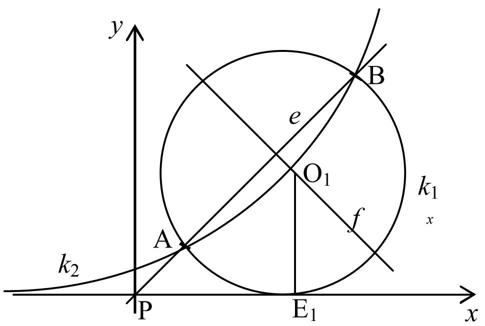
12. évfolyam feladatsora

1. A koordináta-rendszerben adottak az $A(2\ ;\ 2)$ és $B(9\ ;\ 9)$ pontok. Írjuk fel annak a. körnek az egyenletét, amely illeszkedik az A és B pontokra, és érinti az x tengelyt!

(Katz Sándor, Bonyhád)

I. Megoldás:



(Paraméteres megoldás)

Legyen a keresett kör középpontja $O(u\ ;\ v)$

Mivel „felülről" érinti az x tengelyt, ezért a kör sugara v, egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2=v^2$

O illeszkedik AB felező merőlegesére$f$-re: $f\colon\ x+y=11$, így $u+v=11$, ebből $u=11-v$.

Az $A(2\ ;\ 2)$ pont illeszkedik a körre: $(2-u)^2+(2-v)^2=v^2$.

u – t behelyettesítve $\left[\,2-(11-v)\right]^2+(2-v)^2=v^2$.

Ebből $v_1=5$ és $v_2=17$. Ezekhez $u_1=6,\ u_2=-6$ tartozik.

Két kört kapunk, melyeknek egyenlete: $(x-6)^2+(y-5)^2=25$ és $(x+6)^2+(y-17)^2=289.$

II. Megoldás: (A szerkesztés menetét követve.)

Az AB egyenes a $P(0;0)$ pontban metszi az x tengelyt A P pontból a körhöz húzott érintőszakasz mértani közepe a pontból húzott szelő két darabjának PA-nak és PB-nek:

$$PE=\sqrt{PA\cdot PB}=\sqrt{2\sqrt{2}\cdot 9\sqrt{2}}=6.$$

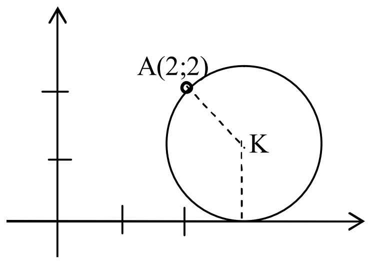
Az előző megoldásnál adódott, hogy két megoldás lesz, itt tudnunk kell előre, hogy két megoldás lesz, ezért P-ből mindkét irányba fel kell mérnünk az x tengelyre a $PE = 6$ hosszúságú szakaszt, így kapjuk a két érintési pontot: $E_1(6;0)$ és $E_2(-6;0)$.

A két középpont második koordinátáit itt az $f\colon\ \ x+y=11$ egyenletből kaphatjuk:

$v_1=5$ és $v_2=17$.

A két kör egyenlete most is: $(x-6)^2+(y-5)^2=25$ és $(x+6)^2+(y-17)^2=289.$

III: Megoldás: (Mértani helyekkel)



Az $A(2;2)$ pontra illeszkedő és x tengelyt érintő körök K középpontjai egyenlő távolságra vannak A-tól és az x tengelytől, ezért ezek mértani helye az A fókuszú, x tengely vezéregyenesű parabola, amelynek egyenlete $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+1$.

Ugyanígy a $B(9;9)$ pontra illeszkedő és x tengelyt érintő körök középpontjainak mértani helye az

$$y=\frac{1}{18}(x-9)^2+4,5 \text{ parabola.}$$

A két parabola metszéspontjai lesznek a keresett középpontok: $O_1(6;5)$ és $O_2(-6;17)$.

A két kör egyenlete most is: $(x-6)^2+(y-5)^2=25$ és $(x+6)^2+(y-17)^2=289.$

2. Határozza meg az $A=2018^{x_1+x_2+...+x_n}$ kifejezés értékét, ahol $x_1,x_2,...,x_n$ az alábbi egyenlet gyökei

$$x^{2017}=x^{2018}+\left\{\frac{2019+x}{1+[x]}\right\}$$

(ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelenti és $\{x\}=x-[x]$.)

