個人的な興味というか事情があり、リーマン積分の復習をした。

いまさらという感じもするが、学生のときはこのあたりの細かい議論はスルーしてしまっていたので、今やってみるとわかることがあったりもした。

そんなことで、忘備録もかねて復習したことを書いておこうと思う。

1　リーマン積分の定義

ほぼ、『解析演習』(杉浦 光夫/東京大学出版会) からの丸写しになってしまうが、話の都合上定義を一通り書いておく。

一次元有界閉区間 $I = [a, b]$ の長さ $|I|$ を、

$$|I| = b - a \tag{1}$$

によって定義する。区間 $|I|$ の分割とは、内点を共有しない有限個の小区間の合併として、I を表すことをいう。この場合一つの分割 Δ は、各小区間の端点を与えることで定まる。

したがって、I の分割 Δ とは I の有限個の点 (分点) $x_0, \ldots, x_m$ を

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b \tag{2}$$

となるようにとることによって定まる。この場合 I は m 個の小区間 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $(1 \leqq k \leqq m)$ の合併となり、$k \neq l$ のとき、I_k と I_l は内点を共有しない。

このとき、

$$I = \bigcup_{k=1}^{m} I_k, \quad |I| = \sum_{k=1}^{m} |I_k| \tag{3}$$

が成り立つ。

先の分割に Δ に対し、

$$d(\Delta) = \max_{1 \leqq k \leqq m} (x_k - x_{k-1}) \tag{4}$$

を Δ の幅 (mesh) という。

以下、I の全ての分割の集合を $\mathscr{D} = \mathscr{D}(I)$ と記す。

いま I 上定義された実数値関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が与えられたとする。I の任意の分割 Δ が、(2) で与えられるとき、各小区間 I_k $(1 \leqq k \leqq m)$ から代表点 ξ_k を一つずつ選んで、次の和 $s(f; \Delta; \xi)$ を作る。

$$s(f; \Delta; \xi) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)|I_k| = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{5}$$

この和 $s(f; \Delta; \xi)$ を f の (分割 Δ、代表点 ξ_k に対する) リーマン和という。

もしもある実数 J が存在して、I_k の代表点 ξ_k のとり方によらず、

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} s(f;\Delta;\xi) = J \tag{6}$$

となるとき、f は I 上で (リーマン) 積分可能である、といい、J を f の I 上の定積分という。

本の方には、まだいろいろ書いてあるが、いまここでの話にはそんなに関係しないので一旦省略する。

2　可積分条件

$I = [a, b]$ を一次元有界閉区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の任意の有界関数とし、

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in I\}\ ,\ M = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$$

とおく。

このとき、$M - m$ を f の I における振幅といい、

$$a(f, I) = M - m \tag{11}$$

と記す。

このとき、

$$a(f, I) = \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| \tag{12}$$

が成り立つ。

I の任意の分割 (2) に対して、

$$m_k = \inf_{x\in I_k} f(x) \quad M_k = \sup_{x\in I_k} f(x) \quad (1 \leqq k \leqq m) \tag{13}$$

とおく。

そして

$$s_\Delta = \sum_{k=1}^{m} m_k |I_k| \quad , \quad S_\Delta = \sum_{k=1}^{m} M_k |I_k| \tag{14}$$

をそれぞれ分割 Δ に対する f の不足和、過剰和という。

さらに、

$$s = \sup_{\Delta\in\mathscr{D}} s_\Delta \quad S = \inf_{\Delta\in\mathscr{D}} S_\Delta \tag{15}$$

とおく。

ここで、$\mathscr{D} = \mathscr{D}(I)$ は I の分割全体の集合である。¡br /¿

s、S を f の I 上の下積分、上積分という。

3　話の整理

リーマン積分をやるとき、最初にひたすら定義が述べられてきて、お互いの定義の関係性がわからなかった。(ルベーグ積分はもっと難しいのだろうけど。)

しかし、最近改めて読んでみると、少し話の流れがわかって来たような気がする。

ポイントとしては、リーマン和、不足和、過剰和、上積分、下積分を定義するところではないかと思っている。

- リーマン和
  (区間と) 関数と分割と代表点の取り方に対して決まる。
- 不足和、過剰和
  (区間と) 関数と分割に対して決まる。
- 上積分、下積分
  (区間と) 関数に対して決まる。

4　参考にしたページや文献・書籍

『解析演習』(杉浦 光夫/東京大学出版会)