11. évfolyam feladatsorának megoldásai

1. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenleteket.

a) $y^2 - 6 \cdot x! = 213$ b) $y^2 - 6 \cdot 2^x = 213$

(Molnár István, Gyula)

Megoldás:

a) Átrendezve a megoldandó egyenlet $y^2 = 6 \cdot x! + 213$

Ha $x=0$, akkor $y^2=219$, ezért $y \notin \mathbb{N}$

Ha $x=1$, akkor $y^2=219$, ezért $y \notin \mathbb{N}$

Ha $x=2$, akkor $y^2=225,\quad y=15$

Ha $x=3$, akkor $y^2=249$, ezért $y \notin \mathbb{N}$

Ha $x=4$, akkor $y^2=357$, ezért $y \notin \mathbb{N}$

Ha $x \geq 5$, akkor $10 \mid x!$, ezáltal $10 \mid (6x!)$, így $6x!+213$ szám utolsó számjegye 3 lesz,a mi nem lehet egy négyzetszám utolsó számjegye.

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása $x=2,\ y=15$.

b) Átrendezve a megoldandó egyenlet $y^2 = 6 \cdot 2^x + 213$

Ha $x=0$, akkor $y^2=219$, ezért $y \notin \mathbb{N}$

Ha $x=1$, akkor $y^2=225,\quad y=15$

A továbbiakban vizsgáljuk azt az esetet, mikor $x \geq 2$

Ekkor y^2 páratlan négyzetszám, 8-cal osztva 1 maradékot ad.

$6 \cdot 2^x$ osztható 8 – cal, 213 viszont 8 – cal osztva 5 maradékot ad.

Ezért $x \geq 2$ esetén a bal oldal nyolcas maradéka 1, a jobb oldalé 5, ezért $x \geq 2$ esetén nem lehet megoldás.

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása $x=1,\ y=15$.

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben $BAC\sphericalangle = 45^0$. Legyen M az A csúcsból húzott magasság talppontja a BC oldalon. D és E az AB és AC oldalak pontjai úgy, hogy $BMD\sphericalangle = 45^0$ és $CME\sphericalangle = 45^0$.

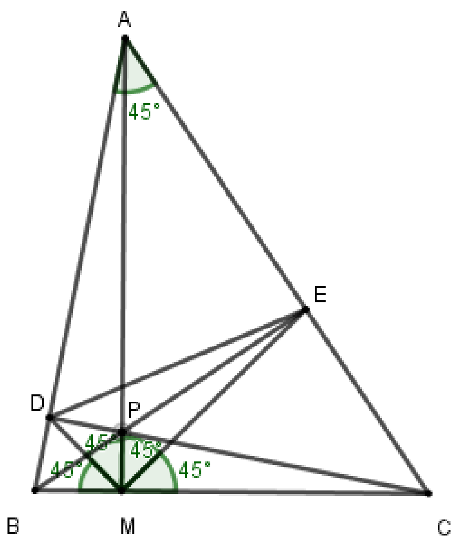
a) Igazoljuk, hogy a $BDEC$ négyszög húrnégyszög

b) Mekkora az ADE és ABC háromszögek területének aránya?

(Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy)

Megoldás:

a) Tekintsük a mellékelt ábrát:



Hasonló háromszögeket találhatunk: $ABC\Delta \sim MBD\Delta$ és $ACB\Delta \sim MCE\Delta$, mert két-két szögük egyenlő: ($ABC\sphericalangle$ és 45°, ill. $ACB\sphericalangle$ és 45°)

Ezért $\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BD}$ és $\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{CE}$. Ebből viszont következik, hogy $ABM\Delta \sim CBD\Delta$ és $ACM\Delta \sim CBE\Delta$, mert megegyeznek két oldal arányában és a közbezárt szögben. Tehát a CBD és BCE háromszögek is derékszögűek: $BDC\sphericalangle = BEC\sphericalangle = 90°$. Ezért D és E illeszkedik BC Thalesz-körére, azaz $BDEC$ húrnégyszög.

a) *Második megoldás:*

Észrevehető, hogy az $ABME$ illetve $ADMC$ négyszögek húrnégyszögek, mert két-két szemközti szögük összege $45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$.

Ezután azt használjuk fel, hogy egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha valamelyik oldala a másik két csúcsból ugyanakkora szög alatt látszik.

