

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le problème et notre modélisation</b>	<b>1</b>
1.1	Effet Cheerios . . . . .	2
1.2	Collisions . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Méthodes numériques et algorithme</b>	<b>4</b>
2.1	Integration de Verlet . . . . .	4
2.2	collision des bords . . . . .	5
2.3	force des bords . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Comment on a concue notre probleme</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Les choses a ameliorer</b>	<b>5</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>7</b>

## Table des figures

1	Geometry of a sphere lying at a liquid-gas interface. The shaded area represents the weight of liquid equivalent to the buoyancy force due to hydrostatic pressure acting on the sphere.[1] . . . . .	2
2	Schéma des forces des bords. . . . .	5

## Liste des tableaux

1	Table des variables . . . . .	2
---	-------------------------------	---

## Introduction

Dans le cadre de l'UE Projet en Calcul Scientifique Numérique, nous devons travailler sur un projet, afin de nous apprendre plus en détail, la programmation et le calcul numérique avec un langage compilé, le C. Notre sujet était sur l'"Effet Cheerios", ou l'interaction d'objets à la surface d'un liquide par l'effet de la gravité et la déformation interfaciale. Cet effet se caractérise par la tension d'une surface liquide sous le poids d'un objet, par exemple une punaise sur l'eau. Lorsque nous ajoutons plusieurs objets sur la même surface, à distance plus ou moins grande, les objets vont potentiellement s'attirer puis créer des tas mobiles. Ce phénomène est notamment visible avec des céréales dans du lait, d'où le nom de Cheerios, célèbre marque de céréales américaine. Pour réaliser à bien ce projet nous avons du faire de nombreuses recherches sur la mécanique des fluides, les collisions inélastiques et nous avons également du faire un travail conséquent sur l'optimisation de notre algorithme.

## 1 Le problème et notre modélisation

abreviation	nom	dimension
$R$	Rayon de courbure	TODO
$\gamma$	surface tension	TODO
$\rho_s$	densite solide	TODO
$\rho_l$	densite liquide	TODO
$\rho_a$	densite air	TODO
$B$	nombre de Bond	TODO

TABLE 1 – Table des variables

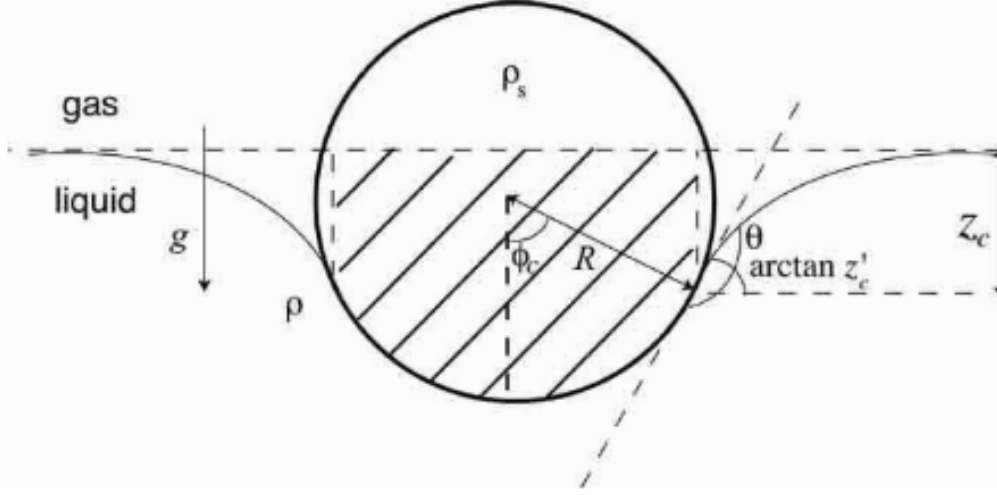


FIGURE 1 – Geometry of a sphere lying at a liquid-gas interface. The shaded area represents the weight of liquid equivalent to the buoyancy force due to hydrostatic pressure acting on the sphere.[1]

On a tous mange des ceriales ou vu des objets flottant attirer vers ou pousse par eux ; mais cest quoi la raison de cette force dans ce projet cree au sein de l'UE projet en calcul scientifique on a fait la simulation des objets flottants.

