

Numerical simulation of the *Cheerios Effect*

Erdi ÇAN

erdi.can@etu.sorbonne-universite.fr

Baptiste BRAUN-DELVOYE

baptiste.delvoye-braun@etu.sorbonne-universite.fr

13 décembre 2022

Résumé

Dans ce rapport nous expliquons comment nous avons simulé *l'effet de cheerios* numériquement.

Abstract

In this paper we explain and develop how to simulate the cheerios effect numerically.

Table des matières

1	Le problème et notre modélisation	2
1.1	Effet Cheerios	2
1.2	Force des bords	5
2	Méthodes numériques et algorithme	5
2.1	Integration de Verlet	5
2.2	Collisions	6
2.2.1	Collisions Objet-Objet	6
2.2.2	Collision des bords	7
3	Conception de notre algorithme	7
3.1	Notre algorithme	7
3.2	Améliorations possibles	8
4	Nos Résultats	8
	Bibliographie	9

Table des figures

1	Géométrie d'une sphère reposant sur une interface liquide-gaz. La partie rayée représente le poids de liquide équivalent à la force de flottabilité du à la pression hydrostatique appuyant sur la sphère.	3
2	Graphique représentant les fonctions de Bessel modifié à l'ordre 0 et 1	4
3	Schéma des forces des bords.	5
4	Schéma d'un rebond d'un objet sur un bord	7
5	Diagramme de notre algorithme pour un objet.	7

Liste des tableaux

1	Table des variables	2
---	-------------------------------	---

Introduction

Dans le cadre de l'UE Projet en Calcul Scientifique Numérique, nous devons travailler sur un projet, afin de nous apprendre plus en détail, la programmation et le calcul numérique avec un langage compilé, le C. Notre sujet était sur l'"Effet Cheerios", ou l'interaction d'objets à la surface d'un liquide par l'effet de la gravité et la déformation interfaciale. Cet effet se caractérise par la tension d'une surface liquide sous le poids d'un objet, par exemple une punaise sur l'eau. Lorsque nous ajoutons plusieurs objets sur la même surface, à distance plus ou moins grande, les objets vont potentiellement s'attirer puis créer des tas mobiles. Ce phénomène est notamment visible avec des céréales dans du lait, d'où le nom de Cheerios, célèbre marque de céréales américaine. Pour réaliser à bien ce projet nous avons du faire de nombreuses recherches sur la mécanique des fluides, les collisions inélastiques et nous avons également du faire un travail conséquent sur l'optimisation de notre algorithme. Nous allons vous raconter comment fonctionne l'effet Cheerios et comment nous avons calculé les forces d'interaction. Puis nous vous expliquerons les méthodes numériques principales utilisées dans notre algorithme. Enfin nous vous expliquerons notre algorithme en pointant ses défauts, et nous finirons par une analyse critique des résultats obtenus.

1 Le problème et notre modélisation

Nous avons tous mangé des céréales ou vu des objets flottant s'attirer ou se repousser entre eux, mais quel est la raison de cette force ? Nous avons essayé de décrire ces interactions dans ce projet.

Quelque notations : dans ce rapport les vecteurs sont annotés en gras \mathbf{v} : vecteur v

Nom	Abréviation	Dimension
Rayon de courbure	R	$[L]$
Surface de tension	γ	$[MT^{-2}]$
Densité du solide	ρ_s	$[ML^{-3}]$
Densité du liquide	ρ_l	$[ML^{-3}]$
Densité de l'air	ρ_a	$[ML^{-3}]$
Nombre de Bond	B	1

TABLE 1 – Table des variables

1.1 Effet Cheerios

Cette partie est plutôt faite pour l'intégrité du rapport. Le lecteur est fortement encouragé à lire "Cheerios Effect"[1] pour avoir une compréhension plus complète du sujet. Les équations viennent principalement de cet article.