Emiatt $ABE\sphericalangle = AME\sphericalangle = 45°$ és $ACD\sphericalangle = AMD\sphericalangle = 45°$. Ezért a $BDEC$ négyszögben a DE oldal a másik két csúcsból 45°-os szög alatt látszik tehát a négyszög húrnégyszög.

b) $BDEC$ húrnégyszög, ezért minden külső szöge egyenlő a szemközti belső szöggel, így $ADE\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, és $AED\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. Ebből következik, hogy $ADE\Delta \sim ABC\Delta$.

ADC és AEB egyenlő szárú derékszögű háromszögek, ezért $AD = \frac{AC}{\sqrt{2}}$ és $AE = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ tehát az ADE és

ABC háromszögek hasonlóságának aránya $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Így a területek aránya $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Megjegyzés:

Mindkét bizonyításból az is következik, hogy BE és CD a háromszög másik két magassága, így az AM magasságon metszik egymást, és a P pont a háromszög magasságpontja.

3. Határozd meg a következő S összeget, amelyben az a pozitív valós szám. Milyen a értékek esetén lesz $S > 1$?

$$S = \log_2 a \cdot \log_{2^2} a + \log_{2^2} a \cdot \log_{2^3} a + \ldots + \log_{2^{2017}} a \cdot \log_{2^{2018}} a$$

(Szabó Magda, Szabadka)

Megoldás:

Ha $a=1$, akkor $S=0$.

Ha $a \neq 1$, akkor térjünk át a alapra és határozzuk meg az összeget:

$$S=\frac{1}{log_a 2 \cdot log_a 2^2}+\frac{1}{log_a 2^2 \cdot log_a 2^3}+\ldots+\frac{1}{log_a 2^{2017} \cdot log_a 2^{2018}},$$

$$S=\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot log_a^2 2}+\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot log_a^2 2}+\ldots+\frac{1}{2017 \cdot 2018 \cdot log_a^2 2},$$

$$S=\frac{1}{log_a^2 2}\left(\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2017 \cdot 2018}\right),$$

$$S=\frac{1}{log_a^2 2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right),$$

$$S=\frac{1}{log_a^2 2}\left(1-\frac{1}{2018}\right)=\frac{2017}{2018 log_a^2 2}=\frac{2017}{2018} log_2^2 a$$

Ezek után meg kell oldanunk a következő egyenlőtlenséget.

$$\frac{2017}{2018} log_2^2 a > 1,$$

$$log_2^2 a > \frac{2018}{2017},$$

$$|\ log_2 a\ | > \sqrt{\frac{2018}{2017}},$$

$$0 < a < 2^{-\sqrt{\frac{2018}{2017}}} \quad \text{vagy} \quad a > 2^{\sqrt{\frac{2018}{2017}}}.$$

4. Egy szabályos háromszög oldala n egység, ahol $n \geq 2$ egész szám. A háromszöget oldalaival párhuzamos egyenesekkel felbontjuk olyan szabályos háromszögekre, melyek oldala 1 egység. Egy hangya elindul egy tetszőlegesen kiválasztott kis háromszögből, és mindig szomszédos kis háromszögbe lép át. (Két kis háromszög szomszédos, ha van közös oldaluk.) Semelyik kis háromszögbe nem lép egynél többször. Legfeljebb hány kis háromszöget tud bejárni, beleértve azt is, amelyik kis háromszögben kezdetben állt?

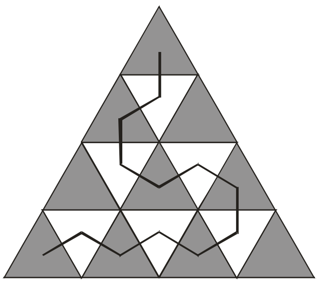
(Kis háromszögön mindig 1 egység oldalú háromszöget értünk.)

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás:

Színezzük váltakozva feketére és fehérre a háromszögeket az ábrának megfelelően. Az első sorban 1, a másodikban 2, általában a k-adik sorban k darab fekete háromszög van. Fehér háromszögből minden sorban 1-gyel kevesebb van, mint feketéből, azaz a fehér háromszögek száma összesen

$$1+2+3+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$



Mivel minden lépésben ellentétes színű háromszögbe kell lépnünk, és feketéből van több, ezért a leghosszabb utat fekete háromszögön kell kezdenünk, és minden fehéret érintve feketén kell befejeznünk. Ekkor összesen 1-gyel több háromszöget érintünk, mint a fehér mezők számának kétszerese, azaz a leghosszabb út hossza

$$2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+1=n^2-n+1$$

Ilyen hosszú út megvalósítható, pl. az ábrán látható módszert követve.

