TP 3 numérique: Dynamique des Fluides
Inspiré du TD: "Rythmes cardiaques"

L'objectif de ce TP est d'approximer numériquement un écoulement induit entre deux plans par un gradient de pression oscillant. Ce type de problème peut modéliser la manière dont les battements du cœur induisent un écoulement pulsé dans les vaisseaux sanguins. En effet ces battements imposent une variation périodique du gradient de pression imposé entre deux sections transverses des vaisseaux. L'objectif de cet exercice est de caractériser ce type d'écoulement en particulier dans les limites des basses fréquences (organisme au repos) et hautes fréquences (activité cardiaque intense).

Considérons un modèle d'écoulement plan entre deux plaques planes distantes de $2h$, généré par un gradient de pression sinusoïdal à pulsation ω fixée :

$$\frac{dp}{dx} = K \cos \omega t.$$

Dans cette écritude K correspond àÂă l'amplitude du gradient de pression imposé.

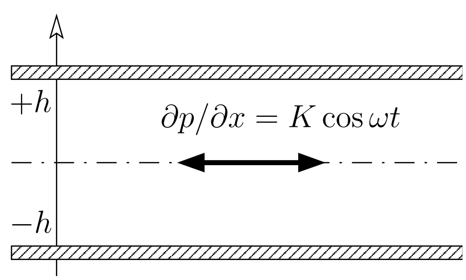

Figure 1: Écoulement pulsé en conduite.

1 Visulation de la solution analytique (en rÃl'gime Ãl'tabli)

1. Dans l'hypothèse d'un écoulement plan parallèle, et d'une vitesse u nulle sur les parois inférieure et supérieure, montrer que la vitesse horizontale $u(y,t)$ vérifie l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{K}{\rho} \cos \omega t + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

   Sous l'hypothÃÍse d'un *rÃl'gime Ãl'tabli*, le problÃÍme admet une solution analytique. Le forÃğage Ãl'tant de la forme $\cos \omega t$ on peut rechercher la solution sous la forme $u(y,t) = u_c(y) \cos \omega t + u_s(y) \sin(\omega t)$. En notant il est cependant plus efficace d'utiliser la mÃl'thode de la variable complexe en posant $u_{th}(y,t) = Re\left\{\underline{U}(y) e^{i\omega t}\right\}$ oÃź $\underline{U}(y) = u_c(y) - i u_s(y)$ est une fonction Ãă valeur complexe. En remplaÃğant

$\cos \omega t$ par $e^{i\omega t}$) dans l'équation (1), et en cherchant la solution vÃľrifiant les conditions limites $u(\pm h, t) = 0$, on obtient finalement l'expression du profil de vitesse instationnaire suivant :

$$\underline{U}(y) = \frac{iK}{\rho\omega}\left\{1 - \frac{\cosh[y(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}]}{\cosh[h(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}]}\right\} \tag{2}$$

2. Retrouver les solutions (2) à partir de l'équation (1).

3. La solution complÃĺte du problÃĺme est la solution Ãľtablie prÃľcÃľdente, plus une solution particuliÃĺre sans second membre, qui correspond Ãă un rÃľgime transitoire amorti et qui dÃľpend des conditions initiales. Estimez le temps caractÃľristique τ d'amortissement de ce transitoire.

4. En adimensionnant t et y respectivement par $1/\omega$ et h la solution se met sous la forme :

$$\underline{U}^\star(y^\star) = \frac{i\gamma}{\Omega^2}\left\{1 - \frac{\cosh[y^\star(1+i)\sqrt{\Omega}]}{\cosh[(1+i)\sqrt{\Omega}]}\right\} \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\omega h^2}{2\nu},\ \gamma = \frac{Kh^3}{4\rho\nu^2} \tag{3}$$

   avec * exprimant le fait que ces variables sont adimensionnées.

   On fournit un programme MATLAB `pulse.m` qui permet de visualiser cette solution thÃľorique. A l'aide de ce programme visualiser les profils de vitesse pour diffÃľrentes valeurs de Ω prises dans l'intervalle $10^{-3} \leq \Omega < 10^3$.

   Représenter schématiquement sur votre compte-rendu la forme du profil de vitesse Ãă diffÃľrents instants du cycle, dans les deux régimes asymptotiques des grands et petits Ω. Commentez physiquement les rÃľsultats.