Lorsque nous posons un objet sur la surface de l'eau (une aiguille, une punaise ou un cheerio), il est possible que l'objet reste à la surface de l'eau. L'eau va donc se courber, enveloppant une partie de l'objet, sous la masse de celui-ci. Cela se nomme la déformation interfaciale. Elle se retrouve dans la nature avec certains insectes pouvant marcher sur l'eau grâce à cette loi physique. Si nous mettons plusieurs objets de la sorte et qu'ils sont plus ou moins proche, la courbure de l'eau sous ces objets va créer une tension de surface qui attirera les objets jusqu'à qu'ils se touchent. De plus, si nous mettons ces objets dans un récipient, au fil du temps ils vont s'approcher des bords. Nous pouvons également expliquer cela par la tension de surface qui est créée entre le récipient et l'eau qui créera un ménisque.

Nous voulons déterminer comment ces objets réagissent entre eux et les bords d'un récipient et représenter nos résultats de façon numérique et animée. Nous devons, pour cela, calculer tout d'abord les forces intervenant dans ce phénomène.

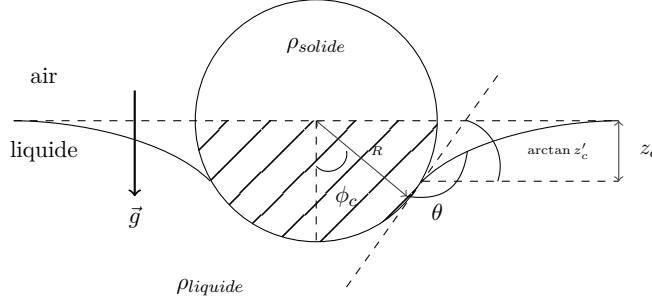


FIGURE 1 – Géométrie d'une sphère reposant sur une interface liquide-gaz. La partie rayée représente le poids de liquide équivalent à la force de flottabilité due à la pression hydrostatique appuyant sur la sphère.

Une des raisons pour laquelle les objets flottent est due à la poussée d'Archimède, comme nous pouvons le voir dans la figure 1. Pour que notre sphère reste sur l'interface liquide-gaz elle a besoin que la norme de son poids $\|\mathbf{P}\| = \frac{4}{3}\pi\rho_s g R^3$; doit être équilibrée par la composante de tension superficielle agissant le long de la ligne de contact (circulaire) et par la force de flottabilité due au déplacement du fluide en vac. La première composante a pour équation :

$$2\pi\gamma R \sin \phi_c \frac{z'_c}{\sqrt{1+z_c'^2}} \quad (1)$$

Et nous avons également la force de flottabilité par l'équation :

$$\pi\rho_l g R^3 \left(\frac{z_c}{R} \sin^2 \phi_c + \frac{2}{3} - \cos \phi_c + \frac{1}{3} \cos^3 \phi_c \right) \quad (2)$$

Nous avons donc l'équilibre des forces donné par :

$$\frac{4}{3}\pi\rho_s g R^3 = 2\pi\gamma R \sin \phi_c \frac{z'_c}{\sqrt{(1+z_c'^2)}} + \pi\rho_l g R^3 \left(\frac{z_c}{R} \sin^2 \phi_c + \frac{2}{3} - \cos \phi_c + \frac{1}{3} \cos^3 \phi_c \right) \quad (3)$$

Si nous substituons $\phi_c = \pi - \theta + \arctan z'_c$ et gardons uniquement les termes linéaires en z'_c , nous retrouvons l'expression pour $z'_c \sin \phi_c$ qui est précis par rapport à l'ordre linéaire du nombre de Bond, $B \equiv R^2/L_c^2$

Nous avons donc :

$$z'_c \sin \phi_c = B \left(\frac{2D-1}{3} - \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{6} \cos^3 \theta \right) \equiv B\Sigma \quad (4)$$

Avec $D \equiv \frac{\rho_s}{\rho}$.

L'équation (4) contient deux paramètres sans dimensions ; le nombre de Bond B et Σ , qui sont très importants pour notre modélisation.

Le nombre de Bond vaut :

$$B = \frac{(\rho_l - \rho_a)gR^2}{\gamma} \simeq \frac{R^2}{L_c^2} \quad (5)$$

Il nous donne la mesure relative de l'importance des effets de gravité et de la tension de surface ; si B est très grand, cela correspond à des particules grandes ou à une tension de surface petite.

Pour déterminer Σ , nous avons besoin de l'angle de contact θ . Pour le trouver nous avons suivi l'article *Lattice Boltzmann Simulation of Capillary Interactions among Colloidal Particles*[2] dans lequel ils utilisent un angle de contact (θ) satisfaisant la loi de Young-Dupré supposant que les particules sont assez petites pour que nous puissions négliger les effets de leurs poids sur l'angle de contact.

