

变分原理

泛函是指某一个量，它的值依赖于其它一个或者几个函数。因此泛函也称为函数的函数。

变分法的基本问题是求解泛函的极值。

对于弹性力学问题，根据能量关系可以使偏微分方程的边值问题转化为代数方程。弹性体的应变能是基本未知量应力或者应变分量的函数，当然应力或者应变分量是坐标的函数。因此，应变能就是泛函。

在数学分析中，讨论函数和函数的极值。变分法讨论泛函的极值，是极值问题的推广。

下面简单介绍复变函数的定义和基本性质。如果需要深入探讨复变函数问题，请查阅参考资料。

§1 泛函和泛函的极值

首先引入泛函的概念。泛函是指某一个量，它的值依赖于其它一个或者几个函数。因此泛函也称为函数的函数。

变分法的基本问题是求解泛函的极值

作为变分法的简单例题。考察 x, y 平面上连接两个定点的所有曲线中，求满足边界条件的任意曲线 $y(x)$ 中的最短曲线。

(补充图)

设 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 为平面上给定的两点， $y(x)$ 为连接两点的任意曲线。于是，这一曲线的长度为

$$L(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

连接 P_1, P_2 两点的曲线有无数条，每一条曲线都有一个 L 值与其对应。满足边界条件的 $y(x)$ 称为容许函数，问题是要从这些曲线，容许函数中找出使得曲线长度 L 最小的一条。

根据上式， $L[y]$ 依赖于 $y(x)$ ，而 $y(x)$ 是 x 的函数，因此称 $y(x)$ 为自变函数； $L[y]$ 是依赖于自变函数的函数，称为泛函。

求解最短程线问题，即在满足边界条件

$$\text{在 } x=x_1 \text{ 时, } y(x_1)=y_1, y'(x_1)=y'_1$$

$$\text{在 } x=x_2 \text{ 时, } y(x_2)=y_2, y'(x_2)=y'_2$$

的函数 $y(x)$ 中，求使得泛函 $L[y]$ 为极值的特定函数。因此 $y(x)$ 称为容许函数。

上述问题应用变分法可以概括为求解泛函

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

在边界条件 $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$ 的极小值问题。

§2 泛函极值的必要条件-欧拉方程

假设函数 $y(x)$ 是使得泛函 $L[y]$ 为最小的特定函数（真实的）。变分法有兴趣研究的是邻近于 $y(x)$ 的任意容许函数 $\bar{y}(x)$ 引起泛函 $L[\bar{y}(x)]$ 的改变。设

$$\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x)$$

其中 ε 为小参数，而 $\eta(x)$ 为边界值为零的任意函数。当 x 固定时，容许函数 $\bar{y}(x)$ 与 $y(x)$ 的差 δy 称为泛函自变函数的变分，即

$$\delta y = \bar{y}(x) - y(x) = \varepsilon \eta(x)$$

类似地，容许函数 $\bar{y}(x)$ 的斜率与 $y(x)$ 斜率的差 $\delta y'$ ，称为泛函自变函数斜率的变分，即

$$\delta y' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \varepsilon \eta'(x)$$

应该注意 δy 与函数 $y(x)$ 的微分 dy 之间的差别， dy 是自变量 x 的改变量 dx 引起的 $y(x)$ 的无穷小增量。而变分 δy 是 $y(x)$ 的任意一个微小的改变量。设泛函增量

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

按泰勒级数展开，则

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \\
&\quad \frac{1}{2!} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} (\delta y')^2 \right] dx + \dots
\end{aligned}$$

设泛函的增量由泛函的变分表示，有

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \\
\delta^2 J &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} (\delta y')^2 \right] dx \\
&\dots \\
\delta^k J &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta y' \frac{\partial}{\partial y'} \right)^{(k)} F dx
\end{aligned}$$

分别定义为泛函的一阶，二阶或 k 阶变分，分别为 δJ 的一次，二次或者 k 次齐次式。

根据假设， $y(x)$ 是使得泛函 $J[y]$ 为最小的特定函数。从而泛函增量 ΔJ 大于零。注意到当参数 ε 减小时，函数 $\bar{y}(x)$ 趋近于 $y(x)$ ，泛函增量 ΔJ 趋近于零。