5. D'après vous que représente physiquement le paramètre Ω ?

2 Calcul numérique

On propose de résoudre numériquement cette équation de diffusion 1D instationnaire forcée. Ceci permettra d'une part de comparer l'approximation numÃľrique avec la solution thÃľorique en rÃľgime Ãľtabli, et d'autre part d'observer le rÃľgime transitoire prÃľcÃľdent la convergence vers ce rÃľgime Ãľtabli.

La solution numérique est calculée en utilisant des méthodes aux différences finies.

La discrÃľtisation spatiale est effectuÃľe en introduisant N_y points intÃľrieurs au domaine et dÃľfinis par $y_i = (i\Delta y - h)$ avec $i = 1..N_y$ et $\Delta y = 2h/(N_y + 1)$.

La discrÃľtisation temporelle est effectuÃľe en posant $t^{(n)} = n\Delta t$ avec $n = 0, .., N_t$.

Enfin, on pose $u_i^{(n)} = u(y_i, t^{(n)})$.

Le schéma utilisé sera un Euler explicite d'ordre 1 en temps, et des différences finies centrées d'ordre 2 en espace. En utilisant ce schÃľma l'équation (1) prend la forme:

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t} = -\frac{K}{\rho}\cos(t^{(n)}) + \frac{\nu}{\Delta y^2}\left[u_{i+1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}\right] \tag{4}$$

Remarquons que les y_i décrivent les points à l'intérieur du domaine, et du fait des conditions aux limites de non-glissement imposées sur les parois on a $u(y_0, t^{(n)}) = u(y_{N_y+1}, t^{(n)}) = 0,\ \forall n$.

1. Ecrire le problème (4) sous forme matricielle, c.a.d. déterminer U, A, F tels que:
$$U^{n+1} = AU^{(n)} + Fcos(t^{n+1}). \tag{5}$$
   Ici, $U^{(n)}$ correspond au vecteur dont les composantes sont les $u_i^{(n)}$, A est correspond à la discrétisation de l'opérateur Laplacien et F représente le terme de forçage constant du point de vue spatial. Préciser les dimensions des matrices et vecteurs mis en jeu dans (5).

2. Ecrire une fonction effectuant l'intÃľgration temporelle du problÃĹme prÃľcÃľdent, en fonction des diffÃľrents paramÃĹtres physiques et numÃľriques, en partant de la condition initiale $u(x, t = 0) = 0$, et jusqu'Ãă un instant final t_f.

   Dans votre comte-rendu, vous dÃľtaillerez la stratÃľgie de programmation utilisÃľe.

3. A l'aide de cette fonction, calculez et tracez la solution numÃľrique obtenue Ãă un instant correspondant Ãă $t_f = \tau$, oÃź τ est le temps caractÃľristique dÃľterminÃľ prÃľcÃľdemment, avec les paramÃĹtres donnÃľs dans le tableau:

h	K	ν	ω	N_y
				40

   Vous dÃľterminerez vous-mÃłme une valeur de Δt Ãă utiliser pour aboutir Ãă un bon compromis entre prÃľcision et temps de calcul.

4. Qu'observe-t-on avec des valeurs de Δt trop grandes ? Expliquez.

5. Tracez sur le mÃłme graphique la solution thÃľorique $u_{th}(y, t_f)$. Commentez les diffÃľrences.

6. Tracez et comparez les solutions numÃľrique et thÃľorique correspondant Ãă l'instant $t_f = 10\tau$. Commentez.

7. Réécrire le schéma (4) de manière implicite avec un schÃľma de Cranck-Nicholson. (c'est-à-dire que la discrétisation du laplacien est exprimée au temps $n+1/2$, dÃľfini comme moyenne des valeurs aux instants n et $n + 1$). PrÃľcisez l'ordre de ce schÃľma, et le traitement choisi pour le second membre de l'Ãľquation diffÃľrentielle.

   Ecrire ce nouveau schÃľma sous forme matricielle.

8. Ecrire une nouvelle fonction effectuant l'intÃľgration numÃľrique de ce nouveau schÃľma.

9. Toujours pour les paramÃĹtres donnÃľs dans le tableau et pour $t_f = 10\tau$, tracez et imprimer la solution numÃľrique obtenue pour plusieurs valeurs de Δt. Comparez ces rÃľsultats Ãă ceux obtenus avec le schÃľma explicite, et discutez en terme de prÃľcision et de stabilitÃľ.