

RAPPORT DE STAGE

Étude de stabilité de l'écoulement autour d'une capsule dans un canal

THÉO MOUYEN

LICENCE MÉCANIQUE ÉNERGÉTIQUE

Encadrants :

David LO JACONO

David FABRE

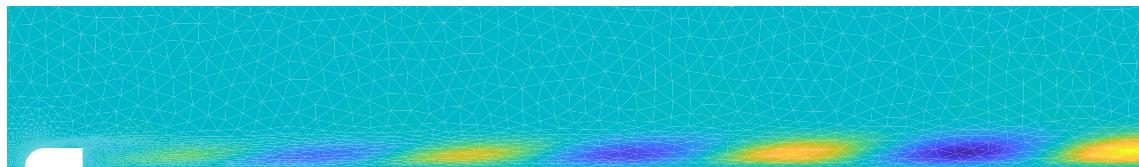


Table des matières

Introduction	2
1 Étude préliminaire	3
1.1 Présentation du problème	3
1.2 Étude théorique	4
2 Validation du modèle	8
2.1 Convergence du modèle	8
2.2 Comparaison avec la bibliographie	11
3 Étude paramétrique	14
3.1 Influence de R_p à L/D fixe	14
3.1.1 Nouveaux modes liés au phénomène de confinement	15
3.1.2 Évolution des instabilités sous l'effet du confinement	17
3.2 Influence de L/D à R_p fixe	19
Conclusion	21
Références	23
A Méthodes numériques utilisées	24
A.1 Computing a base-flow with Newton iteration	24
A.2 Linear stability	24
B Scripts utilisés	25

Introduction

L'étude des interaction entre les fluides et les solides est une des grandes thématiques de la mécanique. Elle se démarque par la diversité de ses domaines d'application. L'objectif du travail présenté est d'étudier la stabilité de l'écoulement dans le sillage d'un corps non élancé à culot droit et à symétrie axiale dans une enceinte cylindrique.

Nombreuses études ont permis de mieux comprendre la phase de transition menant à un écoulement chaotique dans le sillage d'objets à symétrie axiale. On citera notamment [Auguste, 2010] et [Tchoufag, 2013] qui ont étudié les instabilités dans le sillage de sphères et de cylindres ainsi que [Bohorquez et al., 2011], [Jiménez-González et al., 2014] et [Bury and Jardin, 2012] qui ont étudié les instabilités dans le sillage de capsules.

Le confinement de tels objets n'a cependant pas été analysé à notre connaissance, ce qui motive notre étude.

Dans une première partie, on commencera par poser les bases théoriques relatives à notre problème. On s'efforcera ensuite de valider les résultats obtenus par [Bohorquez et al., 2011] en étudiant une configuration où le milieux est considéré comme infini. Pour finir, une étude paramétrique permettra d'étudier l'effet du confinement du corps.

1 Étude préliminaire

1.1 Présentation du problème

Le système est composé d'un cylindre de longueur L et de diamètre D muni d'un nez elliptique de rapport 2 : 1 inséré dans une enceinte cylindrique comme l'indique la figure 1. L'écoulement est caractérisé par une masse volumique ρ et une viscosité cinématique μ ainsi qu'une vitesse d'écoulement initiale $\mathbf{U} = U_\infty \mathbf{e}_x$ en $x = x_{min}$ (entrée du domaine), alignée avec l'axe du corps.

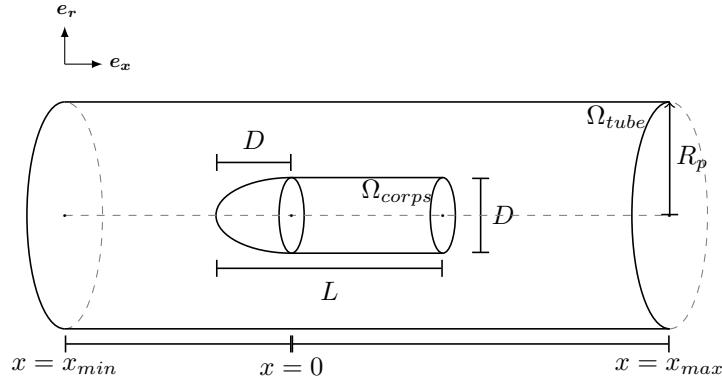


FIGURE 1 – Corps non élancé à culot droit et à symétrie axiale dans une enceinte cylindrique.

Les conditions aux limites adoptées dans un premier temps sont les suivantes :

$$\forall t \geq 0,$$

- $\forall \mathbf{X}_c \in \Omega_{corps}, \quad \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$. Cette condition se traduit par l'adhérence du fluide au parois du corps.
- $\forall \mathbf{X} = \mathbf{X}_e, \quad \mathbf{U}(\mathbf{X}_e, t) = \mathbf{U}_\infty, \quad \text{avec } \mathbf{X}_e = (r, \theta, x_{min})$.
- $\forall \mathbf{X}_{tube} \in \Omega_{tube}, \quad \mathbf{n}_{\Omega_{tube}} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{X}_{tube}, t) = 0$ au niveau des parois du domaine cylindrique. Cette condition est une condition de non pénétration du fluide.
- $\forall \mathbf{X} = \mathbf{X}_s, \quad P\mathbf{n} + \bar{\tau}\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{avec } \mathbf{X}_s = (r, \theta, x_{max})$. Cette condition traduit un retour à la stationnarité de l'écoulement loin du corps.

1.2 Étude théorique

On se place dans le cas d'un écoulement 2D et axisymétrique, \mathbf{U} s'écrit alors de la sorte :

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} v(r, x, t) \\ 0 \\ u(r, x, t) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{U} &= v(r, x, t)\mathbf{e}_r + u(r, x, t)\mathbf{e}_x\end{aligned}$$

Les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \overline{\text{grad}}(\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}(P) + \nu \Delta \mathbf{U}, \\ \text{div}(\mathbf{U}) = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

$$(2)$$

Adimensionnement de l'équation

On adimensionne l'équation 1 et on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \overline{\text{grad}}(\mathbf{U}) = -\mathbf{grad}(P) + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U}. \quad (3)$$

Linéarisation autour de petites perturbations

Soit un état de base (\mathbf{U}_0, P_0) vérifie l'équation 3. Pour étudier la stabilité de l'écoulement, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{U}}, \\ P = P_0 + \tilde{P}. \end{array} \right.$$

où $\tilde{\mathbf{U}}$ et \tilde{P} sont des perturbation infinitésimales.

On injecte maintenant \mathbf{U} et P dans l'équation 3 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \overline{\text{grad}}(\mathbf{U}) &= -\mathbf{grad}(P) + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U}, \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial(\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{U}})}{\partial t} + (\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{U}}) \cdot \overline{\text{grad}}(\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{U}}) &= -\mathbf{grad}(P_0 + \tilde{P}) + \frac{1}{Re} \Delta(\mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{U}}), \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \cdot \overline{\text{grad}}(\mathbf{U}_0) + \mathbf{U}_0 \cdot \overline{\text{grad}}(\tilde{\mathbf{U}}) + \tilde{\mathbf{U}} \cdot \overline{\text{grad}}(\mathbf{U}_0) + \tilde{\mathbf{U}} \cdot \overline{\text{grad}}(\tilde{\mathbf{U}}) &= -\mathbf{grad}(P_0) - \mathbf{grad}(\tilde{P}) + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U}_0 + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{U}}.\end{aligned}$$

Or \mathbf{U}_0 et P_0 sont solution de Navier–Stokes, et $\tilde{\mathbf{U}} \cdot \overline{\text{grad}}(\tilde{\mathbf{U}})$ est négligeable car d'ordre 2. Il reste donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \cdot \overline{\text{grad}}(\tilde{\mathbf{U}}) + \tilde{\mathbf{U}} \cdot \overline{\text{grad}}(\mathbf{U}_0) = -\mathbf{grad}(\tilde{P}) + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{U}}, \\ \text{div}(\tilde{\mathbf{U}}) = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

$$(5)$$

Forme des perturbations

On écrit la perturbation infinitésimale du champs de vitesse sous la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} &= \begin{pmatrix} \tilde{v}(r, x, t) \\ 0 \\ \tilde{u}(r, x, t) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{v}(r, x, t)\mathbf{e}_r + \tilde{u}(r, x, t)\mathbf{e}_x\end{aligned}$$

On cherche une perturbation (solution de l'équation 4) sous la forme de modes normaux (forme exponentielle). Cette forme est justifié car l'équation 4 est invariante par translation de temps et d'espace. On effectue donc une transformation de Fourier dans la direction homogène de l'écoulement \mathbf{e}_θ et on obtient :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} e^{im\theta}.$$

Par ailleurs, $\bar{\mathbf{u}}$ doit satisfaire les conditions aux bords dans les directions non homogènes \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_x . Aussi, la stabilité temporelle est déterminée en cherchant une solution de la forme :

$$\bar{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} e^{i\omega t}.$$

où $m \in \mathbb{Z}$ est le nombre d'onde azimutal.

Il vient finalement :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{u}} e^{im\theta} e^{i\omega t}, \\ &= \hat{\mathbf{u}}(r, x) e^{im\theta} e^{i\omega t}, \\ &= \tilde{v}(r, x) e^{im\theta} e^{i\omega t} \mathbf{e}_r + \hat{u}(r, x) e^{im\theta} e^{i\omega t} \mathbf{e}_x.\end{aligned}$$

On peut écrire $\sigma = i\omega = \sigma_r + i\sigma_i$ de sorte que :

$$\boxed{\tilde{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}(r, x) e^{im\theta} e^{\sigma t}} \quad (6)$$

En procédant de la même manière, la pression s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\tilde{P} = \hat{p}(r, x) e^{im\theta} e^{\sigma t}} \quad (7)$$

Ainsi, σ_r sera le taux d'amplification, σ_i la fréquence (taux d'oscillation) et $m \in \mathbb{Z}$ le nombre d'onde azimutal.

Évolution des perturbations

Le champ de base stationnaire est dit linéairement instable si la perturbation croît lorsque $t \rightarrow \infty$ c'as à dire lorsque $\sigma_r > 0$.

