

Table des matières

1	Le problème et notre modélisation	2
1.1	Effet Cheerios	2
1.2	Collisions	4
2	Méthodes numériques et algorithme	5
2.1	Integration de Verlet	5
2.2	collision des bords	5
2.3	force des bords	6
3	Comment on a concue notre probleme	6
4	Les choses a ameliorer	6
	Bibliographie	7

Table des figures

1	Géométrie d'une sphère reposant sur une interface liquide-gaz. La partie rayée représente le poids de liquide équivalent à la force de flottabilité du à la pression hydrostatique appuyant sur la sphère.	3
2	Schéma des forces des bords.	6

Liste des tableaux

1	Table des variables	2
---	-------------------------------	---

Nom	Abréviation	Dimension
Rayon de courbure	R	$[L]$
Surface de tension	γ	$[MT^{-2}]$
Densité du solide	ρ_s	$[ML^{-3}]$
Densité du liquide	ρ_l	$[ML^{-3}]$
Densité de l'air	ρ_a	$[ML^{-3}]$
Nombre de Bond	B	1

TABLE 1 – Table des variables

Introduction

Dans le cadre de l'UE Projet en Calcul Scientifique Numérique, nous devons travailler sur un projet, afin de nous apprendre plus en détail, la programmation et le calcul numérique avec un langage compilé, le C. Notre sujet était sur l'"Effet Cheerios", ou l'interaction d'objets à la surface d'un liquide par l'effet de la gravité et la déformation interfaciale. Cet effet se caractérise par la tension d'une surface liquide sous le poids d'un objet, par exemple une punaise sur l'eau. Lorsque nous ajoutons plusieurs objets sur la même surface, à distance plus ou moins grande, les objets vont potentiellement s'attirer puis créer des tas mobiles. Ce phénomène est notamment visible avec des céréales dans du lait, d'où le nom de Cheerios, célèbre marque de céréales américaine. Pour réaliser à bien ce projet nous avons du faire de nombreuses recherches sur la mécanique des fluides, les collisions inélastiques et nous avons également du faire un travail conséquent sur l'optimisation de notre algorithme.

1 Le problème et notre modélisation

Nous avons tous mangé des céréales ou vu des objets flottant s'attirer ou se repousser entre eux, mais quel est la raison de cette force ? Nous avons essayé de décrire ces interactions dans ce projet.

1.1 Effet Cheerios

Cette partie est plutôt faite pour l'intégrité du rapport. Le lecteur est fortement encouragé à lire "Cheerios Effect"[1] pour avoir une compréhension plus complète du sujet. Les calculs viennent principalement de cet article.

Lorsque nous posons un objet sur la surface de l'eau (une aiguille, une punaise ou un cheerio), il est possible que l'objet reste à la surface de l'eau. L'eau va donc se courber, enveloppant une partie de l'objet, sous la masse de celui-ci. Cela se nomme la déformation interfaciale. Elle se retrouve dans la nature avec certains insectes pouvant marcher sur l'eau grâce à cette loi physique. Si nous mettons plusieurs objets de la sorte et qu'ils sont plus ou moins proche, la courbure de l'eau sous ces objets va créer une tension de surface qui attirera les objets jusqu'à qu'ils se touchent. De plus, si nous mettons ces objets dans un récipient, au fil du temps ils vont s'approcher des bords. Nous pouvons également expliquer cela par la tension de surface qui est créée entre le récipient et l'eau qui créera un ménisque.

Nous voulons déterminer comment ces objets réagissent entre eux et les bords d'un récipient et représenter nos résultats de façon numérique et animée. Nous devons, pour cela, calculer tout d'abord les forces intervenant dans ce phénomène.

Une des raisons pour laquelle les objets flottent est due à la poussée d'Archimède, comme nous pouvons le voir dans la figure 1. Pour que notre sphère reste sur l'interface liquide-gaz elle a besoin que la norme de son poids $\|\mathbf{P}\| = \frac{4}{3}\pi\rho_s g R^3$; doit être équilibrée par la composante

