9. évfolyam feladatsorának megoldásai

1. Ismeretes, hogy 60 Aranyszőrű Tehén 24 nap alatt, 30 Aranyszőrű Tehén pedig 60 nap alatt legelné le a Mesebeli Rét összes füvét. A Mesebeli Réten minden nap ugyanannyi mennyiségű fű nő ki. Hány Aranyszőrű Tehén legelné le a Mesebeli Rét összes füvét 100 nap alatt? Hány nap alatt legelné le a Mesebeli Rét összes füvét 10 Aranyszőrű Tehén? (Péics Hajnalka, Szabadka)

I. Megoldás:

Jelölje x annak a fűnek mennyiségét, amelyet egy Aranyszőrű Tehén egy nap alatt lelegel, y annak a fűnek mennyiségét, amely egy nap alatt kinő a Mesebeli Réten, z pedig annak a fűnek mennyiségét, amely a kezdőpillanatban található a Réten. A feladat feltételei alapján felírható, hogy

$$24\cdot 60x = z + 24y \text{ és } 60\cdot 30x = z + 60y\,,$$

Ha a darab Aranyszőrű Tehén 100 nap alatt lelegeli a Mesebeli Rét összes füvét, akkor következik, hogy $a\cdot 100x = z + 100y = 24\cdot 50x + 1000x = 22\cdot 100x$, ahonnan $a = 22$, vagyis a Mesebeli Rét összes füvét 100 nap alatt 22 Aranyszőrű Tehén legeli le.

Az $y = 10x$ összefüggésből következik, hogy 10 Aranyszőrű Tehén soha nem tudná lelegelni a Mesebeli Rét összes füvét, mivel egy nap alatt annyi fű nő, amennyit 10 Aranyszőrű Tehén egy nap alatt lelegel.

II. Megoldás:

Ha nem nőne a fű, akkor aránypárral menne a megoldás, de hát nő.

$60\cdot 24 = 1440$ „tehén · nap”, $30\cdot 60 = 1800$ „tehén · nap”. Ebből látható, hogy 36 nap alatt 360 a növekmény. Ez lehet egy tehén 360 napi, de 10 tehén 1 napi adagja is. Ezért 10 tehén nem tudja egy nap alatt lelegelni a rétet.

A 60. naptól a 100. napig $\frac{40}{36}\cdot 360 = 400$ a növekmény, így növekménnyel együtt 2200 „tehén · nap” a lelegelendő fű. Ez 22 tehén 100 napi élelme.

2. Határozza meg az összes olyan p és q prím számpárokat, melyek kielégítik az alábbi egyenlőséget: $p^3 = 2q^2 + (2p-q)^2$. (Fedorszki Ádám, Beregszász)

Megoldás:

Ekvivalensen alakítva az egyenletet a következőt kapjuk:

$$p^3 - 4p^2 + 4pq - q^2 = 2q^2,$$
$$p(p^2 - 4p + 4q) = 3q^2$$

Innen $p \mid 3q^2$, emiatt $p = q$ vagy $p = 3$.

Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy $p = 3,\ q = 3$.

A feladat megoldás tehát: $p = 3, q = 3$.

3. Egy téglalap oldalainak mértékszámai pozitív egész számok. A kerület és a terület mértékszámának összege 2018. Mekkora a téglalap területe?

(Katz Sándor, Bonyhád)

I. Megoldás:

Legyen a téglalap két oldala *x* és *y*, ekkor felírható, hogy

$$xy + 2x + 2y = 2018,$$
$$xy + 2x + 2y + 4 = 2022,$$
$$(x+2)(y+2) = 2022.$$

Ha *x* és *y* is pozitív egész számok, akkor *x* + 2 és *y* + 2 is pozitív egész. 2022 = 2·3·337-et kell két pozitív egész szám szorzataként felírnunk. 2022-nek 8 pozitív osztója van, de mivel az egyenlet nem változik, ha a két változót felcseréljük, és csak a terület a kérdés, ezért feltehetjük, hogy $x \le y$.

x+2	1	2	3	6
y+2	2022	1011	674	337
x	- 1	0	1	4
y	2020	1009	672	335.

Ezek közül csak a két utolsó pár lehet a téglalap oldala, ekkor a terület 1·672 = 672, vagy 4·335 = 1340.

