XVI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szeged, 2007. március 14-18.

9. osztály

1. feladat: Egy matematika teszt megírásában egy középiskola 100 tanulója vett részt, és az átlagpontszámuk 100 pont volt. Az alsóévesek száma 50%-al több, mint a felsőéveseké, a felsőévesek átlagpontszáma pedig 50%-al magasabb, mint az alsóéveseké. Mennyi a felsőévesek átlagpontszáma?

Dr. Katz Sándor (Bonyhád)

1. feladat I. megoldása: A felsőéves tanulók számát jelöljük $2t$-vel. Ekkor az alsóéves tanulók száma $3t$, azaz az iskola összlétszáma $5t$, amiről tudjuk, hogy értéke 100. Ebből $t = 20$, azaz az alsóévesek száma 60, a felsőévesek száma 40.

Az alsóévesek átlagpontszámát jelöljük $2a$-val. Ekkor a felsőévesek átlagpontszáma $3a$. Az egész iskola átlagpontszáma $(60 \cdot 2a + 40 \cdot 3a)/100 = 2{,}4a$, amiről tudjuk, hogy értéke 100. Ebből a kérdéses szám:

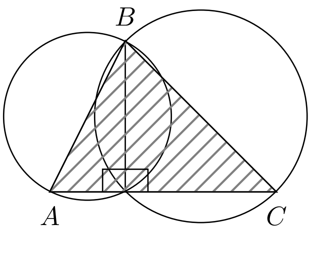
$$3a = \frac{3}{2{,}4} \cdot 2,4a = \frac{3}{2{,}4} \cdot 100 = \frac{300}{2{,}4} = \frac{3000}{24} = 125.$$

---

2. feladat: Egy négyszög oldalaira mint átmérőkre egy-egy kört rajzolunk. Igaz-e, hogy a négy kör által meghatározott zárt körlapok mindig lefedik a négyszöget? Válaszunkat indokoljuk.

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat I. megoldása: Az állítás igaz. Legyen ABC egy háromszög. Belátjuk, hogy az AB és BC oldalakra, mint átmérőkre rajzolt köröknek megfelelő körlapok lefedik a teljes háromszöget.

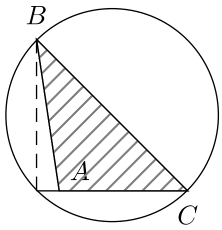


Tegyük fel, hogy az AC oldalon lévő két szöge hegyesszög, azaz az A-ból induló magasságszakasz a háromszög belsejében van. Ez a szakasz a háromszöget két derékszögű háromszögre osztja. Az AB, illetve BC oldalra mint átmérőre rakott körlapok Thalesz tétele alapján rendre lefedik egyik, illetve másik derékszögű háromszög részét az ABC háromszögnek.

Ha az AC oldalon lévő két szög közül az egyik nem hegyesszög, akkor az A-ból induló magasságszakasz nem a háromszög belsejében van. Az egyik A-ból induló oldallal együtt olyan derékszögű háromszöget határoz meg, ami az egész ABC háromszöget tartalmazza. Így Thalesz tétele miatt már az egyik körlap lefedi az egész háromszöget.

Most vegyük a feladatbeli négyszöget és egy átlóval osszuk két háromszögre. A fenti gondolatmenetet alkalmazzuk a két háromszögre úgy, hogy az átló töltse be az AC oldal szerepét és kapjuk állításunkat.

2. feladat II. megoldása: Az állítás igaz. Egy szakaszra, mint átmérőre, tegyünk egy körlapot. A körlap pontosan azokat a pontokat nem fedi le, amelyekből a szakasz hegyesszögben látszik.



Ha a négy körlap nem fedné le a négyszöget, akkor a négyszög belsejében lenne olyan pont, amelyből mindegyik oldal hegyesszög alatt látszik. Konvex négyszögnél minden belső pontra a négy látószög összege pontosan 360^o, konkávnál pedig legalább 360^o. Egyik esetben sem lehetséges, hogy ezt négy hegyesszög összege adja ki.

