

1 定義に基づいたリーマン積分の計算

リーマン積分の定義をしたところで、定義に基づいて積分値を計算してみる。

具体的には、 $f(x) = x$ は、任意の有界閉区間 $I = [a, b]$ 上可積分であり、かつ $\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ であることを定義に基づいて示す。

$f(x) = x$ は単調増加関数だから I の任意の分割 Δ と任意の代表点 $\xi_k \in I_k$ に対して、

$$\eta_k = x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k = \zeta_k$$

とおけば

$$\sum_{k=1}^m f(\eta_k)|I_k| \leq \sum_{k=1}^m f(\xi_k)|I_k| \leq \sum_{k=1}^m f(\zeta_k)|I_k|$$

であるから、

$$s(f; \Delta; \eta) \leq s(f; \Delta; \xi) \leq s(f; \Delta; \zeta)$$

となる。

つまり、各区間の代表点として、 $\eta_k = x_{k-1}$ 、 ξ_k 、 $\zeta_k = x_k$ をとり、リーマン和をつくる。また、 $\xi_k^0 = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ とおけば、

$$s(f; \Delta; \xi^0) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2}(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

となる。(定義に従い計算するだけ)

従って、 $J = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ とおくと、

$$\begin{aligned} 0 &\leq |s(f; \Delta; \xi) - J| \leq s(f; \Delta; \zeta) - s(f; \Delta; \eta) = \sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1})|I_k| \\ &\leq d(\Delta) \sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) = (b - a)d(\Delta) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる。最初の不等号は f の単調増加性からである。

従って、 $f(x) = x$ は I 上可積分であり、かつ $\int_I f = J$ となる。