Le champ de base stationnaire est linéairement stable lorsque $\sigma_r < 0$.

La nature "stationnaire" ou "instationnaire" de l'instabilité est donnée par σ_i (respectivement $\sigma_i = 0$ ou $\sigma_i \neq 0$).

On va voir dans le paragraphe suivant que l'on peut se ramener à un problème de valeur propre (σ dans notre cas) pour étudier l'évolution et la nature des perturbations.

Problème aux valeurs propres

On pose $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ 0 \\ \tilde{u} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})^T$ et $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \widehat{v} \\ 0 \\ \widehat{u} \\ \widehat{p} \end{pmatrix} = (\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p})^T$.

Remarquons que le système d'équations 4 et 5 nous permet d'obtenir l'équation linéaire suivante :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}\mathbf{Q} + \mathcal{M}\mathbf{Q} = 0} \quad (8)$$

avec $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \cdot \overline{\text{grad}}(\cdot) + (\cdot) \cdot \overline{\text{grad}}(\mathbf{U}_0) - \frac{1}{Re} \Delta(\cdot) & \mathbf{grad}(\cdot) \\ \text{div}(\cdot) & 0 \end{bmatrix}$ des opérateurs.

On injecte ensuite les expressions de $\tilde{\mathbf{u}}$ et \tilde{P} dans les équations 4 et 5.

Calculons tout d'abord le tenseur gradient et le laplacien de $\tilde{\mathbf{u}}$ puis le gradient de \tilde{P} .

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}}(\tilde{\mathbf{u}}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{v}(r, x)}{\partial r} e^{im\theta} e^{\sigma t} & \frac{1}{r} i m \widehat{v}(r, x) e^{im\theta} e^{\sigma t} & \frac{\partial \widehat{v}(r, x)}{\partial x} e^{im\theta} e^{\sigma t} \\ 0 & \frac{1}{r} \widehat{v}(r, x) e^{im\theta} e^{\sigma t} & 0 \\ \frac{\partial \widehat{u}(r, x)}{\partial r} e^{im\theta} e^{\sigma t} & \frac{1}{r} i m \widehat{u}(r, x) e^{im\theta} e^{\sigma t} & \frac{\partial \widehat{u}(r, x)}{\partial x} e^{im\theta} e^{\sigma t} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{v}(r, x)}{\partial r} & \frac{1}{r} i m \widehat{v}(r, x) & \frac{\partial \widehat{v}(r, x)}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{r} \widehat{v}(r, x) & 0 \\ \frac{\partial \widehat{u}(r, x)}{\partial r} & \frac{1}{r} i m \widehat{u}(r, x) & \frac{\partial \widehat{u}(r, x)}{\partial x} \end{bmatrix} e^{im\theta} e^{\sigma t}, \\ &= \overline{\text{grad}}_m(\tilde{\mathbf{u}}) e^{im\theta+\sigma t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Le tenseur gradient $\overline{\text{grad}}_m$ est obtenu en substituant $\frac{\partial}{\partial \theta}$ par le préfacteur im .

De la même manière, on obtient après calcul :

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \Delta_m(\tilde{\mathbf{u}}) e^{im\theta+\sigma t}. \quad (10)$$

Le Laplacien Δ_m est obtenu en substituant $\frac{\partial}{\partial \theta}$ par le préfacteur im .

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(\tilde{P}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{p}(r, x)}{\partial r} e^{i(m\theta-\omega t)} \\ \frac{1}{r} i m \widehat{p}(r, x) e^{i(m\theta-\omega t)} \\ \frac{\partial \widehat{p}(r, x)}{\partial x} e^{i(m\theta-\omega t)} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{p}(r, x)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} i m \widehat{p}(r, x) \\ \frac{\partial \widehat{p}(r, x)}{\partial x} \end{pmatrix} e^{im\theta+\sigma t}, \\ &= \mathbf{grad}_m(\widehat{P}) e^{im\theta+\sigma t}. \end{aligned} \quad (11)$$

L'équation 4 donne ainsi :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}(\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}(\mathbf{U}_0) = -\mathbf{grad}(\tilde{P}) + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}}, \\
\Leftrightarrow & \sigma \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{U}_0 \cdot (\overline{\overline{\text{grad}}}(\tilde{\mathbf{u}}) e^{im\theta+\sigma t}) + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}(\mathbf{U}_0) + \mathbf{grad}(\tilde{P}) - \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}} e^{im\theta+\sigma t} = 0, \\
\Leftrightarrow & \sigma \tilde{\mathbf{u}} e^{im\theta+\sigma t} + \mathbf{U}_0 \cdot (\overline{\overline{\text{grad}}}_m(\tilde{\mathbf{u}}) e^{im\theta+\sigma t}) + (\tilde{\mathbf{u}} e^{im\theta+\sigma t}) \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}_m(\mathbf{U}_0) \\
& + \mathbf{grad}_m(\tilde{P}) e^{im\theta+\sigma t} - \frac{1}{Re} \Delta_m(\tilde{\mathbf{u}}) e^{im\theta+\sigma t} = 0, \\
\Leftrightarrow & \sigma \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{U}_0 \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}_m(\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}_m(\mathbf{U}_0) + \mathbf{grad}_m(\tilde{P}) - \frac{1}{Re} \Delta_m(\tilde{\mathbf{u}}) = 0.
\end{aligned}$$

Le facteur σ est la valeur propre recherchée.

$$\boxed{\sigma \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{U}_0 \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}_m(\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}_m(\mathbf{U}_0) + \mathbf{grad}_m(\tilde{P}) - \frac{1}{Re} \Delta_m(\tilde{\mathbf{u}}) = 0}$$

En procédant de la même manière, l'équation 5 donne :

$$\boxed{\text{div}_m(\tilde{\mathbf{u}}) = 0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{U}_0 \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}_m(\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}_m(\mathbf{U}_0) + \mathbf{grad}_m(\tilde{P}) - \frac{1}{Re} \Delta_m(\tilde{\mathbf{u}}) = 0, \\ \text{div}_m(\tilde{\mathbf{u}}) = 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

(13)

Le système d'équation 12 et 13 prend alors la forme d'un problème au valeurs propres généralisé :

$$\boxed{\sigma \mathcal{L}\mathbf{q} + \mathcal{M}_m \mathbf{q} = 0} \quad (14)$$

avec $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{M}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}_m() + () \cdot \overline{\overline{\text{grad}}}_m(\mathbf{U}_0) - \frac{1}{Re} \Delta_m() & \mathbf{grad}_m() \\ \text{div}_m() & 0 \end{bmatrix}$ des opérateurs.

On a vu que l'étude de la stabilité de l'écoulement se résume à la recherche de valeurs propres et que le signe des parties réelles et imaginaires de celles-ci nous renseigne sur la nature des instabilités. Le programme utilisé par la suite permet d'obtenir des spectres de valeurs propres pour différents types d'écoulements (à différents nombres de Reynolds, géométries et conditions limites). On étudiera également les instabilités en visualisant les profils de vitesse ainsi que les isolignes de vorticité et de pression.

2 Validation du modèle

2.1 Convergence du modèle

Il est important dans un premier temps de vérifier la convergence du modèle numérique. On fixe les paramètres géométriques du problème, $R_p = 10$ et $L/D = 6$ par exemple, et on prend arbitrairement les paramètres $H_{max} = 0.5$, $n = 3$ et $[x_{min}, x_{max}] = [-15, 30]$.

- H_{max} est la taille maximale des mailles. Si ce paramètre est trop élevé, le maillage devient aberrant par certains endroits et les mailles ont une taille disproportionnée qui ne permet pas au modèle d'étudier correctement l'écoulement.
- n est la densité du maillage. Un nombre de maille important permet une bonne étude de l'écoulement mais augmente considérablement le temps de calcul. Un compromis doit donc être fait. Sachant par ailleurs que l'on dispose d'outils qui permettent d'adapter le maillage, la densité de maillage initiale peut être fixée de façon à optimiser le temps de calcul. Le programme SF Adapt permet ainsi de raffiner localement sur la base d'une solution, en fonction du nombre de Reynolds et de H_{max} entre autres.
- $[x_{min}, x_{max}]$ est la taille du domaine. Celui ci doit être assez grand de sorte que l'on puisse prendre en compte les instabilités dans leur ensemble.

Les premiers tests de convergences ont montré une variation importante pour la valeur propre d'un mode instationnaire, lorsque le nombre d'adaptation de maillage augmente (figure 2). Le modèle numérique diverge et ne permet pas d'étudier l'écoulement avec précision.

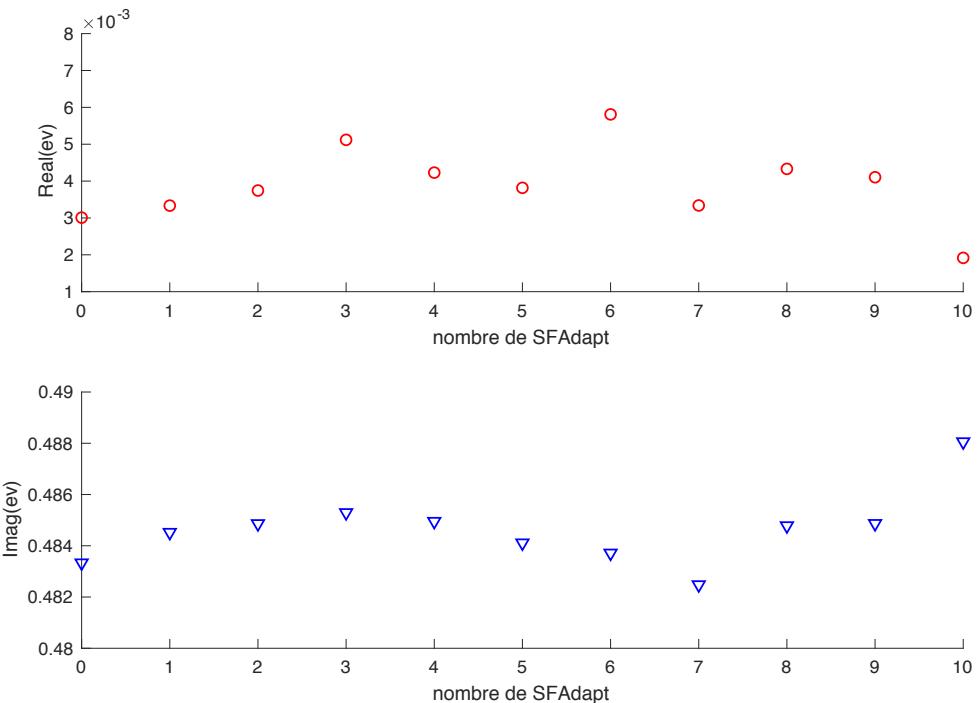


FIGURE 2 – Évolution de la valeur propre d'un mode instationnaire en fonction du nombre d'adaptation de maillage effectuée.