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LV}} \quad (6)$$

Ou $\gamma_{SV,SL,LV}$ est la tension superficielle des interfaces Solide/Vapeur, Solide/Liquide et Liquide/Vapeur. Avec $\arctan z'_c = \sin^{-1} \left(\frac{\pi}{2} B \right)$ [2].

De ici on a besoin des tension superficielle expérimentale de chaque milieu ($\gamma_{SV,SL,LV}$) equation 6 mais comme on a pas les valeurs expérimentale pour chaque objet par rapport aux milieux

$$\theta \simeq \pi - \arctan z'_c \quad (7)$$

Qui nous donne un approximation

TODO EST QUEE CEST POSSIBLE DE METTRE UNE FIGURE ICI DUN TUBE AVEC DE LEAU QUE ON VOIS CEST QUOI H ET X ? Nous savons le déplacement interfacial[3] qui est :

$$\gamma \frac{d^2 h}{dx^2} = \rho_l g h \quad (8)$$

Si nous prenons en compte que l'objet a une symétrie sphérique

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dh}{dr} \right) = \frac{h}{L_c^2} \quad (9)$$

EN FAITE LASSOCIATION AU FONCTION BESSEL CA VA MAIS JE SAIS PAS COMMENT PARTIR DE EQUATION AVEC GAMMA ET DEDUIRE UNE SYMETHRIE SPHERIQUE ????

Nous pouvons déduire une solution de cette équation avec la fonction de Bessel modifié à l'ordre 0 [4] ($K_0 \left(\frac{l}{L_c} \right)$).

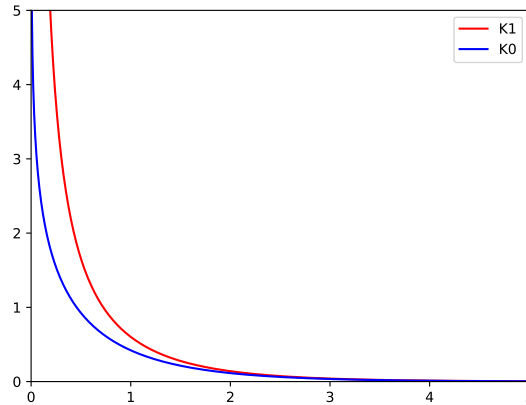


FIGURE 2 – Graphique représentant les fonctions de Bessel modifié à l'ordre 0 et 1

Pour déterminer, maintenant la force d'attraction entre deux objets nous partons du poids effectif d'une sphère sur une interface déformé, que nous donnons comme $2\pi R B \Sigma$. Nous avons également calculé la déformation interfaciale causée par la présence d'une seule sphère. Nous sommes donc capables de calculer l'énergie d'interaction entre deux sphères. Cette énergie est le produit du poids résultant d'une sphère et de son déplacement vertical causé par la présence d'une autre sphère dont le centre est éloigné de l'horizontale d'une distance horizontale l . Nous pouvons donc écrire l'énergie, $E(l)$, comme suit :

$$E(l) = -2\pi\gamma R^2 b^2 \Sigma^2 K_0 \left(\frac{l}{L_c} \right) \quad (10)$$

Avec L_c la longueur capillaire.

Nous pouvons donc trouver la force d'interaction $F(l) = -\frac{dE}{dl}$, ce qui donne :

$$F(l) = -2\pi\gamma R B^{5/2} \Sigma^2 K_1 \left(\frac{l}{L_c} \right) \quad (11)$$

Nous voyons bien grâce à la Figure 2 que dès que $l/L_c > 5$, notre force sera très faible et inversement quand $l/L_c \ll 1$ la force d'attraction sera très élevée. La force entre objets flottants dépend donc de la distance entre eux, et cela de façon exponentielle.

Nous avons décidé de ne pas prendre en compte les forces de frottement entre les objets et le liquide car elles étaient négligeables et elles auraient grandement complexifiées les calculs de notre algorithme.