TODO faire un tableau de symboles que on utilise comme  $\gamma$  surface tension etc

## 1.1 Effet Cheerios

Cette partie est plutot fait pour lintegrite du rapport le lecteur est fortement encourage a lire [1] pour avoir une plus complete comprehension du sujet *cheerios effect* Les formules pour les calculs viennent principalement de [1] TODO expliquer de ou viens les forces des angles qui tord la surface ?

Expliquer leffet de cheerios.

Une des raisons la quel les objets flotte cest due a la pusee de archimede et ces't un des cas majeurs dans notre probleme aussi. Comme on peut voir dans la figure TODO metre la citation de la figure en haut.

Pour que notre sphere reste sur linterface il a besoin que son poids  $\frac{4}{3}\pi\rho_s g R^3$  devrait etre en equilibre par la composante de pousee de archimede a lendroit de contact du liquide avec la sphere et la force de tension sur la surface ??? must be balanced by the component of surface tension acting along the (circular) contact line and the buoyancy force because of the displaced bulk fluid.

TODO expliquer dou ca viens moi ja pas comprie

$$2\pi R \phi_c \gamma \sin(\arctan z'_c) = 2\pi \gamma R \sin \phi_c z'_c (1 + z'^2_c)^{-1/2} \quad (1)$$

Buoyancy force

$$\pi \rho_l g R^3 \left( \frac{z_c}{R} \sin^2 \phi_c + \frac{2}{3} - \cos \phi_c + \frac{1}{3} \cos^3 \phi_c \right) \quad (2)$$

Balance of vertical forces Alors on a

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi \rho_s g R^3 = 2\pi \gamma R \sin \phi_c \frac{z'_c}{\sqrt{(1 + z'^2_c)}} + \pi \rho_l g R^3 \left( \frac{z_c}{R} \sin^2 \phi_c + \frac{2}{3} - \cos \phi_c + \frac{1}{3} \cos^3 \phi_c \right) \quad (3)$$

TODO cest quoi  $z'_c$  ???

Si on substitue  $\phi_c = \pi - \theta + \arctan z'_c$  et garde seulement les termes linear en  $z'_c$  on retrouve l'expression pour  $z'_c \sin \phi_c$  qui est precis a *linear order in the Bond number*  $B \equiv R^2/L_c^2$

Alors on a :

$$z'_c \sin \phi_c = B \left( \frac{2D-1}{3} - \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{6} \cos^3 \theta \right) \equiv B \Sigma \quad (4)$$

Avec  $D \equiv \rho_s/\rho$  On peut voir ceci est bien le cas car on observe bien que  $z'_c = 0$  quand  $\theta = \pi/2$  et  $D = 1/2$  cest ce que on sattendais car dans ce cas la pousee de archimede seul lui meme est assez pour equilibrer le poids de la sphere sans deformations du liquide.

L'equation 4 contient deux parametres sans dimensions ; *Bond number*  $B$  et  $\Sigma$  tres importants pour notre modélisation.

$$B = \frac{(\rho_l - \rho_a) g R^2}{\gamma} \quad (5)$$

Le nombre de Bond nous donne la mesure relative de l'importance des effets de gravite et tension de surface ; si  $B$  est tres grande ca correspond a des particules grandes ou une tension de surface petit.

WUT ????

The expression for the slope of the interface in the vicinity of the spherical particle given in (9) is valid for  $B \ll 1$  (corresponding to a radius of 1mm or smaller for a sphere at an air-water interface) in which case surface tension is very important. The other dimensionless parameter,  $\Sigma$ , can be thought of as a (non-dimensional) resultant weight of the particle once the Archimedes upthrust has been subtracted out. This physical interpretation arises naturally from the vertical force balance condition (8) and (9) since the resultant weight of the object (in the linearised approximation) is simply