Après investigation, plusieurs modifications ont été faites. La disposition du maillage initial a du être modifiée pour être mieux adaptée à une valeur aussi élevée de R_p . Aussi, $x_{max} = 30$ était insuffisant sachant que les instabilités perdurent à des valeurs plus élevées de x . On a donc choisi pour la suite : $H_{max} = 1$, $n = 2$ et $[x_{min}, x_{max}] = [-15, 60]$.

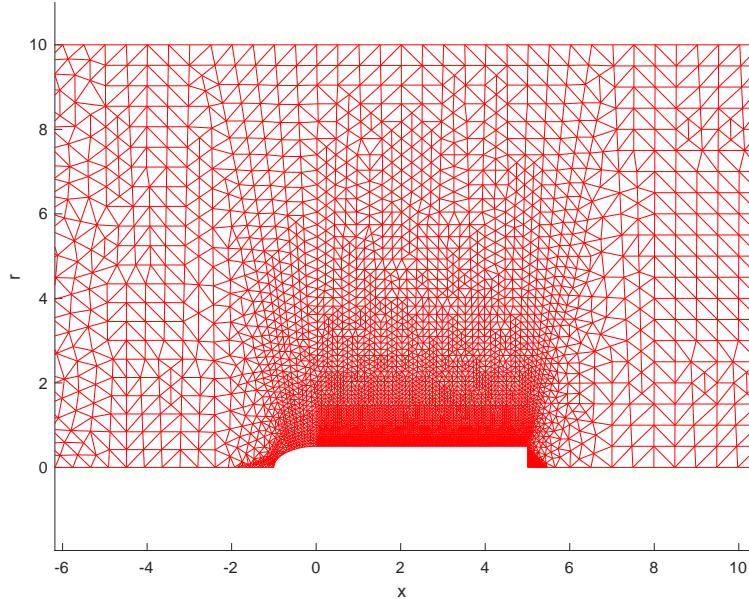


FIGURE 3 – Détail du maillage autours du corps. Le maillage initial montre une concentration de mailles aux parois du corps ainsi qu'une densité moindre mais correcte loin de celui-ci. Cette approche est particulièrement adaptée pour un domaine considéré infini avec des valeurs élevées de R_p .

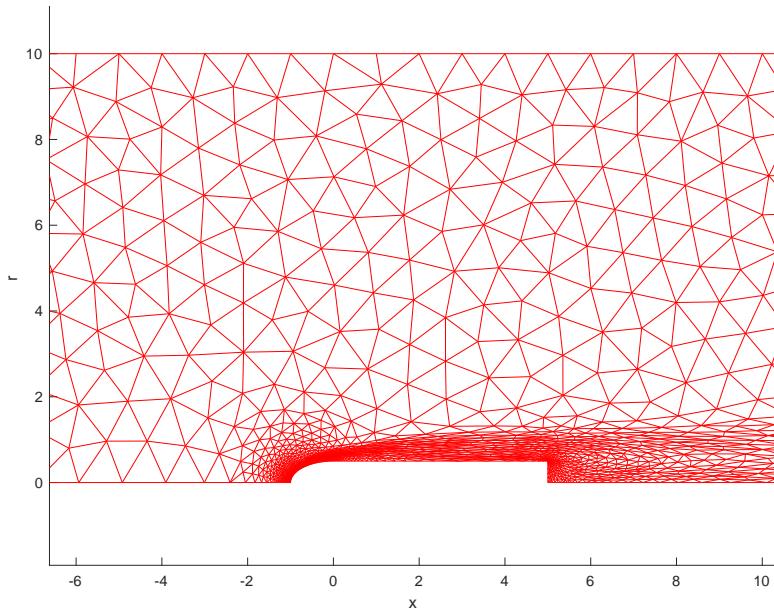


FIGURE 4 – Détail du maillage autours du corps à $Re=200$ après utilisation de SF Adapt.

Avec les paramètres utilisés, le maillage initial et le maillage après adaptation sont cohérents comme le montrent les figures 3 et 4. Ainsi, les valeurs propres et le nombre de points du maillage convergent à partir de la première adaptation de maillage (figure 5 et 6). L'erreur est de l'ordre de 0.5 % ce qui est tout à fait satisfaisant pour notre étude.

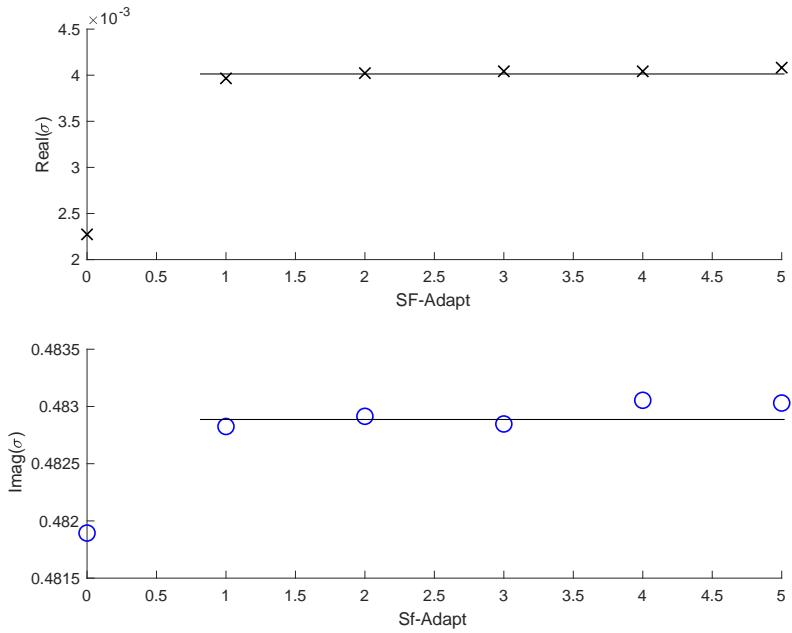


FIGURE 5 – Évolution de la partie réelle et imaginaire des valeurs propres pour un mode instationnaire en fonction du nombre d'adaptation de maillage. La partie réelle des valeurs propres est en noir et la partie imaginaire est en bleu. Les valeurs propres $\sigma = \text{Real}(\sigma) + i\text{Imag}(\sigma)$ calculées après chaque adaptation de maillage sont regroupées dans le vecteur *evtab*.

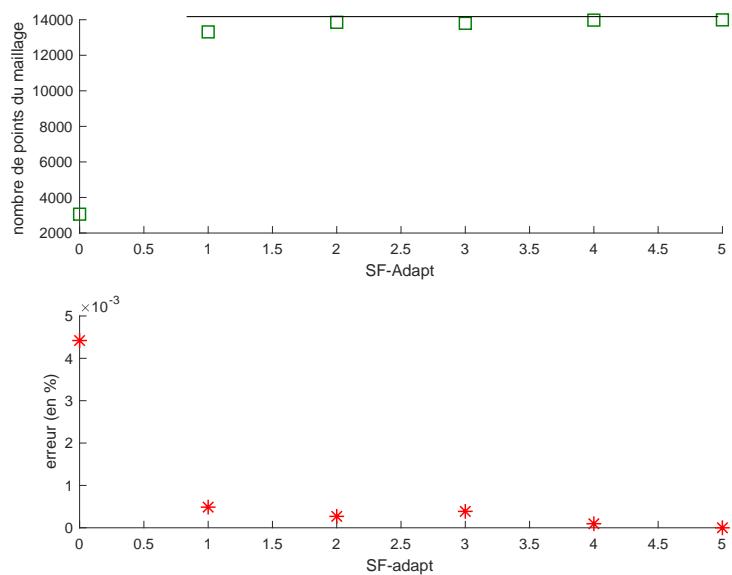


FIGURE 6 – En haut, le nombre de points du maillage en fonction du nombre d'adaptation effectuée. En bas, l'erreur en pourcentage calculée comme suit : $\frac{|evtab - evtab(end)|}{|evtab(end)|}$ où *evtab* est un vecteur contenant plusieurs valeurs propres pour un même mode.

2.2 Comparaison avec la bibliographie

Après s'être intéressé à la convergence de notre modèle numérique dans la section 2.1, nous allons comparer les résultats que l'on peut obtenir avec ceux fournis par la littérature en particulier [Bohorquez et al., 2011].

On adopte une configuration où le domaine est considéré comme infini ($R_p = 10$) et on utilise les conditions limites explicitées dans la section 1.1.

Deux modes distincts apparaissent à mesure que le nombre de Reynolds augmente (figure 7).

