Distancia de un punto a un plano

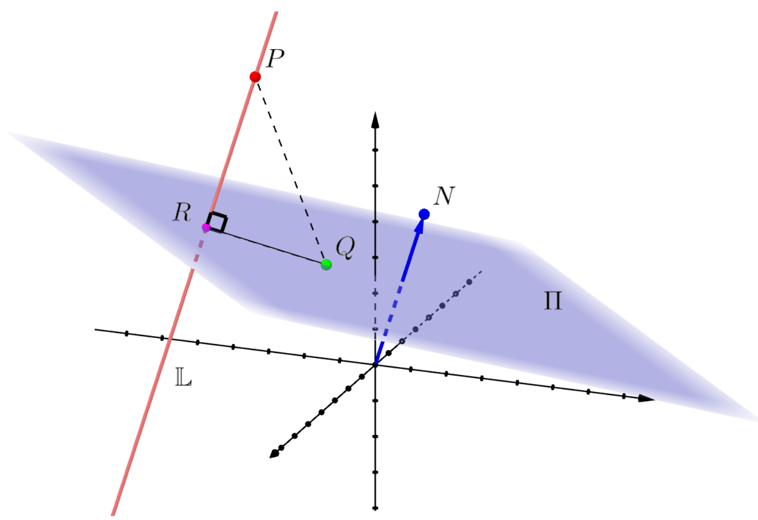
Recordemos que para medir distancias entre puntos utilizamos la norma con la fórmula:

$$\text{dist}(A, B) = \|B - A\|.$$

Dados un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y un plano Π definimos la distancia entre ellos, $\text{dist}(P, \Pi)$, como la que hay entre el punto P y el punto de Π más cercano a P.

Ejemplo 1. Dados $P = (1, -3, 8)$ y $\Pi : -x + y + 4z = 10$, hallar el punto de Π más cercano a P y calcular la distancia entre P y Π.

Solución: En el gráfico podemos ver que el punto R que buscamos está sobre la recta $\mathbb{L}$ perpendicular a Π que pasa por P. Efectivamente, si tomamos otro punto Q en el plano, el segmento que mide su distancia a P es la hipotenusa del triángulo rectángulo PRQ y por lo tanto su longitud es mayor que la del cateto $\overline{RP}$.



Para hallar R buscamos la intersección de la recta $\mathbb{L}$ con el plano Π.
En primer lugar, hallamos una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}$.
Como vector director nos sirve el vector normal del plano y como punto de paso tenemos a P:

$$\mathbb{L} : \lambda(-1, 1, 4) + (1, -3, 8)$$

El punto que buscamos lo encontramos como $R \in \mathbb{L} \cap \Pi$.

Como R debe pertenecer a $\mathbb{L}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$R = \lambda(-1, 1, 4) + (1, -3, 8) = (-\lambda + 1, \lambda - 3, 4\lambda + 8).$$

Reemplazando en la ecuación del plano obtenemos

$$-(-\lambda + 1) + (\lambda - 3) + 4(4\lambda + 8) = 10 \iff 18\lambda + 28 = 10 \iff \lambda = -1$$

y, entonces, el punto que buscamos es $R = -1(-1, 1, 4) + (1, -3, 8) = (2, -4, 4)$.

Con este punto calculamos la distancia de P al plano Π

$$\text{dist}(P, \Pi) = \text{dist}(P, R) = \|(2, -4, 4) - (1, -3, 8)\| = \sqrt{18}$$

Respuesta: El punto de Π más cercano a P es $R = (2, -4, 4)$ y la distancia de P a Π es $\sqrt{18}$.

