10. évfolyam feladatsorának megoldásai

1. A nyári festőtáborban a gyerekek ecseteket és a tisztításukhoz szükséges anyagokat, rajzlapokat és festékgombokat kapnak, amelyekből tetszés szerint válogatva az alapszínek mellett mindig új keverék színekhez jutnak. Minden alap- illetve keverékszínt külön rajzlapon próbálnak ki. Gyerekekként legalább hány rajzlapra van szükség ha ***a*** egy válogatásokban a kiszemelt festékgomb csak legfeljebb egyszer és ugyanakkora mennyiségben szerepel feltéve, hogy a festékgombok színei**:** piros, kék, sárga és zöld (Szalay István, Szeged)

Megoldás:

a./ Halmazelméleti megoldás:

Általánosítsuk a feladatot $n \geq 3$ különböző festékgomb esetére!

Az alapszíneket és az összes keverék színt az alapszínek hatványhalmaza reprezentálja, ha belőle kihagyjuk az üres halmazt (amikor a rajzlapra egyetlen ecsetvonás sem kerül). Mivel az n elemű halmaz hatványhalmazának számossága 2^n, gyerekenként legalább $2^n - 1$ rajzlap szükséges. (A festék nélküli vászon az üres halmaz).

Esetünkben $n = 4$, így legalább 15 rajzlapra van szükség.

b./ Elemi megoldás:

Alapszínek: *piros ; kék ; sárga ; zöld*

2 színből álló keverék annyi van, ahányféleképpen a négy festékgomb közül kettőt ki tudunk választani. Ezt láthatjuk, ha a négy festékgombot egy konvex négyszög alakzatba helyezzük el, akkor a kiválasztást a négy oldal és a két átló jelenti, ami 6 lehetőséget mutat.

3 színből álló keverékhez úgy jutunk, ha a négy festékgomb közül egyet kihagyunk a keveréskor. Ez 4 lehetőséget jelent.

4 szín keverése csak 1 lehetőség van.

Összesen 4+6+4 +1 = 15 színhez jutunk.

2. Jelölje $V(n)$ az n szám egyjegyű pozitív osztóinak számát. Például $V(100) = 4$, mivel a 100-nak 4 egyjegyű osztója van: 1, 2, 4 és 5. (Róka Sándor, Nyíregyháza)

Mennyi $V(1) + V(2) + V(3) + \ldots + V(99) + V(100)$ értéke?

Megoldás:

A $V(1) + V(2) + V(3) + \ldots + V(99) + V(100)$ összeg megszámlálja, hogy az 1, 2, 3, …, 99, 100 számoknak összesen hány egyjegyű osztója van, vagyis közülük hány számnak osztója az

1, a 2, a 3, …, a 8 és a 9. Számoljuk össze! Az 1 az 1, 2, 3, …, 100 számok mindegyikének osztója, a 2 osztója 50 stb., azaz a kért összeg:

$$\left[\frac{100}{1}\right]+\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{100}{9}\right]=100+50+33+25+20+16+14+12+11=281$$

3. Egy n természetes számra (a tízes számrendszerben) akkor mondjuk, hogy *furfangos*, ha az n szám számjegyeinek összege és az $n+1$ szám számjegyeinek összege is páratlan szám. Hány 2018-nál kisebb *furfangos* szám van? (Péics Hajnalka, Szabadka)

Megoldás:

Legyen $n=\overline{abcd}$ olyan természetes szám, amely teljesíti a feladat feltételeit. Legyen az n szám számjegyeinek összege x, páratlan szám, az $n+1$ szám számjegyeinek összege pedig y. Ekkor $x=a+b+c+d$. Észrevehetjük, hogy $d=9$ kell, hogy teljesüljön, mert ellenkező esetben $n+1=\overline{abc(d+1)}$, ahonnan

$$y=a+b+c+(d+1)=x+1$$

adódik, ami azt jelenti, hogy y páros szám, tehát nem megfelelő.