首先讨论泛函 $J[y]$ 为极值的条件，考虑泛函增量各项相对量阶的大小。由于一阶变分 δy 与小参数 ε 成正比，而二阶变分 $\delta^2 y$ 与小参数 ε^2 成正比，一般的讲，而 k 阶变分 $\delta^k y$ 与小参数 ε^k 成正比。因此，当 ε 充分小时，二阶以上各项变分与一阶变分 δJ 比较，可以忽略不计。所以，泛函增量 ΔJ 趋近于零的条件为

$$\Delta J = 0$$

在泛函极值条件确定后，如果分析泛函的极值是最小值还是最大值，需要考虑泛函的二阶变分 $\delta^2 J$ 。

在泛函极值条件确定后，如果分析泛函的极值是最小值还是最大值，需要考虑泛函的二阶变分。因为满足极值条件时

$$\Delta J = \frac{1}{2!} \delta^2 J + \frac{1}{3!} \delta^3 J + \dots$$

由于二阶变分 $\delta^2 J$ 与小参数 ε 成正比，而 k 阶变分 $\delta^k J$ 与小参数 ε^k 成正比。因此，当 ε 充分小时，三阶以上变分与二阶变分 $\delta^2 J$ 比较，可以忽略不计。因此，如果

$\delta^2 J \geq 0$, 则 $\Delta J > 0$, 泛函 $J[y]$ 为极小值的; 反之, 如果 $\delta^2 J \leq 0$, 则 $\Delta J < 0$, 泛函 $J[y]$ 为极大值的。

因此可以得出结论, 泛函 J 具有极值的条件是其一阶变分 $\delta J = 0$, 如果二阶变分 $\delta^2 J$ 是正定的, 则此极值是最小值; 如果二阶变分 $\delta^2 J$ 是负定的, 则此极值是最大值。

上述条件为泛函极值的充分条件。以下讨论泛函 $J[y]$ 极值的必要条件。

对于泛函 $J[y]$ 的一阶变分

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0$$

由于变分 δy 和 $\delta y'$ 不是独立无关的, 因此上式第二项积分可以写作

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

回代则

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

回代, 则

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

由于函数 $y(x)$ 在 P_1, P_2 两点的值为已知, δy 在这两点不可能有变化, 即在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 时, $\delta y=0$, 所以

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

由于 δy 在区间 (x_1, x_2) 是 x 的任意函数, 所以上式成立的必要条件为积分函数在区间 (x_1, x_2) 内为零。即 $y(x)$ 能使得泛函为最大或者最小的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

上式称为欧拉(Euler)方程。求解此方程并且利用相应的边界条件, 就可以确定 $y(x)$ 。欧拉方程仅仅是泛函极值存在的必要条件, 并不是充分条件。如果要确定泛函 J 为极大值或者极小值, 还需要判断其二阶变分 $\delta^2 J$ 大于还是小于零。

例题 III-1 已知泛函

$$J = \int_0^{x_2} [(y')^2 - y^2] dx$$

满足边界条件 $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, 试求泛函在什么曲线上取极值。

解: 欧拉方程为

$$2y + \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

$$y'' + y = 0$$

通解

$$y = C \cos x + D \sin x$$

根据边界条件, 可得: $C=0$, $D=1$

所以 $y = \sin x$

即泛函 $J = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2] dx$ 在正弦函数曲线上达到极值。

§3 自然边界条件

前面, 讨论的泛函极值问题, 假设自变函数 $y(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处的值是固定不变的。下面讨论自变函数 $y(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 边界处的值不确定时, 泛函的极值问题。

如果自变函数在边界的数值不能确定, 则

$$\delta y(x_1) \neq 0, \quad \delta y(x_2) \neq 0$$

为了满足极值条件, 则欧拉方程仍旧必须满足。原因是虽然边界和函数边界值都可以改变, 但是可以选择的变量函数中, 含有边界和函数边界值不变的这一类函数在内。这就是说容许函数中除了选取与所研究的变量函数具有相同边界之外, 也可以选取变边界的函数。例如泛函

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

中, 坐标 x_1 , x_2 和函数 $y(x_1)$, $y(x_2)$ 的值都是可以改变的, 即曲线 $y(x)$ 的端点位置是可变的。如果在端点可变的曲线中, $y(x)$ 使得泛函取极值, 则在端点固定曲线中, $y(x)$ 也必然使泛函取极值。这就是说, 对于可变边界问题, 首先必须满足边界不变的极值条件。因此, 欧拉方程必须满足。

除此之外, 对于边界变化的泛函极值问题, 还必须满足条件

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_2} = 0$$

否则，泛函不可能取极值。

这种根据极值条件而引入的在变分过程中得到的条件，称为自然边界条件。

§4 泛函变分的基本运算法则

泛函变分法则和微分运算法则基本相同。设 F_1, F_2 均为 $x, y, y' \dots$ 的函数，则

$$\delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2$$

$$\delta(F_1 \cdot F_2) = F_2 \delta F_1 + F_1 \delta F_2$$

$$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{1}{F_2^2} (F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2)$$

$$\delta(F)^n = n F^{n-1} \delta F$$