Ellenőrzés: ennél a két téglalapnál a terület és a kerület összege valóban 672 + 2(1+672) =2018, vagy 1340 +2 (4 + 335) = 2018.

II. Megoldás

Jelölje a téglalap oldalainak mértékszámait *x* és *y*.

Ekkor a terület- és kerület mértékszámai: xy és $2(x+y)$

A feladat szerint $xy + 2(x+y) = 2018$

Mivel $x + 2 \neq 0$, ezért írhatjuk hogy

$$y = \frac{2018-2x}{x+2}\ \frac{2022-2(x+2)}{x+2} = \frac{2022}{x+2} - 2.$$

Mivel y pozitív, ezért a $2(1009-x)(x+2) > 0$ azaz $(1009-x)(x+2) > 0$ egyenlőtlenség megoldásával kiderül, hogy szükségképpen $-2 < x < 1009$. Tekintve, hogy *x* pozitív egész szám, ez a lehetőség szűkül: $1 < x < 1009$ Mivel y egész szám az $(x+2)$ – vel való osztáskor a 2022 pozitív egészekből álló két tényezős szorzattá való alakításának lehetőségeit keressük: $2022 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 337$. A 337 prímszám, tovább nem bontható. Mivel $45^2 = 2025$, a 2022 két tényezős szorzattá bontásakor kisebb tényezőként elegendő a 45- nél kisebb tényezőket keresni.

Mivel az $x+2=1$ és $x+2=2$ már ki van zárva, marad

$$x+2=3,\ \text{ekkor}\ x=1,\ y=\frac{2022}{3}-2=674-2=672\ \text{és}$$

$$x+2=6\ \text{ekkor}\ x=4,\ y=\frac{2022}{6}-2=337-2=335.$$

Két téglalapot kaptunk 1 és 672 illetve 4 és 335 méretekkel. Mindkettő kielégíti a feladat követelményeit.

4. Adott tíz különböző kétjegyű szám. Mutassa meg, hogy ezen számok felhasználásával (nem feltétlenül az összessel) képezhetünk két olyan *A* és *B* diszjunkt halmazt úgy, hogy az *A* halmazbeli számok összege egyenlő a *B* halmazbeli számok összegével.

(Kekeňák Szilvia, Kassa)

Megoldás:

Jelöljük a 10 darab szám halmazát *H*-val. A *H* nem üres halmaz részhalmazainak száma $2^{10}-1=2023$

A kétjegyű számok legfeljebb 10 elemű nem üres részhalmazaiban a számok *S* összegei közül a legkisebb az S = 10 a legnagyobb az S = 90+91+92+ …+99= 945. Tehát $10 \le S \le 945$, azaz *S* legfeljebb 936 féle értéket vehet fel. Ezért a skatulyaelv alapján az 1023 nem üres részhalmaz között biztos lesz legalább két olyan (*A* és *B*) részhalmaza *H*-nak, melyekben a számok összege egyenlő lesz..

Ha *A* és *B* nem lenne diszjunkt, akkor a közös elemeket elhagyjuk mindkét halmazból, ezzel az összegek egyenlősége nem változik meg. Ezzel a feladatban szereplő állítást beláttuk.

5. Határozza meg az x, y, z valós számok összes értékét, amelyekre

$$2x^2+2y^2+z^2-2xy-2yz-2z+3=0$$

(Kovács Béla, Szatmárnémeti)

I. Megoldás:

Szorzunk 2 – vel, aztán 3 – mal és megfelelően csoportosítva teljes négyzeteket alakítunk ki:

$$4x^2+4y^2+2z^2-4xy-4yz-4z+6=0,$$
$$4x^2-4xy+y^2+3y^2-4yz+2z^2-4z+6=0,$$
$$3(2x-y)^2+9y^2-12yz+4z^2+2z^2-12z+18=0,$$
$$3(2x-y)^2+(3y-2z)^2+2(z-3)^2=0.$$

Utóbbi egyenlet akkor és csak akkor állhat fenn, ha mindhárom tag nulla, azaz

$$2x=y,\quad 3y=2z,\quad z=3.$$

Így a feladat megoldás:a: $x=1,\quad y=2,\quad z=3$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

II. Megoldás:

Tekintsük az egyenletünket z-re másodfokúnak:

$$z^2-2(y+1)z+2x^2+2y^2-2xy+3=0$$

Ahhoz, hogy legyen valós megoldás $D\geq 0$ kell legyen.