Fórmula para la distancia entre un punto y un plano

Si Π es el plano de vector normal $N = (a, b, c)$ que pasa por el punto Q, podemos calcular la distancia de un punto $P = (x_P, y_P, z_P)$ al plano Π, con el procedimiento visto en el ejemplo anterior:

i) Buscamos la recta $\mathbb{L}$ perpendicular a Π que pasa por P.

ii) Hallamos el punto R de la intersección entre $\mathbb{L}$ y Π.

iii) Calculamos $\text{dist}(P, \Pi) = \text{dist}(P, R)$.

i) La recta perpendicular al plano que pasa por P es $\mathbb{L} : \lambda N + P$.

ii) Para el punto R más cercano a P vale, como antes:

$$R = \lambda N + P \quad \text{para algún valor de } \lambda \in \mathbb{R}$$

y cumple la ecuación del plano Π:

$$(R - Q) \cdot N = 0$$

Reemplazando la expresión de R como punto de la recta $\mathbb{L}$ en la ecuación del plano

$$(\lambda N + P - Q) \cdot N = 0$$

podemos despejar λ:

$$\lambda N \cdot N + (P - Q) \cdot N = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda N \cdot N = (Q - P) \cdot N \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{(Q - P) \cdot N}{N \cdot N}$$

Recordando que $N \cdot N = \|N\|^2$ tenemos

$$\lambda = \frac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2}$$

y

$$R = \frac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2} N + P \quad \text{o} \quad R = \frac{d - P \cdot N}{\|N\|^2} N + P \quad (\text{con } d = Q \cdot N)$$

iii) La distancia entre P y el plano Π queda expresada en términos de P, N y Q:

$$\text{dist}(P, \Pi) = \|R - P\| = \left\| \left(\frac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2} N + P \right) - P \right\| = \left\| \frac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2} N \right\|$$

Podemos simplificar esta fórmula teniendo en cuenta que el cociente $\dfrac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2}$ es un escalar y la norma de N es un número positivo:

$$\operatorname{dist}(P,\Pi) = \left|\frac{(Q-P)\cdot N}{\|N\|^2}\right| \|N\| = \frac{|(Q-P)\cdot N|}{\|N\|^2}\|N\| = \frac{|(Q-P)\cdot N|}{\|N\|}$$

$$\boxed{\operatorname{dist}(P,\Pi) = \frac{|(Q-P)\cdot N|}{\|N\|}}$$

que, en términos de las coordenadas de los vectores y con $d = Q\cdot N$, se puede expresar

$$\boxed{\operatorname{dist}(P,\Pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Observación:

Al punto R del plano más cercano al punto P se lo denomina *proyección ortogonal* de P sobre el plano Π y se lo puede calcular con las fórmulas obtenidas en la deducción anterior:

$$\boxed{R = \frac{(Q-P)\cdot N}{\|N\|^2}N + P \quad \text{o} \quad R = \frac{d - P\cdot N}{\|N\|^2}N + P \quad (\text{si } \Pi : ax+by+cz=d)}$$

Si aplicamos estas fórmulas en el Ejemplo 1 obtenemos:

$$\operatorname{dist}((1,-3,8),\Pi) = \frac{|-1+(-3)+4\cdot 8-10|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}} = \frac{|18|}{\sqrt{18}} = \sqrt{18}$$

y

$$R = \frac{10-(1,-3,8)\cdot(-1,1,4)}{\|(-1,1,4)\|^2}(-1,1,4)+(1,-3,8) = \frac{10-28}{18}(-1,1,4)+(1,-3,8) = (2,-4,4).$$

Al punto S que pertenece a la recta que pasa por P y R, tal que $\operatorname{dist}(S,\Pi) = \operatorname{dist}(P,\Pi)$ y tal que $P \neq S$ lo llamamos el *simétrico* de P con respecto a Π.
Para calcular el simétrico de P con respecto a Π, alcanza con notar que R es el punto medio entre P y S, por lo tanto

$$\frac{P+S}{2} = R \qquad \Rightarrow \qquad S = 2R - P$$

En el Ejemplo 1, $S = 2(2,-4,4)-(1,-3,8) = (3,-5,0)$.