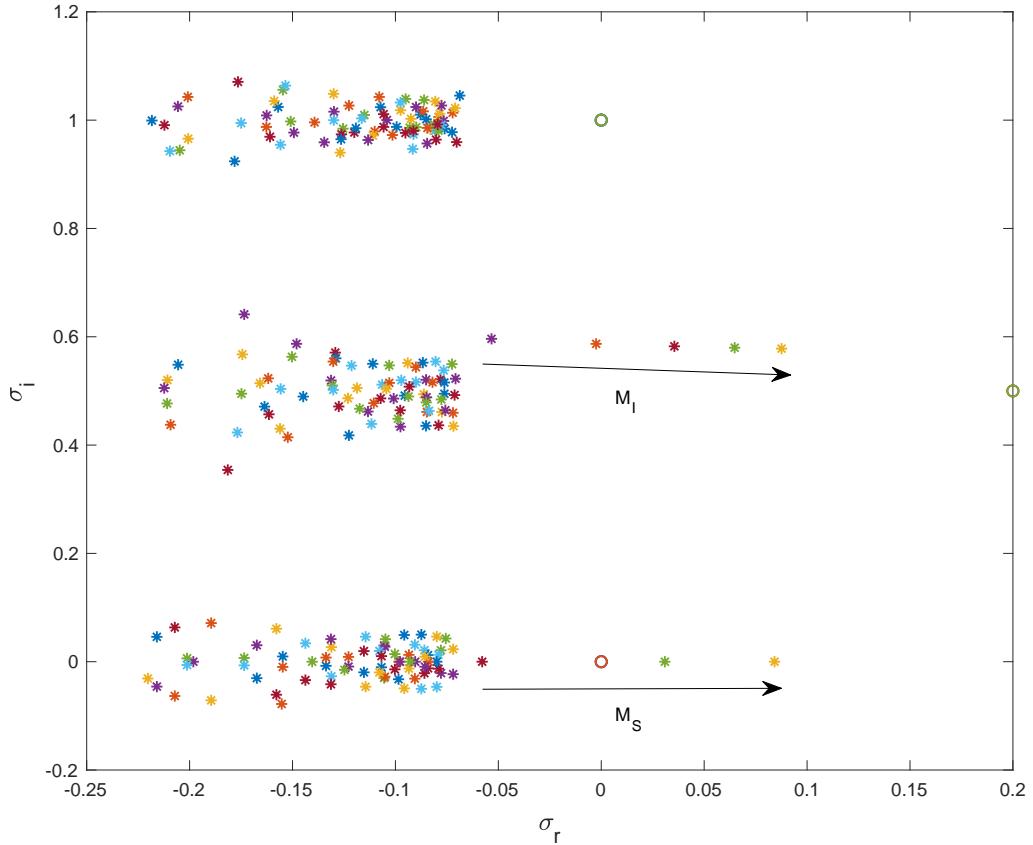


FIGURE 7 – Évolution des valeurs propres des modes "stationnaire" et "instationnaire" (M_S et M_I) pour des nombres de Reynolds allant de 200 à 900.

Le mode stationnaire est caractérisé par des tourbillons longitudinaux dans le sillage du corps tandis que le mode instationnaire correspond à des lâchers tourbillonnaires alternés. La figure 8 montre les profils de vitesse de M_S et M_I . Plus de détails concernant ces instabilités seront donnés dans la section 3.

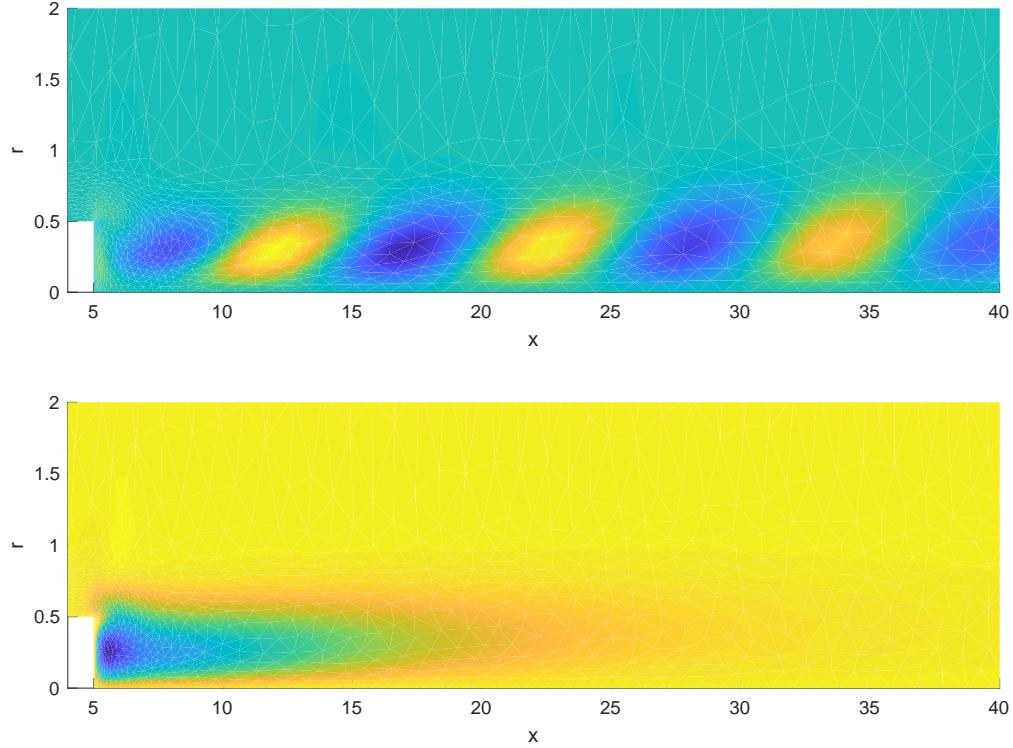


FIGURE 8 – En haut le profil de vitesse du mode instationnaire M_I et en bas celui du mode stationnaire M_S .

On calcule maintenant les nombres de Reynolds critiques à partir desquels les modes stationnaires et instationnaires deviennent instables ($\sigma_r > 0$) et ce pour différents rapports de L/D . Ces nombres sont respectivement notés Re_{CS} et Re_{CI} .

La figure 9 décrit l'évolution de Re_{CS} et Re_{CI} en fonction du rapport d'aspect L/D . Le passage du mode instationnaire à l'état instable semble être retardé lorsque le rapport d'aspect augmente. Aussi, le passage du mode stationnaire à l'état instable suit la même évolution à des nombres de Reynolds cependant plus faibles.

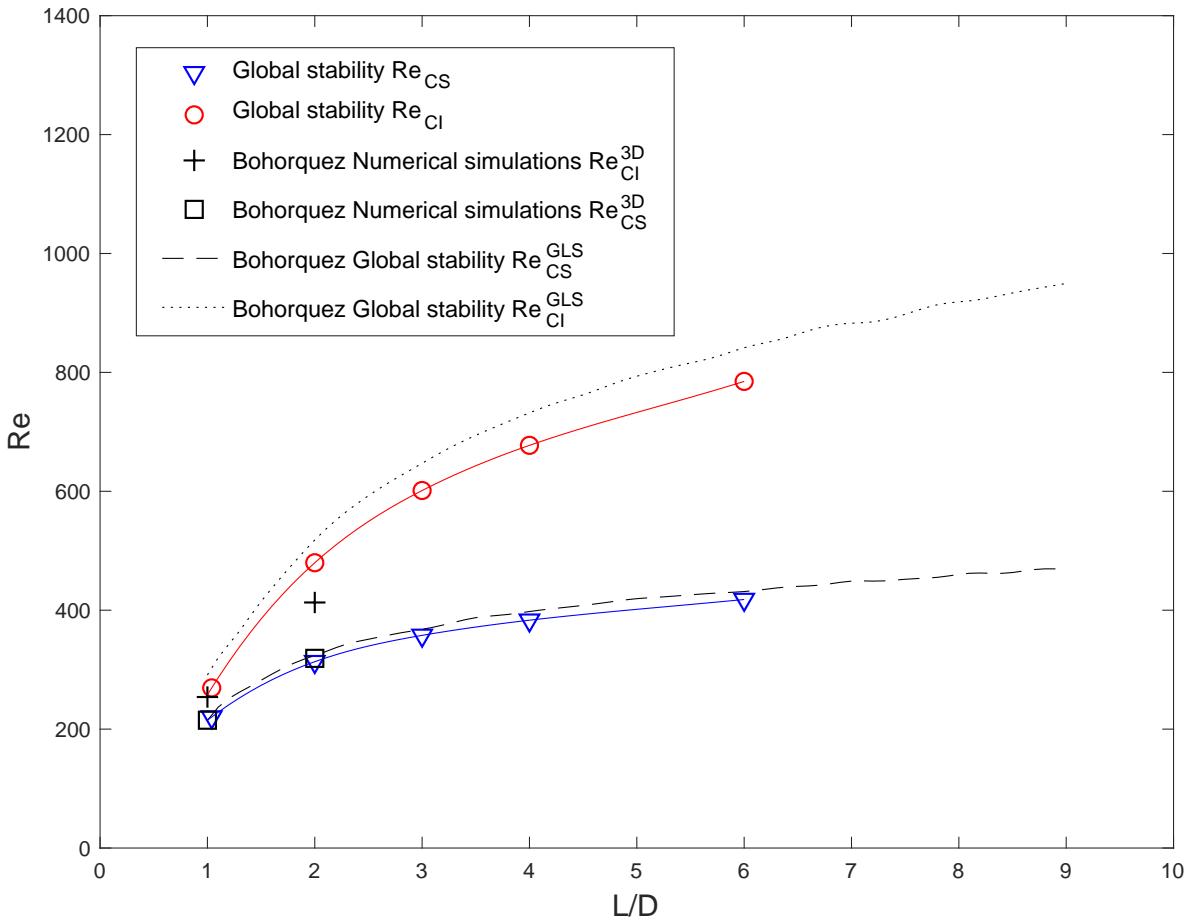


FIGURE 9 – Comparaison des résultats de simulation numérique avec ceux de [Bohorquez et al., 2011]. En rouge les nombres de Reynolds critiques du mode instationnaire et en bleu ceux du mode stationnaire.

Ces résultats correspondent qualitativement à ceux de [Bohorquez et al., 2011], les courbes suivant la même dynamique. On observe cependant un écart expliqué par la différence de résolution numérique (2D). L'équipe de [Bohorquez et al., 2011] prend en compte l'écoulement du fluide autour du seul corps cylindrique comme indiqué ci dessous.

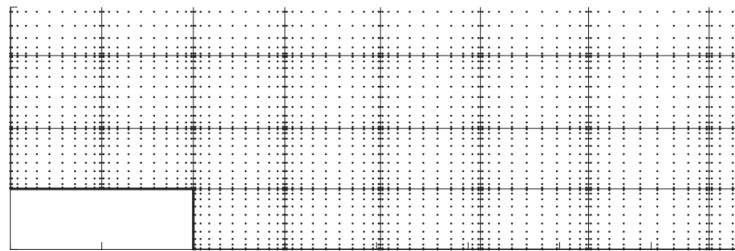


FIGURE 10 – Domaine et maillage utilisé par [Bohorquez et al., 2011].