1.2 Force des bords

Maintenant que nous avons vu l'application des forces entre objets, nous allons expliquer les forces entre les bords et les objets. La force se calcule de la même manière qu'entre deux objets (equation 11) car la force dépend du rayon de courbure(R), du nombre de Bond(B), de Sigma(Σ), de la longueur capillaire(L_c) et de la distance entre deux points(l) de force et tous ces paramètres peuvent être déterminés pour le bord. Pour la force appliquée par les bords sur les objets nous avons, à la place de calculer les forces à chaque point du cercle, opté d'utiliser la symétrie d'un cercle. Nous avons remarqué que la plupart des forces s'annulent entre elles (en gris) et il nous reste seulement deux forces (en rouge) qui interagissent comme le montre la figure 3. Les seuls paramètres à changer sont le nombre de Bond et l'angle de contact, que nous prenons à 45 degré, angle du ménisque formé par l'eau dans un récipient en verre.

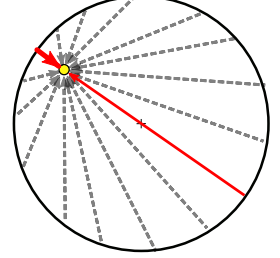


FIGURE 3 – Schéma des forces des bords.

2 Méthodes numériques et algorithme

2.1 Integration de Verlet

Pour déterminer nos coordonnées, vitesses et accélérations en fonction du temps nous avons opté pour l'intégration de Verlet. L'intégration de Verlet est un algorithme simple à mettre en place et qui permet de conserver l'énergie dans le système. L'algorithme utilise le développement limité de Taylor de notre vecteur position à l'ordre 3.

Démonstration du développement limité de Taylor Young de $f(x)$ au point x_0 [5] :

$$DL_n f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + o((x - x_0)^n) \quad (12)$$

Si on applique le développement limité d'ordre 3 à la position($\mathbf{x}(t+dt)$) au point $t+dt$ on a l'équation suivante avec t_0 comme le pas de temps précédent :

$$DL_3 \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{x}'(t_0)(t - t_0) + \frac{\mathbf{x}''(t_0)}{2!} (t - t_0)^2 + o((t - t_0)^3) \quad (13)$$

Si t_0 est le pas de temps précédent, $\mathbf{x}'(t)$ la vitesse et $\mathbf{x}''(t)$ l'accélération, nous avons :

$$DL_3 \mathbf{x}(t+dt) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}'(t)(t+dt - t) + \frac{\mathbf{x}''(t)}{2!} (t+dt - t)^2 + o(t+dt - t) \quad (14)$$

$$DL_3 \mathbf{x}(t+dt) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)(dt) + \frac{\mathbf{a}(t)}{2!} (dt)^2 + o(dt^3) \quad (15)$$

L'erreur sur le temps t_n est de l'ordre de $o(\exp(Lt_n)dt^2)$

Notre accélération ne dépendant pas du changement de vitesse mais de l'équation (11), nous pouvons calculer l'accélération à partir du principe fondamental de la dynamique avec une masse constante. Il est important de faire cela après le calcul de position mais avant celui de la vitesse car la position prend l'accélération précédente mais la vitesse prend celle précédente et au même moment.

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \implies \mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m} \quad (16)$$

Maintenant nous avons la nouvelle position et l'accélération, nous pouvons calculer la nouvelle vitesse de la même façon en utilisant le développement limité de Taylor Young à l'ordre 2.

$$DL_2 \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \mathbf{v}'(t_0)(t - t_0) + o((t - t_0)^2) \quad (17)$$

De la même façon que nous avons déterminé la position position ($\mathbf{x}(t + dt)$) equation 14, nous l'appliquons à la vitesse et nous avons :

$$DL_2 \mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(t)(dt) + o(dt^2) \quad (18)$$

JE SAIS PAS SUR PQ ON DIVISE PAR 2 Comme nous connaissons l'accélération au pas de temps suivant et précédent en même temps, nous pouvons avoir une meilleure approximation de notre vitesse en prenant le point au milieu au lieu de prendre uniquement l'accélération précédente. On utilise la vitesse de Verlet à la place de Störmer-Verlet car avec cette dernière nous avons besoin des 2 positions précédentes et nous gardions seulement un pas de temps à chaque fois. De plus, les deux méthodes ont une précision similaire.

$$\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \frac{\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t + dt)}{2} dt \quad (19)$$

Même si la méthode d'Euler et de Verlet paraissent similaire, nous n'avons pas opté pour la méthode d'Euler car avec celle-ci notre énergie n'était pas conservée. De plus, les erreurs sont plus hautes avec la méthode d'Euler qu'avec l'intégration de Verlet. Nous avons également décidé de ne pas opter pour la méthode de Runge-Kutta car par, pouvant être dissipative, elle aurait demandé plus de calcul, malgré sa plus grande précision. Enfin, l'intégration de Verlet était la plus accessible et la seule à être réversible dans le temps[6].