Ejemplo 2. Hallar los puntos de la recta $\mathbb{L} : \lambda(-2,1,2)+(2,3,0)$ que están a distancia $\sqrt{6}$ del plano $\Pi : -x+2y+7z = 2$.

Solución: Si P es un punto de la recta $\mathbb{L}$, debe cumplir

$$P = \lambda(-2,1,2) + (2,3,0) = (-2\lambda + 2, \lambda + 3, 2\lambda)$$

para algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.
Usamos la fórmula para la distancia al plano

$$\text{dist}(P,\Pi) = \frac{|-x_P + 2y_P + 7z_P - 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2}}$$

y reemplazamos las coordenadas de P para despejar los valores de λ que dan lugar a puntos de la recta que están a distancia $\sqrt{6}$ de Π:

$$\text{dist}(P,\Pi) = \frac{|-(-2\lambda+2) + 2(\lambda+3) + 7(2\lambda) - 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2}} = \sqrt{6}$$

$$\frac{|2\lambda - 2 + 2\lambda + 6 + 14\lambda - 2|}{\sqrt{54}} = \sqrt{6}$$

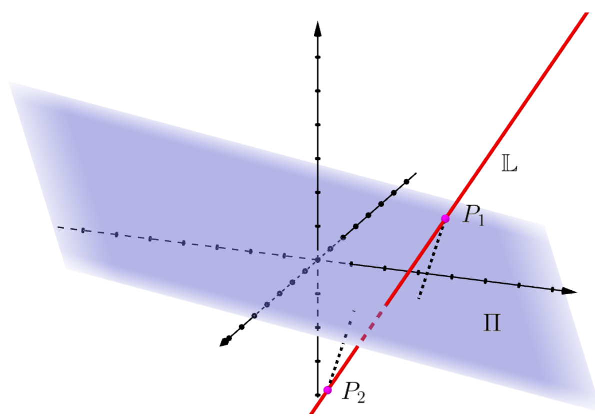
$$|18\lambda + 2| = \sqrt{6}\sqrt{54} = 18$$

El módulo nos lleva a dos posibilidades:

i) $18\lambda_1 + 2 = 18$

ii) $18\lambda_2 + 2 = -18$

De i) se obtiene $\lambda_1 = \dfrac{8}{9}$ y de ii) $\lambda_2 = -\dfrac{10}{9}$, lo que nos da dos puntos en la recta:



$P_1 = \dfrac{8}{9}(-2,1,2) + (2,3,0) = \left(\dfrac{2}{9}, \dfrac{35}{9}, \dfrac{16}{9}\right)$

$P_2 = -\dfrac{10}{9}(-2,1,2) + (2,3,0) = \left(\dfrac{38}{9}, \dfrac{17}{9}, -\dfrac{20}{9}\right)$

$$\boxed{\text{Respuesta: Los puntos buscados son } P_1 = \left(\frac{2}{9}, \frac{35}{9}, \frac{16}{9}\right) \text{ y } P_2 = \left(\frac{38}{9}, \frac{17}{9}, -\frac{20}{9}\right).}$$

Verificación:

$$\operatorname{dist}(P_1,\Pi)=\frac{\left|-\frac{2}{9}+2\frac{35}{9}+7\frac{16}{9}-2\right|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+7^2}}=\frac{|18|}{\sqrt{54}}=\sqrt{6}$$

$$\operatorname{dist}(P_2,\Pi)=\frac{\left|-\frac{38}{9}+2\frac{17}{9}+7\left(-\frac{20}{9}\right)-2\right|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+7^2}}=\frac{|-18|}{\sqrt{54}}=\sqrt{6}$$

Ejemplo 3. Hallar los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que están a distancia $\sqrt{6}$ del plano $\Pi : -x+2y+7z=2$.

