リーマン積分の定義をしたところで、定義に基づいて積分値を計算してみる。

具体的には、$f(x) = x$ は、任意の有界閉区間 $I = [a, b]$ 上可積分であり、かつ $\displaystyle\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ であることを定義に基づいて示す。

$f(x) = x$ は単調増加関数だから I の任意の分割 Δ と任意の代表点 $\xi_k \in I_k$ に対して、

$$\eta_k = x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k = \zeta_k$$

とおけば

$$\sum_{k=1}^{m} f(\eta_k)|I_k| \leqq \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)|I_k| \leqq \sum_{k=1}^{m} f(\zeta_k)|I_k|$$

であるから、

$$s(f; \Delta; \eta) \leqq s(f; \Delta; \xi) \leqq s(f; \Delta; \zeta)$$

となる。

つまり、各区間の代表点として、$\eta_k = x_{k-1}$、ξ_k、$\zeta_k = x_k$ をとり、リーマン和をつくる。また、$\xi_k^0 = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ とおけば、

$$s(f; \Delta; \xi^0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

となる。(定義に従い計算するだけ)

従って、$J = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ とおくとき、

$$\begin{aligned} 0 &\leqq |s(f; \Delta; \xi) - J| \leqq s(f; \Delta; \zeta) - s(f; \Delta; \eta) = \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1})|I_k| \\ &\leqq d(\Delta) \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) = (b - a) d(\Delta) \to 0 \end{aligned}$$

となる。最初の不等号は f の単調増加性からである。

従って、$f(x) = x$ は I 上可積分であり、かつ $\int_I f = J$ となる。