(Fedorszki Ádám, Beregszász)

I. Megoldás:

Kivonva az egyenlet jobb és bal oldalából x^{2018}-t kapjuk, hogy $x^{2017}-x^{2018}=\left\{\frac{2019+x}{1+[x]}\right\}$.

Az egyenlet bal oldala átírható az alábbi alakban: $x^{2017}(1-x)$ és erre a kifejezésre igaz, hogy $x^{2017}(1-x)\geq 0$ a jobb oldal tulajdonságai miatt, ezt megoldva kapjuk, hogy $0\leq x\leq 1$.

Könnyen észrevehető, hogy az $x=0$ és az $x=1$ megoldásai az egyenletnek.

Ha $x\in]0;1[$, akkor $[x]=0$ az egyenlet jobb oldala pedig az alábbi formában írható le:

$\{2019+x\}=\{x\}=x$. Ekkor viszont nincs megoldása az egyenletnek, mivel

$x^{2017}<x+x^{2018}$, azaz egyenlőség sosem lehet a bal és a jobb oldalt között.

Maradt meghatározni a keresett kifejezés értékét: $A=2018^{x_1+x_2}=2018^{0+1}=2018.$

II. Megoldás:

Először is megállapítjuk, hogy $x \notin [-1,0[$. Ezt követően, három esetet különböztetünk meg:

a) eset: $x < -1$. Ekkor, az egyenlet bal oldalán negatív jobb oldalán pozitív szám áll, nincs megoldás.

b) eset: $0 \le x < 1$. Ekkor, az egyenlet alakja:

$$x^{2017} = x\left(x^{2017} + 1\right),$$

innen adódik az $x_1 = 0$ gyök.

c) eset: $x \ge 1$. Az $x = 1$ - ről helyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy megoldás: $1 = 1 + \left\{\frac{2020}{2}\right\}$.

Ha $x > 1$, akkor az egyenlet bal oldalán kisebb mennyiség áll, mint a jobb oldalán, ezért további gyök nincs.

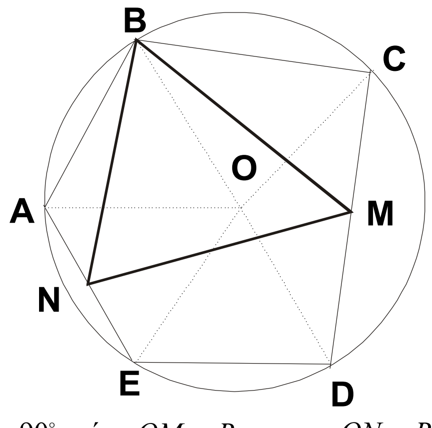
Így $n = 2$, és $A = 2018^{x_1 + x_2} = 2018$.

3. Az R sugarú körbe írjuk be az $ABCDE$ ötszöget úgy, hogy $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = R$ legyen. Jelölje M és N a CD és AE oldalak megfelelő felezőpontjait. Mutassuk meg, hogy a BMN háromszög szabályos!

(Pintér Ferenc, Nagykanizsa)

I. Megoldás:

Legyen O a kör középpontja, $COD\measuredangle = 2\alpha$ és $AOE\measuredangle = 2\beta$, akkor a feltételekből következik, hogy



$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, azaz $\alpha + \beta = 90^\circ$, és $OM = R\cos\alpha$; $ON = R\cos\beta$, továbbá $MON\measuredangle = 150^\circ$.

Alkalmazzuk a koszinusz tételt az MON, BOM és BON háromszögekre. Ekkor a következőket kapjuk:

$$MN^2 = R^2\cos^2\alpha + R^2\cos^2\beta - 2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos 150^\circ =$$
$$= R^2\left(\cos^2\alpha + \cos^2\left(90^\circ - \alpha\right) + 2\cos\alpha\cos\left(90^\circ - \alpha\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$= R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)$$

$$BM^2 = R^2 + R^2\cos^2\alpha - 2R^2\cos\alpha\cos\left(60^\circ + \alpha\right) =$$
$$= R^2\left(1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos 60^\circ\cos\alpha + 2\sin 60^\circ\sin\alpha\cos\alpha\right) =$$
$$= R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)$$

$$BN^2 = R^2 + R^2\cos^2\beta - 2R^2\cos\beta\cos\left(60^\circ + \beta\right) =$$
$$= R^2\left(1 + \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos 60^\circ\cos\beta + 2\cos\beta\sin 60^\circ\sin\beta\right) =$$
$$= R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\beta\right) = R^2\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(180^\circ - 2\alpha\right)\right] = R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)$$

II. Megoldás: (Vektorok forgatásával, vázlat)

Jelöljük ’-vel (vesszővel) a vektor +60°-os elforgatottját. Ahhoz, hogy az *MNB* háromszög szabályos legyen, elegendő bebizonyítani, hogy $\left(\overrightarrow{NM}\right)' = \overrightarrow{NB}$.