$$D=4(y+1)^2-4\left(x^2-2xy+y^2+x^2+y^2+3\right)\geq 0,$$
$$(x-y)^2+x^2+y^2+3-y^2-2y-1\leq 0.$$

Elvégezve a műveletek és csoportosítva:

$$x^2+y^2+1-2xy-2y+2x-2x+x^2+1\leq 0\ ,$$
$$(x-y+1)^2+(x-1)^2\leq 0 \quad \text{adódik.}$$

Ez csak úgy teljesül, ha $x=1,\ y=x+1=2.$

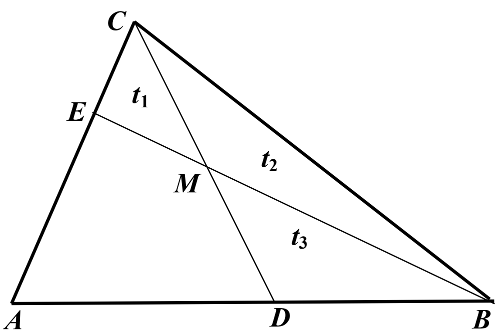
Ekkor z értékére $z^2-6z+9=0$ egyenletet kapjuk, melyből $z=3$.

Feladatunk megoldása tehát: $x=1,\quad y=2,\quad z=3$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

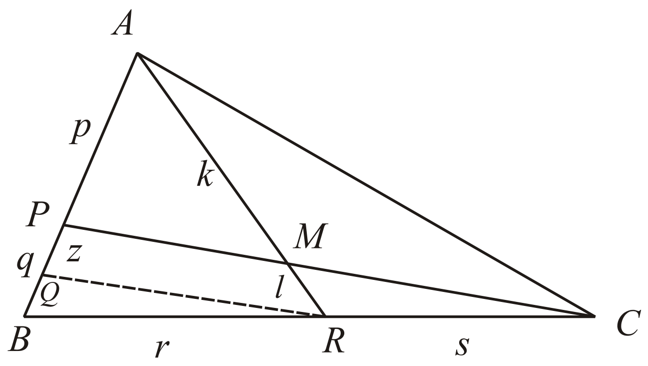
6. Az ABC háromszöget két csúcsán átmenő egyenesekkel az ábra szerint három háromszögre és egy négyszögre daraboltuk. Mekkora az $ADME$ négyszög területe, ha adottak a háromszögek t_1, t_2, t_3 területei.

(Németh László, Fonyód)



I. Megoldás:

Először igazolunk egy **segédtételt**, amely a mellékelt ábrán látható háromszögben az A – ból induló szakaszok arányára vonatkozik, amennyiben ismerjük az AB – n, illetve a BC – n levő szakaszok arányát.



Az ábra jelölései: $AP = p,\ BP = q,\ PQ = z,\ AM = k,\ RM = l,\ BR = r,\ CR = s,\ PM \parallel RQ$.

A segédtétel: $\frac{k}{l} = \frac{p}{q}\left(1 + \frac{r}{s}\right)$.

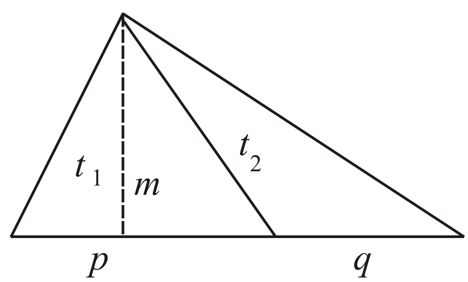
Ennek bizonyításához a párhuzamos szelők tételét használjuk: mivel $PM \parallel QR$, ezért

$$\frac{z}{q} = \frac{s}{r+s}, \text{ valamint } \frac{k}{l} = \frac{p}{z}.$$

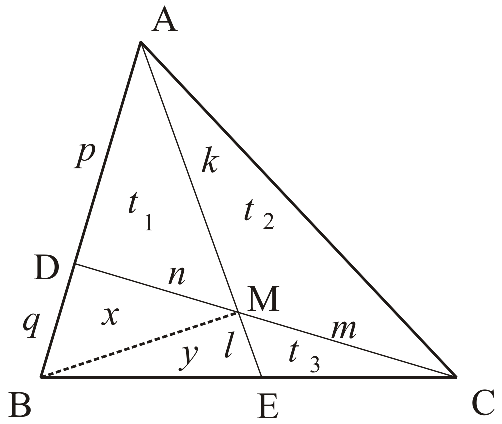
$$z = \frac{qs}{r+s}, \text{ így } \frac{k}{l} = \frac{p(r+s)}{qs} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r+s}{s} = \frac{p}{q}\left(1 + \frac{r}{s}\right).$$

Ezzel a segédtételt beláttuk.