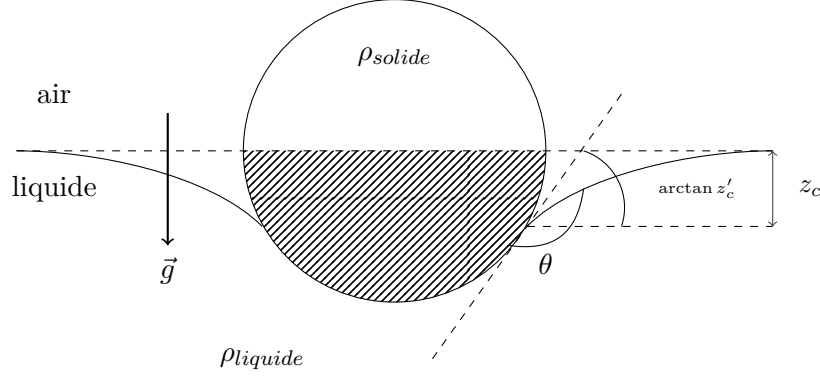


FIGURE 1 – Géométrie d'une sphère reposant sur une interface liquide-gaz. La partie rayée représente le poids de liquide équivalent à la force de flottabilité due à la pression hydrostatique appuyant sur la sphère.

de tension superficielle agissant le long de la ligne de contact (circulaire) et par la force de flottabilité due au déplacement du fluide en vrac. La première composante a pour équation :

$$2\pi\gamma R \sin \phi_c \frac{z'_c}{\sqrt{1+z_c'^2}} \quad (1)$$

Et nous avons également la force de flottabilité par l'équation :

$$\pi\rho_l g R^3 \left(\frac{z_c}{R} \sin^2 \phi_c + \frac{2}{3} - \cos \phi_c + \frac{1}{3} \cos^3 \phi_c \right) \quad (2)$$

Nous avons donc l'équilibre des forces donné par :

$$\frac{4}{3}\pi\rho_s g R^3 = 2\pi\gamma R \sin \phi_c \frac{z'_c}{\sqrt{(1+z_c'^2)}} + \pi\rho_l g R^3 \left(\frac{z_c}{R} \sin^2 \phi_c + \frac{2}{3} - \cos \phi_c + \frac{1}{3} \cos^3 \phi_c \right) \quad (3)$$

Si nous substituons $\phi_c = \pi - \theta + \arctan z'_c$ et gardons uniquement les termes linéaires en z'_c , nous retrouvons l'expression pour $z'_c \sin \phi_c$ qui est précis par rapport à l'ordre linéaire du nombre de Bond, $B \equiv R^2/L_c^2$

Nous avons donc :

$$z'_c \sin \phi_c = B \left(\frac{2D-1}{3} - \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{6} \cos^3 \theta \right) \equiv B\Sigma \quad (4)$$

Avec $D \equiv \frac{\rho_s}{\rho}$.

L'équation (4) contient deux paramètres sans dimensions ; le nombre de Bond B et Σ , qui sont très importants pour notre modélisation.

Le nombre de Bond vaut :

$$B = \frac{(\rho_l - \rho_a)gR^2}{\gamma} \quad (5)$$

Il nous donne la mesure relative de l'importance des effets de gravité et de la tension de surface ; si B est très grand, cela correspond à des particules grandes ou à une tension de surface petite.

JE TE LAISSE CETTE PARTIE MAIS FAIT AU PLUS SIMPLE, SURTOUT NIVEAU BESSEL, SULTAN LUI MEME A DIT QUE C'ETAIT POUR MASTER. To calculate the interaction energy using the Nicolson approximation, we must also calculate the interfacial displacement caused by an isolated floating sphere, which is determined by the hydrostatic balance $\gamma \nabla^2 h = \rho g h$ – the co-ordinate invariant statement of equation (1). With the assumption of cylindrical symmetry, this becomes :

$$\gamma \frac{d^2 h}{dx^2} = \rho_l g h \quad (6)$$

Si on assume une symétrie sphérique

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dh}{dr} \right) = \frac{h}{L_c^2} \quad (7)$$

TODO developper bessell (Graph $K1_K0$ mit dans figures) [2]

Pour déterminer, maintenant la force d'attraction entre deux objets nous partons du poids effectif d'une sphère sur une interface déformé, que nous donnons comme $2\pi RB\Sigma$. Nous avons également calculé la déformation interfaciale causée par la présence d'une seule sphère. Nous sommes donc capables de calculer l'énergie d'interaction entre deux sphères. Cette énergie est le produit du poids résultant d'une sphère et de son déplacement vertical causé par la présence d'une autre sphère dont le centre est éloigné de l'horizontale d'une distance horizontale l . Nous pouvons donc écrire l'énergie, $E(l)$, comme suit :

$$E(l) = -2\pi\gamma R^2 b^2 \Sigma^2 K_0\left(\frac{l}{L_c}\right) \quad (8)$$

Avec L_c la longueur capillaire.

