

# Simulation Numérique de *l'Effet de Cheerios*

Baptiste BRAUN-DELVOYE

Erdi ÇAN

Projet en Calcul Scientifique LU2ME232

Sorbonne Université, CMI Mécanique

6 décembre 2022



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Motivation
- 3 Modélisation de l'Effet de Cheerios
- 4 Méthodes Utilisées
  - Intégration de Verlet
  - Détection des Collisions
- 5 Algorithme du code
- 6 Résultats
- 7 Conclusion

# Introduction



# Motivation

- Nous aimons la mécanique des fluides
- Un projet trop ambitieux au départ...
- M. FULLANA nous a présenté l'Effet Cheerios
- Nous avons voulu simuler cet effet du mieux qu'on pouvait

# Modélisation de l'Effet de Cheerios[1]

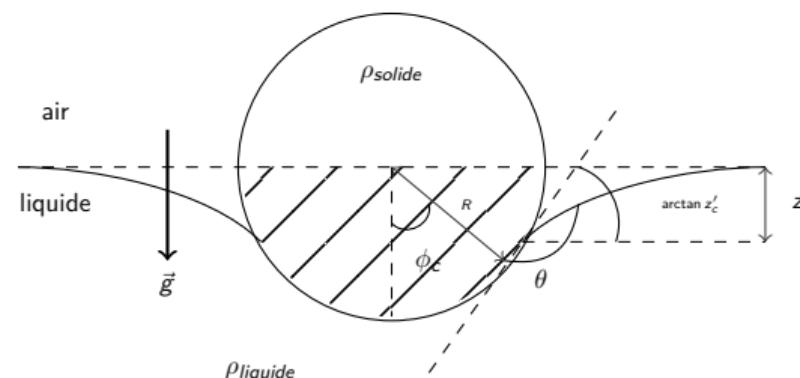


Figure – Géométrie d'une sphère reposant sur une interface liquide-gaz.

$$z'_c \sin \phi_c = B \left( \frac{2D - 1}{3} - \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{6} \cos^3 \theta \right) \equiv B\Sigma$$

Avec  $B$  le nombre de Bond linéarisé et  $D \equiv \rho_s / \rho_l$

## Modélisation de l'Effet de Cheerios[1]

$$E(I) = -2\pi\gamma R^2 b^2 \Sigma^2 K_0 \left( \frac{I}{L_c} \right)$$

Force d'interaction des objets flottants

$$-\frac{dE}{dl} = F(l) = -2\pi\gamma R B^{5/2} \Sigma^2 K_1 \left( \frac{l}{l_c} \right)$$

## Méthodes Utilisées- *Velocity Verlet*[2]

$$\text{DL}_3 \mathbf{x}(t+dt) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)(dt) + \frac{\mathbf{a}(t)}{2!} (dt)^2 + o(dt^3)$$

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m}$$

$$\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \frac{\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t + dt)}{2} dt$$

- D'ordre 2
- Erreur global  $O(dt^2)$
- Erreur au pas de temps  
 $t_n$   $o(e^{L t_n} dt^2)$

## Méthodes Utilisées-Colisions Bords

On peut décomposer le vecteur vitesse en :

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}' = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$$

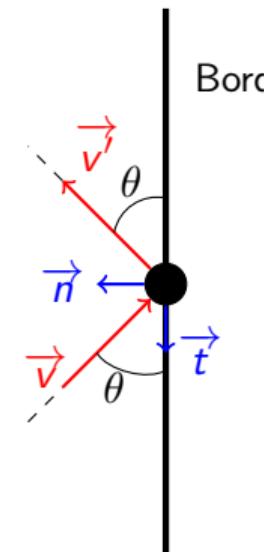


Figure – Schéma d'un rebond d'un objet sur un bord

## Méthodes Utilisées-Colisions Objet-Objet

On détecte des collisions quand nos objets se chevauchent. Puis on applique la conservation du momentum.