Eszerint olyan $n=\overline{abc9}$ alakú számot keresünk, ahol $x=a+b+c+9$ és y páratlan számok, azaz amelyek esetén teljesül, hogy $z=a+b+c$ páros szám, y pedig páratlan szám. Két esetet különböztetünk meg:

1. eset: Ha $c\neq 9$, azaz $c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, akkor $n+1=\overline{ab(c+1)0}$,

vagyis $y=a+b+(c+1)+0=z+1$ mindig páratlan szám, amennyiben z páros szám. Ekkor tehát az olyan $n=\overline{abc9}$ alakú számokat keressük, ahol $a\in\{0,1,2\}$, $b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ és z páros szám. Ekkor tehát az olyan $n=\overline{abc9}$ alakú számokat keressük, ahol $a\in\{0,1,2\}$, $b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Ha $a=0$, akkor z párossága teljesül, amennyiben b és c paritása megegyezik, azaz mindkét szám páros, vagy mindkét szám páratlan. Ha a b és c számjegyek mindegyike páros, akkor ilyen párokból $5\cdot 5=25$ van, hiszen $b,c\in\{0,2,4,6,8\}$. Ha a b és c számjegyek mindegyike páratlan, akkor ilyen párokból $5\cdot 4=20$ van, hiszen $b\in\{1,3,5,7,9\}$, $c\in\{1,3,5,7\}$. Ilyen számokból összesen $25+20=45$ van.

Ha $a=1$, akkor z párossága teljesül, amennyiben b és c paritása különbözik, azaz egyik szám páros, a másik szám pedig páratlan. Ha a b számjegy páros, a c számjegy pedig páratlan, akkor ilyen párokból van $5\cdot4=20$, hiszen $b\in\{0,2,4,6,8\}$ és $c\in\{1,3,5,7\}$. Ha a b számjegy páratlan, a c számjegy pedig páros, akkor ilyen párokból van $5\cdot5=25$, hiszen $b\in\{1,3,5,7,9\}$ és $c\in\{0,2,4,6,8\}$. Ilyen számokból összesen $20+25=45$ van.

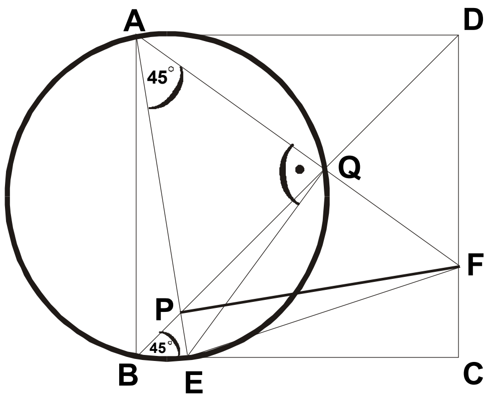
Ha $a=2$, akkor csak a 2009 teljesíti a kért feltételt.

A $c\neq9$ esetben tehát összesen $45+45+1=91$ keresett szám van.

2. eset: Ha $c=9$, akkor természetesen $b=9$ is teljesül, mert ellenkező esetben $n=\overline{ab99}$, $z=a+b+9$, viszont $n+1=\overline{a(b+1)00}$ és $y=a+b+1=z-8$ páros szám, ha z páros szám. Így a 2018-nál kisebb $n=\overline{a999}$ alakú számok közül csak a 999 teljesíti a feladat feltételeit. A keresett számokból, tehát $91+1=92$ van.

4. Az $ABCD$ négyzet A csúcsából húzzunk két olyan félegyenest, amelyek egymással 45°-os szöget zárnak be. Az egyik félegyenes a BC oldalt az E pontban, a BD átlót a P pontban metszi. A másik a CD oldalt az F pontban, a BD átlót pedig a Q pontban metszi. Mutassuk meg, hogy az AEF háromszög területe kétszerese az APQ háromszög területének! (Pintér Ferenc, Nagykanizsa)

Megoldás:



Vegyük észre, hogy az A és B pontokból az EQ szakasz 45°-os szögben látszik, ezért az A, B, E, Q pontok egy körön vannak, azaz húrnégyszög. Így az $AQE\angle=90^\circ$. De ekkor ez a háromszög egyenlő szárú $\left(A\angle=45^\circ \textit{ és } Q\angle=90^\circ\right)$, ezért $AE=\sqrt{2}AQ$.

Hasonlóan látható be, hogy az ADFP négyszög is húrnégyszög és $AF=\sqrt{2}AP$.

Ezért $T_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} AQ \cdot \sqrt{2} AP \cdot \sin 45^\circ = AQ \cdot AP \cdot \sin 45^\circ = 2T_{APQ}$

5. Állapítsuk meg az $A = x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha x pozitív valós szám. (Katz Sándor, Bonyhád)

1. Megoldás:

Vegyük észre, hogy ha $B = x + \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$, akkor $AB = 2$. Tehát $A = \frac{2}{B}$.