Nous pouvons donc trouver la force d'interaction $F(l) = -\frac{dE}{dl}$, ce qui donne :

$$\boxed{F(l) = -2\pi\gamma RB^{5/2}\Sigma^2 K_1\left(\frac{l}{L_c}\right)} \quad (9)$$

1.2 Collisions

Pour les collisions, nous sommes partis sur un modèle assez simple qui itère chaque objet et regarde si la distance entre leurs centres est plus petite que leurs rayons additionnés. Si c'est le cas, nous disons qu'il y a collision entre eux et nous appliquons la collision avec la conservation du momentum. Nous avons mis en place les collisions entre deux objets mais également entre un objet et les bords. Le fonctionnement des collisions entre ces deux cas est très différent. Pour les collisions entre objets, nous prenons dans un premier temps le vecteur normé de collision, dans le sens de 1 vers 2 :

$$\mathbf{c} \longrightarrow ||\mathbf{c}|| = 1 \quad (10)$$

Puis nous calculons la vitesse relative pour comprendre comment les 2 objets vont s'affecter. Après cela, nous trouvons la vitesse des objets lors de la collision afin de nous être utile pour déterminer l'impulsion qui suivra la collision :

$$\mathbf{v}_{collision} = \mathbf{v}_{relative} \cdot \mathbf{c} \quad (11)$$

Nous ajoutons à cette vitesse un coefficient compris entre 0.2 et 0.7 car nous n'avons pas de collisions élastiques parfaites. Il faut cependant faire attention à cette constante ; Si elle est trop basse, les objets n'auront pas le rebond nécessaire et vont commencer à s'entrer dedans. Si elle est trop haute, les objets vont, à l'inverse, beaucoup rebondir. Toutefois, plus notre pas de temps est petit, plus ces effets vont disparaître.

Expliquer comment on a déduit que les collisions étaient des collisions inélastiques parfaites et mettre les équations utilisées. Pour les collisions, nous sommes partis sur un modèle assez simple qui itère chaque objet et regarde si la distance entre eux est plus petite que leur rayons additionnés on dit que il ya une collision et on applique les collisions et la conservation de momentum.

- D'abord on prend le vecteur norme collisions qui est le sens de 1 à 2 $\mathbf{c} \longrightarrow ||\mathbf{c}|| = 1$
- Après on trouve la vitesse relative pour voir comment les cheerios vont s'affecter
- Et on calcule la vitesse avec le produit scalaire de vitesse relative et la norme de collision ceci ça va nous être utile quand on calcule l'impulsion des objets $\mathbf{v}_{collision} = \mathbf{v}_{relative} \cdot \mathbf{c}$

- et on applique un coefficient entre 0.2 et 0.7 car notre expérience n'est pas des collisions élastiques parfaites. Par contre il faut faire attention à cette constante car si on le met trop petit ça fait tel que les cheerios n'ont pas le rebond nécessaire et commencent à entrer dans eux et si on le met trop élevé ça fait tel que ça rebondit beaucoup mais tous ces effets négatifs diminuent plus on prend notre pas de temps petit
- si la vitesse de collision est plus grande que 0 ça veut dire ils vont vers eux même donc une collision???? ça veut dire qu'autrement même si ils sont entre eux il y a pas de collision???? revoir appliquer collision et le if
- on calcule l'impulsion $i = 2 \frac{v}{m_1 m_2}$
- et on soustrait la vitesse du cheerio 1 par $\mathbf{v}_1 - = i * m_2 * \mathbf{c}$
- et on ajoute pour l'autre $\mathbf{v}_2 - = i * m_1 * \mathbf{c}$

2 Méthodes numériques et algorithmes

2.1 Intégration de Verlet

Pour déterminer nos coordonnées, vitesses et accélérations en fonction du temps nous avons opté pour l'intégration de Verlet. L'intégration de Verlet est un algorithme simple à mettre en place et qui permet de conserver l'énergie dans le système. L'algorithme utilise le développement limité de Taylor de notre vecteur position à l'ordre 3.