To calculate the interaction energy using the Nicolson approximation, we must also calculate the interfacial displacement caused by an isolated floating sphere, which is determined by the hydrostatic balance  $\gamma \nabla^2 h = \rho_l g h$  - the co-ordinate invariant statement of equation (1). With the assumption of cylindrical symmetry, this becomes :  $\gamma \nabla^2 h = \rho_l g h$

$$\gamma \frac{d^2 h}{dx^2} = \rho_l g h \quad (6)$$

Si on assume une symetrie spherique

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right) = \frac{h}{L_c^2} \quad (7)$$

TODO developper bessell [2]

$$F(l) = -2\pi \gamma R B^{5/2} K_1 \left( \frac{l}{L_c} \right) \quad (8)$$

## 1.2 Collisions

Expliquer comment on a déduit que les collisions étaient des collisions inélastiques parfaites et mettre les équations utilisées. Pour les collisions, nous sommes partis sur un modèle assez simple qui itère chaque objet et regarde si la distance entre eux est plus petite que leur rayon additionné on dit que il y a une collision et on applique les collisions et la conservation de momentum.

- D'abord on prend le vecteur norme collisions qui est le sens de 1 à 2  $\mathbf{c} \rightarrow \|\mathbf{c}\| = 1$
- Après on trouve la vitesse relative pour voir comment les cheerios vont s'affecter
- Et on calcule la vitesse avec le produit scalaire de vitesse relative et la norme de collision ceci ça va nous être utile quand on calcule l'impulsion des objets  $\mathbf{v}_{collision} = \mathbf{v}_{relative} \mathbf{c}$
- et on applique un coefficient entre 0.2 et 0.7 car notre expérience n'est pas des collisions élastiques parfaites. Par contre il faut faire attention à cette constante car si on le met trop petit ça fait tel que les cheerios n'ont pas le rebond nécessaire et commencent à entrer dans eux et si on le met trop élevé ça fait tel que ça rebondit beaucoup mais tous ces effets négatifs diminuent plus on prend notre pas de temps petit
- si la vitesse de collision est plus grande que 0 ça veut dire ils vont vers eux même donc une collision ??? ça veut dire que autrement même si ils sont entre eux il y a pas de collision ??? revoir l'application collision et le if
- on calcule l'impulsion  $i = 2 \frac{v}{m_1 m_2}$
- et on soustrait la vitesse du cheerio 1 par  $\mathbf{v}_1 - = i * m_2 * \mathbf{c}$
- et on ajoute pour l'autre  $\mathbf{v}_2 - = i * m_1 * \mathbf{c}$

## 2 Méthodes numériques et algorithme

### 2.1 Intégration de Verlet

Pour déterminer nos coordonnées, vitesses et accélérations en fonction du temps nous avons opté pour l'intégration de Verlet. L'intégration de Verlet est un algorithme simple à mettre en place et qui permet de conserver l'énergie dans le système. L'algorithme utilise le développement limité de Taylor de notre vecteur position à l'ordre 3.

Démonstration du développement limité de Taylor Young de  $f(x)$  au point  $x_0$  [3] :

$$DL_n f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + o((x - x_0)^n) \quad (9)$$

Si on applique le développement limité d'ordre 3 à la position  $(\mathbf{x}(t + dt))$  au point  $t + dt$  on a l'équation suivante avec  $t_0$  comme le pas de temps précédent :

$$DL_3 \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{x}'(t_0)(t - t_0) + \frac{\mathbf{x}''(t_0)}{2!} (t - t_0)^2 + o((t - t_0)^3)$$

Si  $t_0$  est le pas de temps précédent,  $\mathbf{x}'(t)$  vitesse et  $\mathbf{x}''(t)$  l'accélération, nous avons :

$$DL_3 \mathbf{x}(t + dt) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}'(t)(t + dt - t) + \frac{\mathbf{x}''(t)}{2!} (t + dt - t)^2 + o(t + dt - t)$$

$$\Rightarrow DL_3 \mathbf{x}(t + dt) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)(dt) + \frac{\mathbf{a}(t)}{2!} (dt)^2 + o(dt^3)$$

L'erreur sur le temps  $t_n$  est de l'ordre de  $o(\exp(L t_n) dt^2)$

Notre accélération ne dépend pas du changement de vitesse mais de l'équation (8), nous pouvons calculer l'accélération à partir du principe fondamental de la dynamique avec une masse constante. Il est important de faire cela après le calcul de position mais avant la vitesse car la position prend l'accélération précédente et la vitesse prend celui de avant et pendant le temps.