3 Étude paramétrique

Notre modèle numérique converge et semble cohérent comparé aux résultats de [Bohorquez et al., 2011]. On va maintenant explorer différentes configurations . On étudiera en particulier l'influence de la distance du corps à la paroi du domaine, l'influence du rapport d'aspect ainsi celle de la géométrie du nez du corps.

3.1 Influence de R_p à L/D fixe

On fixe $L/D = 6$ et on rapproche progressivement les parois de l'enceinte cylindrique en diminuant R_p . On se limitera également à une étude où $Re \leq 1200$. Le maillage a été modifié pour certaines valeurs de R_p , lorsque le confinement à un effet prépondérant, comme le montrent les figures 11 et 12.

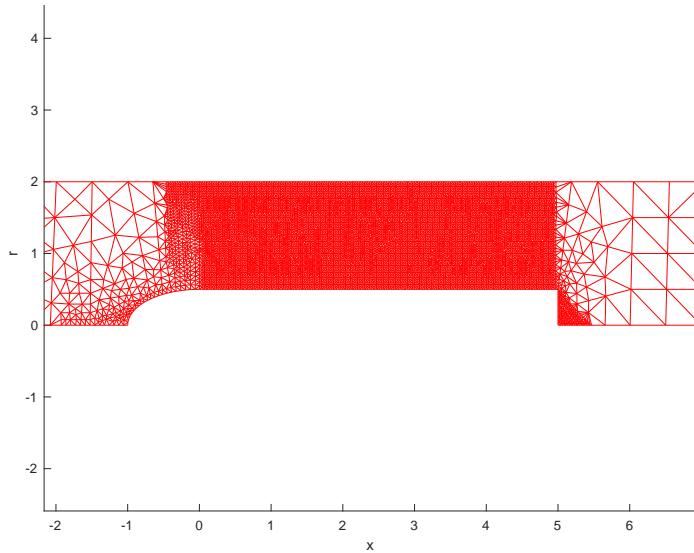


FIGURE 11 – Détail du maillage autours du corps. Le maillage initial montre une concentration de mailles entre les parois du corps et celles du tube. Cette approche est particulièrement adaptée pour étudier le phénomène de confinement.

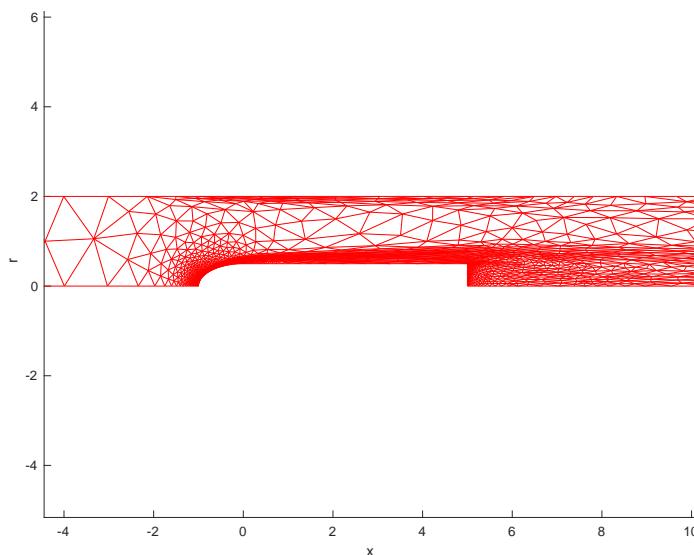


FIGURE 12 – Détail du maillage autours du corps à $Re=200$ après utilisation de SF Adapt.

3.1.1 Nouveaux modes liés au phénomène de confinement

Un deuxième couple de modes (stationnaire et instationnaire) apparaît à partir de $R_p = 2$ (figure 13) et un troisième couple (deux modes instationnaires) à partir de $R_p = 1.25$ (figure 14).

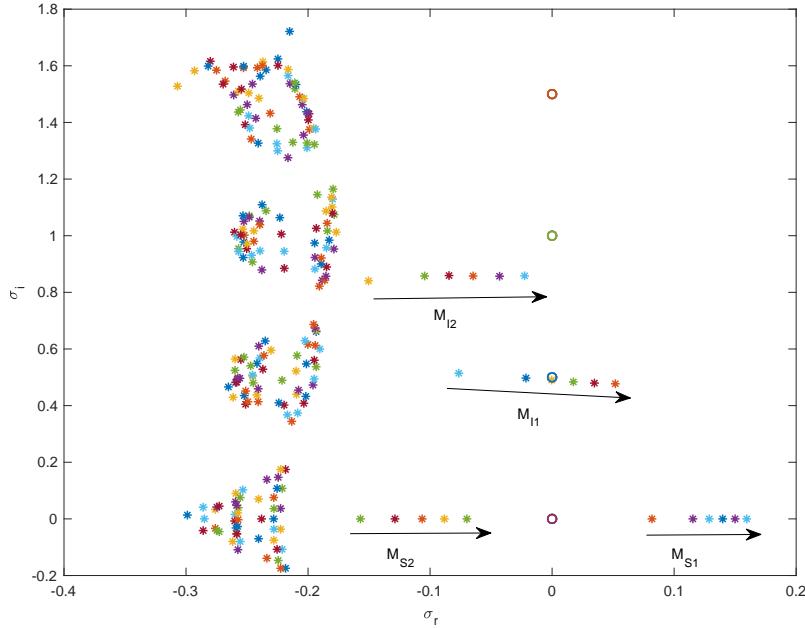


FIGURE 13 – Spectre des valeurs propres pour des Reynolds allant de 500 à 800 et pour $R_p = 2$. Un nouveau couple de valeurs propres apparaît (M_{S2} et M_{I2}).

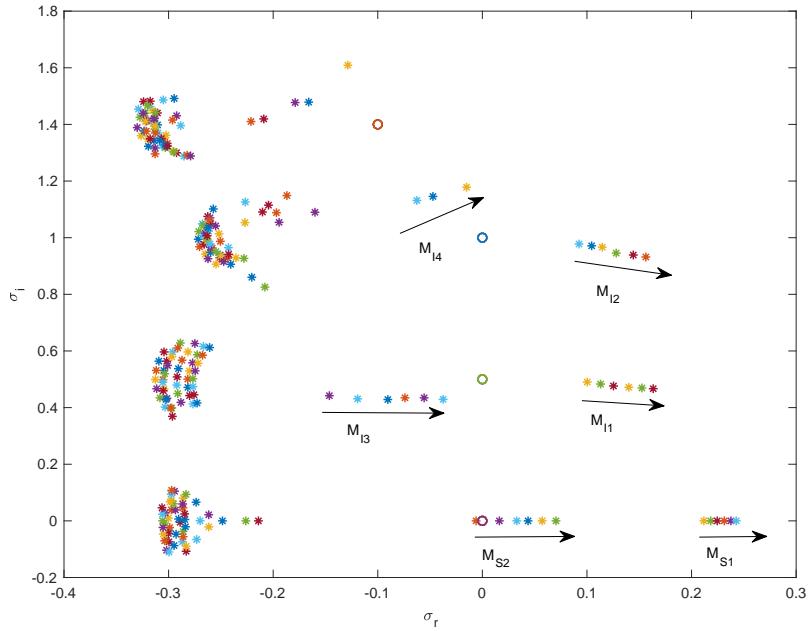


FIGURE 14 – Spectre des valeurs propres pour des Reynolds allant de 750 à 1000 et pour $R_p = 1.25$. Un nouveau couple de valeurs propres apparaît (M_{I3} et M_{I4}). L'évolution d'une autre valeur propre isolée est visible ($\sigma = -0.2 + i1.5$) mais elle n'est pas prise en compte dans cette première étude qui se limite à des Reynolds (critiques) inférieurs à 1000.

L'apparition de ces nouveaux modes est propre au phénomène de confinement et à mesure que R_p diminue, suivre l'évolution de ces modes devient de plus en plus difficile (en particulier M_{I3} et M_{I4}). La figure 15 décrit ainsi l'évolution des nombres de Reynolds critiques en fonction du confinement pour les modes trouvés.

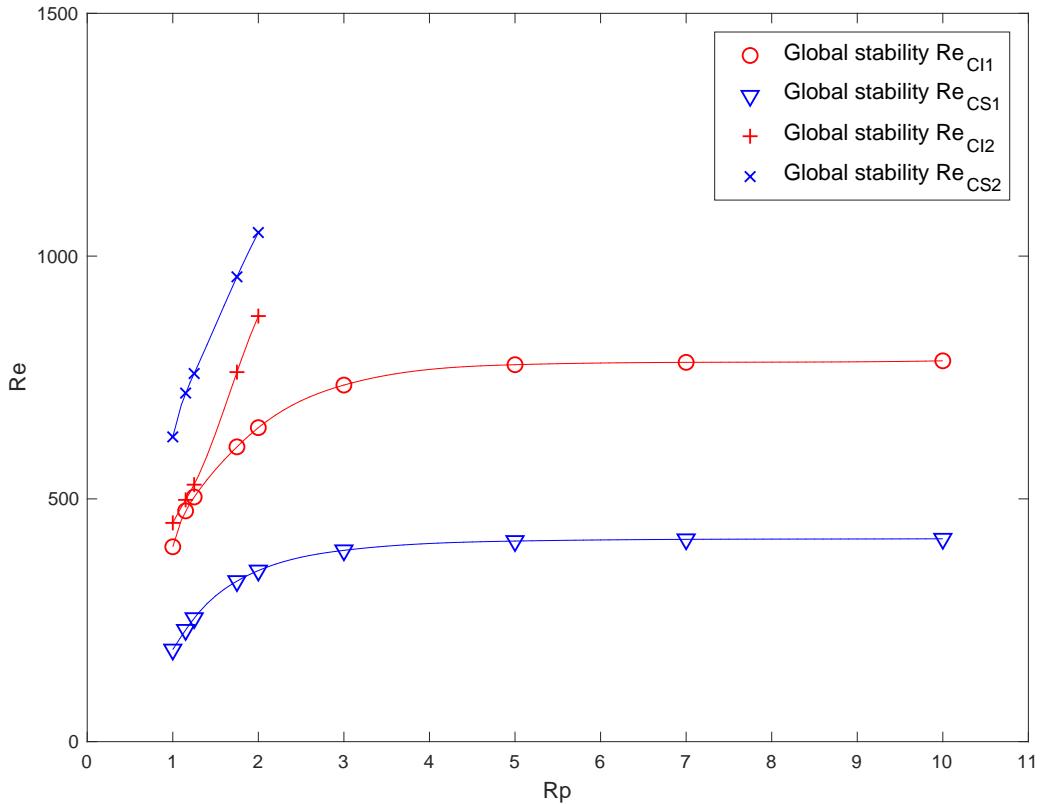


FIGURE 15 – Évolution des nombres de Reynolds critiques en fonction du confinement. Les Reynolds critiques des modes stationnaires sont représentés en bleu tandis que ceux des modes instationnaires sont représentés en rouge.

