(y) = u_c(y) - iu_s(y)$ est une fonction à valeur complexe. En remplaçant $\cos\omega t$ par $e^{i\omega t}$ dans l'équation (1), et en cherchant la solution vérifiant les conditions limites $u(\pm h, t) = 0$, on obtient finalement l'expression du profil de vitesse instationnaire suivant :

$$\underline{U}(y) = \frac{iK}{\omega}\left\{1 - \frac{\cosh[(1+i)y\sqrt{\omega/2\nu}]}{\cosh[(1+i)h\sqrt{\omega/2\nu}]}\right\} \tag{2}$$

On ne demande pas de démontrer cette solution théorique. En revanche, on fournit un programme MATLAB `Visualisation_Ecoulement_Pulse.m` qui permet de visualiser cet écoulement [1]. Ce programme appelle une function `Utheo.m` calculant la solution théorique correspondant à l'équation (2), et effectue une boucle sur le temps pour tracer le profil de vitesse à des instants successifs.

2 Visualisation et analyse de la solution théorique

1. On définit le nombre de Strouhal du problème ainsi :

$$St = \frac{\omega h^2}{2\nu}$$

   Quelle est l'interprétation de ce nombre ?

2. A l'aide de ce programme visualiser les profils de vitesse pour différentes valeurs de St prises dans l'intervalle $10^{-3} \leq St < 10^3$. Représenter schématiquement sur votre compte-rendu la forme du profil de vitesse à différents instants du cycle, dans les deux régimes asymptotiques des grands et petits St. Commentez physiquement les résultats. Précisez notamment à quel instant du cycle le débit dans la conduite est maximal, et expliquez physiquement.

3. Montrez que le nombre de Strouhal peut aussi s'écrire sous la forme $St = h^2/\delta^2$ où δ est une échelle de longueur dont vous préciserez la signification. Comment se manifeste cette échelle de longueur dans le régime $St \gg 1$?

4. Si l'on part d'une condition initiale donnée (par exemple $u(y,0) = 0$), la solution exacte du problème est $u(y,t) = u_{th}(y,t) + u_{trans}(y,t)$ où $u_{th}(y,t)$ est la solution périodique en régime établi déterminée plus haut et $u_{trans}(y,t)$ est représente le comportement transitoire qui tend vers 0 lorsque t augmente. Donnez une estimation du temps caractéristique d'amortissement de ce transitoire.

[1] Notez que dans le programme les résultats sont adimensionés en posant $h = 1, \nu = 1, K = 1$ si bien que $St \equiv \omega/2$.

3 Calcul numérique

On propose de résoudre numériquement cette équation de diffusion 1D instationnaire forcée. Ceci permettra d'une part de comparer l'approximation numérique avec la solution théorique en régime établi, et d'autre part d'observer le régime transitoire précédent la convergence vers ce régime établi.

La solution numérique est calculée en utilisant des méthodes aux différences finies.

La discrétisation spatiale est effectuée en introduisant N_y points intérieurs au domaine et définis par $y_i = (i\Delta y - h)$ avec $i = 1..N_y$ et $\Delta y = 2h/(N_y + 1)$.

La discrétisation temporelle est effectuée en posant $t^{(n)} = n\Delta t$ avec $n = 0, .., N_t$.

Enfin, on pose $u_i^{(n)} = u(y_i, t^{(n)})$.

Le schéma utilisé sera un Euler explicite d'ordre 1 en temps, et des différences finies centrées d'ordre 2 en espace. En utilisant ce schéma l'équation (1) prend la forme:

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t} = -K\cos(\omega t^{(n)}) + \frac{\nu}{\Delta y^2}\left[u_{i+1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}\right] \tag{3}$$

Remarquons que les y_i décrivent les points à l'intérieur du domaine, et du fait des conditions aux limites de non-glissement imposées sur les parois on a $u(y_0, t^{(n)}) = u(y_{N_y+1}, t^{(n)}) = 0,\ \forall n$.

Pour la résolution numérique deux stratégies sont possibles :

- On peut construire un tableau à deux dimensions `U(i,n)` contenant toutes les valeurs $u_i^{(n)}$, et remplir les unes après les autres les colonnes du tableau correspondant aux valeurs de u aux instants successifs. L'inconvénient est de nécessiter un important stockage de mémoire, inutile si l'on ne s'intéresse qu'à l'état final.

- En notant que le schéma ne fait intervenir que la solution à deux pas de temps successifs, on peut se contenter d'utiliser seulement deux vecteurs colonnes `Ufutur` et `Upresent` contenant à chaque pas de temps les valeurs à l'instant "présent" $t^{(n)}$ et "futur" $t^{(n+1)}$ (c.a.d. $U^{present} = [u_1^{(n)}; u_2^{(n)}; ...u_{N_y}^{(n)}]$ et $U^{futur} = [u_1^{(n)}; u_2^{(n)}; ...u_{N_y}^{(n)})$.

1. Montrez qu'avec cette seconde idée le calcul de la solution à chaque itération temporelle se met sous la forme :
$$U^{futur} = A\,U^{present} + F cos(\omega t^n). \tag{4}$$
Où A est une matrice carrée correspondant à la discrétisation de l'opérateur Laplacien et F est un vecteur colonne représentant le terme de forçage. Préciser les dimensions des matrices et vecteurs mis en jeu dans (4).

2. Ecrire un programme effectuant l'intégration temporelle du problème, en fonction des différents paramètres physiques et numériques, en partant de la condition initiale $u(y, t = 0) = 0$, et jusqu'à un instant final t_f.