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m} \quad (10)$$

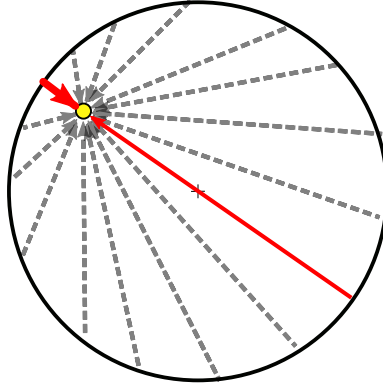


FIGURE 2 – Schéma des forces des bords.

Maintenant nous avons la nouvelle position et l'accélération, nous pouvons calculer la nouvelle vitesse.

$$\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \frac{\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t + dt)}{2} dt \quad (11)$$

## 2.2 collision des bords

Et aussi on fait des collisions de bord aussi.

## 2.3 force des bords

pour la force appliquée par les bords sur les objets nous avons décidé de ne pas calculer les forces de chaque point du bord, au lieu de cela nous avons utilisé la symétrie d'un cercle (nos bords étant un cercle). Seulement deux forces de bords vont s'appliquer sur un objet, les autres s'annulant par symétrie, comme le montre la figure 2

## 3 Comment on a concue notre probleme

- On a pris l'interaction des forces totale sur chaque particule par la fonction dans l'article 'Cheerios effect'
- et de ca on deduis la force que reagis a chaque cheerios pour un pas de temps
- Check si il ya des collisions ou pas et si il ya on change les proprietes des cheerios par rapport aux collisions
- De la force en utilisant l'integration de verlet et le principe fondamentale de la dynamique somme forces = derive (masse\*vitesse) on peut changer les positions des cheerios

## 4 Les choses a ameliorer

- Code en  $O(NT \cdot n^2)$  et peut etre ameliorer en  $O(NT \cdot n \log n)$  en faisant le calcul de collisions plus intelligemment a la place de une recherche exhaustive et en calculant une seule fois le *milieu* des forces de chaque particule pour avoir un centre de attraction et comme ca on calcule le centre de attraction regarde si on a des collisions ou pas et a la fin ajoute les forces du bords a chaque particule
- pour l'instant on utilise les equations *aproximatives* on peut les essayer de les resoudre sans approximations en utilisant l'approximation de Nicholson (fine difference method)
- le code marche seulement pour les objets ronds faux ajouter une facon plus complexe pour plus de objets