Mivel B minden pozitív x-re pozitív, ezért A is pozitív.

Ha x nagy, vagy x közel van 0-hoz, akkor B tetszőlegesen nagy értéket vesz fel, ezért A tetszőlegesen közel kerül 0-hoz, így A-nak minimuma nincs, (alsó határa 0).

Tudjuk, hogy ha x pozitív, akkor $x + \frac{1}{x} \geq 2$, ezért B minimuma $2 + \sqrt{2}$.

Tehát A legnagyobb értéke $A = \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$, ezt $x = 1$ esetén veszi fel.

2. Megoldás:

Vezessük be az $u = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ jelölést. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt{2} \leq u \; (<\infty) \qquad (*)$$

Ekkor, mivel $x + \frac{1}{x} > 0$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ érvényes, hogy

$$A = x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{u^2 + 2} - u = \frac{2}{\sqrt{u^2 + 2} + u} \quad .$$

(*) miatt $2 + \sqrt{2} \leq \sqrt{u^2 + 2} + u$, ezért $\frac{2}{2 + \sqrt{2}} \geq \frac{2}{\sqrt{u^2 + 2} + u} \; (>0)$.

Mivel $\frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$, kapjuk, hogy $0 < A \leq 2 - \sqrt{2}$. A jobboldalon $x = 1$ esetén fennáll az egyenlőség.

3. Megoldás

Vezessük be az $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ jelölést. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség miatt $y \geq 2$.Ekkor, $A = x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{y+2} - \sqrt{y}$. Tekintve a $[2;\infty[$ intervallumon értelmezett $f(y) = \sqrt{y+2} - \sqrt{y}$ függvényt és az $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y+2}} - \frac{1}{2\sqrt{y}} < 0$ differenciál-hányadost, adódik, hogy az *f* függvény a $[2;\infty[$ intervallumon szigorúan csökken. Emiatt az $y_0 = 2$ végpontban (totális) maximuma van. Így $A = f(2) = 2 - \sqrt{2}$.

4. Megoldás: (Csak vázlatosan)

Jelölés $v = x + \frac{1}{x} \geq 2,\quad x^2 + \frac{1}{x^2} = v^2 - 2$ és $A = v - \sqrt{v^2 - 2} = \frac{2}{v + \sqrt{v^2 - 2}}$.

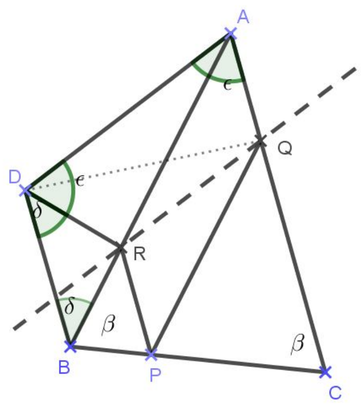
$v + \sqrt{v^2 - 2} \geq 2 + \sqrt{2}, \qquad A \leq \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$.

6. Egy egyenlő szárú *ABC* háromszög *BC* alapjának belső *P* pontján keresztül párhuzamosokat húzunk a szárakkal. Ezek a párhuzamosok az *AB* - t *R* pontban, az *AC* - t *Q* pontban metszik. Bizonyítandó, hogy a *P* pont *QR* egyenesre vonatkozó tükörképe az egyenlő szárú háromszög köré írt körén van.

(Laczkó László, Budapest)

Megoldás:

Legyen a *P* pont *QR*-re vonatkozó tükörképe a *D* pont.



A $DRB\triangle$ háromszög egyenlő szárú, mert $RP = RB$ és $RP = RD$. Emiatt az ábrán δ-val jelölt szögek egyenlők: $RBD\measuredangle = BDR\measuredangle = \delta$.

Az $AQRD$ négyszög szimmetrikus trapéz, ugyanis átlói egyenlőek QP-vel, továbbá $AQ = RD$. Mivel AQR és DQR háromszögek oldalai egyenlők, a háromszögek egybevágóak, ezért az $AQRD$ szimmetrikus trapéz, tehát az ábrán ε -nal jelölt szögek egyenlők: $DAQ\measuredangle = ADR\measuredangle = \varepsilon$.

Az $ADBC$ négyszög szemközti szögpárjai - $(\beta + \delta + \varepsilon)$ - egyenlők, ezért az $ADBC$ négyszög húrnégyszög.