Binom Dağılımı Örnek

Bir fabrikada üretilen herhangi bir ürünün kusurlu olma olasılığının 1/20 olduğu bilinmektedir. Bu fabrikada üretilen ürünler arasından rassal olarak seçilen 4 üründen,
a) İki tanesinin kusurlu olma olasılığı kaçtır?
b) En fazla birinin kusurlu olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:
Binom dağılımının koşullarını inceleyecek olursak üretilen ürünler arasından rassal olarak 4 ürün seçildiği için, n=4'tür. Her ürün için kusurlu olma ya da kusurlu olmama olarak tanımlanan iki sonuç bulunur. X rassal değişkeni, seçilen 4 ürün arasındaki kusurlu ürün sayısını belirtir. Ürünün kusurlu olma olasılığı p=1/20 değeri sabittir ve son olarak seçilen bir ürünün kusurlu olması, bir diğerinin kusurlu olup olmamasını etkilemez. Dolayısıyla bu örnek olay, bir binom denemesidir ve istenen olasılıklar binom olasılık fonksiyonu yardımıyla bulunabilir.

a) $P(2) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} = {}_4C_2 \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(1-\frac{1}{20}\right)^{4-2}$

$= 6(0{,}0025)(0{,}9025) = 0{,}0135$

b) Ürünlerden en fazla birinin kusurlu olması olasılığını bulabilmek için, özel toplama kuralından faydalanılabilir. Çünkü ürünlerden hiçbirinin kusurlu olmaması ve sadece bir tanesinin kusurlu olması olayları karşılıklı ayrık olaylardır. Bu nedenle soruda istenen olasılık, ürünlerden hiçbirinin kusurlu olmaması olasılığı ile sadece bir tanesinin kusurlu olması olasılıklarını hesaplayıp bu olasılıkların toplanması yoluyla bulunur.

$$P(x \leq 1) = P(x=0) + P(x=1) = {}_4C_0 \left(\frac{1}{20}\right)^0 \left(1-\frac{1}{20}\right)^{4-0} + {}_4C_1 \left(\frac{1}{20}\right)^1 \left(1-\frac{1}{20}\right)^{4-1}$$

$= 1(1)(0{,}8145) + 4(0{,}05)(0{,}8574) = 0{,}9860$

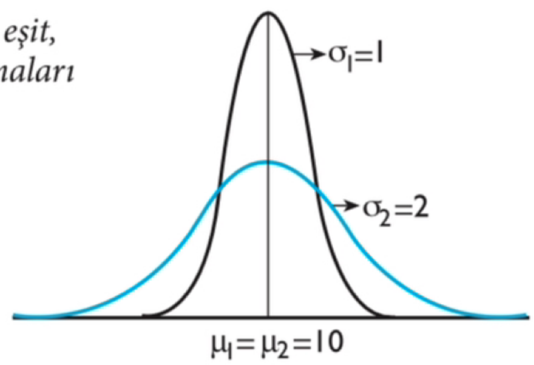
Dolayısıyla, fabrikada üretilen ürünler arasından rassal olarak seçilen 4 üründen en fazla birinin kusurlu olma olasılığı 0,986'dır.

Not: Bu haftanın ders içeriği Anadolu Ünversitesi 2590 Nolu İstatistik kitabından faydalanarak düzenlenmiştir.

Ortalama Dağılım Eğriler

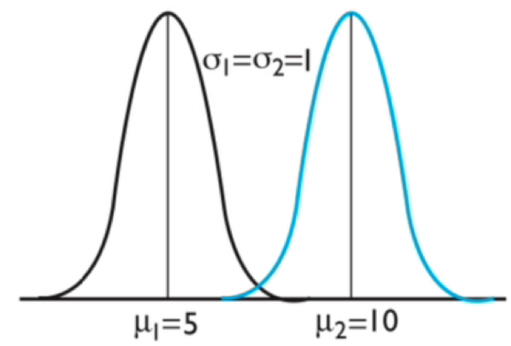
[redacted]

Ortalamaları eşit, standart sapmaları farklı normal dağılımlar



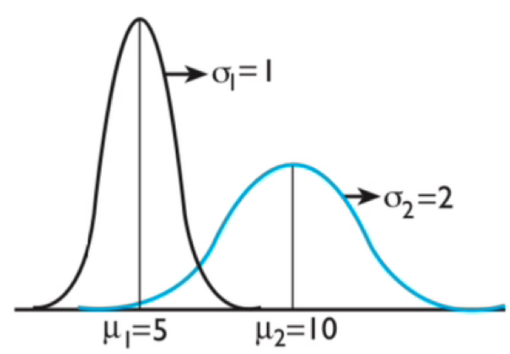
[redacted]

