TP numérique: Dynamique des Fluides
Inspiré du TD: "Rythmes cardiaques"

L'objectif de ce TP est d'approximer numériquement un écoulement induit entre deux plans par un gradient de pression oscillant. Ce type de problème peut modéliser la manière dont les battements du cœur induisent un écoulement pulsé dans les vaisseaux sanguins. En effet ces battements imposent une variation périodique du gradient de pression imposé entre deux sections transverses des vaisseaux. L'objectif de cet exercice est de caractériser ce type d'écoulement en particulier dans les limites des basses fréquences (organisme au repos) et hautes fréquences (activité cardiaque intense).

Considérons un modèle d'écoulement plan entre deux plaques planes distantes de $2h$, généré par un gradient de pression sinusoïdal à pulsation ω fixée :

$$\frac{dp}{dx} = K \cos \omega t.$$

Ici K correspond à l'amplitude du gradient de pression imposé.

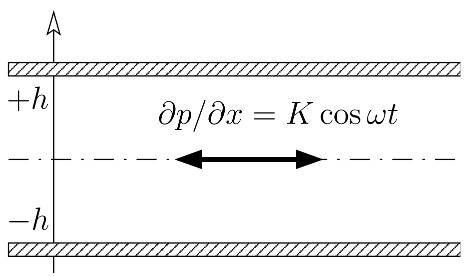

Figure 1: Écoulement pulsé en conduite.

1 Visulation de la solution analytique (en régime établi)

1. Dans l'hypothèse d'un écoulement plan parallèle, et d'une vitesse u nulle sur les parois inférieure et supérieure, montrer que la vitesse horizontale $u(y,t)$ vérifie l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{K}{\rho} \cos \omega t + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

Sous l'hypothèse d'un *régime établi*, le problème admet une solution analytique. Le forçage étant de la forme $\cos \omega t$ on peut rechercher la solution sous la forme $u(y,t) = u_c(y) \cos \omega t + u_s(y) \sin(\omega t)$. Il est cependant plus efficace d'utiliser la méthode de la variable complexe en posant $u_{th}(y,t) = Re\left\{\underline{U}(y) e^{i\omega t}\right\}$ où $\underline{U}(y) = u_c(y) - i u_s(y)$ est une fonction à valeur complexe. En remplaçant $\cos \omega t$ par $e^{i\omega t}$ dans l'équation (1), et en cherchant la solution vérifiant les conditions limites $u(\pm h, t) = 0$, on obtient finalement l'expression du profil de vitesse instationnaire suivant :

$$\underline{U}(y) = \frac{iK}{\rho\omega} \left\{ 1 - \frac{\cosh[y(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}]}{\cosh[h(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}]} \right\} \tag{2}$$

2. Retrouver les solutions (2) à partir de l'équation (1).

3. La solution complète du problème est la solution établie précédente, plus une solution particulière sans second membre, qui correspond à un régime transitoire amorti et qui dépend des conditions initiales.

   Estimez le temps caractéristique τ d'amortissement de ce transitoire.

4. En adimensionnant t et y respectivement par $1/\omega$ et h la solution se met sous la forme :

$$\underline{U}^{\star}(y^{\star}) = \frac{i\gamma}{\Omega^2}\left\{1 - \frac{\cosh[y^{\star}(1+i)\sqrt{\Omega}]}{\cosh[(1+i)\sqrt{\Omega}]}\right\} \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\omega h^2}{2\nu},\ \gamma = \frac{Kh^3}{4\rho\nu^2} \tag{3}$$

   avec * exprimant le fait que ces variables sont adimensionnées.

   On fournit un programme MATLAB `pulse.m` qui permet de visualiser cette solution théorique. A l'aide de ce programme visualiser les profils de vitesse pour différentes valeurs de Ω prises dans l'intervalle $10^{-3} \leq \Omega < 10^{3}$.

   Représenter schématiquement sur votre compte-rendu la forme du profil de vitesse à différents instants du cycle, dans les deux régimes asymptotiques des grands et petits Ω. Commentez physiquement les résultats.

5. D'après vous que représente physiquement le paramètre Ω ?

2 Calcul numérique

On propose de résoudre numériquement cette équation de diffusion 1D instationnaire forcée. Ceci permettra d'une part de comparer l'approximation numérique avec la solution théorique en régime établi, et d'autre part d'observer le régime transitoire précédent la convergence vers ce régime établi.

La solution numérique est calculée en utilisant des méthodes aux différences finies.

La discrétisation spatiale est effectuée en introduisant N_y points intérieurs au domaine et définis par $y_i = (i\Delta y - h)$ avec $i = 1..N_y$ et $\Delta y = 2h/(N_y + 1)$.

La discrétisation temporelle est effectuée en posant $t^{(n)} = n\Delta t$ avec $n = 0, .., N_t$.

Enfin, on pose $u_i^{(n)} = u(y_i, t^{(n)})$.

Le schéma utilisé sera un Euler explicite d'ordre 1 en temps, et des différences finies centrées d'ordre 2 en espace. En utilisant ce schéma l'équation (1) prend la forme:

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t} = -\frac{K}{\rho}\cos(\omega t^{(n)}) + \frac{\nu}{\Delta y^2}\left[u_{i+1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}\right] \tag{4}$$

Remarquons que les y_i décrivent les points à l'intérieur du domaine, et du fait des conditions aux limites de non-glissement imposées sur les parois on a $u(y_0, t^{(n)}) = u(y_{N_y+1}, t^{(n)}) = 0,\ \forall n$.