5. Adott az $f(x)=\dfrac{sin^4 x+cos^4 x}{sin^6 x+cos^6 x}$, $x\in\mathbb{R}$ függvény. Határozzuk meg

a) az $f(x)=\dfrac{10}{7}$ egyenlet megoldásait

b) az $f(x)$ függvény értékkészletét.

(Katz Sándor, Bonyhád)

Megoldás:

a1) $sin^6 x+cos^6 x$ minden x – re pozitív, mert $sin\,x$ és $cos\,x$ nem lehet egyszerre 0.

A $sin^2 x+cos^2 x=1$ azonosságot négyzetre, illetve köbre emelve a következőt kapjuk:

$sin^4 x + cos^4 x + 2 sin^2 x cos^2 x = 1,$ így $sin^4 x + cos^4 x = 1 - 2 sin^2 x cos^2 x,$

$sin^6 x + cos^6 x + 3 sin^2 x cos^2 x \left(sin^2 x + cos^2 x \right) = 1,$ így $sin^6 x + cos^6 x = 1 - 3 sin^2 x cos^2 x.$

A kapott eredményeket felhasználva kapjuk, hogy

$$f\left(x\right) = \frac{sin^4 x + cos^4 x}{sin^6 x + cos^6 x} = \frac{1 - 2 sin^2 x cos^2 x}{1 - 3 sin^2 x cos^2 x} .$$

Vezessük be a $t = sin^2 x cos^2 x$ jelölést.

Ekkor az $\frac{1-2t}{1-3t} = \frac{10}{7}$ egyenlet gyöke $t = \frac{3}{16}$, azaz

$$sin^2 x cos^2 x = \frac{3}{16}, \quad 4 sin^2 x cos^2 x = \frac{3}{4}, \quad sin^2 2x = \frac{3}{4}$$

Ennek gyökei: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$. Mindegyik gyök kielégíti az egyenletet.

a2) *Megoldás:*

Először is megállapítjuk, hogy a nevező nem lehet 0, mert a szinusz- és koszinusz függvények ugyanazon a helyen nem vehetik fel a 0 értéket. Utána, a nevezőt szorzattá alakítva a négyzetes összefüggés felhasználásával kapjuk:

$$f\left(x\right) = \frac{sin^4 x + cos^4 x}{sin^6 x + cos^6 x} = \frac{sin^4 x + cos^4 x}{sin^4 x - sin^2 x cos^2 x + cos^4 x} .$$

Bevezetve az $a = sin^2 x \left(\geq 0 \right)$ jelölést, a négyzetes összefüggés ismételt felhasználásával a megoldandó egyenlet:

$$\frac{a^2 + \left(1-a\right)^2}{a^2 + \left(1-a\right)^2 - a\left(1-a\right)} = \frac{10}{7} .$$

Ebből $16a^2 - 16a + 3 = 0$, ennek megoldásai: $a = \frac{3}{4}$ és $a = \frac{1}{4}$.

A $sin^2 x = \frac{3}{4}$ és $sin^2 x = \frac{1}{4}$ egyenletek megoldásai: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$.

Mindegyik gyök kielégíti az egyenletet.

b1) *Megoldás:*

$t = sin^2 x cos^2 x = \frac{1}{4} sin^2 2x$, ezért $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$

Tekintsük a $g\left(t\right) = \frac{1-2t}{1-3t} = \frac{\frac{2}{3} - 2t + \frac{1}{3}}{1-3t} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3-9t}$ függvényt.

Ha	t	lehetséges értékei	$0 \le t \le \frac{1}{4}$
akkor	9t	értékkészlete	$\left[0;\frac{9}{4} \right]$
	- 9t	értékkészlete	$\left[-\frac{9}{4};0 \right]$
	$3-9t$	értékkészlete	$\left[\frac{3}{4};3 \right]$
	$\frac{1}{3-9t}$	értékkészlete	$\left[\frac{1}{3};\frac{4}{3} \right]$
$g(t)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3-9t}$		értékkészlete	$[1;2]$

Ez $f(x)$ értékkészlete is.

A $g(t)$ függvény minimumát $t=0$, maximumát $t=\frac{1}{4}$ helyen veszi fel.

Az $f(x)$ függvény minimumát $x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, maximumát az $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ helyeken veszi fel.

Ugyanerre jutunk, ha belátjuk, hogy a $g(t)$ függvény a $\left[0;\frac{1}{4} \right]$ intervallumon folytonos és szigorúan monoton növekvő.)