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|}$$

$$I = \frac{2v_{col}}{m_A + m_B}$$

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$$

$$\mathbf{v}'_A = \mathbf{v}_A - I m_B \mathbf{c}$$

$$v_{col} = \mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{v}'_B = \mathbf{v}_B + I m_A \mathbf{c}$$

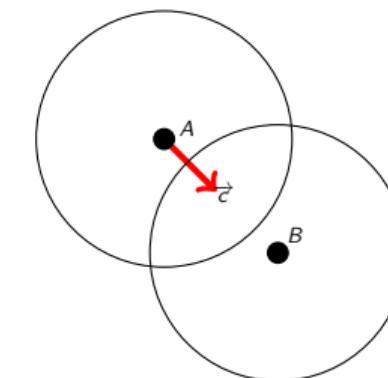


Figure – Schéma d'une collision

## Algorithme du code

Pour tout les pas de temps

    Pour tout les objets

        Pour tout les objets

            Si collision

                Applique collision

            Sinon

                Calcul force

            Met la force dans l'objet

Trouve nouvelles positions avec l'intégration de Verlet

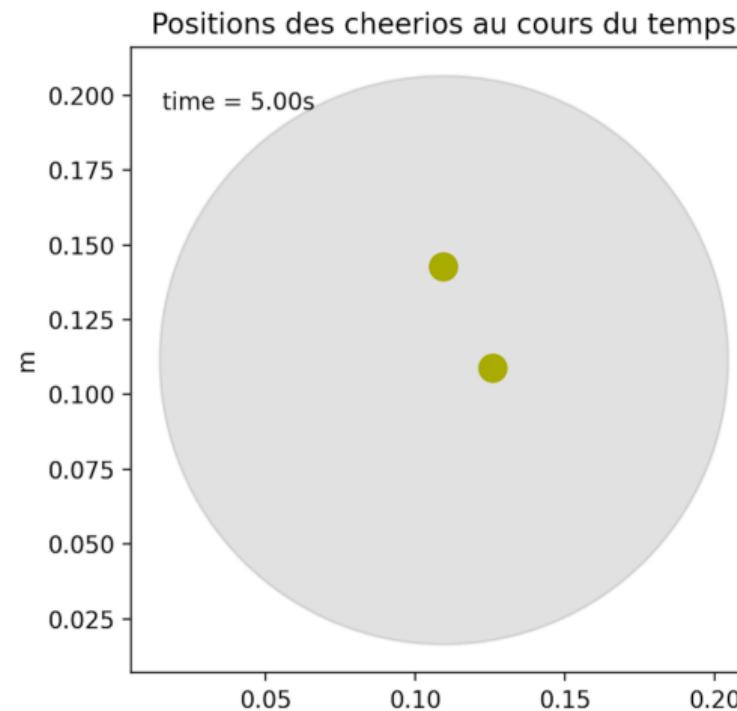
Écriture données à chaque itérations.

### Complexité

- Complexité du temps de  $O(NT n^2)$
- Complexité de l'espace de  $O(n)$

Avec  $n$  le nombre d'objets simulés

# Résultats



## Conclusion

- Programme fonctionnel, mais pour qu'un diamètre en même temps.
- Résultats concluants par rapport à des expériences.
- Améliorations de nos compétences en programmation, calcul numérique et en mécanique du fluide.

## Références I

- [1] D. VELLA et L. MAHADEVAN, "The "Cheerios effect", " *American Journal of Physics*, t. 73, n° 9, p. 817-825, sept. 2005, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1898523. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1898523> (visité le 29/11/2022).
- [2] F. CRIVELLI, "The Störmer-Verlet method," , p. 14, 8 mai 2008.
- [3] R. P. AGARWAL, K. PERERA et S. PINELAS, *An Introduction to Complex Analysis*. New York : Springer, 2011, 331 p., ISBN : 978-1-4614-0194-0.
- [4] F. BOWMAN, *Introduction to Bessel functions / by Frank Bowman*, eng. New York : Dover Publications, 1958, ISBN : 0-486-60462-4.

## Références II

- [5] G. K. BATCHELOR, *An introduction to fluid dynamics / by G.K. Batchelor,...* (Cambridge mathematical library), eng. Cambridge New York : Cambridge University Press, 2000, ISBN : 0-521-66396-2.
- [6] R. BENZI, S. SUCCI et M. VERGASSOLA, "Introduction to the Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics," in *Relaxation in Complex Systems and Related Topics*, sér. NATO ASI Series, I. A. CAMPBELL et C. GIOVANNELLA, éd., Boston, MA : Springer US, 1990, p. 329-334, ISBN : 978-1-4899-2136-9. DOI : 10.1007/978-1-4899-2136-9\_45. adresse :  
[https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2136-9\\_45](https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2136-9_45) (visité le 03/10/2022).