Pour le premier couple de modes, l'augmentation du nombre de Reynolds entraîne le passage à l'état instable de M_{S1} puis de M_{I1} . En ce qui concerne le deuxième couple, cette dynamique est inversée. Le mode instationnaire M_{I2} est le premier à devenir instable, suivi par le mode stationnaire M_{S2} .

3.1.2 Évolution des instabilités sous l'effet du confinement

Les fréquences des deux modes instationnaires suivent la même évolution, on remarque une augmentation exponentielle de celles-ci lorsque R_p diminue comme le montre la figure 16.

Le deuxième mode instationnaire M_{I2} a une fréquence en moyenne 2.1 fois plus élevée que M_{I1} . Les lâchers tourbillonnaires de M_{I2} sont donc deux fois plus rapides que ceux de M_{I1} comme l'illustre la figure 20.

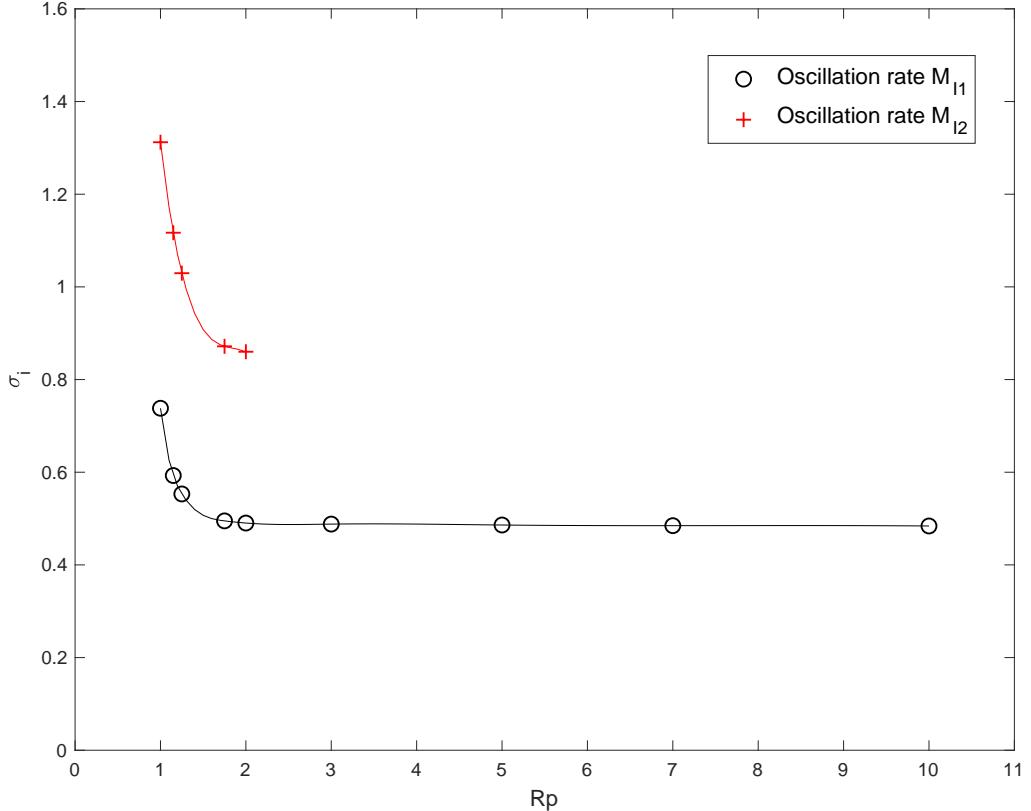


FIGURE 16 – Évolution de la fréquence (σ_i) en fonction du confinement. La fréquence de M_{I2} (en rouge) est en moyenne deux fois plus élevée que celle de M_{I1} (en noir). Le confinement augmente grandement les fréquences des modes qui évoluent de façon exponentielle à faibles R_p .

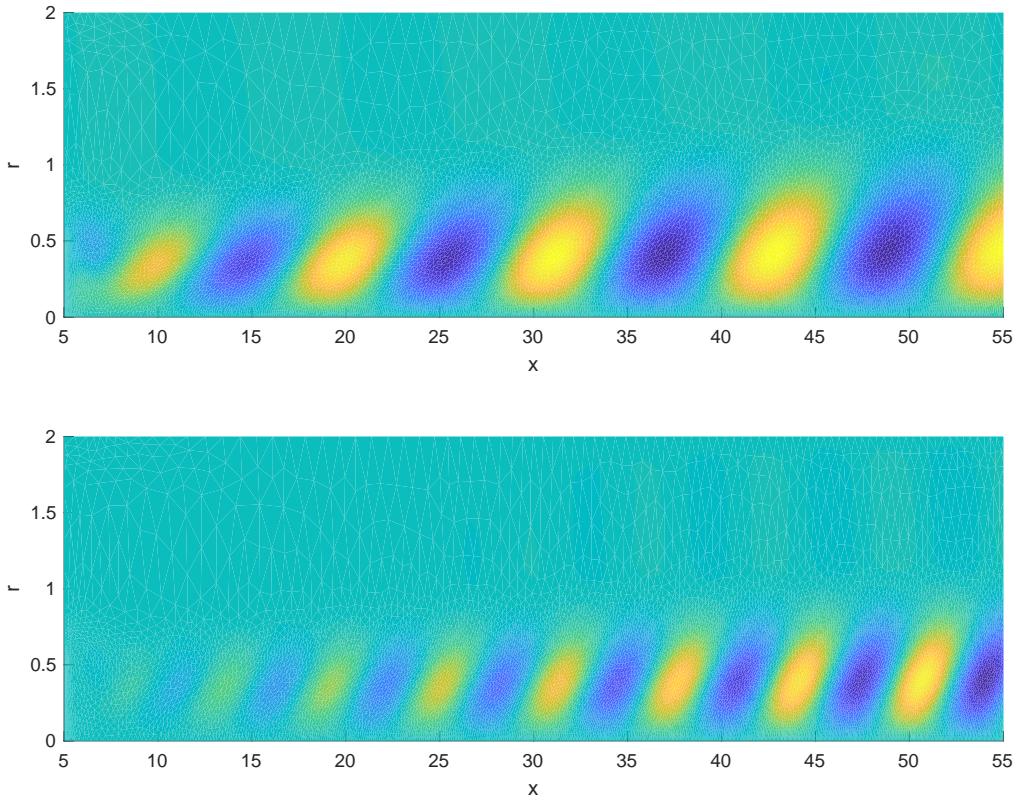


FIGURE 17 – Profil de vitesse de M_{I1} (en haut) et de M_{I2} (en bas) pour $R_p = 2$, $L/D = 6$ et au nombre de Reynold critique. On observe deux fois plus de poches tourbillonnaires pour le mode M_{I2} .

Il serait intéressant de réitérer les simulations précédentes avec un corps plus court, $L/D = 2$ par exemple. On pourrait ainsi comparer l'effet du confinement et l'évolution des instabilités avec le cas $L/D = 6$ étudié précédemment.

3.2 Influence de L/D à R_p fixe

On fixe $R_p = 2$ et on fait varier le rapport d'aspect L/D . On se limitera à une étude où $Re \leq 1200$.

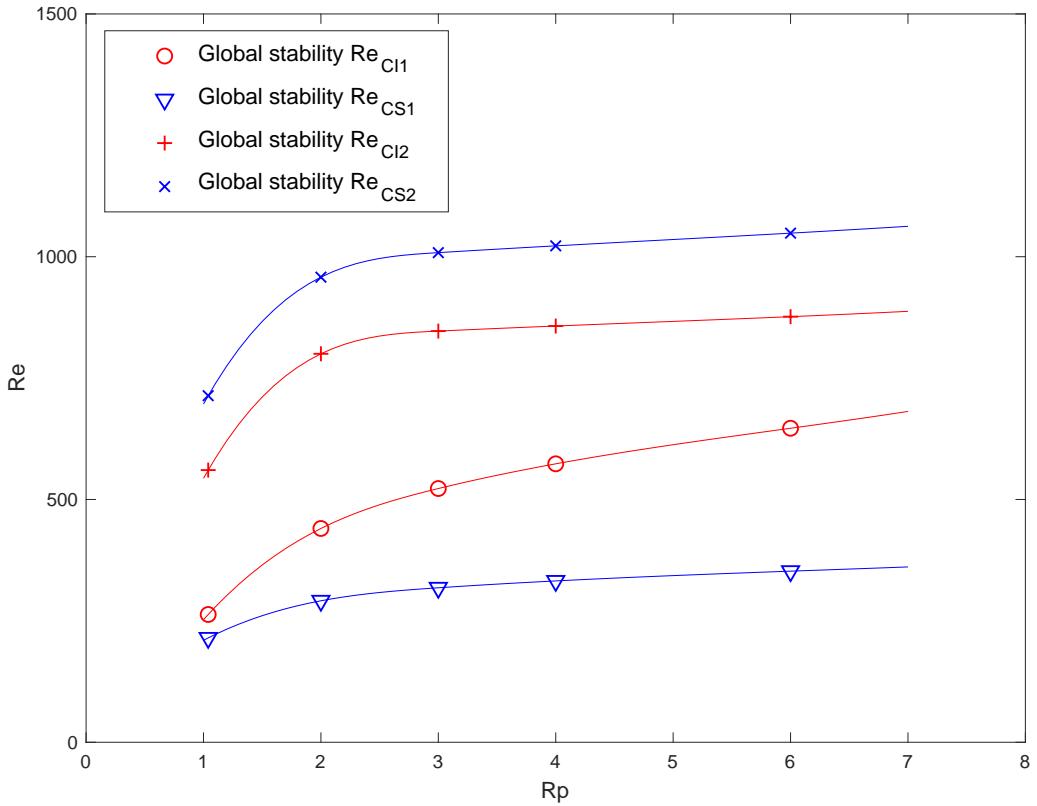


FIGURE 18 – Évolution des nombres de Reynolds critiques en fonction du rapport d'aspect sous confinement. Les Reynolds critiques des modes stationnaires sont représentés en bleu tandis que ceux des modes instationnaires sont représentés en rouge.