## Conclusion

## Bibliographie

- [1] D. VELLA et L. MAHADEVAN, « The “Cheerios effect”, » *American Journal of Physics*, t. 73, n° 9, p. 817-825, sept. 2005, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1898523. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1898523> (visité le 29/11/2022).
- [2] F. BOWMAN, *Introduction to Bessel functions / by Frank Bowman*, eng. New York : Dover Publications, 1958, ISBN : 0-486-60462-4.
- [3] R. P. AGARWAL, K. PERERA et S. PINELAS, *An Introduction to Complex Analysis*. New York : Springer, 2011, 331 p., ISBN : 978-1-4614-0194-0.
- [4] R. BENZI, S. SUCCI et M. VERGASSOLA, « Introduction to the Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics, » in *Relaxation in Complex Systems and Related Topics*, s r. NATO ASI Series, I. A. CAMPBELL et C. GIOVANNELLA,  d., Boston, MA : Springer US, 1990, p. 329-334, ISBN : 978-1-4899-2136-9. DOI : 10.1007/978-1-4899-2136-9\_45. adresse : [https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2136-9\\_45](https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2136-9_45) (visité le 03/10/2022).
- [5] D. CHAN, J. HENRY et L. WHITE, « The interaction of colloidal particles collected at fluid interfaces, » *Journal of Colloid and Interface Science*, t. 79, n° 2, p. 410-418, f v. 1981, ISSN : 00219797. DOI : 10.1016/0021-9797(81)90092-8. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0021979781900928> (visité le 29/11/2022).
- [6] N. CHARLTON. « Drawing and Animating Shapes with Matplotlib. » (s. d. ), adresse : <https://nickcharlton.net/posts/drawing-animating-shapes-matplotlib.html> (visité le 16/11/2022).
- [7] K. D. DANOV, R. DIMOVA et B. POULIGNY, « Viscous drag of a solid sphere straddling a spherical or flat surface, » *Physics of Fluids*, t. 12, n° 11, p. 2711, 2000, ISSN : 10706631. DOI : 10.1063/1.1289692. adresse : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/12/11/10.1063/1.1289692> (visité le 29/11/2022).
- [8] H. N. DIXIT et G. M. HOMSY, « Capillary effects on floating cylindrical particles, » *Physics of Fluids*, t. 24, n° 12, p. 122 102, d c. 2012, ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/1.4769758. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4769758> (visité le 29/11/2022).
- [9] D.-x. FENG et A. V. NGUYEN, « Contact angle variation on single floating spheres and its impact on the stability analysis of floating particles, » *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, t. 520, p. 442-447, mai 2017, ISSN : 09277757. DOI : 10.1016/j.colsurfa.2017.01.057. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0927775717300948> (visité le 29/11/2022).
- [10] M. A. FORTES, « Attraction and repulsion of floating particles, » *Canadian Journal of Chemistry*, t. 60, n° 23, p. 2889-2895, 1 r d c. 1982, ISSN : 0008-4042, 1480-3291. DOI : 10.1139/v82-414. adresse : <http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/v82-414> (visité le 29/11/2022).
- [11] W. GIFFORD et L. SCRIVEN, « On the attraction of floating particles, » *Chemical Engineering Science*, t. 26, n° 3, p. 287-297, mars 1971, ISSN : 00092509. DOI : 10.1016/0009-2509(71)83003-8. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0009250971830038> (visité le 29/11/2022).
- [12] J. B. KELLER, « Surface tension force on a partly submerged body, » *Physics of Fluids*, t. 10, n° 11, p. 3009-3010, nov. 1998, ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/1.869820. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.869820> (visité le 29/11/2022).