## Références III

- [7] D. CHAN, J. HENRY et L. WHITE, "The interaction of colloidal particles collected at fluid interfaces," *Journal of Colloid and Interface Science*, t. 79, n° 2, p. 410-418, fév. 1981, ISSN : 00219797. DOI : 10.1016/0021-9797(81)90092-8. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0021979781900928> (visité le 29/11/2022).
- [8] N. CHARLTON, "Drawing and Animating Shapes with Matplotlib," (s. d. ), adresse : <https://nickcharlton.net/posts/drawing-animating-shapes-matplotlib.html> (visité le 16/11/2022).

## Références IV

- [9] K. D. DANOV, R. DIMOVA et B. POULIGNY, "Viscous drag of a solid sphere straddling a spherical or flat surface," *Physics of Fluids*, t. 12, n° 11, p. 2711, 2000, ISSN : 10706631. DOI : 10.1063/1.1289692. adresse :  
<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/12/11/10.1063/1.1289692> (visité le 29/11/2022).
- [10] H. N. DIXIT et G. M. HOMSY, "Capillary effects on floating cylindrical particles," *Physics of Fluids*, t. 24, n° 12, p. 122102, déc. 2012, ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/1.4769758. adresse :  
<http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4769758> (visité le 29/11/2022).

## Références V

- [11] D.-x. FENG et A. V. NGUYEN, "Contact angle variation on single floating spheres and its impact on the stability analysis of floating particles," *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, t. 520, p. 442-447, mai 2017, ISSN : 09277757. DOI : 10.1016/j.colsurfa.2017.01.057. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0927775717300948> (visité le 29/11/2022).
- [12] M. A. FORTES, "Attraction and repulsion of floating particles," *Canadian Journal of Chemistry*, t. 60, n° 23, p. 2889-2895, 1<sup>er</sup> déc. 1982, ISSN : 0008-4042, 1480-3291. DOI : 10.1139/v82-414. adresse : <http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/v82-414> (visité le 29/11/2022).

## Références VI

- [13] W. GIFFORD et L. SCRIVEN, "On the attraction of floating particles," *Chemical Engineering Science*, t. 26, n° 3, p. 287-297, mars 1971, ISSN : 00092509. DOI : 10.1016/0009-2509(71)83003-8. adresse :  
<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0009250971830038> (visité le 29/11/2022).
- [14] J. B. KELLER, "Surface tension force on a partly submerged body," *Physics of Fluids*, t. 10, n° 11, p. 3009-3010, nov. 1998, ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/1.869820. adresse :  
<http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.869820> (visité le 29/11/2022).

## Références VII

- [15] P. A. KRALCHEVSKY et K. NAGAYAMA, "Capillary interactions between particles bound to interfaces, liquid films and biomembranes," *Advances in Colloid and Interface Science*, t. 85, n° 2-3, p. 145-192, mars 2000, ISSN : 00018686. DOI : 10.1016/S0001-8686(99)00016-0. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0001868699000160> (visité le 29/11/2022).
- [16] J. -. LOUDET, M. QIU, J. HEMAUER et J. J. FENG, "Drag force on a particle straddling a fluid interface : Influence of interfacial deformations," *The European Physical Journal E*, t. 43, n° 2, p. 13, fév. 2020, ISSN : 1292-8941, 1292-895X. DOI : 10.1140/epje/i2020-11936-1. adresse : <http://link.springer.com/10.1140/epje/i2020-11936-1> (visité le 29/11/2022).

## Références VIII

- [17] E. H. MANSFIELD, H. R. SEPANGI et E. A. EASTWOOD, "Equilibrium and mutual attraction or repulsion of objects supported by surface tension," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, t. 355, n° 1726, p. 869-919, 15 mai 1997, ISSN : 1364-503X, 1471-2962. DOI : 10.1098/rsta.1997.0049. adresse : <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1997.0049> (visité le 29/11/2022).

## Références IX

- [18] A. MARCHAND, J. H. WEIJS, J. H. SNOEIJER et B. ANDREOTTI, "Why is surface tension a force parallel to the interface ?" *American Journal of Physics*, t. 79, n° 10, p. 999-1008, oct. 2011, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.3619866. adresse :  
<http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.3619866> (visité le 29/11/2022).
- [19] J. C. MAXWELL, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 1<sup>re</sup> éd., W. D. NIVEN, éd. Cambridge University Press, 20 jan. 2011, ISBN : 978-1-108-01538-7. DOI : 10.1017/CBO9780511710377. adresse :  
<https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511710377/type/book> (visité le 29/11/2022).