Le couple de modes apparus avec le confinement $R_p = 2$ (figure 15) persistent lorsque le rapport d'aspect change comme le montre la figure 18. De nouveau, $Re_{CI2} < Re_{CS2}$. Aussi, les fréquences des modes instationnaires augmentent lorsque L/D diminue. La fréquence de M_{I2} est en moyenne 1.7 fois plus élevée que celle de M_{I1} , comme on peut le voir figure 19, ce qui explique à nouveau les lâchers tourbillonnaires plus fréquent de M_{I2} (figure 20).

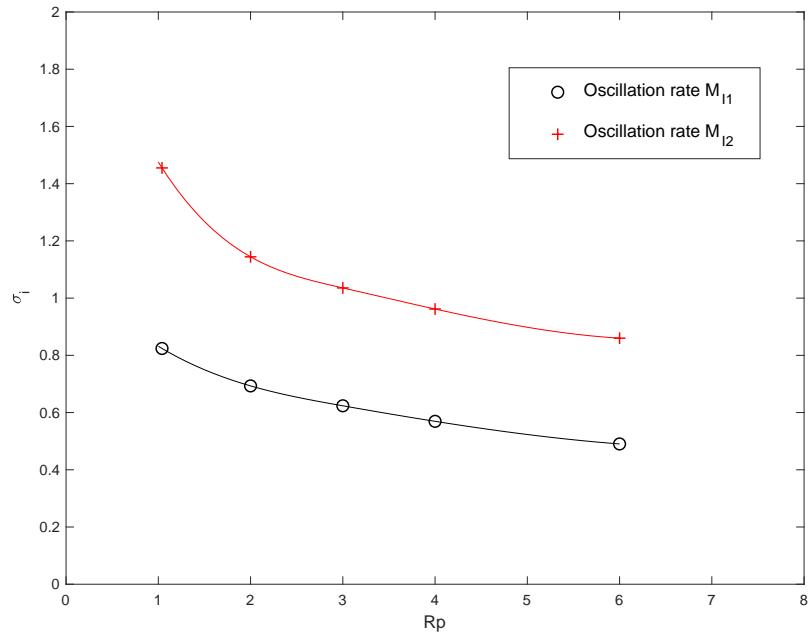


FIGURE 19 – Évolution de la fréquence (σ_i) en fonction du confinement. La fréquence de M_{I2} (en rouge) est en moyenne 1.7 fois plus élevée que celle de M_{I1} (en noir).

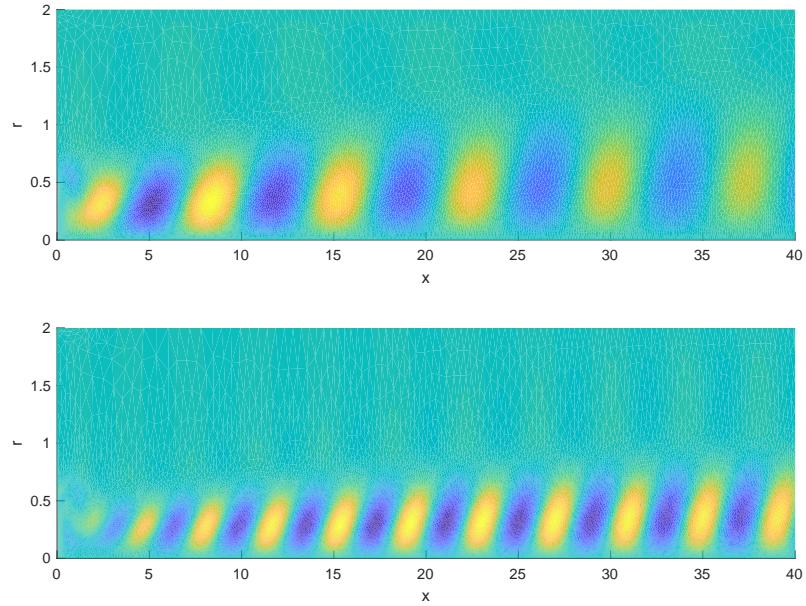


FIGURE 20 – Profil de vitesse de M_{I1} (en haut) et de M_{I2} (en bas) pour $R_p = 2$, $L/D = 1$ et au nombre de Reynolds critique.

Conclusion

Notre modèle numérique nous a permis, après vérification de son efficacité et validation par comparaison avec la littérature, de modestement commencer à explorer l'effet du confinement. Nous avons notamment mis en évidence l'évolution des nombres de Reynolds critiques de plusieurs modes en fonction de R_p à L/D fixé et en fonction de L/D à R_p fixé.

De nombreux points restent à éclaircir :

- Notre étude s'est limitée à des nombres de Reynolds inférieurs à 1200 ce qui n'a pas permis de prendre en compte les modes M_{I3} et M_{I4} (section 3.1.1).
- La géométrie du nez pourrait avoir un impact majeur sur la période de transition vers la turbulence dans le sillage du corps.
- La rotation du corps pourrait être un paramètre intéressant à prendre en compte.
- Le phénomène de "Base bleed" qui est connu pour stabiliser l'écoulement des capsules dans un milieu infini pourrait être appliqué aux capsules confinées.
- Une étude en faiblement non-linéaire et en 3D permettraient de mieux cerner le problème.

Les domaines d'application liés aux corps axisymétriques confinés sont multiples. On citera entre autres l'aéronautique et l'aérospatial, le domaine militaire ainsi que le projet *Hyperloop* lancé en 2013 par Elon Musk. Ce train futuriste permettrait le déplacement de voyageurs dans des capsules insérées dans des tubes sous basse pression et ce à 1200 km/h. Un engin qui n'est pas sans rappeler notre capsule.

Un grand merci à David & David !

Références

- [Auguste, 2010] Auguste, F. (2010). *Instabilités de sillage générées derrière un corps solide cylindrique, fixe ou mobile dans un fluide visqueux*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier.
- [Bohorquez et al., 2011] Bohorquez, P., Sanmiguel-Rojas, E., Sevilla, A., Jiménez-González, J., and Martinez-Bazan, C. (2011). Stability and dynamics of the laminar wake past a slender blunt-based axisymmetric body. *Journal of Fluid Mechanics*, 676 :110–144.
- [Bury and Jardin, 2012] Bury, Y. and Jardin, T. (2012). Transitions to chaos in the wake of an axisymmetric bluff body. *Physics letters A*, 376(45) :3219–3222.
- [Jiménez-González et al., 2014] Jiménez-González, J., Sevilla, A., Sanmiguel-Rojas, E., and Martínez-Bazán, C. (2014). Global stability analysis of the axisymmetric wake past a spinning bullet-shaped body. *Journal of Fluid Mechanics*, 748 :302–327.
- [Tchoufag, 2013] Tchoufag, J. (2013). *Étude de la trajectoire d'objets en chute ou en ascension dans un fluide visqueux : une approche de stabilité globale*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier.

A Méthodes numériques utilisées

Cette annexe est un extrait de l'article rédigé par David Fabre dans le cadre du projet collaboratif *StabFem* disponible sur GitHub.

A.1 Computing a base-flow with Newton iteration

Newton iteration We look for a steady base-flow $(\mathbf{u}_b; p_b)$ satisfying the steady Navier-Stokes equations, i.e. $\mathcal{NS}(\mathbf{u}_b, p_b) = 0$. Suppose that we have a 'guess' for the base flow $[\mathbf{u}_b^g, p_b^g]$ which almost satisfies the equations. We look for a better approximation under the form

$$[\mathbf{u}_b, p_b] = [\mathbf{u}_b^g, p_b^g] + [\delta\mathbf{u}_b, \delta p_b]. \quad (15)$$

Injecting (15) into the weak form of the Navier-Stokes equations and developing up to linear terms in terms of the perturbation lead to $\mathcal{NS}(\mathbf{u}_b^g, p_b^g) + \mathcal{L}_{\mathbf{u}_b^g}(\delta\mathbf{u}_b, \delta p_b; \mathbf{u}_b^g)$, which can also be written in weak form as :

$$+ \begin{cases} \langle \mathbf{v}, \mathcal{NS}(\mathbf{u}_b^g) \rangle + \langle q, \nabla \cdot \mathbf{u}_b^g \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathcal{L}_{\mathbf{u}_b^g}(\delta\mathbf{u}_b, \delta p_b; \mathbf{u}_b^g) \rangle + \langle q, \nabla \cdot \delta\mathbf{u}_b \rangle = 0, \end{cases} \quad (16)$$

where \mathcal{L} is the linearised Navier-Stokes operator, defined by its action on a flow field $(\mathbf{u}; p)$ as follows

$$\mathcal{L}_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}, p; \mathbf{U}) = -\mathcal{C}(\mathbf{U}, \mathbf{u}) - \nabla p + \frac{2}{Re} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}), \quad (17)$$

and \mathcal{C} is the convection operator defined by

$$\mathcal{C}(\mathbf{U}, \mathbf{u}) = (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}. \quad (18)$$

This problem can now be discretized by projecting upon a basis of Taylor-Hood $(u, v, p) \rightarrow (P2, P2, P1)$ finite elements. Noting δX the discretization of $(\delta\mathbf{u}_b; \delta p_b)$ this eventually leads to a matricial problem of the form $A \cdot \delta X = Y$. The procedure of Newton iteration is to solve iteratively this set of equations up to convergence. In our implementation, the algorithm is written in the Freefem++ solver *Newton_2D.edp* which is wrapped by the Matlab driver *Freefem_BaseFlow.m*.