Solución: Si tomamos $P=(x,y,z)$, la condición de la distancia se cumple si se satisface la ecuación

$$\operatorname{dist}(P,\Pi)=\frac{|-x+2y+7z-2|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+7^2}}=\sqrt{6}$$

que reagrupando nos conduce a

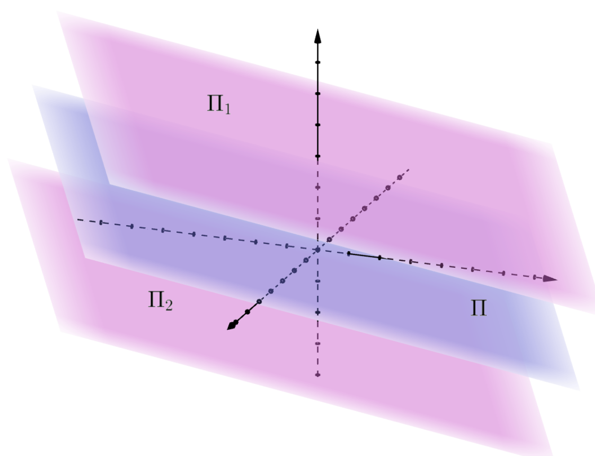
$$|-x+2y+7z-2|=\sqrt{6}\sqrt{54}=18.$$

Esto equivale a que valga alguna de las dos igualdades siguientes:

i) $-x+2y+7z-2=18 \iff -x+2y+7z=20$

ii) $-x+2y+7z-2=-18 \iff -x+2y+7z=-16$

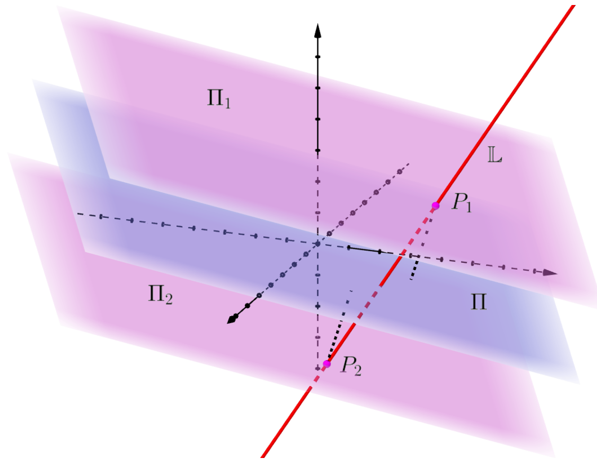
Cada una de estas ecuaciones describe un plano de soluciones.



Respuesta: Los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que están a distancia $\sqrt{6}$ del plano Π son los pertenecientes a los planos $\Pi_1 : -x+2y+7z=20$ y $\Pi_2 : -x+2y+7z=-16$.

Observación:

En este problema, el plano Π y la distancia que buscamos son los mismos que en el Ejemplo 2. Los puntos P_1 y P_2 que encontramos en ese ejemplo pueden verse como las intersecciones entre los planos Π_1 y Π_2 con la recta $\mathbb{L}$.



Ejemplo 4. Si $\Pi_1 : y + 4z = 1$ y $\Pi_2 : -x + 10y + z = -21$, hallar todos los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que verifican: $2\,\text{dist}(P, \Pi_1) = \sqrt{6}\,\text{dist}(P, \Pi_2)$.

Solución: Si tomamos $P = (x, y, z)$, las fórmulas para la distancia de P a cada plano quedan:

$$\text{dist}(P, \Pi_1) = \frac{|y + 4z - 1|}{\sqrt{1^2 + 4^2}}$$

$$\text{dist}(P, \Pi_2) = \frac{|-x + 10y + z - (-21)|}{\sqrt{(-1)^2 + 10^2 + 1^2}}$$

Planteando la relación que buscamos entre las distancias nos queda la igualdad

$$2\frac{|y + 4z - 1|}{\sqrt{17}} = \sqrt{6}\frac{|-x + 10y + z - (-21)|}{\sqrt{102}} \iff \frac{2|y + 4z - 1|}{\sqrt{17}} = \frac{|-x + 10y + z + 21|}{\sqrt{17}}.$$