Démonstration du développement limité de Taylor Young de $f(x)$ au point x_0 [3] :

$$DL_n f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + o((x - x_0)^n) \quad (12)$$

Si on applique le développement limité d'ordre 3 à la position $(\mathbf{x}(t + dt))$ au point $t + dt$ on a l'équation suivante avec t_0 comme le pas de temps précédent :

$$DL_3 \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{x}'(t_0)(t - t_0) + \frac{\mathbf{x}''(t_0)}{2!} (t - t_0)^2 + o((t - t_0)^3)$$

Si t_0 est le pas de temps précédent, $\mathbf{x}'(t)$ vitesse et $\mathbf{x}''(t)$ l'accélération, nous avons :

$$\begin{aligned} DL_3 \mathbf{x}(t + dt) &= \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}'(t)(t + dt - t) + \frac{\mathbf{x}''(t)}{2!} (t + dt - t)^2 + o(t + dt - t) \\ \Rightarrow DL_3 \mathbf{x}(t + dt) &= \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)(dt) + \frac{\mathbf{a}(t)}{2!} (dt)^2 + o(dt^3) \end{aligned}$$

L'erreur sur le temps t_n est de l'ordre de $o(\exp(Lt_n)dt^2)$

Notre accélération ne dépendant pas du changement de vitesse mais de l'équation (9), nous pouvons calculer l'accélération à partir du principe fondamental de la dynamique avec une masse constante. Il est important de faire cela après le calcul de position mais avant la vitesse car la position prend l'accélération précédente et la vitesse prend celui de avant et pendant le temps.

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m} \quad (13)$$

Maintenant nous avons la nouvelle position et l'accélération, nous pouvons calculer la nouvelle vitesse.

$$\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \frac{\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t + dt)}{2} dt \quad (14)$$

2.2 collision des bords

Et aussi on fait des collisions de bord aussi.

2.3 force des bords

pour la force appliquée par les bords sur les objets nous avons décidé de ne pas calculer les forces de chaque point du bord, au lieu de cela nous avons utilisé la symétrie d'un cercle (nos bords étant un cercle). Seulement deux forces de bords vont s'appliquer sur un objet, les autres s'annulant par symétrie, comme le montre la figure 2

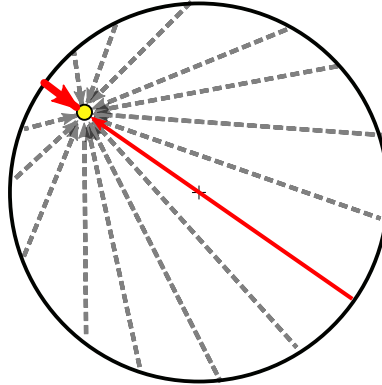


FIGURE 2 – Schéma des forces des bords.

3 Comment on a concue notre probleme

- On a pris l'interaction des forces totale sur chaque particule par la fonction dans l'article 'Cheerios effect'
- et de ca on deduis la force que reagis a chaque cheerios pour un pas de temps
- Check si il ya des collisions ou pas et si il ya on change les proprietes des cheerios par rapport aux collisions
- De la force en utilisant l'integration de verlet et le principe fondamentale de la dynamique somme forces = derive (masse*vitesse) on peut changer les positions des cheerios

4 Les choses a ameliorer

- Code en $O(NT \cdot n^2)$ et peut etre ameliorer en $O(NT \cdot n \log n)$ en faisant le calcul de collisions plus intelligemment a la place de une recherche exhaustive et en calculant une seule fois le *milieu* des forces de chaque particule pour avoir un centre de attraction et comme ca on calcule le centre de attraction regarde si on a des collisions ou pas et a la fin ajoute les forces du bords a chaque particule
- pour l'instant on utilise les equations *aproximatives* on peut les essayer de les resoudre sans approximations en utilisant l'approximation de Nicholson (fine difference method)
- le code marche seulement pour les objets ronds faux ajouter une facon plus complexe pour plus de objets