---

3. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$[x] - y = 2[y] - z = 3[z] - x = \frac{2006}{2007}.$$

($[r]$ az r szám egész részét jelöli, azaz a legnagyobb egészt, amely nem nagyobb r-nél)

Oláh György (Komárom)

3. feladat I. megoldása: $[x] - y \leq [x] - [y]$, sőt az egyenlőtlenség két oldala között egynél kisebb a különbség. A bal oldal értéke 2006/2007, a jobb oldal egész. Így $[x] - [y] = 1$. Hasonlóan $2[y] - [z] = 1$ és $3[z] - [x] = 1$. Ebből a lineáris egyenletek megoldási módszerével adódik, hogy $[x] = 2, [y] = [z] = 1$. A megoldás az $x = 3[z] - \frac{2006}{2007}$, $y = [x] - \frac{2006}{2007}$, $z = 2[y] - \frac{2006}{2007}$ összefüggések alapján számolható: $x = 2\frac{1}{2007}$, $y = z = 1\frac{1}{2007}$.

---

4. feladat: Egy kockából színes dobókockát készítünk. Hat szín adott, és ezek mindegyikével egy-egy lapot kiszínezünk (így minden lap színezett lesz). Majd a hat lapra 1-től 6-ig írjuk a számokat úgy, hogy a szemköztes oldalakra került két szám összege mindig 7 legyen. Hányféle kockát készíthetünk ilyen módon?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

4. feladat I. megoldása: Először a számokat írjuk fel a kockára. Ehhez tegyük le a kockát az asztalra úgy, hogy alul legyen az 1-es szám, majd forgassuk el úgy, hogy felénk nézzen a 2-es szám. Természetesen a felfelé néző lapon lesz a 6-os szám, és a hátsón az 5-ös. A bal, illetve a jobb oldalra kell ráírni a 3-as és 4-es számokat. Erre két lehetőség van.

A számozás után a színek kiosztása csak a színek sorbarakását jelenti. Mindkét fenti lehetőség $6! = 720$-szorozódik.

Tehát $2 \cdot 720 = 1440$-féle dobókockát készíthetünk.

---

5. feladat: Az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ egész számokra teljesül, hogy

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + \ldots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| \leq 2n - 4.$$

Bizonyítsuk be, hogy számaink között van két egyforma.

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat I. megoldása: Számainkat úgy képzelhetjük el, hogy egy kör kerületére vannak felírva és a szomszédok különbségeinek abszolút értékeit adjuk össze egyenlőtlenségünk jobb oldalán. Legyen m és M a számaink között előforduló legkisebb, illetve legnagyobb szám. (Ha valamelyik nem lenne egyértelmű, akkor már készen is lennénk a megoldással.) Ez a két szám két ívre osztja a kör kerületét és így összegünk tagjait is. Az egyik ívnek megfelelő tagok összege nem haladhatja meg $(2n-4)/2 = n-2$-t. Mindkét ívhez vesszük az ebben lévő szomszédos számok abszolút értékeinek összegét. Mindkétszer egy

$$|M - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_2| + \ldots + |\alpha_{\ell-1} - \alpha_\ell| + |\alpha_\ell - m|$$

alakú összeget kapunk, amiről látható, hogy legalább $M - m$.

Összegezve: számaink az $\{m, m+1, m+2, \ldots, M-1, M\}$ halmazból (egy $M-m+1$ elemű halmazból) kerülnek ki, ahol $M - m$ értéke legfeljebb $n - 2$. Azaz a lehetőségek számainkra legfeljebb $n - 1$. A skatulya-elv adja a bizonyítandót.

---

6. feladat: Az $\{1, 2, 3, \ldots, 24, 25\}$ halmazból tetszőlegesen kiválasztunk 17 számot. Bizonyítsuk be, hogy biztos találhatunk kettőt a kiválasztottak között, amelyek szorzata négyzetszám.

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

6. feladat I. megoldása: Ha az $\{1, 4, 9, 16, 25\}$ halmaz elemei közül legalább kettő a kiválasztottak közt van, akkor készen vagyunk, hiszen ezen számok közül bármely kettő szorzata négyzetszám. Hasonlóan készen vagyunk, ha a $\{2, 8, 18\}$, $\{3, 12\}$, $\{5, 20\}$, $\{6, 24\}$ halmazok valamelyikéből legalább két számot választunk.

A kiválasztott 17 szám között legalább hat különbözik a 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23 számoktól (11 darab szám). Ez a legalább hat szám a következő unióba esik:

$$\{1, 4, 9, 16, 25\} \cup \{2, 8, 18\} \cup \{3, 12\} \cup \{5, 20\} \cup \{6, 24\},$$

A skatulya-elv alapján az öt tényező valamelyikébe legalább két kiválasztott szám esik. Ez alapján az előző bekezdés bizonyítja az állítást.