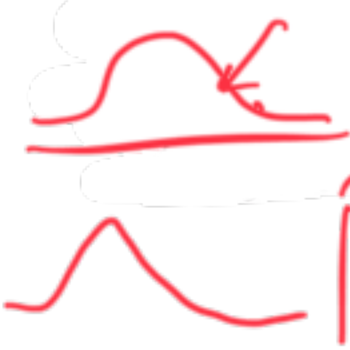
Ortalamaları farklı, standart sapmaları eşit normal dağılımlar



[redacted]

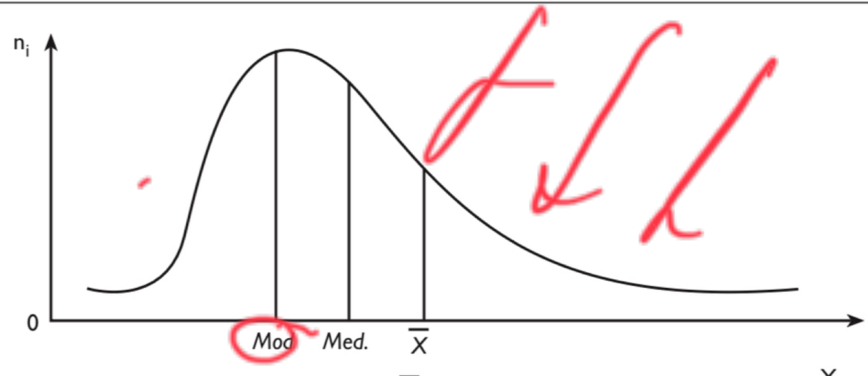
Ortalamaları ve standart sapmaları farklı normal dağılımlar





[redacted]

Asimetrisi sağa çarpık eğri



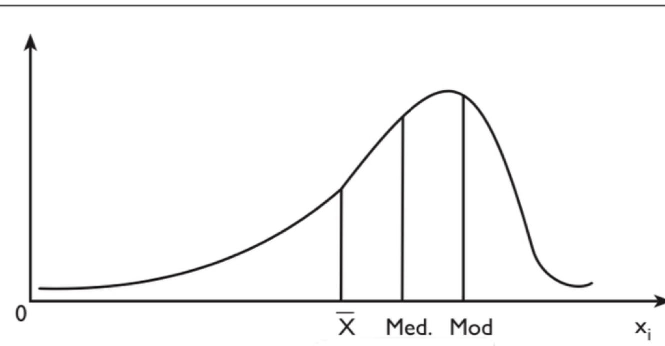
Mod < Med. < $\bar{X}$

Mod=165<Med=169<$\bar{X}$=172

skew

[redacted]

Asimetrisi sola çarpık eğri



$\bar{X}$ < Med < Mod

Thanh Öner Forum

z-scaling

$$z = \frac{\overset{12}{X} - \overset{6}{\mu}}{\sigma\ 6}$$

$\mu \rightarrow$ aritmetik ortalama

$\sigma \rightarrow$ standart sapma

z değerleri, X gözlem değerlerinin aritmetik ortalamadan kaç standart sapma uzaklıkta olduğunu gösteren değerlerdir.