Conclusion

Bibliographie

- [1] D. VELLA et L. MAHADEVAN, « The Cheerios effect, » *American Journal of Physics*, t. 73, n° 9, p. 817-825, sept. 2005, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1898523. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1898523> (visité le 29/11/2022).
- [2] F. BOWMAN, *Introduction to Bessel functions / by Frank Bowman*, eng. New York : Dover Publications, 1958, ISBN : 0-486-60462-4.
- [3] R. P. AGARWAL, K. PERERA et S. PINELAS, *An Introduction to Complex Analysis*. New York : Springer, 2011, 331 p., ISBN : 978-1-4614-0194-0.
- [4] R. BENZI, S. SUCCI et M. VERGASSOLA, « Introduction to the Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics, » in *Relaxation in Complex Systems and Related Topics*, sér. NATO ASI Series, I. A. CAMPBELL et C. GIOVANNELLA, éd., Boston, MA : Springer US, 1990, p. 329-334, ISBN : 978-1-4899-2136-9. DOI : 10.1007/978-1-4899-2136-9_45. adresse : https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2136-9_45 (visité le 03/10/2022).
- [5] D. CHAN, J. HENRY et L. WHITE, « The interaction of colloidal particles collected at fluid interfaces, » *Journal of Colloid and Interface Science*, t. 79, n° 2, p. 410-418, fév. 1981, ISSN : 00219797. DOI : 10.1016/0021-9797(81)90092-8. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0021979781900928> (visité le 29/11/2022).
- [6] N. CHARLTON. « Drawing and Animating Shapes with Matplotlib. » (s. d.), adresse : <https://nickcharlton.net/posts/drawing-animating-shapes-matplotlib.html> (visité le 16/11/2022).
- [7] K. D. DANOV, R. DIMOVA et B. POULIGNY, « Viscous drag of a solid sphere straddling a spherical or flat surface, » *Physics of Fluids*, t. 12, n° 11, p. 2711, 2000, ISSN : 10706631. DOI : 10.1063/1.1289692. adresse : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/12/11/10.1063/1.1289692> (visité le 29/11/2022).
- [8] H. N. DIXIT et G. M. HOMSY, « Capillary effects on floating cylindrical particles, » *Physics of Fluids*, t. 24, n° 12, p. 122102, déc. 2012, ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/1.4769758. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4769758> (visité le 29/11/2022).
- [9] D.-x. FENG et A. V. NGUYEN, « Contact angle variation on single floating spheres and its impact on the stability analysis of floating particles, » *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, t. 520, p. 442-447, mai 2017, ISSN : 09277757. DOI : 10.1016/j.colsurfa.2017.01.057. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0927775717300948> (visité le 29/11/2022).
- [10] M. A. FORTES, « Attraction and repulsion of floating particles, » *Canadian Journal of Chemistry*, t. 60, n° 23, p. 2889-2895, 1^{er} déc. 1982, ISSN : 0008-4042, 1480-3291. DOI : 10.1139/v82-414. adresse : <http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/v82-414> (visité le 29/11/2022).
- [11] W. GIFFORD et L. SCRIVEN, « On the attraction of floating particles, » *Chemical Engineering Science*, t. 26, n° 3, p. 287-297, mars 1971, ISSN : 00092509. DOI : 10.1016/0009-2509(71)83003-8. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0009250971830038> (visité le 29/11/2022).
- [12] J. B. KELLER, « Surface tension force on a partly submerged body, » *Physics of Fluids*, t. 10, n° 11, p. 3009-3010, nov. 1998, ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/1.869820. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.869820> (visité le 29/11/2022).