Legyen a beírt kör *O* középpontja az origó és vezessük be a következő helyvektorokat:
$\overrightarrow{OC} = \underline{c}$, $\overrightarrow{OE} = \underline{e}$, ekkor a jelölésünk szerint $\overrightarrow{OB} = \underline{c}'$, $\overrightarrow{OA} = \underline{c}'' = \underline{c}' - \underline{c}$, $\overrightarrow{OD} = \underline{e}'$. Így:

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}}{2} = \frac{1}{2}\left(\underline{c} + \underline{e}' - \underline{c}' + \underline{c} - \underline{e}\right) = \frac{1}{2}\left(2\underline{c} + \underline{e}' - \underline{c}' - \underline{e}\right)$$

$$\overrightarrow{NM}' = \frac{1}{2}\left(2\underline{c}' + \underline{e}'' - \underline{c}'' - \underline{e}'\right) = \frac{1}{2}\left(2\underline{c}' + \underline{e}' - \underline{e} - \underline{c}' + \underline{c} - \underline{e}'\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{c}' + \underline{c} - \underline{e}\right).$$

$$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{ON} = \underline{c}' - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}}{2} = \underline{c}' + \frac{1}{2}\left(-\underline{c}' + \underline{c} - \underline{e}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{c} + \underline{c}' - \underline{e}\right).$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

III. Megoldás:

Az első megoldás ábrájának betűzése alapján, ha megmutatjuk, hogy $\overrightarrow{BM}$ -60^0 - kal forgatható $\overrightarrow{BN}$ vektorba, akkor készen vagyunk.

Vezessük be a $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ vektorokat.

$\overrightarrow{BM} = \dfrac{\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}\right)}{2}$, hiszen M felezi a CD szakaszt.

$\overrightarrow{BN} = \dfrac{\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE}\right)+\overrightarrow{BA}}{2}$, mivel N felezi az AE szakaszt.

BOC háromszög szabályos, mert mindegyik oldal R hosszúságú. Így $\overrightarrow{BC}$ $-60°$ - kal forgatható $\overrightarrow{BO}$ vektorba.

OED háromszög szabályos, mert mindegyik oldal R hosszúságú. Így $\overrightarrow{OD}$ $-60°$ - kal forgatható $\overrightarrow{OE}$ vektorba.

ABD háromszög szabályos, mert mindegyik oldal R hosszúságú. Így $\overrightarrow{BO}$ $-60°$-kal forgatható $\overrightarrow{BA}$ vektorba.

Ezzel a $\overrightarrow{BM}$ vektort $-60°$-kal forgattuk a $\overrightarrow{BN}$ vektorba.

4. Egy pénzérmét feldobunk egymás után 10-szer. Mi a valószínűsége, hogy nem lesz két egymást követő fej ebben a sorozatban? (Róka Sándor, Nyíregyháza)

Megoldás:

Azoknak az n-hosszú sorozatoknak a száma, melyben nincs két egymást követő fej: a_n. Az a_n sorozatra $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ teljesül, és $a_1 = 2$, a következő elemek: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Azaz $a_{10} = 144$. A kérdezett valószínűség: $\dfrac{144}{2^{10}} = \dfrac{9}{64}$.

Egy jó dobássorozat például: IIFIFIIIFI.

A rekurzióról. Nézzük az $n+2$ hosszú jó sorozatokat. Az utolsó dobás I vagy F.

Ha az utolsó dobás I, akkor az előtte levő $n+1$ hosszú sorozat jó sorozat. Továbbá bármely $n+1$ hosszú jó sorozat kiegészítve egy I dobással, $n+2$ hosszú jó sorozatot alkot.

Ha az utolsó dobás F, akkor az előtte levő dobás I (nincs két egymás utáni F miatt), és az utolsó két IF előtti n hosszú dobássorozat n hosszú sorozat jó sorozatot alkot. Továbbá bármely n hosszú jó sorozat kiegészítve IF dobásokkal, $n+2$ hosszú jó sorozatot kapunk.