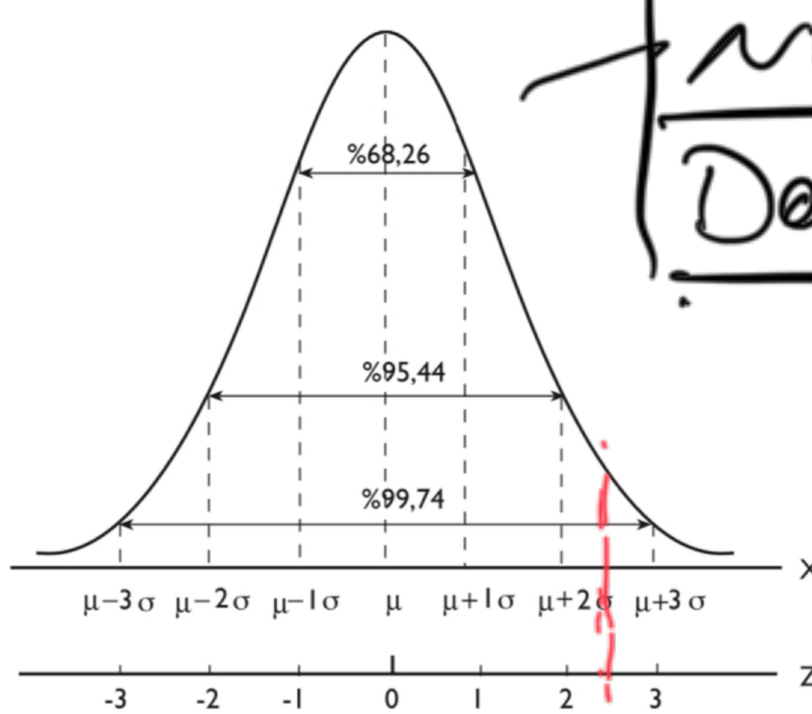
Normal Dağılım İçin Bazı Alan Değerleri

Aritmetik Ortalama		Standart Sapma	Kapsadığı Alan
μ	∓	1σ	0,3413+0,3413=0,6826
μ	∓	2σ	0,4772+0,4772=0,9544
μ	∓	3σ	0,4987+0,4987=0,9974

aritmetik ortalamadan ∓ 1s'dan ∓ 3σ'ya kadar uzaklaşıldığında ortaya çıkan alanlar görülmektedir.

[redacted]

Normal Dağılım Eğrisinin Altında Kalan Alanlar



Normal Dağılım

Burada, x değerleri z değerlerine dönüştürüldüğünde, ölçek de değişmektedir. Dönüşüm sonucu elde edilecek z değerleri de grafiğin alt kısmında görülmektedir. Örneğin, μ değerine karşılık gelen z değeri 0'dır, μ+1σ değerine karşılık gelen z değeri ise +1'dir.

Belli bir aralıkta eğrinin altında kalan alanın hesaplanabilmesi amacıyla, standart normal dağılım tablosu kullanılır. verilen bu tabloda, z değerleri ve bunlara karşılık gelen alanlar bulunur. Bu alanlar aynı zamanda standart normal dağılıma sahip bir rassal değişkenin 0 ile z aralığında bir değer alması olasılıklarını vermektedir. Normal dağılımın aritmetik ortalamaya göre simetrik bir dağılım olmasından dolayı, z'nin negatif değerleri için de aynı olasılıklar kullanılabilir.

Örnek

X rassal değişkeni, 100 aritmetik ortalaması ve 10 standart sapması ile normal dağılıma sahiptir. X'in 100 ile 123,3 arasında olma olasılığını bulunuz.

$$z = \frac{123,3-100}{10} = \boxed{2,33}$$

Çözüm

X rassal değişkeni, 100 aritmetik ortalaması ve 10 standart sapması ile normal dağılıma sahiptir. X'in 100 ile 123,3 arasında olma olasılığını bulunuz.

Çözüm:
Burada, P(100<x<123,3) olasılığı sorulmaktadır. Bu olasılığın bulunabilmesi için, ilk olarak alt sınır 100 ve üst sınır 123,3 değerlerinin, 25 no'lu eşitlik kullanılarak z değerlerine dönüştürülmesi gerekir.

x=100 değerine karşılık gelen z değeri, $z = \dfrac{100-100}{10} = 0$ 'dır. Yukarıda belirtildiği üzere, aritmetik ortalamaya karşılık gelen z değeri daima 0'dır. x=123,3 değerine karşılık gelen z değeri ise, $z = \dfrac{123,3-100}{10} = 2,33$ olarak elde edilir. Ardından standart normal dağılım tablosuna bakılır. Tablo 5.4'te bu tablonun bir bölümü görülmektedir. z=0 ile z=2,33 arasında kalan bölgenin alanını bulabilmek için tabloda z harfi ile belirtilen ilk sütunda 2,3 değerini bulana kadar aşağıya doğru ilerlenir. Daha sonra, bu satırda sağa doğru ilerlenir ve 0,03 ile başlayan sütunun altındaki alan değeri 0,4901 olarak bulunur. Bu da, 0,00 ile 2,33 arasında eğrinin altında kalan alanın 0,4901 olduğu anlamına gelir ve bu değer X'in 100 ile 123,3 arasında yer alma olasılığıdır.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	...
⋮								
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	
⋮								

2,33

7,354

Sen: Standart normal eğri altındaki z=-1,16'nın sağındaki alanı bulunuz → ödev

Örnek:

Otomobil lastiği üretimi yapan bir fabrikada, üretilen lastiklere uygulanan bir dayanıklılık testi sonucunda lastiklerin teste dayanma sürelerinin, aritmetik ortalaması 242 sn. ve standart sapması 36 sn. ile normal dağılıma sahip olduğu bilinmektedir. Bu fabrikada üretilen ve teste tabi tutulan lastikler arasından rassal olarak seçilen bir lastiğin teste dayanma süresinin,

a) 300 sn.'den fazla olma,

b) 220 ile 290 sn. arasında olma,

c) 256 ile 308 sn. arasında olma olasılıklarını bulunuz.