Pour la résolution numérique deux stratégies sont possibles :

- On peut construire un tableau à deux dimensions `U(i,n)` contenant toutes les valeurs $u_i^{(n)}$, et remplir les unes après les autres les colonnes du tableau correspondant aux valeurs de u aux instants successifs. L'inconvénient est de nécessiter un important stockage de mémoire, inutile si l'on ne s'intéresse qu'à l'état final.

- En notant que le schéma ne fait intervenir que la solution à deux pas de temps successifs, on peut se contenter d'utiliser seulement deux vecteurs colonnes `Ufutur` et `Upresent` contenant à chaque pas de temps les valeurs à l'instant "présent" $t^{(n)}$ et "futur" $t^{(n+1)}$ (c.a.d. $U^{present} = [u_1^{(n)}; u_2^{(n)}; ...u_{N_y}^{(n)}]$ et $U^{futur} = [u_1^{(n)}; u_2^{(n)}; ...u_{N_y}^{(n)})$.

1. Montrez qu'avec cette seconde idée le calcul de la solution à chaque itération temporelle se met sous la forme :
$$U^{futur} = A\,U^{present} + Fcos(\omega t^n). \tag{5}$$
Où A est une matrice carrée correspondant à la discrétisation de l'opérateur Laplacien et F est un vecteur colonne représentant le terme de forçage. Préciser les dimensions des matrices et vecteurs mis en jeu dans (5).

2. Ecrire un programme effectuant l'intégration temporelle du problème, en fonction des différents paramètres physiques et numériques, en partant de la condition initiale $u(x, t = 0) = 0$, et jusqu'à un instant final t_f.

   Dans votre comte-rendu, vous détaillerez la stratégie de programmation utilisée.

3. A l'aide de votre programme, calculez et tracez la solution numérique obtenue à un instant correspondant à une période du forçage (c.a.d. $t_f = 2\pi/\omega$) avec les paramètres donnés dans le tableau:

h	K/ρ	ν	ω	N_y
				100

   Vous déterminerez vous-même une valeur de Δt à utiliser pour aboutir à un bon compromis entre précision et temps de calcul.

4. Qu'observe-t-on avec des valeurs de Δt trop grandes ? Expliquez.

5. Tracez sur le même graphique la solution théorique $u_{th}(y, t_f)$. Commentez les différences.

6. Calculez maintenant à l'aide de votre programme la solution correspondant à l'instant $t_f = 10(2\pi/\omega)$ et comparez avec la solution théorique. Commentez.

7. Réécrire le schéma (4) de manière implicite avec un schéma de Cranck-Nicholson. (c'est-à-dire que la discrétisation du laplacien est exprimée au temps $n + 1/2$, défini comme moyenne des valeurs aux instants n et $n+1$). Précisez l'ordre de ce schéma, et le traitement choisi pour le second membre de l'équation différentielle.

   Ecrire ce nouveau schéma sous forme matricielle.

8. Ecrire un nouveau programme effectuant l'intégration numérique de ce nouveau schéma.

9. Toujours pour les paramètres donnés dans le tableau et pour $t_f = 10(2\pi/\omega)$, tracez et imprimer la solution numérique obtenue pour plusieurs valeurs de Δt. Comparez ces résultats à ceux obtenus avec le schéma explicite, et discutez en terme de précision, de stabilité, et de temps de calcul.

PLANNING DES SEANCES (2018)

Groupe 1 : vendredi 2 février, 13h30-16h30

Groupe 2 : vendredi 9 février, 13h30-16h30

Groupe 3 : vendredi 9 février, 16h30-19h30

Les étudiants ayant déjà validé des TPs l'année dernière devront se présenter lors de la première séance pour faire connaitre leurs intentions à l'enseignant.

CONSIGNES POUR LA REDACTION DES COMPTES-RENDUS

Le compte-rendu sera réalisé par groupes de deux personnes.

Le rapport ne doit pas excéder 4 feuilles recto-verso hors courbes. Il devra présenter le problème physique concerné, la modélisation numérique utilisée, la stratégie de programmation utilisée et les résultats obtenus. Dans la présentation on veillera a distinguer les aspects de validation numérique (précision, convergence, etc...) des résultats physiques. Le rapport devra également indiquer les éventuelles difficultés rencontrées dans la mise en place ainsi que l'état d'avancement par rapport aux objectifs du TP.

Les figures devront être numérotées, citées et commentées dans le texte. Chaque figure doit obligatoirement comporter un titre clair (ou une légende située sous la figure), et les axes doivent être gradués et identifiés. (vous pouvez utiliser les commandes matlab `title`, `xlabel`, `ylabel`).

Toute figure incomplète ne sera pas considérée dans la note.

Le programme écrit devra être fourni en annexe du rapport, ou déposé sur MOODLE comme un document séparé.

Le rapport débutera par une introduction fixant les objectifs. Vous pouvez terminer votre rapport par des remarques de synthèse.

PROCEDURE DE DEPOT DES COMPTES-RENDUS

Les comptes-rendus seront à rendre SUR MOODLE, au plus tard 2 semaines après la séance de TP (vendredi 16 février pour le groupe 3, vendredi 23 février pour les groupes 1-2).

Si le rapport a été rédigé par ordinateur, inutile de rendre une version papier.

Si le rapport a été rédigé à la main, vous devrez scanner (ou prendre en photo) le rapport pour le déposer sur moodle, et rendre également une version papier au cours suivant.

IL EST RAPPELE QUE LES TPS SONT OBLIGATOIRES.