- [13] P. A. KRALCHEVSKY et K. NAGAYAMA, « Capillary interactions between particles bound to interfaces, liquid films and biomembranes, » *Advances in Colloid and Interface Science*, t. 85, n° 2-3, p. 145-192, mars 2000, ISSN : 00018686. DOI : 10.1016/S0001-8686(99)00016-0. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0001868699000160> (visité le 29/11/2022).
- [14] J. -. LOUDET, M. QIU, J. HEMAUER et J. J. FENG, « Drag force on a particle straddling a fluid interface : Influence of interfacial deformations, » *The European Physical Journal E*, t. 43, n° 2, p. 13, f v. 2020, ISSN : 1292-8941, 1292-895X. DOI : 10.1140/epje/i2020-11936-1. adresse : <http://link.springer.com/10.1140/epje/i2020-11936-1> (visité le 29/11/2022).
- [15] E. H. MANSFIELD, H. R. SEPANGI et E. A. EASTWOOD, « Equilibrium and mutual attraction or repulsion of objects supported by surface tension, » *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, t. 355, n° 1726, p. 869-919, 15 mai 1997, ISSN : 1364-503X, 1471-2962. DOI : 10.1098/rsta.1997.0049. adresse : <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1997.0049> (visité le 29/11/2022).
- [16] A. MARCHAND, J. H. WEIJS, J. H. SNOEIJER et B. ANDREOTTI, « Why is surface tension a force parallel to the interface ? » *American Journal of Physics*, t. 79, n° 10, p. 999-1008, oct. 2011, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.3619866. adresse : <http://aapt.scitacion.org/doi/10.1119/1.3619866> (visité le 29/11/2022).
- [17] J. C. MAXWELL, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 1<sup>re</sup>  d., W. D. NIVEN,  d. Cambridge University Press, 20 jan. 2011, ISBN : 978-1-108-01538-7. DOI : 10.1017/CB09780511710377. adresse : <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511710377/type/book> (visité le 29/11/2022).
- [18] M. M. NICOLSON, « The interaction between floating particles, » *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, t. 45, n° 2, p. 288-295, avr. 1949, ISSN : 0305-0041, 1469-8064. DOI : 10.1017/S0305004100024841. adresse : [https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0305004100024841/type/journal\\_article](https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0305004100024841/type/journal_article) (visité le 29/11/2022).
- [19] « Calculateur de Tension Superficielle d'une Aiguille « Flottante » • Hydraulique – Fluides • Convertisseurs d'unités En Ligne. » (s. d. ), adresse : <https://www.translatorscafe.com/unit-converter/fr-FR/calculator/surface-tension/> (visité le 07/11/2022).
- [20] « Compressible Lattice Boltzmann Method and Applications | SpringerLink. » (s. d. ), adresse : [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-11842-5\\_3](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-11842-5_3) (visité le 01/10/2022).
- [21] *Computational Physics*. s. d. adresse : <https://link-springer-com.accesdistant.sorbonne-universite.fr/book/10.1007/978-3-319-00401-3> (visité le 01/12/2022).
- [22] T. ONDAR UHU, P. FABRE, E. RAPHA L et M. VEYSSI , « Specific properties of amphiphilic particles at fluid interfaces, » *Journal de Physique*, t. 51, n° 14, p. 1527-1536, 1990, ISSN : 0302-0738. DOI : 10.1051/jphys:0199000510140152700. adresse : <http://www.edpsciences.org/10.1051/jphys:0199000510140152700> (visité le 29/11/2022).
- [23] J. ONISHI, A. KAWASAKI, Y. CHEN et H. OHASHI, « Lattice Boltzmann simulation of capillary interactions among colloidal particles, » *Computers & Mathematics with Applications*, t. 55, n° 7, p. 1541-1553, avr. 2008, ISSN : 08981221. DOI : 10.1016/j.camwa.2007.08.027. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0898122107006463> (visité le 29/11/2022).
- [24] REDUCIBLE, director, *Building Collision Simulations : An Introduction to Computer Graphics*, 19 jan. 2021. adresse : [https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=eED4bSkYCB8&ab\\_channel=Reducible](https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=eED4bSkYCB8&ab_channel=Reducible) (visité le 03/10/2022).



- [25] N. B. VARGAFTIK, B. N. VOLKOV et L. D. VOLJAK, « International Tables of the Surface Tension of Water, » *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, t. 12, n° 3, p. 817-820, juill. 1983, ISSN : 0047-2689, 1529-7845. DOI : 10.1063/1.555688. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.555688> (visité le 29/11/2022).
- [26] N. D. VASSILEVA, D. van den ENDE, F. MUGELE et J. MELLEMA, « Capillary Forces between Spherical Particles Floating at a Liquid-Liquid Interface, » *Langmuir*, t. 21, n° 24, p. 11 190-11 200, 1<sup>er</sup> nov. 2005, ISSN : 0743-7463, 1520-5827. DOI : 10.1021/1a051186o. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/1a051186o> (visité le 29/11/2022).
- [27] D. VELLA et L. MAHADEVAN, « The 'Cheerios effect', » *American Journal of Physics*, t. 73, n° 9, p. 817-825, sept. 2005, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1898523. arXiv : cond-mat/0411688. adresse : <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0411688> (visité le 29/11/2022).
- [28] D. VELLA, P. D. METCALFE et R. J. WHITTAKER, « Equilibrium conditions for the floating of multiple interfacial objects, » *Journal of Fluid Mechanics*, t. 549, p. 215, -1 8 fév. 2006, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/S0022112005008013. adresse : [http://www.journals.cambridge.org/abstract\\_S0022112005008013](http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112005008013) (visité le 29/11/2022).
- [29] D. J. R. VELLA, « The Fluid Mechanics of Floating and Sinking, » p. 143, s. d.