Simplificando llegamos a la igualdad

$$2|y + 4z - 1| = |-x + 10y + z + 21|.$$

Esta igualdad equivale a que valga alguna de las dos igualdades siguientes:

i) $2(y + 4z - 1) = (-x + 10y + z + 21) \iff x - 8y + 7z = 23$

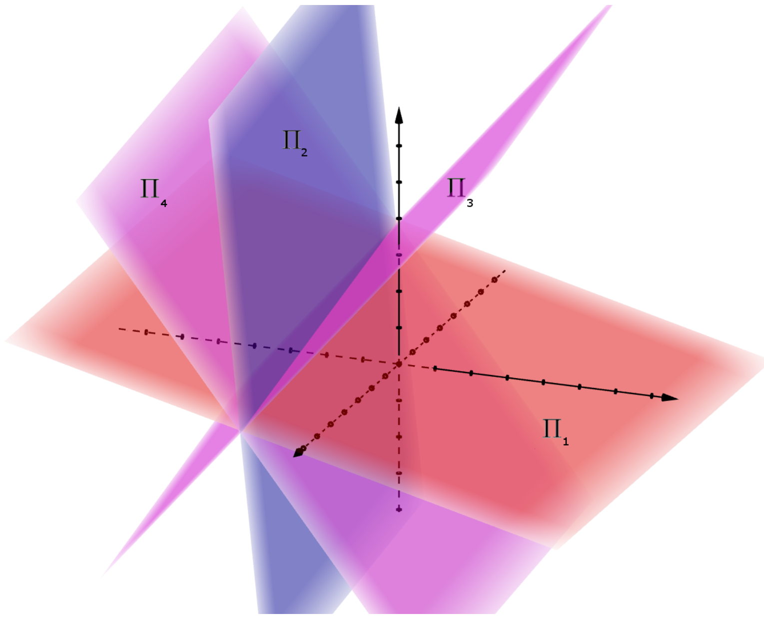
ii) $2(y + 4z - 1) = -(-x + 10y + z + 21) \iff -x + 12y + 9z = -19$

Cada una de estas ecuaciones representa un plano de soluciones.

Respuesta: Los puntos P que verifican la relación $2\,\text{dist}(P, \Pi_1) = \sqrt{6}\,\text{dist}(P, \Pi_2)$ son los de los planos $\Pi_3 : x - 8y + 7z = 23$ y $\Pi_4 : -x + 12y + 9z = -19$.

Ejemplo 5. Dados el plano $\Pi : 2x + 3y - 6z = 3$ y la recta $\mathbb{L} : \lambda(-1, 2, 3) + (2, 2, 0)$, hallar la ecuación paramétrica de una recta $\mathbb{L}'$ que cumpla simultáneamente:

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \text{dist}(P, \Pi) = 2\ \forall P \in \mathbb{L}'.$$



Solución: Buscamos un vector director $\mathbf{v}$ y un punto de paso Q para $\mathbb{L}'$ que garanticen simultáneamente

$\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset$:

i) Debe existir al menos un punto S que cumpla $S \in \mathbb{L}$ y $S \in \mathbb{L}'$.

y $\text{dist}(P, \Pi) = 2 \quad \forall P \in \mathbb{L}'$:

Esta condición dice literalmente que la distancia al plano debe ser la misma para todos los puntos de $\mathbb{L}'$ y esto implica que $\mathbb{L}'$ debe ser paralela al plano Π.

ii) $\mathbb{L}' // \Pi \quad \iff \quad \mathbf{v} \perp (2, 3, -6)$

Además, el punto de paso Q tiene que cumplir

iii) $\text{dist}(Q, \Pi) = 2$.

