1 ベクトル概要

一般の場合としてのベクトル空間、線型空間の定義を述べる。
集合 V が以下の条件を満たすとき、体 K 上のベクトル空間、もしくは線型空間という。

1. V は加法群
2. $\forall a, b \in K$ と $\forall x, y \in V$ に対して、以下が成り立つ。
   (a) $(a+b)x = ax + by$
   (b) $a(x+y) = ax + ay$
   (c) $a(bx) = (ab)x$
   (d) $1x = x$

特に、V の元のことをベクトルと呼ぶ。
数学以外の分野でよく使われるのが、$K = \mathbb{R}$ か $K = \mathbb{C}$ の場合になる。
また線型空間について考えている場合には K の元をスカラーと呼ぶ。

2 行列について

K の元を、以下のように形式的に並べたものを (m, n) 型行列という。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

特に、$(m, 1)$ 型行列を縦ベクトル、$(1, n)$ 型行列を横ベクトルという。

3 内積

以下の条件を満たす、$V \times V$ から K への写像 $\mathbb{R}$ を内積という。(どの程度一般の場合で定義するかにもよりますが。。。)

1. f は双線型、つまり
$$f(av_1 + bv_2, w) = af(v_1, w) + bf(v_2, w)$$
$$f(v, cw_1 + dw_2) = cf(v, w_1) + d(v, w_2)$$
2. $f(v, v) \geqq 0$
3. $f(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
4. $f(v, w) = f(w, x)$

4 ノルム

K 上の線型空間 V に対し、以下の性質をもつ写像 $\|\dot{|}\| \to \mathbb{R}$ を V 上のノルムという。

1. $\forall v \in V$ に対して、$v = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0$
2. $\forall a \in K, \forall v \in V$ に対して、$\|av\| = |a|\|v\|$
3. $\forall u, v \in V$ に対して、$\|u+v\| \leqq \|u\| + \|v\|$

特に通常使う、線型空間 $\mathbb{R}^n$ において、

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

も上記条件を満たしているので、ノルムである。
ノルムが 1 のベクトルを単位ベクトルという。

5 直交

$u, v \in V$ について、

$$(u, v) = 0$$

となるとき、u と v は直交しているという。

6 固有ベクトル

線型空間 V 上の線形変換を T とする。
ある $v \in V$ と、$\lambda \in V$ が存在して

$$Tv = \lambda v$$

となるとき、λ を固有値、v を固有値 λ に対する固有ベクトルという

7 もう少しラフな説明

上記の条件を満たしていれば、なんでも線型空間と呼ぶ。代表的なところからいくつかあげれば、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$ などにはじまり、V 上の線型写像全体の集合、区間 $[a, b]$ 上の連続関数の全体の集合 $C([a, b])$ などが挙げられます。

8 行列の和と積

8.1 行列の和

(m,n) 型行列 A,B に対して、成分同士の和をとった、

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & a_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

を A と B の和という。

8.2 行列の積

(l,m) 型行列 A と (m,n) 型行列 B に対して、

$$C=AB$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & a_{m2} & \dots & c_{ln} \end{pmatrix}$$

ただし、

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

となる C のことを行列 A と B の積という。

9 正則行列

正方行列 A に対し、その行列式が 0 ではないとき、正則行列という。
同値な定義はいくつか、その中の一つ。

10 逆行列

正則行列に対しては、ある行列 X が存在し、

$$XA=AX=E$$

となる。この行列 X を A の逆行列といい、通常は A^{-1} で表す。

11 転置行列

(m,n) 型行列 A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

に対し、

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

を転置行列という。

12 対角行列

$\forall i \in \mathbb{N}$ に対して、(i,i) 成分が以外が全て 0 である正方行列を対角行列という。

13 直交行列

$A^t = A^{-1}$ を満たす行列を直交行列という。

14 固有値分解

行列 A の固有ベクトルからなる行列 P を用いて、

$$B = P^{-1}AP$$

を A の固有値からなる対角行列にすることができることがある。(必ずできるとはいってない)