- [13] P. A. KRALCHEVSKY et K. NAGAYAMA, « Capillary interactions between particles bound to interfaces, liquid films and biomembranes, » *Advances in Colloid and Interface Science*, t. 85, n° 2-3, p. 145-192, mars 2000, ISSN : 00018686. DOI : 10.1016/S0001-8686(99)00016-0. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0001868699000160> (visité le 29/11/2022).
- [14] J. -. LOUDET, M. QIU, J. HEMAUER et J. J. FENG, « Drag force on a particle straddling a fluid interface : Influence of interfacial deformations, » *The European Physical Journal E*, t. 43, n° 2, p. 13, fév. 2020, ISSN : 1292-8941, 1292-895X. DOI : 10.1140/epje/i2020-11936-1. adresse : <http://link.springer.com/10.1140/epje/i2020-11936-1> (visité le 29/11/2022).
- [15] E. H. MANSFIELD, H. R. SEPANGI et E. A. EASTWOOD, « Equilibrium and mutual attraction or repulsion of objects supported by surface tension, » *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, t. 355, n° 1726, p. 869-919, 15 mai 1997, ISSN : 1364-503X, 1471-2962. DOI : 10.1098/rsta.1997.0049. adresse : <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1997.0049> (visité le 29/11/2022).
- [16] A. MARCHAND, J. H. WEIJS, J. H. SNOELIJER et B. ANDREOTTI, « Why is surface tension a force parallel to the interface? » *American Journal of Physics*, t. 79, n° 10, p. 999-1008, oct. 2011, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.3619866. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.3619866> (visité le 29/11/2022).
- [17] J. C. MAXWELL, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 1^{re} éd., W. D. NIVEN, éd. Cambridge University Press, 20 jan. 2011, ISBN : 978-1-108-01538-7. DOI : 10.1017/CB09780511710377. adresse : <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511710377/type/book> (visité le 29/11/2022).
- [18] M. M. NICOLSON, « The interaction between floating particles, » *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, t. 45, n° 2, p. 288-295, avr. 1949, ISSN : 0305-0041, 1469-8064. DOI : 10.1017/S0305004100024841. adresse : https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0305004100024841/type/journal_article (visité le 29/11/2022).
- [19] « Calculateur de Tension Superficielle d'une Aiguille é Flottante é Hydraulique Fluides Convertisseurs d'unités En Ligne. » (s. d.), adresse : <https://www.translatorscafe.com/unit-converter/fr-FR/calculator/surface-tension/> (visité le 07/11/2022).
- [20] « Compressible Lattice Boltzmann Method and Applications | SpringerLink. » (s. d.), adresse : https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-11842-5_3 (visité le 01/10/2022).
- [21] *Computational Physics*. s. d. adresse : <https://link-springer-com.accesdistant.sorbonne-universite.fr/book/10.1007/978-3-319-00401-3> (visité le 01/12/2022).
- [22] T. ONDARÇUHU, P. FABRE, E. RAPHAËL et M. VEYSSIÉ, « Specific properties of amphiphilic particles at fluid interfaces, » *Journal de Physique*, t. 51, n° 14, p. 1527-1536, 1990, ISSN : 0302-0738. DOI : 10.1051/jphys:0199000510140152700. adresse : <http://www.edpsciences.org/10.1051/jphys:0199000510140152700> (visité le 29/11/2022).
- [23] J. ONISHI, A. KAWASAKI, Y. CHEN et H. OHASHI, « Lattice Boltzmann simulation of capillary interactions among colloidal particles, » *Computers & Mathematics with Applications*, t. 55, n° 7, p. 1541-1553, avr. 2008, ISSN : 08981221. DOI : 10.1016/j.camwa.2007.08.027. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0898122107006463> (visité le 29/11/2022).
- [24] REDUCIBLE, director, *Building Collision Simulations : An Introduction to Computer Graphics*, 19 jan. 2021. adresse : https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=eED4bSkYCB8&ab_channel=Reducible (visité le 03/10/2022).

- [25] N. B. VARGAFTIK, B. N. VOLKOV et L. D. VOLJAK, « International Tables of the Surface Tension of Water, » *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, t. 12, n° 3, p. 817-820, juill. 1983, ISSN : 0047-2689, 1529-7845. DOI : 10.1063/1.555688. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.555688> (visité le 29/11/2022).
- [26] N. D. VASSILEVA, D. van den ENDE, F. MUGELE et J. MELLEMA, « Capillary Forces between Spherical Particles Floating at a Liquid-Liquid Interface, » *Langmuir*, t. 21, n° 24, p. 11 190-11 200, 1^{er} nov. 2005, ISSN : 0743-7463, 1520-5827. DOI : 10.1021/la051186o. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/la051186o> (visité le 29/11/2022).
- [27] D. VELLA et L. MAHADEVAN, « The 'Cheerios effect', » *American Journal of Physics*, t. 73, n° 9, p. 817-825, sept. 2005, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1898523. arXiv : cond-mat/0411688. adresse : <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0411688> (visité le 29/11/2022).
- [28] D. VELLA, P. D. METCALFE et R. J. WHITTAKER, « Equilibrium conditions for the floating of multiple interfacial objects, » *Journal of Fluid Mechanics*, t. 549, p. 215, -1 8 fév. 2006, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/S0022112005008013. adresse : http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112005008013 (visité le 29/11/2022).
- [29] D. J. R. VELLA, « The Fluid Mechanics of Floating and Sinking, » p. 143, s. d.