Megjegyzés:

Az $f(x)=\dfrac{1-\frac{1}{2}sin^2 2x}{1-\frac{3}{4}sin^2 2x}$ függvény periódusa $\frac{\pi}{2}$ ezért aki differenciálással dolgozik, annak vizsgálnia kell a deriváltnak pl. a $\left[0;\frac{\pi}{2} \right[$ intervallumba eső összes zérushelyénél a függvény viselkedését.

b2) *Megoldás:*

A $g(t)=\frac{1-2t}{1-3t}$ függvény értékkészlete azon p számok halmaza, amelyekre az $\frac{1-2t}{1-3t}=p$ egyenletnek van $0 \le t \le \frac{1}{4}$ feltételnek megfelelő gyöke.

Fejezzük ki az $\frac{1-2t}{1-3t}=p$ egyenletből t –t, ekkor a következőt kapjuk:

$$t=\frac{p-1}{3p-2} \qquad \left(p=\frac{2}{3} \text{ esetén nincs megoldás} \right)$$

A $0\le\frac{p-1}{3p-2}$ egyenlőtlenség megoldása $p<\frac{2}{3}$ vagy $p\ge1$, a $\frac{p-1}{3p-2}\le\frac{1}{4}$ egyenlőtlenségé $\frac{2}{3}<p\le2$.

Mindkettő $1\le p\le2$ esetén teljesül, tehát a $g(t)$ és vele együtt $f(x)$ függvény értékkészlete az $[1;2]$ intervallum.

b3) *Megoldás:*

Az $a=sin^2 x,\ b=cos^2 x$ jelölésekkel $f(x)=\frac{sin^4 x+cos^4 x}{sin^6 x+cos^6 x}=\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$ ahol sem a nevező, sem a számláló nem lehet 0, mert a szinusz és a koszinusz függvények ugyanazon a helyen nem vehetik fel a 0 értéket. Mivel $0\le a\le1$, és $0\le b\le1$ nyilvánvaló, hogy $a^3\le a^2$ és $b^3\le b^2$, amiből $a^3+b^3\le a^2+b^2$.

Így $1\le\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$.

A négyzetes összefüggés miatt $a+b=1$. Felhasználva az $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ azonosságot, írhatjuk, hogy $\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}=\frac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{1}{1-\frac{ab}{a^2+b^2}}$.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt $\frac{ab}{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}$, ezért $\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}\le2$.

Visszahelyettesítve és összefoglalva $1\le\frac{sin^4 x+cos^4 x}{sin^6 x+cos^6 x}\le2$.

Minimumát $x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, maximumát az $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ helyeken veszi fel, és mivel $f(x)$ folytonos, ezért minden közbülső értéket is felvesz, ezért $f(x)$ érték készlete az [1; 2] intervallum.

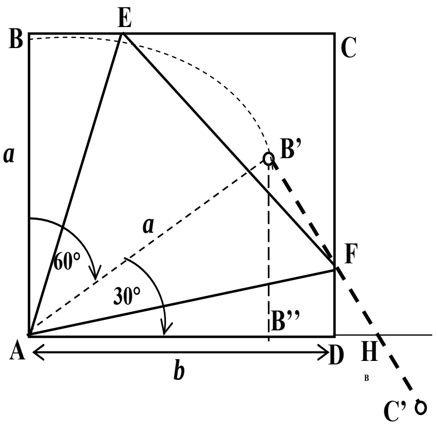
6. Az *ABCD* téglalapba írjunk *AEF* szabályos háromszöget írunk úgy, hogy az *E* pont a *BC*, az *F* pont a *CD* oldal belső pontja.

a) A téglalap $AD = b$ és $AB = a$ oldalainak milyen $\frac{b}{a}$ arányánál lehet a téglalapba a fentiek szerint szabályos háromszöget írni?

b) Bizonyítsuk be, hogy az *ABE*, *ADF* és *CEF* háromszögek egyikének a területe a két másik háromszög területének összegével egyenlő!