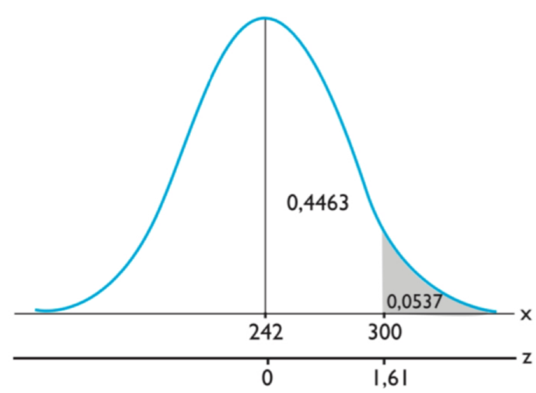
d) Toplam 150 lastiğe test uygulandığı bilindiğine göre, bu teste 300 sn.'den daha fazla dayanabilen lastik sayısı kaçtır?

O

Çözüm:
X rassal değişkeni, "Lastiğin dayanıklılık testine dayanma süresi" olarak tanımlandığında, soruda verilen bilgilere göre bu X rassal değişkeninin dağılımı, ortalaması 242 sn. ve standart sapması 36 sn. ile normal dağılımdır.

a) Seçilen lastiğin teste dayanma süresinin 300 sn.'den fazla olma olasılığını bulabilmek için öncelikle bu X değerine karşılık gelen z değeri hesaplanmalıdır. Diğer bir deyişle, z dönüşümü uygulanmalıdır.

x=300 noktasına karşılık gelen z değeri, $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{300-242}{36} = 1,61$ olarak elde edilir. Buna göre soruda istenen olasılık; z=1,61 değerinin sağında kalan bölgenin alanı olacaktır. Dikkat edilirse aritmetik ortalamanın (ya da z=0 noktasının) sağında ve normal dağılım eğrisinin altında kalan bölgenin alanı, toplam alanın yarısı olan 0,5'tir. Standart normal dağılım tablosuna göre z=0 ile z=1,61 arasındaki bölgenin alanı 0,4463 olarak bulunur. Buna göre, soruda istenen olasılığı bulabilmek için 0,5 değerinden, z=1,6 değerine karşılık gelen alanı, yani 0,4463 değerini çıkartmak gerekir.



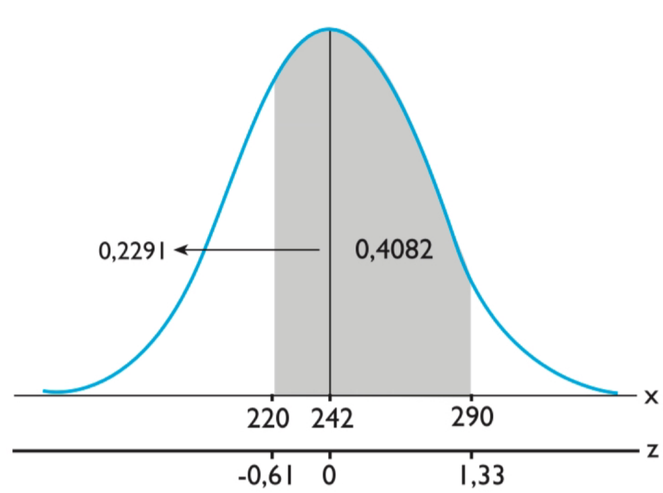
Buna göre, seçilen lastiğin teste dayanma süresinin 300 sn.'den fazla olma olasılığı;

$P(x>300)=P(z>1,61)=0,5-P(0<z<1,61)$
$=0,5-0,4463=0,0537$ olarak bulunur.

b) Seçilen lastiğin teste dayanma süresinin 220 ile 290 sn. arasında olma olasılığını bulabilmek için bu değerlere karşılık gelen iki tane z değeri hesaplanmalıdır.

x_1=220 noktasına karşılık gelen z_1 değeri, $z_1 = \frac{220-242}{36} = -0,61$ ve x_2=290 noktasına karşılık gelen z_2 değeri, $z_2 = \frac{290-242}{36} = 1,33$ olarak elde edilir.