2.2 Collisions

2.2.1 Collisions Objet-Objet

Pour les collisions, nous sommes partis sur un modèle assez simple qui itère chaque objet et regarde si la distance entre leurs centres est plus petite que leurs rayons additionnés. Si c'est le cas, nous disons qu'il y a collision entre eux et nous appliquons la collision avec la conservation du momentum. Nous avons mis en place les collisions entre deux objets mais également entre un objet et les bords. Le fonctionnement des collisions entre ces deux cas est très différent. Pour les collisions entre objets, nous prenons dans un premier temps le vecteur normé de collision, dans le sens de objet 1(A) vers objet 2(B) :

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|} \rightarrow \|\mathbf{c}\| = 1 \quad (20)$$

Puis nous calculons la vitesse relative $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ pour comprendre comment les 2 objets vont s'affecter. Après cela, nous trouvons la vitesse des objets lors de la collision afin de nous être utile pour déterminer l'impulsion qui suivra la collision :

$$v_{col} = \mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{c} \quad (21)$$

Nous ajoutons à cette vitesse un coefficient compris entre 0.2 et 0.7 car nous n'avons pas de collisions élastiques parfaites. Il faut cependant faire attention à cette constante ; Si elle est trop basse, les objets n'auront pas le rebond nécessaire et vont commencer à s'entrer dedans. Si elle est trop haute, les objets vont, à l'inverse, beaucoup rebondir. Toutefois, plus notre pas de temps est petit, plus ces effets vont disparaître.

Le signe de la vitesse de la collision nous précise si les objets s'attirent ($v_{col} > 0$) ou s'ils s'éloignent ($v_{col} < 0$). Il est possible

Si la vitesse de collision est plus grande que 0 ; nous appliquons la conservation de momentum.

Impulse (I)

$$I = \frac{2v_{col}}{m_A + m_B} \quad (22)$$

$$\mathbf{v}'_A = \mathbf{v}_A - Im_B \mathbf{c} \quad (23)$$

$$\mathbf{v}'_B = \mathbf{v}_B + Im_A \mathbf{c} \quad (24)$$

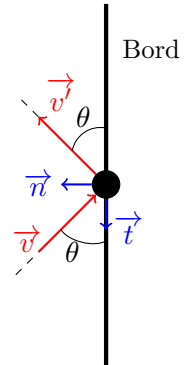
2.2.2 Collision des bords

Pour les collisions de bord on a fait tel que si notre objet dépassait le bord de très peu nous inversons le vecteur vitesse par rapport a la normale. Et apres nous multiplions ce vecteur par un coefficient de collision, $0 \leq C_c \leq 1$, qui simule l'absorption de l'énergie a chaque collision.

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} \quad (25)$$

Nous inversons le coefficient de la normale pour le faire 'rebondir'

$$\Rightarrow \mathbf{v}' = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} \quad (26)$$



3 Conception de notre algorithme

3.1 Notre algorithme

Voici un diagramme du fonctionnement de notre algorithme pour un seul objet (s'il y a x objets alors on répète x-fois celui-ci). (5).