上記のような、B や P を求めることを固有値分解という。

固有値分解が必ずできるとは限らないので、そういう場合はより一般のジョルダン分解をすることになるが、ジョルダン分解であれば必ずできる。

15 もう少しラフにいうと

行列自体は線型写像由来の数学的背景がある意味もあるが、一方で本当にただ数を並べてみただけという側面もある。

といっても、なんの脈絡もなく、適当に並べたわけではなく、それなりの規則性をもって並べてみたら、なんかよくわからないけどうまくいってしまったという側面もある。

上記の線型写像のくだりも、理論体系が十分に整理された現在であれば、意味づけをきちんとできますが、歴史的には「とりあえずいじってみたらうまくいった」みたいな節もあります。

「線型空間とみなせる $\rightarrow$ 行列がつかえる」ということもあれば、逆パターンで「行列をつかってうまく表現できてしまった $\rightarrow$ 線型空間の理論に押し込んでみよう」みたいなことも、結構ある気がします。

16 固有値と固有ベクトル/例題

- 例題 1
  次の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- 例題 1/解答
  固有ベクトルを v、固有値を λ とする

$$\begin{aligned} & Av = \lambda v \\ & \Leftrightarrow (A - \lambda E)v = 0 \\ & \Leftrightarrow det(A - \lambda E) = 0 \\ & \Leftrightarrow det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8 = 0 \\ & \Leftrightarrow (\lambda - 8)(\lambda + 1)^2 = 0 \end{aligned}$$

  従って、 $\lambda = 8$ か、$\lambda = -1$(二重解)

  1. $\lambda = 8$ に対する固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

     に $\lambda = 8$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

     $v = (x, y, z)^t$ としたとき、

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} v = 0$$

     の解 x, y, z を求めたい。これを基本変形していくと、

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

     となる。
     このとき、z は任意定数 t にとれる。
     また、$y = \frac{1}{2}z, x = z$ と求まる。

従って、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となるので、$\lambda = 8$ に対する固有ベクトルは、

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル
   $\lambda = 8$ のときと同様にして、

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} v = 0$$

   の解 x, y, z を求めたい。
   基本変形をしていくと、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   となり、y と z が任意定数としてとれる。$y = s, z = t$ とする。
   $x = -\frac{1}{2}s - t$ となる。
   従って、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s - t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

   固有ベクトルは定数倍しても、固有ベクトルなので右辺のベクトルを -2 倍しておき

$$\begin{pmatrix} s + 2t \\ -2s \\ -2t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   従って、$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   の二つとなる。

- 例題 2
  次の行列の対角化をせよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- 例題 2/解答

$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1) = 0$$

をといて、固有値は $\lambda = 1$(2 重解) と $\lambda = -1$ となる。

1. $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル
   $\lambda = 1$ をもとの式に代入すると、
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
   となり、これを基本変形すると、
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   となり、x と z が任意定数にとれる。$x = s, z = t$ としておく。$y = -s + 3t$ となり、
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   となるので、$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは、
   $$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   となる。
2. $\lambda = -1$ に対する固有ベクトル
   同様に、固有ベクトルは
   $$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   ここで、
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   とし、また P と単位行列 E を横に並べた $(3,6)$ 型行列を基本変形により P が単位行列になるように変形していくと P^{-1} が
   $$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
   と求まる。
   この P, P^{-1} を使い対角化すると、求める行列は
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

- 対角行列/例題

  A の固有値と固有ベクトルを求めよ。また、 $B^t AB$ が対角行列になるような直交行列 B を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 例題/解答

  同様に、

$$det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

  を解いて、 $\lambda = 1, 2, 4$ となる。

  1. $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル (ノルムを 1 に正規化したもの)

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  2. $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル (ノルムを 1 に正規化したもの)

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  3. $\lambda = 4$ に対する固有ベクトル (ノルムを 1 に正規化したもの)

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  $B = (v_1, v_2, v_3)$ とすれば、

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij}$$

$$= \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

  になっているので、B は直交行列であり、従って $B^{-1} = B^t$

  よって求める B は

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$