   Dans votre comte-rendu, vous détaillerez la stratégie de programmation utilisée.

3. A l'aide de votre programme, calculez et tracez la solution numérique obtenue à un instant t_f suffisamment grand pour que le régime établi soit atteint (on pourra prendre par exemple $t_f = 10T$; $T = \pi/\omega$, ou adapter cette valeur selon le cas étudié).

   Vous utiliserez les valeurs des paramètres donnés dans le tableau:

h	K	ν	ω	N_y
				100

Vous déterminerez vous-même une valeur de Δt à utiliser pour aboutir à un bon compromis entre précision et temps de calcul.

4. Quel est le nombre de Stokes correspondant à ces paramètres ? Est-on dans l'un des régimes limites identifiés dans la partie théorique ?

5. Tracez sur le même graphique la solution théorique $u_{th}(y, t_f)$.

6. Qu'observe-t-on avec des valeurs de Δt trop grandes ? Expliquez.

7. (Question facultative) : Reprenez le problème avec une valeur N_y plus élevée (par exemple $N_y = 200$ ou $N_y = 500$) (vous devrez éventuellement adapter le pas de temps). Calculez l'erreur $max|u(y, t_f) - u_{th}(y, t_f)|$. Comment cette erreur varie en fonction de N_y ? que peut-on en déduire sur la précision du schéma ?

8. Calculez maintenant à l'aide de votre programme la solution correspondant à des instant t_f plus courts (de l'ordre de $t_f = T$ ou même encore plus courts). Comparez avec la solution théorique. A partir de ces résultats estimez le temps d'amortissement du régime transitoire et comparez avec l'estimation donnée à la question 4 de la partie théorique.

9. Réécrire le schéma (3) de manière implicite avec un schéma de Cranck-Nicholson. (c'est-à-dire que la discrétisation du laplacien est exprimée au temps $n + 1/2$, défini comme moyenne des valeurs aux instants n et $n+1$). Précisez l'ordre de ce schéma, et le traitement choisi pour le second membre de l'équation différentielle.

   Ecrire ce nouveau schéma sous forme matricielle.

10. Ecrire un nouveau programme effectuant l'intégration numérique de ce nouveau schéma.

11. Toujours pour les paramètres donnés dans le tableau et pour $t_f = 10(2\pi/\omega)$, tracez et imprimer la solution numérique obtenue pour plusieurs valeurs de Δt. Comparez ces résultats à ceux obtenus avec le schéma explicite, et discutez en terme de précision, de stabilité, et de temps de calcul.

    (on pourra estimer le temps de calcul des deux méthodes avec les commandes matab `tic` et `toc`).

PLANNING DES SEANCES (2018)

Groupe 1 : vendredi 8 février, 08:45-11:45, salle U3-207

Groupe 3 : vendredi 8 février, 13:15-16:15, salle U1 205

Groupe 2 : vendredi 22 février, 13:15-16:15, salle U3 206

Les étudiants ayant déjà validé des TPs l'année dernière devront se présenter lors de la première séance pour faire connaitre leurs intentions à l'enseignant.

CONSIGNES POUR LA REDACTION DES COMPTES-RENDUS

Le compte-rendu sera réalisé par groupes de deux personnes.

Le rapport ne doit pas excéder 4 feuilles recto-verso hors courbes. Il devra présenter le problème physique concerné, la modélisation numérique utilisée, la stratégie de programmation utilisée et les résultats obtenus. Dans la présentation on veillera a distinguer les aspects de validation numérique (précision, stabilité, etc...) des résultats physiques. Le rapport devra également indiquer les éventuelles difficultés rencontrées dans la mise en place ainsi que l'état d'avancement par rapport aux objectifs du TP.

Les figures devront être numérotées, citées et commentées dans le texte. Chaque figure doit obligatoirement comporter un titre clair (ou une légende située sous la figure), et les axes doivent être gradués et identifiés. (vous pouvez utiliser les commandes matlab `title, xlabel, ylabel`).

Toute figure incomplète ne sera pas considérée dans la note.

Le (ou les) programme(s) écrit(s) devra(ont) être fourni(s) en annexe du rapport, ou déposé sur MOODLE comme un document séparé.

Une suggestion de plan pour le rapport est le suivant :

(a) Partie théorique :
Répondre aux questions de la section 2)

(b) Stratégie numérique :
Préciser les schémas implémentés (Euler et/ou Crank-Nicholson) et la stratégie de programmation choisie (maxi 1/2 page, complété par les programmes en annexe).

(c) Validation du code numérique :
Comparez la solution calculée avec le (ou les) programme(s) avec la solution théorique, pour un instant t_f suffisant pour que le régime transitoire ne soit plus présent. Commentez en terme de précision, de stabilité, et de performance (temps de calcul).

(d) Etude physique du transitoire.
En utilisant Euler ou Crank-Nicholson, Illustrez le comportement physique au cours du transitoire.

(e) Conclusions

PROCEDURE DE DEPOT DES COMPTES-RENDUS

Les comptes-rendus seront à rendre SUR MOODLE, au plus tard 4 semaines après la séance de TP (lundi 4 mars pour le groupe 1 et 3, lundi 18 mars pour le groupe 2).

Si le rapport a été rédigé par ordinateur, inutile de rendre une version papier.

Si le rapport a été rédigé à la main, vous devrez scanner (ou prendre en photo) le rapport pour le déposer sur moodle, et rendre également une version papier au cours suivant.

IL EST RAPPELE QUE LES TPS SONT OBLIGATOIRES.