Másrészt nyilvánvaló, hogy $\frac{t_1}{t_2} = \frac{p}{q}$ a két kis háromszög közös magassága miatt:



Ezek felhasználásával oldjuk meg a feladatot a következő ábra jelöléseit használva:



Egyrészt a segédtétel szerint $\frac{k}{l}=\frac{p}{q}\left(1+\frac{r}{s}\right)$, másrészt $\frac{p}{q}=\frac{t_1}{x}$, $\frac{y}{t_3}=\frac{r}{s}$, illetve $\frac{k}{l}=\frac{t_2}{t_3}$.

Ezekből adódik: $\frac{t_2}{t_3}=\frac{t_1}{x}\left(1+\frac{y}{t_3}\right)$ (1)

Hasonlóképpen kapjuk: $\frac{m}{n}=\frac{s}{r}\left(1+\frac{q}{p}\right)$, $\frac{m}{n}=\frac{t_2}{t_1}$, ahonnan

$\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_3}{y}\left(1+\frac{x}{t_1}\right)$ (2) következik.

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása adja x – et és y – t, ezek összege pedig a keresett T területet.

(1) – ből és (2) – ből kifejezzük x – et: $x=\frac{t_1\left(t_3+y\right)}{t_2}$, illetve $x=\frac{yt_2}{t_3}-t_1$. Ezeket egyenlővé téve kiszámoljuk y – t.

$$\frac{t_1\left(t_3+y\right)}{t_2}=\frac{y\,t_2}{t_3}-t_1$$

$$t_1\,t_3^2+t_1\,t_3\,y=y\,t_2^2-t_1\,t_2\,t_3$$

$$t_1\,t_3^2+t_1\,t_2\,t_3=y\left(t_2^2-t_1\,t_3\right)$$

$$y=\frac{t_1\,t_3^2+t_1\,t_2\,t_3}{t_2^2-t_1\,t_3}=\frac{t_1\,t_3\left(t_2+t_3\right)}{t_2^2-t_1\,t_3}.$$

Ezek után $$x=\frac{t_2}{t_3}\cdot\frac{t_1\,t_3\left(t_2+t_3\right)}{t_2^2-t_1\,t_3}-t_1=\frac{t_1\,t_2^2+t_1\,t_2\,t_3-t_1\,t_2^2+t_1^2\,t_3}{t_2^2-t_1\,t_3}=\frac{t_1\,t_3\left(t_1+t_2\right)}{t_2^2-t_1\,t_3}.$$

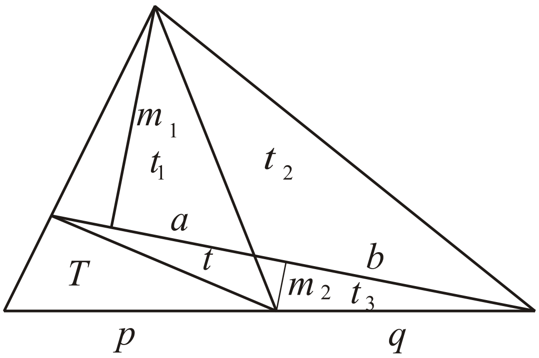
Végül: $$T=x+y=\frac{t_1\,t_3\left(t_1+t_2\right)}{t_2^2-t_1\,t_3}+\frac{t_1\,t_3\left(t_2+t_3\right)}{t_2^2-t_1\,t_3}=\frac{t_1\,t_3\left(t_1+2t_2+t_3\right)}{t_2^2-t_1\,t_3},$$

ezzel megoldottuk a feladatot.

A megoldhatóság feltétele, hogy $t_2^2 - t_1 t_3 > 0$ (a négyszöggel szemben lévő háromszög területe nagyobb, mint a négyszöggel szomszédos háromszögek területeinek mértani közepe) minden esetben teljesül.

Megjegyzés: érdekes eredményt kapunk, ha $t_1 = 7,\ t_2 = 8,\ t_3 = 9$ oldalakat választunk, ekkor ugyanis $T -$ re 2016 adódik.

II. Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit, ahol T a keresett négyszög területét jelöli:

$$t_1 \cdot t_3 = \frac{a \cdot m_1}{2} \cdot \frac{b \cdot m_2}{2} = \frac{a \cdot m_2}{2} \cdot \frac{b \cdot m_1}{2} = t \cdot t_2 .$$

Továbbá $$\frac{T - t}{t + t_3} = \frac{p}{q}, \quad \frac{T + t_1}{t_2 + t_3} = \frac{p}{q} .$$

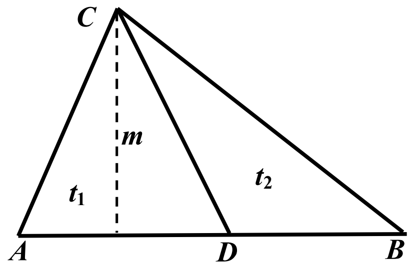
Ezekből $$\frac{T + t_1}{t_2 + t_3} = \frac{T - \frac{t_1 \cdot t_3}{t_2}}{\frac{t_1 \cdot t_3}{t_2} + T_3}, \quad \frac{T + t_1}{t_2 + t_3} = \frac{T \cdot t_2 - t_1 \cdot t_3}{t_1 \cdot t_3 + t_2 \cdot t_3}.$$

$$t_1^2 \cdot t_3 + T\left(t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3\right) + t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = T \cdot t_2\left(t_2 + t_3\right) - t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 - t_1 \cdot t_3^2,$$

$$T\left(t_1 \cdot t_3 + t_2 \cdot t_3 - t_2^2 - t_2 \cdot t_3\right) = -2\, t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 - t_1 \cdot t_3^2 - t_1^2 \cdot t_3.$$

Ebből már adódik az eredmény: $$T = \frac{t_1 \cdot t_3\left(t_1 + 2t_2 + t_3\right)}{t_2^2 - t_1 \cdot t_3}.$$

III. Megoldás:

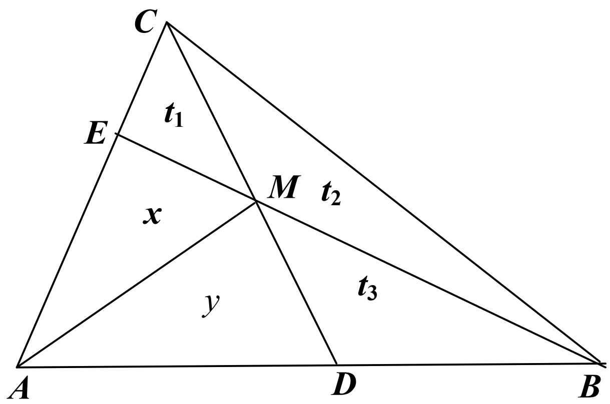


Használjuk a már említett

$$\frac{t_{ADC\Delta}}{t_{BDC\Delta}}=\frac{t_1}{t_2}=\frac{AD\cdot m/2}{DB\cdot m/2}=\frac{AD}{DB}$$

segédtételt.

Húzzuk be a négyszög *AM* átlóját és használjuk az előző segédtételt:



$$\frac{x}{t_1}=\frac{AE}{EC}=\frac{x+y+t_3}{t_1+t_2}\Rightarrow x=\frac{(x+y)t_1+t_1t_3}{t_1+t_2}$$

$$\frac{y}{t_3}=\frac{AD}{DB}=\frac{x+y+t_1}{t_3+t_2}\Rightarrow y=\frac{(x+y)t_3+t_1t_3}{t_3+t_2}$$

$$T=x+y=\frac{(x+y)t_1+t_1t_3}{t_1+t_2}+\frac{(x+y)t_3+t_1t_3}{t_3+t_2}$$

$$(x+y)\left(t_1t_3+t_1t_2+t_2t_3+t_2^2\right)=(x+y)\left(2t_1t_3+t_1t_2+t_2t_3\right)+t_1t_3\left(t_1+t_3+2t_2\right)$$

$$(x+y)\left(t_2^2-t_1t_3\right)=t_1t_3\left(t_1+t_3+2t_2\right)$$

$$T=\ x+y=\frac{t_1t_3\left(t_1+t_3+2t_2\right)}{t_2^2-t_1t_3}$$