El punto S de i), por pertenecer a $\mathbb{L}'$, tiene que cumplir la condición de la distancia. Si tomamos $Q = S$ como punto de paso de la recta, se cumplirán simultáneamente las condiciones i) y iii). Calculemos entonces S como un punto de $\mathbb{L}$ a distancia 2 del plano Π.

Si $S \in \mathbb{L}$, debe cumplir $S = \lambda(-1, 2, 3) + (2, 2, 0) = (-\lambda + 2, 2\lambda + 2, 3\lambda)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Reemplazando en la fórmula de la distancia a Π

$$\text{dist}(S, \Pi) = \frac{|2x_S + 3y_S - 6z_S - 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}}$$

podemos despejar λ

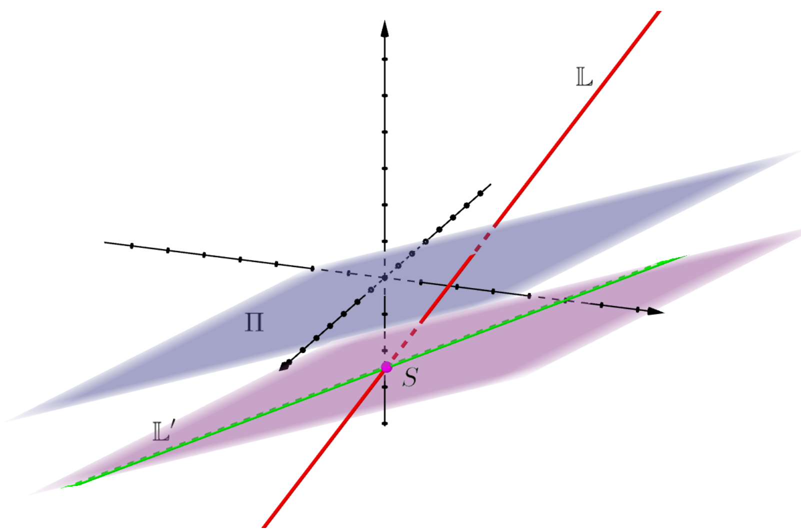
$$\text{dist}(S, \Pi) = \frac{|2(-\lambda + 2) + 3(2\lambda + 2) - 6(3\lambda) - 3|}{7} = 2$$

$$|-14\lambda + 7| = 14$$

es decir,
$$-14\lambda + 7 = 14 \quad \text{o} \quad -14\lambda + 7 = -14.$$
Tenemos dos soluciones: $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ y $\lambda_2 = \dfrac{3}{2}$.

Como el problema nos pide una sola recta podemos elegir cualquiera de los dos valores, por ejemplo con $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ obtenemos el punto
$$R = -\frac{1}{2}(-1, 2, 3) + (2, 2, 0) = \left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right).$$
Nos queda la condición ii), que podemos hacer que se cumpla con cualquier vector ortogonal a $(2, 3, -6)$, por ejemplo, $(0, 2, 1)$.

$\boxed{\text{Respuesta: Una recta } \mathbb{L}' \text{ que cumple lo pedido es } \mathbb{L}' : \lambda(0,2,1) + \left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right).}$



Verificación:

$\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset$:

$\left(\dfrac{5}{2}, 1, -\dfrac{3}{2}\right) \in \mathbb{L}$: Se obtiene con $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ en la ecuación paramétrica.

$\left(\dfrac{5}{2}, 1, -\dfrac{3}{2}\right) \in \mathbb{L}'$: Lo usamos como punto de paso.

$\text{dist}(P, \Pi) = 2 \quad \forall P \in \mathbb{L}'$:

$\mathbb{L}' // \Pi : \quad (0, 2, 1) \cdot (2, 3, -6) = 0.$

$$d\left(\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right), \Pi\right) = \frac{\left|2\frac{5}{2} + 3 \cdot 1 - 6\left(-\frac{3}{2}\right) - 3\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{|5 + 3 + 9 - 3|}{7} = \frac{|14|}{7} = \frac{14}{7} = 2.$$