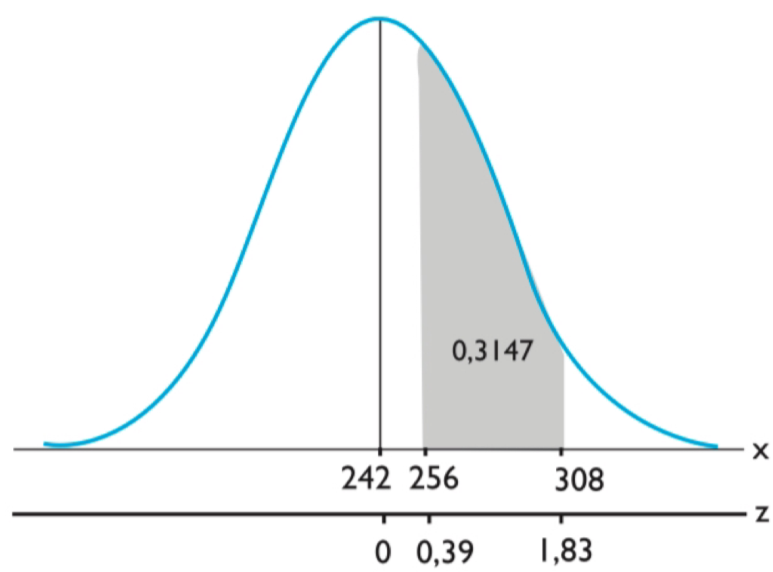
Standart normal dağılım tablosuna göre, z_1=-0,61 değeri için eğri altında kalan alan 0,2291 ve z_2=1,33 değeri için alan 0,4082 olarak bulunur. Buna göre, soruda istenen olasılığı bulabilmek için bu iki olasılığı toplamak gerekir.



Buna göre, seçilen lastiğin teste dayanma süresinin 220 ile 290 sn. arasında olma olasılığı;

$P(220<x<290)=P(-0,61<z<1,33)=P(0<z<0,61)+P(0<z<1,33)$
$=0,2291+0,4082=0,6373$ olarak bulunur.

c) x_1=256 noktasına karşılık gelen z_1 değeri, $z_1 = \dfrac{256-242}{36} = 0,39$ ve x_2=308 noktasına karşılık gelen z_2 değeri, $z_2 = \dfrac{308-242}{36} = 1,83$ olarak elde edilir. Standart normal dağılım tablosuna göre, z_1=0,39 değeri için eğri altında kalan alan 0,1517 ve z_2=1,83 değeri için alan 0,4664 olarak bulunur. Buna göre, soruda istenen olasılığı bulabilmek için büyük olasılık değerinden küçük olanı çıkartmak gerekir.



Buna göre, seçilen lastiğin teste dayanma süresinin 256 ile 308 sn. arasında olma olasılığı;

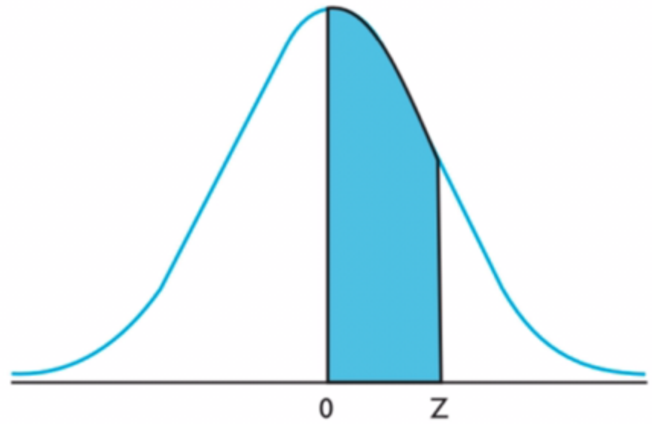
$$P(256<x<308)=P(0,39<z<1,83)=P(0<z<1,83)-P(0<z<0,39)$$
$$=0,4664-0,1517=0,3147 \text{ olarak bulunur.}$$

d) Sorunun (a) şıkkında, fabrikada üretilen ve dayanıklılık testine tabi tutulan lastikler arasından rassal olarak seçilen bir lastiğin teste dayanma süresinin 300 sn.'den fazla olma olasılığı 0,0537 olarak bulunduğuna göre, bu değer teste tabi tutulan toplam 150 lastiğin % 5,37'sinin teste dayanma süresinin 300 sn.'den fazla olduğunu gösterir. Dolayısıyla, kaç adet lastiğin teste dayanma süresinin 300 sn.'den fazla olduğunu bulabilmek için toplam lastik sayısı ile olasılık değerini çarpmak gerekir.

Sorunun cevabı; $150 \times 0,0537 \cong 8$ lastik olarak hesaplanır.

Ödev

Normal dağılıma sahip bir rassal değişkenin aritmetik ortalaması 6,4 ve standart sapması 1,2 ise bu rassal değişkenin 7'den küçük olma olasılığı kaçtır?



Tablo 1: Normal Eğri Alanları

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990