Így minden $n+2$ hosszú jó sorozatot megszámoltunk, mindegyiket egyszer. Ezek száma megegyezik az n hosszú és az $n+1$ hosszú jó sorozatok számával.

5. Adott a d nem – negatív egész szám és egy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozat ahol $a_0 = 1$ és minden $n \geq 1$ - re érvényes, hogy

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{3}, \text{ ha } a_{n-1} \text{ osztható 3 – mal}$$

$$a_n = a_{n-1} + d, \text{ ha } a_{n-1} \text{ nem osztható 3 – mal}$$

Keressük meg az összes olyan d számot, melyre érvényes, hogy létezik olyan $k>1$ természetes szám, melyre $a_k = 1$ (Kekeňák Tamás, Kassa)

Megoldás:

Ha $d=0$, akkor a sorozat mindegyik tagja 1, így pl. $k=2$ választható.

Ha d a 3 többszöröse, akkor a_n sose lesz 3-mal osztható, ezért ez egy növekvő sorozat lesz és nem létezik a keresett k.

Ha d nem osztható 3-mal, akkor a sorozat egyik tagja se nagyobb, mint $3d$. Tegyük fel, hogy ez mégis igaz. Akkor létezik egy legkisebb m index, melyre $a_m > 3d$. Ekkor azonban biztos, hogy $a_{m-1} = a_m - d$, $a_{m-2} = a_m - 2d$, $a_{m-3} = a_m - 3d$. Mivel hogyha valahol az utolsó 3 lépésben osztottunk volna 3-mal, akkor az osztás eredménye nagyobb lenne mint d, ekkor azonban az osztandó nagyobb mint $3d$, ami azonban ellentmondás azzal, hogy m a legkisebb index az adott tulajdonsággal. Ez viszont azt jelenti, hogy $a_m - d$, $a_m - 2d$, $a_m - 3d$ közül egyik se a 3 többszöröse. Ez azonban nyilván nem igaz, mivel a 3 szám más-más maradékot ad 3-mal való osztáskor (mivel d nem a 3 többszöröse). Tehát a sorozat egyik tagja se nagyobb mint $3d$.

Ez azt jelenti, hogy a sorozat első $3d + 1$ tagja között a skatulyaelv alapján biztos van kettő, amely megegyezik. Viszont mivel a sorozat minden következő tagja egyértelműen adott, a sorozat ciklikus lesz.

Megmutatjuk, hogy a sorozat az első tagjától fog ismétlődni, azaz ha vesszük a legkisebb olyan i indexet, melyre létezik olyan j index, hogy $j > i$ és $a_i = a_j$, akkor megmutatjuk, hogy $i=0$.

Ha $i > 0$, (azaz létezik a_{i-1}), akkor vizsgáljuk meg az a_{i-1} számot. Megmutatjuk, hogy ez egyértelműen adott. Ha $d \geq a_i$, akkor nyilván $a_{i-1} = 3a_i$ (hisz a sorozat tagjai pozitív számok).

Ha $a_i > d$, akkor $a_{i-1} = a_i - d$ (mivel egyik tag sem nagyobb, mint $3d$).

Hasonlóan a_{j-1} is adott, ez azonban azt jelenti, hogy $a_{i-1} = a_{j-1}$, ami azonban ellentmond annak, hogy

i a legkisebb ilyen szám. Tehát $i = 0$, ami azt jelenti, hogy létezik olyan k (pl. $k = j$), melyre érvényes, hogy $a_k = 1$.

II. Megoldás:

Ha $d = 0$, akkor a sorozat mindegyik tagja 1, így pl. $k = 2$ választható.

Ha $d > 0$ és 3 osztója d - nek a sorozat elemei $a_0 = 1,\ \ a_n = 1 + nd$. Szigorúan monoton növekvő sorozat, mert 3 nem osztója $(1 + nd)$ - nek, így az 1 nem fordul elő többször a sorozatban.

Ha 3 nem osztója d-nek, akkor a sorozat tagjainak képzésékor nem fordulhat elő, hogy egymás után háromszor is d - t adjunk az előző taghoz. $x + d,\ x + 2d,\ x + 3d$ egyike osztható 3-mal, mert $(d;3) = 1$ és az 1, 2, 3, egy teljes maradékrendszer modulo 3. A $d, 2d, 3d$ és $x + d,\ x + 2d,\ x + 3d$ is teljes maradékrendszer modulo 3. (Ha ezt másként fogalmazza meg a versenyző, akkor is fogadjuk el.)