## Références X

- [20] M. M. NICOLSON, "The interaction between floating particles," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, t. 45, n° 2, p. 288-295, avr. 1949, ISSN : 0305-0041, 1469-8064. DOI : 10.1017/S0305004100024841. adresse : [https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0305004100024841/type/journal\\_article](https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0305004100024841/type/journal_article) (visité le 29/11/2022).
- [21] "Calculateur de Tension Superficielle d'une Aiguille « Flottante » ■ Hydraulique – Fluides ■ Convertisseurs d'unités En Ligne," (s. d. ), adresse : <https://www.translatorscafe.com/unit-converter/fr-FR/calculator/surface-tension/> (visité le 07/11/2022).

## Références XI

- [22] "Compressible Lattice Boltzmann Method and Applications | SpringerLink," (s. d. ), adresse :  
[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-11842-5\\_3](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-11842-5_3) (visité le 01/10/2022).
- [23] *Computational Physics*. s. d. adresse :  
<https://link-springer-com.accesdistant.sorbonne-universite.fr/book/10.1007/978-3-319-00401-3> (visité le 01/12/2022).

## Références XII

- [24] T. ONDARÇUHU, P. FABRE, E. RAPHAËL et M. VEYSSIÉ, "Specific properties of amphiphilic particles at fluid interfaces," *Journal de Physique*, t. 51, n° 14, p. 1527-1536, 1990, ISSN : 0302-0738. DOI : 10.1051/jphys:0199000510140152700. adresse : <http://www.edpsciences.org/10.1051/jphys:0199000510140152700> (visité le 29/11/2022).
- [25] J. ONISHI, A. KAWASAKI, Y. CHEN et H. OHASHI, "Lattice Boltzmann simulation of capillary interactions among colloidal particles," *Computers & Mathematics with Applications*, t. 55, n° 7, p. 1541-1553, avr. 2008, ISSN : 08981221. DOI : 10.1016/j.camwa.2007.08.027. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0898122107006463> (visité le 29/11/2022).

## Références XIII

- [26] REDUCIBLE, director, *Building Collision Simulations : An Introduction to Computer Graphics*, 19 jan. 2021. adresse : [https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=eED4bSkYCB8&ab\\_channel=Reducible](https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=eED4bSkYCB8&ab_channel=Reducible) (visité le 03/10/2022).
- [27] F. BOWMAN, *Introduction to Bessel functions / by Frank Bowman*, eng. New York : Dover Publications, 1958, ISBN : 0-486-60462-4.
- [28] N. B. VARGAFTIK, B. N. VOLKOV et L. D. VOLJAK, "International Tables of the Surface Tension of Water," *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, t. 12, n° 3, p. 817-820, juill. 1983, ISSN : 0047-2689, 1529-7845. DOI : 10.1063/1.555688. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.555688> (visité le 29/11/2022).

## Références XIV

- [29] N. D. VASSILEVA, D. van den ENDE, F. MUGELE et J. MELLEMA, "Capillary Forces between Spherical Particles Floating at a Liquid-Liquid Interface," *Langmuir*, t. 21, n° 24, p. 11190-11200, 1<sup>er</sup> nov. 2005, ISSN : 0743-7463, 1520-5827. DOI : 10.1021/la051186o. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/la051186o> (visité le 29/11/2022).
- [30] D. VELLA et L. MAHADEVAN, "The 'Cheerios effect'," *American Journal of Physics*, t. 73, n° 9, p. 817-825, sept. 2005, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1898523. arXiv : cond-mat/0411688. adresse : <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0411688> (visité le 29/11/2022).

## Références XV

- [31] D. VELLA, P. D. METCALFE et R. J. WHITTAKER, "Equilibrium conditions for the floating of multiple interfacial objects," *Journal of Fluid Mechanics*, t. 549, p. 215, -1 8 fév. 2006, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/S0022112005008013. adresse : [http://www.journals.cambridge.org/abstract\\_S0022112005008013](http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112005008013) (visité le 29/11/2022).
- [32] D. J. R. VELLA, "The Fluid Mechanics of Floating and Sinking,", p. 143, s. d.