(Pintér Ferenc, Nagykanizsa)

Megoldás:



a) Kövessük a szerkesztés menetét:
Az *E* pontot *F*-be egy *A* körüli - 60°-os forgatás viszi át, ezért forgassuk el a *BC* nyitott szakaszt *A* körül - 60°-kal. Az így kapott *B'C'* szakasz metszi ki a *CD* oldalból az *F* pontot. *F*-et visszaforgatva kapjuk meg *E*-t.
Ezért akkor van megoldás, ha a téglalap *CD* oldalának van közös pontja a *B'H* szakasszal, vagyis az *A*D oldalának hossza *AB*" és *AH* között van: $AB'' < AD < AH \Rightarrow$

$a \cos 30° < b < a / \cos 30° \Rightarrow \quad \cos 30^o < \frac{b}{a} < \frac{1}{\cos 30^o} \quad \Rightarrow$

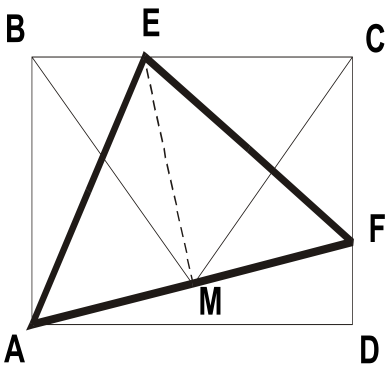
$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{b}{a} < \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

($BH = \frac{1}{2}a < \frac{\sqrt{3}}{2}a < B'C'$, ezért *C*' valóban az *AD* egyenes „alatt" van.)

(Ha valaki azt állapítja meg, hogy *F* = *D* és *E* = *B* esetekhez $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ érték tartozik, akkor azt, hogy a „közbülső" esetekhez $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{b}{a} < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ tartozik, indokolni kell.)

*b*1) *Megoldás:* Legyen $AB = a$ és $BC = b$, *M* az *AFE* szabályos háromszög *AF* oldalának felezőpontja. Először belátjuk, hogy a *BCM* háromszög szabályos. Mivel $ABE\sphericalangle = 90° = AME\sphericalangle$, ezért AMEB húrnégyszög. $MAE\sphericalangle = 60°$, ezért $EBM\sphericalangle = 60°$. (Kerületi szögek tétele miatt).

Hasonlóan látható be, hogy $ECM\sphericalangle = 60°$. Ez pedig azt jelenti, hogy az *M* pont az *AD* oldaltól $a - \frac{b\sqrt{3}}{2}$



távolságra van, így $DF = 2\left(a - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right) = 2a - b\sqrt{3}$.

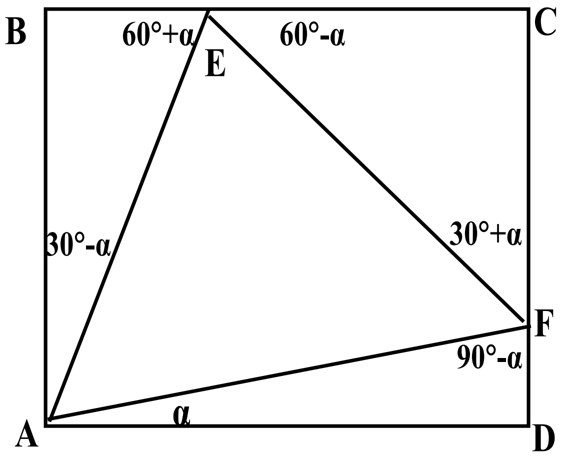
Hasonlóan látható be, hogy $BE = 2b - a\sqrt{3}$.

Következésképpen:

$$T_{ABE} = \frac{1}{2}a\left(2b - a\sqrt{3}\right) = ab - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}, \quad T_{ADF} = \frac{1}{2}b\left(2a - b\sqrt{3}\right) = ab - \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$$

$$T_{EFC} = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{3} - b\right)\left(b\sqrt{3} - a\right) = 2ab - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{b^2\sqrt{3}}{2} = T_{ABE} + T_{ADF}$$

b2) *Megoldás:*



Legyen $DAF\sphericalangle = \alpha$, ebből a derékszögű háromszögek többi szögei kiszámolhatók.

Legyen a szabályos háromszög oldala c, ekkor

$T_{ADF\Delta} = 0{,}5\ c^2 \cdot sin\alpha \cdot sin(90°-\alpha)$,

$T_{ABE\Delta} = 0{,}5\ c^2 \cdot sin(30°-\alpha) \cdot sin(60°+\alpha)$,

$T_{CEF\Delta} = 0{,}5\ c^2\ sin(30°+\alpha) \cdot sin(60°-\alpha)$.

Belátjuk, hogy $T_{ADF\Delta} + T_{ABE\Delta} = T_{CEF\Delta}$.

$$0{,}5\ c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin(90°-\alpha) + 0{,}5\ c^2 \cdot \sin(30°-\alpha) \cdot \sin(60°+\alpha) = 0{,}5\ c^2 \cdot \sin(30°+\alpha) \cdot \sin(60°-\alpha) \quad /:0{,}5\ c^2$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

A két oldal egyenlő, ezzel igazoltuk az állítást.