Ezért legalább egyszer osztani kell 3 – mal. Az $1,\ 1 + d,\ 1 + 2d$ közül legalább az egyik esetben 3 – mal osztani kell, lehet, hogy többször is, így $x + 2d$ nem lehet nagyobb $3d$ – nél. Ebből következik, hogy a sorozat mindegyik tagja legfeljebb $3d$.

A sorozat első ($3d$+1) tagja között a skatulya-elv miatt kell lennie kettőnek, amelyek egyenlők. Ha $i < j$ és $a_i = a_j$, akkor $a_{i-1} = a_{j-1}$ is igaz, mert ha $d \geq a_i$, akkor $a_{i-1} = 3a_i$, hiszen a sorozat tagjai pozitívak. Ha $d < a_i$, akkor $a_{i-1} = a_i - d$. mert az a_{i-1} nem lehet $3d$-nél nagyobb. Ezt folytatva $i = 0$ - hoz jutunk, ahol megállunk. $a_0 = 1$ esetén pl. $a_j = 1$.

Tehát $d = 0$ és a 3-mal nem osztható pozitív egészek a feladat megoldásai.

6. Oldjuk meg a $\sqrt[3]{-x^3 - x^2 + x + 2} - x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán.

(Bíró Bálint, Eger)

I. Megoldás:

Legyen $a = \sqrt[3]{-x^3 + x - x^2 + 2}$, ekkor fennáll $a = -2x + x^2 - 2$ is.

Eszerint $a^3 = -x^3 + x - x^2 + 2$, amelyből

$$-x^3 - a^3 + x = x^2 - 2, \qquad (1)$$

illetve $a = -2x + x^2 - 2$ alapján $a + 2x = x^2 - 2 \qquad (2)$

Mivel (1) és (2) jobb oldala egyenlők, ezért a bal oldalak is megegyeznek egymással, vagyis

$-x^3-a^3+x=a+2x$, ahonnan rendezéssel adódik, hogy

$$a^3+x^3+a+x=0 \qquad (3)$$

A (3) összefüggés bal oldala szorzattá alakítható:

$$(a+x)\left(a^2-ax+x^2+1\right)=0 \qquad (4)$$

Ha (4)-ben $a+x=0$, akkor $a=-x$, ezért $a=-2x+x^2-2$ miatt $-x=-2x+x^2-2$, ahonnan

$$x^2-x-2=0 \qquad (5)$$

következik, melynek megoldásai $x_1=-1,\ x_2=2$.

Vizsgáljuk most a (4) összefüggésből kapott

$$a^2-ax+x^2+1=0 \qquad (6)$$

egyenletet. Ez x - re másodfokú egyenletnek tekinthető, melynek diszkriminánsa negatív, tehát nincs valós megoldása.

Minden esetet megvizsgáltunk, azt kaptuk, hogy az eredeti egyenletnek csak az $x_1=-1,\ x_2=2$ valós számok elégítik ki, és ezek valóban megoldásai a feladatnak, ahogy arról behelyettesítéssel meggyőződhetünk.

II. Megoldás: (Vázlatosan)

Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\sqrt[3]{-x^3-x^2+x+2}$ függvényt!

A függvény egyetlen zérushelye a $-x^3-x^2+x+2=0$ harmadfokú egyenlet egyetlen valós gyöke az $x_0\approx 1{,}205$. (Az $y=\dfrac{1}{x+1}$ egyenletű hiperbola és az $y=x^2-1$ parabola közös pontjának abszcisszája.)

$$f'(x)=\frac{-3x^2-2x+1}{3\left[f(x)\right]^2},\ \text{ahol } x\neq x_0.$$

Tekintsük a következő „jegyzőkönyvet”

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<x_0$	$x=x_0$	$x>x_0$
f	csökken	min = 1	növekszik	max > 1	csökken	0	csökken
f'	negatív	0	pozitív	0	negatív	nincs	negatív

A $\lim\limits_{|x|\to\infty} f'(x)=-1$ és $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[f'(x)-(-x)\right]=-\dfrac{1}{3}$

határértékek mutatják, hogy a függvény grafikonjának asszimptotája az $y=-x-\frac{1}{3}$ egyenletű egyenes. A diszkusszió további folytatása nélkül is megrajzolható grafikon alapján sejthető és behelyettesítéssel igazolható, hogy a garafikon és az $y = x^2 - 2x - 2$ parabola a $(-1, 1)$ *és* $(2, -2)$ pontokban metszik egymást. Mivel az első esetben a grafikonnak helyi minimuma van a másodfokú függvény pedig csökken, a második pont környezetében a diszkutált függvény csökken, a másodfokú függvény pedig növekszik, több metszéspont nincs. A feladatban kitűzött egyenlet gyökei: $x_1 = -1$ *és* $x_2 = 2$.