FIGURE 4 – Schéma d'un rebond d'un objet sur un bord

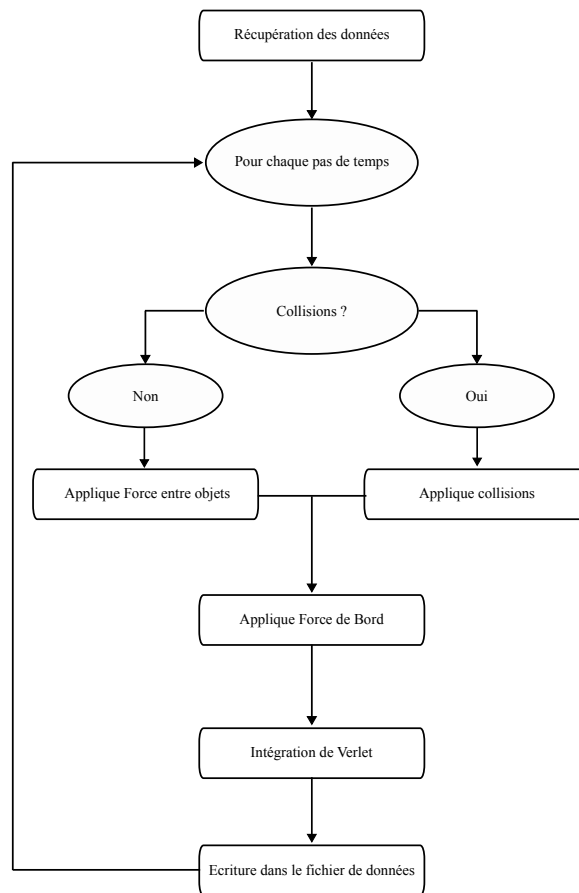


FIGURE 5 – Diagramme de notre algorithme pour un objet.

Nous avons essayé d'être le plus efficace dans notre programme et de limiter le nombre d'itération. Les données initiales sont à mettre dans un fichier texte, les données finales sont également mises dans un fichier texte. Ce dernier est lu par un script Python afin de créer l'animation avec matplotlib et sa classe *animate*. Pour représenter nos objets nous utilisons la classe *circle* de matplotlib également. Cela nous permet de définir des cercles avec des rayons précis.

3.2 Améliorations possibles

Notre code, actuellement n'est pas optimisé pour déterminer s'il y a des collisions entre les objets. En effet, nous regardons pour chaque objet s'il est en collision avec tous les autres objets présents. Cela nous donne un algorithme qui s'effectue en $O(NTn^2)$ (NT : nombre de pas de temps total dans la simulation, n : nombre d'objet), alors que nous pourrions l'effectuer en $O(NTn \log n)$.

Nous utilisons actuellement certaines équations qui sont approximatives, nous pourrions utiliser des équations plus précises avec l'approximation de Nicholson.

Enfin, notre code fonctionne uniquement avec des objets sphériques. Nous pourrions ajouter les calculs pour différentes formes géométrique.

4 Nos Résultats

Conclusion

Pour conclure, nous avons réussi à analyser un problème de mécanique afin de créer une simulation de cet effet. Nous avons analysé le problème physique et l'avons résolu. Notre algorithme est fonctionnel et donne des résultats concluants. Cependant, notre code est fonctionnel jusqu'à une certaine durée. Après un certain temps la simulation devient instable. Néanmoins, nous avons su surpasser beaucoup de problème durant ce projet et nous avons pu développer nos techniques en programmation et notre savoir en mécanique des fluides, notamment avec notre recherche bibliographique qui eut une place importante dans ce projet