A.2 Linear stability

Iterative methods for eigenvalue computations When it comes to the numerical resolution of generalized eigenvalue problems such as $AX = \lambda BX$, several methods are possible. Direct methods to compute the whole spectrum are both costly prohibitive and useless. A popular alternative is the use of iterative methods which allow us to compute a limited set of eigenvalues located in the vicinity of a "shift" value λ_{shift} . The simplest version of this method is the simple shift-invert iteration, which consists of solving iteratively the system

$$X^n = (A - \lambda_{shift} B)^{-1} B X^{n-1}.$$

It is easy to show that this iterative procedure quickly asymptotes to $X^{n+1} \approx (\lambda^{*-1})^n \hat{X}$ where \hat{X} is the eigenmode with largest λ^{*-1} (i.e. the one with eigenvalue λ closest to the shift).

When a good estimation of the eigenvalue is available, this method converges very rapidly and is very efficient, but it can only provide a single eigenvalue. If we want to compute a larger number of eigenvalues, we can revert to a generalized version of iterative methods, called Arnoldi methods. The shift-invert version of the Arnoldi method is in fact the most commonly used method of the current time and is at the basis of both the popular matlab function `eigs` and the eigenvalue solver of FreeFem (i.e. ARPACK++). Our implementation in StabFem allows to chose between single eigenvalue computation (power method) and multiple eigenvalue computation (Arnoldi). The selection is made according to the parameter "nev" transmitted to the driver.

B Scripts utilisés

Exemple d'un des scripts principaux utilisés.

C1_E2_Rp2_LD6.m

```
1 clear all
2 format shortG
3 run('/Users/theomouyen/Documents/GitHub/StabFem/SOURCES_MATLAB/SF_Start.m');
4 close all;
5
6 %% Paramètres
7
8 Rpipe = 2; % Taille du domaine
9 xmin = -10; xmax = 60;
10
11 Rbody = 0.5; % Taille du corps
12 Lel = 1; Lcyl = 5;
13 Lbody=Lcyl+Lel;
14
15 bctype = 1; % Conditions limites
16
17 Hmax = 1; % Taille maximale des mailles
18 n=2; % Densité du maillage
19
20
21 %% Calculs du champ de l'écoulement
22
23 Re_start = [10 , 30, 60, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800];
24 bf = SF_Init('meshInit_BluntBodyInTube.edp',[Rbody Lel Lcyl RpPipe xmin xmax bctype])
25 ;
26 for Rei = Re_start
27     bf=SF_BaseFlow(bf,'Re',Rei);
28     bf=SF_Adapt(bf,'Hmax',Hmax);
29     disp(['delta min : ',num2str(bf.mesh.deltamin)]);
30     disp(['delta max : ',num2str(bf.mesh.deltamax)]);
31 end
32
33 %% Obtention d'un spectre de valeurs propres
34
35 [ev1,eigenmode1] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',0,'nev',10,'plotspectrum','yes');
36 [ev2,eigenmode2] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',1i,'nev',10,'plotspectrum','yes');
37 [ev3,eigenmode3] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',0.5i,'nev',10,'plotspectrum','yes');
38 evtot=[ev1 ev2 ev3]
39
40 %% Recherche de modes qui seront les points de départ pour les méthodes itératives qui
41 %% suivent
42 guessReS=0i;
43 guessReI=0.5i;
44
45 Readjust;
```

```

48 %% COMPUTING THE UNSTEADY BRANCH (going backwards)
49
50 ReIi;
51 ReIf=ReIi-50;
52 Re_RangeI = [ReIi:-5:ReIf];EVI = [];
53 guessI = ev01;
54 bf=SF_BaseFlow(bf,'Re',ReIi);
55 [ev,em] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',guessI,'nev',1);
56 bf = SF_Adapt(bf,em,'Hmax',Hmax);
57 [ev,em] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',ev,'nev',1);
58 bf = SF_Adapt(bf,em,'Hmax',Hmax);
59 [ev,em] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',ev,'nev',1);
60
61 for Re = Re_RangeI
62 bf = SF_BaseFlow(bf,'Re',Re);
63 [ev,em] = SF_Stability(bf,'m',1,'nev',1,'shift','cont');
64 EVI = [EVI ev];
65 end
66
67
68 %% COMPUTING THE STEADY BRANCH (going backwards)
69
70 ReSi;
71 ReSf=ReSi-50;
72 Re_RangeS = [ReSi:-5:ReSf];EVS = [];
73 guessS = ev00;
74 bf=SF_BaseFlow(bf,'Re',ReSi);
75 [ev,em] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',guessS,'nev',1);
76 bf = SF_Adapt(bf,em,'Hmax',Hmax);
77 [ev,em] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',ev,'nev',1);
78 bf = SF_Adapt(bf,em,'Hmax',Hmax);
79 [ev,em] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',ev,'nev',1);
80
81 for Re = Re_RangeS
82 bf = SF_BaseFlow(bf,'Re',Re);
83 [ev,em] = SF_Stability(bf,'m',1,'nev',1,'shift','cont');
84 EVS = [EVS ev];
85 end
86
87
88 %% Calcul des nombres de Reynolds critiques
89
90 [ReCS,ReCI,ImCI]=Recritique(guessReS,guessReI,EVS,EVI,Re_RangeS,Re_RangeI,bf,Hmax);
91
92 M1= [[1 2]' [bctype bctype]' [Rpipe Rpipe]' [Lbody Lbody]' [ReCS ReCI]' [0 ImCI]';
93
94 save(['dataC' num2str(bctype) '_E2_Rp' num2str(Rpipe*100) 'LD' num2str(Lbody*100) '(1).
txt'], 'M1', '-ascii');
```

Ce script ne doit pas être compilé en entier et de manière automatique. Plusieurs paramètres (les "guess" de nombres de Reynolds et les "guess" de valeurs propres) sont à changer manuellement après exploration d'une géométrie particulière.

Readjust.m

```
1 % Point de départ pour les méthodes itératives:  
2 % Obtenir les valeurs propres des modes à des nombres de Reynolds choisis  
3  
4 % Entrée :  
5 % guessS et guessI ( coordonnées supposées des modes)  
6 % ReSi et ReIi (nombres de Reynolds légèrement supérieurs aux nombres de Reynolds  
7 % critiques recherchés.)  
8  
9 %% Modes stationnaire  
10  
11 ReSi=375;  
12  
13 bf=SF_BaseFlow(bf,'Re',ReSi);  
14 bf=SF_Adapt(bf,'Hmax',Hmax);  
15  
16 [ev00,eigenmode00] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',guessReS,'nev',1,'plotspectrum','yes'  
17 );  
18 ev00  
19 %% Modes instationnaire  
20  
21 ReIi=675;  
22  
23 bf=SF_BaseFlow(bf,'Re',ReIi);  
24 bf=SF_Adapt(bf,'Hmax',Hmax);  
25  
26 [ev01,eigenmode01] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',guessReI,'nev',1,'plotspectrum','yes'  
27 );  
ev01
```

Recritique.m

```
1 function [ReCS,ReCI,ImCI] = Recritique(guessReS,guessReI,EVS,EVI,Re_RangeS,Re_RangeI,bf,
2 Hmax)
3 % Calcule les Reynolds critiques par interpolation polynomiale puis donne les valeurs
4 % propres des modes
5
6 %Calcul de Rec
7
8 xx= real(EVS);
9 kk=find(xx(2:end).*xx(1:end-1)<0);
10 i=kk;
11 j=kk+1;
12
13 XS=[Re_RangeS(i) Re_RangeS(j)];
14 YS=[real(EVS(i)) real(EVS(j))];
15
16 pS=polyfit(XS,YS,1);
17
18 ReCS=-pS(2)/pS(1);
19
20
21
22 xx= real(EVI);
23 kk=find(xx(2:end).*xx(1:end-1)<0);
24 k=kk;
25 l=kk+1;
26
27 XI=[Re_RangeI(k) Re_RangeI(l)];
28 YI=[real(EVI(k)) real(EVI(l))];
29
30 pI=polyfit(XI,YI,1);
31
32 ReCI=-pI(2)/pI(1);
33
34
35 %Calcul des coordonnées des modes au Reynolds critiques
36
37 bf=SF_BaseFlow(bf,'Re',ReCS);
38 bf=SF_Adapt(bf,'Hmax',Hmax);
39
40 [ev00,eigenmode00] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',guessReS,'nev',1);
41 bf = SF_Adapt(bf,eigenmode00,'Hmax',Hmax);
42 [ev00,eigenmode00] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',ev00,'nev',1);
43 bf = SF_Adapt(bf,eigenmode00,'Hmax',Hmax);
44 [ev00,eigenmode00] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',ev00,'nev',1,'plotspectrum','yes');
45
46 figure;
47 plotFF(eigenmode00,'ux1');
48
49 bf=SF_BaseFlow(bf,'Re',ReCI);
50 bf=SF_Adapt(bf,'Hmax',Hmax);
51
52 [ev01,eigenmode01] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',guessReI,'nev',1);
53 bf = SF_Adapt(bf,eigenmode01,'Hmax',Hmax);
```

```
54 [ev01,eigenmode01] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',ev01,'nev',1);
55 bf = SF_Adapt(bf,eigenmode01,'Hmax',Hmax);
56 [ev01,eigenmode01] = SF_Stability(bf,'m',1,'shift',ev01,'nev',1,'plotspectrum','yes');
57
58 figure;
59 plotFF(eigenmode01,'ux1');
60
61
62 % Résultats
63
64 ReCS
65 ev00
66
67 ReCI
68 ev01
69
70 ImCI=imag(ev01);
```