III. Megoldás:

$$\sqrt[3]{-x^3 - x^2 + x + 2} = x^2 - 2x - 2,$$
$$\sqrt[3]{(x+1)(1-x)(x+1)+1} = (x-1)^2 - 3$$

Vezessük be a következő jelölést. $a = x-1,$ ekkor $x = a+1$, így

$$\sqrt[3]{1 - a(a+2)^2} = a^2 - 3,$$
$$a^6 - 9a^4 + a^3 + 31a^2 + 4a - 28 = 0.$$

Utóbbi egyenletnek $a = 1$ és $a = -2$ megoldása, ezért következőképp alakítható:

$$(a-1)(a+2)\left(a^4 - a^3 - 6a^2 + 5a + 14\right) = 0.$$

Mivel $$a^4 - a^3 - 6a^2 + 5a + 14 = \left[\left(a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(a+1)^2 + 1\right] > 0$$

A hatod fokú egyenletnek csak az $a = 1$ és $a = -2$ a megoldás, így az eredeti egyenlet megoldása: $x_1 = -1,\ x_2 = 2$.

IV. Megoldás:

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\sqrt[3]{-x^3 - x^2 + x + 2} - x^2 + 2x + 2 = 0,$$
$$\sqrt[3]{-x^3 - x^2 + x + 2} = x^2 - 2x - 2,$$
$$-x^3 - x^2 + x + 2 = \left(x^2 - 2x - 2\right)^3,$$
$$-x^3 - x = \left(x^2 - 2x - 2\right)^3 + x^2 - 2x - 2.$$

Vezessük be a valós számok halmazán értelmezett

$f(u) = u^3 + u$ függvényt.

Látható, hogy $f(u)$ szigorúan monoton növekvő. Ezzel a jelöléssel egyenletünk a következőt állítja: $f(-x) = f\left(x^2 - 2x - 2\right)$. A szigorú monotonitás miatt utóbbi akkor és csak akkor állhat fenn, ha

$$-x = x^2 - 2x - 2$$

ahonnan $x_1 = -1,\ \ x_2 = 2$. Ezek az értékeke az eredeti egyenletet is kielégítik és más megoldás nincs.

V. Megoldás:

Vegyük észre, hogy a $\sqrt[3]{-x^3 - x^2 + x + 2} = x^2 - 2x - 2$ egyenletnek $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$ megoldása, azaz ha $f(x) = \sqrt[3]{-x^3 - x^2 + x + 2}$ és $g(x) = x^2 - 2x - 2$, akkor *f* és *g* grafikonja is illeszkedik az *A*(-1,1) és *B*(2,-2) pontokra.

Vizsgáljuk meg, hogy *f* és *g* értékei hogy viszonyulnak annak a $h(x) = -x$ lineáris függvénynek az értékeihez, amely illeszkedik az *A* és *B* pontokra! Azaz keressük az $f(x) < h(x)$, $f(x) > h(x)$, $g(x) < h(x)$ és $g(x) > h(x)$ egyenlőtlenségek megoldásait.

Tekintettel arra, hogy $a < b$ akkor és csak akkor igaz, ha $a^3 < b^3$, ezért

$\sqrt[3]{-x^3 - x^2 + x + 2} < -x \;\Leftrightarrow\; -x^3 - x^2 + x + 2 < -x^3 \Leftrightarrow 0 < x^2 - x - 2 \;\Leftrightarrow x < -1$ vagy $x > 2$.

$x^2 - 2x - 2 < -x \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < 2$. Innen látható, hogy a $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]2, \infty\right[$ halmazon az $f(x) < h(x) < g(x)$, a $\left]-1, 2\right[$ halmazon viszont $g(x) < h(x) < f(x)$ reláció áll fenn.

Tehát az $x_1 = -1,\ \ x_2 = 2$ helyeken kívül másutt nem lehet $f(x) = g(x)$.