Bibliographie

- [1] D. VELLA et L. MAHADEVAN, « The Cheerios effect », *American Journal of Physics*, t. 73, n° 9, p. 817-825, sept. 2005, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1898523. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1898523> (visité le 29/11/2022).
- [2] J. ONISHI, A. KAWASAKI, Y. CHEN et H. OHASHI, « Lattice Boltzmann simulation of capillary interactions among colloidal particles », *Computers & Mathematics with Applications*, t. 55, n° 7, p. 1541-1553, avr. 2008, ISSN : 08981221. DOI : 10.1016/j.camwa.2007.08.027. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0898122107006463> (visité le 29/11/2022).
- [3] G. K. BATCHELOR, *An introduction to fluid dynamics / by G.K. Batchelor,...* (Cambridge mathematical library), eng. Cambridge New York : Cambridge University Press, 2000, ISBN : 0-521-66396-2.
- [4] F. BOWMAN, *Introduction to Bessel functions / by Frank Bowman*, eng. New York : Dover Publications, 1958, ISBN : 0-486-60462-4.
- [5] R. P. AGARWAL, K. PERERA et S. PINELAS, *An Introduction to Complex Analysis*. New York : Springer, 2011, 331 p., ISBN : 978-1-4614-0194-0.
- [6] F. CRIVELLI, « The Störmer-Verlet method », p. 14, 8 mai 2008.
- [7] R. BENZI, S. SUCCI et M. VERGASSOLA, « Introduction to the Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics », in *Relaxation in Complex Systems and Related Topics*, sér. NATO ASI Series, I. A. CAMPBELL et C. GIOVANNELLA, éd., Boston, MA : Springer US, 1990, p. 329-334, ISBN : 978-1-4899-2136-9. DOI : 10.1007/978-1-4899-2136-9_45. adresse : https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2136-9_45 (visité le 03/10/2022).
- [8] D. CHAN, J. HENRY et L. WHITE, « The interaction of colloidal particles collected at fluid interfaces », *Journal of Colloid and Interface Science*, t. 79, n° 2, p. 410-418, fév. 1981, ISSN : 00219797. DOI : 10.1016/0021-9797(81)90092-8. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0021979781900928> (visité le 29/11/2022).
- [9] N. CHARLTON. « Drawing and Animating Shapes with Matplotlib ». (s. d.), adresse : <https://nickcharlton.net/posts/drawing-animating-shapes-matplotlib.html> (visité le 16/11/2022).
- [10] K. D. DANOV, R. DIMOVA et B. POULIGNY, « Viscous drag of a solid sphere straddling a spherical or flat surface », *Physics of Fluids*, t. 12, n° 11, p. 2711, 2000, ISSN : 10706631. DOI : 10.1063/1.1289692. adresse : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/12/11/10.1063/1.1289692> (visité le 29/11/2022).
- [11] H. N. DIXIT et G. M. HOMSY, « Capillary effects on floating cylindrical particles », *Physics of Fluids*, t. 24, n° 12, p. 122 102, déc. 2012, ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/1.4769758. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4769758> (visité le 29/11/2022).
- [12] D.-x. FENG et A. V. NGUYEN, « Contact angle variation on single floating spheres and its impact on the stability analysis of floating particles », *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, t. 520, p. 442-447, mai 2017, ISSN : 09277757. DOI : 10.1016/j.colsurfa.2017.01.057. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0927775717300948> (visité le 29/11/2022).
- [13] M. A. FORTES, « Attraction and repulsion of floating particles », *Canadian Journal of Chemistry*, t. 60, n° 23, p. 2889-2895, 1^{er} déc. 1982, ISSN : 0008-4042, 1480-3291. DOI : 10.1139/v82-414. adresse : <http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/v82-414> (visité le 29/11/2022).
- [14] W. GIFFORD et L. SCRIVEN, « On the attraction of floating particles », *Chemical Engineering Science*, t. 26, n° 3, p. 287-297, mars 1971, ISSN : 00092509. DOI : 10.1016/0009-2509(71)83003-8. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0009250971830038> (visité le 29/11/2022).

- [15] J. B. KELLER, « Surface tension force on a partly submerged body », *Physics of Fluids*, t. 10, n° 11, p. 3009-3010, nov. 1998, ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/1.869820. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.869820> (visité le 29/11/2022).
- [16] P. A. KRALCHEVSKY et K. NAGAYAMA, « Capillary interactions between particles bound to interfaces, liquid films and biomembranes », *Advances in Colloid and Interface Science*, t. 85, n° 2-3, p. 145-192, mars 2000, ISSN : 00018686. DOI : 10.1016/S0001-8686(99)00016-0. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0001868699000160> (visité le 29/11/2022).
- [17] J. -. LOUDET, M. QIU, J. HEMAUER et J. J. FENG, « Drag force on a particle straddling a fluid interface : Influence of interfacial deformations », *The European Physical Journal E*, t. 43, n° 2, p. 13, fév. 2020, ISSN : 1292-8941, 1292-895X. DOI : 10.1140/epje/i2020-11936-1. adresse : <http://link.springer.com/10.1140/epje/i2020-11936-1> (visité le 29/11/2022).
- [18] E. H. MANSFIELD, H. R. SEPANGI et E. A. EASTWOOD, « Equilibrium and mutual attraction or repulsion of objects supported by surface tension », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, t. 355, n° 1726, p. 869-919, 15 mai 1997, ISSN : 1364-503X, 1471-2962. DOI : 10.1098/rsta.1997.0049. adresse : <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1997.0049> (visité le 29/11/2022).
- [19] A. MARCHAND, J. H. WEIJS, J. H. SNOEIJER et B. ANDREOTTI, « Why is surface tension a force parallel to the interface? », *American Journal of Physics*, t. 79, n° 10, p. 999-1008, oct. 2011, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.3619866. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.3619866> (visité le 29/11/2022).
- [20] J. C. MAXWELL, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 1^{re} éd., W. D. NIVEN, éd. Cambridge University Press, 20 jan. 2011, ISBN : 978-1-108-01538-7. DOI : 10.1017/CB09780511710377. adresse : <https://www.cambridge.org/core/product/identifieur/9780511710377/type/book> (visité le 29/11/2022).
- [21] M. M. NICOLSON, « The interaction between floating particles », *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, t. 45, n° 2, p. 288-295, avr. 1949, ISSN : 0305-0041, 1469-8064. DOI : 10.1017/S0305004100024841. adresse : https://www.cambridge.org/core/product/identifieur/S0305004100024841/type/journal_article (visité le 29/11/2022).
- [22] « Calculateur de Tension Superficielle d'une Aiguille à Flottante à Hydraulique Fluides Convertisseurs d'unités En Ligne ». (s. d.), adresse : <https://www.translatorscafe.com/unit-converter/fr-FR/calculator/surface-tension/> (visité le 07/11/2022).
- [23] « Compressible Lattice Boltzmann Method and Applications | SpringerLink ». (s. d.), adresse : https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-11842-5_3 (visité le 01/10/2022).
- [24] *Computational Physics*. s. d. adresse : <https://link-springer-com.accesdistant.sorbonne-universite.fr/book/10.1007/978-3-319-00401-3> (visité le 01/12/2022).
- [25] T. ONDARÇUHU, P. FABRE, E. RAPHAËL et M. VEYSSIÉ, « Specific properties of amphiphilic particles at fluid interfaces », *Journal de Physique*, t. 51, n° 14, p. 1527-1536, 1990, ISSN : 0302-0738. DOI : 10.1051/jphys:0199000510140152700. adresse : <http://www.edpsciences.org/10.1051/jphys:0199000510140152700> (visité le 29/11/2022).
- [26] REDUCIBLE, director, *Building Collision Simulations : An Introduction to Computer Graphics*, 19 jan. 2021. adresse : https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=eED4bSkYCB8&ab_channel=Reducible (visité le 03/10/2022).
- [27] F. BOWMAN, *Introduction to Bessel functions / by Frank Bowman*, eng. New York : Dover Publications, 1958, ISBN : 0-486-60462-4.

- [28] N. B. VARGAFTIK, B. N. VOLKOV et L. D. VOLJAK, « International Tables of the Surface Tension of Water », *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, t. 12, n° 3, p. 817-820, juill. 1983, ISSN : 0047-2689, 1529-7845. DOI : 10.1063/1.555688. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.555688> (visité le 29/11/2022).
- [29] N. D. VASSILEVA, D. van den ENDE, F. MUGELE et J. MELLEMA, « Capillary Forces between Spherical Particles Floating at a Liquid-Liquid Interface », *Langmuir*, t. 21, n° 24, p. 11 190-11 200, 1^{er} nov. 2005, ISSN : 0743-7463, 1520-5827. DOI : 10.1021/1a051186o. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/1a051186o> (visité le 29/11/2022).
- [30] D. VELLA et L. MAHADEVAN, « The 'Cheerios effect' », *American Journal of Physics*, t. 73, n° 9, p. 817-825, sept. 2005, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1898523. arXiv : cond-mat/0411688. adresse : <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0411688> (visité le 29/11/2022).
- [31] D. VELLA, P. D. METCALFE et R. J. WHITTAKER, « Equilibrium conditions for the floating of multiple interfacial objects », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 549, p. 215, -1 8 fév. 2006, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/S0022112005008013. adresse : http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112005008013 (visité le 29/11/2022).
- [32] D. J. R. VELLA, « The Fluid Mechanics of Floating and Sinking », p. 143, s. d.